

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

April 1974

KFK 1748

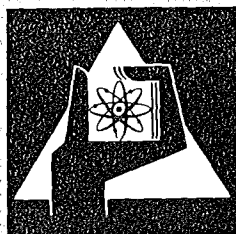
Abteilung Datenverarbeitung und Instrumentierung

**Stochastische Prozesse eines Kollektivs von
radioaktiven Zerfallsketten**

Teil II

**Zweidimensionale stochastische Prozesse
für radioaktive Zerfallsketten mit zwei instabilen Zuständen**

H. Wenzelburger



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Abteilung Datenverarbeitung und
Instrumentierung

KFK - 1748

Stochastische Prozesse eines Kollektivs von
radioaktiven Zerfallsketten

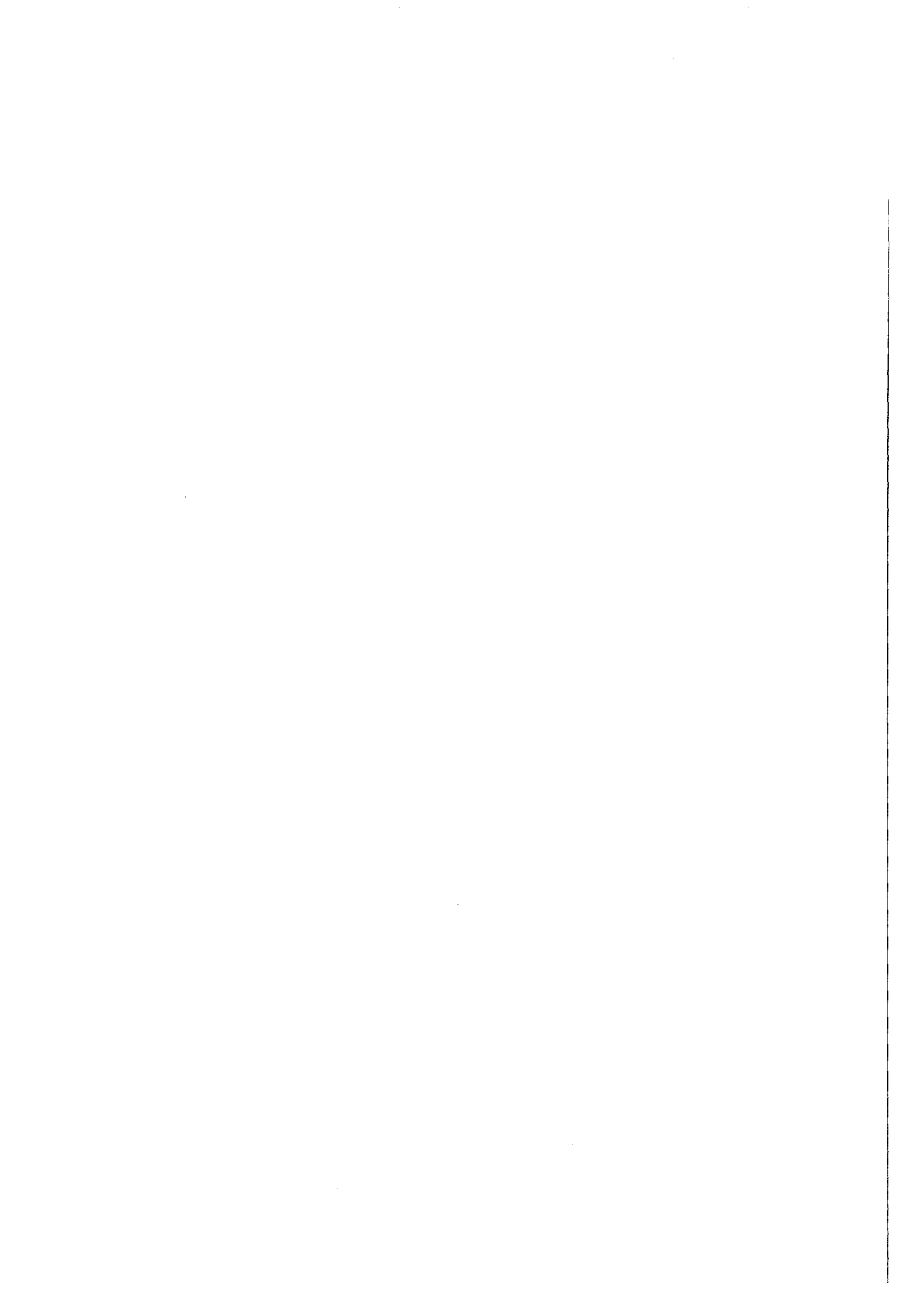
Teil II

Zweidimensionale stochastische Prozesse
für radioaktive Zerfallsketten mit zwei instabilen Zuständen

Heinz W e n z e l b u r g e r

Manuskript zum Druck eingereicht
am 8. Februar 1974

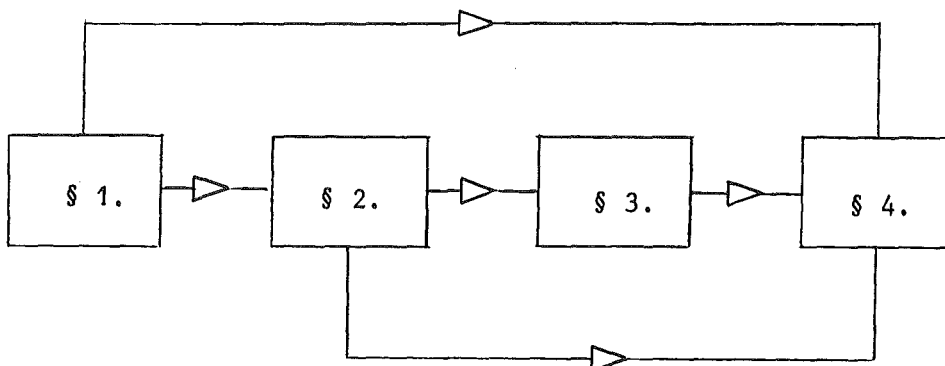
Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe



<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Zusammenfassung	0-3
<u>§ 0.</u>	
§ 0.0 Notation	0-5
§ 0.1 Abkürzungen	0-6
§ 0.2 Literaturverzeichnis	0-7
<u>§ 1. Einführung</u>	
§ 1.0 Aufgabenstellung und Motivierung	1-1
§ 1.1 Das probabilistische Modell und seine Voraussetzungen	1-3
§ 1.2 Die speziellen Kettenprozesse $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$	1-11
§ 1.3 Zur Konstruktion eines probabilistischen Modells für den allgemeinen Kettenprozeß (μ, ν)	1-20
§ 1.4 Einführung in den Kettenprozeß (μ, ν) anhand des Kettenprozesses $(2, 2)$	1-23
<u>§ 2. Der Kettenprozeß $2(1, \nu)$ oder (X, Y) - Prozeß</u>	
§ 2.0 Vorbemerkungen	2-1
§ 2.1 DGL-System für die Übergangs-Wahrscheinlichkeiten des (X, Y) - Prozesses	2-3
§ 2.2 Überführung des DGL-Systems für die Übergangs-Wahrscheinlichkeiten des (X, Y) - Prozesses in eine partielle DGL für eine erzeugende Funktion	2-11
§ 2.3 Direkte Herleitung der erzeugenden Funktion des (X, Y) - Prozesses nach einer Operator-Methode von C. Palm	2-15
§ 2.4 Lösung der partiellen DGL für die erzeugende Funktion des (X, Y) - Prozesses	2-22
§ 2.5 Berechnung der Übergangs-Wahrscheinlichkeiten des (X, Y) - Prozesses aus seiner erzeugenden Funktion	2-32

§ 3.	Der Summenprozeß $(2, \nu)$ oder Z-Prozeß	
<hr/>		
§ 3.0	Vorbemerkungen	3-1
§ 3.1	Berechnung einer repräsentativen Wahrscheinlichkeits- Verteilung des Z-Prozesses aus deren erzeugender Funktion	3-3
§ 3.2	Berechnung der repräsentativen Wahrscheinlichkeits- Verteilung des Z-Prozesses über die Methode der Hilfsvariablen	3-7
§ 3.3	Berechnung der repräsentativen Wahrscheinlichkeits- Verteilung des Z-Prozesses über eine Variablen- Transformation	3-13
§ 3.4	Konstruktion des Z-Prozesses	3-15
§ 3.5	Nachweis, daß der Z-Prozeß die Markow-Eigenschaft nicht besitzt	3-21
§ 4.	Zur Struktur des allgemeinen Kettenprozesses (μ, ν)	
<hr/>		
§ 4.0	Vorbemerkungen	4-1
§ 4.1	Konstruktion des Kettenprozesses $\nu(\mu, 1)$	4-2
§ 4.2	Eine repräsentative Wahrscheinlichkeits-Verteilung des Summenprozesses (μ, ν)	4-4
§ 4.3	Konstruktion der erzeugenden Funktion des Ketten- prozesses $\mu(1, \nu)$ mit der analytischen Methode	4-8
§ 4.4	Konstruktion der erzeugenden Funktion des Ketten- prozesses $\mu(1, \nu)$ mit der kombinatorischen Methode	4-23

Logischer Zusammenhang der Abschnitte



Zusammenfassung

Wir betrachten hier ein Kollektiv von ν gleichartigen Atomen (Nukleiden), die sich zu Beginn der Beobachtungen alle im Anfangszustand E_0 befinden und im Laufe der Zeit unabhängig voneinander gemäß der Kette



in den Endzustand E_μ zerfallen. Dabei ist λ_i die Zerfallskonstante des Zustandes E_i ($i=0,1,\dots,\mu-1$).

Üblicherweise wird ein derartiges Kollektiv durch ein probabilistisches Modell beschrieben, das ein Spezialfall des reinen Geburtsprozesses ist. Dieses Modell enthält aber als einschränkende Voraussetzung, daß die Anzahl ν der Nukleide recht groß ist.

Wir konstruieren in dieser Arbeit ein Modell, das für beliebige ν gilt. Dabei treten je nach Wahl der Prozeßvariablen stochastische Prozesse auf, welche die Markow-Eigenschaft besitzen bzw. nicht besitzen.

Den Fall zweier instabiler Zustände ($\mu=2$) haben wir im Detail ausgearbeitet und den allgemeinen Fall soweit untersucht, daß dessen Struktur sichtbar wird.

Alle wesentlichen Ergebnisse leiten wir zunächst mit einer "analytischen" und dann mit einer "kombinatorischen" Methode her.

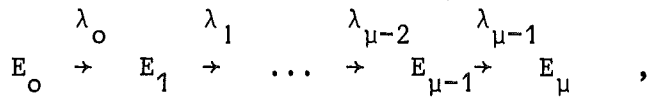
Der Ausgangspunkt der analytischen Methode ist für die gewählten zufälligen Variablen ein System infinitesimaler Übergangswahrscheinlichkeiten und der Ausgangspunkt für die kombinatorische Methode eine bekannte oder leicht berechenbare Wahrscheinlichkeitsverteilung, aus der sich die gesuchten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ermitteln lassen.

Mit dem hier für den radioaktiven Zerfall konstruierten mathematischen Modell können vermutlich auch noch andere Phänomene wie z.B. in der Bedientheorie beschrieben werden.

Stochastic Processes of a Collection of Radioactive Chains, Part II
 Two-dimensional Stochastic Processes of Radioactive Chains with Two
 Unstable States

Abstract

We consider a collection of ν identical atoms (nuclides) having the same initial states E_0 and decaying independently of one another in the course of time to the end states E_μ according to the chain



λ_i being the decay constant of the state E_i ($i=0,1,\dots,\mu-1$) .

In general this collection is described by a probabilistic model which is a special case of the pure birth process. In such a model the number ν of nuclides is assumed to be very large .

In the present work we drop this assumption and derive a model for arbitrary ν . Dependent on the choice of random variables, we get Markovian or non - Markovian stochastic processes.

We discuss in detail the case of two unstable states ($\mu=2$) and study the general case in sufficient detail to reveal its structure.

We deduce all essential results first with an "analytical method" and then with a "combinatorial method" .

The starting point for the analytical method is a system of infinitesimal transition probabilities for the corresponding random variables.

The starting point for the combinatorial method is a known or easily computable probability distribution from which we can get the wanted probability distributions .

We believe that our model is not restricted to radioactive series decay. It may have applications e.g. in the stochastic theory of service systems .

§ 0. Bemerkungen zur Notation, Verzeichnis der benutzten Abkürzungen

§ 0.0 Notation

Die Numerierung der Gleichungen beginnt in jedem Teilparagrafen von vorne.

Wird in einem Teilparagrafen eine Gleichung aus einem anderen Teilparagrafen zitiert, wird dessen Kennung vorangestellt. So bedeutet z.B. Gl. (2.4-28) die Gleichung (28) aus § 2.4.

Tabellen werden, da sie nur vereinzelt vorkommen, paragrafenweise numeriert.

Argumente von Funktionen werden in runde Klammern gesetzt. Dies heißt z.B. für die Exponentialfunktion \exp

$$\exp(-\alpha(t-s)) \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha(t-s)) .$$

Zufällige Variable werden immer mit großen lateinischen Buchstaben und deren Werte (Realisationen) mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Sind die zufälligen Variablen ganzzahlig, wie fast durchweg in dieser Arbeit, nehmen wir für deren Realisationen nicht die den Großbuchstaben entsprechenden Kleinbuchstaben, sondern die Buchstabenmenge $\{ i, j, k, l, m, n \}$.

Es ließ sich nicht vermeiden, auch andere als zufällige Größen mit Großbuchstaben zu benennen. Dies gilt insbesondere für zufällige Ereignisse, für die wir ebenfalls lateinische Großbuchstaben verwenden.

Wir bezeichnen mit griechischen Buchstaben die Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen sowie gelegentlich auch die Indizes von Summen oder Produkten.

Für nichtnegative ganzzahlige zufällige Variable W_i (große lateinische Buchstaben) schreiben wir w_i (kleine lateinische Buchstaben) für die in deren erzeugenden Funktion zugeordneten nichtzufälligen Variablen.

Benutzen wir im Text andere als die oben festgelegten Konventionen, weisen wir an der betreffenden Stelle darauf hin.

§ 0.1 Abkürzungen

Cf	charakteristische Funktion
DGl	Differentialgleichung
pDGl	partielle Differentialgleichung
Gf	(Wahrscheinlichkeits)erzeugende Funktion, generating function
Gl	Gleichung
V	gewöhnliche Variable
\vec{V}	gewöhnliche Vektorvariable
zV	zufällige Variable
$z\vec{V}$	zufälliger Vektor
Vd	Verteilungsdichte
Vf	Verteilungsfunktion
W	Wahrscheinlichkeit
WV	Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Mehrzahl der obigen Abkürzungen bilden wir, indem wir an die betreffende Abkürzung ein "n" anhängen. So z.B.

DGln	Differentialgleichungen
Wn	Wahrscheinlichkeiten

Außerdem verwenden wir die Abkürzungen auch in zusammengesetzten Begriffen wie

Übergangs-Wn	Übergangswahrscheinlichkeiten
Rand-Vf	Randverteilung(sfunktion)

Das Ende eines Beweises kennzeichnen wir mit \square und für Gleichheit per definitionem schreiben wir $:=$.

§ 0.2 Literaturverzeichnis

- [1] Bartlett, M.S.
Some evolutionary stochastic processes.
J.R. Statist. Soc. B, 11, (1949), p 211 .
- [2] Bartlett, M.S.
An Introduction to stochastic processes. Cambridge (1956) .
- [3] Cox, D.R. and Miller, H.D.
The Theory of stochastic processes. Methuen, London (1968) .
- [4] Evans, R.D.
The atomic nucleus. McGraw-Hill, New York (1955) .
- [5] Feller, W.
An introduction to probability theory and its applications.
Vol. I, Sec. ed., Wiley, NewYork (1965) .
- [6] Feller, W.
An introduction to probability theory and its applications.
Vol. II, Wiley, New York (1966) .
- [7] Feller, W.
On the theory of stochastic processes with particular reference
to applications. Berkeley Symposium on Math. Statistics and Prob.
1945/46, p 403, (1949) .
- [8] Good, I.J.
Saddle-point methods for the multinomial distribution.
Ann. Math. Stat., Vol 58, p 861, (1957) .
- [9] Kamke, E.
Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1 .
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1944) .
- [10] Karlin, S.
A first course in stochastic processes.
Academic Press, New York (1969) .
- [11] Lange, O.
Statistical estimation of parameters in Markov processes.
Colloquium Mathematicum III, (1955), p 147 .

- [12] Palm, C.
Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr. Ericsson Technics
No. 44. Stockholm (1943), p 1-189.
- [13] Parzen, E.
Stochastic processes. Holden-Day, San Francisco (1967).
- [14] Rényi, A.
Wahrscheinlichkeitsrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin (1962).
- [15] Smirnow, W.I.
Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV. VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften, Berlin (1958).
- [16] Takács, L.
Stochastic processes, Problems and Solutions. Methuen, London (1962).
- [17] Takács, L.
Introduction to the theory of queues. Oxford University Press,
New York (1962).
- [18] Wenzelburger, H.
Stochastische Prozesse eines Kollektivs von radioaktiven Zerfalls-
ketten, Teil I. Karlsruhe (1972), unveröffentlicht.

Nachtrag

- [19] Gnedenko, B.W. und Kowalenko, I.N.
Einführung in die Bedienungstheorie. Oldenbourg, München (1971).

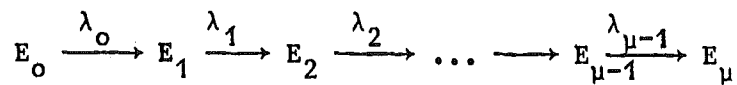
Herrn Dipl.-Math. D. Sanitz danke ich für die Durchsicht einer der
ersten Versionen des Manuskripts und die Ermutigung, die kombinatorische
Methode vollständig durchzuführen.

§ 1. Einführung

§ 1.0 Aufgabenstellung und Motivierung

Viele Ergebnisse der Atom- und Kernphysik werden durch das Studium radioaktiver Zerfallsketten gewonnen.

Meist beobachtet man hierzu das zeitliche Verhalten eines Kollektivs aus ν gleichartigen radioaktiven Atomen, von denen jedes gemäß der Zerfallsreihe



von einem Anfangszustand E_0 in einen stabilen Endzustand E_{μ} übergeht. Wir können dabei, ohne die Allgemeinheit der folgenden Untersuchungen zu beschränken, annehmen, daß bei jedem Übergang $E_i \rightarrow E_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, \mu-1$) ein Teilchen ϵ_i emittiert wird.

Betrachten wir nun die Aufgabe des Experimentalphysikers. Sie besteht gewöhnlich darin, aus der Art und Anzahl der Teilchen ϵ_i , die er in einem oder mehreren aufeinanderfolgenden Zeitintervallen mißt, auf die Zerfallskonstanten λ_i zu schließen.

Mitunter interessiert ihn auch die Anzahl ν der radioaktiven Atome zu Beginn der Messung.

Da es sich beim radioaktiven Zerfall um einen statistischen Vorgang handelt, braucht er hierzu neben der Meßapparatur, welche die emittierten Teilchen registriert, ein Auswerteverfahren, mit dem er die unbekannt Parameter aus den gemessenen Daten berechnen kann.

Allgemein kann aber ein solches Auswerteverfahren nur aufgestellt werden, wenn für den betreffenden statistischen Vorgang ein probabilistisches Modell vorliegt.

Man beachte jedoch, daß dieses probabilistische Modell nicht mit dem Auswerteverfahren identisch ist. Vielmehr bildet es die theoretische Grundlage für das Auswerteverfahren. Dabei ist es häufig leichter, für einen physikalischen Vorgang ein probabilistisches Modell als für ein gegebenes probabilistisches Modell ein Auswerteverfahren zu konstruieren.

Für Atome mit zwei und mehr instabilen Zuständen gibt es, soweit uns bekannt, keine exakten probabilistischen Modelle und daher auch keine entsprechenden Auswerteverfahren.

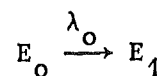
In allen steckt, wenn auch meist unausgesprochen, die Annahme, daß die Anzahl ν der Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeheuer groß ist (Evans [4]).

Lediglich für Kollektive von ν Atomen mit einem instabilen Zustand existiert für beliebiges ν ein exaktes probabilistisches Modell, der sog. Binomialprozeß. Er ist ein Spezialfall des Geburtsprozesses, der in der Literatur, siehe z.B. Parzen [13], ausführlich behandelt wird.

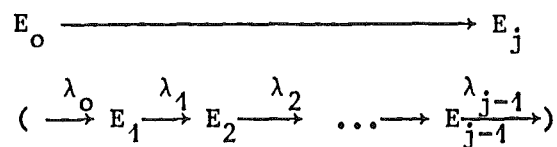
Ziel des Teils II dieser Arbeit ist es, dieses Modell auf zwei instabile Zustände und damit auf zwei Übergänge $E_i \longrightarrow E_{i+1}$ ($i = 0, 1$) zu erweitern.

Es wird aber auch der allgemeine Fall mit μ instabilen Zuständen untersucht, jedoch nur soweit, als notwendig ist, um die Struktur des Falles $\mu = 2$ aufzudecken.

In Teil I dieser Arbeit haben wir Kollektive von ν radioaktiven Atomen mit einfachen direkten Übergängen



d.h. den Binomialprozeß und als Verallgemeinerung Kollektive mit einfachen indirekten Übergängen



behandelt.

Wir haben uns bemüht, Teil II so abzufassen, daß er unabhängig von Teil I gelesen werden kann.

Mit dem in Teil I und II dieser Arbeit beschriebenen probabilistischen Modell verfügt der Experimentalphysiker natürlich noch nicht über ein

Auswerteverfahren, mit dem er Daten aus dem radioaktiven Zerfall bei kleinem ν analysieren kann.

Jedoch ist es nun auf der Grundlage dieses Modells möglich, ein solches Auswerteverfahren zu entwickeln.

Das hier konstruierte probabilistische Modell ist sicherlich auch noch auf andere Phänomene als die des radioaktiven Zerfalls anwendbar.

Insbesondere trifft dies auf Erscheinungen zu, die in der Bedienungstheorie [19] bearbeitet werden.

§ 1.1 Das probabilistische Modell und seine Voraussetzungen

a) Voraussetzungen

Um uns kurz ausdrücken zu können, bezeichnen wir von nun an als einen Kettenprozeß (μ, ν) ein System von ν gleichartigen Atomen (Nukleiden), deren jedes im Laufe der Zeit $(\mu+1)$ verschiedene Zustände einnimmt.

Das probabilistische Modell, das wir für diesen Kettenprozeß konstruieren, beruht auf folgenden Voraussetzungen:

I. Jedes der ν Atome befindet sich zur Zeit $t = 0$ in demselben Anfangszustand E_0 .

II. Mit der Zeit durchläuft jedes der ν Atome unabhängig von den übrigen Atomen eine Folge von μ Zuständen E_i

$$E_0 \xrightarrow{\lambda_0} E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \xrightarrow{\lambda_2} \dots \xrightarrow{\lambda_{\mu-2}} E_{\mu-1} \xrightarrow{\lambda_{\mu-1}} E_\mu$$

Dabei sind nur Übergänge der Form $E_i \longrightarrow E_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, \mu-1$) erlaubt. Der Zustand E_μ heißt Endzustand.

III. Die W (= Wahrscheinlichkeit), daß ein Atom im infinitesimalen Zeitintervall $(t, t+\Delta t)$ vom Zustand E_i zum Zustand E_{i+1} übergeht, bleibt konstant, solange es sich im Zustand E_i befindet und lautet

$$P [E_{i+1}(t+\Delta t) | E_i(t)] = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, \mu-1$$

D.h. die Zerfalls- W eines Atoms im jeweiligen Zustand E_i ist unabhängig von dessen Alter. Die Parameter λ_i werden wie üblich

Zerfalls- oder Abfallskonstanten genannt und für das Symbol $o(\Delta t)$ gilt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 .$$

Diese Voraussetzungen enthalten keinerlei physikalische Annahmen über den Mechanismus des radioaktiven Zerfalls.

In der Lehrbuchliteratur (Takács [16], p 41 und p 94; Takács [17], p 8; Renyi [14], p 104) wird, wenn auch meist etwas verstreut, diskutiert, wie man aus den obigen Annahmen probabilistische Modelle für die Kettenprozesse $(1, \nu)$ und $(\mu, 1)$ erhalten kann.

Da wir diesen Gegenstand eingehend in Teil I dieses Berichts [18] behandelt haben, nehmen wir diese beiden Modelle und nicht die tiefer liegenden Voraussetzungen I-III zum Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen zum Kettenprozeß (μ, ν) .

b) Art des probabilistischen Modells

Da der Kettenprozeß (μ, ν) ein Vorgang ist, der sich zeitlich entwickelt, können wir ihn nicht mit einer einzigen zV (= zufälligen Variablen) vollständig beschreiben. Vielmehr benötigen wir hierzu eine Familie von zVn mit dem Zeitparameter t als Index.

Das probabilistische Modell des Kettenprozesses (μ, ν) ist also ein stochastischer Prozeß $\{\vec{W}(t); \text{für alle } t \in [0, \infty)\}$, wobei $\vec{W}(t)$ eine geeignet gewählte Prozeßvariable ist. Diese ist hier meist, wie bereits angedeutet, ein zV (= zufälliger Vektor) $\vec{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t))$.

Natürlich hängt der Typ eines stochastischen Prozesses von der Art der zufälligen Variablen ab.

Häufig erleichtert es die Untersuchungen, wenn man denselben physikalischen Vorgang mit verschiedenen Prozeßvariablen beschreibt. Dies besonders dann, wenn die Prozeßvariable durch das Experiment vorgegeben ist. Gewöhnlich fällt nämlich diese Variable nicht mit derjenigen zusammen, deren stochastischer Prozeß am leichtesten zu konstruieren ist.

Für alle wesentlichen Wn des Kettenprozesses (μ, ν) und die statistische Analyse der aus ihm erhaltenen Meßdaten genügt es, wenn man für jede beliebige endliche Folge von k Zeitpunkten, etwa $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, die gemeinsame WV (= Wahrscheinlichkeitsverteilung)

$$P \left[\vec{W}(t_1) = \vec{1}_1, \vec{W}(t_2) = \vec{1}_2, \dots, \vec{W}(t_k) = \vec{1}_k \right], \vec{1}_m := (1_{m1}, 1_{m2}, \dots, 1_{mm}) \quad (1)$$

der k zufälligen Vektoren $\vec{W}(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) kennt.

Bei vielen Fragestellungen kann man sich auf die einfachere WV

$$P \left[\vec{W}(t) = \vec{1} \right] \quad (2)$$

zu dem fixen Zeitpunkt t beschränken.

Wie man diese Wn berechnet, hängt vom speziellen Typ des stochastischen Prozesses $\{\vec{W}(t); t \in [0, \infty)\}$ ab. Unabhängig vom Typ ist aber die zuletzt angegebene WV leichter als ihre Vorgängerin zu ermitteln, da man bei ihr nicht die gegenseitige stochastische Abhängigkeit mehrerer zufälliger Veränderlicher beachten muß.

Für die Abschätzung der unbekannt Parameter des Kettenprozesses (μ, ν) mache man sich klar, welchen Versuchsbedingungen die beiden Wn entsprechen.

Die erste WV läßt sich auf ein Experiment anwenden, das vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = t_k$ nur einmal abläuft und die Größe $\vec{W}(t)$ in genau k Zeitpunkten gemessen wird.

Die zweite WV gilt für ein Experiment, das etwa k mal wiederholt wird, die Größe $\vec{W}(t)$ aber jedesmal nur zu einem einzigen Zeitpunkt $t = s$ im Zeitintervall $(0, s)$ gemessen wird. (Für den allgemeinen Fall vgl. Lange [11].)

c) Definition der Prozeßvariablen

Bei vielen Überlegungen ist es hilfreich, wenn man sich den Kettenprozeß (μ, ν) nicht als ein System von ν Atomen sondern als ein System von ν Ketten ($E_j^{(k)} := E_j$, j ter Zustand der k ten Kette)

$$E_0^{(1)} \longrightarrow E_1^{(1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_i^{(1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{\mu-1}^{(1)} \longrightarrow E_\mu^{(1)}$$

.....

(3)

$$E_0^{(k)} \longrightarrow E_1^{(k)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{E_i^{(k)}} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{\mu-1}^{(k)} \longrightarrow E_\mu^{(k)} \quad k \text{ te Kette im Zustand}$$

E_i

.....

$$E_0^{(\nu)} \longrightarrow E_1^{(\nu)} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_i^{(\nu)} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{\mu-1}^{(\nu)} \longrightarrow E_\mu^{(\nu)}$$

vorstellt. Der Zustand einer einzelnen solchen Kette ist dann identisch mit dem Zustand, den das betreffende Atom innerhalb seiner Zerfallsreihe einnimmt.

Wir bedienen uns dieses Bilds, um unsere Prozeßvariablen zu definieren. Dabei lehnen wir uns an die beiden Typen von Prozeßvariablen an, die in der Literatur in den Modellen für die Kettenprozesse $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$ gebraucht werden.

Wir benutzen nach dem Muster des Kettenprozesses $(\mu, 1)$ (s. § 1.2)

- (a) den $\vec{z} \vec{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_\nu(t))$, dessen i te Komponente $Z_i(t)$ eine Eigenschaft der i ten Kette zum Zeitpunkt t angibt. Es sei $Z_i(t) = k_i$, wenn sich die i te Kette zum Zeitpunkt t im Zustand E_{k_i} befindet.

Ferner benutzen wir nach dem Muster des Kettenprozesses $(1, \nu)$ (s. § 1.2)

(b) den $\vec{zV} \vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_{\mu-1}(t))$, dessen i te Komponente den Zustand E_{i+1} aller Ketten beschreibt.

Es sei $X_k(t) = i_k$, wenn bis zum Zeitpunkt t genau i_k Ketten vom Zustand E_k in den Zustand E_{k+1} übergegangen sind.

Beide zVn lassen sich auch noch etwas anders interpretieren, wenn man annimmt, daß bei jedem Übergang in einer Kette vom Zustand E_i zum Zustand E_{i+1} ein Teilchen ϵ_i emittiert wird. Dann ist

(a) $Z_i(t) = k_i$, wenn aus der i ten Kette im Zeitintervall $(0, t)$ genau k_i verschiedene Teilchen emittiert worden sind

und

(b) $X_k(t) = i_k$, wenn aus allen Ketten zusammen im Zeitintervall $(0, t)$ genau i_k Teilchen vom Typ ϵ_k emittiert worden sind.

Zwischen den Komponenten des $\vec{zV} \vec{Z}(t)$ und den Komponenten des $\vec{zV} \vec{X}(t)$ besteht der Zusammenhang

$$Z(t) := \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} X_j(t) =: X(t) \quad (4)$$

Er ist eine unmittelbare Folge der zuletzt gegebenen Interpretation der $zVn \vec{Z}(t)$ und $\vec{X}(t)$. Wenn es nur auf den Wert der Summe ankommt, schreiben wir

$$S(t) := Z(t) = X(t) \quad (5)$$

Um die Beziehung Gl (4) zu veranschaulichen, betrachten wir folgende Realisation des aus 3 Ketten bestehenden Kettenprozesses $(3, \nu)$ zum Zeitpunkt t :

$$\begin{array}{l} E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \underline{E_2} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_\mu \\ E_0 \longrightarrow \underline{E_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_\mu \\ E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow \underline{E_4} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_\mu \end{array} \quad (6)$$

Es ist für die erste Kette $Z_1(t) = 2$, da sie sich im Zustand E_2 befindet und entsprechend für die übrigen Ketten $Z_2(t) = 1$, $Z_3(t) = 4$. Die Zahl der Übergänge von $E_0 \rightarrow E_1$ im Kollektiv der Ketten beträgt $X_0(t) = 3$; für die restlichen vorhandenen Übergänge erhält man $X_1(t) = 2$ ($E_1 \rightarrow E_2$), $X_2(t) = 1$ ($E_2 \rightarrow E_3$) und $X_3(t) = 1$ ($E_3 \rightarrow E_4$). Mithin ist $Z(t) = X(t) = 7$.

Das Beispiel zeigt, daß sowohl $Z(t)$ als auch $X(t)$ angibt, wieviele der Zustände vom Kollektiv zum Zeitpunkt t durchlaufen worden sind. Nur werden die Zustände des Kollektivs, wenn man die Anordnung Gl (6) zugrunde legt, bei $Z(t)$ nach Ketten und bei $X(t)$ nach Zuständen E_i aufsummiert.

Aufgrund der Voraussetzung II sind die Summanden von $\vec{Z}(t)$ wechselseitig statistisch unabhängig. Dies gilt jedoch nicht mehr für die Summanden von $\vec{X}(t)$, wie das obige Beispiel zeigt. Wegen $X_i(t) \geq X_{i+1}(t)$ für $i = 0, 1, \dots, \mu-2$ sind diese zVn statistisch abhängig.

d) Klassifizierung der stochastischen Prozesse des Kettenprozesses (μ, ν)

Wenn man bedenkt, daß die Kettenprozesse $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$ Markow-Prozesse sind, ist es nicht schwer, die stochastischen Prozesse der oben eingeführten zVn wie in der nachstehenden Tabelle zu klassifizieren.

zV	Name des stochastischen Prozesses	Typ
$\vec{Z}(t)$	Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$	Markow
$\vec{X}(t)$	Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$	Markow
$S(t)$	Summenprozeß (μ, ν)	Nicht-Markow

$$(\mu, 1) : = 1(\mu, 1); \quad (1, \nu) : = 1(1, \nu)$$

Dabei haben wir zugleich die Prozesse in einer für unsere Zwecke geeigneten Weise benannt. Wir unterscheiden von nun an, wo keine Verwechslung möglich ist, nicht mehr zwischen einem physikalischen Vorgang und dessen probabilistischem Modell. So verstehen wir unter dem Kettenprozeß (μ, ν) je nach dem Zusammenhang entweder den betreffenden physikalischen Vorgang oder die drei in der Tabelle erwähnten stochastischen Prozesse.

Die Klassifizierung begründen wir im Laufe der Arbeit näher. Hier nur soviel:

Ein Markow-Prozeß ist ein stochastischer Prozeß, dessen zukünftiger Ablauf nur vom Zustand des Prozesses in der Gegenwart abhängt, wobei dieser Zustand aber vollständig bekannt sein muß.

Die stochastischen Prozesse $\nu(\mu, 1)$ und $\mu(1, \nu)$ haben, wie man unmittelbar aus dem zugrunde liegenden physikalischen Vorgang ersieht, nur endlich viele Zustände und kontinuierlichen Zeitparameter t .

Den Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$ kann man nach den obigen Betrachtungen über die Komponenten $Z_i(t)$ des $\vec{z} \vec{Z}(t)$ aus ν voneinander stochastisch unabhängigen Kettenprozessen $(\mu, 1)$ aufbauen. Es ist daher naheliegend, ihn mit $\nu(\mu, 1)$ zu bezeichnen. Er ist, wie in § 4.1 näher ausgeführt wird, ein Markow-Prozeß, weil jeder der ν Kettenprozesse $(\mu, 1)$ ein Markow-Prozeß ist.

Die Einordnung der beiden übrigen Prozesse ist etwas schwieriger. Der Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ ist ein Markow-Prozeß, weil wir ihn unter dieser Annahme konstruieren. Wir erbringen aber nicht den Nachweis, daß er diese Eigenschaft besitzen muß, weil sie der Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$ besitzt. Benannt wurde er analog zum Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$. Da jedoch die μ Prozesse $(1, \nu)$, aus denen er sich aufbaut, nicht stochastisch unabhängig sind, ist seine Struktur komplizierter als die des Kettenprozesses $\nu(\mu, 1)$.

Der Summenprozeß (μ, ν) ist schließlich, was wir erst in § 3.5 näher ausführen, ein nichtmarkowscher Prozeß.

Bei allen drei Prozessen läßt sich die gemeinsame WV von k beliebig aber endlich vielen $\vec{z} \vec{V}_n \quad V(t_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$

$$P \left[V(t_1) = m_1, V(t_2) = m_2, \dots, V(t_k) = m_k \right] , \quad (7)$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k$$

sowohl für die Markow-Prozesse $v(\mu, 1)$ und $\mu(1, v)$ als auch für den Summenprozeß (μ, v) aus Übergangs-Wn vom Typ

$$P [W(t) = n_t \mid W(s) = n_s] \quad , \quad t > s \quad (8)$$

berechnen, wobei für die Markow-Prozesse stets $W(t) = V(t)$ gilt.

Während aber für Markow-Prozesse die Markow-Eigenschaft

$$\begin{aligned} P [V(t_k) = m_k \mid V(t_{k-1}) = m_{k-1}, V(t_{k-2}) = m_{k-2}, \dots, V(t_2) = m_2, V(t_1) = m_1] \\ = P [V(t_k) = m_k \mid V(t_{k-1}) = m_{k-1}] \quad , \quad (9) \\ t_1 < t_2 < \dots < t_k \end{aligned}$$

stets die Vorschrift

$$\begin{aligned} P [V(t_1) = m_1, V(t_2) = m_2, \dots, V(t_k) = m_k] \\ = P [V(t_1) = m_1] \cdot \prod_{j=2}^k P [V(t_j) = m_j \mid V(t_{j-1}) = m_{j-1}] \quad (10) \end{aligned}$$

ergibt, muß bei nicht-markowschen Prozessen in jedem Einzelfall ermittelt werden, wie diese Vorschrift, falls sie existiert, aussieht.

Die W Gl (10) folgt unmittelbar aus der allgemein gültigen Beziehung

$$P [A_1 A_2 \dots A_k] = P [A_1] \prod_{j=2}^k P [A_j \mid A_1 A_2 \dots A_{j-1}] \quad , \quad (11)$$

wenn wir unter A_j das Ereignis

$$\begin{aligned} A_j &:= \{V(t_j) = m_j\} \\ &= \{V(t_j) = m_j, \text{ alle übrigen } V(t_n) \text{ beliebig für } n \neq j\} \end{aligned}$$

verstehen und die Markow-Eigenschaft Gl (9) berücksichtigen .

Natürlich ist für den Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$ die zV $V(t) = W(t) = \vec{Z}(t)$ und für den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ die zV $V(t) = W(t) = \vec{X}(t)$. Für den Summenprozeß (μ, ν) gilt dagegen $V(t) = S(t)$ und $W(t) = \vec{Z}(t)$ bzw. $\vec{X}(t)$. Wir konstruieren den Summenprozeß in § 3.4 über $W(t) = \vec{X}(t)$.

Wie bereits angedeutet, ist es sehr viel leichter, den Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$ als den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ und den Summenprozeß (μ, ν) zu konstruieren. Von physikalischem Interesse sind jedoch eher die beiden zuletzt genannten Prozesse.

§ 1.2 Die speziellen Kettenprozesse $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$

Wie bereits erwähnt, werden in der uns bekannten Literatur lediglich die beiden Spezialfälle $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$ des Kettenprozesses (μ, ν) behandelt.

Wir stellen hier über diese Prozesse das zusammen, was wir für unsere weiteren Überlegungen benötigen. Dabei führen wir nicht immer alle Details aus.

(a) Der Kettenprozeß $(\mu, 1)$

Dieser Kettenprozeß ist ein reiner Geburtsprozeß und beschreibt das zeitliche Verhalten eines einzelnen radioaktiven Atoms mit μ instabilen Zuständen (vgl. Karlin [10], p 177; Feller [5], p 402; Parzen [13], p 295 oder diesen Bericht Teil I [18]). Er besteht aus einer einzigen Kette

$$E_0 \xrightarrow{\lambda_0} E_1 \xrightarrow{\lambda_1} \dots \xrightarrow{\lambda_{\mu-2}} E_{\mu-1} \xrightarrow{\lambda_{\mu-1}} E_\mu$$

und wird eindeutig bestimmt durch das System infinitesimaler Übergangs-Wn $(Z(t) := Z_1(t))$

$$P [Z(t+\Delta t) = k+1 \mid Z(t) = k] = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t) \quad (1a)$$

$$P [Z(t+\Delta t) = k \mid Z(t) = k] = 1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t) \quad (1b)$$

$$P [Z(t+\Delta t) > k+1 \mid Z(t) = k] = o(\Delta t) \quad (1c)$$

$$P [Z(t+\Delta t) < k \mid Z(t) = k] = 0 \quad (1d)$$

$$k = 0, 1, \dots, \mu-1$$

mit den Zerfallskonstanten

$$\lambda_k = 0 \quad \text{für } k < 0 \quad \text{und } k > \mu$$

und der Markow-Eigenschaft ($t_1 < t_2 \dots < t_1$)

$$\begin{aligned} P [Z(t_1) = k_1 \mid Z(t_{1-1}) = k_{1-1}, \dots, Z(t_1) = k_1] \\ = P [Z(t_1) = k_1 \mid Z(t_{1-1}) = k_{1-1}] \end{aligned} \quad (2)$$

Alle infinitesimalen Übergangs-Wn Gl (1) sind stationär, d.h. sie hängen, da die λ_k keine Funktionen der Zeit sind, nur vom Zeitintervall Δt und nicht vom Zeitpunkt t ab.

Die infinitesimale Übergangs-W Gl (1c) kann aus den übrigen des Systems Gl (1) gefolgert werden. (Karlin [10], p 178).

Mit Hilfe des Satzes von der totalen W und eines Grenzübergangs für $\Delta t \rightarrow 0$ läßt sich aus dem obigen System Gl (1) und der Markow-Eigenschaft Gl (2) für die W ($s < t$)

$$P_{kl}(s, t) := P [Z(t) = l \mid Z(s) = k] \quad (3)$$

das System der sog. Kolmogorow'schen prospektiven DGl'n

$$\frac{d}{dt} P_{kl}(s, t) = -\lambda_l P_{kl}(s, t) + \lambda_{l-1} P_{k, l-1}(s, t), \quad l \geq k + 1 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} P_{kk}(s, t) = -\lambda_k P_{kk}(s, t), \quad k=0, 1, \dots, \mu$$

$$\lambda_k = 0 \quad \text{für } k < 0, \quad k \geq \mu$$

gewinnen.

Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$P_{k1}(s,t) = 0 \quad \text{für } k > 1, \quad (5a)$$

$$P_{k1}(s,s) = \delta_{k1} \quad . \quad (5b)$$

Hier garantiert die Randbedingung G1 (5b) die Stetigkeit der Funktion $P_{k1}(s,t)$ im Punkte $t = s$.

Das DGl-System G1 (4) läßt sich rekursiv lösen. Man erhält für

$$P_{k1}(t-s) := P_{k1}(s,t)$$

$$P_{kk}(u) = \exp(-\lambda_k \cdot u) \quad (6a)$$

$$P_{k1}(u) = \exp(-\lambda_1 \cdot u) \int_0^u \exp(+\lambda_1 \cdot x) \cdot \lambda_{1-1} \cdot P_{k,1-1}(x) dx \quad (6b)$$

$$1 \geq k+1, \quad k=0,1,\dots, \mu,$$

wenn man beachtet, daß eine inhomogene DGl der Form

$$\frac{d}{dt} g(t) + c g(t) = h(t), \quad a \leq t \leq b \quad (7)$$

mit $h(t)$ stetig und c reell die allgemeine Lösung

$$g(t) = \int_a^t \exp(-c(t-x)) \cdot h(x) dx + g(a) \cdot \exp(-c(t-a)), \quad (8)$$

$$a \leq t \leq b$$

besitzt.

Doch läßt sich für $P_{k1}(u)$ auch ein expliziter Ausdruck herleiten. Es ist, wenn man voraussetzt, daß keine zwei der λ_k gleich sind.

$$P_{kk}(u) = \exp(-\lambda_k \cdot u), \quad (9)$$

$$P_{k1}(u) = (-1)^{1-k} \lambda_k \cdot \lambda_{k+1} \cdot \dots \cdot \lambda_{1-1} \int_{j=k}^1 \frac{\exp(-\lambda_j u)}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_1)}$$

für $1 \geq k+1$ und $\lambda_j = 0$ für $j < 0$ und $j \geq \mu$,

$$k=0,1,\dots,\mu, \quad u := t-s, \quad t > s.$$

Meist wird statt dieser Lösung des DGL-Systems G1 (4) nur die Lösung für den Spezialfall $P[Z(t)=1 | Z(0)=0]$ angegeben. (Vgl. z.B. Feller [7], p 406). Von diesen W_n

$$P_1(t) := P_1^{(\mu)}(t) := P_{01}(t) := P[Z(t)=1 | Z(0)=0] \quad (10)$$

benötigen wir später insbesondere die expliziten Ausdrücke für $\mu=2$

$$P_0^{(2)}(t) = \exp(-\lambda_0 t) \quad (11a)$$

$$P_1^{(2)}(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} \left[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_0 t) \right] \quad (11b)$$

$$P_2^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1} \left[\lambda_0 \exp(-\lambda_1 t) - \lambda_1 \exp(-\lambda_0 t) \right]. \quad (11c)$$

Schreibt man diese auf die in § 2 eingeführten Symbole

$$A = E_0, \quad B = E_1, \quad C = E_2$$

$$\alpha = \lambda_0, \quad \beta = \lambda_1$$

und die Abkürzungen

$$q(t) = \exp(-\alpha t), \quad Q(t) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \exp(-\beta t) - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \exp(-\alpha t)$$

um, lauten sie

$$P_A(t) = q(t) \quad (12a)$$

$$P_B(t) = Q(t) - q(t) \quad (12b)$$

$$P_C(t) = 1 - Q(t) \quad (12c)$$

Aus dieser Form kann man unmittelbar entnehmen, daß für $\mu = 2$ die $P_j^{(\mu)}(t)$ eine WV mit

$$\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) = 1 \quad (13)$$

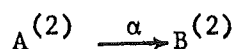
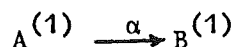
bilden. Dies gilt allgemein.

Im Fall $\mu = 2$ prüft man auch leicht nach, daß alle $P_j^{(2)}(t)$ nicht negativ sind. So ist z.B. $P_1^{(2)}(t)$ nicht negativ und damit $Q(t) \geq q(t)$, da aus $\lambda_0 < \lambda_1$, $t \geq 0$ immer $\exp(-\lambda_1 t) \leq \exp(-\lambda_0 t)$ folgt.

(b) Der Kettenprozeß (1, v)

Auch dieser Kettenprozeß ist ein reiner Geburtsprozeß. Er beschreibt, wie ein Kollektiv von v gleichen Atomen mit der Zerfallskonstanten α im Laufe der Zeit von einem Anfangszustand A in einen Endzustand B zerfällt.

Ist $A^{(i)}$ ($B^{(i)}$) der Zustand A (B) in der i ten Kette, so besteht das Kollektiv aus den Ketten



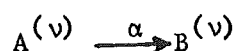
$$A^{(i)} = A$$

mit

$$i=1,2,\dots,v$$

.....

$$B^{(i)} = B$$



Sein System infinitesimaler Übergangs-Wn entsteht rein formal aus dem des Kettenprozesses $(\mu, 1)$, wenn man für die Intensitätsfunktionen $\lambda_1 = (\nu-1)\alpha$ setzt und als neue Prozeßvariable die zV $X(t) := X_0(t)$ einführt:

$$P \left[X(t+\Delta t) = i+1 \mid X(t) = i \right] = (\nu-i)\alpha \Delta t + o(\Delta t) \quad (14a)$$

$$P \left[X(t+\Delta t) = i \mid X(t) = i \right] = \left[1 - (\nu-i)\alpha \Delta t \right] + o(\Delta t) \quad (14b)$$

$$P \left[X(t+\Delta t) > i+1 \mid X(t) = i \right] = o(\Delta t) \quad (14c)$$

$$P \left[X(t+\Delta t) < i \mid X(t) = i \right] = 0 \quad (14d)$$

Die zV $X(t)$ gibt an, wieviele Atome im Zeitintervall $(0, t)$ vom Anfangszustand A in den Endzustand B übergegangen sind.

Der Kettenprozeß $(1, \nu)$ besitzt wie der Kettenprozeß $(\mu, 1)$ die Markow-Eigenschaft.

Während aber das System infinitesimaler Wn für den Kettenprozeß $(\mu, 1)$ in vielen Lehrbüchern der W-Rechnung wie z.B. [10], p 177 mitgeteilt wird, fanden wir dasjenige für den Kettenprozeß $(1, \nu)$ nur in der Aufgabensammlung von Takács [16], Aufgabe 19 p 41 und p 94. Dies rührt wohl daher, daß die Übergangs-Wn

$$p_{ij}(t, s) := P \left[X(t) = j \mid X(s) = i \right] \quad (15)$$

$$s < t$$

fast unmittelbar aus den Voraussetzungen I - III in § 1.1 hergeleitet werden können.

Man erhält für $p_{ij}(t-s) := p_{ij}(s, t)$, i fest, die Binomial-Verteilung

$$p_{ij}(u) = \binom{\nu-i}{j-i} q^{\nu-j} p^{j-i}, \quad j=i, i+1, \dots, \nu \quad (16)$$

$$q := \exp(-\alpha u), \quad p = 1-q, \quad u := (t-s).$$

Die Hypothese Index i kann die Werte $i=0,1,\dots,v$ annehmen. Natürlich ist es nicht schwer, mit Hilfe der Wn Gl (16) das infinitesimale System Gl (14) zu bestätigen. So ist z.B. für ein infinitesimales Zeitintervall $u = \Delta t$ und $j = i+1$

$$P \left[X(t+\Delta t) = i+1 \mid X(t) = i \right] =$$

$$^{(v-i)} \left[1 - \alpha \Delta t + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} - \dots \right]^{v-(i+1)} \left[\alpha \Delta t - \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \dots \right]$$

$$= (v-i) \alpha \Delta t + o(\Delta t) \quad . \quad (17)$$

Da die Übergangs-Wn $p_{ij}(u)$ auch ohne das infinitesimale System Gl (14) ermittelt werden können, erscheint dieses zunächst weniger wichtig. Wie sich aber später herausstellt (§ 2.1 und § 4.3), läßt sich gerade dieses infinitesimale System leicht zu einem infinitesimalen System für den allgemeinen Kettenprozeß $v(\mu,1)$ erweitern. Aus diesem Grunde ist von methodischem Interesse, wie man aus dem infinitesimalen System Gl (14) die Übergangs-Wn $p_{ij}(s,t)$ berechnet. Soweit uns bekannt, gibt es dazu zwei Wege. Beim einen hat man, wie bereits beim Kettenprozeß $(\mu,1)$ beschrieben, ein System gewöhnlicher DGl n und beim anderen eine pDGl (= partielle DGl) für eine Gf (= erzeugende Funktion), hier

$$G := G(x;s,t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(s,t) x^j = \sum_{j=i}^v p_{ij}(s,t) x^j \quad (18)$$

zu lösen.

Die pDGl kann entweder aus dem System gewöhnlicher DGl n (vgl. § 2.2) oder mit der Palm'schen Methode (vgl. Bartlett [1], [2]) direkt aus dem System der infinitesimalen Übergangs-Wn (vgl. § 2.3) gewonnen werden. Der zuerst genannte Weg führt immer zum Ziel, der zweite kann bequemer, aber auch völlig ungangbar sein.

Sehen wir nach, wie die Dinge beim Kettenprozeß $(1,v)$ liegen.

Hierzu fehlt uns noch das prospektive Kolmogorow'sche DGl-System.

Wir könnten, um es zu erhalten, ebenso vorgehen, wie wir es beim Kettenprozeß $(\mu,1)$ angegeben haben. Da wir jedoch bereits das betreffende DGl-System des Kettenprozesses $(\mu,1)$ kennen und dessen Intensitätsfunktionen

λ_1 nicht von der Zeit abhängen, also nicht vom Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ betroffen werden, brauchen wir das DGl-System des Kettenprozesses $(1, \nu)$ nicht aus seinem System infinitesimaler Übergangs-Wn herzuleiten.

Es folgt aus dem DGl-System des Kettenprozesses $(\mu, 1)$ Gl (4), wenn wir dort die λ_1 durch $(\nu-1)\alpha$ ersetzen :

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(s, t) = -(\nu-j)\alpha p_{ij}(s, t) + (\nu-(j-1))\alpha p_{i, j-1}(s, t)$$

für $i+1 \leq j \leq \nu$,

(19)

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(s, t) = -(\nu-j)\alpha p_{ij}(s, t) \quad , \quad i=0, 1, \dots, \nu \quad .$$

Die Randbedingungen Gl(5) können wir direkt übernehmen. Sie lauten

$$p_{ij}(s, t) = 0 \quad \text{für } i > j$$

$$p_{ij}(s, s) = \delta_{ij} \quad .$$
(20)

Ähnlich wie beim Kettenprozeß $(\mu, 1)$ läßt sich dieses DGl-System rekursiv lösen. Daher verzichten wir hier auf entsprechende Details. Jedoch wollen wir noch zeigen, wie man aus dem obigen DGl-System zu einer pDGl für die Gf G Gl (18) gelangt und diese löst.

Dazu multiplizieren wir zuerst die einzelnen DGl des Systems Gl (20) mit der Potenz x^j bzw. x^i der Hilfsvariablen x und summieren über j bzw. i gemäß der Definition von G .

Wir erhalten nach einiger Rechnung (vgl. § 2.2) , wenn wir die entstehenden Summen geeignet umformen, die pDGl

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \alpha x(x-1) \frac{\partial G}{\partial x} = \nu \alpha (x-1) G$$
(21)

mit den Randbedingungen

$$G(1; s, t) = 1, \quad G(x; s, s) = x^i \quad .$$
(22)

Die quasilineare pDGl (22) läßt sich über das System der ihr zugeordneten gewöhnlichen DGl'n, der sog. Charakteristiken

$$\frac{ds}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha x(x-1)} = \frac{dG}{v\alpha(x-1)G} \quad (23)$$

lösen (vgl. § 2.4 für eine ausführlichere Darstellung des Verfahrens) .
Drei für die gesuchte Lösung geeignete Integrale der Charakteristiken sind

$$s = C_1, \quad \frac{x-1}{x} \exp(-\alpha t) = C_2, \quad \frac{G}{x^v} = C_3 \quad . \quad (24)$$

Sie ergeben für das allgemeine Integral der pDGl

$$G(x;s,t) = x^v \Psi \left(s, \frac{x-1}{x} \exp(-\alpha t) \right) \quad . \quad (25)$$

Die zunächst willkürliche Funktion Ψ läßt sich mit Hilfe der Randbedingung bestimmen. Dies führt schließlich mit $G(x;t-s) := G(x;s,t)$ auf

$$G(x;u) = x^i \left[\exp(-\alpha u) + (1 - \exp(-\alpha u)) x \right]^{v-i}, \quad (26)$$

$u := t-s \quad .$

Es ist nicht schwer einzusehen, daß dies die Gf der Binomial-Verteilung Gl (16) ist .

Im Spezialfall $i = 0, s = 0$ folgt

$$G(x;t) = \left[\exp(-\alpha t) + (1 - \exp(-\alpha t)) x \right]^v \quad . \quad (27)$$

Zum Schluß wollen wir noch erwähnen, daß das zuletzt besprochene Verfahren beim Kettenprozeß $(\mu, 1)$ nicht funktioniert. Dort versucht man vergebens, auf diese Weise eine pDGl für die Gf seiner Übergangswn zu bekommen .

§ 1.3 Zur Konstruktion eines probabilistischen Modells für den
für den allgemeinen Kettenprozeß (μ, ν)

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir geschildert, wie wir zu probabilistischen Modellen für die Kettenprozesse $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$ kommen können.

Nun wollen wir in groben Zügen angeben, wie wir diese Modelle erweitern müssen, um den Kettenprozeß (μ, ν) beschreiben zu können. Am einfachsten ist der Sonderfall $\nu \sim \infty$ zu erledigen.

(a) Sonderfall $\nu \sim \infty$

In diesem Fall ist die Anzahl ν der Ketten des Kollektivs so groß, daß die durch ν bedingten Fluktuationen zu vernachlässigen sind. D.h. aber zugleich, daß wir zu einer Näherung für den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ von den beiden Kettenprozessen $(\mu, 1)$ und $(1, \nu)$ lediglich den Kettenprozeß $(\mu, 1)$ heranziehen können.

Weiterhin arbeiten wir anstelle der WV der Prozeßvariablen $\vec{X}(t)$ lediglich mit deren Erwartungswert. Es ist üblich (vgl. Evans [4], p 470 ff) für die Erwartungswerte der Komponenten $X_i(t)$ von $\vec{X}(t)$ Ausdrücke der Form

$$E [X_i(t)] = \nu P_K, \quad i = 0, 1, \dots, \mu-1 \quad (1)$$

zu benutzen, wobei die P_K geeignet gewählte Wn aus dem Kettenprozeß $(\mu, 1)$ sind.

So setzt man z.B. im Fall $\mu=2$ gemäß den Gln (1.2-12)

$$E [X_0(t)] = \nu (P_B(t) + P_C(t)) = \nu (1 - q(t)) \quad (2a)$$

$$E [X_1(t)] = \nu P_C(t) = \nu (1 - Q(t)) \quad (2b)$$

Dabei ist, wie man sich leicht überlegt,

$P_B(t) + P_C(t) =$ der W, daß sich das System zum Zeitpunkt t entweder im Zustand B oder C befindet, d.h. den Zustand A verlassen hat und

$P_C(t) =$ der W, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Endzustand C befindet.

Somit geben die Erwartungswerte $E[X_0(t)]$ bzw. $E[X_1(t)]$ an, wieviele Atome im Mittel im Zeitintervall $(0,t)$ vom Anfangszustand in den ersten Folgezustand bzw. Endzustand übergegangen sind.

Da bisher bei allen Experimenten mit radioaktiven Atomen keine signifikanten Abweichungen von derartigen Erwartungswerten beobachtet worden sind, muß z.B. der Kettenprozeß $2(1,\nu)$ so konstruiert werden, daß die Erwartungswerte von $X_i(t)$, $i=0,1$ mit denen in Gl (2) praktisch übereinstimmen.

Der in § 2. betrachtete Kettenprozeß erfüllt diese Forderung sogar exakt.

(b) Allgemeiner Fall

Schwieriger als der Sonderfall ist der allgemeine Kettenprozeß (μ,ν) zu behandeln, bei dem die Anzahl der Ketten endlich ist.

Wir benutzen hier zwei recht unterschiedliche Lösungsverfahren, die wir die analytische bzw. die kombinatorische Methode nennen wollen.

Besprechen wir zuerst die analytische Methode. Sie ist nur anwendbar, wenn es gelingt, die Systeme infinitesimaler W_n der Kettenprozesse $(\mu,1)$ bzw. $(1,\nu)$ auf den betreffenden Kettenprozeß (μ,ν) zu verallgemeinern.

Dies ist in der Tat möglich, wie im folgenden gezeigt wird. Dabei erhalten wir die gesuchten W_n in derselben Weise wie bei den speziellen Kettenprozessen $(\mu,1)$ und $(1,\nu)$.

Allerdings steigt der Rechenaufwand ganz erheblich, wenn man Kettenprozesse (μ,ν) mit $\mu > 2$ untersucht. Doch läßt er sich etwas vermindern, wenn man die partielle DGl für die erzeugende Funktion einer WV nicht über ein System gewöhnlicher DGl'n, sondern direkt mit der Operatormethode nach C. Palm herleitet.

Die kombinatorische Methode liefert im Gegensatz zur analytischen Methode zunächst nur ganz spezielle Wn des jeweiligen stochastischen Prozesses.

Wenn aber wie im Fall der Kettenprozesse $(1, \nu)$ und $(\mu, 1)$ diese Markow-Prozesse und zeitlich homogen sind, lassen sich mit ihr alle gewünschten Wn herleiten.

Der Ausgangspunkt der kombinatorischen Methode ist nicht wie bei der analytischen Methode ein System infinitesimaler Übergangs-Wn sondern eine bekannte WV des interessierenden Prozesses, aus der sich die jeweils unbekannte WV ermitteln läßt.

Wir präzisieren dies wie folgt. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ der bekannte W-Raum mit dem Merkmalraum Ω , dem vollständigen Ereignissystem \mathcal{A} und der WV \mathbb{P} über \mathcal{A} . Dann besteht bei der kombinatorischen Methode unsere Aufgabe darin, eine Transformation zu finden, die den W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ in den W-Raum $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ mit vorgegebenem vollständigen Ereignissystem \mathcal{A}' überführt.

Unter einem vollständigen Ereignissystem \mathcal{A} verstehen wir dabei wie üblich ein Ereignissystem, das höchstens abzählbar unendlich viele Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$ enthält und die folgenden Eigenschaften besitzt :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \quad (3)$$

$$\sum_i A_i = \Omega, \quad \sum_i P[A_i] = 1.$$

Wir demonstrieren u.a. in § 1.4, daß es beim Kettenprozeß (2,2) nicht schwierig ist, einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zu finden.

Man beachte jedoch, daß nur W-Räume mit solchen Ereignissystemen geeignet sind, die jedes Ereignis $A'_i \in \mathcal{A}'$ gemäß

$$A'_i = \sum_j A_j \quad (4)$$

darstellen lassen.

Die Transformationen führt man in unserem Fall am besten mit Hilfe der erzeugenden Funktionen aus.

Alle wichtigen Ergebnisse leiten wir sowohl mit der analytischen als auch mit der kombinatorischen Methode her.

Die Ergebnisse für den speziellen Kettenprozeß $2(1,\nu)$ haben wir, wie wir es auch hier darstellen, zuerst mit der analytischen Methode gefunden.

Von Vorteil ist bei der analytischen Methode ihr einfacher Ansatz und bei der kombinatorischen Methode ihr geringer Rechenaufwand; von Nachteil ist bei der analytischen Methode ihr großer Rechenaufwand und bei der kombinatorischen Methode, wenn man davon absieht, daß sie nicht allgemein anwendbar ist, ihr trickreicher Ansatz.

§ 1.4 Einführung in den Kettenprozeß (μ,ν) anhand des Kettenprozesses $(2,2)$

Wir berechnen nun eine Reihe von repräsentativen Wn aus dem Kettenprozeß $(2,2)$, da wir mit diesen bereits hier die entsprechenden Wn des allgemeinen Kettenprozesses (μ,ν) plausibel machen können.

Wie leicht einzusehen, ist der Kettenprozeß $(2,2)$ der einfachste Spezialfall des allgemeinen Kettenprozesses (μ,ν) , der über die bekannten Kettenprozesse $(\mu,1)$ und $(1,\nu)$ hinausgeht.

Gesucht werden die Gf (= erzeugende Funktion)

$$G_{22} ((z_1, z_2); t) = \sum_K Q_{k_1 k_2}(t) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \quad , \quad (1)$$

$K :=$ Indexmenge der zulässigen k_1, k_2

der WV (= Wahrscheinlichkeitsverteilung)

$$Q_{k_1 k_2}(t) := P \left[\vec{Z}(t) = \vec{k} \mid \vec{Z}(0) = \vec{0} \right] \quad ,$$

$$\vec{Z}(t) := (Z_1(t), Z_2(t)) \quad , \quad \vec{k} := (k_1, k_2) \quad , \quad \vec{0} := (0, 0)$$

des Kettenprozesses $\nu(\mu,1) = 2(2,1)$, die Gf

$$G_{22}(x_0, x_1; t) = \sum_I P_{i_0 i_1}(t) x_0^{i_0} x_1^{i_1}, \quad (2)$$

$I :=$ Indexmenge der zulässigen i_0, i_1

der WV

$$P_{i_0 i_1}(t) := P[\vec{X}(t) = \vec{i} \mid \vec{X}(0) = \vec{0}]$$

$$\vec{X}(t) := (X_0(t), X_1(t)), \quad \vec{i} := (i_0, i_1)$$

des Kettenprozesses $\mu(1, \nu) = 2(1, 2)$ und die Gf

$$G_{22}(z; t) = \sum_j R_j(t) z^j \quad (3)$$

der WV

$$R_j(t) := P[Z(t) = j \mid Z(0) = 0]$$

des Summenprozesses $(\mu, \nu) = (2, 2)$.

Die zVn bedeuten dasselbe wie in § 1.1. So beschreibt die i te Komponente $Z_i(t)$ ($i=1, 2$) des zV $\vec{Z}(t)$, welchen Zustand die i te Kette zum Zeitpunkt t einnimmt und die j te Komponente $X_j(t)$ ($j=0, 1$) des zV $\vec{X}(t)$, wieviele der 2 Ketten sich zum Zeitpunkt t im Zustand E_{j+1} befinden.

Schließlich gibt die zufällige Summe $Z(t)$ die Gesamtzahl der Teilchen an, die bis zum Zeitpunkt t emittiert worden sind, wenn wir annehmen, daß bei jedem Übergang $E_j \rightarrow E_{j+1}$ ($j=0, 1$) in einer der beiden Ketten ein Teilchen emittiert wird.

Wo wie hier Verwechslungen ausgeschlossen sind, unterscheiden wir verschiedene Gfn lediglich durch die Argumente des Funktionssymbols G . Die Indizes an G beziehen sich auf den jeweils betrachteten Kettenprozess (μ, ν) . Allgemein gilt z.B. anstelle der Gl. (2)

$$G_{\mu\nu}(\vec{x}; t) = \sum_I P_{i_0 i_1 \dots i_{\mu-1}}(t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_{\mu-1}^{i_{\mu-1}} \quad (4)$$

$I :=$ Indexmenge der zulässigen $i_0, i_1, \dots, i_{\mu-1}$

$$\vec{x} := (x_0, x_1, \dots, x_{\mu-1})$$

Bei allen Überlegungen in diesem Abschnitt verwenden wir die kombinatorische Methode.

Wir beginnen damit, einen expliziten Ausdruck für die Gf $G_{22}(\vec{z}; t)$ zu ermitteln. Dies läßt sich leicht bewerkstelligen, wenn man die Gfn der zVn $Z_i(t)$

$$G_{21}^{(i)}(z_i; t) = \sum_{j=0}^2 P_j z_i^j, \quad i=1,2 \quad (5)$$

$$P_j := P_j^{(2)}(t), \quad \text{vgl. Gl (1.2-11)}$$

der beiden identischen Kettenprozesse (2,1) einführt, aus denen der Kettenprozess 2 (2,1) besteht.

Nach Eigenschaft II § 1.1 sind nämlich die beiden Kettenprozesse (2,1) voneinander stochastisch unabhängig und daher

$$G_{22}((z_1, z_2); t) = \prod_{i=1}^2 G_{21}^{(i)}(z_i; t) = \prod_{i=1}^2 \left(\sum_{j=0}^2 P_j z_i^j \right) \quad (6)$$

Aus dieser Gf läßt sich sofort die Gf der zufälligen Summe $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t)$ gewinnen, wenn man gemäß einer Eigenschaft der erzeugenden Funktionen (siehe Gl. (4.2-4)) $z_i = z$ ($i=1,2$) setzt. Es ist

$$G_{22}(z, t) = \left(\sum_{j=0}^2 P_j z^j \right)^2. \quad (7)$$

Um die Gf $G_{22}((x_0, x_1); t)$ herzuleiten, müssen wir etwas weiter ausholen. Wir gehen dabei von drei Wahrscheinlichkeitsräumen aus, welche die vollständigen Ereignissysteme

$$(\Omega_A, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A) : A_j = \{Z(t) = j\} \in \mathcal{A}, \quad (8a)$$

$$0 \leq j \leq 4;$$

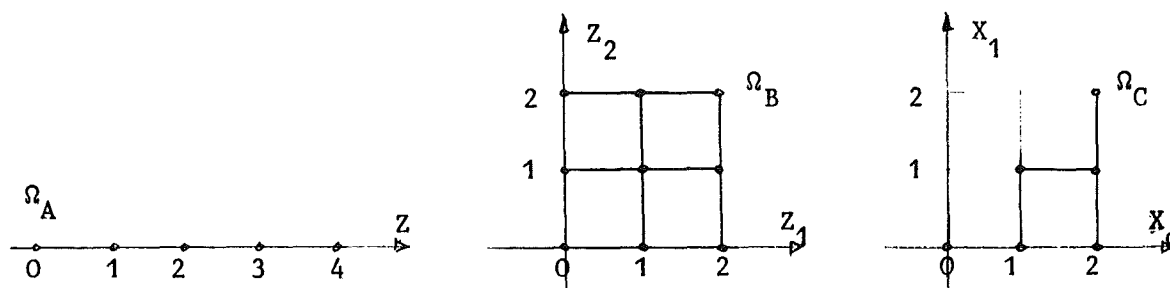
$$(\Omega_B, \mathcal{B}, \mathbb{P}_B) : B_{k_1 k_2} = \{Z_1(t) = k_1, Z_2(t) = k_2\} \in \mathcal{B}, \quad (8b)$$

$$0 \leq k_1, k_2 \leq 2;$$

$$(\Omega_C, \mathcal{C}, \mathbb{P}_C) : C_{i_0 i_1} = \{X_0(t) = i_0, X_1(t) = i_1\} \in \mathcal{C}, \quad (8c)$$

$$0 \leq i_0 \leq 2, \quad i_1 \leq i_0 \leq 2;$$

besitzen. Ihre diskreten Merkmalsräume werden durch die nachstehenden Abbildungen veranschaulicht, wobei die zum jeweiligen Merkmalsraum zugehörigen Punkte durch kleine Kreise markiert sind.



Unsere Aufgabe besteht nun darin, die WV \mathfrak{K}_C aus den WVN \mathfrak{K}_A und \mathfrak{K}_B zu berechnen.

Schon die Gestalt der drei Merkmalsräume läßt erkennen (vgl. obige Abbildung), daß Ω_A hierfür eine zu grobe Struktur besitzt. Daher kann \mathfrak{K}_C nur aus \mathfrak{K}_B ermittelt werden, wobei allerdings das Ereignissystem \mathcal{A} nützliche Dienste leistet, wenn man die Ereignissysteme \mathcal{X} und \mathcal{L} an ihm "orientiert".

Die Einzel-WN der WVN \mathfrak{K}_A und \mathfrak{K}_B lassen sich leicht aus den betreffenden Gfn entnehmen, da im Kettenprozeß (2,2) die Parameter $\mu (= 2)$ und $\nu (= 2)$ klein sind.

Es gilt

$$G_{22}(z; t) = \sum_{j=0}^4 P[A_j] z^j = (P_0 + P_1 z + P_2 z^2)^2 \quad (9)$$

und

$$\begin{aligned} G_{22}((z_1, z_2); t) &= \sum_{k_1, k_2} P[B_{k_1 k_2}] z_1^{k_1} z_2^{k_2} \\ &= (P_0 + P_1 z_1 + P_2 z_1^2) (P_0 + P_1 z_2 + P_2 z_2^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Also erhält man z.B. für

$$P[A_2] = P[Z(t) = 2] = 2 P_0 P_2 + P_1^2$$

und für

$$P [B_{12}] = P [Z_1(t) = 1, Z_2(t) = 2] = P_1 P_2 = P [B_{21}] ,$$

wenn man die Klammern in Gl. (9) bzw. Gl. (10) ausmultipliziert.

Um die W_n von \mathbb{K}_C zu berechnen, überlegen wir zunächst für jedes Ereignis A_j ($0 \leq j \leq 4$), welche "ODER"-Kombination von Ereignissen $B_{k_1 k_2}$ ($C_{i_0 i_1}$) im Ereignissystem \mathcal{L} ihm entspricht. Dies ergibt die nachstehende Tabelle, wobei die eingetragenen W_n erst später interessieren.

Tabelle 1-1

A_j	$P [A_j]$	$B_{k_1 k_2}$		$P [B_{k_1 k_2}]$	$C_{i_0 i_1}$		$P [C_{i_0 i_1}]$
		k_1	k_2		i_0	i_1	
0	P_0^2	0	0	P_0^2	0	0	P_0^2
1	$2 P_0 P_1$	0	1	$P_0 P_1$	1	0	$2 P_0 P_1$ ($2 P_0 P_1$)
		1	0	$P_1 P_0$	1	0	
2	$2 P_0 P_2 + P_1^2$	0	2	$P_0 P_2$	1	1	$2 P_0 P_2$ P_1^2 ($2 P_0 P_2$)
		1	1	P_1^2	2	0	
		2	0	$P_2 P_0$	1	1	
3	$2 P_1 P_2$	1	2	$P_1 P_2$	2	1	$2 P_1 P_2$ ($2 P_1 P_2$)
		2	1	$P_2 P_1$	2	1	
4	P_2^2	2	2	P_2^2	2	2	P_2^2

Die Tabelle ist auf folgende Weise zu lesen:

Sind für ein bestimmtes Ereignis A_j mehrere "ODER"-Kombinationen der Ereignisse $B_{k_1 k_2}$ ($C_{i_0 i_1}$) möglich, so stehen diese in der Tabelle in dem betreffenden Feld untereinander.

Wir verbinden sie in unserer Schreibweise mittels des Operationszeichens "+", da es sich um disjunkte Ereignisse handelt.

So gilt z.B.

$$A_2 = B_{02} + B_{11} + B_{20} = C_{11} + C_{20} .$$

Entsprechend hat man wie die Beispiele

$$B_{02} + B_{20} = C_{11} \quad (11a)$$

$$B_{11} = C_{20} \quad (11b)$$

zeigen, die Ereignisse $B_{k_1 k_2}$ und $C_{i_0 i_1}$ miteinander zu kombinieren. Dabei stehen äquivalente Ereignisse aus dem System \mathcal{L} und \mathcal{L} immer auf derselben Zeile der Tabelle.

Es ist nicht schwer, die in der Tabelle aufgezeigte Zuordnung zu verifizieren. Man braucht dazu nicht viel mehr, als auf die physikalische Bedeutung der $Z(t)$, $Z_k(t)$ ($k = 1, 2$) und $X_i(t)$ ($i = 0, 1$) zurückzugreifen. Insbesondere gilt, wie man leicht nachprüft:

$X_0(t)$ ist die Anzahl der $Z_k(t)$ -Werte ($k = 1, 2$), die größer als 0 sind und (12a)

$X_1(t)$ ist die Anzahl der $Z_k(t)$ -Werte ($k = 1, 2$), die größer als 1 sind. (12b)

Mit den Beziehungen Gln (12) wissen wir aber, wie das Ereignissystem \mathcal{L} auf das Ereignissystem \mathcal{L} abzubilden ist und können für jedes Ereignis $C_{i_0 i_1} \in \mathcal{L}$ dessen W angeben.

Z.B. bekommt man für die Ereignisse C_{11} bzw. C_{20} mit Gl. (11) und der WV \mathcal{R}_B die W_n

$$P [C_{11}] = P [B_{02}] + P [B_{20}] = 2 P_0 P_2$$

$$P [C_{20}] = P [B_{11}] = P_1^2 .$$

Zusammen mit den übrigen W_n von \mathbb{P}_C , die man der Tabelle entnehme, ergeben diese für den $z\vec{V}$ $\vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t))$ die Gf

$$G_{22}(\vec{x}; t) = \sum_{i_0, i_1} P_{i_0 i_1} x_0^{i_0} x_1^{i_1} = \sum_{i_0, i_1} P \left[C_{i_0 i_1} \right] x_0^{i_0} x_1^{i_1}$$

$$= P_0^2 + 2P_0 P_1 x_0 + (2 P_0 P_2 x_0 x_1 + P_1^2 x_0^2) + 2 P_1 P_2 x_0^2 x_1 + P_2^2 x_0^2 x_1^2. \quad (13)$$

Wie man unmittelbar sieht, läßt sich die rechte Seite von Gl. (13) zusammenfassen zu

$$G_{22}(\vec{x}; t) = (P_0 + P_1 x_0 + P_2 x_0 x_1)^2. \quad (14)$$

Dies ist das gesuchte Ergebnis für den Kettenprozeß (2,2).

Wenn man von Gl. (14) ausgeht, ist es nicht besonders schwer, die entsprechenden Gfn für die Kettenprozesse (2, ν) bzw. (μ , ν) zu erraten.

Vergleicht man nämlich die Gf Gl. (14) für den $z\vec{V}$ $\vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t))$ mit der des zufälligen "Skalars" $Z(t)$ Gl. (9)

$$G_{22}(z; t) = (P_0 + P_1 z + P_2 z^2)^2,$$

so liegt aus formalen Gründen nahe, für den Kettenprozeß (2, ν) die Gf

$$G_{2\nu}(\vec{x}; t) = (P_0 + P_1 x_0 + P_2 x_0 x_1)^\nu, \quad \vec{x} = (x_0, x_1) \quad (15)$$

zu vermuten, da ja nach Gl. (7) für ν statt zwei Ketten die Gf

$$G_{2\nu}(z; t) = (P_0 + P_1 z + P_2 z^2)^\nu$$

gilt. Dies umso mehr, als aufgrund der physikalischen Bedeutung der Komponenten der zV_n $\vec{X}(t)$ und $\vec{Z}(t)$ nach Gl. (1.1-4)

$$Z(t) := \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} X_j(t) =: X(t)$$

sein muß (für den Spezialfall $\nu = 2$ vgl. Tabelle 1-1) und daher $G_{2\nu}((x_0, x_1); t)$ und $G_{2\nu}(z; t)$ gemäß Gl (4.2-4) für $x_0 = x_1 = z$ einander gleich sind.

Wir zeigen in § 2.4 mit der analytischen und in § 4.4 mit der kombinatorischen Methode, daß die Vermutung Gl. (15) stimmt.

Nun bleibt noch der allgemeine Fall $\mu > 2$ zu behandeln. Da nach Gl. (1.2-27) für $x = x_0$, $\exp(-\alpha t) = P_0^{(1)}$

$$G_{1\nu}(x_0; t) = (P_0^{(1)} + P_1^{(1)} x_0)^\nu, \quad P_0^{(1)} + P_1^{(1)} = 1$$

und nach Gl. (15)

$$G_{2\nu}((x_0, x_1); t) = (P_0^{(2)} + P_1^{(2)} x_0 + P_2^{(2)} x_0 x_1)^\nu,$$

$$P_0^{(2)} + P_1^{(2)} + P_2^{(2)} = 1$$

gilt, erwartet man, daß die WV des zV $\vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_{\mu-1}(t))$ die Gf

$$G_{\mu\nu}((x_0, x_1, \dots, x_{\mu-1}); t) = \left[P_0^{(\mu)} + \sum_{i=1}^{\mu} P_i^{(\mu)} x_0 x_1 \dots x_{i-1} \right]^\nu \quad (16)$$

$$\sum_{i=0}^{\mu} P_i^{(\mu)} = 1$$

besitzt.

Tatsächlich läßt sich auch diese Vermutung beweisen, wie in § 4.3 und § 4.4 gezeigt wird.

§ 2. Der Kettenprozeß $2(1, \nu)$

§ 2.0 Vorbemerkungen

In den §§ 2 und 3 konstruieren wir für $\mu=2$ den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ und den Summenprozeß (μ, ν) . Wir verwenden dazu die analytische Methode. Da es keine Schwierigkeiten bereitet, den Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$ gleich für $0 < \mu < \infty$ zu behandeln, widmen wir diesem Prozeß hier keinen gesonderten Abschnitt. Wer sich für diesen Prozeß schon jetzt interessiert, kann § 4.1 vorwegnehmen.

Für die physikalische Meßtechnik sind, da man keine individuellen Ketten beobachten kann, allein der Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ und der Summenprozeß (μ, ν) wichtig.

Um die Notation zu vereinfachen, gebrauchen wir, wo möglich, entweder keine oder nur wenige Indizes. So schreiben wir z.B. für die Zustände E_i ($i=0,1,2$)

$$A = E_0, B = E_1, C = E_2,$$

die Zerfallskonstanten λ_i ($i=0,1$)

$$\alpha = \lambda_0, \beta = \lambda_1$$

und die zVn $\vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t)), S(t)$

$$X(t) = X_0(t), Y(t) = X_1(t), Z(t) = S(t) = X(t) + Y(t).$$

Nicht immer läßt es sich vermeiden, dasselbe Symbol für verschiedene Dinge zu verwenden. So haben z.B. die Buchstaben A, B und C in § 2.1 eine andere Bedeutung als oben angegeben.

Statt vom Kettenprozeß $2(1, \nu)$ sprechen wir auch vom 2-dimensionalen $(X(t), Y(t))$ - Prozeß oder kurz vom (X, Y) -Prozeß.

Die Komponentenprozesse $\{ X(t); 0 \leq t < \infty \}$ und $\{ Y(t); 0 \leq t < \infty \}$ des (X, Y) -Prozesses bezeichnen wir meist mit X- bzw. Y-Prozeß.

Der X-Prozeß ist der in § 1.2 behandelte Kettenprozeß $(1, \nu)$. Er besitzt ein System infinitesimaler Übergangs-Wn von der Form

$$P \left[W(t+\Delta t)=1+1 \mid W(t)=1 \right] = (\nu-1) \cdot \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad (1a)$$

$$P \left[W(t+\Delta t)=1 \mid W(t)=1 \right] = 1 - (\nu-1) \cdot \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad (1b)$$

$$P \left[W(t+\Delta t)>1+1 \mid W(t)=1 \right] = o(\Delta t) \quad (1c)$$

$$P \left[W(t+\Delta t)<1 \mid W(t)=1 \right] = 0 \quad (1d)$$

wobei

$$W(t) = X(t) \quad \text{und} \quad \lambda(t) = - \frac{d q(t)/dt}{q(t)} = \alpha \quad (2)$$

mit $q(t) = \exp(-\alpha t)$

ist. Für den Y-Prozeß gilt hingegen

$$W(t) = Y(t) \quad \text{und} \quad \lambda(t) = - \frac{d Q(t)/dt}{Q(t)} \quad (3)$$

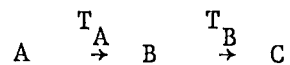
mit

$$Q(t) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta t) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha t) .$$

Der Y-Prozeß ist somit ein nichthomogener Geburtsprozeß, da sein System infinitesimaler Übergangswn im Gegensatz zum X-Prozeß von der Zeit abhängt. Wir haben diesen Prozeß ausführlich an anderer Stelle [18] diskutiert.

Hier nur soviel:

Betrachten wir im Kettenprozeß (2,1)



die zufällige Lebensdauer T_A des Zustands A bzw. T_B des Zustands B, so haben diese zVn nach den Voraussetzungen § 1.1a) die voneinander stoch. unabhängigen Exponentialdichten

$$P [t < T_A \leq t+dt] = \alpha \exp(-\alpha t) dt \quad (4a)$$

$$P [t < T_B \leq t+dt] = \beta \exp(-\beta t) dt \quad (4b)$$

Mithin hat die zufällige Lebensdauer $T_S = T_A + T_B$, wozu wir die beiden Exponentialdichten falten müssen, die Dichte

$$P [t < T_S \leq t+dt] = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)] dt \quad (5)$$

Also erhalten wir für die Wn, daß das Nukleid im Zeitintervall (0,t) vom Zustand A in den Zustand B bzw. in den Zustand C übergeht

$$P [0 < T_A \leq t] = 1 - q(t) \quad (6)$$

$$P [0 < T_S \leq t] = 1 - Q(t) \quad (7)$$

Mit Hilfe dieser beiden Wn kann dann das infinitesimale System für den X- bzw. Y-Prozeß hergeleitet werden.

§ 2.1 DGl-System für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij;k1}(s,t)$
des Kettenprozesses 2 (1,v)

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein DGl-System für die Übergangs-Wn

$$p_{ij;k1}(s,t) := P [X(t)=j, Y(t)=1 \mid X(s)=i, Y(s)=k] \quad (1)$$

des zweidimensionalen (X,Y)-Prozesses herzuleiten.

Wir benutzen hierzu die analytische Methode, wie man sie im eindimensionalen Fall z.B. bei Feller [5], p 400 bzw. Karlin [10], p 177 findet.

Ihr Ausgangspunkt ist stets ein System infinitesimaler bedingter Wn. Mit Hilfe dieses Systems und des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit wird dann eine passend gewählte W so zerlegt, daß bei einem Grenzübergang im reellen Parameter t ein System gewöhnlicher DGl'n für die Variable t entsteht.

a) System der infinitesimalen bedingten Wn für den (X,Y)-Prozeß

Wir können ein System infinitesimaler Wn für den (X,Y)-Prozeß leicht angeben, wenn wir dasjenige für den Komponentenprozeß der zV $X(t)$, der ein Kettenprozeß (1,v) mit $(0 \leq i \leq v)$ ist, betrachten:

$$P [X(t+\Delta t) = i+1 \mid X(t)=i] = (v-i)\alpha \Delta t + o(\Delta t) \quad (2a)$$

$$P [X(t+\Delta t) = i \mid X(t)=i] = 1 - (v-i)\alpha \Delta t + o(\Delta t) \quad (2b)$$

$$P [X(t+\Delta t) > i+1 \mid X(t)=i] = o(\Delta t) \quad (2c)$$

$$P [X(t+\Delta t) < i \mid X(t)=i] = 0 \quad (2d)$$

Es ist dann naheliegend, für festgehaltenes $X(t)=i$

$$P [Y(t+\Delta t) = k+1 \mid X(t) = i, Y(t) = k] = (i-k)\beta \Delta t + o(\Delta t) \quad (3a)$$

$$P [Y(t+\Delta t) = k \mid X(t) = i, Y(t) = k] = 1 - (i-k)\beta \Delta t + o(\Delta t) \quad (3b)$$

$$P [Y(t+\Delta t) > k+1 \mid X(t) = i, Y(t) = k] = o(\Delta t) \quad (3c)$$

$$P [Y(t+\Delta t) < k \mid X(t) = i, Y(t) = k] = 0 \quad (3d)$$

$$P [Y(t+\Delta t) > i \mid X(t) = i, Y(t) = k] = 0 \quad (3e)$$

mit $(0 \leq i \leq v, 0 \leq k \leq i)$ zu setzen.

Hierbei tritt in diesem bedingten "Y-Prozeß" (\neq Y-Komponentenprozeß des (X,Y)-Prozesses) anstelle des v das aktuelle i des X-Prozesses, für das

natürlich $i \geq k$ gelten muß und für die Abfallkonstante α des Mutterkerns die Abfallkonstante β des Tochterkerns.

Weiterhin müssen wir berücksichtigen, daß die zeitliche Entwicklung des X-Prozesses unabhängig von der des "Y-Prozesses" ist. Eine für das Folgende geeignete Formulierung dieser Eigenschaft des (X,Y)-Prozesses lautet für $u > t > s$

$$\begin{aligned} P [X(u)=i_u \mid X(t)=i_t, X(s)=i_s, Y(u)=j_u, Y(t)=j_t, Y(s)=j_s] \\ = P [X(u)=i_u \mid X(t)=i_t, X(s)=i_s] \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Das gesuchte infinitesimale System des (X,Y)-Prozesses besteht dann aus den Gln (2) und (3). Hierzu tritt die Eigenschaft Gl (4) und die Annahme, daß der (X,Y)-Prozeß ein zweidimensionaler Markow-Prozeß ist.

Das oben angegebene System (I) bedingter infinitesimaler W_n ist nicht das einzige, aus dem der (X,Y)-Prozeß konstruiert werden kann.

Ein weiteres System (II) ist, wenn wir mit der Hypothese $H(t) = \{ X(t)=i, Y(t)=k \}$ bezeichnen,

$$P [X(t+\Delta t)=i+1, Y(t+\Delta t)=k \mid H(t)] = (v-i)\alpha\Delta t + o(\Delta t) \quad (5a)$$

$$P [X(t+\Delta t)=i, Y(t+\Delta t)=k+1 \mid H(t)] = (i-k)\beta\Delta t + o(\Delta t) \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} P [X(t+\Delta t)=i, Y(t+\Delta t)=k \mid H(t)] = \\ (1 - [(v-i)\alpha + (i-k)\beta] \Delta t) + o(\Delta t) \quad (5c) \end{aligned}$$

alle übrigen W_n von $X(t+\Delta t)$ und $Y(t+\Delta t)$ mit der Hypothese $H(t)$

$$= o(\Delta t) \quad \text{oder} \quad 0 \quad . \quad (5d)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$P(j) := P [X(t+\Delta t)=j \mid X(t)=i]$$

$$Q(1) := P [Y(t+\Delta t)=1 \mid H(t)]$$

$$R(j,1) := P [X(t+\Delta t)=j, Y(t+\Delta t)=1 \mid H(t)] ,$$

so ist, wenn wir beachten, daß gemäß Gl (4)

$$P(j) = P [X(t+\Delta t)=j \mid H(t)] \quad (6)$$

gilt, $P(j)$ die eine der beiden Randverteilungen von $R(j,1)$, d.h.

$$P(j) = \sum_{l=0}^v R(j,1) \quad . \quad (7a)$$

Für die andere erhalten wir

$$Q(1) = \sum_{j=0}^{\nu} R(j,1) \quad . \quad (7b)$$

Also gilt z.B., wenn die $R(j,1)$ gegeben sind,

$$P(i) = R(i,k) + R(i,k+1) + o(\Delta t) \quad (8a)$$

$$Q(k) = R(i,k) + R(i+1,k) + o(\Delta t) \quad (8b)$$

und das System I folgt mit Eigenschaft G1 (4) aus dem System II. Umgekehrt ist, wenn wir vom System I ausgehen und annehmen, daß

$$R(j,1) = o(\Delta t) \quad \text{für } (j,1) \neq (i+1,k) \vee (i,k) \vee (i,k+1) \quad (9)$$

$\vee := \text{logisches Oder}$

gilt,

$$\begin{aligned} R(i,k) + R(i,k+1) + o(\Delta t) &= P(i) \\ R(i,k) + o(\Delta t) &= P(i+1) \\ R(i,k) + R(i+1,k) + o(\Delta t) &= Q(k) \\ R(i,k+1) + o(\Delta t) &= Q(k+1) \end{aligned} \quad (10)$$

und das System II folgt mit G1 (4) aus dem System I.

In diesem Abschnitt benutzen wir das System I, später jedoch auch das System II (vgl. §2.3).

b) Zerlegung der Wahrscheinlichkeit $p_{ij;k1}(s, t+\Delta t)$

Wir zerlegen $p_{ij;k1}(s, t+\Delta t) = P [X(t+\Delta t)=j, Y(t+\Delta t)=1 \mid X(s)=i, Y(s)=k]$ über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und einer elementaren Beziehung zwischen bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Diese besagen, wenn wir sie in einer für uns geeigneten Weise in einem Hilfssatz und einem Satz formulieren:

Hilfssatz

Für beliebige Ereignisse C, D, E, F und H gilt

$$P [CDEF \mid H] = P [EF \mid H] \cdot P [D \mid EFH] \cdot P [C \mid DEFH] \quad . \quad (11)$$

Beweis

Aufgrund der Definition der bedingten W $P [A \mid H] = P [AH] / P[H]$ gilt

$$\text{linke Seite von Gl (11)} = \frac{P[CDEFH]}{P[H]}$$

$$\text{rechte Seite von Gl (11)} = \frac{\cancel{P[EFH]}}{P[H]} \cdot \frac{P[\cancel{DEFH}]}{\cancel{P[EFH]}} \cdot \frac{P[CDEFH]}{\cancel{P[DEFH]}}$$

Es ist l.S. = r.S. w.z.b.w.]

Satz

Sind A_κ , $\kappa=0,1,\dots,j$ und B_λ , $\lambda=0,1,\dots,l$ zwei endliche Ereignissysteme mit

$$A = \bigcup_{\kappa=0}^j A_\kappa, \quad A_\kappa \cap A_{\kappa'} = \emptyset \quad \text{für } \kappa \neq \kappa', \quad (12a)$$

$$B = \bigcup_{\lambda=0}^l B_\lambda, \quad B_\lambda \cap B_{\lambda'} = \emptyset \quad \text{für } \lambda \neq \lambda', \quad (12b)$$

und P ein für diese Ereignisse definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß, so gilt für eine beliebige Hypothese H (=Ereignis H)

$$P[AB|H] = \sum_{\kappa,\lambda} P[A_\kappa B_\lambda | H] \quad (13)$$

Beweis

Da die Ereignisse A_κ , $\kappa=0,1,\dots,j$ und demnach auch die Ereignisse $A_\kappa B_\lambda H$, $\kappa=0,1,\dots,j$ disjunkt sind, resultiert aus der Additivität der Wahrscheinlichkeit P

$$P[ABH] = P\left[\left(\bigcup_{\kappa} A_\kappa\right) BH\right] = \sum_{\kappa=0}^j P[A_\kappa BH] \quad (14)$$

Halten wir nun $\kappa=\kappa'$ fest, so sind auch die Ereignisse $A_\kappa B_\lambda H$, $\lambda=0,1,\dots,l$ disjunkt und daher

$$P[A_\kappa BH] = P\left[A_\kappa \left(\bigcup_{\lambda} B_\lambda\right) H\right] = \sum_{\lambda=0}^l P[A_\kappa B_\lambda H] \quad (15)$$

Also gilt, wenn wir $P[A_\kappa BH]$ aus Gl (15) in Gl (14) einsetzen

$$P[ABH] = \sum_{\kappa,\lambda} P[A_\kappa B_\lambda H] \quad (16)$$

Die gesamte Beziehung folgt schließlich, wenn wir (16) durch $P[H]$ dividieren.]

Jetzt kommt es darauf an, geeignete Ereignisse A, B, H bzw. A_κ, B_λ , auszu-

wählen, welche die infinitesimalen W_n mit den gesuchten Übergangs- W_n verknüpfen. Diesen Zweck erfüllen die Ereignisse

$$A := \{ X(t+\Delta t)=j, 0 \leq Y(t+\Delta t) < \infty \} = \{ X(t+\Delta t)=j \} \quad (16a)$$

$$B := \{ 0 \leq X(t+\Delta t) < \infty, Y(t+\Delta t)=1 \} = \{ Y(t+\Delta t)=1 \} \quad (16b)$$

$$H(s) := H := \{ X(s)=i, Y(s)=k \} \quad (16c)$$

und die Ereignissysteme

$$A_\kappa := \{ X(t)=j-\kappa, X(t+\Delta t)=j \}, \quad \kappa=0,1,\dots,j \quad (17a)$$

$$A_\kappa \cap A_{\kappa'} = \emptyset \quad \text{für } \kappa \neq \kappa',$$

$$B_\lambda := \{ Y(t)=1-\lambda, Y(t+\Delta t)=1 \}, \quad \lambda=0,1,\dots,1$$

$$B_\lambda \cap B_{\lambda'} = \emptyset \quad \text{für } \lambda \neq \lambda' \quad (17b)$$

Natürlich gilt

$$AB := A \cap B = \{ X(t+\Delta t)=j, Y(t+\Delta t)=1 \} \quad (18)$$

Für das Folgende ist dienlich, die Ereignisse A_κ und B_λ ähnlich wie in Gl (18) aufzuspalten. Wir verwenden

$$A_\kappa = CE_\kappa, \quad B_\lambda = DF_\lambda \quad (19a,b)$$

mit

$$C := \{ X(t+\Delta t)=j \}, \quad E_\kappa := \{ X(t)=j-\kappa \},$$

$$D := \{ Y(t+\Delta t)=1 \}, \quad F_\lambda := \{ Y(t)=1-\lambda \},$$

$$\kappa=0,1,\dots,j \quad \text{und} \quad \lambda=0,1,\dots,1 \quad .$$

Mit diesen Festsetzungen berechnen wir nun die Summanden $P[A_\kappa B_\lambda | H]$ in Gl (13). Wir können uns dabei auf die Terme mit $\kappa+\lambda \leq 1$ beschränken, weil, wie wir später sehen werden, alle übrigen Terme von höherer als erster Ordnung in Δt sind und beim Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ verschwinden.

Als erstes formen wir $P[A_\kappa B_\lambda | H]$ mit dem Hilfssatz um. Wir erhalten mit $E := E_\kappa$ und $F := F_\lambda$

$$P[A_\kappa B_\lambda | H] = P[EF | H] \cdot P[D | EFH] \cdot P[C | DEFH] \quad (20)$$

Dies können wir noch erheblich vereinfachen. Wegen der Markoweigenschaft des (X,Y) -Prozesses ist nämlich ($t > s$)

$$\begin{aligned} P [D | EFH] &= P [Y(t+\Delta t)=1 | X(t)=j-\kappa, Y(t)=1-\lambda, X(s)=i, Y(s)=k] \\ &= P [D | EF] \end{aligned} \quad (21)$$

und wegen Voraussetzung G1 (4) und der Markow-Eigenschaft

$$\begin{aligned} P [C | DEFH] &= P [X(t+\Delta t)=j | X(t)=j-\kappa, X(s)=i, Y(t+\Delta t)=1, Y(t)=1-\lambda, Y(s)=k] \\ &= P [C | E] \end{aligned} \quad (22)$$

Also wird aus G1 (20)

$$P [A_{\kappa} B_{\lambda} | H] = P [E_{\kappa} F_{\lambda} | H] \cdot P [D | E_{\kappa} F_{\lambda}] \cdot P [C | E_{\kappa}] \quad (23)$$

Nun ist es leicht, die Wn $P [A_{\kappa} B_{\lambda} | H]$ auszurechnen. Es ergibt sich der Reihe nach

für $\kappa=0, \lambda=0$:

$$\begin{aligned} P [A_{00} B_{00} | H] &= P [X(t)=j, Y(t)=1 | X(s)=i, Y(s)=k] \\ &\quad \cdot [(1 - (j-1)\beta \cdot \Delta t) + o(\Delta t)] \cdot [(1 - (v-j)\alpha \cdot \Delta t) + o(\Delta t)] \\ &= [1 - [(v-j)\alpha + (j-1)\beta] \Delta t] \cdot p_{ij;k1}(s, t) + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (24a)$$

für $\kappa=0, \lambda=1$:

$$P [A_{01} B_{01} | H] = (j-1+1)\beta \cdot \Delta t \cdot p_{ij;k,1-1}(s, t) + o(\Delta t), \quad (24b)$$

für $\kappa=1, \lambda=0$:

$$P [A_{10} B_{10} | H] = (v-j+1)\alpha \cdot \Delta t \cdot p_{i,j-1;k1}(s, t) + o(\Delta t), \quad (24c)$$

und für $\kappa, \lambda \geq 1$

$$P [A_{\kappa} B_{\lambda} | H] = o(\Delta t) \quad (25)$$

c) Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$

Nun können wir den Grenzübergang in G1 (13) ausführen. Wir erhalten hierbei das System der sog. prospektiven Kolmogorow'schen DGl'n, da in $p_{ij;k1}(s, t+\Delta t)$, $s < t$, die Zeit vorwärts läuft.

Es genügt, nur Terme bis zur ersten Ordnung in Δt zu berücksichtigen. Dann ist

$$\begin{aligned} p_{ij;k1}(s, t+\Delta t) &= [1 - [(v-j)\alpha + (j-1)\beta] \Delta t] p_{ij;k1}(s, t) \\ &+ (v-j+1)\alpha \Delta t \cdot p_{i,j-1;k1}(s, t) + (j-1+1)\beta \Delta t \cdot p_{ij;k,1-1}(s, t) + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (26)$$

oder:

$$\frac{p_{ij;kl}(s,t+\Delta t) - p_{ij;kl}(s,t)}{\Delta t} = - [(v-j)\alpha + (j-1)\beta] p_{ij;kl}(s,t) \\ + (v-j+1)\alpha \cdot p_{i,j-1;kl}(s,t) + (j-1+1)\beta \cdot p_{ij;k,l-1}(s,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (27)$$

Also erhalten wir für $\Delta t \rightarrow 0$ das DGL-System

$$\frac{d}{dt} p_{ij;kl}(s,t) = - [(v-j)\alpha + (j-1)\beta] p_{ij;kl}(s,t) \\ + (v-j+1)\alpha \cdot p_{i,j-1;kl}(s,t) + (j-1+1)\beta \cdot p_{ij;k,l-1}(s,t) \quad , \quad (28)$$

wobei

$$j = i, i+1, \dots, v \quad (i \text{ fest, } 0 \leq i \leq v) \\ l = k, k+1, \dots, i \quad (k \text{ fest, } 0 \leq k \leq i) \quad .$$

Die Randbedingungen lauten

$$p_{ij;kl}(s,t) = 0 \quad , \quad \text{falls } j < i \text{ oder } l < k \text{ oder} \\ k > i \text{ oder } l > j \quad (29a)$$

$$p_{ij;kl}(s,s) = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad . \quad (29b)$$

Die letzte Randbedingung drückt die Stetigkeit in $t = s$ aus.

Aus typographischen Gründen lassen wir von nun an konstante Indizes und wo möglich, die Argumente s und t weg. Dies ergibt mit $p_{jl} := p_{ij;kl}(s,t)$ anstelle von (28) für $JL := J \cap L$ (Definition der Mengen J, L in Gl (32))

$$\frac{d}{dt} p_{jl} = - [(v-j)\alpha + (j-1)\beta] p_{jl} + (v-j+1)\alpha \cdot p_{j-1,l} \\ + (j-1+1)\beta \cdot p_{j,l-1} \quad (30)$$

mit den Randbedingungen

$$p_{jl}(s,t) = 0 \quad \text{für } i, j, k, l \notin IJKL \quad (31a)$$

$$p_{jl}(s,t) = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad , \quad (31b)$$

wobei für die Indexmengen

$$I = \{ i; i = 0, 1, 2, \dots, v. j, k, l \text{ beliebig} \}$$

$$J = \{ j; j = i, i+1, \dots, v. k, l, i \text{ beliebig} \}$$

$$K = \{ k; k = 0, 1, 2, \dots, i. l, i, j \text{ beliebig} \}$$

$$L = \{ l; l = k, k+1, \dots, j. i, j, k \text{ beliebig} \}$$

(32a,b)

(32c,d)

gilt.

Es ist also $i, j, k, l \notin I \cap J \cap K \cap L$ gleichbedeutend mit
 $j < i$ oder $l < k$ oder $l > j$ oder $k > i$.

§ 2.2 Überführung des DGL-Systems für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$P_{ij;kl}(s,t)$ des (X,Y) -Prozesses in eine partielle DGL für eine erzeugende Funktion $G(x,y;s,t)$

a) Herleitung der partiellen DGL für $G(x,y;s,t)$

Wie beim Kettenprozeß (1,v) in § 1.2 können wir auch hier das DGL-System für die Übergangs-Wn $p_{j1} := P_{ij;kl}(s,t)$ über eine ihm äquivalente pDGL einer geeigneten Gf lösen.

Wählen wir als Gf

$$G(x,y;s,t) =: G((x,y);s,t) = \sum_{j,1} p_{j1} x^j y^1, \quad (1)$$

so erhalten wir für diese aus dem DGL-System (2.1-30) die quasilineare pDGL erster Ordnung

$$\frac{\partial G}{\partial t} + x [\alpha(x-1) - \beta(y-1)] \frac{\partial G}{\partial x} + y\beta (y-1) \frac{\partial G}{\partial y} = v \cdot \alpha (x-1) G \quad (2)$$

mit der Randbedingung

$$G(x,y;s,s) = x^i y^k \quad (3)$$

Dies weist man nach, indem man die Glieder des DGL-Systems (2.1-30) mit $x^j \cdot y^1$ multipliziert, über j und 1 summiert (erster Schritt) und dann die Summen mit Hilfe der Randbedingungen (2.1-31)

$$p_{j1}(s,t) = 0 \quad \text{für } i,j,k,1 \notin IJKL$$

so umformt (zweiter Schritt), daß sie sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen von G ausdrücken lassen.

Führt man dies im einzelnen aus, so ergibt der erste Schritt

$$\begin{aligned} \sum_{J \cap L} \frac{d}{dt} p_{j1} x^j y^1 &= -\alpha v \sum_{J \cap L} p_{j1} x^j y^1 + (\alpha - \beta) x \sum_{J \cap L} j \cdot p_{j1} x^{j-1} y^1 \\ &+ \beta y \sum_{J \cap L} 1 \cdot p_{j1} x^j y^{1-1} + \alpha \left[v \sum_{J \cap L} p_{j-1,1} x^j y^1 - \sum_{J \cap L} (j-1) p_{j-1,1} x^{j-1} y^1 \right] \\ &+ \beta \left[\sum_{J \cap L} j p_{j,1-1} x^j y^1 - \sum_{J \cap L} (1-1) p_{j,1-1} x^j y^1 \right], \quad (4) \end{aligned}$$

wobei

$$J = \{ j; j = i, i+1, \dots, v \}, \quad L = \{ l; l = k, k+1, \dots, j \}$$

dieselben Indexmengen wie in § 2.1 bezeichnen.

Man sieht sofort, daß sich hierin alle Summen außer denen in den eckigen Klammern entweder mit G oder einer der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{J \cap L} \frac{\partial}{\partial t} p_{i1} x^j \cdot y^l, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{J \cap L} j \cdot p_{j1} x^{j-1} y^l \quad (5, a, b)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sum_{J \cap L} l \cdot p_{j1} \cdot x^j \cdot y^{l-1} \quad (5c)$$

identifizieren lassen. Für die Summen

$$\Delta S := S_1 - S_2 \quad (6)$$

$$S_1 = v \sum_{J \cap L} p_{j-1,1} x^j \cdot y^l, \quad S_2 = \sum_{J \cap L} (j-1) p_{j-1,1} x^j \cdot y^l$$

in den eckigen Klammern mit dem Faktor α erhält man, wenn man

$$J^+ = \{ j; j = i+1, i+2, \dots, v+1 \}, \quad L^+ = \{ l; l = k+1, k+2, \dots, j+1 \}$$

setzt und beachtet, daß $p_{j1} = 0$ für $j = i-1 \notin J$ (zweiter Schritt)

$$\begin{aligned} S_1 &= v \cdot x \sum_{J^+ \cap L} p_{j-1,1} x^{j-1} y^l - v \cdot x^v \sum_L p_{v1} \cdot y^l \\ &= v \cdot x \sum_{J \cap L} p_{j1} x^j y^l - v x^v \sum_L p_{v1} \cdot y^l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= x \cdot \sum_{J^+ \cap L} (j-1) p_{j-1,1} x^{j-1} y^l - v x^v \sum_L p_{v1} y^l \\ &= x^2 \cdot \sum_{J \cap L} j \cdot p_{j1} \cdot x^{j-1} \cdot y^l - v x^v \sum_L p_{v1} \cdot y^l \end{aligned}$$

$$\Delta S = v \cdot x \cdot G - x^2 \frac{\partial G}{\partial x} \quad (7)$$

Analog erhält man für die Summen

$$\Delta S' := S'_1 - S'_2 \quad (8)$$

$$S'_1 = \sum_{J \cap L} j p_{j,1-1} x^j \cdot y^l, \quad S'_2 = \sum_{J \cap L} (l-1) p_{j,1-1} x^j \cdot y^l$$

in der eckigen Klammer mit dem Faktor β , da in L $p_{j,k-1} = 0$ ist

$$\begin{aligned}
 S'_1 &= xy \sum_{J \cap L^+} j \cdot p_{j,1-1} x^{j-1} y^{1-1} - xy \sum_J j \cdot p_{jj} x^{j-1} y^j \\
 &= xy \sum_{J \cap L} j \cdot p_{j1} x^{j-1} y^1 - \sum_J j \cdot p_{jj} x^j y^{j+1} \\
 S'_2 &= y^2 \sum_{J \cap L^+} (1-1) p_{j,1-1} x^j y^{1-2} - y^2 \sum_J j p_{jj} x^j y^{j-1} \\
 &= y^2 \sum_{J \cap L} 1 \cdot p_{j1} x^j y^{1-1} - \sum_J j \cdot p_{jj} x^j y^{j+1} \\
 \Delta S' &= xy \frac{\partial G}{\partial x} - y^2 \frac{\partial G}{\partial y} \tag{9}
 \end{aligned}$$

Jetzt braucht man nur noch die in (4) umgeformten Terme zusammenzufassen, um die pDGl (2) zu bestätigen.

Die Randbedingung für die partielle DGl folgt, wenn man die Randbedingung $p_{j1}(s,s) = \delta_{ij} \cdot \delta_{k1}$ für das gewöhnliche DGl-System in die Gf $G(x,y;s,t)$ einsetzt.

b) Berechnung der Erwartungswerte für die zufälligen Veränderlichen

$X(t)$ und $Y(t)$ aus der partiellen DGl für die erzeugende Funktion

Im allgemeinen ermittelt man die Erwartungswerte

$$E_X(t) := E[X(t)] = \kappa_{10}(t) = \alpha_{10}(t) \tag{10a}$$

$$E_Y(t) := E[Y(t)] = \kappa_{01}(t) = \alpha_{01}(t) \tag{10b}$$

eines zweidimensionalen stochastischen Prozesses über die erzeugende Funktion K bzw. M von dessen Semiinvarianten $\kappa_{ij}(t)$ bzw. Momenten $\alpha_{ij}(t)$.

Hier ist es aufgrund der speziellen Form der pDGl für die Gf G möglich, aus dieser ein leicht lösbares gekoppeltes System zweier gewöhnlicher DGl für $E_X(t)$ und $E_Y(t)$ herzuleiten.

Man erhält dieses, wenn man die pDGl für G nach x bzw. y differenziert und beachtet, daß für $x, y \rightarrow 1$

$$E_X(t) = \sum_{J \cap L} j p_{j1} = \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=1, y=1} \tag{11a}$$

$$E_Y(t) = \sum_{J \cap L} 1 p_{j1} = \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{x=1, y=1} \tag{12b}$$

und

$$G(x,y;s,t) \Big|_{x=1,y=1} = 1 \quad (12c)$$

gilt. Es ist also

$$\frac{d}{dt} E_X(t) + \alpha E_X(t) = v \cdot \alpha \quad (13a)$$

$$\frac{d}{dt} E_Y(t) - \beta E_X(t) + \beta E_Y(t) = 0 \quad (13b)$$

mit den Randbedingungen

$$E_X(0) = 0, \quad E_Y(0) = 0. \quad (14a,b)$$

Die DGl (13a) lässt sich unmittelbar lösen. Ihre homogene DGl wird durch

$$E_X(t) = C \exp(-\alpha t)$$

befriedigt und wenn man die Konstante C variiert, erhält man als Lösung für die inhomogene DGl

$$E_X(t) = v(1-q), \quad (15a)$$

wobei $q = \exp(-\alpha t)$.

Nun kann man auch die DGl (13b) lösen, wenn man diese Funktion einsetzt.

Dieselbe Lösungsmethode ergibt nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} E_Y(t) &= \frac{v}{\alpha - \beta} \left[\alpha (1 - \exp(-\beta t)) - \beta (1 - \exp(-\alpha t)) \right] \\ &= v(1-Q), \end{aligned} \quad (15b)$$

wobei $Q = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \exp(-\beta t) - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \exp(-\alpha t)$.

Die Erwartungswerte (15) entsprechen denen, die wir im Sonderfall $v \approx \infty$ verwendeten (vgl. Gl (1.3-2)).

§ 2.3 Direkte Herleitung der erzeugenden Funktion $G(x,y;s,t)$ des Kettenprozesses $Z(1,\nu)$ nach einer Methode von C. Palm

a) Anwendung der Methode von Palm

C. Palm [12] hat wohl als erster den Umstand benutzt, daß die Gf $G(x;t)$ eines eindimensionalen Markow-Prozesses $\{ X(t), t \geq 0 \}$ der pDGl

$$\frac{\partial G(x;t)}{\partial t} = \phi \left(\ln x, t, x \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x;t) \quad (1)$$

gehört, wenn der Grenzwert

$$\phi(\hat{i}, t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ln E \left[\exp(\hat{i} u \Delta X(t)) \mid X(t)=x \right] \quad (2)$$

(\hat{i} = imaginäre Einheit, $\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$) existiert.

Um die Funktion $\phi(\hat{i}, t, x)$ zu berechnen, braucht man lediglich die bedingten infinitesimalen W_n des Prozesses $X(t)$ zu kennen.

Wir benötigen hier eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens auf zweidimensionale Markow-Prozesse $\{ X(t), Y(t); t \geq 0 \}$. Die pDGl lautet dann, wie später in Abschnitt b) begründet wird,

$$\frac{\partial G(x,y;s,t)}{\partial t} = \phi \left(\ln x, \ln y, t, x \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y} \right) G(x,y;s,t) . \quad (3)$$

Dabei ist

$$\phi \left(\ln x, \ln y, t, x \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y} \right) = \sum_{\Delta i, \Delta k} x^{\Delta i} y^{\Delta k} q \left(t; \left(\Delta i, x \frac{\partial}{\partial x} \right), \left(\Delta k, y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) , \quad (4)$$

wenn man für die bedingten infinitesimalen W_n

$$P \left[\Delta X(t)=j-i, \Delta Y(t)=l-k \mid X(t)=i, Y(t)=k \right] = P \left[X(t+\Delta t)=j, Y(t+\Delta t)=l \mid X(t)=i, Y(t)=k \right] =: p(t, t+\Delta t; ij, kl) \quad (5a)$$

($p(t, t+\Delta t; ij, kl) = p_{ij;kl}(t, t+\Delta t)$, $\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$, $\Delta Y(t) = \dots$)

schreibt und die Intensitätsfunktionen q mittels

$$p(t, t+\Delta t; ij, kl) = q(t; (j-i, i), (1-k, k)) \cdot \Delta t \quad (5b)$$

für $(j \neq i) \vee (k \neq 1)$

$$p(t, t+\Delta t; ii, kk) = 1 + q(t; 0i, 0k) \cdot \Delta t \quad (5c)$$

für $(j = i) \wedge (k = 1)$

eingführt ($\vee :=$ logisches Oder, $\wedge :=$ logisches Und).

Wenn wir hervorheben wollen, daß wir die $zVn (\Delta X(t), \Delta Y(t))$ und $(X(t), Y(t))$ anstelle von $(X(t+\Delta t), Y(t+\Delta t))$ und $(X(t), Y(t))$ verwenden, setzen wir

$$p(t, t+\Delta t; (i, i+\Delta i), (k, k+\Delta k)) = q(t; (\Delta i, i), (\Delta k, k)) \cdot \Delta t$$

für $(\Delta i \neq 0) \vee (\Delta k \neq 0)$.

Im Fall $(\Delta i = 0) \wedge (\Delta k = 0)$ benutzen wir dieselbe Symbolik wie oben (5b).

Nun ist es leicht, die pDGl für die Gf $G(x, y; s, t)$ des Kettenprozesses $2(1, \nu)$ herzuleiten.

Mit den bedingten infinitesimalen W_n des Systems II (vgl. Gl (2.1-5))

$$P [X(t+\Delta t)=k+1, Y(t+\Delta t)=1 \mid X(t)=k, Y(t)=1] = (\nu-k)\alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad (6a)$$

$$P [X(t+\Delta t)=k, Y(t+\Delta t)=1+1 \mid X(t)=k, Y(t)=1] = (k-1)\beta \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad (6b)$$

$$P [X(t+\Delta t)=k, Y(t+\Delta t)=1 \mid X(t)=k, Y(t)=1] =$$

$$1 - [(\nu-k)\alpha + (k-1)\beta] \Delta t + o(\Delta t) \quad (6c)$$

und alle übrigen $W_n o(\Delta t)$ erhalten wir für die Intensitätsfunktionen

$$q(t; 1k, 01) = (\nu-k)\alpha \quad (7a)$$

$$q(t; 0k, 11) = (k-1)\beta \quad (7b)$$

$$q(t; 0k, 01) = - [(\nu-k)\alpha + (k-1)\beta] \quad . \quad (7c)$$

Man beachte, daß wegen

$$\sum_{j, l} p(t, t+\Delta t; ij, kl) = 1 \quad (8)$$

die Beziehung

$$\sum_{\Delta i, \Delta k} q(t; (\Delta i, i), (\Delta k, k)) = 0 \quad (9)$$

gelten muß.

Substituiert man für k den Differentialoperator $x \frac{\partial}{\partial x}$ und für l den Differentialoperator $y \frac{\partial}{\partial y}$, ergibt sich aus Gl (7)

$$\begin{aligned} \phi (\ln x, \ln y, t, x \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y}) &= x \alpha (v - x \frac{\partial}{\partial x}) + y \beta (x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}) \\ &- \alpha (v - x \frac{\partial}{\partial x}) - \beta (x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}) \end{aligned} \quad (10)$$

und wenn man in Gl (10) nach Ableitungen ordnet, aus Gl (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + x [\alpha(x-1) - \beta(y-1)] \frac{\partial G}{\partial x} + y \beta(y-1) \frac{\partial G}{\partial y} &= v \cdot \alpha (x-1) G \\ \text{mit } G &= G(x,y;s,t). \end{aligned} \quad (11)$$

Dies ist dieselbe pDGl für G , die wir in (§2.2) mit einer umständlicheren Methode gewonnen haben.

b) Begründung der Methode von Palm (siehe Bartlett [1], [2] p 83, Palm [12])

Wir leiten zunächst die Palm'sche pDGl für die Cf (=charakteristische Funktion)

$$C(u,v;t) = E \left[\exp (\hat{i} [u X(t) + v Y(t)]) \right] \quad (12)$$

eines zweidimensionalen Markow-Prozesses $\{ X(t), Y(t); t \geq 0 \}$ her und transformieren dann diese Gleichung vermöge (die Funktion $\phi(x,y)$ ist beliebig)

$$\begin{aligned} x &= \exp (\hat{i}u), \quad y = \exp (\hat{i}v) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{i}u} \phi(x,y) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \hat{i}u} = x \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{i}v} \phi(x,y) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{i}v} = y \frac{\partial}{\partial y} \phi(x,y) \end{aligned} \quad (13)$$

in eine pDGl für die Gf

$$G(x,y;t) = E (x^{X(t)} y^{Y(t)}) = C (-\hat{i} \ln x, -\hat{i} \ln y; t) . \quad (14)$$

Dann modifizieren wir unsere bisherigen Überlegungen um zu zeigen, daß diese pDGl auch noch gültig bleibt, wenn wir $G(x,y;t)$ durch $G(x,y;s,t)$ ersetzen.

Für die Herleitung der pDGl benötigen wir eine etwas tiefer liegende Beziehung, die wir vorab in einem Satz aussprechen. Der nachfolgende Beweis ist heuristisch (vgl. Parzen [13], p 51 ff) und setzt voraus, daß die Erwartungswerte existieren.

Satz

Für die zufälligen Variablen X_i, Y_i ($i=1,2$) und die Funktionen $g(X_1, Y_1), h(X_2, Y_2)$ gilt

$$\begin{aligned} I_1 &:= E [g(X_1, Y_1) \cdot E [h(X_2, Y_2) \mid X_1=x_1, Y_1=y_1]] \\ &= E [g(X_1, Y_1) \cdot h(X_2, Y_2)] =: I_r \quad . \quad (15) \end{aligned}$$

Ehe wir Gl (15) beweisen, sei noch folgende Bemerkung eingeschoben:

In Gl (14) erfüllen die Variablen x und y für die Gf G dieselbe Aufgabe wie die Variablen u und v in der Cf C .

In Gl (15) sind jedoch, entgegen unserer sonstigen Konvention, x_i und y_i Realisationen der zVn X_i bzw. Y_i ($i=1,2$).

Beweis

Seien X_1, Y_1, X_2, Y_2 vier zV, welche die Dichte $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$ zusammen mit der Randdichte

$$f_1(x_1, y_1) = \iint f(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_2 dy_2$$

und der bedingten Dichte

$$f_{2|1}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) = f(x_1, y_1, x_2, y_2) / f_1(x_1, y_1)$$

besitzen und alle auftretenden Integrale zunächst Riemannsche Integrale. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint\int g(x_1, y_1) E [h(X_2, Y_2) \mid X_1=x_1, Y_1=y_1] f(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ &= \iint g(x_1, y_1) E [h(X_2, Y_2) \mid X_1=x_1, Y_1=y_1] f_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad , \end{aligned}$$

was mit

$$E [h(X_2, Y_2) \mid X_1=x_1, Y_1=y_1] = \iint h(x_2, y_2) \cdot f_{2|1}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) dx_2 dy_2$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint g(x_1, y_1) \left\{ \iint h(x_2, y_2) f_{2|1}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) dx_2 dy_2 \right\} \\ &\quad \cdot f_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \end{aligned}$$

ergibt. Berücksichtigt man schließlich die Definition der bedingten Dichte $f_{2|1}$, folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint\int g(x_1, y_1) h(x_2, y_2) f(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ &= I_r \end{aligned}$$

Da man die oben benutzten Integrale auch als Stieltjesche Integrale auffassen kann, gilt (15) auch für diskrete Wn.]

Die Palm'sche pDG1 erhält man, wenn man in

$$\begin{aligned} \frac{C(u,v;t+\Delta t) - C(u,v;t)}{\Delta t} &= E \left[\frac{\exp(\hat{i}[uX(t+\Delta t) + vY(t+\Delta t)]) - \exp(\hat{i}[uX(t) + vY(t)])}{\Delta t} \right] \\ &= E \left[\left(\frac{\exp(\hat{i}[u\Delta X(t) + v\Delta Y(t)]) - 1}{\Delta t} \right) \exp(\hat{i}[uX(t) + vY(t)]) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

wobei $\Delta W(t) := W(t+\Delta t) - W(t)$ ($W = X, Y$) ist, die Größe Δt gegen Null streben läßt.

Dazu muß, wenn wir den Erwartungswert Gl (16) gemäß der Beziehung (15) mit $X_1 = X(t)$, $X_2 = X(t+\Delta t)$, $Y_1 = Y(t)$, $Y_2 = Y(t+\Delta t)$ umformen, in

$$\begin{aligned} E \left[\exp(\hat{i}[u \cdot X(t) + v \cdot Y(t)]) \right] E \left[\frac{\exp(\hat{i}[u\Delta X(t) + v\Delta Y(t)]) - 1}{\Delta t} \right. \\ \left. \middle| X(t)=k, Y(t)=1 \right] &= \\ E \left[\left(\frac{\exp(\hat{i}[u\Delta X(t) + v\Delta Y(t)]) - 1}{\Delta t} \right) \exp(\hat{i}[u \cdot X(t) + v \cdot Y(t)]) \right] & \quad (17) \end{aligned}$$

der Grenzwert

$$\psi(\hat{i}u, \hat{i}v, t, k, 1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[\frac{\exp(\hat{i}[u \cdot \Delta X(t) + v \cdot \Delta Y(t)]) - 1}{\Delta t} \right. \\ \left. \middle| X(t)=k, Y(t)=1 \right] \quad (18)$$

existieren. Dies trifft sicherlich zu, wenn in

$$\begin{aligned} E \left[\exp(\hat{i}[u\Delta X(t) + vY(t)]) - 1 \middle| X(t)=k, Y(t)=1 \right] &= \quad (19) \\ \sum_{\Delta k, \Delta 1} \left[\exp(\hat{i}(u\Delta k + v\Delta 1)) - 1 \right] \cdot P \left[\Delta X(t)=\Delta k, Y(t)=\Delta 1 \middle| X(t)=k, Y(t)=1 \right], \end{aligned}$$

wobei wir unter $X(t)$, $Y(t)$ ganzzahlige zV verstehen, die infinitesimalen Wn P von der Form

$$\begin{aligned} P \left[\Delta X(t)=\Delta k, \Delta Y(t)=\Delta 1 \middle| X(t)=k, Y(t)=1 \right] \\ = q(t; (\Delta k, k), (\Delta 1, 1)) \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad (20a) \\ \text{für } (\Delta k \neq 0) \vee (\Delta 1 \neq 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P [\Delta X(t)=0, \Delta Y(t)=0 \mid X(t)=k, Y(t)=1] \\
= 1 + q(t; (0,k), (0,1)) \Delta t + o(\Delta t) \quad (20b) \\
\text{für } (\Delta k = 0) \wedge (\Delta l = 0)
\end{aligned}$$

sind. Man erhält dann in Gl (19) $+ o(\Delta t)$.

$$E [\dots \mid \dots] = \Delta t \sum_{\Delta k, \Delta l} \exp (\hat{i} (u\Delta k + v\Delta l)) \cdot q(t; (\Delta k, k), (\Delta l, l)) \quad (21)$$

Damit haben wir aber erst die DGl

$$\frac{\partial C(u, v; t)}{\partial t} = E \left[\psi (\hat{i}u, \hat{i}v, t, X(t), Y(t)) \cdot \exp (\hat{i} [uX(t)+vY(t)]) \right] \quad (22)$$

gewonnen. In vielen interessierenden Fällen kann man jedoch annehmen, vgl. das Beispiel des Kettenprozesses $2(1, v)$, daß die q Monome

$$q(t; (\Delta k, k), (\Delta l, l)) = c(\Delta k, \Delta l) \cdot k^\kappa \cdot l^\lambda \quad (23)$$

mit $\kappa = \kappa(\Delta k, \Delta l)$ ganzzahlig
 $\lambda = \lambda(\Delta k, \Delta l)$.

sind und daher

$$\psi (\hat{i}u, \hat{i}v, t, k, l) = \sum_{\Delta k, \Delta l} c(\Delta k, \Delta l) \cdot \exp (\hat{i} (u\Delta k + v\Delta l)) \cdot k^\kappa \cdot l^\lambda \quad (24)$$

ist. Dann aber gilt mit

$$P(k, l) := P [X(t)=k, Y(t)=l]$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
& E [\psi (\hat{i}u, \hat{i}v, t, X(t), Y(t)) \cdot \exp (\hat{i} [uX(t)+vY(t)])] \\
&= \sum_{k, l} \left\{ \sum_{\Delta k, \Delta l} c(\Delta k, \Delta l) \cdot \exp (\hat{i} (u\Delta k + v\Delta l)) \cdot k^\kappa \cdot l^\lambda \right\} \exp (\hat{i} (uk+vl)) \cdot P(k, l) \\
&= \sum_{\Delta k, \Delta l} c(\Delta k, \Delta l) \cdot \exp (\hat{i} (u\Delta k + v\Delta l)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \hat{i}u} \right)^\kappa \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \hat{i}v} \right)^\lambda \cdot \\
&\quad \sum_{k, l} \exp (\hat{i} (uk+vl)) \cdot P(k, l) \\
&= \psi (\hat{i}u, \hat{i}v, t, \frac{\partial}{\partial \hat{i}u}, \frac{\partial}{\partial \hat{i}v}) \cdot C(u, v; t) \quad (25)
\end{aligned}$$

womit die pDGl (22) in

$$\frac{\partial C(u,v;t)}{\partial t} = \psi (\hat{i}u, \hat{i}v, t, \frac{\partial}{\partial iu}, \frac{\partial}{\partial iv}) \cdot C(u,v;t) \quad (26)$$

übergeht. Führt man die eingangs erwähnte Variablentransformation (13) aus, folgt

$$\frac{\partial G(x,y;t)}{\partial t} = \psi (\lnx, \lny, t, x \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y}) \cdot G(x,y;t) \quad (27)$$

Die pDGl'n (26) und (27) gelten auch noch, wenn man die Cf $C(u,v;t)$ durch

$$C(u,v;s,t) := E \left[\exp (\hat{i}[u X(t) + v Y(t)]) \mid X(s) = k_s, Y(s) = 1_s \right] \quad (28)$$

und die entsprechende Gf $G(x,y;t)$ durch $G(x,y;s,t)$ ersetzt.

Um dies einzusehen hat man in der vorangegangenen Herleitung anstelle von Gl (15) die Beziehung

$$\begin{aligned} & E \left[g(X_1, Y_1) \cdot E \left[h(X_2, Y_2) \mid X_1=x_1, Y_1=y_1 \right] \mid X_3=x_3, Y_3=y_3 \right] \\ &= E \left[g(X_1, Y_1) \cdot h(X_2, Y_2) \mid X_3=x_3, Y_3=y_3 \right] \end{aligned} \quad (29)$$

und anstelle der WV $P(k,1)$ die bedingte WV

$$P(k1 \mid k_s 1_s) := P \left[X(t)=k, Y(t)=1 \mid X(s)=k_s, Y(s)=1_s \right]$$

zu verwenden.

§ 2.4 Lösung der partiellen DGI für die erzeugende Funktion $G(x,y;s,t)$
des Kettenprozesses $Z(1,v)$

Die Gf $G(x,y;s,t)$ des (X,Y) -Prozesses gehorcht der quasilinearen pDGI (2.2-2).

Für solche DGI gilt folgender ... (z.B. Smirnow [15], p 266 ff)

Satz

Um die allgemeine Lösung einer quasilinearen pDGI erster Ordnung in n unabhängigen Veränderlichen x_i

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n; u) \quad (1)$$

angeben zu können, hat man zunächst n voneinander unabhängige Integrale des zugehörigen Systems der gewöhnlichen DGI, der sog. Charakteristiken

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} \quad (2)$$

aufzusuchen. Lauten diese Integrale

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

so ist die allgemeine Lösung der pDGI in impliziter Form

$$\phi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0, \quad (4)$$

wobei ϕ eine willkürliche Funktion der Argumente ist.

Möchte man aus dieser allgemeinen eine spezielle Lösung auswählen, welche die gegebene $(n-1)$ - dimensionale Mannigfaltigkeit ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$x_k = x_k(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \quad u = u(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \quad (5)$$

enthält, so setzt man die x_k und u aus Gl (5) in die ϕ_i der Gl (3) ein und eliminiert die $(n-1)$ Elemente t_1, t_2, \dots, t_{n-1} aus den so entstandenen Gln. Dabei entsteht zwischen den willkürlichen Konstanten C_i die Beziehung

$$\phi(C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

welche die spezielle Form der Funktion ϕ bestimmt.

a) Allgemeine Lösung der pDGL für $G(x,y;s,t)$

Gemäß dem zuletzt genannten Satz ermitteln wir zunächst vier unabhängige Integrale des Systems der Charakteristiken

$$\frac{ds}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{dx}{x[\alpha(x-1) - \beta(y-1)]} = \frac{dy}{\beta y \cdot (y-1)} = \frac{dG}{\nu \alpha \cdot (x-1) G} \quad (6)$$

Wie sich im folgenden erweisen wird, ist es zweckmäßig, hierfür folgende DGLn aus dem System (6) zu wählen und in der angegebenen Reihenfolge zu behandeln

$$ds = 0 \quad (7a)$$

$$dt = \frac{dy}{\beta y \cdot (y-1)} \quad (7b)$$

$$\frac{dx}{[\alpha(x-1) - \beta(y-1)]} = \frac{dy}{\beta y \cdot (y-1)} \quad (7c)$$

$$dt = \frac{dG}{\nu \alpha \cdot (x-1) G} \quad (7d)$$

Lösung des DGL-Systems der Charakteristiken1. DGL

Lösung: $s = C_1$ (8a)

2. DGL

Partialbruchzerlegung für die Variable y ergibt $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$,

daher Lösung: $\frac{y-1}{y} \exp(-\beta t) = C_2$. (8b)

3. DGL

Betrachtet man in dieser DGL x als abhängige und y als unabhängige Variable, so erhält man mit $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{\gamma}{y \cdot (y-1)} x^2 - \frac{(1-\gamma) - y}{y \cdot (y-1)} x = 0 \quad (9)$$

Dies ist aber eine Bernoullische DGL der Form (vgl. Kamke [9], p 19)

$$\frac{dx}{dy} + a(y) \cdot x + b(y) \cdot x^\delta = 0,$$

wobei $\delta = 2$ ist.

Aus ihr entsteht über die Transformation $u(y) = x^{1-\delta} = \frac{1}{x}$ die lineare DGI

$$\frac{du}{dy} + v(y) u + w(y) = 0 \quad (10)$$

$$\text{mit } v(y) = \frac{(1-\gamma) - y}{y \cdot (y-1)}, \quad w(y) = \frac{\gamma}{y \cdot (y-1)} .$$

Die allgemeine lineare DGI (10) hat, wie man mit der Methode der Variation der Konstanten zeigen kann, die allgemeine Lösung

$$u(y) = [C - W(y)] \exp(-V(y)) \quad (11)$$

mit

$$V(y) = \int v(y) dy, \quad W(y) = \int w(y) \exp(+V(y)) dy .$$

Setzt man darin die speziellen Werte für $v(y)$ und $w(y)$ ein, so ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} V(y) &= \int \frac{(1-\gamma) - y}{y \cdot (y-1)} dy = \ln \frac{1}{y} \left(\frac{y}{y-1}\right)^\gamma \\ W(y) &= \int \frac{1}{y} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{\gamma+1} dy \quad \text{mit der Subst. } z = \frac{y}{y-1} \\ &= \gamma \int [z^{\gamma-2} - z^{\gamma-1}] dz = \frac{\gamma}{\gamma-1} z^{\gamma-1} - z^\gamma \\ &= \left(\frac{y}{y-1}\right)^{\gamma-1} \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{y}{y-1} \right] \end{aligned}$$

für die lineare DGI (10) die Lösung

$$u(y) = \frac{\gamma-y}{\gamma-1} + C \cdot \left(\frac{y-1}{y}\right)^\gamma y . \quad (12)$$

Mithin wird die ursprünglich vorliegende DGI (9) infolge $u = \frac{1}{x}$ durch

$$\frac{1 - \left(\frac{\gamma-y}{\gamma-1}\right) x}{\left(\frac{y-1}{y}\right)^\gamma xy} = C \quad (13)$$

befriedigt. Wie sich später erweist, ist es für manche Zwecke günstiger, die Lösung (13) in anderer Gestalt zu benutzen.

Beachtet man, daß wegen der Lösung (8b) der zweiten DGI

$$\left(\frac{y-1}{y}\right)^\gamma = \exp(+\alpha t) \cdot C_2^\gamma$$

ist und mit C_2 und C auch $C_3 = C_2^{\gamma} \cdot C$ als Integrationskonstante gewählt werden kann, so lautet eine dieser zu Gl (13) äquivalenten Formen

$$\frac{1 - \left(\frac{\gamma-y}{\gamma-1}\right) x}{xy} \exp(-\alpha t) = C_3$$

oder

$$\left[\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} \right] \exp(-\alpha t) = C_3 \quad (8c)$$

Eine andere zu (13) äquivalente Form ergibt sich, wenn man die letzte Gleichung nach x auflöst und y gemäß Gl (8b) in der Variablen t ausdrückt. Es ist dann

$$\alpha(x-1) = \frac{+ \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} C_2 \exp(+\beta t) - \alpha C_3 \exp(+\alpha t)}{1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} C_2 \exp(+\beta t) + C_3 \exp(+\alpha t)}$$

oder

$$\alpha(x-1) = - \frac{\frac{d}{dt} h(t)}{h(t)}, \quad (14)$$

wenn man

$$h(t) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \cdot C_2 \cdot \exp(+\beta t) + C_3 \exp(+\alpha t) \quad (15)$$

setzt.

4. DGl

Diese DGl läßt sich unmittelbar integrieren, wenn man die Beziehung (14) verwendet. Man erhält

$$\frac{dG}{G} = -\nu \frac{d h(t)}{h(t)},$$

also

$$G \cdot h(t)^{\nu} = C_4.$$

Ersetzt man nun noch in der Funktion $h(t)$ die Konstanten C_2 und C_3 gemäß den Gl'n (8b) und 8c), so vereinfacht sich diese Lösung wegen

$$h(t) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{y-1}{y} + \left(\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} \right) = \frac{1}{xy}$$

zu

$$\frac{G}{(xy)^v} = C_4 \quad (8d)$$

Mit den vier unabhängigen Integralen $\phi_i(x,y;s,t) = C_i$ ($i = 1,2,3,4$) des DGl-Systems der Charakteristiken lautet nun die allgemeine Lösung der pDGl

$$\phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = 0 \quad (16)$$

oder, da ϕ eine willkürliche Funktion der Argumente ist

$$\phi_4 = \psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (17)$$

Die zuletzt angegebene Form ist mit $\phi_4 = G/(xy)^v$ in unserem Fall günstiger. Sie ergibt

$$G(x,y;s,t) = (xy)^v \psi\left(s, \left(1 - \frac{1}{y}\right) \exp(-\beta t), \left(\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) \exp(-\alpha t)\right) \quad (18)$$

b) Spezielle Lösung der pDGl für $G(x,y;s,t)$

Die spezielle Form der Funktion ψ ermitteln wir über die Randbedingung

$$G(x,y;s,s) = x^i y^k \quad (19)$$

Nach dieser ist

$$\begin{aligned} \psi\left(s, \left(1 - \frac{1}{y}\right) \exp(-\beta s), \left(\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) \exp(-\alpha s)\right) \\ = \left(\frac{1}{x}\right)^{v-i} \left(\frac{1}{y}\right)^{v-k} \end{aligned} \quad (20)$$

Damit ist die Funktion ψ völlig bestimmt, jedoch wegen ihrer komplizierten Argumente noch recht unhandlich.

Um $\psi(s,\eta,\zeta)$ mit den Argumenten s,η,ζ zu bekommen, lösen wir daher

$$\eta = \left(1 - \frac{1}{y}\right) \exp(-\beta s) \quad (21a)$$

$$\zeta = \left(\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) \exp(-\alpha s) \quad (21b)$$

nach x und y auf.

Dies ist leicht zu bewerkstelligen, da aus der ersten der beiden letzten Gln

$$\frac{1}{y} = 1 - \eta \exp(+\beta s)$$

folgt, was in die zweite eingesetzt

$$\zeta \cdot \exp(+\alpha s) = \left[\frac{1}{x} (1 - \eta \exp(+\beta s)) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (1 - \eta \exp(+\beta s)) + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right]$$

oder

$$\frac{1}{x} = \frac{1 + \zeta \exp(+\alpha s) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \eta \exp(+\beta s)}{1 - \eta \exp(+\beta s)}$$

ergibt. Die gesuchte Funktion $\psi(s, \eta, \zeta)$ hat daher die Gestalt

$$\begin{aligned} \psi(s, \eta, \zeta) &= \left(\frac{1}{x}\right)^{v-i} \left(\frac{1}{y}\right)^{v-k} \\ &= \left[\frac{1 + \zeta \exp(+\alpha s) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \eta \exp(+\beta s)}{1 - \eta \exp(+\beta s)} \right]^{v-i} \\ &\quad \cdot \left[1 - \eta \exp(+\beta s) \right]^{v-k} \end{aligned} \quad (22)$$

Setzen wir nun

$$\eta = \left(1 - \frac{1}{y}\right) \exp(-\alpha t) \quad (23a)$$

$$\zeta = \left(\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta}\right) \exp(-\alpha t), \quad (23b)$$

so ist formal

$$G(x, y; s, t) = (xy)^v \cdot \psi(s, \eta, \zeta) \quad (24)$$

die Gf der Übergangs-Wn unseres zweidimensionalen Prozesses.

Einen expliziten Ausdruck für $G(x, y; s, t)$ bekommt man, wenn man η und ζ in $\psi(s, \eta, \zeta)$ Gl(22) substituiert.

Diese Rechnung ist etwas umständlich. Zunächst folgt

$$\begin{aligned} G(x, y; s, t) &= (xy)^v \\ &\cdot \left[\frac{xy + 1 - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta}{\alpha - \beta} xy \exp(-\alpha(t-s)) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} x (y-1) \exp(-\beta(t-s))}{xy - x (y-1) \exp(-\beta(t-s))} \right]^{v-i} \\ &\cdot \left[\frac{y - (y-1) \exp(-\beta(t-s))}{y} \right]^v \end{aligned} \quad (25)$$

Ordnen wir nun die Terme des Zählers des Bruches in der ersten eckigen Klammer nach Potenzen von x , y und xy , so wird dieser mit $u := (t-s)$ zu

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &= \exp(-\alpha u) + \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta u) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha u) \right) x \\ &\quad + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha u) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta u) \right) xy \\ &= q_{\alpha}(u) + (Q(u) - q_{\alpha}(u)) x + (1 - Q(u)) xy, \end{aligned} \quad (26)$$

wenn man die Identität

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta} [\exp(-\beta u) - \exp(-\alpha u)] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta u) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha u) - \exp(-\alpha u)$$

berücksichtigt und die Größen

$$q_{\lambda}(u) = \exp(-\lambda u), \quad Q(u) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta u) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha u)$$

einführt.

Daher ergibt Gl (25)

$$\begin{aligned} G(x,y;s,t) &= x^i \left[q_{\alpha}(u) + (Q(u) - q_{\alpha}(u)) x + (1 - Q(u)) xy \right]^{v-i} \\ &\quad \cdot y^k \left[q_{\beta}(u) + (1 - q_{\beta}(u)) y \right]^{i-k}, \end{aligned} \quad (28)$$

wobei $i > k$, $u = (t-s)$.

Übrigens wollen wir künftig, wo es aus dem Zusammenhang hervorgeht, anstelle von $q_{\lambda}(u)$ und $Q(u)$ bzw. $q_{\lambda}(t)$ und $Q(t)$ auch einfach q und Q schreiben. Kommen dagegen $q_{\alpha}(u)$ und $q_{\beta}(u)$ nebeneinander vor, benutzen wir $q := q_{\alpha}$ und $q' := q_{\beta}$.

c) Sonderfälle und Interpretation der Gf $G(x,y;s,t)$

"Repräsentative" WV

Setzen wir $i = k = 0$, $s = 0$, so erhalten wir die Gf der in § 1.4 Gl (1.4-15) erwähnten repräsentativen WV des Kettenprozesses $2(1,v)$

$$\begin{aligned} G_{2v}(x,y;t) &:= G(x,y;0,t) \\ &= \sum_{j,1} P [X(t)=j, Y(t)=1 \mid X(0)=0, Y(0)=0] x^j y^1 \\ &= [q_{\alpha}(t) + (Q(t) - q_{\alpha}(t)) x + (1 - Q(t)) xy]^v. \end{aligned} \quad (29)$$

Jedoch lassen sich aus der Gf Gl (28) auch die Gfn der Komponentenprozesse des (X,Y)-Prozesses entnehmen.

X - Prozess

Hierzu betrachten wir in Gl (28) den Spezialfall $k = 0, y = 1$, d.h.

$$\begin{aligned} G(x,1;s,t) &= \sum_j P [X(t)=j | X(s)=i, Y(s)=0] x^j \\ &= x^i [q_\alpha(u) + (1-q_\alpha(u)) x]^{v-i} . \end{aligned} \quad (30)$$

Wegen der Voraussetzung Gl (2.1-4) gilt

$$P [X(t)=j | X(s)=i, Y(s)=0] = P [X(t)=j | X(s)=i] \quad (31)$$

und daher für die Gf des X-Prozesses

$$G_{1v}(x;s,t) = G(x,1;s,t) . \quad (32)$$

Wie bereits in § 1.2 besprochen, gehorcht $G_{1v}(x;s,t)$ der pDGl

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \lambda(t) \cdot w(w-1) \frac{\partial G}{\partial w} = v \cdot \lambda(t) \cdot (w-1) \cdot G \quad (33)$$

mit

$$w = x, \lambda(t) = - \frac{d q_\alpha(t)/dt}{q_\alpha(t)} = \alpha, \quad G = G_{1v}(w;s,t) .$$

Y - Prozess

Damit "nur noch der Y-Prozess abläuft", muß in Gl (28) $k = i$ und $x = 1$ sein. In diesem Falle ist

$$P [Y(t)=1 | Y(s)=k] = P [Y(t)=1 | X(s)=k, Y(s)=k] \quad (34)$$

und daher

$$\begin{aligned} G_{1v}(y;s,t) &= G(1,y;s,t) = \sum_1 P [Y(t)=1 | X(s)=k, Y(s)=k] y^1 \\ &= y^k [Q(u) + (1-Q(u)) y]^{v-k} . \end{aligned} \quad (35)$$

Die Gf Gl (35) läßt sich auch aus einer pDGl gewinnen. Diese folgt aus dem System infinitesimaler Übergangs-Wn des Y-Prozesses (siehe Gl (2.0-1) mit

$\lambda(t)$ gemäß Gl (2.0-3) und hat die Form der pDGl Gl (33) mit

$$w = y, \quad \lambda(t) = - \frac{d Q(t)/dt}{Q(t)}, \quad G = G_{1\lambda}(y;s,t) \quad (36)$$

Interpretation der Gf $G(x,y;s,t)$

Zum Schluß interpretieren wir die Gf Gl (28) mit Hilfe der Gf Gl (29). Dies ist von einiger Bedeutung, da die Gf Gl (29) auch, und zwar sehr viel leichter, mit der kombinatorischen Methode gewonnen werden kann.

Wir setzen wie in Gl (28) voraus, daß der (X,Y) -Prozeß zum Zeitpunkt s den Wert $(X(s)=i, Y(s)=k)$ besitzt und sich damit $(v-i)$ Nukleide (= Gruppe A) im Zustand A und $(i-k)$ Nukleide (= Gruppe B) im Zustand B befinden.

Sind nun G_A bzw. G_B die Gfn dieser beiden Gruppen, so behaupten wird, daß die gesuchte Gf der Beziehung

$$G(x,y;s,t) = G_A \cdot G_B \quad (37)$$

mit

$$G_A = x^i \left[q_\alpha(u) + (Q(u) - q_\alpha(u)) x + (1-Q(u)) xy \right]^{v-i} \quad (38a)$$

$$G_B = y^k \left[q_\beta(u) + (1-q_\beta(u)) y \right]^{i-k} \quad (38b)$$

gehört.

Wir weisen zunächst Gl (37) nach. Dies ist leicht möglich, wenn wir für die zVn $X(t)$ und $Y(t)$ in Gruppe A (B) die zVn X_A, Y_A (X_B, Y_B) einführen. Es ist nämlich dann

$$X(t) = X_A(t), \quad X_B(t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0 \quad (39)$$

$$Y(t) = Y_A(t) + Y_B(t) \quad .$$

Nun zerfallen bis zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq s$ ($u:=t-s$) die $(v-i)$ Nukleide der Gruppe A in die Folgezustände B und C unabhängig von den $(i-k)$ Nukleiden der Gruppe B; und diese wiederum zerfallen bis zu demselben Zeitpunkt t in den Zustand C unabhängig von den $(v-i)$ Nukleiden der Gruppe A. Daher sind die zufälligen Vektoren $(X_A(t), Y_A(t))$ und $(X_B(t), Y_B(t))$ voneinander statistisch unabhängig und Gl (37) gültig.

Die Gf Gl (38a) folgt aus Gl (29), wenn wir bedenken, daß der (X,Y) -Prozeß zeitlich homogen ist, wir also t in $u = t-s$ umeichen dürfen. Der Faktor x^i

berücksichtigt die "Anfangsbedingung", daß zum Zeitpunkt s bereits i Nukleide vom Zustand A in die Folgezustände übergegangen sind.

Die Gf G_B G1 (38b) ist nichts anderes als ein "X"-Prozeß, der vom Zustand B anstelle des Zustands A ausgeht.

Damit ist gezeigt, daß die allgemeine Gf G1 (28) aus der speziellen Gf G1 (29) hergeleitet werden kann.

§ 2.5 Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij;kl}(s,t)$ des Kettenprozesses $Z(1,v)$ aus der erzeugenden Funktion $G(x,y;s,t)$

Die Gf $G(x,y;s,t)$ ist so beschaffen, daß man hier kein tieferliegendes Verfahren braucht, wie z.B. die Methode des steilsten Anstiegs [8], um die Übergangswn $p_{ij;kl}$ zu berechnen.

Es genügt der folgende Hilfssatz für die Multiplikation von zwei Summen mit endlich vielen Gliedern:

Hilfssatz

Für endliche m_1, n_1 gilt, wenn $m_1 < n_1$ ist,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{m_1} a_m y^m \right) \left(\sum_{n=0}^{n_1} b_n y^n \right) &= \sum_{l=0}^{m_1} \left(\sum_{m=0}^l a_m b_{l-m} \right) y^l \\ + \sum_{l=m_1+1}^{n_1-1} \left(\sum_{m=0}^{m_1} a_m b_{l-m} \right) y^l &+ \sum_{l=n_1}^{m_1+n_1} \left(\sum_{m=l-n_1}^{m_1} a_m b_{l-m} \right) y^l \end{aligned} \quad (1)$$

und, wenn $m_1 = n_1$ ist,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{m_1} a_m y^m \right) \left(\sum_{n=0}^{m_1} b_n y^n \right) &= \\ \sum_{l=0}^{m_1} \left(\sum_{m=0}^l a_m b_{l-m} \right) y^l &+ \sum_{l=m_1+1}^{2m_1} \left(\sum_{m=l-m_1}^{m_1} a_m b_{l-m} \right) y^l \end{aligned} \quad (2)$$

In beiden Zerlegungen hat die erste Summe auf der rechten Seite die Form der Cauchy'schen Darstellung eines Produkts zweier unendlicher Summen.

Beweis des Hilfssatzes

Statt eines formalen Beweises geben wir zwei Beispiele, nach denen die Gültigkeit des Hilfssatzes unmittelbar plausibel erscheint.

Es ist

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 y + a_2 y^2) \cdot (b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4) &= F_1 \cdot F_2 = \\ \left[\begin{array}{l} a_0 b_0 + a_0 b_1 y + a_0 b_2 y^2 \\ + a_1 b_0 y + a_1 b_1 y^2 \\ + a_2 b_0 y^2 \end{array} \right] &+ \left[\begin{array}{l} a_0 b_3 y^3 \\ + a_1 b_2 y^3 \\ + a_2 b_1 y^3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} a_0 b_4 y^4 \\ + a_1 b_3 y^4 + a_1 b_4 y^5 \\ + a_2 b_2 y^4 + a_2 b_3 y^5 + a_2 b_4 y^6 \end{array} \right] \end{aligned}$$

und, wenn man dem zweiten Faktor F_2 den Summanden mit der nächsthöheren Potenz in y hinzufügt.

$$(a_0 + a_1 y + a_2 y^2) \cdot (b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + b_5 y^5) = F_1 \cdot F_2 =$$

$a_0 b_0$	$+ a_0 b_1 y + a_0 b_2 y^2$	$+ a_0 b_3 y^3 + a_0 b_4 y^4$	$+ a_0 b_5 y^5$
	$+ a_1 b_0 y + a_1 b_1 y^2$	$+ a_1 b_2 y^3 + a_1 b_3 y^4$	$+ a_1 b_4 y^5 + a_1 b_5 y^6$
	$+ a_2 b_0 y^2$	$+ a_2 b_1 y^3 + a_2 b_2 y^4$	$+ a_2 b_3 y^5 + a_2 b_4 y^6 + a_2 b_5 y^7$

Es ergeben sich jeweils 3 Blöcke unterschiedlicher Struktur, wobei in jeder Spalte der gesamten Anordnung die Summe der Indizes $(i+j)$ des Produktes $a_i b_j$ konstant bleibt.

Der linke Block hat als höchste Potenz in y die höchste Potenz des ersten Faktors F_1 . Im rechten Block ist die niederste Potenz in y die höchste Potenz des zweiten Faktors F_2 und die höchste Potenz in y die Summe der höchsten Potenzen der beiden Faktoren F_1 und F_2 .

Ist $m_1 = n_1$, entfällt der mittlere Block. Die untere Grenze des äußeren Summe des rechten Blocks muß aber dann um eine Einheit erhöht werden, da sonst der Term mit $l = m_1$ doppelt gezählt wird.]

Nun können wir die Gf $G(x,y;s,t)$ nach Potenzen von $x^i y^l$ entwickeln. Wir benutzen die Abkürzungen

$$G(x,y;s,t) = G_A \cdot G_B \quad (3)$$

$$G_A = x^i \left[q + \left[(Q-q) + (1-Q)y \right] x \right]^{v-i}$$

$$G_B = y^k \left[q' + (1-q')y \right]^{i-k}$$

$$q = \exp(-\alpha(t-s)), \quad q' = \exp(-\beta(t-s)),$$

$$Q = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta(t-s)) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha(t-s)).$$

Für den Faktor G_A erhält man, wenn man den binomischen Satz zweimal anwendet

$$G_A = x^i \left[q + rx \right]^{v-i} = x^i \sum_{j=0}^{v-i} \binom{v-i}{j} q^{(v-i)-j} r^j x^j, \quad (4)$$

wobei

$$r^j = [(Q-q) + (1-Q)y]^j = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (Q-q)^{j-m} (1-Q)^m y^m$$

ist.

Nimmt man x^i in die Summe hinein, folgt

$$G_A = \sum_{j'=i}^v \binom{v-i}{j'-i} q^{v-j'} r^{j'-i} x^{j'} \quad (5)$$

und setzt man schließlich

$$c_j = \binom{v-i}{j-i} q^{v-j}, \quad b_{jm} = \binom{j-i}{m} (Q-q)^{(j-i)-m} (1-Q)^m, \quad (6a,b)$$

so ist

$$G_A = \sum_{j=i}^v c_j x^j \sum_{m=0}^{j-i} b_{jm} y^m. \quad (7)$$

Mit derselben Methode berechnet man für den Faktor G_B

$$G_B = y^k \sum_{n=0}^{i-k} a_n y^n, \quad (8)$$

wobei

$$a_n = \binom{i-k}{n} q' (i-k)^{-n} (1-q')^n.$$

Somit bekommen wir für die Gf

$$G(x,y;s,t) = \sum_{j=i}^v c_j x^j y^k \left[\left(\sum_{m=0}^{j-i} b_{jm} y^m \right) \left(\sum_{n=0}^{i-k} a_n y^n \right) \right]. \quad (9)$$

Das Produkt

$$H = \left(\sum_{m=0}^{i-k} a_m y^m \right) \left(\sum_{n=0}^{j-i} b_{jn} y^n \right) \quad (10)$$

behandeln wir mittels des Hilfssatzes weiter, wobei jedoch die drei Fälle

$$i-k \leq j-i \quad \text{d.h.} \quad j \geq 2i-k$$

zu unterscheiden sind.

Wir geben nur die Rechnung für den Fall $j > 2i-k$ im Detail wieder, die beiden übrigen Fälle lassen sich analog erledigen.

Formt man das Produkt H mit dem Hilfssatz um, folgt

$$G(x,y;s,t) = \sum_{j=i}^v c_j x^j y^k \left\{ \sum_{l=0}^{i-k} \left(\sum_{m=0}^l a_m b_{j,1-m} \right) y^l + \sum_{l=(i-k)+1}^{(j-i)-1} \left(\sum_{m=0}^{i-k} a_m b_{j,1-m} \right) y^l + \sum_{l=j-i}^{j-k} \left(\sum_{m=1-(j-i)}^{i-k} a_m b_{j,1-m} \right) y^l \right\} \quad (11)$$

oder, wenn man y^k in die 1 - Summe einbezieht

$$G(x,y;s,t) = \sum_{j=i}^v c_j x^j \left\{ \sum_{l=k}^i \left(\sum_{m=0}^{1-k} a_m b_{j,1-k-m} \right) y^l + \sum_{l=i+1}^{j-(i-k)-1} \left(\sum_{m=0}^{i-k} a_m b_{j,1-k-m} \right) y^l + \sum_{l=j-(i-k)}^j \left(\sum_{m=(1-k)-(j-i)}^{i-k} a_m b_{j,1-k-m} \right) y^l \right\} \quad (12)$$

$$= \sum_{j=i}^v \sum_{l=k}^j P_{ij;k1} x^j y^l . \quad (13)$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich unmittelbar die Übergangs-Wn $P_{ij;k1}$ für $j > 2i-k$, die man der Tabelle 2-1 für alle drei Fälle entnehme.

Die Berechnung dieser Übergangs-Wn $P(jl;t|ik;s) := p_{ij;k1}(s,t)$ gemäß den Formeln G1 (18) bis G1 (20) nimmt man am besten mit Hilfe einer Tabelle vor, die für den Fall $v=2$ folgendermaßen lautet:

Tabelle zur Berechnung der Übergangs-Wn für $v=2$

i	k	j	1	(2i-k)	$\begin{matrix} j \\ (2i-k) < j \end{matrix}$	$\begin{matrix} j \\ (2i-k) = j \end{matrix}$	$\begin{matrix} j \\ (2i-k) > j \end{matrix}$
0	0	0	0	0	-	0	-
		1	0,1	0	1	-	-
		2	0,1,2	0	2	-	-
1	0	1	0,1	2	-	-	1
		2	0,1,2	2	-	2	-
1	1	1	1	1	-	1	-
		2	1,2	1	2	-	-
2	0	2	0,1,2	4	-	-	2
2	1	2	1,2	3	-	-	2
2	2	2	2	2	-	2	-

Die Tabelle wird spaltenweise aufgebaut. In den Spalten 1 und 2 steht die Hypothese $H(s) = \{X(s)=i, Y(s)=k\}$. Dann werden für die bei dieser Hypothese möglichen j -Werte der zV $X(t)$ die möglichen l -Werte der zV $Y(t)$ eingetragen (Spalte 3 und 4).

Schließlich berechnen wir den Wert $(2i-k)$ (Spalte 5), um entscheiden zu können, welcher der drei Fälle für einen bestimmten j -Wert vorliegt (Spalte 6 bis 8).

Um die berechneten Übergangs-Wn zu kontrollieren, können wir für alle zulässigen Hypothesen die Beziehung

$$\sum_{j,l} P(jl;t|ik;s) = 1$$

heranziehen.

Man beachte noch, daß in der Tabelle 2-1 nur solche (m_1, m_2) -Werte ausgewählt werden dürfen, für die $l_1 \leq l_2$ ist.

Natürlich erhalten wir im Fall $v=2$ die Übergangs-Wn schneller, wenn wir die Faktoren in $G(x,y;s,t)$ $G_1(3)$ ausmultiplizieren.

Die WV für $i = k = 0$, $s = 0$ läßt sich entweder mit Hilfe des binomischen Satzes direkt aus

$$G(x,y;0,t) = [q + [(Q-q) + (1-Q)y] x]^v \quad (14)$$

$$q = \exp(-\alpha t), \quad Q = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha t) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\beta t)$$

oder aus der allgemeinen Formel für $j > 0$ bzw. $j = 0$ gewinnen. Man erhält

$$p_{j1}(t) := p_{0j;01} = \binom{v}{j} \binom{j}{1} q^{v-j} (Q-q)^{j-1} (1-Q)^1. \quad (15)$$

Daraus ergibt sich leicht die Randverteilung für die zV X ($0 \leq j \leq v$)

$$\begin{aligned} p_{j\cdot}(t) &= \sum_{l=0}^j p_{jl}(t) = \binom{v}{j} q^{v-j} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (Q-q)^{j-1} (1-Q)^l \\ &= \binom{v}{j} q^{v-j} (Q-q+1-Q)^j = \binom{v}{j} (1-q)^j q^{v-j} \end{aligned} \quad (16)$$

und wegen $\binom{v}{j} \binom{j}{1} = \binom{v}{1} \binom{v-1}{j-1}$ bzw. $j \geq 1$ die Randverteilung für die zV Y ($0 \leq l \leq v$)

$$\begin{aligned}
P_{\cdot 1}(t) &= \sum_{j=0}^v P_{j1}(t) = \binom{v}{1} (1-Q)^1 \sum_{j=1}^v \binom{v-1}{j-1} q^{v-j} (Q-q)^{j-1} \\
&= \binom{v}{1} (1-Q)^1 \cdot \sum_{j'=0}^{v-1} \binom{v-1}{j'} q^{(v-1)-j'} (Q-q)^{j'} \\
&= \binom{v}{1} \cdot (1-Q)^1 \cdot (q+Q-q)^{v-1} = \binom{v}{1} \cdot (1-Q)^1 Q^{v-1} \quad . \quad (17)
\end{aligned}$$

Tabelle 2-1Explizite Ausdrücke für die Übergangs-Wn

$$P_{ij;k1} = P [X(t)=j, Y(t)=1 \mid X(s)=i, Y(s)=k] \quad \text{mit } t > s$$

Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
q &= \exp(-\alpha u), & q' &= \exp(-\beta u), \\
Q &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta u) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha u), & u &:= (t-s) \quad .
\end{aligned}$$

Fall: $j > 2i-k$ Untere (1) und obere Grenzen (2) für die Indizes j, l, m (i, k, v fest)

j_1	j_2	l_1	l_2	m_1	m_2
		k	i	0	$1-k$
i	v	$i+1$	$j-(i-k)-1$	0	$i-k$
		$j-(i-k)$	j	$(1-k)-(j-k)$	$i-k$

$$\begin{aligned}
P_{ij;k1} &= \binom{v-i}{j-i} q^{v-j} \sum_{m=m_1}^{m_2} \binom{i-k}{m} \binom{j-i}{1-k-m} q'^{(i-k)-m} (1-q')^m \\
&\quad \cdot (Q-q)^{m+(j-i)-(1-k)} (1-Q)^{(1-k)-m} \quad (18)
\end{aligned}$$

Fall: $j = 2i-k$

j_1	j_2	l_1	l_2	m_1	m_2
i	v	k	i	0	$1-k$
		$i+1$	$2i-k$	$1-i$	$i-k$

$$P_{ij;k1} = \binom{v-i}{i-k} q^{v-2i-k} \sum_{m=m_1}^{m_2} \binom{i-k}{m} \binom{i-k}{1-k-m} q^{(i-k)-m} (1-q')^m \quad (19)$$

$$(Q-q)^{m+(i-k)-(1-k)} (1-Q)^{(1-k)-m}$$

Fall: $j < 2i-k$

j_1	j_2	l_1	l_2	m_1	m_2
i	v	k	$j-(i-k)$	0	$1-k$
		$j-(i-k)+1$	$i-1$	0	$j-i$
		i	j	$1-i$	$j-i$

$$P_{ij;k1} = \binom{v-i}{j-i} q^{v-j} \sum_{m=m_1}^{m_2} \binom{j-i}{m} \binom{i-k}{1-k-m} q^{m+(i-1)} (1-q')^{(1-k)-m} \cdot (Q-q)^{(j-i)-m} (1-Q)^m \quad (20)$$

Aufgrund der Eigenschaften des (X,Y)-Prozesses sind $(i-k) \geq 0$, $(1-k) \geq 0$, $(j-i) \geq 0$ und $(j-1) \geq 0$.

Tabelle 2-2

Übergangs-Wn für $v=2$

Abkürzungen:

$$P(j_1 | ik) := P(j_1; t | ik; s) := P [X(t)=j, Y(t)=1 | H(s)] ,$$

$$H(s) := \{ X(s)=i, Y(s)=k \}$$

q, q' und Q wie in Tabelle 2-1

Hypothese: $H(s) = \{X(s)=0, Y(s)=0\}$

$$\begin{aligned} P(00|00) &= q^2 & P(10|00) &= 2q \cdot (Q-q) \\ P(11|00) &= 2q \cdot (1-Q) & P(20|00) &= (Q-q)^2 \\ P(21|00) &= 2(Q-q) \cdot (1-Q) & P(22|00) &= (1-Q)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Hypothese: $H(s) = \{X(s)=1, Y(s)=0\}$

$$\begin{aligned} P(10|10) &= q \cdot q' & P(11|10) &= (1-q') \cdot q \\ P(20|10) &= (Q-q) \cdot q' & P(21|10) &= (1-Q) \cdot q' + (1-q') \cdot (Q-q) \\ P(22|10) &= (1-q') \cdot (1-Q) & & \end{aligned} \quad (22)$$

Hypothesis: $H(s) = \{X(s)=1, Y(s)=1\}$

$$\begin{aligned} P(11|11) &= q & P(21|11) &= (Q-q) \\ P(22|11) &= (1-Q) \end{aligned} \tag{23}$$

Hypothesis: $H(s) = \{X(s)=2, Y(s)=0\}$

$$\begin{aligned} P(20|20) &= q'^2 & P(21|20) &= 2q'(1-q') \\ P(22|20) &= (1-q')^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Hypothesis $H(s) = \{X(s)=2, Y(s)=1\}$

$$\begin{aligned} P(21|21) &= q' & P(22|21) &= 1-q' \end{aligned} \tag{25}$$

Hypothesis: $H(s) = \{X(s)=2, Y(s)=2\}$

$$P(22|22) = 1 \tag{26}$$



§ 3. Der Summenprozeß (2,ν)

§ 3.0 Vorbemerkungen

Summiert man die Komponenten eines n-dimensionalen Markow-Prozesses $\{ W(t) ; 0 \leq t < \infty \}$ auf, so verliert im allgemeinen der hierbei entstehende eindimensionale Prozeß $\{ W(t) := \sum_{i=1}^n W_i(t) ; 0 \leq t < \infty \}$ die Markow-Eigenschaft.

Damit kann aber die W

$$P [W(t_1)=k_1, W(t_2)=k_2, \dots, W(t_m)=k_m] \quad (1)$$

für $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ nicht mehr wie bei einem Markow-Prozeß allein aus den Übergangs-Wn

$$P [W(t)=k_t \mid W(s)=k_s] , \quad t > s \quad (2)$$

berechnet werden .

Dies trifft insbesondere für den Summenprozeß $\{ Z(t) := X(t)+Y(t) ; 0 \leq t < \infty \}$ zu, für den wir uns hier interessieren.

Wir nennen ihn im folgenden meist Z-Prozeß und wählen von den Kettenprozessen (μ, ν) den in § 2. behandelten Kettenprozeß $2(1, \nu)$ aus, um ihn zu definieren.

Bevor wir uns dem eigentlichen Summenprozeß $\{ Z(t) ; 0 \leq t < \infty \}$ zuwenden, ermitteln wir in §3.1, § 3.2 und § 3.3 mit unterschiedlichen Methoden eine repräsentative WV des Summenprozesses.

Der größere Aufwand, den die Methode in § 3.2 gegenüber § 3.1 erfordert, liefert als zusätzliches Ergebnis die gemeinsame Verteilung der zVn $(X(t), Y(t), Z(t))$.

Die mehrdimensionale WV Gl (1) berechnen wir in § 3.4 ; § 3.3 dient zur Vorbereitung dieser Überlegungen.

Wenn man nur nachweisen möchte, daß der Z-Prozeß kein Markow-Prozeß ist, kann anstelle der Rechnung in § 3.5 eine einfachere Überlegung treten.

Sie beruht auf der Methode des Hilfsprozesses (vgl. Cox, Miller [3], p 262, supplementary variables), wobei wir als Hilfsprozess den (X,Y)-Prozeß wählen.

Nehmen wir einmal an, der Z-Prozeß sei ein Markow-Prozeß. Dann muß ein Zustand $\{ Z(t)=k_t \}$ zum Zeitpunkt t (Gegenwart) den Zustand $\{ Z(t')=k_{t'} \}$ zum Zeitpunkt $t' := t+\Delta t$ (Zukunft) vollständig bestimmen.

Dies kann aber nicht sein. Denn ein Zustand $\{ X(u)=i_u, Y(u)=j_u \}$ des (X,Y)-Prozesses bestimmt zwar für jeden beliebigen Zeitpunkt u den betreffenden Zustand $\{ Z(u)=k_u \}$ mit $k_u = i_u + j_u$, aber nicht umgekehrt.

So vermögen wir vom Zustand $\{ Z(t)=k_t \}$ zum Zeitpunkt t nicht eindeutig auf den betreffenden Hilfszustand $\{ X(t)=i_t, Y(t)=j_t \}$ zu schließen, da es im allgemeinen mehrere Hilfszustände gibt, welche die Bedingung

$$k_t = i_t + j_t \text{ erfüllen.}$$

Damit ist aber auch der Hilfszustand $\{ X(t')=i_{t'}, Y(t')=j_{t'} \}$, $t' := t+\Delta t$ durch den (X,Y)-Prozeß nicht eindeutig festgelegt und der Zustand $\{ Z(t')=k_{t'} \}$ nicht vollständig bestimmt.

§ 3.1 Berechnung einer repräsentativen WV des Summenprozesses (2,v)
aus deren erzeugender Funktion G(z;t)

Ehe wir uns dem Summenprozeß $\{Z(t) ; 0 \leq t < \infty\}$ zuwenden, berechnen wir die WV

$$p_n(t) := P [Z(t)=n \mid Z(0)=0] \quad (1)$$

der zV $Z(t) = X(t) + Y(t)$ bei festem t.

Ihre Gf

$$G(z;t) := \sum_n p_n(t) z^n \quad (2)$$

folgt unmittelbar aus der Gf Gl (2.4-29)

$$G(x,y) ; 0,t = \left[q + (Q-q)x + (1-Q)xy \right]^v, \quad (3)$$

$$q := \exp(-\alpha t) ; \quad Q := \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta t) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha t);$$

des $\vec{zV} (X(t), Y(t))$, wenn man die in § 4.2 erwähnte Eigenschaft Gl (4.2 - 4) der erzeugenden Funktion heranzieht. Danach hat man in Gl (3) $x = y = z$ zu setzen, um einen expliziten Ausdruck für Gl(2) zu erhalten.

Dieser lautet

$$G(z;t) := \left[q + (Q-q)z + (1-Q)z^2 \right]^v. \quad (4)$$

Etwas mühsamer ist es, aus dieser Gf die Wn Gl (1) zu bestimmen.

Dazu entwickeln wir Gl(4) mit Hilfe des Binomialsatzes. Dies ergibt

$$\begin{aligned} G(z;t) &= \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} q^{v-i} z^i [(Q-q) + (1-Q)z]^i \\ &= \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} q^{v-i} z^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (Q-q)^{i-j} (1-Q)^j z^j \end{aligned} \quad (5)$$

oder

$$G(z;t) = \sum_{i=0}^v a_i z^i \sum_{j=0}^i b_{ij} z^j, \quad (5a)$$

wenn wir die Abkürzungen

$$a_i = \binom{v}{i} q^{v-i}, \quad b_{ij} = \binom{i}{j} (Q-q)^{i-j} (1-Q)^j, \text{ einführen.}$$

Aus Gl (5a) können wir jedoch die Koeffizienten von z^n noch nicht entnehmen, da der Ausdruck für $G(z;t)$ nicht die Form

$$G(z;t) = \sum_{n=0}^{2v} c_n z^n$$

hat.

Ordnen wir aber die Glieder in der Doppelsumme (5a) um, so ist, wenn wir den Spezialfall $v=3$ betrachten

$$\begin{aligned} G(z;t) &= a_0 b_{00} + a_1 z (b_{10} + b_{11} z) + a_2 z^2 (b_{20} + b_{21} z + b_{22} z^2) \\ &\quad + a_3 z^3 (b_{30} + b_{31} z + b_{32} z^2 + b_{33} z^3) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} G(z;t) &= z^0 \quad a_0 b_{00} \\ &\quad z^1 \quad a_1 b_{10} \\ &\quad z^2 \quad (a_2 b_{20} + a_1 b_{11}) \quad 0 \leq n \leq v \\ &\quad z^3 \quad (a_3 b_{30} + a_2 b_{21}) \\ &\quad \text{-----} \\ &\quad z^4 \quad (a_4 b_{40} + a_3 b_{31} + a_2 b_{22}) \\ &\quad z^5 \quad (a_5 b_{50} + a_4 b_{41} + a_3 b_{32}) \quad v < n \leq 2v \\ &\quad z^6 \quad (a_6 b_{60} + a_5 b_{51} + a_4 b_{42} + a_3 b_{33}) \end{aligned}$$

Dabei sind die unterstrichenen Terme gleich Null; wir haben sie hinzugefügt, um das Bildungsgesetz besser erkennen zu lassen.

Das zuletzt angegebene Muster legt nahe, daß im allgemeinen Fall

$$G(z;t) = \sum_{n=0}^{2v} c_n z^n \quad (6)$$

die Koeffizienten

$$c_n = \sum_{l \in L} a_{n-1} b_{n-1,l}$$

lauten, wobei die Indexmenge

$$L = \begin{cases} \{ l; l = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \} & \text{für } 0 \leq n \leq v \\ \{ l; l = n-v, n-v+1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \} & \text{für } v < n \leq 2v \end{cases} \quad (7)$$

ist und das Symbol $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

Für die gesuchten W_n gilt daher wegen $c_n = p_n(t)$

$$p_n(t) = \sum_{l \in L} \binom{v}{n-1} \binom{n-1}{l} q^{v-(n-1)} (Q-q)^{n-2l} (1-Q)^l \quad (8)$$

mit

$$q = \exp(-\alpha t), \quad Q = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta t) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha t).$$

Tabelle 3 - 1 Gl (3.1-9)

WV nach Gl (8) für den Spezialfall $\nu = 2$

$$q = \exp(-\alpha t) , \quad Q = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \exp(-\beta t) - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \exp(-\alpha t)$$

$$p_0 = q^2$$

$$p_1 = 2q (Q-q) ,$$

$$p_2 = (Q-q)^2 + 2q (1-Q) ,$$

$$p_3 = 2 (Q-q) (1-Q) ,$$

$$p_4 = (1-Q)^2 .$$

Tabelle 3 - 2 Gl (3.1-10)

WV nach Gl (8) für den Spezialfall $\nu = 3$

$$p_0 = q^3 ,$$

$$p_1 = 3q^2 (Q-q) ,$$

$$p_2 = 3q ((Q-q)^2 + q (1-Q)) ,$$

$$p_3 = (Q-q) (Q-q)^2 + 6q (1-Q) ,$$

$$p_4 = 3(1-Q) ((Q-q)^2 + q(1-Q)) ,$$

$$p_5 = 3 (Q-q) (1-Q)^2 ,$$

$$p_6 = (1-Q)^3 .$$

§ 3.2 Berechnung einer repräsentativen Wahrscheinlichkeitsverteilung des Summenprozesses $(2, \nu)$ über die Methode der Hilfsvariablen

Diese Methode (vgl. D.R. Cox, H.D. Miller [3], p 262 ff) besteht darin, zur Variablen $Z(t)$ geeignete Hilfsvariablen hinzuzunehmen, deren Verhalten man beherrscht und die, wenn auch in anderer Weise, den Zustand " $Z(t)$ " beschreiben.

Die WV von $Z(t)$ gewinnt man dann als Randverteilung der gemeinsamen Verteilung der Hilfsvariablen und $Z(t)$.

Hier ist es wegen

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \quad (1)$$

naheliegend, von dem DGI-System der W_n

$$p_{j1} := p_{j1}(t) := P \left[X(t)=j, Y(t)=1 \mid X(0)=0, Y(0)=0 \right] \quad (2)$$

auszugehen und analog zu diesen ein DGI-System für die W_n

$$p_{j1n} := p_{j1n}(t) := P \left[X(t)=j, Y(t)=1, Z(t)=j+1=n \mid X(0)=0, Y(0)=0, Z(0)=0 \right] \quad (3)$$

zu konstruieren.

Dies ist aber unmittelbar möglich, da die Überlegungen mit p_{j1n} ebenso verlaufen wie in § 2.1 mit p_{j1} gemäß (2.1-1).

Dabei hat man in dem DGI-System Gl (2.1-30) wegen $j+1 = n$ in p_{j1n} einfach die Größen p_{j1} mit p_{j1n} sowie $p_{j-1,1}$ und $p_{j,1-1}$ mit $p_{j-1,1,n-1}$ bzw. $p_{j,1-1,n-1}$ zu ersetzen.

Dies ergibt das DGI-System

$$\begin{aligned} \frac{d p_{j1n}}{dt} = & - \left[(\nu-j)\alpha + (j-1)\beta \right] p_{j1n} + (\nu-j+1)\alpha p_{j-1,1,n-1} \\ & + (j-1+1)\beta \cdot p_{j,1-1,n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

mit den Randbedingungen

$$p_{jln}(0) = 1 \quad \text{für } j = 1 = n = 0 \quad (5a)$$

$$p_{jln}(t) = 0 \quad \text{für } j, l, n < 0 \quad \text{oder } j < 1 \quad \text{oder } j, l > v, \quad n > 2v \\ \text{oder } n \neq j+1. \quad (5b)$$

Man beachte, daß dieses DGL-System bis auf den dritten Index in den Wn p_{jln} mit dem früheren DGL-System (2.1-30) übereinstimmt.

Es läßt sich, wenn man als Gf

$$G(x, y, z; t) = \sum_{j, l, n} p_{jln}(t) \cdot x^j \cdot y^l \cdot z^n \quad (6)$$

wählt, mit der in § 2.2 eingehend erläuterten Methode in die pDGL

$$\frac{\partial G}{\partial t} + x \left[\alpha(xz-1) - \beta(yz-1) \right] \frac{\partial G}{\partial x} + \beta y(yz-1) \frac{\partial G}{\partial y} \\ = v\alpha(xz-1) G \quad (7)$$

mit der Randbedingung

$$G(x, y, z; 0) = 1 \quad (8)$$

überführen.

Diese pDGL ist von ähnlicher Bauart wie die pDGL (2.2-2), die wir früher erhalten haben.

Sie geht für $z = 1$ in den entsprechenden Spezialfall des früheren Randwertproblems über.

Daher können wir auch hier direkt aus (7) ein DGL-System für die Erwartungswerte $E_W(t) = E[W(t)]$ ($W = X, Y, Z$) herleiten.

Differenziert man nämlich die partielle DGL (7) nach x bzw. y bzw. z , so ist für $x, y, z \rightarrow 1$

$$\frac{d}{dt} E_X(t) + \alpha E_X(t) = v \cdot \alpha \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dt} E_Y(t) - \beta E_X(t) + \beta E_Y(t) = 0 \quad (9b)$$

$$\frac{d}{dt} E_Z(t) + (\alpha - \beta) E_X(t) + \beta E_Y(t) = v \cdot \alpha \quad (9c)$$

Dazu treten die Randbedingungen

$$E_X(0) = E_Y(0) = E_Z(0) = 0 \quad .$$

Das System (9) besteht aus linearen DGLn und läßt sich rekursiv lösen. Die Integrale des Teilsystems, das die beiden ersten DGLn enthält, kennen wir bereits (vgl. § 2.2). Mit ihnen, die

$$E_X(t) = v \cdot (1 - \exp(-\alpha t)) = v(1-Q) \quad (10a)$$

$$E_Y(t) = v \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \exp(-\alpha t) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \exp(-\beta t)\right) = v(1-Q) \quad (10b)$$

lauten, ergibt sich aus der dritten DGL (9c)

$$E_Z(t) = v \left(2 + \frac{2\beta - \alpha}{\alpha - \beta} \exp(-\alpha t) - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \exp(-\beta t)\right) = v \left[(1-Q) + (1-Q) \right] \quad (10c)$$

Man bestätigt unmittelbar, daß

$$E_Z(t) = E_X(t) + E_Y(t) \quad .$$

Dies folgt auch, wenn man die beiden ersten DGLn des Systems (9) zueinander addiert und die entstandene DGL mit der letzten vergleicht.

Die quasilineare pDGL erster Ordnung (7) können wir analog der DGL (2.2-2) lösen, wenn wir aus dem System der zugeordneten gewöhnlichen DGLn

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{x (\alpha (xz-1) - \beta (yz-1))} = \frac{dy}{\beta y (yz-1)} \quad (11) \\ &= \frac{dz}{0} = \frac{dG}{v\alpha (xz-1) G} \end{aligned}$$

die DGLn

$$dz = 0$$

$$dt = \frac{dy}{\beta y (yz-1)}$$

$$\frac{dx}{x (\alpha (xz-1) - \beta (yz-1))} = \frac{dy}{\beta y (yz-1)} \quad (12)$$

$$dt = \frac{dG}{v\alpha(xz-1) G}$$

entnehmen.

Da die erste DGL des Systems (12) durch $z = \text{konst.}$ befriedigt wird, ist die dritte DGL wiederum eine Bernoullische DGL, wenn man die Rollen von x und y vertauscht.

Ein für die weitere Rechnung geeignetes Lösungssystem ist

$$z = C_1 \quad (13a)$$

$$\frac{yz-1}{y} \exp(-\beta t) = C_2 \quad (13b)$$

$$\left[\frac{1}{xy} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \cdot \frac{z}{y} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} z^2 \right] \exp(-\alpha t) = C_3 \quad (13c)$$

$$\frac{G}{(xy)^v} = C_4 \quad (13d)$$

Dabei wurde, um das Integral der DGL (13d) zu finden, die Beziehung

$$\alpha(xz-1) = - \frac{\frac{d}{dt} h(t)}{h(t)} \quad \text{mit} \quad (14)$$

$$h(t) = z^2 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} C_2 \cdot z \cdot \exp(+\beta t) + C_3 \cdot \exp(+\alpha t)$$

benutzt.

Wählt man nun aus der allgemeinen Lösung

$$\phi_4 = \Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (15)$$

wobei $\phi_i = C_i$ ($i = 1, \dots, 4$) die Integrale des DGI-Systems der Charakteristiken sind, diejenige Integralfäche aus, welche

$$G(x, y, z; 0) = 1 \quad (16)$$

enthält, so bekommt man nach einiger Rechnung, wenn man die Größen q und Q wie in (3.1-3) definiert

$$G(x, y, z; t) = \left[q + (Q-q) xz + (1-Q) xyz^2 \right]^v. \quad (17)$$

Mit $G(x, y, z; t)$ können wir aber auch die erzeugende Funktion für die WV der zufälligen Variablen $Z(t)$ im festen Zeitintervall $[0, t]$ angeben.

Man braucht dazu nur in (17) $x = y = 1$ zu setzen, was wie in § 3.1 für die gesuchte erzeugende Funktion

$$G(z; t) := G(1, 1, z; t) = \left[q + \left[(Q-q) + (1-Q) z \right] z \right]^v \quad (18)$$

ergibt. D.h. die WV von $Z(t)$ ist eine Randverteilung der gemeinsamen Verteilung von $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$.

Natürlich muß die erzeugende Funktion $G(x, y, z; t)$ mit (2.4-29) in §2.4 konsistent sein. In der Tat geht $G(x, y, z; t)$ für $z = 1$ in den Spezialfall $i = k = 0$, $s = 0$ der erzeugenden Funktion $G(x, y; s, t)$ über.

Außerdem sagt die Gf $G(x, y, z; t)$ Gl (17) mehr über die zV $Z(t)$ aus als die Gf $G(z; t)$ Gl (18).

Insbesondere lassen sich aus ihr die Kovarianzen

$$\mu_{wz} := \left[E \left[\left[W(t) - E(W(t)) \right] \left[Z(t) - E(Z(t)) \right] \right] \right], \quad (19a, b)$$

$$w = x, y; \quad W(t) = X(t), Y(t);$$

und die Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{wz} := \frac{\mu_{wz}}{\sigma_w \sigma_z}, \quad w = x, y \quad (20a, b)$$

$$\sigma_w^2 = E \left[\left[W(t) - E(W(t)) \right]^2 \right]$$

$$w = x, y, z; \quad W(t) = X(t), Y(t), Z(t)$$

berechnen.

Unter Benutzung der Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= v (1-q) \\ E[Y(t)] &= v (1-Q) \\ E[Z(t)] &= v [(1-q) + (1-Q)] \end{aligned} \quad (21)$$

und der Varianzen

$$\begin{aligned} V[X(t)] &= v q (1-q) \\ V[Y(t)] &= v Q (1-Q) \\ V[Z(t)] &= v q (1-q) + v Q (1-Q) + 2v q (1-Q) \end{aligned} \quad (22)$$

erhalten wir

$$\mu_{xz} = v q [(1-q) + (1-Q)] \quad (23a)$$

$$\mu_{yz} = v (1-Q) (q+Q) \quad (23b)$$

und entsprechend die Korrelationskoeffizienten.

§ 3.3 Berechnung einer repräsentativen Wahrscheinlichkeitsverteilung
des Summenprozesses (2, v) über eine Variablentransformation

Wie wir aus dem vorigen Abschnitt wissen, kann die zweidimensionale Variable (X(t), Y(t)) denselben Zustand des Kettenprozesses (2, v) beschreiben wie die eindimensionale Variable Z(t).

Daher muß es auch möglich sein, die WV von Z(t)

$$p_n(t) := P [Z=n] := P [Z(t)=n \mid Z(0)=0] \quad (1)$$

über eine Transformation aus der WV von (X(t), Y(t))

$$p_{j1}(t) := P [X=j, Y=1] := P [X(t)=j, Y(t)=1 \mid X(0)=0, Y(0)=0]$$

zu berechnen, wobei die $p_{j1}(t)$ gemäß Gl (2.5-15)

$$p_{j1}(t) = \binom{v}{j} \binom{j}{1} q^{v-j} (q-q)^{j-1} (1-q)^1$$

lauten.

In der Tat gilt

$$p_n(t) = \sum_{j,1 \in M} p_{j1}(t) , \quad (2)$$

wenn man unter der Indexmenge

$$M = \{ j,1; j+1=n, 0 \leq j \leq \min(n,v), 0 \leq 1 \leq j \} \quad (3)$$

versteht.

Dies läßt sich beweisen, indem man die Indexmenge M ermittelt, für die das Ereignis $C = \{ Z=n \}$ in die Ereignisse $C_{j1} = \{ X=j, Y=1 \}$ gemäß

$$C = \bigcup_{j,1 \in M} C_{j1} , \quad C_{j1} \cap C_{j',1} = \emptyset \text{ für } \delta_{jj'} \cdot \delta_{11} \neq 1 \quad (4)$$

zerlegt werden kann.

Aufgrund der physikalischen Bedeutung des vorliegenden stochastischen Prozesses ist nämlich

$$0 \leq j \leq n \quad \text{für} \quad n \leq v \quad (5a)$$

$$0 \leq j \leq v \quad \text{für} \quad n > v \quad (5b)$$

bzw.

$$0 \leq 1 \leq j \quad (6)$$

Denn in einem Kollektiv von v Zerfallsketten kann ein instabiler Zustand E_i nur bis zu v -mal auftreten (Bedingungen (5a,b)).

Außerdem können im Zeitintervall $[0, t]$ nur soviele Nukleide von einem instabilen Zustand E_i in einem Folgezustand E_{i+1} übergehen, als instabile Zustände E_i produziert worden sind (Bedingung (6)).

Dazu tritt noch wegen $Z(t) = X(t) + Y(t)$

$$j + 1 = n \quad \text{für} \quad 0 \leq n \leq 2v \quad (7)$$

da wir nur Zerfallsketten betrachten, die zwei instabile Zustände A und B haben.

Damit können wir die Indexmenge M unmittelbar aufschreiben. Ferner sehen wir, daß alle Ereignisse $C_{j,1}$ dieser Indexmenge disjunkt sind, da sie Punktereignisse sind.

Es ist nützlich, sich den Sachverhalt an einigen einfachen Zahlenbeispielen zu veranschaulichen.

$n = 3 :$	$j \quad 1$	$n = 6 :$	$j \quad 1$	$n = 7 :$	$j \quad 1$
	3 0		6 0		7 0
	2 1		5 1		6 1
			4 2		5 2
			3 3		4 3

Für $v \geq 7$ enthält die Indexmenge M alle, für $v = 4$ nur die eingerahmten Zahlenpaare.

Wir reduzieren nun noch in Gl (2) die Doppelsumme über j, l auf eine Einfachsumme über l . Dazu brauchen wir lediglich $j = n-1$ aus Bedingung (7) in die übrigen Bedingungen (5) einzusetzen, was

$$0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{für} \quad 0 \leq n \leq v$$

und $n-v \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{für} \quad v+1 \leq n \leq 2v$

ergibt, wobei wir wegen der Ganzzahligkeit von l die Größe $n/2$ durch die Funktion $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ersetzen durften.

Die obigen Gleichungen definieren aber eine Indexmenge, welche mit der Indexmenge L in Gl (3.1-7) übereinstimmt.

Beachten wir noch, daß mit $j = n-1$

$$P_{j1} = P \left[C_{j1} \right] = P_{n-1,1}$$

ist, so sehen wir, daß die Methoden von § 3.2 und § 3.3 dieselbe WV für $Z(t)$ ergeben.

§ 3.4 Konstruktion des stochastischen Prozesses $\{ Z(t); 0 \leq t < \infty \}$

Die in § 3.3 benutzte Methode läßt sich so verallgemeinern, daß man für $t_0 < t_1 < \dots < t_r$ und $W_\kappa = W(t_\kappa)$ ($W = X, Y, Z$) die gemeinsame Verteilung der Z_κ ($\kappa = 0, 1, \dots, r$)

$$P \left[Z_0 = n_0, Z_1 = n_1, \dots, Z_r = n_r \right] \quad (1)$$

aus den Übergangswk $P \left[X_\kappa = j_\kappa, Y_\kappa = l_\kappa \mid X_{\kappa-1} = j_{\kappa-1}, Y_{\kappa-1} = l_{\kappa-1} \right]$

des zweidimensionalen Markow-Prozesses ($X(t), Y(t)$) berechnen kann.

Hierzu zerlegen wir das Ereignis $\{ Z_0 = n_0, Z_1 = n_1, \dots, Z_r = n_r \}$ in eine Summe disjunkter Ereignisse, deren Wn sich in den Übergangs-Wn des Kettenprozesses $2(1, v)$ ausdrücken lassen.

Bezeichnen wir mit

$$C_\kappa = \{ Z_\kappa = n_\kappa \}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, r$$

so gilt

$$\{ Z_0 = n_0, Z_1 = n_1, \dots, Z_r = n_r \} = D_0, \quad (2)$$

wenn wir zudem die Abkürzungen

$$D_q = \bigcap_{\kappa=q}^r C_\kappa, \quad 0 \leq q \leq r$$

$$D_0 = \bigcap_{\kappa=0}^r C_\kappa, \quad D_r = C_r$$

einführen.

Ein geeignetes Ereignissystem um die C_κ zu zerlegen, ist für κ und n_κ fest ($n_\kappa = j_\kappa + l_\kappa$)

$$C_{n_\kappa - 1_\kappa, 1_\kappa} = \{ X_\kappa = n_\kappa - 1_\kappa, Y_\kappa = 1_\kappa \} = \{ X_\kappa = j_\kappa, Y_\kappa = 1_\kappa \} = C_{j_\kappa 1_\kappa}, \quad (3)$$

$$C_\kappa = \bigcup_{1_\kappa} C_{n_\kappa - 1_\kappa, 1_\kappa}, \quad C_{n_\kappa - 1_\kappa, 1_\kappa} \cap C_{n_\kappa - 1_{\kappa'}, 1_{\kappa'}} = \emptyset \text{ für } 1_\kappa \neq 1_{\kappa'}.$$

Über die Werte, welche die 1_κ bei verschiedenem κ ($\kappa = 0, 1, \dots, r$) annehmen dürfen, diskutieren wir später ausführlich.

Wir zerlegen nun das Ereignis D_0 in mehreren Schritten nach dem Ereignissystem Gl (3).

Zunächst gilt

$$D_0 = C_0 \cap D_1,$$

$$D_0 = \left(\bigcup_{l_0} C_{n_0-1_0, l_0} \right) \cap D_1 = \bigcup_{l_0} \left(D_1 \cap C_{n_0-1_0, l_0} \right)$$

Mit

$$D_1 = C_1 \cap D_2$$

folgt dann

$$\begin{aligned} D_0 &= \bigcup_{l_0} \left(D_2 \cap C_{n_0-1_0, l_0} \cap \left(\bigcup_{l_1} C_{n_1-1_1, l_1} \right) \right) \\ &= \bigcup_{l_0} \bigcup_{l_1} \left(D_2 \cap C_{n_0-1_0, l_0} \cap C_{n_1-1_1, l_1} \right) \end{aligned}$$

und schließlich

$$D_0 = \bigcup_{l_0} \bigcup_{l_1} \dots \bigcup_{l_q} \left(D_{q+1} \cap C_{n_0-1_0, l_0} \cap C_{n_1-1_1, l_1} \cap \dots \cap C_{n_q-1_q, l_q} \right)$$

Also gilt für $q = r$

$$D_0 = \bigcup_{l_0, l_1, \dots, l_r} \left(\bigcap_{k=0}^r C_{n_k-1_k, l_k} \right) = \bigcup_{M_r} \left(\bigcap_{k=0}^r C_{n_k-1_k, l_k} \right) \quad (4)$$

Dabei haben wir mit M_r die Menge der zulässigen $(r+1)$ -tupel $l_0 l_1 \dots l_r$ bezeichnet.

Ist diese ermittelt, so folgt aus der obigen Gleichung, da die Ereignisse $C_{j_k l_k}$ als Punktereignisse disjunkt sind

$$\begin{aligned} P \left[\bigcap_{k=0}^r C_k \right] &= \sum_{M_r} P \left[C_{j_0 l_0} \cap C_{j_1 l_1} \cap \dots \cap C_{j_r l_r} \right] \\ &= \sum_{M_r} P \left[X_0 = j_0, Y_0 = l_0; X_1 = j_1, Y_1 = l_1; \dots X_r = j_r, Y_r = l_r; \right] \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir aber die gesuchte WV angeben, da der (X,Y)-Prozess ein Markow-Prozess ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 & P \left[Z_0 = n_0, Z_1 = n_1, \dots, Z_r = n_r \right] = \\
 & \quad \cdot P \left[X_r = j_r, Y_r = l_r \mid X_{r-1} = j_{r-1}, Y_{r-1} = l_{r-1} \right] \quad (6) \\
 & = \sum_{M_r} P \left[X_0 = j_0, Y_0 = l_0 \right] \cdot P \left[X_1 = j_1, Y_1 = l_1 \mid X_0 = j_0, Y_0 = l_0 \right] \dots \quad \left. \vphantom{\sum_{M_r}} \right\}
 \end{aligned}$$

oder, wenn wir $j_0 = l_0 = 0$ setzen

$$\begin{aligned}
 & P \left[Z_0 = n_0, Z_1 = n_1, \dots, Z_r = n_r \right] = \\
 & P \left[X_0 = 0, Y_0 = 0 \right] \sum_{M_r} \left[\prod_{\kappa=1}^r P \left[X_\kappa = j_\kappa, Y_\kappa = l_\kappa \mid X_{\kappa-1} = j_{\kappa-1}, Y_{\kappa-1} = l_{\kappa-1} \right] \right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch, die Indexmenge M_r für den zuletzt angegebenen Fall zu bestimmen.

Wir erhalten, wenn wir die diesbezüglichen physikalischen Eigenschaften des Kettenprozesses zunächst in den Indizes j_κ, l_κ ($\kappa = 1, 2, \dots, r$) ausdrücken (v und n_κ fest)

$$\begin{aligned}
 j_{\kappa-1} &\leq j_\kappa \leq \text{Min} (n_\kappa, v) \\
 l_{\kappa-1} &\leq l_\kappa \leq j_\kappa \quad \text{für } \kappa = 1, 2, \dots, r \quad (8) \\
 j_0 &= l_0 = 0 \\
 j_\kappa + l_\kappa &= n_\kappa
 \end{aligned}$$

Dabei sind gegenüber einem einzigen κ (vgl. § 3.3) nur die Bedingungen neu, welche die (j_κ, l_κ) einschränken, wenn wir verschiedene C_κ miteinander kombinieren.

Die gesuchte Indexmenge M_r folgt schließlich, wenn wir die j_κ mittels $j_\kappa = n_\kappa - l_\kappa$ eliminieren.

Es ist

$$M_r = \{ l_k, k = 1, 2, \dots, r; l_a \leq l_k \leq \text{Min} \left[\left[\frac{n_k}{2} \right], l_a + (n_k - n_{k-1}) \right] \}$$

mit

(9)

$$l_a = \begin{cases} l_{k-1} & \text{für } 0 \leq n_k \leq v \\ n_k - v & \text{für } v+1 \leq n_k \leq 2v \end{cases},$$

wobei $l_{-1} = n_{-1} = 0$ ist .

Wir zeigen an einem Zahlenbeispiel, wie die Indexmenge M_r aussieht.
Es sei $Z_1=3, Z_2=6, Z_3=7$ und $v \geq 7$ bzw. 4 .

1.) Konstruktion über die Ereignisse C_k

$n_1 = 3 :$	j_1	l_1	$n_2 = 6 :$	j_2	l_2	$n_3 = 7 :$	j_3	l_3
$v \geq 7$	3	0		6	0		7	0
	2	1		5	1		6	1

$n_1 = 3 :$	j_1	l_1	$n_2 = 6 :$	j_2	l_2	$n_3 = 7 :$	j_3	l_3
$v = 4$				4	2		5	2
				3	3		4	3

Aus den C_κ ($\kappa = 1, 2, 3$) lassen sich folgende zulässige Kombinationen von $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ bilden:

j_1 l_1	j_2 l_2	j_3 l_3
$n_1 = 3$	$n_2 = 6$	$n_3 = 7$
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
3 0	<u>6 0</u>	<u>7 0</u>
3 0	<u>6 0</u>	<u>6 1</u>
3 0	<u>5 1</u>	<u>6 1</u>
3 0	<u>5 1</u>	<u>5 2</u>
3 0	4 2	<u>5 2</u>
3 0	4 2	4 3
3 0	3 3	4 3
2 1	<u>5 1</u>	<u>6 1</u>
2 1	<u>5 1</u>	<u>5 2</u>
2 1	4 2	<u>5 2</u>
2 1	4 2	4 3
2 1	3 3	4 3

Alle Kombinationen, bei denen mindestens ein Zahlenpaar unterstrichen ist, sind für $v = 4$ unzulässig.

2.) Konstruktion über die Indizes l_κ gemäß Gl (9)

Beispiel a) $v \geq 7$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 7$.

Bedingungen für die l_κ :

$$0 \leq l_1 \leq 1$$

$$l_1 \leq l_2 \leq \text{Min} (3, l_1 + 3)$$

$$l_2 \leq l_3 \leq \text{Min} (3, l_2 + 1)$$

Beispiel b) $v = 4, n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 7$.

Bedingungen für die l_k :

$$0 \leq l_1 \leq 1$$

$$2 \leq l_2 \leq 3$$

$$l_3 = 3$$

Daraus ergeben sich wiederum im Beispiel a) eine Indexmenge M_3 mit 12 Kombinationen $l_1 l_2 l_3$ und im Beispiel b) eine Indexmenge M_3 mit 4 Kombinationen $l_1 l_2 l_3$.

§ 3.5 Nachweis, daß der Summenprozeß kein Markow-Prozeß ist

Wir zeigen in diesem Abschnitt an einem einfachen Spezialfall des Summenprozesses $\{ Z(t); 0 \leq t < \infty \}$, daß dieser kein Markow-Prozeß ist.

Sei $\{ Z(t); 0 \leq t < \infty \}$ zunächst ein beliebiger stochastischer Prozeß mit endlich vielen Zuständen und $A_i = \{ Z(s) = n_i \}$ ein beliebiges Ereignis aus diesem Prozeß. Dann gilt allgemein

$$\begin{aligned} P \left[A_s A_t A_u \right] &= P \left[A_s A_t \right] \cdot P \left[A_u \mid A_s A_t \right] \\ &= P \left[A_s \right] \cdot P \left[A_t \mid A_s \right] \cdot P \left[A_u \mid A_t A_s \right] , \end{aligned}$$

wie unmittelbar aus der Definition der bedingten W folgt.

Jedoch gilt für $s < t < u$

$$P \left[A_u \mid A_t A_s \right] = P \left[A_u \mid A_t \right] \tag{1}$$

nur, wenn $\{ Z(t); 0 \leq t < \infty \}$ ein Markow-Prozeß ist.

Weisen wir also für ein einziges Ereignisstripel A_s, A_t, A_u eines Summenprozesses $\{ Z(t) = X(t) + Y(t); 0 \leq t < \infty \}$ nach, daß hierfür die Gl (1) falsch ist, kann dieser kein Markow-Prozeß sein.

Wir tun dies für das Ereignisstripel $A_s = \{ Z(s) = 1 \}$, $A_t = \{ Z(t) = 2 \}$, $A_u = \{ Z(u) = 3 \}$ des zum Kettenprozesses (2,2) zugehörigen Summenprozesses.

Wegen

$$P \left[A_u \mid A_t A_s \right] = \frac{P \left[A_s A_t A_u \right]}{P \left[A_s A_t \right]}, \quad P \left[A_u \mid A_t \right] = \frac{P \left[A_t A_u \right]}{P \left[A_t \right]}$$

haben wir hierzu die Wn $P \left[A_t \right]$, $P \left[A_t A_u \right]$, $P \left[A_s A_t \right]$ und $P \left[A_s A_t A_u \right]$ zu berechnen, was wir mit Hilfe von Gl (3.4-6) und Gl (3.4-8) ausführen. Die gesuchten Übergangs-Wn drücken sich daher in den Übergangs-Wn des Kettenprozesses (2,2) aus, die wir mittels

$$P(j_1; t \mid i k; s) := P \left[X(t)=j, Y(t)=1 \mid X(s)=i, Y(s)=k \right]$$

abkürzen.

Berechnung von $P \left[Z(t)=2 \right]$

Um die Summe in Gl (3.4-6) ausführen zu können, haben wir die Indexmenge M_1 zu bestimmen. Für diese erhält man gemäß Gl (3.4-8)

$$M_1 : 0 \leq l_1 \leq \text{Min} (1, 0+(2-0)) \text{ d.h. } M_1 = \{l_1=0,1\} .$$

Daher ist

$$\begin{aligned} P \left[Z(t)=2 \right] &= \sum_{M_1} P(2-l_1, l_1; t \mid 00; 0) \\ &= P(20; t \mid 00; 0) + P(11; t \mid 00; 0) . \end{aligned}$$

Diese W haben wir bereits früher, vgl. Gl (3.1-8) bzw. Gl (3.1-9), ausgerechnet, jedoch in einer für das Folgende ungeeigneten Form.

Berechnung von $P \left[Z(t)=2, Z(u)=3 \right]$

Bedingungen für die Indexmenge M_2 :

$$0 \leq l_1 \leq \text{Min} (1, 2)$$

$$1 \leq l_2 \leq \text{Min} (1, 2) .$$

Also

$$M_2 = \{ l_1 l_2 = 01, 11 \}$$

und

$$\begin{aligned} P \left[Z(t)=2, Z(u)=3 \right] &= \sum_{M_2} P(2-l_1, l_1; t \mid 00; 0) P(3-l_2, l_2; u \mid 2-l_1, l_1; t) \\ &= P(20; t \mid 00; 0) P(21; u \mid 20; t) + P(11; t \mid 00; 0) P(21; u \mid 11; t) . \end{aligned}$$

Berechnung von $P \left[Z(s)=1, Z(t)=2 \right]$

Bedingungen für die Indexmenge M_2 :

$$0 \leq l_1 \leq \text{Min}(0, 1)$$

$$l_1 \leq l_2 \leq \text{Min}(1, l_1 + 1) .$$

Also

$$M_2 = \{ l_1 l_2 = 00, 01 \}$$

und

$$\begin{aligned} P \left[Z(s)=1, Z(t)=2 \right] &= \sum_{M_2} P(1-l_1, l_1; s \mid 00; 0) P(2-l_2, l_2; t \mid 1-l_1, l_1; s) \\ &= P(10; s \mid 00; 0) P(20; t \mid 10; s) + P(00; s \mid 00; 0) P(11; t \mid 00; s) . \end{aligned}$$

Berechnung von $P \left[Z(s)=1, Z(t)=2, Z(u)=3 \right]$

Bedingungen für die Indexmenge M_3 :

$$0 \leq l_1 \leq \text{Min}(0, 1)$$

$$l_1 \leq l_2 \leq \text{Min}(1, l_1 + 1)$$

$$1 \leq l_3 \leq \text{Min}(1, 2) .$$

Also

$$M_3 = \{ 1_1 1_2 1_3 = 001, 011 \}$$

und

$$\begin{aligned} & P \left[Z(s)=1, Z(t)=2, Z(u)=3 \right] \\ &= \sum_{M_3} P(1-1_1, 1_1; s \mid 00; 0) P(2-1_2, 1_2; t \mid 1-1_1, 1_1; s) P(3-1_3, 1_3; u \mid 2-1_2, 1_2; t) \\ &= P(10; s \mid 00; 0) P(20; t \mid 10; s) P(21; u \mid 20; t) \\ &+ P(10; s \mid 00; 0) P(11; t \mid 10; s) P(21; u \mid 11; t) . \end{aligned}$$

Nun können wir die gesuchten Übergangs-Wn aufschreiben. Es ist

$$\begin{aligned} & P \left[Z(u)=3 \mid Z(t)=2, Z(s)=1 \right] \\ &= \frac{P(20; t \mid 10; s) P(21; u \mid 20; t) + P(11; t \mid 10; s) P(21; u \mid 11; t)}{P(20; t \mid 10; s) + P(11; t \mid 10; s)} \quad (2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & P \left[Z(u)=3 \mid Z(t)=2 \right] \\ &= \frac{P(20; t \mid 00; 0) P(21; u \mid 20; t) + P(11; t \mid 00; 0) P(21; u \mid 11; t)}{P(20; t \mid 00; 0) + P(11; t \mid 00; 0)} . \quad (3) \end{aligned}$$

Daher sind die beiden Übergangs-Wn ungleich und der Summenprozeß ist kein Markow-Prozeß.

Besieht man die erste Übergangs-W etwas genauer, so bemerkt man, daß man zum Nachweis dieser Tatsache die zweite Übergangs-W nicht gebraucht hätte. Die erste Übergangs-W hängt nämlich nicht nur von den Zeitpunkten u und t sondern auch vom Zeitpunkt s ab.

Wer sich für die expliziten Ausdrücke der obigen Wn Gl (2) und Gl (3) interessiert, hat die Übergangs-Wn $P(j_1; t) \mid i_k; t)$ des Kettenprozesses (2,2) gemäß den Gln (2.5-21) bis (2.5-26) zu ersetzen.

§ 4. Zur Struktur des allgemeinen Kettenprozesses (μ, ν)

§ 4.0 Vorbemerkungen

Nach der Vorbereitung durch die §§ 2. und 3. , die auch überschlagen werden können, wenn man bei Bedarf auf § 2.1 (System der infinitesimalen Übergangs-Wn) und § 2.3 (Palm'sche Methode) zurückgreift, untersuchen wir nun insbesondere die allgemeinen Kettenprozesse $\nu(\mu, 1)$ und $\mu(1, \nu)$.

Dabei interessieren wir uns weniger für die expliziten Ausdrücke von irgendwelchen Wn dieser Prozesse, als dafür, ob wir sie nicht aus einfacheren Prozessen aufbauen können.

Bezogen auf die bisher verwendeten Prozeßvariablen heißt dies, daß wir überlegen müssen, ob sich diese nicht als Funktionen einfacherer zufälliger Variablen darstellen lassen.

Wie im folgenden gezeigt wird, ist diese Aufgabe für den Kettenprozeß $\nu(\mu, 1)$ im Gegensatz zum Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ sehr schnell zu bewältigen.

Mit der analytischen Methode ist es jedoch auch für den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ nach dem Muster des § 2. , wenn nicht schwierig so doch etwas mühsam, eine erzeugende Funktion für die Übergangs-Wn zu berechnen. Damit haben wir aber noch keinen tieferen Einblick in die Struktur dieses Prozesses gewonnen.

Diesen erhalten wir erst, wenn wir die kombinatorische Methode mit heranziehen.

§ 4.1 Der Kettenprozeß $\nu(\mu,1)$

Wie wir bereits in der Einleitung gesehen haben, besteht der Kettenprozeß $\nu(\mu,1)$ aus ν gleichen, voneinander statistisch unabhängigen Kettenprozessen $(\mu,1)$. Er besitzt wie diese die Markow-Eigenschaft. Prozeßvariable ist nach § 1.1 der $z\bar{V}$ $\vec{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_\nu(t))$, dessen i te Komponente angibt, welchen Zustand die i te Kette zum Zeitpunkt t einnimmt. Dabei gilt $Z_i(t) = j$, wenn sich die i te Kette zum Zeitpunkt t im Zustand E_j befindet. Die Übergangs-Wn des Kettenprozesses $\nu(\mu,1)$ genügen, wie wir gleich sehen werden,

$$P \left[\vec{Z}(t) = \vec{k} \mid \vec{Z}(s) = \vec{j} \right] = \prod_{\kappa=1}^{\nu} P \left[Z_{\kappa}(t) = k_{\kappa} \mid Z_{\kappa}(s) = j_{\kappa} \right] \quad (1)$$

für $t > s$,

wobei

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_\nu)$$

$$\vec{j} = (j_1, j_2, \dots, j_\nu)$$

ist und die $P \left[Z_{\kappa}(t) = k_{\kappa} \mid Z_{\kappa}(s) = j_{\kappa} \right]$ Übergangs-Wn des κ ten Kettenprozesses $(\mu,1)$ der zVn $Z_{\kappa}(t)$ sind. Ihre explizite Form wurde bereits in Gl (1.2-9) angegeben.

Um Gl (1) zu verifizieren, führen wir die Bezeichnungen

$$A_{\kappa} = \{ Z_{\kappa}(s) = j_{\kappa} \}, \quad B_{\kappa} = \{ Z_{\kappa}(t) = k_{\kappa} \}, \quad t > s$$

ein.

Aus der Definition der bedingten W und der wechselseitigen statistischen Unabhängigkeit der $Z_k(t)$ folgt dann

$$\begin{aligned} P \left[\vec{Z}(t)=k \mid \vec{Z}(s)=j \right] &= P \left[\prod_{j=1}^v B_j \mid \prod_{i=1}^v A_i \right] \\ &= \frac{P \left[\prod_{i=1}^v B_i A_i \right]}{P \left[\prod_{j=1}^v A_j \right]} = \frac{\prod_{i=1}^v P \left[B_i A_i \right]}{\prod_{j=1}^v P \left[A_j \right]} = \prod_{j=1}^v P \left[B_i \mid A_i \right] \end{aligned}$$

w.z.b.w.]

Für spätere Überlegungen benötigen wir insbesondere die Gf

$$G_{\mu\nu}(\vec{z}; t) = \sum_K Q_{k_1 k_2 \dots k_\nu}(t) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_\nu^{k_\nu} \quad (2)$$

mit $\vec{z} := (z_1, z_2, \dots, z_\nu)$,
 $K :=$ Indexmenge der zulässigen k_1, k_2, \dots, k_ν

des Spezialfalls

$$Q_{k_1 k_2 \dots k_\nu}(t) := P \left[\vec{Z}(t)=\vec{k} \mid \vec{Z}(0)=\vec{0} \right] \quad ; \quad (3)$$

$$\vec{0} := \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{v \text{ - mal}}$$

der Übergangs-Wn G1 (1) .

Sie ergibt sich aus den Gfn der Kettenprozesse $(\mu, 1)$

$$G_{\mu 1}^{(i)}(z_i; t) = \sum_{j=0}^H P_j^{(\mu)}(t) z_i^j \quad , \quad i=1, 2, \dots, \nu \quad (4)$$

zu

$$G_{\mu\nu}(\vec{z}; t) = \prod_{i=1}^v G_{\mu 1}^{(i)}(z_i; t) = \prod_{i=1}^v \left(\sum_{j=0}^H P_j^{(\mu)}(t) \cdot z_i^j \right) \quad , \quad (5)$$

da die Kettenprozesse $(\mu, 1)$ voneinander wechselseitig statistisch unabhängig sind. Für die in G1 (5) vorkommenden Wn $P_j^{(\mu)}(t)$ siehe G1 (1.2-10) .

§ 4.2 Eine repräsentative WV des Summenprozesses (μ, ν)

Um den allgemeinen Summenprozeß $\{ S(t); 0 \leq t < \infty \}$ mit

$$S(t) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} X_j(t) \quad (1)$$

zu behandeln (vgl. Gl (1.1-4)), sind, wie aus dem in § 3.4 betrachteten Spezialfall $\mu = 2$ hervorgeht, etwas verwickeltere Überlegungen notwendig. Jedoch läßt sich mit der kombinatorischen Methode aus der Gf $G_{\mu\nu}(\vec{z}; t)$ sehr leicht die Gf

$$G_{\mu\nu}(z; t) = \sum_n p_n(t) z^n \quad (2)$$

der zV $Z(t) := S(t)$, für t fest, $Z(0) = 0$ gewinnen.

Wir beschränken uns hier im wesentlichen darauf, dieses Ergebnis herzuleiten.

Dazu benötigen wir folgende Eigenschaft der Gfn (Feller [5] , p 261) :

Satz

Besitzt der zV $\vec{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ die Gf

$$G(\vec{u}) := \sum_I R_{i_1 i_2 \dots i_n} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_n^{i_n} ,$$

mit $\vec{u} := (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{i} := (i_1, i_2, \dots, i_n)$,

$I :=$ Indexmenge der zulässigen \vec{i} ,

so wird die gemeinsame Gf

$$H(v_1, v_2, \dots, v_m) := \sum_J S_{j_1 j_2 \dots j_m} v_1^{j_1} v_2^{j_2} \dots v_m^{j_m} ,$$

$J :=$ Indexmenge der zulässigen $\vec{j} := (j_1, j_2, \dots, j_m)$

der partiellen Summen der Komponenten des Vektors \vec{U}

$$v_{\kappa} = \sum_{k=a_{\kappa}}^{b_{\kappa}} U_k, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m, \quad 1 \leq m \leq n$$

$$a_{\kappa} = 1 + \sum_{l=0}^{\kappa-1} n_l, \quad b_{\kappa} = \sum_{l=1}^{\kappa} n_l, \quad n_0 = 0$$

mit

$$\sum_{\kappa=1}^m v_{\kappa} = \sum_{i=1}^n U_i, \quad n = \sum_{\kappa=1}^m n_{\kappa}$$

durch die Beziehung

$$\begin{aligned} G(\underbrace{(v_1, \dots, v_1)}_{n_1\text{-mal}}, \underbrace{(v_2, \dots, v_2)}_{n_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{(v_m, \dots, v_m)}_{n_m\text{-mal}}) \\ = \sum_J R_{i_1 i_2 \dots i_n} v_1^{j_1} v_2^{j_2} \dots v_m^{j_m} = H(v_1, v_2, \dots, v_m) \end{aligned} \quad (3)$$

$J :=$ Indexmenge der zulässigen \vec{i} , unter der zusätzlichen Bedingung

$$\sum_{\rho=a_{\kappa}}^{b_{\kappa}} i_{\rho} = j_{\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m$$

gegeben. Im Sonderfall $m = 1$

$$U := v_1 = \sum_{i=1}^n U_i$$

gilt mit $u := v_1$

$$\begin{aligned} G(\underbrace{(u, \dots, u)}_{n\text{-mal}}) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=j} R_{i_1 i_2 \dots i_n} u^j = H(u) . \end{aligned} \quad (4)$$

Wird die Gf der partiellen Summen V_K von nicht aufeinanderfolgenden Komponenten U_i des $\vec{zV} \vec{U}$ verlangt, ist zuvor eine passende Ummummerierung der U_i vorzunehmen.]

Der obige Satz führt im Spezialfall Gl (4), wenn wir für den $\vec{zV} \vec{U}$ den $\vec{zV} \vec{Z}(t)$ einsetzen und Gl (4.1-5) berücksichtigen, zur Gf

$$G_{\mu\nu} (z;t) = \left[\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) z^j \right]^{\nu} = \sum_{n=0}^{\mu \cdot \nu} p_n(t) z^n \quad (5)$$

der zufälligen Summe $Z(t) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(t)$.

Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir den Satz auf den $\vec{zV} \vec{X}(t)$ anwenden. Anstelle von Gl (4.1-5) tritt dann die Gf

$$G_{\mu\nu} (\vec{x};t) = \left[P_0^{(\mu)}(t) + \sum_{i=1}^{\mu} P_i^{(\mu)}(t) x_0 x_1 \dots x_{i-1} \right]^{\nu} \quad (6)$$

des $\vec{zV} \vec{X}(t)$ mit $\vec{X}(0) = \vec{0}$.

Wir kennen diese Gf bisher nur im Spezialfall $\mu=2$ (vgl. Gl (2.4-29)).

Die oben angeführte Gf wird in § 4.3 ermittelt.

Man beachte noch, daß die Komponenten des $\vec{zV} \vec{X}(t)$ im Gegensatz zu den Komponenten des $\vec{zV} \vec{Z}(t)$ voneinander stochastisch abhängig sind.

Der obige Satz gilt jedoch auch in dieser allgemeinen Situation.

Die Kenntnis der Gf Gl (6) ermöglicht es uns, Gfn für allgemeinere Summen als die Summe $S(t)$ in Gl (1) herzuleiten.

Dazu bemerken wir zunächst, daß die Gf Gl (5) einem Experiment entspricht, bei dem der Detektor zwischen den μ verschiedenen Sorten ϵ_i von emittierten Teilchen nicht unterscheiden kann.

Allgemeinere Summen erhalten wir, wenn wir z.B. ein Experiment betrachten, bei dem wir mit unserem Detektor statt einer zwei verschiedene Sorten von Teilchen diskriminieren können.

Dann gilt für die \vec{zVn} , welche die Anzahl der beiden Sorten angeben

$$U(t) = \sum_{j=0}^{\mu_1-1} X_j(t) \quad , \quad V(t) = \sum_{j=\mu_1}^{\mu_1+\mu_2-1} X_j(t) \quad , \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 \quad , \quad (7)$$

wenn wir zudem voraussetzen, daß der Detektor in einer radioaktiven Zerfallskette nur die vorderen μ_1 - Teilchen von den hinteren μ_2 - Teilchen unterscheiden kann.

Die letzte Voraussetzung ist für den folgenden Schluß unwesentlich. Wir haben sie hauptsächlich deswegen gemacht, um die Schreibweise zu vereinfachen.

Wir wenden nun den obigen Satz für erzeugende Funktionen auf die Teilsummen $U(t)$ und $V(t)$ an. Es folgt für die gemeinsame Gf der zufälligen Summen $U(t)$ und $V(t)$

$$G_{\mu_1 \mu_2}^v(u, v; t) = \left[\sum_{j=0}^{\mu_1} P_j^{(\mu)}(t) u^j + u^{\mu_1} \sum_{k=\mu_1+1}^{\mu_1+\mu_2} P_k^{(\mu)}(t) v^{k-\mu_1} \right]^v \quad (8)$$

Auf dieselbe Weise können wir ohne große Mühe die gemeinsame Gf für noch allgemeinere partielle Summen berechnen.

Zum Schluß möchten wir noch eine Bemerkung zum Rechenaufwand für die Beziehung Gl (5) bei der kombinatorischen Methode (§ 4.4) und der analytischen Methode (§§ 3.2, 4.3) machen.

Natürlich gelangt man bei diesem Problem mit der kombinatorischen Methode viel schneller zum Ziel. Um beiden Verfahren gerecht zu werden, muß man jedoch bedenken, daß wir bei der kombinatorischen Methode die $W_n P_j^{(\mu)}(t)$ nicht wie hier als bekannt ansehen dürfen.

§ 4.3 Berechnung der erzeugenden Funktion $G_{\mu\nu}(\vec{x};s,t)$ des Kettenprozesses $\mu(1,\nu)$ mit der analytischen Methode

Die Untersuchungen am Kettenprozeß $(2,\nu)$ in den §§ 2 und 3 lassen vermuten, daß zwischen dem allgemeinen Kettenprozeß (μ,ν) und dem speziellen Kettenprozeß $(\mu,1)$ ein enger Zusammenhang besteht. Um diesen Zusammenhang aufzuzeigen, berechnen wir in diesem Paragraphen mit der analytischen und im folgenden Paragraphen mit der kombinatorischen Methode die Gf

$$G_{\mu\nu}(\vec{x};s,t) = \sum_I P_{i_0 i_1 \dots i_{\mu-1}}(s,t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_{\mu-1}^{i_{\mu-1}} \quad (1)$$

$$\vec{x} := (x_0, x_1, \dots, x_{\mu-1})$$

$$I := \text{Menge aller zulässigen } \vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_{\mu-1}) \quad .$$

Bei der analytischen Methode benötigen wir hierzu das System der infinitesimalen Übergangswn des Kettenprozesses $\mu(1,\nu)$. Dieses geben wir in Abschnitt a) an, wo wir auch, und zwar mit der Palm'schen Methode, die betreffende pDGl herleiten.

In Abschnitt b) lösen wir dann diese pDGl für die Anfangsbedingung

$$G_{\mu\nu}(\vec{x};0,0) = 1 \quad . \quad (2)$$

Dies entspricht der Gf

$$G := G_{\mu\nu}(\vec{x};t) := G_{\mu\nu}(\vec{x};0,t) \quad (3)$$

der WV

$$P_{i_0 i_1 \dots i_{\mu-1}}(0,t) = P \left[\vec{X}(t) = \vec{i} \mid \vec{X}(0) = \vec{0} \right] , \quad (4)$$

$$\vec{0} := \underbrace{(0,0,\dots,0)}_{\mu \text{-mal}}$$

des zV's $\vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_{\mu-1}(t))$.

Schließlich konstruieren wir in Abschnitt c) die allgemeine Gf $G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$, wobei wir beim Ansatz die kombinatorische Methode benutzen, um die sonst sehr mühsame Rechnung etwas abzukürzen.

a) Ermittlung der pDGl der Gf $G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$ des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$ aus seinem System der infinitesimalen Übergangs-Wn

Das dem Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$ entsprechende System infinitesimaler Übergangs-Wn läßt sich analog zum Kettenprozeß $2(1, \nu)$ angeben. Aus diesem erhält man dann ohne große Mühe eine pDGl für die Gf $G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$, falls man die Palm'sche Methode (vgl. § 2.3) anwendet.

Um deutlich zu machen, in welcher Weise wir verallgemeinern, stellen wir an einigen Stellen die entsprechenden Formeln der Kettenprozesse $(2, \nu)$ und (μ, ν) einander gegenüber.

Zunächst schreiben wir die Systeme infinitesimaler Übergangs-Wn an. Wir erhalten für den Kettenprozeß $2(1, \nu)$, wenn wir in das früher hergeleitete System Gln (2.3-6) unsere jetzigen Bezeichnungen einführen, d.h.

$$(X, Y, \alpha, \beta) = (X_0, X_1, \lambda_0, \lambda_1) \text{ und } H_2 = \{ X_0(t) = i_0, X_1(t) = i_1 \}$$

setzen:

$$P \left[X_0(t+\Delta t) = i_0 + 1, X_1(t+\Delta t) = i_1 \mid H_2 \right] = (\nu - i_0) \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t) \quad (5a)$$

$$P \left[X_0(t+\Delta t) = i_0, X_1(t+\Delta t) = i_1 + 1 \mid H_2 \right] = (i_0 - i_1) \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t) \quad (5b)$$

$$P \left[X_0(t+\Delta t) = i_0, X_1(t+\Delta t) = i_1 \mid H_2 \right] = 1 - \left[(\nu - i_0) \lambda_0 + (i_0 - i_1) \lambda_1 \right] \Delta t + o(\Delta t) \quad (5c)$$

und alle übrigen infinitesimalen Übergangs-Wn $o(\Delta t)$ oder 0.

Daraus erschließt man für den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$, wenn man für den Zeitpunkt t bzw. $t+\Delta t$ die Ereignisse

$$A(i_k + \Delta i_k) = \{ X_k(t) = i_k + \Delta i_k \} ,$$

$$A'(i_k + \Delta i_k) = \{ X_k(t + \Delta t) = i_k + \Delta i_k \}$$

und für den Zeitpunkt t die Hypothese

$$H_\mu = \prod_{k=0}^{\mu-1} A(i_k) = \{ X_0(t) = i_0, X_1(t) = i_1, \dots, X_{\mu-1}(t) = i_{\mu-1} \}$$

einführt, das System infinitesimaler Wn

$$P \left[A'(i_0+1) \prod_{k=1}^{\mu-1} A'(i_k) \mid H_\mu \right] = (v-i_0)\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P \left[\left(\prod_{k=0}^{l-1} A'(i_k) \right) A'(i_{l+1}) \left(\prod_{m=l+1}^{\mu-1} A'(i_m) \right) \mid H_\mu \right] = (i_{l-1} - i_l)\lambda_l \Delta t + o(\Delta t) \quad (6)$$

für $l = 1, 2, \dots, \mu-1$

$$P \left[\prod_{k=0}^{\mu-1} A'(i_k) \mid H_\mu \right] = 1 - \left[(v-i_0)\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\mu-1} (i_{k-1} - i_k)\lambda_k \right] \Delta t + o(\Delta t)$$

alle übrigen infinitesimalen Wn $o(\Delta t)$ oder 0.

Dieses System infinitesimaler Wn genügt nun, um die Palm'sche pDGI

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = \Psi \cdot G_{\mu\nu} \quad (7)$$

für die allgemeine Gf $G_{\mu\nu}$ herzuleiten.

Dabei gilt im μ -dimensionalen Fall für den Palm'schen Ψ -Operator, wie man leicht aus dem 2-dimensionalen Fall ablesen kann

$$\Psi : = \Psi(\ln x_0, \ln x_1, \dots, \ln x_{\mu-1}, t, x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_{\mu-1} \frac{\partial}{\partial x_{\mu-1}})$$

$$= \sum_{\Delta I} x_0^{\Delta i_0} x_1^{\Delta i_1} \dots x_{\mu-1}^{\Delta i_{\mu-1}} \cdot q(t; (\Delta i_0, x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}), (\Delta i_1, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, (\Delta i_{\mu-1}, x_{\mu-1} \frac{\partial}{\partial x_{\mu-1}}))$$

$$\Delta I := \text{Menge der zulässigen } \Delta i_0, \Delta i_1, \dots, \Delta i_{\mu-1} \quad (8)$$

In der Definition von Ψ sind die Intensitätsfunktionen q in der operatorfreien Form mit den infinitesimalen Übergangs-Wn für $i \neq j$ gemäß

$$P \left[B_i(t+\Delta t) \mid B_j(t) \right] = q(t; (\vec{j}-\vec{i}, \vec{i})) \quad (9a)$$

und für $i = j$ gemäß

$$P \left[B_i(t+\Delta t) \mid B_i(t) \right] = 1 - q(t; (\vec{0}, \vec{i})) \quad (9b)$$

verknüpft. Die in Gl (9) neu eingeführten Symbole $B_i(s)$ und (\vec{k}, \vec{i}) stehen für

$$B_i(s) := \{ X_0(s) = i_0, X_1(s) = i_1, \dots, X_{\mu-1}(s) = i_{\mu-1} \} ,$$

$$(\vec{k}, \vec{i}) := ((k_0, i_0), (k_1, i_1), \dots, (k_{\mu-1}, i_{\mu-1}))$$

$$:= (k_0 i_0, k_1 i_1, \dots, k_{\mu-1} i_{\mu-1}) .$$

Bringt man die Intensitätsfunktionen in den Ψ -Operator ein, hat man (bei unserer Schreibweise) in ihnen die i_k durch die Differentialoperatoren

$$x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{zu ersetzen.}$$

Für den Kettenprozeß $2(1, \nu)$ lauten die Intensitätsfunktionen

$$\begin{aligned} q(t; li_0, Oi_1) &= (\nu - i_0) \lambda_0 \\ q(t; Oi_0, li_1) &= (i_0 - i_1) \lambda_1 \\ q(t, Oi_0, Oi_1) &= - \left[(\nu - i_0) \lambda_0 + (i_0 - i_1) \lambda_1 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

und für den Kettenprozeß $\mu(1, \nu)$

$$q(t; 1i_0, 0i_1, \dots, 0i_{\mu-1}) = (\nu - i_0)\lambda_0,$$

$$\text{alle Argumente } k i_{\rho} = 0i_{\rho} \text{ für } \rho = 1, 2, \dots, \mu-1 ;$$

$$q(t; 0i_0, \dots, 0i_{l-1}, 1i_l, 0i_{l+1}, \dots, 0i_{\mu-1}) = (i_{l-1} - i_l)\lambda_l,$$

$$\text{für } l = 1, 2, \dots, \mu-1 ; \quad (11)$$

$$q(t; 0i_0, 0i_1, \dots, 0i_{\mu-1}) = -(\nu - i_0)\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\mu-1} (i_{k-1} - i_k)\lambda_k .$$

Mit den Gln (11) erhalten wir für den Palm'schen Operator des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_0 x_0 (\nu - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}) + \sum_{k=1}^{\mu-1} \lambda_k x_k (x_{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{k-1}} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k}) \\ & - \lambda_0 (\nu - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}) - \sum_{k=1}^{\mu-1} \lambda_k (x_{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{k-1}} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k}) , \end{aligned}$$

der, wenn wir ihn noch etwas vereinfachen, die Form

$$\psi = \nu_0 - \sum_{k=0}^{\mu-2} x_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} - x_{\mu-1} \nu_{\mu-1} \frac{\partial}{\partial x_{\mu-1}} \quad (12)$$

$$u_k := \nu_k - \nu_{k+1}, \quad \nu_k := \lambda_k (x_k - 1)$$

annimmt.

Die allgemeine Gf $G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$ des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$ gehorcht daher der pDGl (7) mit dem ψ -Operator gemäß Gl (12).

b) Lösung der pDGl für $G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$ im Spezialfall $G_{\mu\nu}(\vec{x}; 0, 0) = 1$

Wir zeigen nun, wie im Spezialfall der Gf $G(\vec{x}; 0, t)$ die Kettenprozesse $\mu(1, \nu)$ und $(\mu, 1)$ zusammenhängen.

Es ergibt sich folgender Tatbestand :

Satz 1

Die pDGl

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\mu-2} x_i u_i \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_i} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu-1}} = v v_0 G_{\mu\nu}, \quad (13)$$

$$u_i := v_i - v_{i+1}, \quad v_i := \lambda_i (x_i - 1)$$

für die Gf $G_{\mu\nu} := G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$ des Kettenprozesses (μ, ν) hat unter der Randbedingung $G_{\mu\nu}(\vec{x}; 0, 0) = 1$ die Lösung

$$G := G_{\mu\nu}(\vec{x}; 0, t) = \left[P_0^{(\mu)}(t) + \sum_{i=1}^{\mu} P_i^{(\mu)}(t) x_0 x_1 \dots x_{i-1} \right]^{\nu} \quad (14)$$

mit

$$\sum_{i=0}^{\mu} P_i^{(\mu)}(t) = 1.$$

Dabei sind die $P_i^{(\mu)}(t)$ eine WV aus dem Kettenprozeß $(\mu, 1)$ und gehorchen dem DGl-System

$$\frac{d}{dt} P_j^{(\mu)}(t) = -\lambda_j P_j^{(\mu)}(t) + \lambda_{j-1} P_{j-1}^{(\mu)}(t) \quad (15)$$

$$\text{für } j = 0, 1, \dots, \mu, \quad \lambda_j = 0 \text{ für } j < 0, \quad j \geq \mu$$

mit den Randbedingungen

$$P_0^{(\mu)}(0) = 1, \quad P_j^{(\mu)}(0) = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots, \mu.$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels Induktion. Wie wir in früheren Abschnitten gesehen haben, ist der Satz für $\mu = 1$ Gl (1.2-27) und $\mu = 2$ Gl (2.4-29) richtig.

Sei er nun für μ richtig. Unsere Induktionsvoraussetzung lautet dann, daß $G_\mu := G$ eine Lösung der pDGl

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial t} = \Psi_\mu \cdot G_\mu \quad (16)$$

ist, wenn wir mit $\Psi_\mu := \Psi$ den diesbezüglichen Palm'schen Differentialoperator bezeichnen.

Wir haben dann zu zeigen, daß $G_{\mu+1}$ eine Lösung der pDGl

$$\frac{\partial G_{\mu+1}}{\partial t} = \Psi_{\mu+1} G_{\mu+1} \quad (17)$$

ist.

Führen wir als neue Größe

$$g_{\mu} = \sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) y_j \quad (18)$$

mit $y_0 := 1$, $y_j := x_0 x_1 \dots x_{j-1}$ für $j > 0$

ein, so läßt sich die pDGl (16) mit dem Ansatz $G_{\mu} = g_{\mu}^v$, da man $g_{\mu} \neq 0$ voraussetzen kann, auf

$$\frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} = \psi_{\mu} g_{\mu} \quad (19)$$

reduzieren, was für das folgende etwas bequemer ist. Anstelle von Gl (17) hat dann

$$\frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial t} = \psi_{\mu+1} g_{\mu+1} \quad (20)$$

zu treten.

Der Beweis des Satzes wird sehr durch den Umstand erleichtert, daß die W_n $P_i^{(\mu)}$ und $P_i^{(\mu+1)}$ der Kettenprozesse $(\mu, 1)$ und $(\mu+1, 1)$ fast alle einander gleich sind. Genauer gilt

$$P_i^{(\mu+1)}(t) = P_i^{(\mu)}(t) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, \mu-1 \quad (21)$$

Dies läßt sich unmittelbar aus dem DGl-System (15) für die $P_i^{(\rho)}(t)$ folgern.

Die letzten beiden DGl'n für den $(\mu, 1)$ -Prozeß lauten nämlich

$$\frac{d}{dt} P_{\mu-1}^{(\mu)}(t) = -\lambda_{\mu-1} P_{\mu-1}^{(\mu)}(t) + \lambda_{\mu-2} P_{\mu-2}^{(\mu)}(t) \quad (22a)$$

$$\frac{d}{dt} P_{\mu}^{(\mu)}(t) = \quad \quad \quad + \lambda_{\mu-1} P_{\mu-1}^{(\mu)}(t) \quad (22b)$$

und die letzten drei DGLn für den $(\mu+1,1)$ -Prozeß

$$\frac{d}{dt} P_{\mu-1}^{(\mu+1)}(t) = -\lambda_{\mu-1} P_{\mu-1}^{(\mu+1)}(t) + \lambda_{\mu-2} P_{\mu-2}^{(\mu+1)}(t) \quad (23a)$$

$$\frac{d}{dt} P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) = -\lambda_{\mu} P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) + \lambda_{\mu-1} P_{\mu-1}^{(\mu+1)}(t) \quad (23b)$$

$$\frac{d}{dt} P_{\mu-1}^{(\mu+1)}(t) = +\lambda_{\mu} P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) \quad (23c)$$

Gl (21) erlaubt uns für $g_{\mu+1}$ den Ausdruck

$$g_{\mu+1} = g_{\mu} + (P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) - P_{\mu}^{(\mu)}(t)) \cdot y_{\mu} + P_{\mu+1}^{(\mu+1)}(t) y_{\mu+1} \quad (24)$$

zu schreiben.

Um zu zeigen, daß Gl(20) bzw., wenn wir $\Psi_{\mu+1}$ in (20) einsetzen,

$$\frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\mu-1} x_k u_k \frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial x_k} + x_{\mu} v_{\mu} \frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = v_0 g_{\mu+1} \quad (25)$$

eine Identität ist, müssen wir die betreffenden Ableitungen von $g_{\mu+1}$ bilden.

Wir erhalten für die partielle Ableitung von $g_{\mu+1}$ nach t , wenn wir die DGLn (23b), (22b) und (23c) benutzen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial t} &= \frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} + (-\lambda_{\mu} P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) + \lambda_{\mu-1} P_{\mu-1}^{(\mu+1)}(t) - \lambda_{\mu-1} P_{\mu-1}^{(\mu)}(t)) y_{\mu} \\ &\quad + \lambda_{\mu} P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) y_{\mu+1}, \end{aligned}$$

was sich mit Gl(21) zu

$$\frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} + \lambda_{\mu} P_{\mu}^{(\mu+1)}(t) (y_{\mu+1} - y_{\mu}) \quad (26)$$

vereinfachen läßt.

Die übrigen partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial x_k} = \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_k} + (P_{\mu}^{(\mu+1)} - P_{\mu}^{(\mu)}) \frac{y_{\mu}}{x_k} + P_{\mu+1}^{(\mu+1)} \frac{y_{\mu+1}}{x_k} \quad (27a)$$

$$\text{für } 0 \leq k \leq \mu-1,$$

$$\frac{\partial g_{\mu+1}}{\partial x_{\mu}} = P_{\mu+1}^{(\mu+1)} y_{\mu}, \quad (27b)$$

wobei wir in $P_i^{(\rho)} := P_i^{(\rho)}(t)$ die Abhängigkeit von t weggelassen haben.

Mit den Gl'n (26) und (27) kann nun Gl (25) verifiziert werden.

Zunächst erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} + \lambda_{\mu} P_{\mu}^{(\mu+1)} (y_{\mu+1} - y_{\mu}) + \sum_{k=0}^{\mu-1} x_k u_k \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_k} \\ & + \left[(P_{\mu}^{(\mu+1)} - P_{\mu}^{(\mu)}) y_{\mu} + P_{\mu+1}^{(\mu+1)} y_{\mu+1} \right] \sum_{k=0}^{\mu-1} u_k + x_{\mu} v_{\mu} P_{\mu+1}^{(\mu+1)} y_{\mu} \\ & = v_0 \left[g_{\mu} + (P_{\mu}^{(\mu+1)} - P_{\mu}^{(\mu)}) y_{\mu} + P_{\mu+1}^{(\mu+1)} y_{\mu+1} \right], \end{aligned}$$

was mit den Umformungen

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} x_k u_k \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_k} = \left(\sum_{k=0}^{\mu-2} x_k u_k \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_k} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_{\mu-1}} \right) - x_{\mu-1} v_{\mu} P_{\mu}^{(\mu)} y_{\mu-1}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} u_k = \sum_{k=0}^{\mu-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{\mu}$$

auf den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\mu-2} x_k u_k \frac{\partial g_k}{\partial x_k} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_{\mu-1}} - v_0 g_\mu \right) \\
& + [(v_0 - v_\mu) y_{\mu+1} + v_\mu y_\mu x_\mu - v_0 y_{\mu+1}] P_{\mu+1}^{(\mu+1)} \\
& + [\lambda_\mu (y_{\mu+1} - y_\mu) + (v_0 - v_\mu) y_\mu - v_0 y_\mu] P_\mu^{(\mu+1)} \\
& + [-(v_0 - v_\mu) y_\mu - v_\mu y_{\mu-1} x_{\mu-1} + v_0 y_\mu] P_\mu^{(\mu)}
\end{aligned}$$

$\equiv 0$

(28)

führt. Dieser ist identisch Null, weil die Induktionsvoraussetzung Gl (19) gilt und alle Koeffizienten der oben vorkommenden $P_i^{(\rho)}$'s identisch Null sind.

Ende des Beweises für Satz 1 .]

c) Lösung der pDGl für $G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t)$ im allgemeinen Fall

Satz 2

Unter den in Satz 1 genannten Bedingungen hat die pDGl für die Gf des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t) &= \sum_{\vec{I}} P_{i_0 i_1 \dots i_{\mu-1}}(s, t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_{\mu-1}^{i_{\mu-1}} \\
&= \sum_{\vec{I}} P \left[\vec{X}(t) = \vec{i} \mid \vec{X}(s) = \vec{j} \right] x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_{\mu-1}^{i_{\mu-1}} ,
\end{aligned}$$

$\vec{I} :=$ Menge der zulässigen \vec{i}

$\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_{\mu-1})$

$\vec{j} := (j_0, j_1, \dots, j_{\mu-1})$

im allgemeinen Fall, d.h. unter der Randbedingung

$$G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, s) = \prod_{k=0}^{\mu-1} x_k^{j_k} ,$$

die Lösung

$$G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t) = \prod_{\kappa=0}^{\mu-1} x_{\kappa}^{j_{\kappa}} g_{\mu-\kappa, \kappa}^{(j_{\kappa-1} - j_{\kappa})}, \quad j_{-1} := \nu. \quad (29)$$

Dabei ist

$$g_{\iota\kappa} = \sum_{j=0}^{\iota} P_j^{(\iota, \kappa)}(u) y_{j\kappa} \quad (30)$$

mit

$$P_j^{(\iota, \kappa)}(u) := P_j^{(\iota)}(u; \lambda_{\kappa}, \lambda_{\kappa+1}, \dots, \lambda_{\kappa+\iota-1}), \quad u := t-s$$

$$P_j^{(\mu, 0)}(u) := P_j^{(\mu)}(u; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\mu-1}) := P_j^{(\mu)}(u)$$

und

$$y_{j\kappa} = 1 \quad j = 0$$

für

$$y_{j\kappa} = x_{\kappa} x_{\kappa+1} \cdots x_{\kappa+j-1} \quad j \geq 1 \quad \square$$

Bemerkung:

Die in Gl (30) eingeführte Bezeichnung für die $W_n P_j^{(\mu)}(u)$ des Kettenprozesses $(1, \mu)$ (vgl. § 1.2) ergibt zum Beispiel für

$$P_1^{(2,0)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 u) - \exp(-\lambda_0 u)) = P_1^{(2)}(u)$$

und für

$$P_1^{(2,3)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} (\exp(-\lambda_4 u) - \exp(-\lambda_3 u)).$$

Somit entsteht $P_1^{(2,3)}$ aus $P_1^{(2,0)}$, wenn man in $P_1^{(2,0)}$ die Abfallkonstanten λ_0 durch λ_3 und λ_1 durch λ_4 ersetzt.

Ordnen wir also die $W_n P_j^{(\mu,0)} = P_j^{(\mu)}$ ($j=0,1,2,\dots,\mu$) dem Kettenprozeß $(\mu, 1)$

$$E_0 \xrightarrow{\lambda_0} E_1 \xrightarrow{\lambda_1} \dots \xrightarrow{\lambda_{k-1}} E_k \xrightarrow{\lambda_k} E_{\frac{k+1}{k+1}} \dots \xrightarrow{\lambda_{k+1-1}} E_{\frac{k+1}{k+1}} \dots \xrightarrow{\lambda_{\mu-2}} E_{\mu-1} \xrightarrow{\lambda_{\mu-1}} E_{\mu}$$

mit dem Anfangszustand E_0 und dem Endzustand E_{μ} zu, so gehören die $W_n P_j^{(1, \kappa)}$ zu einem Kettenprozeß $(1, 1)$ mit dem Anfangszustand E_k und dem Endzustand $E_{\frac{k+1}{k+1}}$.

Beweis:

Wir beweisen Satz 2 wie Satz 1 mittels Induktion nach μ . Führen wir in Gl (1.2-26) und Gl (2.4-28) unsere neuen Bezeichnungen ein, so sehen wir unmittelbar, daß Satz 2 für $\mu = 1$, d.h.

$$G = x_0^{j_0} \left[P_0^{(1,0)} + P_1^{(1,0)} x_0 \right] v^{-j_0} \quad (31a)$$

und für $\mu = 2$, d.h.

$$G = x_0^{j_0} \left[P_0^{(2,0)} + P_1^{(2,0)} x_0 + P_2^{(2,0)} x_0 x_1 \right] v^{-j_0} \cdot x_1^{j_1} \left[P_0^{(1,1)} + P_1^{(1,1)} x_1 \right]^{j_0 - j_1} \quad (31b)$$

richtig ist.

Wir zeigen nun, daß die pDGl (vgl. Satz 1 Gl (13))

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\mu-2} x_i (v_i - v_{i+1}) \frac{\partial G}{\partial x_i} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} \frac{\partial G}{\partial x_{\mu-1}} = v \cdot v_0 \cdot G$$

die in Satz 2 genannte Lösung besitzt, wenn man den Ansatz

$$G = H_0(x_0, x_1, \dots, x_{\mu-1}; t) \cdot H_1(x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}; t) \quad (32)$$

macht, wobei H_1 der Induktionsvoraussetzung

$$D_1 \equiv \frac{\partial H_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\mu-2} x_i (v_i - v_{i+1}) \frac{\partial H_1}{\partial x_i} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} \frac{\partial H_1}{\partial x_{\mu-1}} - j_0 \cdot v_1 \cdot H_1 = 0 \quad (33)$$

genügt.

Gehen wir mit Ansatz Gl (32) in die pDGl Gl (13) ein, folgt

$$H_0 D_1 + H_1 D_0 = 0 \quad , \quad (34)$$

und die Behauptung von Satz 2 ist richtig, wenn wir nachgewiesen haben, daß

$$H_0 = x_0^{j_0} \cdot g_{\mu_0}^{v-j_0} \quad (35)$$

die pDGl

$$D_0 \equiv \frac{\partial H_0}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\mu-2} x_i (v_i - v_{i+1}) \frac{\partial H_0}{\partial x_i} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} \frac{\partial H_0}{\partial x_{\mu-1}} - (v \cdot v_0 - j_0 v_1) H_0 = 0 \quad (36)$$

befriedigt. Denn man kann voraussetzen, daß $H_1 \neq 0$ und H_0, H_1 beschränkt sind.

Zum Ansatz Gl (32) mit H_0 gemäß Gl (35) werden wir geführt, wenn wir ebenso wie in § 2.4 c) schließen. Wir kommen hierauf nocheinmal bei der kombinatorischen Methode in § 4.4 zurück.

Der Vorteil des expliziten Ausdrucks für H_0 besteht darin, daß wir lediglich bestätigen müssen, daß dieser die pDGl $D_0 = 0$ erfüllt, also nicht mehr deren Lösung aufsuchen müssen.

Um ersteres auszuführen, benötigen wir noch die partiellen Ableitungen von H_0 nach t und x_i . Es ist mit $y_j := y_{j_0}$, $P_j := P_j^{(\mu,0)}$, wenn wir Gl (15) beachten

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial t} &= \frac{(v-j_0)}{g_{\mu_0}} H_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu,0)}(u) \cdot y_{j_0} \right] \\ &= \frac{(v-j_0)}{g_{\mu_0}} H_0 \left[-\lambda_0 P_0 + \sum_{j=1}^{\mu-1} (\lambda_{j-1} P_{j-1} - \lambda_j P_j) y_j \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\mu-1} P_{\mu-1} y_{\mu} \right] \\ &= \frac{(v-j_0)}{g_{\mu_0}} H_0 \sum_{i=0}^{\mu-1} v_i P_i y_i \quad . \end{aligned} \quad (37a)$$

Ferner sind

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0} = \frac{j_0}{x_0} H_0 + \frac{(v-j_0)}{g_{\mu 0}} H_0 \sum_{j=1}^{\mu} P_j \frac{y_j}{x_0}, \quad (37b)$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_i} = \frac{(v-j_0)}{g_{\mu 0}} H_0 \sum_{j=i+1}^{\mu} P_j \frac{y_j}{x_i}, \quad 1 \leq i \leq \mu-1.$$

Diese partiellen Ableitungen ergeben in Gl (36) eingesetzt, wenn wir gleich H_0 herauskürzen,

$$\frac{(v-j_0)}{g_{\mu 0}} \left[\sum_{i=0}^{\mu-1} v_i P_i y_i + \sum_{i=0}^{\mu-2} x_i (v_i - v_{i+1}) \sum_{j=i+1}^{\mu} P_j \frac{y_j}{x_i} + x_{\mu-1} v_{\mu-1} P_{\mu} \frac{y_{\mu}}{x_{\mu-1}} \right] + (x_0 (v_0 - v_1) \frac{j_0}{x_0} - (v v_0 - j_0 v_1)) = 0. \quad (38)$$

Die linke Seite der zuletzt angeschriebenen Gleichung ist aber identisch Null, da sich der Term in der eckigen Klammer auf $v_0 g_{\mu 0}$ reduzieren läßt.

Dies sieht man wie folgt ein :

$$\begin{aligned} [\dots] &= \sum_{i=0}^{\mu-1} v_i \cdot y_i \cdot P_i + \sum_{i=0}^{\mu-1} v_i \sum_{j=i+1}^{\mu} y_j P_j - \sum_{i=0}^{\mu-2} v_{i+1} \sum_{j=i+1}^{\mu} y_j P_j \\ &= v_0 y_0 P_0 + \sum_{i=1}^{\mu-1} v_i (y_i P_i + \sum_{j=i+1}^{\mu} y_j P_j) + v_0 \sum_{j=1}^{\mu} y_j P_j \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\mu-1} v_i \sum_{j=i}^{\mu} y_j P_j = v_0 \sum_{j=0}^{\mu} y_j P_j = v_0 g_{\mu 0}. \quad (39) \end{aligned}$$

Ende des Beweises für Satz 2.]

§ 4.4 Berechnung der erzeugenden Funktion $G_{\mu\nu}(\vec{x};s,t)$ des Kettenprozesses $\mu(1,\nu)$ mit der kombinatorischen Methode

In § 4.3 haben wir gesehen, daß sich für die pDGl der Gf des allgemeinen Kettenprozesses $\mu(1,\nu)$ sehr schnell eine spezielle Lösung angeben läßt, wenn man den Kettenprozeß $(\mu,1)$ mit einbezieht.

Jedoch blieb dunkel, auf welche Weise man den Kettenprozeß $\mu(1,\nu)$ mit Hilfe des Kettenprozesses $(\mu,1)$ aufbauen kann.

Dies wollen wir nun aufklären. Wir untersuchen dazu mit der kombinatorischen Methode, wie die zVn zusammenhängen, welche die beiden Prozesse charakterisieren.

Dabei geben wir zunächst zwei neue Beweise für Satz 1 aus § 4.3, beschränken uns aber im ersten Beweis auf den Spezialfall $\mu = 2$. Dann zeigen wir, daß wegen der speziellen Struktur des Kettenprozesses $\mu(1,\nu)$ Satz 2 mit Hilfe von Satz 1 hergeleitet werden kann.

a) Erster kombinatorischer Beweis für Satz 1

Spezialfall $G_{2\nu}((x_0, x_1); 0, t)$

Wie in der Einleitung § 1.1 ausführlich diskutiert wurde, besteht der Kettenprozeß (μ,ν) aus ν voneinander statistisch unabhängigen Ketten

$$E_0^{(i)} \xrightarrow{\lambda_0} E_1^{(i)} \xrightarrow{\lambda_1} \dots \xrightarrow{\lambda_{\mu-1}} E_{\mu}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, \nu.$$

Der Zustand dieses Kollektivs von ν Ketten läßt sich entweder durch den zV $\vec{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_\nu(t))$ oder durch den zV $\vec{X}(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_{\mu-1}(t))$ beschreiben.

Dabei sei, wenn sich zum Zeitpunkt t die i te Kette im Zustand $E_j^{(i)} = E_j$ befindet, $Z_i(t) = j$, bzw., wenn bis zum Zeitpunkt t i_k Übergänge $E_k \rightarrow E_{k+1}$ stattgefunden haben, $X_k(t) = i_k$.

Die Komponenten des $\vec{zV} \vec{X}(t)$ sind im Gegensatz zu den Komponenten des $\vec{zV}'s \vec{Z}(t)$ statistisch abhängig. Dies ergibt sich aus den Voraussetzungen unseres Modells, wonach innerhalb einer Kette nur solche Zustände angenommen werden dürfen, für die

$$E_m^{(i)} \longrightarrow E_n^{(i)}, \quad n = m + 1$$

gilt. Also müssen die $X_j(t)$ den Ungleichungen

$$0 \leq X_{\mu-1}(t) \leq X_{\mu-2}(t) \leq \dots \leq X_{j+1}(t) \leq X_j(t) \leq \dots \leq v \quad (1)$$

gehörchen.

Eine wichtige Beziehung zwischen den $\vec{zVn} \vec{Z}(t)$ und $\vec{X}(t)$ haben wir bereits in Gl (1.1-4) der Einleitung gefunden: es sind die Summe der Komponenten der $\vec{zVn} \vec{Z}(t)$ und $\vec{X}(t)$ einander gleich, d.h.

$$Z(t) := \sum_{i=1}^v Z_i(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} X_j(t) := X(t).$$

Sie ermöglicht es uns, da die Gf von $Z(t)$ leicht berechnet werden kann, einen speziellen Wert für die Gf

$$G_{\mu v}(\vec{x}; t) = \sum_I P_{i_0 i_1 \dots i_{\mu-1}}(t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_{\mu-1}^{i_{\mu-1}}$$

anzugeben.

Beachtet man nämlich die Eigenschaft Gl (4.2-4) der erzeugenden Funktionen, so ist für $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{\mu-1}) = (z, z, \dots, z)$

$$G_{\mu v}(\underbrace{(z, z, \dots, z)}_{\mu\text{-mal}}; t) = \left(\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) z^j \right)^v = G_{\mu v}(z; t). \quad (2)$$

Wir spezialisieren nun auf den Fall $\mu = 2$. Gesucht ist hier ein expliziter Ausdruck für die Gf

$$G_{2v}((x_0, x_1); t) = \sum_I P_{ij}(t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} \quad (3)$$

$I :=$ Indexmenge der zulässigen i_0, i_1 .

Mit Hilfe von Gl (1), die jetzt

$$0 \leq X_1(t) \leq X_0(t) \leq v$$

lautet, lässt sich sofort die Indexmenge I für Gl (3) angeben. Es ist

$$0 \leq i_1 \leq i_0 \leq v$$

oder

$$i_0 \geq i_1 \quad \text{für } i_0, i_1 = 0, 1, \dots, v \quad (4)$$

Somit bleibt noch übrig, die Koeffizienten $P_{i_0 i_1}(t)$ in

$$G_2((x_0, x_1); t) = \sum_{i_0=0}^v \sum_{i_1=0}^{i_0} P_{i_0 i_1}(t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} \quad (5)$$

zu bestimmen.

Aus Beziehung (2) folgt mit $P_j := P_j^{(2)}(t)$

$$\begin{aligned} G_{2v}((z, z); t) &= \sum_{i=0}^v \sum_{j=0}^i P_{ij}(t) z^{i+j} \\ &= (P_0 + P_1 z + P_2 z^2)^v, \end{aligned} \quad (6)$$

woraus man für

$$P_{ij}(t) = \binom{v}{i} \binom{i}{j} P_0^{v-i} P_1^{i-j} P_2^j \quad (7)$$

errechnet, wenn man auf die rechte Seite von (6) den Binomialsatz zweimal gemäß

$$\begin{aligned} [P_0 + z(P_1 + P_2 z)]^v &= \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} z^i (P_1 + P_2 z)^i P_0^{v-i} \\ &= \sum_{i=0}^v \sum_{j=0}^i \binom{v}{i} \binom{i}{j} P_0^{v-i} P_1^{i-j} P_2^j z^{i+j} \end{aligned}$$

anwendet und die Koeffizienten von z^{i+j} mit einander vergleicht.

Das gesuchte Ergebnis stellt sich ein, wenn man $P_{ij}(t)$ aus Gl (7) in Gl (5) einsetzt und den Binomialsatz abermals zweimal anwendet

$$G_{2v}((x_0, x_1); t) = \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} P_0^{v-i} x_0^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} P_1^{i-j} (P_2 x_1)^j$$

$$= \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} P_0^{v-i} [x_0 (P_1 + P_2 x_1)]^i = (P_0 + P_1 x_0 + P_2 x_0 x_1)^v. \quad (8)$$

Ende des ersten Beweises.]

b) Zweiter kombinatorischer Beweis für Satz 1

Allgemeiner Fall $G_{\mu\nu}(\vec{x}; 0, t)$

Bei diesem Beweis zeigen wir mit einem etwas anderen Verfahren als zuvor, daß die Gf

$$G_{\mu\nu}(\vec{x}; t) = \left(\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) y_j \right)^{\nu} \quad (9)$$

$$y_0 := 1, y_j := x_0 x_1 \dots x_{j-1}$$

nicht nur für $\mu = 1, 2$ gilt. Dies wird uns neue Einsichten in die Struktur des Kettenprozesses (μ, ν) vermitteln.

Die Beweisidee, die wir benutzen, ist recht naheliegend, wenn man den zu beweisenden Ausdruck Gl (9) etwas eingehender betrachtet. Man bemerkt dann zweierlei:

1. Rein formal ist die Summe

$$G_{\mu 1}^{(i)}(\vec{x}^{(i)}; t) = \sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) y_j^{(i)} \quad (10)$$

eine Gf; da der dieser Gf zugeordnete \vec{zV} , der mit $\vec{X}^{(i)}(t)$ bezeichnet sei, etwas anderes als der $\vec{zV} \vec{X}(t)$ bedeuten muß, haben wir \vec{x} durch $\vec{x}^{(i)}$ und y_j durch $y_j^{(i)}$ ersetzt.

2. Die Summe Gl (10) ist in Gl (9) in die ν -te Potenz erhoben, also muß bei der Bildung der Gf (9) eine Faltung beteiligt sein.

Sofort ist klar, daß alle weiteren Überlegungen sehr viel gezielter vonstatten gehen könnten, wenn wir wüßten, welche Bedeutung dem $\vec{zV} \vec{X}^{(i)}(t) = (X_0^{(i)}(t), X_1^{(i)}(t), \dots, X_{\mu-1}^{(i)}(t))$ in unserem Modell zukommt.

Daher wird man im nächsten Schritt versuchen, diese Bedeutung zu erraten. Man kommt hierbei zum Ziel, wenn man auf rein formalem Wege untersucht, wie die in 2. erwähnte Faltung zustande kommen kann.

Wir nehmen dazu an, daß der i -te $\vec{zV} \vec{X}^{(i)}(t)$ eine Eigenschaft der i -ten Kette beschreibt. Dies impliziert, daß die v Vektoren $\vec{X}^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, v$) voneinander wechselseitig statistisch unabhängig sein müssen.

Man beachte jedoch, daß in einem solchen System statistisch unabhängiger Vektoren jeweils zwei beliebige Komponenten $X_k^{(i)}$ und $X_k^{(j)}$ verschiedener Vektoren ($i \neq j$) statistisch unabhängig sind, während irgend zwei Komponenten $X_k^{(i)}$, $X_{k'}^{(i)}$ ($k \neq k'$) desselben Vektors statistisch abhängig sein können.

Bilden wir nun die gemeinsame Gf eines solchen Systems von Vektoren $\vec{X}^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, v$)

$$G(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(v)}; t) = \prod_{i=1}^v G_{\mu 1}^{(i)}(\vec{x}^{(i)}; t) \\ = \prod_{i=1}^v \left(\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) y_j^{(i)} \right), \quad (11)$$

so geht hieraus die gesuchte Gf hervor, wenn wir für alle i $\vec{x}^{(i)} = \vec{x}$ setzen.

$$G(\underbrace{\vec{x}, \dots, \vec{x}}_{v\text{-mal}}; t) = G_{\mu v}(\vec{x}; t) \quad (12)$$

Dieser Operation sind wir aber sowohl im 1. Beweis als auch in

§ 4.2 begegnet. Ihr entspricht in den beteiligten zVn die Transformation

$$X_j(t) = \sum_{i=1}^v X_j^{(i)}(t) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, \mu-1, \quad (13)$$

wobei die $X_j(t)$ Komponenten des uns in seiner Bedeutung bekannten \vec{zV} 's $\vec{X}(t)$ sind.

Die Beziehung (13) macht es uns leicht, den Vektoren $\vec{X}^{(i)}(t)$ eine physikalische Bedeutung beizulegen.

Danach muß $X_j^{(i)}$, wenn sich die Gf $G_{\mu\nu}(\vec{x}; t)$ auf die geschilderte Weise herleiten lassen soll, Indikator variable für den individuellen Übergang $E_j^{(i)} \rightarrow E_{j+1}^{(i)}$ in der i -ten Kette sein.

D.h. anders ausgedrückt, daß die j -te Komponente des \vec{zV} 's $\vec{X}^{(i)}(t)$ den Wert (0), 1 annimmt, wenn sich die i -te Kette (nicht) im Zustand $E_{j+1}^{(i)}$ befindet.

Um unseren Beweis zu beenden, müssen wir also noch zeigen, daß der \vec{zV} $\vec{X}^{(i)}(t) = (X_0^{(i)}(t), X_1^{(i)}(t), \dots, X_{\mu-1}^{(i)}(t))$ die Gf

$$G_{\mu-1}^{(i)}(\vec{x}^{(i)}; t) = \sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(i)}(t) y_j^{(i)}$$

$$y_0 := 1, \quad y_j^{(i)} := x_0^{(i)} x_1^{(i)} \dots x_{\mu-1}^{(i)}$$

besitzt, wenn wir von der Definition

$$G_{\mu-1}^{(i)}(\vec{x}^{(i)}; t) = \sum_K P_{k_0 k_1 \dots k_{\mu-1}}^{(i)}(t) x_0^{(i) k_0} x_1^{(i) k_1} \dots x_{\mu-1}^{(i) k_{\mu-1}} \quad (14)$$

ausgehen.

Wir tun dies, indem wir mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P[A] = \sum_j P[B_j] \cdot P[A|B_j] \quad (15)$$

$B_j :=$ vollständiges Ereignissystem

die $\sum_K P_{k_0 k_1 \dots k_{\mu-1}}^{(i)}(t)$ berechnen.

Für das vollständige Ereignissystem B_j wählen wir die WV $P_j^{(\mu)}(t)$ ($j = 0, 1, \dots, \mu$) des Kettenprozesses $(\mu, 1)$ (vgl. Gl (1.2-10)).

Dann gilt für die i -te Kette

$$P [B_j] := P [Z^{(i)} = j] = P_j^{(\mu)}(t), \quad (16)$$

wobei $Z^{(i)} = j$ angibt, daß sich die i -te Kette im Zustand $E_j^{(i)} = E_j$ befindet.

Die bedingten Wn $P [A^{(i)} | B_j]$ mit $A^{(i)} = \{ \vec{X}^{(i)}(t) = \vec{k} \}$ und

$B_j = \{ Z^{(i)}(t) = j \}$ ergeben sich wie folgt :

Eine Kette, die sich im $j+1$ ten Zustand $E_{j+1}^{(i)}$ befindet, muß zuvor die Zustände $E_k^{(i)}$ mit $0 \leq k \leq j$ durchlaufen haben.

Drücken wir dies in den zVn $X_k^{(i)}(t)$ und $Z^{(i)}(t) := Z_i(t)$ (i fest) aus, so muß unter der Hypothese $Z^{(i)}(t) = j+1$ notwendigerweise $X_k^{(i)}(t) = 1$ für $0 \leq k \leq j$ und $X_k^{(i)}(t) = 0$ für $j+1 \leq k \leq \mu-1$ sein. Infolgedessen gilt für $j = 0, 1, \dots, \mu-1$

$$P [\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{k} | Z^{(i)}(t) = j+1] = \begin{cases} 1 & \vec{k} = \vec{k}^* \\ 0 & \vec{k} \neq \vec{k}^* \end{cases} \quad (17a)$$

$$\vec{k}^* = (k_0^*, \dots, k_{\mu-1}^*), \quad k_{j'}^* = 1 \text{ für } 0 \leq j' \leq j; \quad k_{j'}^* = 0 \text{ für } j+1 \leq j' \leq \mu-1$$

und

$$P [\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{k} | Z^{(i)}(t) = 0] = \begin{cases} 1 & \vec{k} \neq \vec{k}^+ \\ 0 & \vec{k} = \vec{k}^+ \end{cases} \quad (17b)$$

$$\vec{k}^+ = (k_0^+, \dots, k_{\mu-1}^+), \quad k_{j'}^+ = 0 \text{ für } 0 \leq j' \leq \mu-1.$$

Die zuletzt aufgeführten bedingten Wn Gl (17b) bedürfen noch einer kleinen Erläuterung. Für $Z^{(i)}(t) = 0$ befindet sich die i -te Kette im Anfangszustand $E_0^{(i)}$. Statt dessen kann man auch sagen, daß sie sich in keinem der möglichen Folgezustände aufhält. Daher müssen die Ereignisse $\{Z^{(i)}(t) = 0\}$ und $\{\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{0}\}$ äquivalent sein, was Gl (17b) ergibt.

Jetzt kennen wir alle Größen, um die Summe im Satz von der totalen W
ausführen zu können. Schreiben wir nur die Wn $P[\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{k}] =$
 $P_{k_0 k_1 \dots k_{\mu-1}}^{(i)}(t)$ auf, die ungleich Null sind, erhalten wir

$$P[\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{0}] = P_0^{(\mu)}(t) \cdot P[\vec{X}^{(i)}(t) = 0 \mid Z^{(i)}(t) = 0]$$

$$= P_0^{(\mu)}(t) \cdot P[X_0^{(i)} = 0, X_1^{(i)} = 0, \dots, X_{\mu-1}^{(i)} = 0 \mid Z^{(i)} = 0], \quad (18b)$$

$$P[\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{k}^*] = \sum_{l=0}^{\mu} P_l^{(\mu)}(t) \cdot P[\vec{X}^{(i)}(t) = \vec{k}^* \mid Z^{(i)} = l]$$

$$= P_{j+1}^{(\mu)}(t) \cdot P[X_0^{(i)} = 1, X_1^{(i)} = 1, \dots, X_j^{(i)} = 1,$$

$$X_{j+1}^{(i)} = 0, \dots, X_{\mu-1}^{(i)} = 0 \mid Z^{(i)} = j+1] \quad (18a)$$

Setzt man nun diese Wn in die Gf Gl (14) ein, ergibt sich unmittelbar
Gl (10) .

Ende des zweiten Beweises .]

c) Kombinatorischer Beweis für Satz 2

Es sei $\vec{X}(s) = (j_0, j_1, \dots, j_{\mu-1})$ die Realisation des Kettenprozesses
 $\mu(1, \nu)$ zum Zeitpunkt s .

Dann befinden sich zum Zeitpunkt s , da bis dahin genau j_κ Übergänge
 $E_\kappa \rightarrow E_{\kappa+1}$ ($\kappa=0, 1, \dots, \mu-1$) stattgefunden haben, genau $(j_{\rho-1} - j_\rho)$
Nukleide (=Ketten) im Zustand E_ρ ($\rho=0, 1, \dots, \mu; j_{-1} = \nu$) .

Im weiteren Verlauf des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$ starten nun zum Zeitpunkt
 s von jedem Zustand E_κ mit $j_{\kappa-1} - j_\kappa > 0$, $\kappa=0, 1, \dots, \mu-1$ je ein
neuer Kettenprozess $(\mu-\kappa)(1, j_{\kappa-1} - j_\kappa)$ mit dem $z\vec{V} \vec{X}_\kappa(u) = (X_{\kappa, \kappa}(u),$
 $X_{\kappa, \kappa+1}(u), \dots, X_{\kappa, \mu-1}(u))$, $u := t-s$.

Dabei gibt die Komponente $X_{\kappa, j}(u)$ des $z\vec{V} \vec{X}_\kappa(u)$ an, wieviele Über-
gänge $E_j \rightarrow E_{j+1}$ im Zeitintervall $(s, s+u)$ in denjenigen Ketten erfolgt
sind, die sich zum Zeitpunkt s im Zustand E_κ befunden haben.

Für die folgenden Überlegungen ist es nützlich, sich die Bedeutung dieser Größen an einer Realisation des Kettenprozesses (μ, ν) klar zu machen.

Ist \underline{E}_i (\underline{E}_i) ein zum Zeitpunkt s (t), $s < t$ besetzter Zustand und für $(\mu, \nu) = (4, 5)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{E}_0 & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & \underline{E}_2 & \rightarrow & E_3 & \rightarrow & E_4 \\ E_0 & \rightarrow & \underline{E}_1 & \rightarrow & \underline{E}_2 & \rightarrow & E_3 & \rightarrow & E_4 \\ E_0 & \rightarrow & \underline{E}_1 & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & \underline{E}_3 & \rightarrow & E_4 \\ E_0 & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & \underline{E}_2 & \rightarrow & \underline{E}_3 & \rightarrow & E_4 \\ E_0 & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & \underline{E}_3 & \rightarrow & E_4 \end{array},$$

so gilt

$$\vec{X}(s) = (X_0(s) = 4, X_1(s) = 2, X_2(s) = 1, X_3(s) = 0)$$

$$\vec{X}(t) = (X_0(t) = 5, X_1(t) = 5, X_2(t) = 3, X_3(t) = 0)$$

und

$$\vec{X}_0(u) = (X_{00}(u) = 1, X_{01}(u) = 1, X_{02}(u) = 0, X_{03}(u) = 0)$$

$$\vec{X}_1(u) = (X_{11}(u) = 2, X_{12}(u) = 1, X_{13}(u) = 0)$$

$$\vec{X}_2(u) = (X_{22}(u) = 1, X_{23}(u) = 0)$$

$$\vec{X}_3(u) = (X_{33}(u) = 0)$$

Da die Komponenten $X_{kk}(u)$ der zVn $\vec{X}_k(u)$ dieser neuen Kettenprozesse mit den Komponenten $X_k(t)$ des zVs $\vec{X}(t)$ des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$ gemäß

$$X_k(t) = X_k(s) + \sum_{i=0}^j X_{ik}(u), \quad X_k(s) = j_k \quad (19)$$

zusammenhängen und überdies, wie nicht allzuschwer einzusehen ist, die $\forall n \vec{X}_\kappa(u)$ ($\kappa = 0, 1, \dots, \mu-1$) voneinander stochastisch unabhängig sind, läßt sich die gesuchte Gf mit Hilfe der Gfn dieser neuen Kettenprozesse leicht konstruieren.

Nehmen wir vorweg, daß diese Gfn

$$G(\vec{x}_\kappa; s, t) = x_{\kappa\kappa}^{j_\kappa} g_{\mu-\kappa, \kappa}(\vec{x}_\kappa; u)^{(j_{\kappa-1} - j_\kappa)} \quad (20)$$

$$\vec{x}_\kappa := (x_{\kappa\kappa}, x_{\kappa, \kappa+1}, \dots, x_{\kappa, \mu-1}), \quad u := t-s$$

lauten, so erhalten wir für die gemeinsame Gf der neuen Kettenprozesse $(\mu-\kappa)$ $(1, j_{\kappa-1} - j_\kappa)$ für $\kappa = 0, 1, \dots, \mu-1$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{\mu-1}; s, t) &= \prod_{\kappa=0}^{\mu-1} G(\vec{x}_\kappa; s, t) \\ &= \prod_{\kappa=0}^{\mu-1} x_{\kappa\kappa}^{j_\kappa} g_{\mu-\kappa, \kappa}(\vec{x}_\kappa, u)^{(j_{\kappa-1} - j_\kappa)} \end{aligned} \quad (21)$$

und für die gesuchte Gf des Kettenprozesses $\mu(1, \nu)$, wenn wir Gl (19) berücksichtigen, d.h. den Satz in § 4.2 mit $x_{\kappa j} = x_j$ anwenden,

$$G_{\mu\nu}(\vec{x}; s, t) = \prod_{\kappa=0}^{\mu-1} x_{\kappa\kappa}^{j_\kappa} g_{\mu-\kappa, \kappa}(x; u)^{(j_{\kappa-1} - j_\kappa)} \quad (22)$$

Dabei haben wir in Gl (20) wie in Gl (22) die Bezeichnungen von Satz 2 in § 4.3 gewählt.

Nun bleibt noch Gl (20) zu bestätigen. Nach Satz 1 gilt zunächst für $\vec{X}_0(0) = \vec{X}(0) = \vec{0}$ ($\vec{X}_0(t)$ ist wie $\vec{X}(t)$ μ -dimensional) und E_0 als Anfangszustand ($\vec{x} := \vec{x}_0$)

$$G_{\mu\nu}(\vec{x}; 0, t) = \left[\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) y_j \right]^\nu = g_{\mu 0}^\nu(t)$$

Daraus folgt aber, wenn wir zum Zeitpunkt $t=0$ als neue Anfangsbedingung $\vec{X}_0(0) = (j_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{(\mu-1)\text{-mal}})$ wählen

$$G_{\mu\nu}(\vec{x};0,t) = x_o^{j_o} \left[\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(t) y_j \right] \nu^{-j_o} = x_o^{j_o} g_{\mu o}(t) \nu^{-j_o} \quad (23)$$

Machen wir nun die zusätzliche Annahme, daß der Kettenprozeß $\mu(1,\nu)$ zeitlich homogen ist, so erhalten wir aus Gl (23), wenn wir den Beginn von $t = 0$ auf $t = s$ verschieben

$$G(\vec{x};s,t) = x_o^{j_o} \left[\sum_{j=0}^{\mu} P_j^{(\mu)}(u) y_j \right] \nu^{-j_o} = x_o^{j_o} g_{\mu o}(u) \nu^{-j_o} \quad , \quad (24)$$

$$u := t-s \quad .$$

Um im allgemeinen Fall aus Gl (24) die Gf $G(\vec{x}_\kappa;s,t)$ für den $z\vec{V}$ $\vec{X}_\kappa(u) = (X_{\kappa\kappa}(u), X_{\kappa,\kappa+1}(u), \dots, X_{\kappa,\mu-1}(u))$ und den Anfangszustand E_κ für $\kappa \leq \mu-1$ zu bekommen, brauchen wir jetzt nur noch die Zerfallskonstanten in den $W_n P_j^{(\mu)}(t)$ des Kettenprozesses $(\mu,1)$ geeignet zu benennen.

Dies ergibt dann mit

$$g_{1\kappa}(\vec{x}_\kappa;u) = \sum_{j=0}^1 P_j^{(1,\kappa)}(u) y_{j\kappa}^{(\kappa)} \quad , \quad (25)$$

$$y_{j\kappa}^{(\kappa)} := x_{\kappa\kappa} x_{\kappa,\kappa+1} \cdots x_{\kappa,\kappa+j-1}$$

$$y_{j\kappa}^{(o)} := y_{j\kappa}$$

die Gl (20) .

Die zeitliche Homogenität des Kettenprozesses $\mu(1,\nu)$ ist unmittelbar aus seinem System infinitesimaler Übergangs- W_n abzulesen.

Ende des kombinatorischen Beweises für Satz 2 .₁

