

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

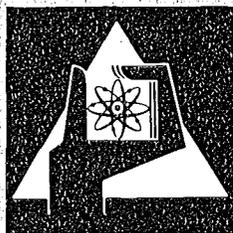
Mai 1974

KFK 1937

Institut für Experimentelle Kernphysik

**Mehrfachstreuung von Gammastrahlung an
ferromagnetischen Platten (I)**

P. Bock



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1937

Institut für Experimentelle Kernphysik

Mehrfachstreuung von Gammastrahlung an
ferromagnetischen Platten

P. Bock

Gesellschaft für Kernforschung m. b. H. Karlsruhe

Mehrfachstreuung von Gammastrahlung an ferromagnetischen Platten

Zusammenfassung

Wird Kern-Gammastrahlung an einer magnetisierten Platte gestreut, hängen die Intensitäten der Doppel- und Dreifachstreuung von der Magnetisierung ab. Dieser Effekt rührt überwiegend von der Faraday-Rotation der Photonen-Polarisationsebene im Target her. Er wurde mit einem Computer für eine Reihe von Photonenenergien und Streuwinkel berechnet. Die Resultate werden als Korrekturen in experimentellen Untersuchungen der Links-Rechts-Asymmetrie in der Compton-Streuung benötigt.

Multiple scattering of gamma rays on ferromagnetic plates

Abstract

If nuclear gamma rays are scattered on a magnetized metal plate, the intensities from double and triple scattering depend on the magnetization. This effect arises mainly from Faraday rotation of the photon polarization plane in the target. Its size was calculated with a computer for some photon energies and scattering angles. The results are needed as corrections in experimental investigations of the left-right asymmetry in Compton scattering.

I. Einleitung

Der vorliegende Bericht ist Teil eines Programms, in dem die Links-Rechts-Asymmetrie an in der Streuung von Gammaquanten an ferromagnetischen Metallen untersucht wird. Den dazu verwendeten Versuchsaufbau zeigt Abb. 1. Von einer radioaktiven Quelle wird Gammastrahlung emittiert, die nach Streuung an einer magnetisierten Metallplatte nachgewiesen wird. Beim Umpolen der Magnetisierung ändert sich die Zahl der registrierten Quanten um einen relativen Betrag δ . Im Falle der Einfachstreuung entsteht ein Effekt $\delta \neq 0$ durch die Links-Rechts-Asymmetrie in der Compton-Streuung an den polarisierten Elektronen des Targets. Dieses Phänomen wird in höherer Ordnung der Quantenelektrodynamik (QED) vorhergesagt [1 - 6] und seine Untersuchung kann zum Test der Zeitumkehrinvarianz dieser Theorie dienen [7]. Für Quanten im Energiebereich unterhalb von 500 keV werden für magnetisiertes Eisen Asymmetrien von maximal $|\delta| = 18 \times 10^{-6}$ erwartet [4 - 6].

Im Experiment werden neben einfach gestreuten Photonen jedoch immer auch mehrfach gestreute Photonen registriert. Deren Zahl hängt ebenfalls vom Vorzeichen der Magnetisierung ab, und die Meßdaten müssen hierauf korrigiert werden. In dieser Arbeit werden die Energiespektren zweifach und dreifach gestreuter Quanten berechnet sowie der Einfluß der Magnetisierung auf diese Spektren. Die Abhängigkeit von der Magnetisierung kommt durch die folgenden physikalischen Phänomene zustande:

- (A1) Die Links-Rechts-Asymmetrie ist bei der Mehrfachstreuung in jedem Streuprozeß vorhanden und hat dann andere Werte als bei einem Einfachstreuprozeß. Die entstehende Korrektur ist dem Verhältnis der Zahl der mehrfach zur Zahl der

als KFK-Bericht eingereicht am 8. Mai 1974

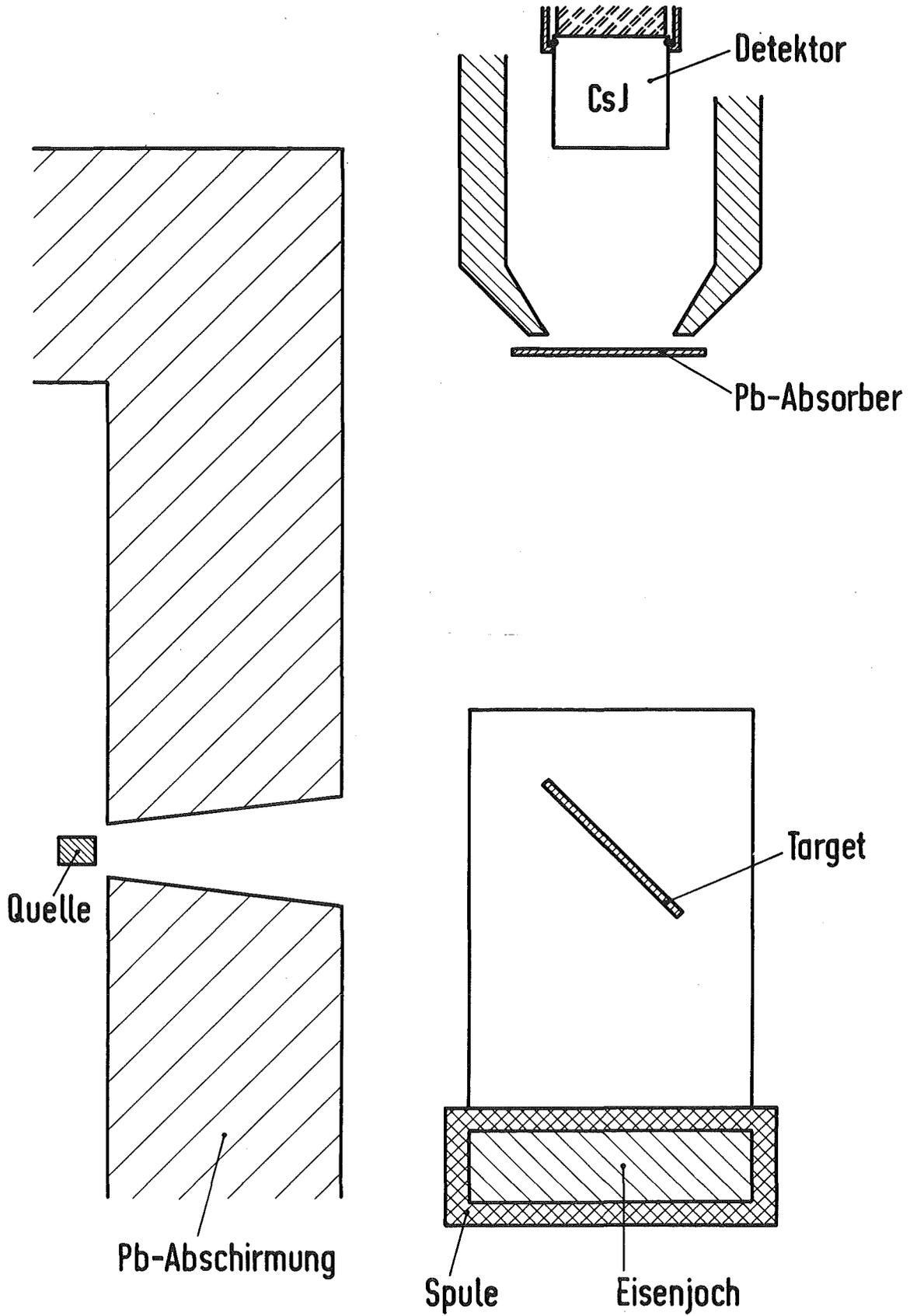


Fig. 1

einfach gestreuten Photonen proportional. Dieses Verhältnis kann auch bei relativ dünnen Targets leicht Werte von mehr als 10% erreichen.

- (A2) Nach einer Comptonstreuung sind Gammaquanten linear polarisiert. Der Polarisationsgrad und die Orientierung der Polarisationssebene hängen vom Elektronenspin ab. Da die Gamma-Polarisation den Wirkungsquerschnitt eines weiteren Streuprozesses beeinflusst, ist die gesamte Wahrscheinlichkeit für Doppelstreuung eine Funktion der Magnetisierung. Außerdem hat die Links-Rechts-Asymmetrie in der Streuung linear polarisierter Photonen andere Werte als im Fall unpolarisierter Photonen. Die Theorie der Spinabhängigkeit der Doppelstreuung ist genauer in ref. |2|, |4| und |5| beschrieben. Die auftretenden Meßfehler könnten von ähnlicher Größe wie der Fehler durch Störung (A1) sein.
- (B) Die im Target erzeugten Rückstoßelektronen erzeugen Bremsstrahlung. Deren Winkelverteilung hängt von der Magnetisierung ab, da die Elektronendiffusion im Target durch die magnetische Feldstärke beeinflusst wird.
- (C) Photonen, die durch Streuung im Target polarisiert werden, erleiden eine Faraday-Rotation, deren Vorzeichen vom Vorzeichen der Magnetisierung abhängt. Da die Polarisation den Wirkungsquerschnitt für weitere Streuungen beeinflusst, hängt die Zahl doppelt oder mehrfach gestreuter Quanten von der Polarität des Magnetfeldes ab.

Die Faraday-Rotation wurde experimentell in ref. |9-11| untersucht, und sie ist auch theoretisch mit Hilfe der QED berechnet worden |11-13|.

Unter ungünstigen experimentellen Bedingungen kann der Störeffekt (C) um mehr als eine Größenordnung größer sein als die Links-Rechts-Asymmetrie in der Einfachstreuung.

Im Prinzip ließen sich die parasitären Asymmetrien (A1), (A2) und (C) bei Verwendung dünner Targets vermeiden, in diesem Fall können jedoch Bremsquanten stören, die durch vagabundierende Elektronen erzeugt werden, die von außen auf das Target treffen und im magnetischen Streufeld abgelenkt werden [8].

Der vorliegende Bericht beschäftigt sich ausschließlich mit einer numerischen Berechnung der Asymmetrien, die durch den Störeffekt (C) zustandekommen. Die Untersuchung der anderen Korrekturen bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten. Die Rechnungen wurden für die speziellen experimentellen Bedingungen, die in der Arbeit [8] vorlagen, ausgeführt.

Mit Hilfe einer Reihe von FORTRAN-Programmen wurde die Intensität einfach und doppelt gestreuter Quanten berechnet sowie der Einfluß der Faraday-Rotation auf die Intensität der Doppelstreuung. Es wurde die Abhängigkeit dieses Effektes von verschiedenen experimentellen Bedingungen untersucht:

- (1) der Energie der Gammaquanten,
- (2) dem Winkel Quelle-Target-Detektor,
- (3) der endlichen Ausdehnung des Targets,
- (4) der endlichen Ausdehnung des Detektors,
- (5) der Dicke des Targets,
- (6) der Dicke der Bleiabsorber (siehe Fig. 1), die vor dem Detektor aufgestellt waren,
- (7) der Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors als Funktion der Energie.

Daneben wurde für spezielle Fälle die Intensität der Dreifachstreuung sowie der Einfluß der Faraday-Rotation auf die Zahl der dreifach gestreuten Photonen berechnet.

Ferner wurden folgende Streuprozesse behandelt:

- (1) Ein Photon trifft auf den Blei-Kollimator hinter der Quelle, wird darin gestreut und gelangt nach einer zweiten Streuung im Target in den Detektor.

(2) Ein im Target gestreutes Quant trifft auf das Eisenjoch, das das Target hält, wird darin gestreut und gelangt in den Detektor.

In allen Fällen wurde die Annahme gemacht, das das Target wie in Abb. 1 unter einem Winkel von 45° relativ zur mittleren Richtung der auftreffenden Gammaquanten steht und sich Quelle und Detektor auf verschiedenen Seiten des Targets befinden. Wären Quelle und Detektor auf der gleichen Seite des Targets, würde man völlig andere Resultate erhalten (im Falle des Streuwinkels 90° wie in Abb. 1 ändert sich sogar das Vorzeichen des Störeffekts (C)).

In den folgenden Abschnitten wird der Ablauf der Rechnungen beschrieben. Die Gesamtergebnisse für zwei Gammalinien der Nuklide ^{198}Au (412 keV) und ^{181}Hf (482 keV) sind in Tabelle 14 auf Seite 82 zusammengestellt.

II. Einfachstreuung bei eng gebündeltem Gammastrahl und punktförmigem Detektor

Zunächst wird ein punktförmiger Detektor angenommen und nur Gammastrahlung berücksichtigt, die, von der Quelle herkommend, auf ein infinitesimales Oberflächenelement ΔF des Targets auftrifft. Die Integration über die Targetoberfläche wird in Kap. V behandelt, die endliche Detektorausdehnung in Kap. VI. Die Quelle wird stets als punktförmig vorausgesetzt.

Die Koordinaten der Quelle und des Detektors werden in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben, das in Fig. 2 illustriert wird. Die y-Achse steht senkrecht auf der Zeichenebene.

$$\begin{aligned} \text{Koordinaten der Quelle} \quad \vec{Q} &= (-R_Q \cdot \cos\psi, 0, +R_Q \cdot \sin\psi) \\ \text{Koordinaten des Detektors} \quad \vec{D} &= (R_D \cdot \cos(\gamma+\psi), h, -R_D \cdot \sin(\gamma+\psi)) \end{aligned}$$

Die Intensität der Einfachstreuung ist proportional zu

$$I_1 \cdot \Delta F = \Delta F \cdot \int_0^{d/\cos\xi} \frac{\cos\xi}{R^2} \cdot dr \cdot e^{-\mu r} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot e^{-\mu' r'} \times w(E') \cdot \frac{1}{R'^2}$$

Hierin ist ξ der Winkel zwischen dem Photonenimpuls vor der Streuung und der z-Achse, R der Abstand Quelle-Streuzentrum, d die Targetdicke, r der Abstand zwischen dem Aufpunkt P auf der Targetoberfläche und dem Streuzentrum. r' ist die vom Photon nach der Streuung im Target zu durchlaufende Strecke, und μ und μ' sind die Absorptions-Koeffizienten vor und nach der Streuung. Ferner ist R' der Abstand Streuzentrum-Detektor, $w(E')$ die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (abgesehen von einem Faktor $r_0^2/2$) der Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt.

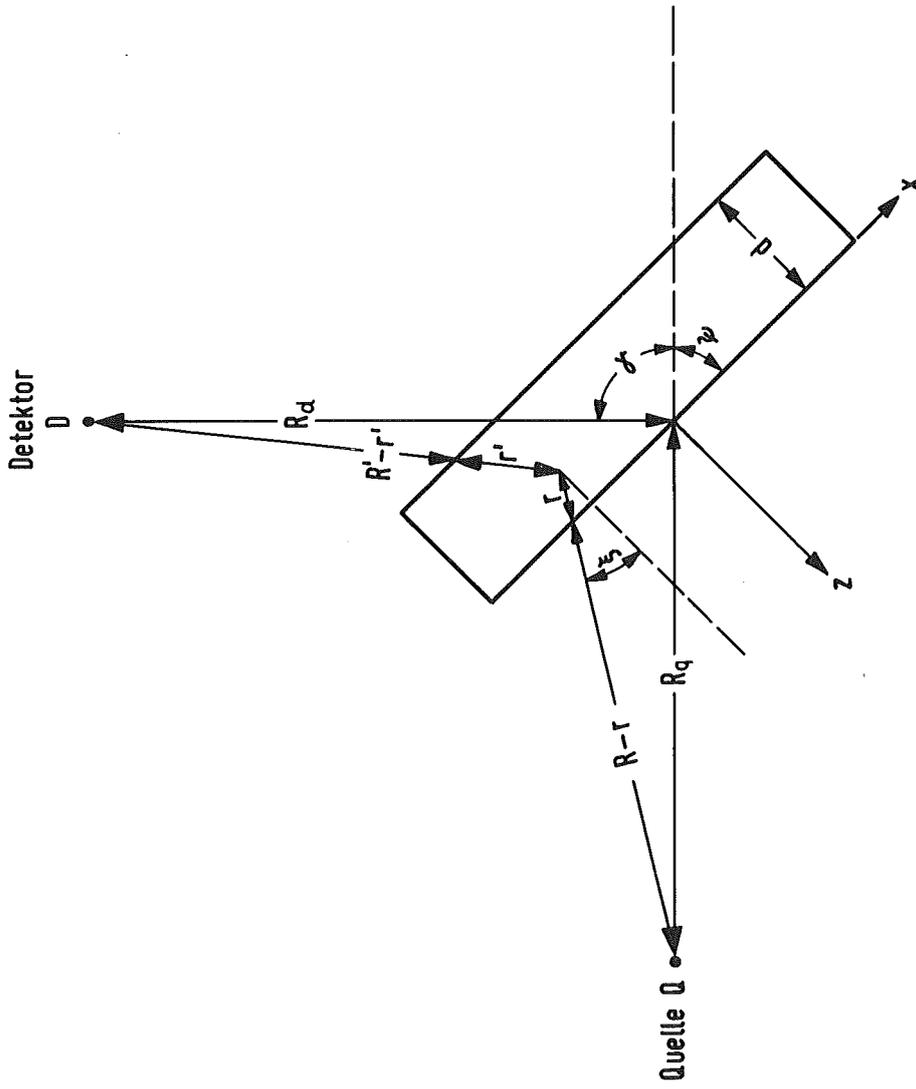


Fig. 2

Da im Experiment d stets klein gegenüber R' ist, kann man bei der Integration über r die Größen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, $w(E')$, R , R' und μ' als konstant annehmen und erhält

$$(1) \quad I_1 = \frac{\cos\xi}{R^2 \cdot R'^2} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot w(E') \cdot W,$$

$$W = \frac{1}{\cos\xi} \frac{e^{-|\frac{\mu d}{\cos\xi}|} - e^{-|\frac{\mu' d}{\cos\xi'}|}}{|\frac{\mu'}{\cos\xi'}| - |\frac{\mu}{\cos\xi}|}$$

In dieser Formel tritt der Winkel ξ' zwischen dem Photonenimpuls nach der Streuung und der z-Achse neu auf.

Der Faktor W nimmt im Grenzfall schwacher Absorption $\mu d \ll 1$, $\mu' d \ll 1$ den Wert

$$W \approx \frac{d}{\cos\xi}$$

an. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, $w(E')$, R , R' und μ' werden für ein mittleres Streuzentrum berechnet, das im Abstand $d/2$ von der Target-Oberfläche liegt:

$$\vec{S} = (x, y, -\frac{d}{2})$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ wird mittels einer Subroutine 'STREU' berechnet, die als Eingabedaten die Gammaenergie vor der Streuung und den Kosinus des Streuwinkels benötigt. Letzterer ergibt sich aus den Ortsvektoren \vec{Q} , \vec{S} und \vec{D} : Mit Hilfe einer Subroutine 'RICHT' werden die Richtungen des Photons vor ($\vec{Q}_0 = \frac{\vec{S}-\vec{Q}}{|\vec{S}-\vec{Q}|}$) und nach ($\vec{Q}_1 = \frac{\vec{D}-\vec{S}}{|\vec{D}-\vec{S}|}$) der Streuung berechnet und hieraus der Kosinus des Streuwinkels als Skalarprodukt $\vec{Q}_0 \cdot \vec{Q}_1$ (Subroutine 'SKAL'). Die Quadrate $R^2 = |\vec{S}-\vec{Q}|^2$ und $R'^2 = |\vec{D}-\vec{S}|^2$ werden von der Subroutine RICHT geliefert. Ferner gilt

$$\cos\xi = -O_{0z} \quad |\cos\xi'| = -O_{1z} \quad .$$

Für die Funktionen $w(E)$ und $\mu(E)$ gibt es eigene Unterprogramme 'DET' bzw. 'FMUE'.

III. Intensität der Doppelstreuung bei eng gebündeltem
Gammastrahl, unendlich ausgedehntem Target und
punktförmigem Detektor

Die Intensität der doppelt gestreuten Strahlung ist - abgesehen von demselben Proportionalitätsfaktor wie in Gl. (1) - gegeben durch

$$(2) I_2 \cdot \Delta F = \Delta F \cdot \iint d\Omega \int_0^{d/\cos\xi} dr \left[dr' \frac{\cos\xi}{R^2} \cdot e^{-\mu r} e^{-\mu' r'} e^{-\mu'' r''} \times \right. \\ \left. \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_p'}{d\Omega'} \cdot \cos 2\phi \right] \times w(E'') \cdot \frac{1}{R''^2} \cdot \left(n \cdot \frac{r_0^2}{2} \right)$$

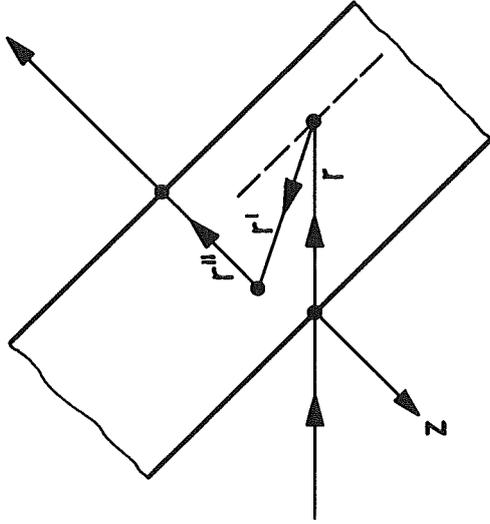
Ähnlich wie in Kap. II bedeuten

- μ', μ'' Absorptionskoeffizienten nach der 1. bzw. 2. Streuung,
- $w(E'')$ Nachweiswahrscheinlichkeit für zweifach gestreute Quanten,
- R'' Abstand 2. Streuzentrum-Detektor
- r' Abstand zwischen dem 1. und 2. Streuzentrum
- r'' Wegstrecke eines Quants im Target nach der zweiten Streuung
- n Elektronendichte im Target
- $d\Omega$ Raumwinkelelement nach der 1. Streuung
- r_0 klassischer Elektronenradius.

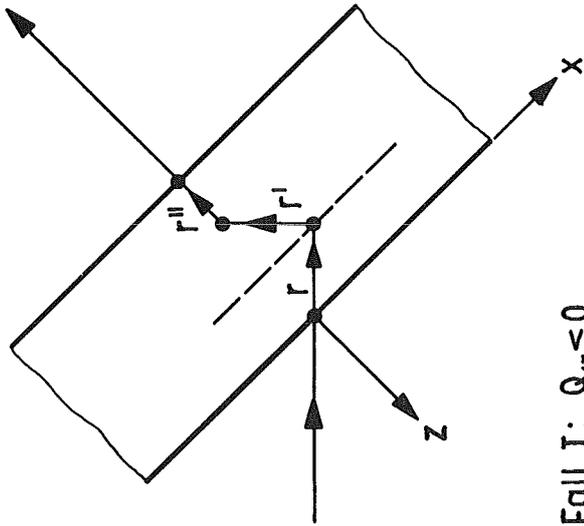
Der Faktor $\frac{r_0^2}{2}$ tritt auf, weil er in der Subroutine 'STREU' fehlt. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\frac{d\sigma'}{d\Omega'}$ sind die Wirkungsquerschnitte für die erste bzw. zweite Comptonstreuung;

$\frac{d\sigma_p}{d\Omega}$ und $\frac{d\sigma_p'}{d\Omega'}$ sind diejenigen Teile der Wirkungsquerschnitte, die von der linearen Polarisierung der Photonen abhängen.

ϕ ist der Winkel zwischen den Streuebene des ersten und zweiten Streuprozesses. Der zweite Term in der eckigen Klammer



Fall II: $Q_{12} > 0$



Fall I: $Q_{12} < 0$

Fig. 3

berücksichtigt, daß Quanten in der ersten Streuung polarisiert werden und die Wahrscheinlichkeit einer zweiten Streuung vom Polarisationsgrad abhängt. In der Formel für I_2 läßt sich die Integration über r und r' in guter Näherung analytisch durchführen: Im Experiment sind sowohl die Targetdicke d als auch die freie Weglänge der Photonen im Target $\frac{1}{\mu}$ klein gegenüber R'' . Daher ist bei vorgegebener Impulsrichtung des Quants nach der ersten Streuung der Streuwinkel der zweiten Streuung für alle möglichen r und r' fast der gleiche. Deshalb kann man die Abhängigkeit der Größen R^2 , μ'' , $\frac{d\sigma'}{d\Omega'}$, $\frac{d\sigma_p'}{d\Omega'}$, $\cos 2\phi$, $w(E'')$, R'' von r und r' vernachlässigen und gelangt zu einer r, r' -Integration über ein Produkt von e-Funktionen. Bei der Berechnung der Integrale müssen zwei Fälle I und II unterschieden werden (siehe Abb. 3), die sich durch die obere Grenze der r' -Integration unterscheiden. Im Falle I bewegt sich das Photon nach der 1. Streuung in negativer z -Richtung, Im Fall II in positiver z -Richtung.

Die Auswertung von (2) ergibt

$$(3) \quad I_2 = \iint d\Omega \left(n \frac{r_0^2}{2} \right) \frac{1}{R^2} \frac{1}{R''^2} \cdot \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_p'}{d\Omega'} \cdot \cos 2\phi \right] \cdot w(E'') \times W_d$$

Für Fall I ist

$$(3a) \quad W_d = \frac{1}{|\cos \xi'|} \cdot \left\{ \frac{e^{-m_0 d}}{(m_0 - m_1)(m_0 - m_2)} - \frac{e^{-m_1 d}}{(m_0 - m_1)(m_1 - m_2)} + \frac{e^{-m_2 d}}{(m_0 - m_2)(m_1 - m_2)} \right\}$$

und für Fall II

$$(3b) \quad W_d = \frac{1}{|\cos \xi'|} \cdot \left\{ - \frac{e^{-m_0 d}}{(m_0 - m_2)(m_1 + m_2)} + \frac{e^{-m_2 d}}{(m_0 - m_2)(m_0 + m_1)} + \frac{e^{-m_0 d - m_1 d - m_2 d}}{(m_0 + m_1)(m_1 + m_2)} \right\}$$

Es wurden die Abkürzungen

$$m_0 = \left| \frac{\mu}{\cos \xi} \right|, \quad m_1 = \left| \frac{\mu'}{\cos \xi'} \right|, \quad m_2 = \left| \frac{\mu''}{\cos \xi''} \right|$$

eingeführt. In den Gleichungen (3a) und (3b) treten die Winkel ξ' und ξ'' zwischen der z-Achse und dem Photonenimpuls nach der ersten bzw. zweiten Streuung neu auf. Für schwache Absorption $m_0 d \ll 1$, $m_1 d \ll 1$, $m_2 d \ll 1$ erhält man sowohl aus (3a) als auch aus (3b)

$$W_d \approx \frac{1}{|\cos \xi'|} \cdot \frac{d^2}{2}$$

Im Grenzfall $\cos \xi' \rightarrow 0$ gehen (3a) und (3b) über in

$$W_d \approx \frac{1}{\mu'} \cdot \frac{e^{-m_2 d} - e^{-m_0 d}}{m_0 - m_2}$$

Die Raumwinkel-Integration in Gleichung (3) muß numerisch durchgeführt werden. Als Integrationsvariable werden Polarkoordinaten θ_1 , ϕ_1 gewählt, der Winkel θ_1 wird relativ zur y-Achse definiert. Die Richtung des Photonenimpulses nach der ersten Streuung ist dann gegeben durch

$$\vec{Q}_1 = (\sin \theta_1 \cdot \cos \phi_1, \cos \theta_1, -\sin \theta_1 \cdot \sin \phi_1)$$

Diese Festlegung bietet einige praktische Vorteile:

- (1) Im Falle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ verschwindet der Faraday-Effekt, da \vec{Q}_1 senkrecht auf der Magnetisierung steht. An dieser uninteressanten Stelle liegen die Stützstellen der Integration am wenigsten dicht.

- (2) Solange das Zentrum des Detektors in der Ebene $y = 0$ liegt, besitzt das Problem Spiegel-Symmetrie bezüglich der y -Richtung. Es genügt, die θ_1 -Integration für das Intervall $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ durchzuführen und die Ergebnisse mit 2 zu multiplizieren*).
- (3) Das Kriterium dafür, wann Fall I und wann Fall II vorliegt, ist sehr einfach:

$$0 < \phi_1 < \pi \rightarrow \text{Fall I}, \quad \pi < \phi_1 < 2\pi \rightarrow \text{Fall II}$$

Die Berechnung des Integranden in (3) erfolgt ähnlich wie in Kap. II. Mit Hilfe der Subroutine RICHT erhält man die Impulsrichtungen des Photons $\vec{Q}_0 = \frac{\vec{S}-\vec{Q}}{|\vec{S}-\vec{Q}|}$ und $\vec{Q}_2 = \frac{\vec{D}-\vec{S}}{|\vec{D}-\vec{S}|}$ vor der ersten und nach der zweiten Streuung sowie R^2 und R'^2 . Die Kosinusse der Streuwinkel sind gleich den Skalar-Produkten $\vec{Q}_0 \cdot \vec{Q}_1$ und $\vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_2$ (Subroutine 'SKAL'). Die Wirkungsquerschnitte $\frac{d\sigma_p}{d\Omega}$, $\frac{d\sigma_p'}{d\Omega'}$ werden wie die differentiellen Wirkungsquerschnitte $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, $\frac{d\sigma'}{d\Omega'}$ durch die Subroutine 'STREU' geliefert; dieses Unterprogramm liefert auch die Photonenenergien nach den jeweiligen Streuprozessen.

Ferner ist: $|\cos\xi''| = -Q_{2z}$

$$|\cos\xi'| = \begin{cases} -Q_{1z} & \text{im Fall I} \\ +Q_{1z} & \text{im Fall II} \end{cases}$$

μ' , μ'' : Unterprogramm FMUE. $w(E'')$: Unterprogramm DET.

Als letzte zu berechnende Größe im Integranden bleibt noch übrig

$$\cos 2\phi = 2 \cdot \cos^2\phi - 1$$

Um $\cos\phi$ zu erhalten, werden die Normalen-Vektoren auf den 2 Streuebene mit Hilfe des Vektorprodukts (Subroutine 'VEPRO') berechnet:

$$\vec{P}_1 = \vec{Q}_0 \times \vec{Q}_1 \quad \vec{P}_2 = \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_2$$

*) Dieses Verfahren führt auf das richtige Endergebnis, wenn zusätzlich die Integrationen über die Targetoberfläche und die Detektorausdehnung durchgeführt sind.

Dann ist

$$\cos\phi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 |\vec{p}_2|^2}}$$

Die Integration ϕ_1 wird ersetzt durch eine Summe über gleich gewichtete Funktionswerte; die Integration über θ_1 wird ausgeführt mit Simpsons Regel:

$$\iint d\Omega \cdot z(\Omega) = \frac{2\pi^2}{z_m z_\ell} \cdot \sum_{\ell=1}^{z_\ell} \sin\theta_1 g(\ell) \cdot \sum_{m=1}^{z_m} z(\Omega),$$

wobei

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{z_m} \left(m - \frac{1}{2}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{eingeführt zur Vermeidung des Falles} \\ \cos\xi' = 0 \text{ in (3a) und (3b)} \end{array} \right\}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ell}{z_\ell} \quad g(\ell) = \begin{cases} 4/3, & \text{wenn } \ell \text{ ungerade} \\ 2/3, & \text{wenn } \ell \text{ gerade und } \neq z_\ell \\ 1/3, & \text{wenn } \ell = z_\ell \end{cases}$$

IV. Der Einfluß der Faraday-Rotation auf die Zahl zweifach gestreuter Photonen

Die Richtung der linearen Polarisation nach der ersten Streuung ist parallel zu \vec{P}_1 . Eine Drehung der Polarisations-ebene ist äquivalent einer Änderung des Winkels ϕ um den negativen Faraday-Winkel $-\alpha$. Für α gilt die Beziehung

$$(4) \quad \alpha = n \times \frac{1}{13} \times 2 r_o^2 \cdot F(E') \cdot \cos\theta_1 \cdot r'$$

\swarrow \nwarrow
 Elektro- angenommener Polarisationsgrad
 nendichte der Elektronen in Eisen

Die Funktion $F(E')$ ist in ref. |11| definiert. Sie wird mit Hilfe einer Subroutine 'FAR' approximativ berechnet.

Die Änderung der Intensität I_2 beim Umpolen der Magnetisierung erhält man unter der Annahme $\alpha \ll 1$ aus Gleichung (2):

$$\Delta I_2 = + 8 \cdot \iint d\Omega \int dr \int dr' \frac{\cos\xi}{R^2} \cdot e^{-\mu r} \cdot e^{-\mu' r'} \cdot e^{-\mu'' r''} \cdot$$

$$\cdot \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \times \frac{d\sigma_p'}{d\Omega'} \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi \times w(E'') \cdot \frac{1}{R''^2} \times \left(n \cdot \frac{r_o^2}{2} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{4}{13} \cdot \cos\theta_1 \cdot r' \cdot F(E').$$

Wie im vorigen Abschnitt kann man bei vorgegebenen Winkeln θ_1, ϕ_1 die Integrationen über r und r' explizit ausführen, da alle Größen außer den Exponentialfunktionen von r und r' fast nicht abhängen. Zweckmäßigerweise benützt man die Relation

$$(5) \quad \int dr \int dr' r' \cdot e^{-\mu r} \cdot e^{-\mu' r'} \cdot e^{-\mu'' r''} =$$

$$= - \frac{d}{d\mu'} \left\{ \int dr \int dr' \cdot e^{-\mu r} \cdot e^{-\mu' r'} \cdot e^{-\mu'' r''} \right\},$$

da das rechts stehende Integral bereits in Kap. III berechnet wurde. Man muß wieder zwischen den Fällen I und II unterscheiden und erhält

$$(6) \quad \Delta I_2 = \frac{32}{13} \cdot \left(n \cdot \frac{r_0}{2} \right)^2 \cdot \iint d\Omega \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R''^2} \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot F(E') \cdot w(E'')$$

$$\times \sin\phi \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta_1 \cdot W_g$$

mit

$$(6a) \quad W_g = \frac{1}{\cos^2 \xi'} \cdot \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_2)(m_0 - m_1)^2} + \frac{\exp(-m_1 d)(-m_0 + 2m_1 - m_2)}{(m_1 - m_2)^2(m_0 - m_1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{d \cdot \exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1)(m_1 - m_2)} + \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_0 - m_2)(m_1 - m_2)^2} \right\} \quad \text{für Fall I}$$

$$(6b) \quad W_g = \frac{1}{\cos^2 \xi'} \cdot \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_1 + m_2)^2(m_0 - m_2)} + \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_0 + m_1)^2(m_0 - m_2)} \right.$$

$$\left. + \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_1 + m_2)(m_0 + m_1)} \left[\frac{m_0 + 2m_1 + m_2}{(m_1 + m_2)(m_0 + m_1)} + d \right] \right\} \quad \text{für Fall II.}$$

Im Falle schwacher Absorption gehen sowohl (6a) als auch (6b) über in

$$W_g \approx \frac{1}{\cos^2 \xi'} \cdot \frac{d^3}{6} \quad .$$

Im Grenzfall $\cos\xi' \rightarrow 0$ erhält man aus (6a) und (6b)

$$W_g = \frac{\exp(-m_2 d) - \exp(-m_0 d)}{m_0 - m_2} \cdot \frac{1}{\mu'^2}$$

Der Vergleich mit der entsprechenden Formel für die Intensität I_2 zeigt, daß die mittlere Weglänge des Photons zwischen 1. und 2. Streuung in diesem Fall gleich $\frac{1}{\mu'}$ ist, wie es sein muß. Außer $F(E')$ treten im Integranden von Gleichung (6) keine neuen Größen mehr auf. Es ist jedoch Vorsicht bei der Berechnung von $\sin\phi$ geboten, da das Vorzeichen dieser Größe in das Vorzeichen des Faraday-Effekts eingeht. Die Vorzeichenkonvention wird in dieser Arbeit wie folgt gewählt:

Die y -Komponente von $\vec{Q}_0 \times \vec{Q}_2$ ist definitionsgemäß immer positiv. Die 'positive Feldrichtung' ist dann dadurch gekennzeichnet, daß die Elektronenspins im Target in positive y -Richtung zeigen, d.h. das Magnetfeld zeigt in $(-y)$ -Richtung. Wenn die y -Komponente von \vec{Q}_1 ebenfalls positiv ist, erfolgt die Faraday-Rotation im Uhrzeigersinn $|10|$. Das Vorzeichen des Effekts ist daher gleich dem Vorzeichen des Ausdrucks

$$\left[\vec{Q}_1 \cdot (\vec{P}_1 \times \vec{P}_2) \right] \cdot (\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) \cdot Q_{1y} \quad .$$

Da ein Faktor $(\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) \cdot Q_{1y}$ bereits als $\cos\phi \cdot \cos\theta_1$ in (6) enthalten ist, ist das Vorzeichen von $\sin\phi$ dasselbe wie das Vorzeichen des Produkts $\vec{Q}_1 \cdot (\vec{P}_1 \times \vec{P}_2)$. Außerdem ist $\vec{P}_1 \times \vec{P}_2$ parallel zu \vec{Q}_1 , und der Vektor \vec{Q}_1 hat die Länge 1. Deshalb muß man setzen:

$$(7) \quad \sin\phi = \frac{\vec{Q}_1 \cdot (\vec{P}_1 \times \vec{P}_2)}{\sqrt{|\vec{P}_1|^2 \cdot |\vec{P}_2|^2}}$$

V. Die Berücksichtigung des endlichen Raumwinkels

Quelle → Target

Um den endlichen Öffnungswinkel des von der Quelle emittierten Gammastrahls zu berücksichtigen, muß man die Funktionen I_1 , I_2 und ΔI_2 über die Targetoberfläche integrieren.

Im Experiment wurde der Photonenstrahl nach oben und unten durch den Bleikollimator zwischen Quelle und Target begrenzt, während die horizontale Strahlbreite größer als die Targetausdehnung war [8]. Vernachlässigt man die Durchlässigkeit der Kanten des Kollimators für die Strahlung, hat die Begrenzung des Photonenstrahls auf dem Target die Form von Ellipsenabschnitten, wobei der Ellipsenmittelpunkt jedoch nicht mit dem Targetmittelpunkt zusammenfällt. Für die Integration über diese effektive Targetfläche wurden zwei verschiedene Verfahren verwendet.

1) Die Programm-Version 'T5'

Die Größen I_1 , I_2 und ΔI_2 werden außer für die Targetmitte für den oberen und unteren sowie den rechten und linken Randpunkt berechnet (siehe Abb. 4). Die Rechnung für die Punkte 2 und 3 enthält insofern eine Unkorrektheit, als Quanten, die vom Punkt 2 aus nach rechts und vom Punkt 3 aus nach links gestreut werden, bei der Berechnung der Doppelstreuung mitgezählt werden. Der dadurch im Endergebnis entstehende Fehler ist von der Größenordnung $(B \cdot \mu')^{-1}$, worin B die Targetbreite ist. Er sollte für $B \approx 10$ cm kleiner als 10% sein. Um diese Unsicherheit zu reduzieren, werden die Korrekturen, die durch den Targetrand entstehen, in Kap. VII gesondert berechnet.

Programm T5

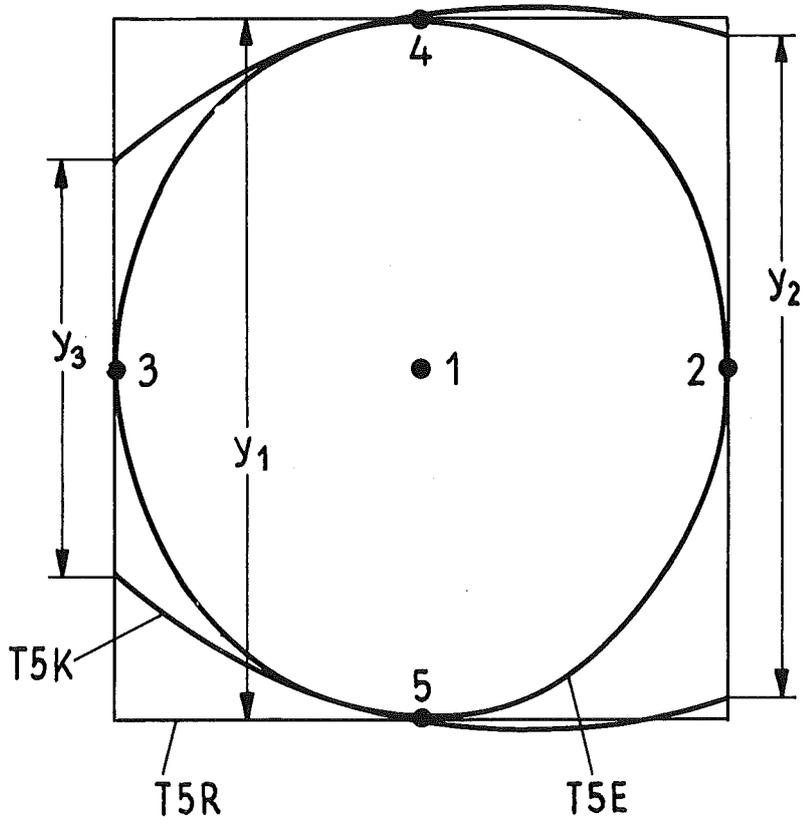


Fig. 4

Zwischen den Resultaten für die Punkte 1 bis 5 wird eine quadratische Interpolation der Funktionswerte durchgeführt. Das Integral über die Targetoberfläche ergibt sich als Produkt aus der Fläche und einem gewichteten Mittelwert der 5 Funktionswerte, wobei die Gewichtungsfaktoren von der Form der Strahlbegrenzung auf der Targetoberfläche abhängen.

Da die Funktionswerte nur bis zur zweiten Ordnung entwickelt werden, ist es sinnvoll, für die Form der Targetberandung eine ähnliche Näherung einzuführen und die Strahlbegrenzung durch Parabeln zu approximieren. Sind y_1 , y_2 und y_3 die Targethöhen in der Targetmitte bzw. an der rechten und linken Seite, erhält man für die Integrale von I_1 und I_2 die Näherungsformel

$$(8) \quad \bar{I}_k \approx \{ (32y_1 - 6y_2 - 6y_3) \cdot I_k(1) + (4y_1 + 8y_2 - 2y_3) \cdot I_k(2) + \\ (4y_1 - 2y_2 + 8y_3) \cdot I_k(3) + 5(y_2 + y_3) (I_k(4) + I_k(5)) \} \times \\ \times (40y_1 + 10y_2 + 10y_3)^{-1} \times F_T; \quad k = 1, 2 .$$

F_T = Targetfläche

Die Argumente geben die Nummern der Aufpunkte an.

Eine analoge Gleichung gilt für $\bar{\Delta I}_2$.

Diese Formeln sind anwendbar, solange gilt

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)^2 \ll \frac{20}{3} y_1^2, \quad (y_3 - y_2)^2 \ll 4y_1^2 .$$

Um den Einfluß der Form des Kollimators auf die Ergebnisse abzuschätzen, werden zusätzlich Rechnungen durchgeführt unter den Annahmen, daß die effektiv wirksame Targetfläche

- (1) die Form eines senkrecht stehenden Rechtecks hat, das durch die Punkte 2 bis 5 geht,
- (2) die Form einer Ellipse hat, die durch die Punkte 2 bis 5 geht.

In diesen Fällen treten bei der Bildung der gemittelten Funktionswerte andere Gewichtungsfaktoren auf. Die Ergebnisse sind

für die rechteckige Targetfläche (= Programm 'T5R')

$$\frac{\bar{I}_k}{F_T} = \frac{1}{3} I_k(1) + \frac{1}{6} \sum_{j=2}^5 I_k(j), \quad \frac{\overline{\Delta I_2}}{F_T} = \frac{1}{3} \Delta I_2(1) + \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=2}^5 \Delta I_2(j),$$

für die elliptische Targetfläche

$$\frac{\bar{I}_k}{F_T} = \frac{1}{2} I_k(1) + \frac{1}{8} \sum_{j=2}^5 I_k(j), \quad \frac{\overline{\Delta I_2}}{F_T} = \frac{1}{2} \Delta I_2(1) + \frac{1}{8} \sum_{j=2}^5 \Delta I_2(j) .$$

Die Unterschiede zwischen der ersten und den beiden anderen Rechnungen sind sicherlich größer als der Fehler, der in der ersten Version durch die Approximation des Targetrandes durch Parabeln entsteht. Die Resultate der drei Varianten weichen glücklicherweise nicht sehr stark voneinander ab.

Die Programm-Version T5 besitzt den Vorzug, daß sie schnell läuft. Sie kann daher zu Parameterstudien, wie der Untersuchung der Abhängigkeit der Asymmetrie $\delta = \frac{\Delta I_2}{I_1}$ von der Quantenenergie, vom Streuwinkel, vom Detektortyp o.ä. verwendet werden.

2) Programmversion 'T10 x 10'

Es wird mit größerer Stützstellenzahl gerechnet. Die Targetfläche wird von 150 gleich großen Rechtecken überdeckt, und die Größen I_1 , I_2 und ΔI_2 werden an den Mittelpunkten dieser Rechtecke berechnet. Dabei wird die Targetbreite in 10 Abschnitte unterteilt. Der Höhe des Gammastrahls in der Targetmitte entsprechen ebenfalls 10 Intervalle. Da der Photo-

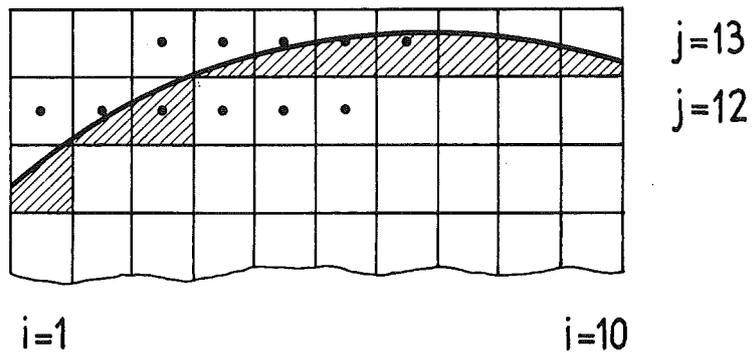


Fig. 5

nenstrahl jedoch nicht in der Targetmitte seinen größten Durchmesser hat, wird die Targethöhe von insgesamt 15 Längenintervallen überdeckt (siehe Fig. 5). Eine Subroutine 'RAND' berechnet für jedes Rechteck auf der Targetoberfläche den Bruchteil $f(x_i, y_j)$ der Fläche, der von der Quelle ausgeleuchtet wird. Dann sind die Integrale über I_1 , I_2 und ΔI_2 gegeben durch

$$\overline{I_k} \approx \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{15} I_k(x_i, y_j) \cdot f(x_i, y_j);$$

$$\overline{\Delta I_2} \approx \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{15} \Delta I_2(x_i, y_j) \cdot f(x_i, y_j).$$

Die Abweichungen der Ergebnisse der Programm-Versionen T10 x 10 und T5 betragen in allen Fällen nur wenige %.

VI. Die Berücksichtigung der endlichen Detektorausdehnung

Die in den Kapiteln II, III, IV und VI) beschriebenen Rechnungen werden außer für den Detektormittelpunkt für den oberen, unteren, rechten und linken Randpunkt ausgeführt. Die Intensitäten \overline{I}_1 , \overline{I}_2 und $\overline{\Delta I}_2$ werden gemittelt nach den Formeln

$$(9) \quad \tilde{I}_k = \frac{1}{2} \overline{I}_k(1) + \frac{1}{8} \sum_{i=2}^5 \overline{I}_k(i); \quad k = 1, 2$$
$$\tilde{\Delta I}_2 = \frac{1}{2} \overline{\Delta I}_2(1) + \frac{1}{8} \sum_{i=2}^5 \overline{\Delta I}_2(i)$$

Hierin gibt i die Nummer des Aufpunkts auf der Detektoroberfläche an.

Die Gewichtskoeffizienten in Gleichung (9) sind nicht völlig korrekt, da die Ansprechwahrscheinlichkeit $w(E)$ für die fünf Punkte verschieden ist und außerdem noch vom Aufpunkt auf dem Target abhängt, während die Rechnungen mit einer universellen Funktion $w(E)$ durchgeführt wurden. Die Rechnung nach Gleichung (9) liefert daher nur ein qualitatives Maß für den Einfluß der Detektorausdehnung, jedoch zeigte es sich, daß letztere fast nichts ausmacht.

Die hier beschriebene Programm-Version 'D5' wurde nur zusammen mit der Version 'T5' benützt. Aufwendigere Rechnungen wurden nur für punktförmige Detektoren ('D1') durchgeführt.

VII. Der Einfluß des Targetrandes auf die Doppelstreuung

Die in Kap. III und IV beschriebenen Rechnungen sind richtig für einen kollimierten Gammastrahl und ein unendlich ausgedehntes Target. Wie aus Fig. 6 ersichtlich ist, entsteht im Falle eines begrenzten Targets ein Fehler, weil Streuprozesse, in denen das erste Streuzentrum im Target und das zweite außerhalb des Targets liegt, mitgezählt werden.

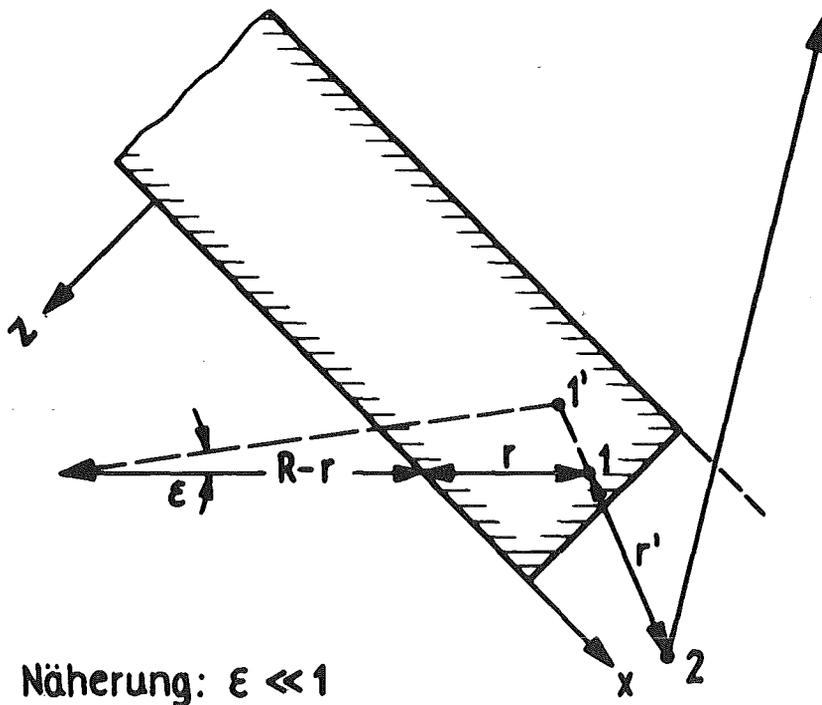


Fig. 6

Die Intensität der doppelt gestreuten Quanten ist daher zu groß um einen Betrag

$$\overline{I}_2' = \int dy \iint d\Omega \int dx \int dr \int dr' \frac{\cos\xi}{R^2} \cdot e^{-\mu r} \cdot e^{-\mu' r'} \cdot e^{-\mu' r''} \cdot \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_p'}{d\Omega'} \cdot \cos 2\phi \right] \times w(E'') \cdot \frac{1}{R''^2} \cdot \left(n \cdot \frac{r_0^2}{2} \right) ,$$

worin die Integrationsgrenzen so zu wählen sind, daß Punkt 1 innerhalb und Punkt 2 außerhalb des Targets liegt. Der Unterschied zu Formel (2) besteht darin, daß die Integration über die Targetoberfläche von Anfang an berücksichtigt wird.

Wenn man in obigem Integral die Impulsrichtung des Photons nach der ersten Streuung festhält und das erste Streuzentrum verschiebt, ändert sich i.a. der Streuwinkel der ersten Streuung (siehe Abb. 6). Macht man die (bisher noch nicht benutzte) Annahme, daß d und $\frac{1}{\mu'}$ klein gegenüber R sind, kann man diese Variationen des Streuwinkels in der Nähe des Targetrandes vernachlässigen. In der Formel für I_2' sind dann alle Größen außer den e -Funktionen von x , r und r' unabhängig, und die Integrationen über diese drei Variablen sind analytisch lösbar. Als Endergebnis erhält man

$$(10) \quad \overline{I}_2' = \int dy \iint d\Omega \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R''^2} \left(n \cdot \frac{r_0^2}{2} \right) w(E'') \cdot \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_p'}{d\Omega'} \cdot \cos 2\phi \right] \cdot W_r .$$

Die ausgeführten Integrale stecken in dem Faktor W_r , für den man wiederum die Fälle I ($Q_{1z} < 0$) und II ($Q_{1z} > 0$) unterscheiden muß. Es ist

$$W_r = W_g \cdot |Q_{1x}|, \quad Q_{1x} = \sin\theta_1 \cdot \cos\phi_1 ,$$

und W_g wurde für beide Fälle in Kap. IV angegeben.

Bei der Ω -Integration ist folgendes zu beachten: Die Korrektur tritt am rechten Targetrand nur auf, wenn $Q_{1x} > 0$ ist, während am linken Targetrand $Q_{1x} < 0$ sein muß.

Es ist noch der Einfluß der Faraday-Rotation auf die Korrektur \overline{I}_2^T zu bestimmen. Die Rechnung erfolgt wie in Kap. IV, und man kann wiederum die auftretenden Integrale durch Differentiation von W_r nach $(-\mu')$ bestimmen. Die Intensitätsasymmetrie ΔI_2 ist zu verringern um einen Betrag

$$(11) \quad \overline{\Delta I}_2^T = \int dy \iint d\Omega \left(n \cdot \frac{r_0}{2} \right)^2 \times \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R'^2} \cdot \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot \frac{32}{13} \cdot$$

$$F(E') \cdot w(E'') \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi \times \cos\theta_1 \cdot W_{gr} \cdot$$

Es ist

$$W_{gr} = \left\{ \frac{2\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_1)^3 (m_0 - m_2)} + \frac{2\exp(-m_2 d)}{(m_1 - m_2)^3 (m_0 - m_2)} + \frac{d \cdot \exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1) (m_1 - m_2)} \right. \\ \times \left(\frac{1}{m_0 - m_1} - \frac{1}{m_1 - m_2} - d \right) - \frac{2\exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_2)} \left[\frac{1}{(m_0 - m_1)^3} + \frac{1}{(m_1 - m_2)^3} \right] \\ \left. + \frac{d \cdot \exp(-m_1 d)}{m_0 - m_2} \left[\frac{1}{(m_0 - m_1)^2} - \frac{1}{(m_1 - m_2)^2} \right] \right\} \cdot \frac{|Q_{1x}|}{|Q_{1z}|^3}$$

für Fall I,

$$W_{gr} = \left\{ - \frac{2\exp(-m_0 d)}{(m_1 + m_2)^3 (m_0 - m_2)} + \frac{2\exp(-m_2 d)}{(m_0 + m_1)^3 (m_0 - m_2)} + \frac{d \cdot \exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_0 + m_1) (m_1 + m_2)} \right. \\ \times \left(\frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_1 + m_2} + d \right) + \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_1 + m_2)^2 (m_0 - m_2)} \left[d + \frac{2}{m_1 + m_2} \right] \\ \left. - \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_0 + m_1)^2 (m_0 - m_2)} \left[d + \frac{2}{m_0 + m_1} \right] \right\} \times \frac{|Q_{1x}|}{|Q_{1z}|^3} \quad \text{für Fall II}$$

Zwei einfache Spezialfälle sind wieder die schwache Absorption

$$W_r \approx \frac{1}{6} d^3 \cdot \frac{|Q_{1x}|}{|Q_{1z}|^2} \quad W_{gr} = \frac{1}{12} d^4 \frac{|Q_{1x}|}{|Q_{1z}|^3} \quad (\text{I und II})$$

sowie der Grenzfall $|Q_{1z}| \rightarrow 0$

$$W_r \approx \frac{\exp(-m_2 d) - \exp(-m_0 d)}{m_0 - m_2} \cdot \frac{|Q_{1x}|}{\mu'^2},$$

$$W_{gr} = \frac{\exp(-m_2 d) - \exp(-m_0 d)}{m_0 - m_2} \cdot \frac{2|Q_{1x}|}{(\mu')^3} \quad (\text{I und II})$$

Die Korrekturen für den Targetrand (=Programm 'RK') werden in Verbindung mit der Programm-Version T10x10 berücksichtigt. Die Integranden in (10) und (11) werden an den Stützstellen $i = 1$ und $i = 10$ sowie $j = 1$ bis 15 berechnet. Nach Ausführung der Ω -Integration sind (10) und (11) noch über die Targethöhe zu integrieren, die y -Integration wird wie in Kap. V.2 ersetzt durch

$$\int dy \rightarrow \Delta y \cdot \sum_{j=1}^{15} f(x_i, y_j) \quad \text{mit } i = 1 \text{ oder } 10.$$

VIII. Dreifachstreuung

Wie bei der Zweifachstreuung wird zunächst ein eng gebündelter Gammastrahl betrachtet, der auf ein infinitesimales Oberflächenelement eines unendlich großen Targets trifft.

Die Integration über die Targetoberfläche erfolgt nach der Programm-Version T5, wegen der zu langen Rechenzeit wird auch die endliche Ausdehnung des Detektors nicht berücksichtigt (D1).

Die Intensität der dreifach gestreuten Quanten erhält man aus der Formel (2) für Doppelstreuung durch

(1) Zufügen eines Faktors

$$\iint d\Omega' \int dr'' e^{-\mu'' r''} r'' \cdot \left(n \cdot \frac{r_0^2}{2} \right)$$

(2) Ersetzen der eckigen Klammer durch den Ausdruck

$$(12) \quad K(\Omega, \Omega') = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma''}{d\Omega''} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot \cos 2\phi \cdot \frac{d\sigma''}{d\Omega''} + \right. \\ \left. + \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma_{p''}}{d\Omega''} \cdot \cos 2\phi' + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{pp'}}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma_{p''}}{d\Omega''} \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos 2\phi \cdot \cos 2\phi' - \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma_{p''}}{d\Omega''} \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin 2\phi \cdot \sin 2\phi' \right]$$

Es bedeuten:

r''' den nach der 3. Streuung im Target zurückgelegten Weg,

μ''' den Absorptionskoeffizienten nach der 3. Streuung,

ϕ' den Winkel zwischen den Streuebene der 2. und 3. Streuung.

Gegenüber der Formel für Doppelstreuung ist zusätzlich zu integrieren über r'' und über die Richtung des Photonenimpulses nach der 2. Streuung Ω' , die durch zwei Winkel θ_2, ϕ_2 beschrieben wird:

$$\vec{Q}_2 = (\sin\theta_2 \cdot \cos\phi_2, \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cdot \sin\phi_2)$$

Die θ_2 -Integration erstreckt sich im Gegensatz zur θ_1 -Integration über den vollen Winkelbereich $0 \leq \theta_2 \leq \pi$.

$\sin(2\phi')$ und $\cos(2\phi')$ erhält man in gleicher Weise wie $\sin(2\phi)$ und $\cos(2\phi)$:

Die Richtung 3. Streuzentrum-Detektor ist

$$\vec{Q}_3 = \frac{(\vec{D} - \vec{S})}{|\vec{D} - \vec{S}|} .$$

Der Normalenvektor auf der 3. Streuebene ist

$$\vec{P}_3 = (\vec{Q}_2 \times \vec{Q}_3) .$$

Dann erhält man

$$\cos\phi' = \frac{\vec{P}_2 \cdot \vec{P}_3}{\sqrt{|\vec{P}_2|^2 \cdot |\vec{P}_3|^2}} .$$

$\sin\phi'$ ist einschließlich des korrekten Vorzeichens gegeben durch

$$\sin\phi' = \frac{\vec{Q}_2 \cdot (\vec{P}_2 \times \vec{P}_3)}{\sqrt{|\vec{P}_2|^2 \cdot |\vec{P}_3|^2}}$$

Der effektive Wirkungsquerschnitt $K(\Omega, \Omega')$ ergibt sich mit Hilfe des Matrizen-Formalismus von McMaster [14].

Außer dem Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma''}{d\Omega''}$ für den 3. Streuprozess und dessen polarisationsabhängigem Teil $\frac{d\sigma_p''}{d\Omega''}$ treten neue Wirkungsquerschnitte für die

2. Streuung auf.

Sie sind definiert durch

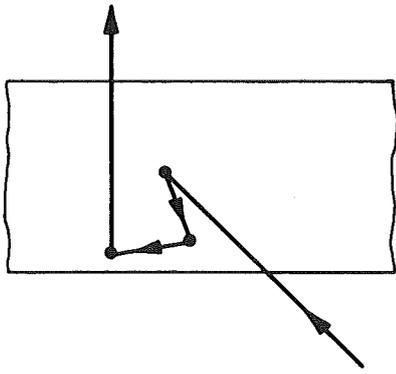
$$\frac{d\sigma_{pp'}}{d\Omega'} = \left(\frac{E''}{E'}\right)^2 \cdot (2 - \sin^2\theta'), \quad \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega'} = 2\left(\frac{E''}{E'}\right)^2 \cdot \cos\theta'.$$

(θ' = Streuwinkel der
2. Streuung)

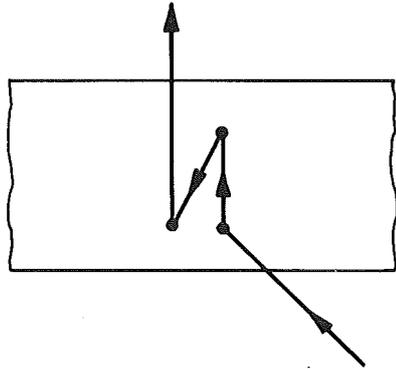
Die einzelnen Teile von $K(\Omega, \Omega')$ besitzen folgende physikalische Bedeutungen:

1. Summand: Dreifachstreuung unpolarisierter Strahlung
2. Summand: Der zweite Streuprozess hängt von der im ersten Streuprozess entstandenen linearen Polarisation ab.
3. Summand: Der dritte Streuprozess hängt von der bei der 2. Streuung entstandenen Polarisation ab.
4. und
5. Summand: Die im ersten Streuprozess entstandene Polarisation bleibt nach dem zweiten Streuprozess teilweise erhalten und beeinflusst den Wirkungsquerschnitt der 3. Streuung.

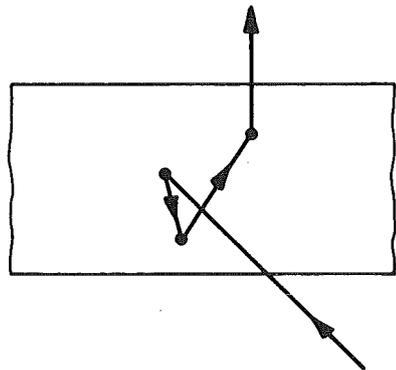
Beim Ausführen der r , r' und r'' -Integration sind nicht nur 2 Fälle wie bei der Doppelstreuung, sondern 4 Fälle zu unterscheiden (siehe Fig. 7 auf Seite 32).



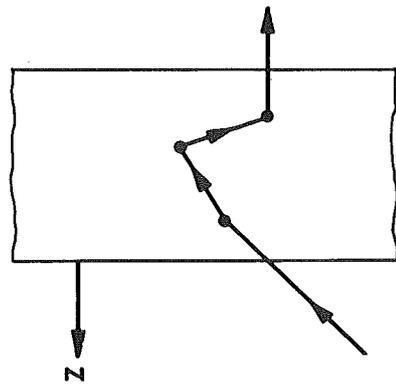
Fall IV: $Q_{1z} > 0$
 $Q_{2z} > 0$



Fall III: $Q_{1z} < 0$
 $Q_{2z} > 0$



Fall II: $Q_{1z} > 0$
 $Q_{2z} < 0$



Fall I: $Q_{1z} < 0$
 $Q_{2z} < 0$

Fig. 7

Man gelangt zu folgenden Endergebnissen:

$$(13) I_3 = \iint d\Omega \iint d\Omega' \left(n \cdot \frac{r_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R'^2} \cdot w(E'') \cdot K(\Omega, \Omega') \cdot W_d$$

Fall I:

$$W_d = \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_1)(m_0 - m_2)(m_0 - m_3)} + \frac{\exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1)(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)} \right. \\ \left. - \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_2 - m_3)(m_1 - m_2)(m_0 - m_2)} + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 - m_3)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3)} \right\} \\ \times \frac{1}{|\cos \xi' \cdot \cos \xi''|}$$

Fall II:

$$W_d = \left\{ \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_2)(m_1 + m_3)} \left[\frac{1}{m_0 - m_3} - \frac{1}{m_1 + m_2} \right] - \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_0 + m_1)(m_0 - m_2)(m_2 - m_3)} \right. \\ \left. + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 + m_1)(m_2 - m_3)(m_0 - m_3)} + \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_3 d)}{(m_2 - m_3)(m_1 + m_3)(m_0 + m_1)} \right. \\ \left. - \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_2 - m_3)(m_1 + m_2)(m_0 + m_1)} \right\} \frac{1}{|\cos \xi' \cdot \cos \xi''|}$$

Fall III:

$$W_d = \left\{ \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_2 + m_3)(m_0 - m_3)(m_0 - m_1)} - \frac{\exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1)(m_1 - m_3)(m_2 + m_3)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_1 - m_3)(m_0 + m_2)} \left[\frac{1}{m_0 - m_3} + \frac{1}{m_1 + m_2} \right] - \frac{\exp(-m_0 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_2 + m_3)(m_0 + m_2)(m_0 - m_1)} \\
 & + \frac{\exp(-m_1 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)(m_0 - m_1)} \} \frac{1}{|\cos \xi' \cdot \cos \xi''|}
 \end{aligned}$$

Fall IV:

$$\begin{aligned}
 W_d = & \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_3)(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)} + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 - m_3)(m_0 + m_1)(m_0 + m_2)} \right. \\
 & - \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_3 d)}{(m_1 - m_2)(m_0 + m_1)(m_1 + m_3)} + \left. \frac{\exp(-m_0 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_1 - m_2)(m_0 + m_2)(m_2 + m_3)} \right\} \\
 & \cdot \frac{1}{|\cos \xi' \cdot \cos \xi''|}
 \end{aligned}$$

m_3 ist definiert als $m_3 = \left| \frac{\mu'''}{\Omega_{3z}} \right|$, ferner ist $\cos \xi'' \equiv |\Omega_{2z}|$.

Die Ω' -Integration wird wie die Ω -Integration ausgeführt:

$$\iint d\Omega' Z(\Omega') = \sum_{\ell_2=1}^{2Z_\ell-1} \sin \theta_2 \cdot g_2(\ell_2) \cdot \sum_{m_2=1}^{Z_m} Z(\Omega') \cdot \frac{\pi^2}{Z_\ell \cdot Z_m}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2Z_\ell} \cdot \ell_2 \quad ; \quad \phi_2 = \frac{2\pi}{Z_m} \left(m_2 - \frac{1}{2} \right) .$$

$$g_2(\ell_2) = \frac{4}{3}, \text{ wenn } \ell_2 \text{ ungerade; } \frac{2}{3}, \text{ wenn } \ell_2 \text{ gerade.}$$

Eine Faraday-Rotation tritt sowohl zwischen der ersten und zweiten als auch zwischen der zweiten und dritten Streuung auf. Die entsprechenden Änderungen ΔI_3 und $\Delta I_3'$ der Intensität findet man, indem man in der Formel für I_3 $K(\Omega, \Omega')$ durch $-2 \frac{\partial K}{\partial \phi} \cdot \alpha$ bzw. $-2 \frac{\partial K}{\partial \phi'} \cdot \alpha'$ ersetzt, wobei α durch (4) und α' durch eine analoge Formel gegeben ist. Nach Berechnung der r , r' und r'' -Integrale mit dem bereits früher benutzten Trick entsteht

$$(14) \quad \Delta I_3 = \iint d\Omega \iint d\Omega' \left(n \cdot \frac{r_0}{2} \right)^2 \times \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R''^2} \cdot F(E') \cdot w(E'') \cdot \frac{32}{13} \cdot \cos \theta_1 \times$$

$$\times \left[\frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma''}{d\Omega''} \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{pp'}}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma''}{d\Omega''} \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \cos 2\phi' \right.$$

$$\left. + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma''}{d\Omega''} \cdot \cos 2\phi \cdot \sin \phi' \cdot \cos \phi' \right] \cdot w_{g1}$$

Fall I

$$w_{g1} = \frac{1}{\cos^2 \xi' |\cos \xi''|} \cdot \left\{ \frac{+ \exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_1)^2 (m_0 - m_2) (m_0 - m_3)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_2 - m_3) (m_1 - m_2)^2 (m_0 - m_2)} + \frac{\exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1) (m_1 - m_2) (m_1 - m_3)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[d - \frac{1}{m_0 - m_1} + \frac{1}{m_1 - m_2} + \frac{1}{m_1 - m_3} \right] + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 - m_3) (m_1 - m_3)^2 (m_2 - m_3)} \right\}$$

Fall II

$$\begin{aligned}
 W_{g1} = & \frac{1}{\cos^2 \xi' |\cos \xi''|} \cdot \left\{ \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_2)(m_0 - m_3)(m_1 + m_3)^2} - \right. \\
 & - \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_2)(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} \left[\frac{1}{m_1 + m_2} + \frac{1}{m_1 + m_3} \right] \\
 & - \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_0 + m_1)^2 (m_0 - m_2)(m_2 - m_3)} + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 + m_1)^2 (m_2 - m_3)(m_0 - m_3)} \\
 & + \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_3 d)}{(m_2 - m_3)(m_1 + m_3)(m_0 + m_1)} \left[d + \frac{1}{m_1 + m_3} + \frac{1}{m_0 + m_1} \right] \\
 & \left. - \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_2 - m_3)(m_1 + m_2)(m_0 + m_1)} \left[d + \frac{1}{m_1 + m_2} + \frac{1}{m_0 + m_1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Fall III

$$\begin{aligned}
 W_{g1} = & \frac{1}{\cos^2 \xi' |\cos \xi''|} \cdot \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_2 + m_3)(m_0 - m_3)(m_0 - m_1)^2} - \right. \\
 & - \frac{\exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1)(m_1 - m_3)(m_2 + m_3)} \left[d - \frac{1}{m_0 - m_1} + \frac{1}{m_1 - m_3} \right] + \\
 & + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_1 - m_3)^2 (m_0 + m_2)(m_0 - m_3)} + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_1 - m_3)(m_0 + m_2)(m_1 + m_2)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{1}{m_1 - m_3} + \frac{1}{m_1 + m_2} \right] + \frac{\exp(-m_0 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_2 + m_3)(m_0 + m_2)(m_0 - m_1)^2}$$

$$+ \frac{\exp(-m_1 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)(m_0 - m_1)} \cdot \left[d + \frac{1}{m_1 + m_2} - \frac{1}{m_0 - m_1} \right]$$

Fall IV

$$W_{g1} = \frac{1}{\cos^2 \xi' |\cos \xi''|} \cdot \left\{ - \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_3)(m_1 + m_3)^2 (m_2 + m_3)} \right.$$

$$+ \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 - m_3)(m_0 + m_1)^2 (m_0 + m_2)} + \frac{\exp(-m_0 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_1 - m_2)^2 (m_0 + m_2)(m_2 + m_3)}$$

$$\left. - \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_3 d)}{(m_1 - m_2)(m_0 + m_1)(m_1 + m_3)} \cdot \left[d + \frac{1}{m_1 - m_2} + \frac{1}{m_1 + m_3} + \frac{1}{m_0 + m_1} \right] \right\}$$

Ferner ist

$$(15) \Delta I_3' = \iiint d\Omega \iiint d\Omega' \left(n \frac{r_0^2}{2} \right)^3 \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R''^2} F(E'') \cdot w(E''') \cdot \frac{32}{13} \cdot \cos \theta_2 \times$$

$$\times \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_p'}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma_p''}{d\Omega''} \cdot \sin \phi' \cdot \cos \phi' + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{pp}'}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma_p''}{d\Omega''} \cdot \sin \phi' \cdot \cos \phi' \cdot \cos 2\phi \right.$$

$$\left. + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{ss}'}{d\Omega'} \cdot \frac{d\sigma_p''}{d\Omega''} \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \cos 2\phi' \right] \cdot W_{g2}$$

Fall I:

$$\begin{aligned}
 W_{g2} = & \frac{1}{|\cos \xi'| \cdot \cos^2 \xi''} \cdot \left\{ + \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_1) (m_0 - m_2)^2 (m_0 - m_3)} \right. \\
 & - \frac{\exp(-m_1 d)}{(m_0 - m_1) (m_1 - m_2)^2 (m_1 - m_3)} - \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_2 - m_3) (m_1 - m_2) (m_0 - m_2)} \times \\
 & \left. \times \left[d + \frac{1}{m_2 - m_3} - \frac{1}{m_1 - m_2} - \frac{1}{m_0 - m_2} \right] + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 - m_3) (m_1 - m_3) (m_2 - m_3)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Fall II:

$$\begin{aligned}
 W_{g2} = & \frac{1}{|\cos \xi'| \cos^2 \xi''} \cdot \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_2)^2 (m_0 - m_3) (m_1 + m_3)} \right. \\
 & - \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_1 + m_2) (m_0 - m_2) (m_1 + m_3)} \left[\frac{1}{m_1 + m_2} - \frac{1}{m_0 - m_2} \right] \\
 & - \frac{\exp(-m_2 d)}{(m_0 + m_1) (m_0 - m_2) (m_2 - m_3)} \left[d - \frac{1}{m_0 - m_2} + \frac{1}{m_2 - m_3} \right] \\
 & + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0 + m_1) (m_2 - m_3)^2 (m_0 - m_3)} + \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_3 d)}{(m_2 - m_3)^2 (m_1 + m_3) (m_0 + m_1)} \\
 & \left. - \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_2 d)}{(m_2 - m_3) (m_1 + m_2) (m_0 + m_1)} \left[d + \frac{1}{m_2 - m_3} + \frac{1}{m_1 + m_2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Fall III:

$$\begin{aligned}
 W_{g2} = & \frac{1}{|\cos\xi'| \cdot \cos^2\xi''} \cdot \left\{ \frac{\exp(-m_0 d)}{(m_2+m_3)^2 (m_0-m_3) (m_0-m_1)} \right. \\
 & - \frac{\exp(-m_1 d)}{(m_0-m_1) (m_1-m_3) (m_2+m_3)^2} + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_1-m_3) (m_0+m_2)^2 (m_0-m_3)} \\
 & + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_1-m_3) (m_0+m_2) (m_1+m_2)} \cdot \left[\frac{1}{m_0+m_2} + \frac{1}{m_1+m_2} \right] \\
 & - \frac{\exp(-m_0 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_2+m_3) (m_0+m_2) (m_0-m_1)} \left[d + \frac{1}{m_2+m_3} + \frac{1}{m_0+m_2} \right] \\
 & \left. + \frac{\exp(-m_1 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_2+m_3) (m_1+m_2) (m_0-m_1)} \cdot \left[d + \frac{1}{m_2+m_3} + \frac{1}{m_1+m_2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Fall IV:

$$\begin{aligned}
 W_{g2} = & \frac{1}{|\cos\xi'| \cdot \cos^2\xi''} \cdot \left\{ \frac{-\exp(-m_0 d)}{(m_0-m_3) (m_1+m_3) (m_2+m_3)^2} \right. \\
 & + \frac{\exp(-m_3 d)}{(m_0-m_3) (m_0+m_1) (m_0+m_2)^2} + \frac{\exp(-m_0 d - m_1 d - m_3 d)}{(m_1-m_2)^2 (m_0+m_1) (m_1+m_3)} \\
 & \left. + \frac{\exp(-m_0 d - m_2 d - m_3 d)}{(m_1-m_2) (m_0+m_2) (m_2+m_3)} \left[d - \frac{1}{m_1-m_2} + \frac{1}{m_0+m_2} + \frac{1}{m_2+m_3} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Im Spezialfall schwacher Absorption ist

$$\begin{aligned}
 W_d &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} d^3 \cdot \frac{1}{|\cos \xi' \cdot \cos \xi''|} \\ \frac{1}{3} d^3 \cdot \frac{1}{|\cos \xi' \cdot \cos \xi''|} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Fall I und IV)} \\ \text{(Fall II und III)} \end{array} \\
 W_{g1} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{24} d^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 \xi' \cdot |\cos \xi''|} \\ \frac{1}{8} d^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 \xi' \cdot |\cos \xi''|} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Fall I und IV)} \\ \text{(Fall II und III)} \end{array} \\
 W_{g2} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{24} d^4 \cdot \frac{1}{|\cos \xi'| \cdot \cos^2 \xi''} \\ \frac{1}{8} d^4 \cdot \frac{1}{|\cos \xi'| \cdot \cos^2 \xi''} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Fall I und IV)} \\ \text{(Fall II und III)} \end{array}
 \end{aligned}$$

Nach Summation über die Targetoberfläche (Programm T5) erhält man die Intensitäten \bar{I}_3 , $\Delta \bar{I}_3$, $\Delta \bar{I}_3'$ und hieraus die Asymmetrie durch Dreifachstreuung

$$\delta = \frac{\overline{\Delta I_3} + \overline{\Delta I_3'}}{\bar{I}_1}$$

IX. Untergrund durch Streuung außerhalb des Targets

IX.1. Streuung am Bleikollimator

Ein im Kollimator gestreutes Photon kann in das Target eintreten, dort infolge Faraday-Rotation seine Polarisation verändern und nach einer weiteren Streuung in den Zähler gelangen. Die Anzahl derartiger Streuprozesse I_k wurde für die in Fig. 8 abgebildete Geometrie berechnet. Es ist (bis auf denselben Proportionalitätsfaktor wie in Gleichung (2))

$$\begin{aligned} \bar{I}_k = & \iiint \left(n \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega} \times \cos 2\phi \right] \times \right. \\ & \times \frac{1}{\cos \xi_0 \left(\frac{\mu}{\cos \xi_0} + \frac{\mu'}{\cos \xi_1} \right)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R'^2} \cdot w(E'') \times \\ & \times \frac{\exp\left(-\frac{\mu'' d}{\cos \xi_3}\right) - \exp\left(-\frac{\mu'' d}{\cos \xi_2}\right)}{\frac{\mu''}{\cos \xi_2} - \frac{\mu'''}{\cos \xi_3}} dF d\Omega \end{aligned}$$

μ, μ' = Absorptionskoeffizienten vor und nach der ersten Streuung in Blei

μ'', μ''' = Absorptionskoeffizienten vor und nach der zweiten Streuung in Eisen

$d\Omega$ = Raumwinkelelement von der Quelle zum Konus

dF = Oberflächenelement auf dem Target.

Bei der Ableitung der Gleichung wurde die freie Weglänge der Photonen in Blei als klein gegenüber R vorausgesetzt. Der

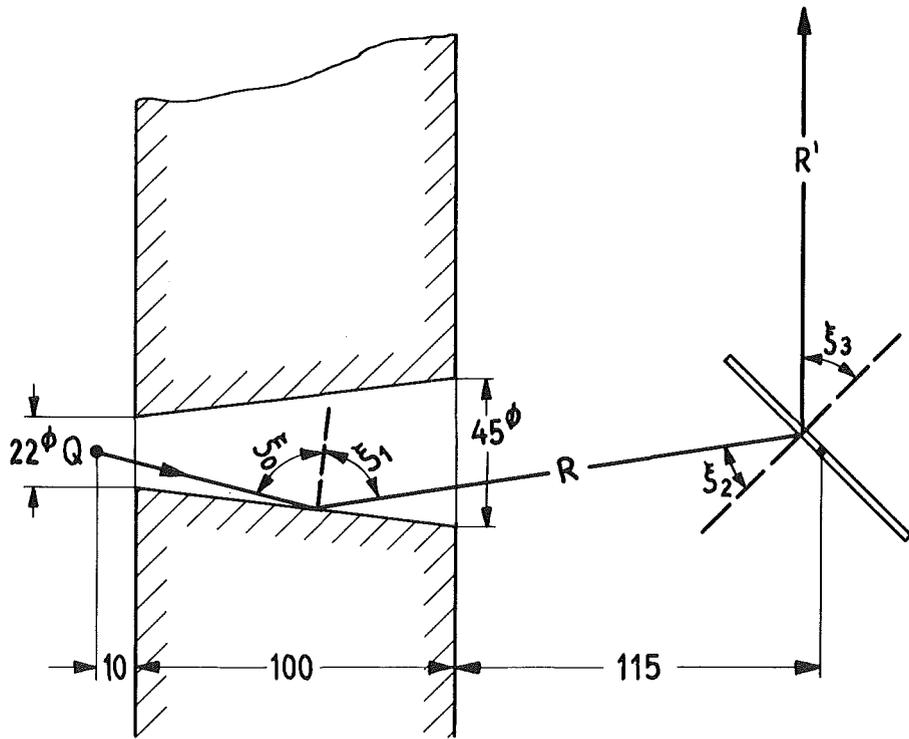


Fig. 8

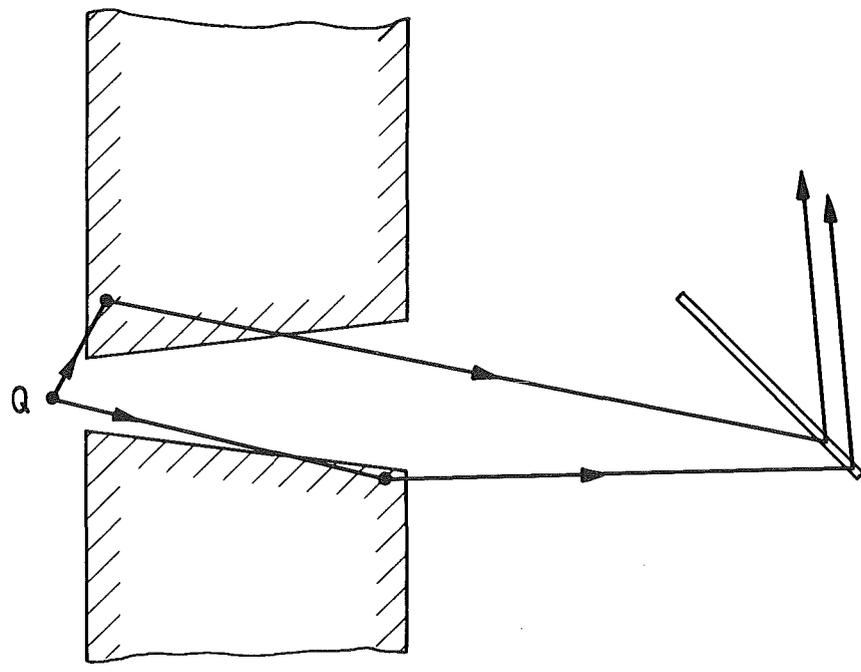


Fig. 9

Faktor

$$\frac{1}{\cos \xi_0} \cdot \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \left(n \frac{r_0^2}{2}\right)}{\frac{\mu}{\cos \xi_0} + \frac{\mu'}{\cos \xi_1}}$$

beschreibt die Photonenstreuung an einer unendlich ausgedehnten, sehr dicken Bleischicht. Randeffekte wie die in Fig. 9 abgebildeten Streuprozesse sind daher unkorrekt behandelt. Beim Umpolen der Magnetisierung ändert sich I_k um einen Betrag zwischen DM 1.11 und DM 9.99:

$$\Delta I_k = \frac{32}{13} \left(n \frac{r_0^2}{2}\right)^2 \iiint \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot Q_{1y} \cdot$$

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R'^2} \cdot F(E') \cdot w(E'') \times \frac{1}{\cos \xi_0 \left(\frac{\mu}{\cos \xi_0} + \frac{\mu'}{\cos \xi_1}\right)} \times \frac{1}{\cos \xi_2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{\exp\left(-\frac{\mu'' d}{\cos \xi_3}\right) - \exp\left(-\frac{\mu'' d}{\cos \xi_2}\right)}{\left(\frac{\mu''}{\cos \xi_2} - \frac{\mu'''}{\cos \xi_3}\right)^2} - \frac{d \cdot \exp\left(-\frac{\mu'' d}{\cos \xi_2}\right)}{\frac{\mu''}{\cos \xi_2} - \frac{\mu'''}{\cos \xi_3}} \right\} dF d\Omega$$

Die Ω -Integration wurde in Polarkoordinaten (θ, ϕ) ausgeführt, wobei die obere und die untere Grenze von θ aus der Geometrie in Fig. 8 bestimmt wurden. Die Stützstellenzahlen für die (θ, ϕ) -Integration betragen 8 bzw. 32 (Target-Integration: T 10 × 10).

IX.2. Streuung am Magnetjoch

Die Ausbreitung von Photonen, die zunächst im Target und danach im Magnetjoch gestreut werden, kann ähnlich wie die Doppelstreuung Konus-Target behandelt werden.

Fig. 10 zeigt die Abmessungen des Magneten, der für die Experimente in ref. [8] verwendet wurde. Von der Oberseite und Unterseite des Joches zusammen erhält man einen Intensitätsbeitrag:

$$\overline{I_j} = 2 \iiint \left(n \frac{r_0^2}{2} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} + \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cdot \cos 2\phi \right) \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R'^2} \cdot \frac{1}{R''^2} \cdot w(E'') \times W_j$$

$$\times \frac{1}{\frac{\mu'}{|\Omega_{1y}|} + \frac{\mu''}{|\Omega_{2y}|}} \times T \times dF_T \cdot dF_J$$

dF_T, dF_J = Oberflächenelement des Targets bzw. Jochs,

R' = Abstand der Streuzentren im Target und im Joch

R'' = Abstand des zweiten Streuzentrums vom Detektor.

W_j hängt davon ab, ob das Photon nach der ersten Streuung das Target auf der Seite der Quelle ($\Omega_{1z} > 0$) oder der Seite des Detektors ($\Omega_{1z} < 0$) verläßt. Im ersten Fall ist

$$W_j = \frac{1 - \exp(-m_0 d - m_1 d)}{m_0 + m_1}$$

und im zweiten

$$m_0 = \frac{\mu}{\cos \xi}, \quad m_1 = \frac{\mu'}{\cos \xi'}$$

$$W_j = \frac{\exp(-m_1 d) - \exp(-m_0 d)}{m_0 - m_1}$$

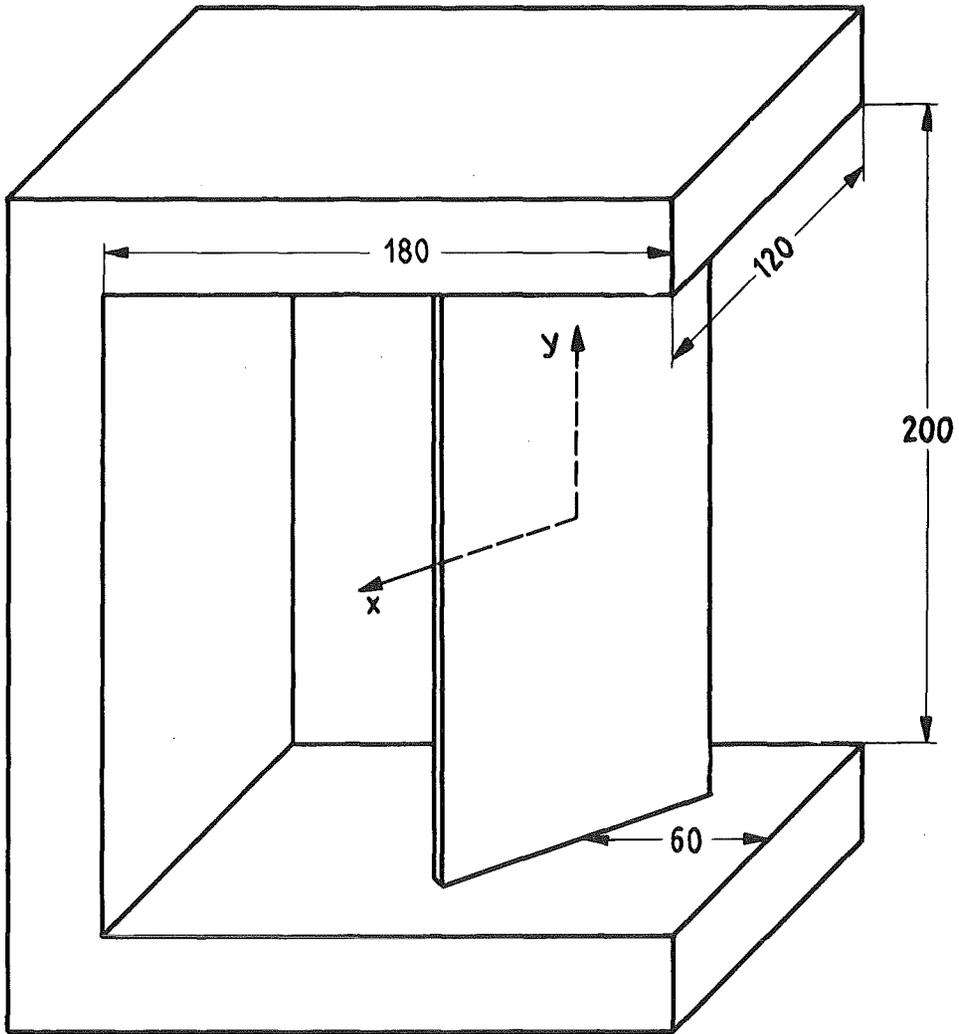


Fig. 10

Der Faktor T ist =1 oder gleich der Transmission des Targets für das zweifach gestreute Quant, je nach dem ob letzteres auf seinem Weg zum Zähler das Target noch einmal durchlaufen muß oder nicht. Alle übrigen Größen haben die gleiche Bedeutung wie in Kap. II bis IV.

Es zeigte sich, daß der Untergrund hauptsächlich durch Streuung an derjenigen Seite des Joches entsteht, die dem Detektor zugewandt ist. Daher wurde Streuung an der Jochrückseite vernachlässigt.

Da die magnetische Induktion im Joch viel kleiner als im Target ist, tritt Faraday-Effekt nur im Streuer auf. Die Intensitätsasymmetrie ist

$$\overline{\Delta I_j} = \frac{64}{13} \left(n \frac{r_0}{2}\right)^2 \iiint dF_T dF_J \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \frac{d\sigma_{p'}}{d\Omega'} \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R'^2} \cdot \frac{1}{R''^2}$$

$$\cdot T \cdot w(E'') \cdot F(E') \times \frac{1}{\frac{|\mu'|}{|Q_{1y}|} + \frac{|\mu''|}{|Q_{2y}|}} \times Q_{1y} \cdot W_{gj}$$

Es ist

$$W_{gj} = \frac{1}{\cos\xi'} \left\{ \frac{1 - \exp(-m_0 d - m_1 d)}{(m_0 + m_1)^2} - \frac{d \cdot \exp(-m_0 d - m_1 d)}{m_0 + m_1} \right\} \text{ für } Q_{1z} > 0$$

und

$$W_{gj} = \frac{1}{\cos\xi'} \left\{ \frac{-\exp(-m_1 d) + \exp(-m_0 d)}{(m_0 - m_1)^2} + \frac{d \cdot \exp(-m_1 d)}{m_0 - m_1} \right\} \text{ für } Q_{1z} < 0$$

Für die numerische Integration über die Jochoberfläche wurden 10×20 Stützstellen verwendet (Target-Integration: T 10×10).

X. Die Unterprogramme

X.1. Streugeometrie

a) Die Unterprogramme SKAL, VEPRO und RICHT zur Erledigung der Vektorrechnung sind trivial und bedürfen keiner Erläuterung.

```
SUBROUTINE SKAL(X,Y,Z)
DIMENSION X(3),Y(3)
Z=0.
DO 1 I=1,3
1 Z=Z+X(I)*Y(I)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE VEPRO(X,Y,Z)
DIMENSION X(3),Y(3),Z(3)
Z(1)=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)
Z(2)=X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)
Z(3)=X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE RICHT(X,Y,Z,PYT)
DIMENSION X(3),Y(3),Z(3)
DO 1 I=1,3
1 Z(I)=Y(I)-X(I)
CALL SKAL(Z,Z,PYT)
C=SQRT(PYT)
DO 2 I=1,3
2 Z(I)=Z(I)/C
RETURN
END
```

b) Strahlbegrenzung durch den Kollimator

Es ist möglich, daß ein auf dem Target gelegenes kleines Rechteck mit der Breite $2 \cdot DX$ und der Höhe $2 \cdot DY$ nur zum Teil von der Quelle bestrahlt wird. Die Subroutine RAND(XO, DX, DY, Q, GRENZ, FRAC) berechnet den Bruchteil der Fläche, der von der Gammastrahlung erfaßt wird (=FRAC).

Das Unterprogramm berechnet aus den Koordinaten $XO(i)$ des Rechteckmittelpunkts zunächst die Koordinaten der vier Eckpunkte und prüft, ob die Ecken innerhalb des Strahlenkegels liegen:

Ist \vec{Y} der Ortsvektor einer Ecke, wird das Skalarprodukt

$$\frac{(\vec{Y} - \vec{Q}) \cdot \vec{Q}}{|\vec{Y} - \vec{Q}|}$$

berechnet. Es ist gleich $-R_q \cdot \cos \chi$, wobei χ der Winkel zwischen der Achse des Strahlenkegels und der Richtung Quelle-Eckpunkt ist. Ist χ_g der Öffnungswinkel des Strahlenkegels, so liegt der Eckpunkt i innerhalb des Strahls, wenn

$$C(i) = \frac{(\vec{Y} - \vec{Q}) \cdot \vec{Q}}{|\vec{Y} - \vec{Q}|} + \underbrace{R_q \cdot \cos \chi_g}_{= \text{GRENZ}} < 0$$

ist. Einer im Strahl gelegenen Ecke wird ein Faktor $P_i = 1$ zugeordnet, einer im Schatten des Konus liegenden Ecke ein Faktor $P_i = 0$.

In einem zweiten Schritt werden Punktepaare $(i, i+1)$ gesucht, zwischen denen das Vorzeichen von $C(i)$ wechselt. Auf der entsprechenden Rechteckseite liegt ein Schnittpunkt mit der Strahlbegrenzung. Der Abstand dieses Schnittpunktes von der bestrahlten Ecke i_1 läßt sich in linearer Näherung berechnen zu

$$\xi = \frac{C(i_1)}{C(i_1) - C(i_2)} \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

$$(i_2 = i_1 + 1 \quad \text{oder} \quad i_1 - 1).$$

Es gibt entweder gar keinen oder zwei solcher Schnittpunkte des Strahlkegelrandes mit den vier Rechteckseiten, d.h. man erhält maximal zwei Abstände ξ_1, ξ_2 . Im folgenden wird noch die Summe

$$S = \sum_{i=1}^4 P_i$$

benötigt.

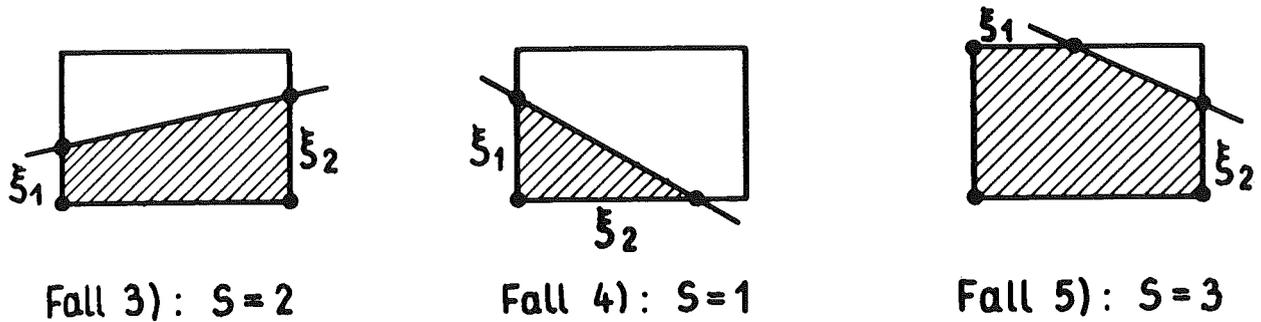


Fig. 11

Es lassen sich 5 Fälle unterscheiden (siehe Fig. 11):

- (1) $S = 4$: Das ganze Rechteck liegt im Strahl, $\text{FRAC} = 1$.
- (2) $S = 0$: Das ganze Rechteck liegt außerhalb des Strahls, $\text{FRAC} = 0$.
- (3) $S = 2$: Die Strahlbegrenzung schneidet zwei gegenüberliegende Rechteckseiten und man erhält in linearer Näherung

$$\text{FRAC} \approx \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$$

- (4) $S = 1$: Der bestrahlte Teil hat angenähert die Form eines Dreiecks und es ist

$$\text{FRAC} \approx \frac{1}{2} \xi_1 \cdot \xi_2$$

- (5) $S = 3$: Ein Dreieck liegt im Konusschatten und es ist

$$\text{FRAC} \approx 1 - \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

```
SUBROUTINE RAND(X0,DX,DY,SQ,GRENZ,F)
DIMENSION XC(3),SQ(3),X(4,2),Y(3),Z(3),CC(5),P(5),G(2)
X(1,1)=XC(1)-DX
X(1,2)=XC(2)-DY
X(2,1)=XC(1)-DX
X(2,2)=XC(2)+DY
X(3,1)=XC(1)+DX
X(3,2)=XC(2)+DY
X(4,1)=XC(1)+DX
X(4,2)=XC(2)-DY
SP=0.
Y(3)=XC(3)
DO 1 N=1,4
P(N)=C.
Y(1)=X(N,1)
Y(2)=X(N,2)
CALL RICHT(SQ,Y,Z,P2)
CALL SKAL(SQ,Z,TEST)
CO(N)=TEST+GRENZ
IF(CO(N))2,1,1
2 P(N)=1.
SP=SP+1.
1 CONTINUE
IF(SP*(SP-4.))3,4,3
4 F=SP/4.
RETURN
3 P(5)=P(1)
CO(5)=CO(1)
DO 7 N=1,4
IF(P(N)-P(N+1))6,7,5
5 G(1)=CO(N)/(CO(N)-CO(N+1))
GO TO 7
6 G(2)=-CO(N+1)/(CO(N)-CO(N+1))
7 CONTINUE
IF(SP-2.))8,9,10
8 F=0.5*G(1)*G(2)
GO TO 11
9 F=0.5*(G(1)+G(2))
GO TO 11
10 F=0.5*(1.+G(1)+G(2)-G(1)*G(2))
11 WRITE(6,1005)X0(1),X0(2),G(1),G(2),F
1005 FORMAT(6H X Y F,5F8.3)
RETURN
END
```

X.2. Klein-Nishina-Formel

Die Argumente in der Subroutine STREU(X, Y, CØ, SIG, SI2) haben folgende Bedeutungen:

X = Photonenenergie vor der Streuung (in Einheiten mc^2)

Y = Photonenenergie nach der Streuung

CØ = Kosinus des Streuwinkels; SI2 = Sinus-Quadrat des Streuwinkels

$$\left. \begin{aligned} \text{SIG}(1) &= \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ \text{SIG}(2) &= \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \end{aligned} \right\} \text{ (bis auf einen Faktor } r_0^2/2)$$

```
SUBROUTINE STREU(X,Y,CC,SIG,SI2)
DIMENSION SIG(2)
Y=X/(1.+X*(1.-CC))
H=Y*Y/X/X
SI2=1.-CC*CC
SIG(1)=H*(Y/X+X/Y-SI2)
SIG(2)=H*SI2
RETURN
END
```

X.3. Die Faraday-Rotation

Die Funktion FAR(E) ist identisch mit der Funktion F(v) aus ref. |11| und der Funktion $-\frac{1}{2}\psi$ aus ref. |13| ($E = v =$ Photonenenergie in Einheiten mc^2). Für die durchgeführten Rechnungen war die Kenntnis von FAR(E) im Energiebereich zwischen 50 keV und 1100 keV ausreichend. Dieses Energieintervall wurde in drei Teile eingeteilt, und in jedem Teil wurde FAR(E) durch kubische Interpolation aus vier exakten Funktionswerten berechnet.

Die Eingabedaten sind:

Bereich 1 (0.1 < E < 0.4)		Bereich 2 (0.4 < E < 1.0)		Bereich 3 (1.0 < E < 2.2)	
Energie (keV)	FAR	Energie (keV)	FAR	Energie (keV)	FAR
50	0.03634	200	0.1408	500	0.1958
100	0.08011	300	0.1729	700	0.1966
150	0.1149	400	0.1889	900	0.1900
200	0.1408	500	0.1958	1100	0.1812

Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist am schlechtesten im Energiebereich 1 (maximaler Fehler 0,6%), oberhalb von 200 keV ist der Fehler des Interpolationsverfahrens kleiner als 0,2%.

```
FUNCTION FAR(E)
C   GUELTIG VON E=0.1 BIS 2.2
   IF(E=0.4)1,2,2
1  FAR=((0.016*E-0.47837)*E+0.58668)*E-0.0165
   RETURN
2  IF(E=1.)3,3,4
3  FAR=((0.15567*E-0.48438)*E+0.52469)*E+0.00031
   RETURN
4  FAR=((0.01446*E-0.08358)*E+0.13795)*E+0.12730
   RETURN
END
```

X.4. Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors

In den bisher durchgeführten Experimenten wurden nicht die nachgewiesenen Photonen gezählt, sondern das Integral des aus dem Detektor fließenden Stromes gemessen. Daher ist die Ansprechwahrscheinlichkeit proportional zu

$$\underbrace{(1 - \langle e^{-\mu_D t_D} \rangle)}_{\text{Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion des Photons im Detektor}} \times \underbrace{h(E)}_{\text{mittlere Impulshöhe}}$$

Für $h(E)$ wurde folgender Ansatz gewählt:

$$h(E) \approx E \cdot P + \frac{E}{2}(1 - P)$$

Hierin ist P das Peak/total-Verhältnis. Der erste Summand approximiert den Photoeffekt, während der zweite eine näherungsweise Beschreibung des Compton-Kontinuums darstellt.

Ferner muß man die Absorption der gestreuten Photonen durch die vor dem Detektor aufgestellten Bleiabsorber berücksichtigen. Insgesamt hat man für die Nachweiswahrscheinlichkeit $w(E)$

$$w(E) = e^{-\mu_{Pb} \cdot t_{Pb}} \underbrace{\left\{ (1 - \langle e^{-\mu_D t_D} \rangle) (P + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot E \right\}}_{AN}$$

a) Programm-Version A-CsJ

Numerische Werte für die geschweifte Klammer wurden für einen Szintillationszähler mit einem 2" x 2"-CsJ-Kristall berechnet. Die Peak-total-Verhältnisse wurden durch Interpolation aus den Meßdaten von Irfan und Prasad [15] abgeleitet; totale Absorptionswahrscheinlichkeiten

$$1 - \langle e^{-\mu_D t_D} \rangle$$

wurden für eine punktförmige Gammaquelle berechnet, die sich in 35 cm Abstand vom Kristall auf dessen Rotationsachse befindet (Absorptionskoeffizienten siehe ref. [16]).

Die Ergebnisse lassen sich mit 1% Genauigkeit approximieren durch die Formeln

$$AN = E \cdot (1 + 0.07835E - 0.6985 E^2 + 0.2891 E^3) \text{ für } 0 < E < 1.2,$$

$$AN = E \cdot (1.1950 - 0.8121 E + 0.3101 E^2 - 0.04448 E^3)$$

für $1.2 < E < 2.4$.

Die Subroutine DET(E, WAHR) benutzt diese Näherungen und berechnet w(E) für Bleiabsorber von 0,1,2 und 3 mm Dicke. Für μ_{pb} ist ein eigenes Unterprogramm PMUE(E) vorhanden, der Faktor COM berücksichtigt den schiefen Durchgang der Photonen durch die Bleibleche.

```
SUBROUTINE DET(E,WAHR)
DIMENSION WAHR(4)
COMMON COM
C CS J- KRISTALL 2 MAL 2 INCH
C GUELTIG FUER E=0. BIS 2.4
IF(E-1.2)2,3,3
2 AN=(((0.2891*E-0.6985)*E+0.07835)*E+1.)*E
GO TO 4
3 AN=((-0.04448*E+0.3101)*E-0.8121)*E+1.1950)*E
4 TRA=EXP(-0.1*PMUE(E)/COM)
WAHR(1)=AN
DO 1 N=2,4
1 WAHR(N)=WAHR(N-1)*TRA
RETURN
END
```

b) Programm-Version A-NaJ

Um den Einfluß der Größen P und $\langle e^{-\mu_D t_D} \rangle$ auf die Ergebnisse abzuschätzen, wurden einige Rechnungen für einen $2'' \times 2''$ NaJ-Szintillator durchgeführt. Die Größe AN wurde mit Hilfe der Tabellen von Vegors, Marsden und Heath berechnet [17]. Geeignete Interpolationsformeln für die Ergebnisse sind

$$AN = E \cdot (1 + 0.110 \cdot E - 1.227 \cdot E^2 + 0.667 \cdot E^3) \quad \text{für } 0 < E < 1.2$$

$$AN = E \cdot (0.937 - 0.544 \cdot E + 0.179 \cdot E^2 - 0.022 \cdot E^3) \\ \text{für } 1.2 < E < 2.4 .$$

c) Programm-Version A-1

In einigen Fällen wurde ein 'schwarzer' Detektor angenommen mit den Eigenschaften

$$\langle e^{-\mu_D t_D} \rangle = 0, \quad P = 1$$

Die Ergebnisse der Rechnungen nach 'A-CsJ' liegen zwischen denen der Programm-Versionen A-1 und A-NaJ.

X.5. Absorptionskoeffizienten

Die Funktionen FMUE(E) und PMUE(E) geben die Absorptionskoeffizienten von Eisen und Blei in Einheiten von cm^{-1} an (E in Einheiten mc^2). Es wurde versucht, für einen möglichst großen Energiebereich brauchbare Interpolationsformeln zu finden.

Die Wirkungsquerschnitte für Photonenstreuung und Photoeffekt wurden an verschiedene Funktionen angepaßt:

$$\mu(\text{Photoeffekt}) = \frac{P_1}{E} + \frac{P_2}{E^2} + \frac{P_3}{E^{3.5}} + \frac{P_4}{E^4}$$

$$\mu(\text{Streuung}) = \frac{s_0 + s_1 E + s_2 E^2 + s_3 E^3}{s_4 + s_5 E + s_6 E^2 + s_7 E^3}$$

Die Entwicklungskoeffizienten p_1 und s_1 sind den nachfolgenden Subroutinen zu entnehmen:

```
FUNCTION FMUE(EN)
ER=1./EN
PHOTO=((( -0.001344*ER+0.00787*SQRT(ER))*ER+0.00482)*ER+0.001595)
1*ER
COMP=(((2.11*EN+106.8)*EN+15.51)*EN+0.3807)/(((59.6*EN+133.7)*EN
1+1.)*EN)
FMUE=PHOTO+COMP
RETURN
END
```

```
FUNCTION PMUE(EN)
IF(EN-0.1725)1,1,2
1 PMUE=11.34/((52.2*EN-6.33)*EN+0.303)
RETURN
2 ER=1./EN
PHOTO=((( -0.1108*ER+0.4044*SQRT(ER))*ER+0.515)*ER+0.07825)*ER
E=1./(1.+3376.*EN)
COMP=(((9.52E9*E+1.703E7)*E+1.026E4)*E/(((0.579E8*E+0.116E7)*E
1+0.1524E5)*E+1.))
PMUE=PHOTO+COMP
RETURN
END
```

Genauigkeiten:

a) Eisen

Die Formel für Photonenstreuung wurde getestet im Bereich $0.02 < E < 20$, die maximale Abweichung von tabellierten Wirkungsquerschnitten beträgt 2%. Der Photoeffekt wird im Intervall $0.12 < E < 5.9$ mit einer Genauigkeit von besser als 1.5% wiedergegeben.

b) Blei

Der Wirkungsquerschnitt für Streuung weicht von den Werten der Formel im Energiebereich $0.02 < E < 12$ um weniger als 1.6% ab. Die Formel für den Photoeffekt gilt oberhalb der K-Kante; ein Fehler von 1.7% tritt bei $E = 0.25$ auf, bei allen anderen Energien bis $E = 5.9$ ist die Genauigkeit besser. Von $E = 0.1$ bis zur K-Kante wird die Näherung

$$\mu_{\text{Pb}} = \frac{11.34}{(52.2 E^2 - 6.33 E + 0.303)}$$

verwendet.

XI. Ergebnisse

In sämtlichen Rechnungen wurden die folgenden Parameter benutzt:

Abstand Quelle-Targetmittelpunkt	$R_q = 22.5$	cm
Abstand Targetmittelpunkt-Detektor	$R_d = 35$	cm
Targetbreite	$X_T = 8$	cm
Targethöhe (= Höhe des bestrahlten Teils in der Mitte und an den Seiten)	$y_2 = 8.68$ cm, $y_3 = 5.72$ cm	$y_1 = 9.2$ cm
Detektorradius (falls berücksichtigt)	$h = 2.5$	cm

1) Doppelstreuung

Die Ergebnisse für den relativen Anteil der zweifach gestreuten Quanten

$$R = \frac{\overline{I_2}}{\overline{I_1}} \quad \text{und die Asymmetrie } \delta = \frac{\overline{\Delta I_2}}{\overline{I_1}}$$

sind im folgenden tabelliert als Funktion der Dicke der Bleiabsorber. Die Energie, der Streuwinkel γ und die Targetdicke d sind jeweils angegeben. In den Abschnitten a bis h (Tabellen 1 bis 9) wird die Abhängigkeit der Größen R und δ von verschiedenen in die Rechnung eingehenden Parametern und numerischen Näherungen untersucht. Endergebnisse für $E = 412$ keV und $E = 482$ keV sind in Tabelle 10 aufgeführt.

a) Konvergenz der θ_1, ϕ_1 -Integration

Variiert wurden die Stützstellen-Zahlen z_ℓ und z_m .
Programm: T5, D1, A-CsJ; Resultate in Tabelle 1.

In allen weiteren Rechnungen wurden die Parameter $z_\ell = 16$, $z_m = 64$ verwendet. Damit weichen die Ergebnisse i.a. um weniger als 1% vom Endwert des Integrals ab.

Tabelle 1

Konvergenz der Raumwinkel-Integration

Programm: T5, D1, A-CsJ				Pb - Absorber								
				0		1		2		3 mm		
				R	$\delta \times 10^6$	R	$\delta \times 10^6$	R	$\delta \times 10^6$	R	$\delta \times 10^6$	
E = 412 keV $\gamma = 90^\circ$ d = 3.3 mm	$z_\ell =$	8	$z_m =$	32	0.254	57.7	0.168	14.3	0.149	-0.2	0.150	-5.6
		16		64	0.255	60.6	0.168	15.0	0.149	-0.0	0.150	-5.5
		32		128	0.256	61.1	0.168	15.1	0.149	0.0	0.150	-5.5
E = 412 keV $\gamma = 90^\circ$ d = 2.2 mm	$z_\ell =$	8	$z_m =$	32	0.190	41.9	0.118	11.4	0.101	+1.5	0.100	-1.9
		16		64	0.192	46.5	0.118	12.7	0.101	+1.9	0.100	-1.8
		32		128	0.193	47.5	0.119	12.9	0.101	+1.9	0.100	-1.8
E = 412 keV $\gamma = 53^\circ$ d = 3.3 mm	$z_\ell =$	8	$z_m =$	32	0.138	119.2	0.087	37.8	0.070	15.0	0.062	+7.0
		16		64	0.139	122.8	0.087	38.8	0.070	15.3	0.062	+7.1
		32		128	0.139	123.4	0.087	39.0	0.070	15.3	0.062	+7.1
E = 412 keV $\gamma = 53^\circ$ d = 2.2 mm	$z_\ell =$	8	$z_m =$	32	0.102	80.9	0.061	24.0	0.048	+8.9	0.042	+3.9
		16		64	0.103	+86.6	0.061	25.6	0.048	+9.4	0.042	+4.1
		32		128	0.104	+87.7	0.061	+26.0	0.048	+9.5	0.042	+4.1

Tabelle 2

Einfluß der endlichen Detektor-Ausdehnung

Programm: T5, A-CsJ		Pb - Absorber							
		0		1		2		3 mm	
E = 412 keV $\gamma = 90^\circ$ d = 3.3 mm	D1	0.255	60.6	0.168	15.0	0.149	-0.0	0.150	-5.5
	D5	0.255	60.4	0.168	15.0	0.149	+0.0	0.149	-5.4
E = 412 keV $\gamma = 90^\circ$ d = 2.2 mm	D1	0.192	46.5	0.118	12.7	0.101	1.9	0.100	-1.8
	D5	0.192	46.3	0.118	12.6	0.101	1.9	0.100	-1.8
E = 412 keV $\gamma = 53^\circ$ d = 3.3 mm	D1	0.139	122.8	0.087	38.8	0.070	15.3	0.062	+7.1
	D5	0.139	122.3	0.087	38.7	0.070	15.2	0.062	+7.1
E = 412 keV $\gamma = 53^\circ$ d = 2.2 mm	D1	0.103	86.6	0.061	25.6	0.048	9.4	0.042	4.1
	D5	0.103	86.2	0.061	25.5	0.048	9.3	0.042	4.1

b) Einfluß der endlichen Detektorausdehnung

Verglichen wurden Resultate der Programme D1 und D5: T5, A-CsJ, D1 und T5, A-CsJ, D5; Resultate in Tabelle 2. Der Einfluß der Detektorausdehnung war nie größer als 1%, weshalb in allen weiteren Rechnungen das Programm D1 benutzt wurde.

c) Einfluß der Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors

Es wurden Rechnungen mit den Ansprechwahrscheinlichkeiten A-1, A-NaJ und A-CsJ verglichen. Resultate in Tabelle 3.

Abänderungen der Funktion $w(E)$ haben nur einen mäßigen Einfluß auf die Endergebnisse: beim Übergang von A-1 nach A-NaJ ändert sich δ um ca. 20%.

d) Einfluß der Form des Kollimators

Er läßt sich abschätzen, indem die Ergebnisse für den 'realistischen Fall' (Begrenzung des Photonenstrahls nach oben und unten durch den Kollimator) den Rechnungen für ein rechteckiges und elliptisches Target gegenübergestellt werden.

Programm: T5, D1, A-CsJ, Resultate in Tabelle 4.

Auch die Art der Kollimierung hat nur einen mäßigen Einfluß auf die Ergebnisse, für die Anordnungen mit Bleiabsorber unterscheiden sich die Asymmetrien δ um 1 bis 2×10^{-6} .

e) Güte der Integration 'T5' über die Targetoberfläche

Programme: T5, D1, A-CsJ und T 10 × 10, D1, A-CsJ; Resultate siehe in Tabelle 5.

Beide Integrationsverfahren liefern nahezu identische Ergebnisse. Die Intensitäten der zweifach gestreuten Strahlung weichen um nicht mehr als 1% voneinander ab, und die Asymmetrien unterscheiden sich um nicht mehr als 0.3×10^{-6} . Die Genauigkeit

Tabelle 3

Einfluß der Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors

Programm: T5, D1	Pb - Absorber							
	0		1		2		3 mm	
	R	$\delta \times 10^6$						
E = 412 keV A-1	0.249	57.3	0.167	13.9	0.150	-0.5	0.152	-5.7
$\gamma = 90^\circ$ A-NaJ	0.266	65.9	0.171	16.8	0.149	+0.6	0.149	-5.3
d = 3.3 mm A-CsJ	0.255	60.6	0.168	15.0	0.149	-0.0	0.150	-5.5
E = 412 keV A-1	0.187	44.1	0.118	11.9	0.102	+1.6	0.102	-2,0
$\gamma = 90^\circ$ A-NaJ	0.202	50.5	0.121	13.9	0.102	+2.3	0.100	-1.7
d = 2.2 mm A-CsJ	0.192	46.5	0.118	12.7	0.101	+1.9	0.100	-1.8
E = 412 keV A-1	0.130	108.9	0.083	34.7	0.068	13.7	0.061	6.4
$\gamma = 53^\circ$ A-NaJ	0.146	134.5	0.089	41.9	0.071	16.3	0.062	7.5
d = 3.3 mm A-CsJ	0.139	122.8	0.087	38.8	0.070	15.3	0.062	7.1
E = 412 keV A-1	0.096	76.6	0.058	22.8	0.047	8.4	0.041	3.7
$\gamma = 53^\circ$ A-NaJ	0.109	95.1	0.063	27.8	0.049	10.0	0.042	4.3
d = 2.2 mm A-CsJ	0.103	86.6	0.061	25.6	0.048	9.4	0.042	4.1

Tabelle 4

Einfluß der Form des Kollimators

Programm: D1,A-CsJ	Pb - Absorber							
	0		1		2		3 mm	
	R	$\delta \times 10^6$						
E = 412 keV T5 (KØLL)	0.255	60.6	0.168	15.0	0.149	-0.0	0.150	-5.5
$\gamma = 90^\circ$ T5 R	0.252	66.8	0.165	17.4	0.146	+1.4	0.146	-4.4
d = 3.3 mm T5 E	0.254	63.8	0.168	16.1	0.149	+0.4	0.150	-5.3
E = 412 keV T5 (KØLL)	0.192	46.5	0.118	12.7	0.101	+1.9	0.100	-1.8
$\gamma = 90^\circ$ T5 R	0.190	50.7	0.116	14.1	0.099	+2.6	0.098	-1.3
d = 2.2 mm T5 E	0.192	48.8	0.118	13.4	0.101	+2.1	0.100	-1.7
E = 412 keV T5 (KØLL)	0.139	122.8	0.087	38.8	0.070	15.3	0.062	+7.1
$\gamma = 53^\circ$ T5 R	0.136	119.1	0.085	37.5	0.068	14.7	0.060	+6.9
d = 3.3 mm T5 E	0.138	122.6	0.086	38.8	0.070	15.3	0.061	+7.2
E = 412 keV T5 (KØLL)	0.103	86.6	0.061	25.6	0.048	9.4	0.042	+4.1
$\gamma = 53^\circ$ T5 R	0.101	83.9	0.060	24.7	0.047	9.0	0.041	+3.9
d = 2.2 mm T5 E	0.103	86.4	0.061	25.6	0.048	9.4	0.042	+4.1

Tabelle 5

Güte der näherungsweise Integration über die Targetoberfläche

Programm: D1, A-CsJ		Pb - Absorber							
		0		1		2		3 mm	
E = 412 keV		R	$\delta \times 10^6$						
$\gamma = 90^\circ$	T 5	0.255	60.6	0.168	15.0	0.149	-0.0	0.150	-5.5
d = 3.3 mm	T 10x10	0.256	60.4	0.169	14.9	0.150	-0.2	0.152	-5.8
$\gamma = 90^\circ$	T 5	0.192	46.5	0.118	12.7	0.101	+1.9	0.100	-1.8
d = 2.2 mm	T 10x10	0.193	46.6	0.119	12.7	0.102	+1.8	0.102	-1.9
$\gamma = 53^\circ$	T 5	0.139	122.8	0.087	38.8	0.070	15.3	0.062	+7.1
d = 3.3 mm	T 10x10	0.140	123.1	0.087	38.9	0.070	15.4	0.062	+7.2
$\gamma = 53^\circ$	T 5	0.103	86.6	0.061	25.6	0.048	9.4	0.042	+4.1
d = 2.2 mm	T 10x10	0.104	86.8	0.061	25.7	0.048,	9.4	0.042	+4.1

des einfachen Interpolationsverfahrens T5 ist darauf zurückzuführen, daß in der Potenzreihenentwicklung der Funktionswerte nach x und y Terme dritter Ordnung keinen Beitrag zum Integral geben, so daß erst in der vierten Ordnung ein Fehler auftritt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts zeigen, daß zur Behandlung der Dreifachstreuung die Programm-Version T5 eine ausreichende Näherung ist.

f) Einfluß der endlichen Targetausdehnung

In Tabelle 6 sind einige Resultate für den Faraday-Effekt eines ausgedehnten Targets den entsprechenden Werten für die Targetmitte gegenübergestellt. Es sind merkliche Differenzen vorhanden. Das rührt daher, daß die Größe des Effekts sehr stark von der Lage des Punkts abhängt, auf den das primäre Photon auftrifft. Dies wird illustriert in Abb. 12, in der der Faraday-Effekt

$$\delta = \frac{\Delta I_2}{I_1}$$

über der x -Koordinate (Targetausdehnung in der Streuebene) aufgetragen ist; die Werte sind über die Targethöhe integriert. In der dazu senkrechten Richtung ist die Variation der Asymmetrien kleiner.

Äquivalent zu diesem Ergebnis ist die Aussage, daß δ sehr stark vom Streuwinkel γ abhängt. Ergebnisse, die mit dem Programm 'T5, D1, A-CsJ' gewonnen wurden, sind in Abb. 13 aufgetragen. Es ist ersichtlich, daß im Experiment der Streuwinkel genau eingehalten werden muß, damit keine Fehler entstehen.

g) Die Abhängigkeit des Faraday-Effektes von der Energie

Es wurden Rechnungen für verschiedene Photonenenergien im Bereich zwischen 133 keV und 1120 keV ausgeführt.

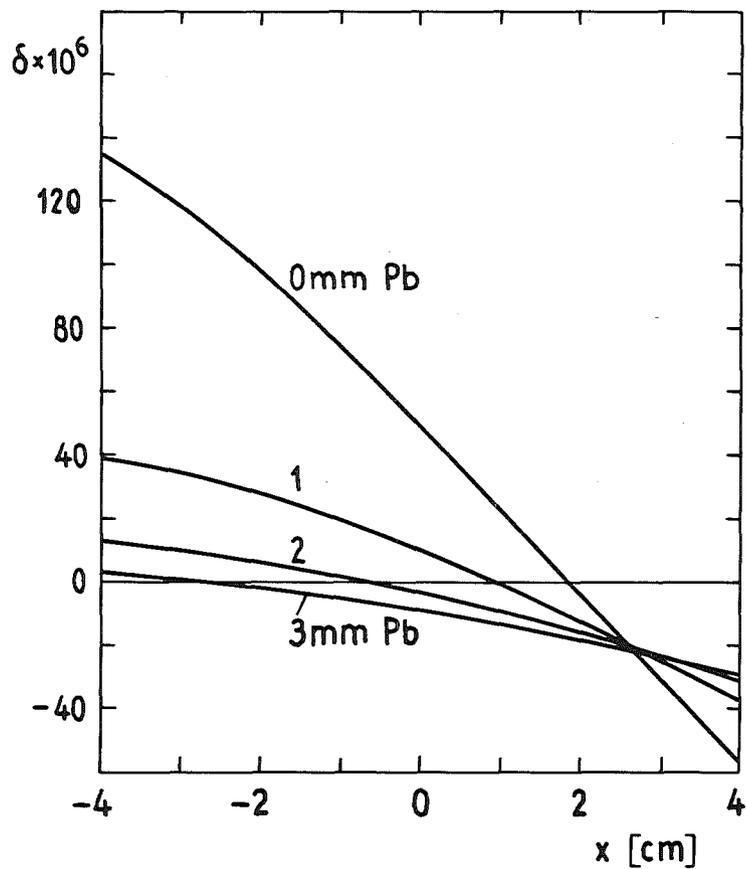
Programm: T5, D1, A-CsJ; Resultate in den Tabellen 7 und 8.

Tabelle 6

Einfluß der endlichen Targetgröße

Programm: D1, T 10×10, A-CSJ		Pb - Absorber			
		0	1	2	3 mm
E = 412 keV		$\delta \times 10^6$			
$\gamma = 90^\circ$	Target-Mitte	54.2	11.8	-2.8	-8.6
d = 3.3 mm	integriert	60.4	14.9	-0.2	-5.8
$\gamma = 90^\circ$	Mitte	42.7	11.1	+0.7	-3.2
d = 2.2 mm	integriert	46.6	12.7	+1.8	-1.9
$\gamma = 53^\circ$	Mitte	133.7	43.1	17.3	8.2
d = 3.3 mm	integriert	123.1	38.9	15.4	7.2
$\gamma = 53^\circ$	Mitte	94.1	28.4	10.6	4.7
d = 2.2 mm	integriert	86.8	25.7	9.4	4.1

$E = 412 \text{ keV}$
 $d = 3.3 \text{ mm}$
 $\theta = 90^\circ$



$E = 412 \text{ keV}$
 $d = 3.3 \text{ mm}$
 $\theta = 53^\circ$

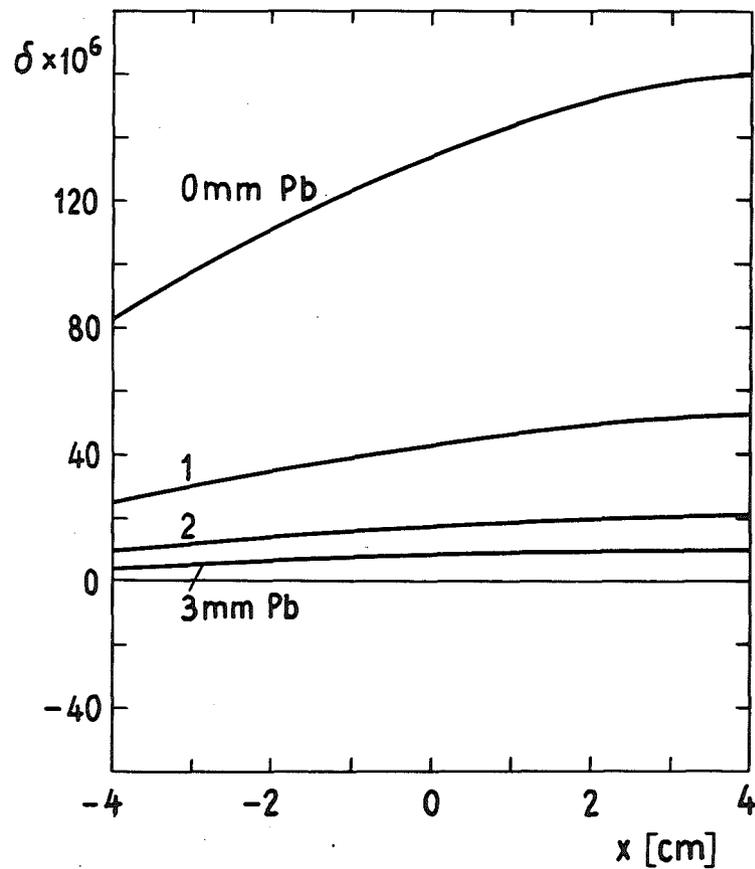
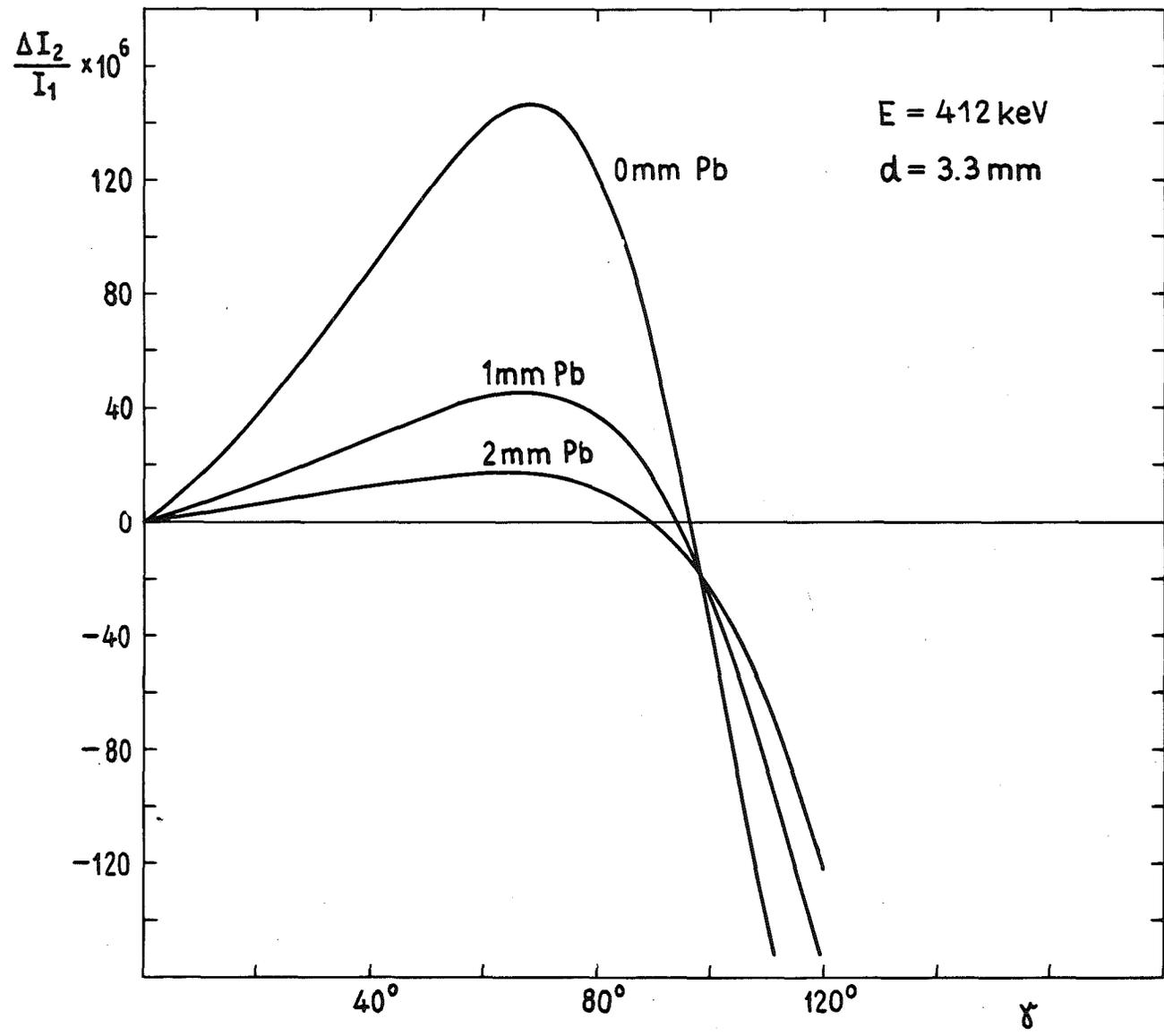


Fig. 12



Programm T5
 (ohne "Band-
 korrektur" RK)

Fig. 13

Tabelle 7

Abhängigkeit der Intensitätsasymmetrie von der Photonenenergie ($\gamma = 90^\circ$)

Programm: D1, T5, A-CsJ		Pb - Absorber							
		O R	$\delta \times 10^6$	1		2		3 mm	
d = 3.3 mm	133 keV	0.219	15.0	(1.649	316.2)	(52.65	13070.)	(1726.	476000.)
	346 keV	0.257	59.2	0.165	11.4	0.150	-2.3	0.158	-6.9
	412 keV	0.255	60.6	0.168	15.0	0.149	-0.0	0.150	-5.5
	482 keV	0.253	59.8	0.171	17.5	0.149	+2.0	0.146	-4.2
	890 keV	0.239	45.1	0.174	19.3	0.148	+6.8	0.137	+0.5
	1120 keV	0.233	38.1	0.173	17.6	0.147	+7.1	0.135	+1.5
d = 2.2 mm	133 keV	0.172	14.2	(1.645	309.0)	(55.2	12860.)	(1836.	474500.)
	346 keV	0.194	46.0	0.115	10.1	0.101	+0.4	0.105	-2.7
	412 keV	0.192	46.5	0.118	12.7	0.101	+1.9	0.100	-1.8
	482 keV	0.190	45.5	0.121	14.3	0.101	+3.2	0.098	-1.0
	890 keV	0.178	33.5	0.124	14.9	0.103	+6.0	0.093	+1.7
	1120 keV	0.173	28.1	0.124	13.4	0.102	+6.0	0.092	+2.1

Tabelle 8

Abhängigkeit der Intensitätsasymmetrie von der Photonenenergie ($\gamma = 53^\circ$)

Programm: D1, T5, A-CsJ		Pb - Absorber							
		0		1		2		3	
		R	$\delta \times 10^6$						
d = 3.3 mm	133 keV	0.145	49.1	(0.233	112.9)	(1.443	1009.)	(11.36	8866.)
	346 keV	0.144	123.9	0.084	32.9	0.067	11.6	0.059	5.0
	412 keV	0.139	122.8	0.087	38.8	0.070	15.3	0.062	7.1
	482 keV	0.135	118.8	0.089	42.7	0.072	18.4	0.064	9.1
	890 keV	0.123	89.0	0.091	44.0	0.077	24.0	0.069	14.1
	1120 keV	0.119	75.2	0.090	39.8	0.077	22.9	0.070	14.1
d = 2.2 mm	133 keV	0.115	38.2	(0.215	104.9)	(1.435	952.)	(11.41	8414.)
	346 keV	0.108	88.1	0.059	21.7	0.046	7.0	0.040	2.8
	412 keV	0.103	86.6	0.061	25.6	0.048	9.4	0.042	4.1
	482 keV	0.100	83.2	0.062	28.2	0.050	11.4	0.043	5.3
	890 keV	0.090	61.2	0.064	29.1	0.053	15.2	0.047	8.6
	1120 keV	0.086	51.4	0.064	26.3	0.054	14.6	0.048	8.6

Tabelle 9

Größe der in Kap. VII berechneten Randeffekte

Programm: D1, T 10×10, A-CsJ	Pb - Absorber							
	0		1		2		3 mm	
	ΔR	$\Delta\delta \times 10^6$					ΔR	$\Delta\delta \times 10^6$
E = 412 keV $\gamma = 90^\circ$ d = 3.3 mm	0.0071	5.8	0.0031	1.9	0.0018	0.7	0.0013	0.2
$\gamma = 90^\circ$ d = 2.2 mm	0.0047	3.8	0.0019	1.2	0.0010	0.4	0.0006	0.1
$\gamma = 53^\circ$ d = 3.3 mm	0.0030	6.8	0.0012	2.0	0.0007	0.7	0.0004	0.3
$\gamma = 53^\circ$ d = 2.2 mm	0.0020	4.5	0.0007	1.3	0.0004	0.4	0.0002	0.2

Die Variation von R und δ mit der Energie ist schwach. Lediglich die Energie 133 keV ist ein Ausnahmefall: ohne Bleiabsorber ist δ am kleinsten. Da die Energie der einfach gestreuten Strahlung noch oberhalb der K-Kante von Blei liegt, werden die einfach gestreuten Quanten durch die Bleibleche stärker absorbiert als die doppelt gestreuten und δ nimmt mit wachsender Bleidicke stark zu.

h) Berücksichtigung des Targetrandes

In den Ergebnissen a) bis g) wurden die in Kap. VII behandelten Korrekturen, die durch die seitliche Begrenzung des Targets entstehen, noch nicht berücksichtigt. Diese Korrekturen sind in Tabelle 9 aufgeführt. Wie zu erwarten war, liegen sie – abgesehen von den Fällen, in denen δ zufällig null ist – in der Größenordnung von 10%.

i) Endergebnisse für den Einfluß der Faraday-Rotation auf Doppelstreuung

In der besten durchgeführten Rechnung wurde die große Stützstellenanzahl für die x-y-Integration gewählt, und die in Kap. VII beschriebenen Randeffekte wurden berücksichtigt.

Programm: T 10 × 10, D1, A-CsJ, RK; Resultate in Tabelle 10.

Die Rechenzeit für die gesamte Tabelle betrug auf der IBM 370-165-Rechenanlage des Kernforschungszentrums Karlsruhe ca.

11 min. Das Programm liefert außer R und δ auch die Energiespektren dS_2/dE'' der zweifach gestreuten Photonen und die spektrale Verteilung $d\Delta S_2/dE''$ des Faraday-Effekts als Funktion der Dicke der Bleiabsorber. Es gelten die Relationen

$$R = \frac{\bar{I}_2 - \bar{I}_2'}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\bar{I}_1} \cdot \int w(E'') \cdot \frac{dS_2}{dE''} dE''$$

$$\delta = \frac{\overline{\Delta I}_2 - \overline{\Delta I}_2'}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\bar{I}_1} \cdot \int w(E'') \cdot \frac{d\Delta S_2}{dE''} dE''$$

Tabelle 10

Endergebnisse für die Doppelstreuung von 412 keV- und 482 keV-Strahlung

Programme: D1, T100, A-CsJ, RK	Pb - Absorber									
	0		1		2		3 mm			
	R	$\delta \times 10^6$								
E = 412 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.249	54.6	0.166	13.0	0.149	-0.9	0.151	-6.0
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.188	42.7	0.117	11.4	0.101	1.4	0.101	-2.1
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.137	116.3	0.086	36.9	0.070	14.7	0.062	+6.9
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.102	82.3	0.061	24.4	0.048	9.0	0.042	+3.9
E = 482 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.247	53.6	0.168	15.2	0.148	1.0	0.146	-4.7
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.186	41.6	0.119	12.9	0.101	2.6	0.098	-1.3
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.133	112.3	0.088	40.5	0.072	17.5	0.064	+8.8
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.098	78.9	0.062	26.8	0.050	10.9	0.043	+5.1

Als Beispiel sind für eine spezielle Geometrie ($\gamma=90^\circ$) $\frac{dS_2}{dE''}$ und $\frac{d\Delta S_2}{dE''}$ in Abb. 14 und 15 aufgetragen. Die zwei Nullstellen von $d\Delta S_2/dE''$ besitzen eine anschauliche Erklärung. Die negativen Werte von $d\Delta S_2/dE''$ bei sehr kleinen Photonenenergien entstehen durch Quanten, die zweimal nach rückwärts gestreut werden. Auch zweimalige Vorwärtsstreuung führt zu einem negativen Faraday-Effekt, während bei Vorwärts-Rückwärts- oder Rückwärts-Vorwärts-Streuung der Effekt im allgemeinen positiv ist. Die zuletzt genannten zwei Streuprozesse sind am häufigsten, da die Möglichkeit besteht, daß die Quanten nach der ersten Streuung parallel zur Targetebene laufen. Sie führen zu dem relativ scharfen Maximum im Energiespektrum dS_2/dE'' . Die horizontalen Balken in den Abbildungen geben das Intervall an, in dem die Energien der einfach gestreuten Quanten liegen.

2) Dreifachstreuung

Programm: T5, D1, A-CsJ; Resultate in Tabelle 11 ($z_\ell = 8$, $z_m = 32$). Für eine Zeile der Tabelle benötigte die IBM 370-165 eine Rechenzeit von 9.5 min. Die in Tabelle 11 eingetragenen Größen R und δ sind definiert als

$$R = \frac{\bar{I}_3}{\bar{I}_1} \quad \delta = \frac{\overline{\Delta I}_3 + \overline{\Delta I}_3'}{\bar{I}_1} .$$

Obwohl die Dreifachstreuung nur Beiträge bis zu 5% zur registrierten Intensität liefert, kann ihr Anteil an der gesamten Intensitätsasymmetrie bis zu 30% betragen, was nicht vernachlässigt werden kann. Neben R und δ werden von der Rechenmaschine auch die Spektren der Intensität dS_3/dE''' und der Intensitätsasymmetrie $d\Delta S_3/dE'''$ ausgedruckt. In Analogie zur Doppelstreuung gilt:

$$R = \frac{\bar{I}_3}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\bar{I}_1} \cdot \int w(E''') \cdot \frac{dS_3}{dE'''} dE'''$$

$$\delta = \frac{\overline{\Delta I}_3 + \overline{\Delta I}_3'}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\bar{I}_1} \cdot \int w(E''') \cdot \frac{d\Delta S_3}{dE'''} \cdot dE'''$$

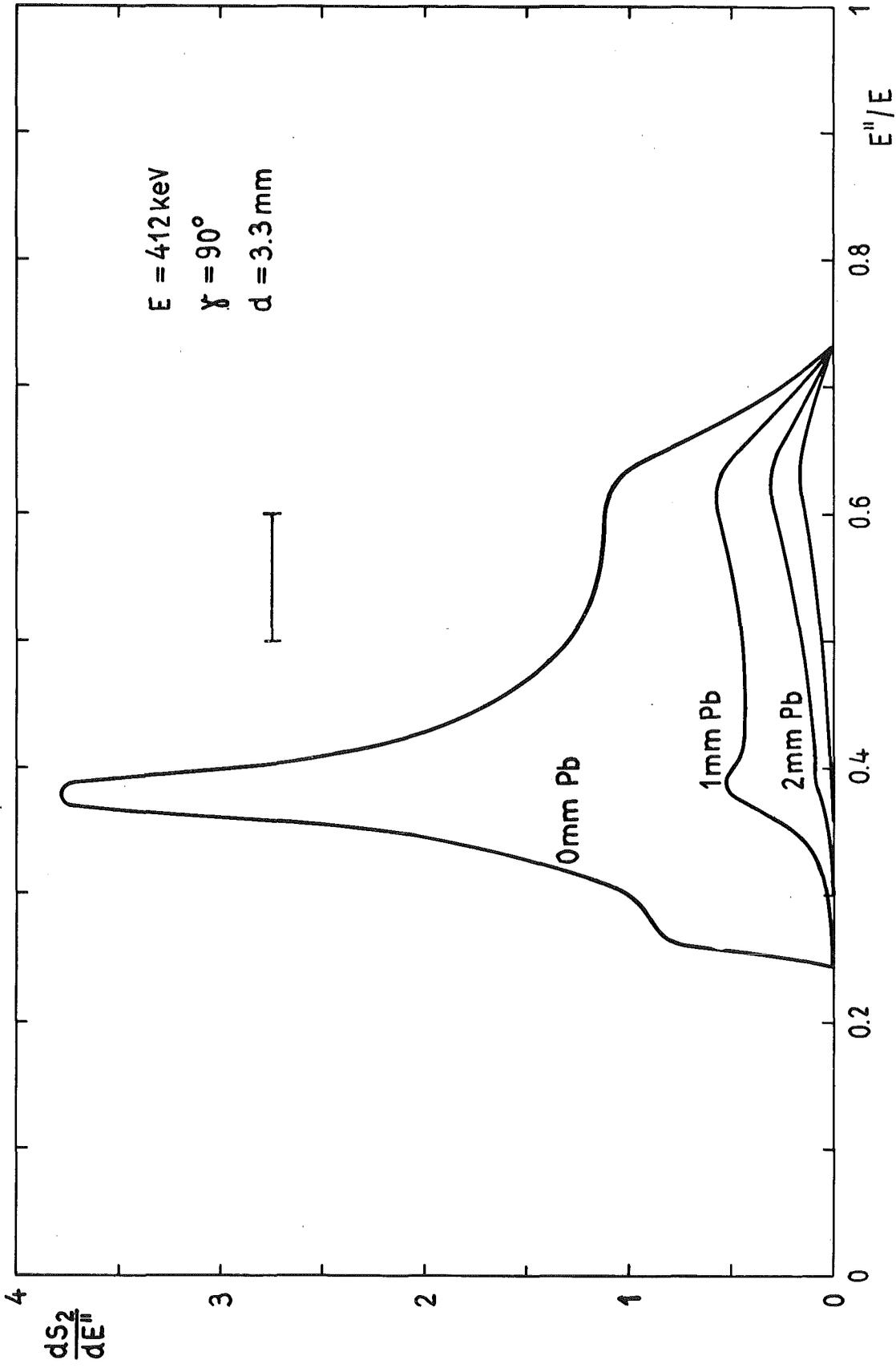


Fig. 14

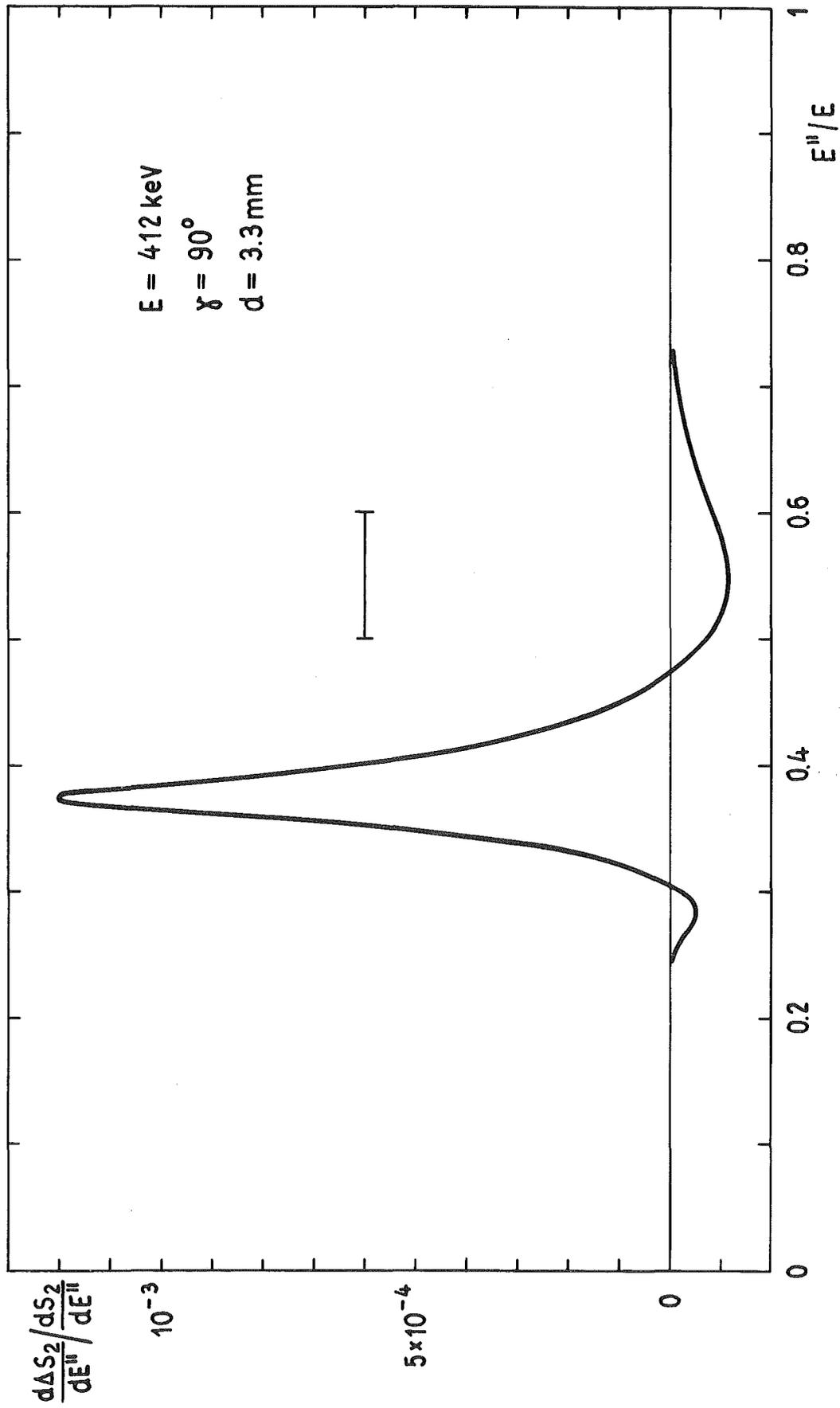


Fig. 15

Tabelle 11

Ergebnisse für Dreifachstreuung von 412 keV und 482 keV-Strahlung

			Pb - Absorber							
			0		1		2		3 mm	
E = 412 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.057	7.5	0.019	3.8	0.011	1.6	0.009	0.6
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.034	2.8	0.010	1.7	0.006	0.8	0.004	0.3
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.024	37.9	0.007	8.8	0.004	2.9	0.003	1.2
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.014	20.5	0.004	4.5	0.002	1.4	0.001	0.5
E = 482 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.056	6.8	0.020	4.0	0.012	1.9	0.009	0.9
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.034	2.3	0.011	1.7	0.006	0.9	0.004	0.4
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.023	36.8	0.008	10.0	0.004	3.7	0.003	1.6
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.014	19.7	0.004	5.1	0.002	1.8	0.001	0.7

Für den Spezialfall $\gamma = 90^\circ$, $d = 0.33$ cm sind dS_3/dE'' und $d\Delta S_3/dE''$ in den Abbildungen 16 und 17 dargestellt. Die horizontalen Balken geben wieder das Intervall an, in dem die Energien der einfach gestreuten Photonen liegen. Die kleinen Intensitätsmaxima bei $E''/E \approx 0.2$ in den Spektren kommen dadurch zustande, daß die minimal mögliche Energie nach Dreifachstreuung unterhalb der K-Kante von Blei liegt. Die maximal mögliche Energie der Quanten nach Mehrfachstreuung ist immer größer als die Energie nach Einfachstreuung, sie wächst außerdem mit der Zahl der Streuprozesse an. Überraschend ist, daß die spektrale Verteilung der Faraday-Rotation starke Strukturen aufweist.

3) Untergrund durch Streuung außerhalb des Targets

a) Streuung Kollimator→Target

Die Ergebnisse $R = \bar{I}_K/\bar{I}_1$ und $\delta = \overline{\Delta I}_K/\bar{I}_1$ der Rechnungen sind in Tabelle 12 zusammengefaßt. Da bei der Streuung am Bleikonus Photonen aller möglichen Polarisationsrichtungen entstehen und ein 'streifendes' Auftreffen dieser Strahlung auf das Target nicht möglich ist, ist der Faraday-Effekt im Mittel ziemlich klein.

b) Streuung Target→Magnetjoch

Bei der Rechnung wurde angenommen, daß der Zähler nicht durch einen Kollimator gegenüber dem Magnetjoch abgeschirmt ist. Wie die Ergebnisse $R = \bar{I}_J/\bar{I}_1$ und $\delta = \overline{\Delta I}_J/\bar{I}_1$ in Tabelle 13 zeigen, erhält man dann unter den geometrischen Bedingungen, die in Kap. IX angenommen wurden, merkliche Beiträge der Doppelstreuung Target-Joch zur Asymmetrie δ (bis zu 10%). Die Größe des Effekts rührt davon her, daß die Strahlung nach der Streuung im Target die Blechoberfläche unter kleinem Winkel verläßt und die Wegstrecke im Streuer daher relativ groß ist.

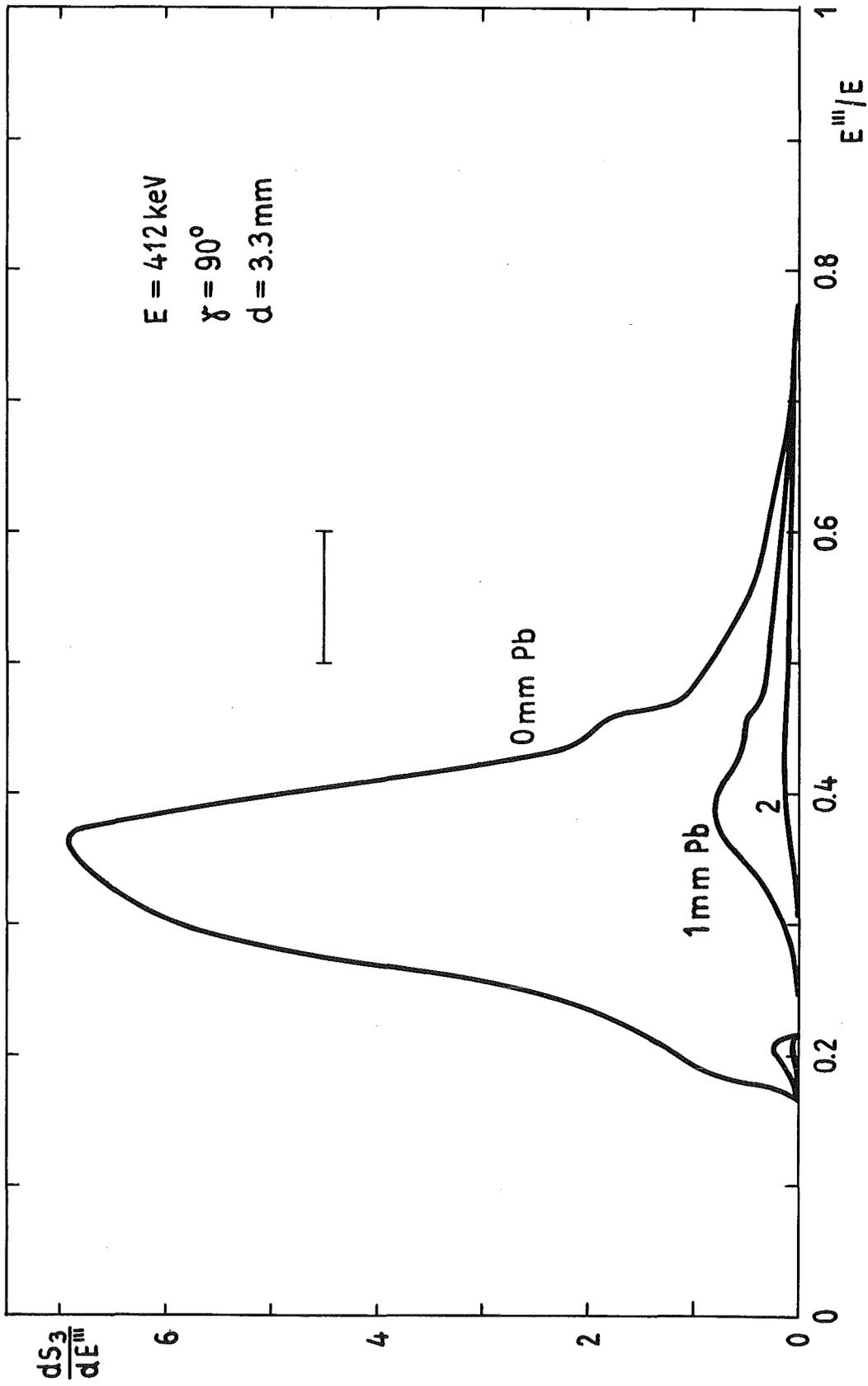


Fig. 16

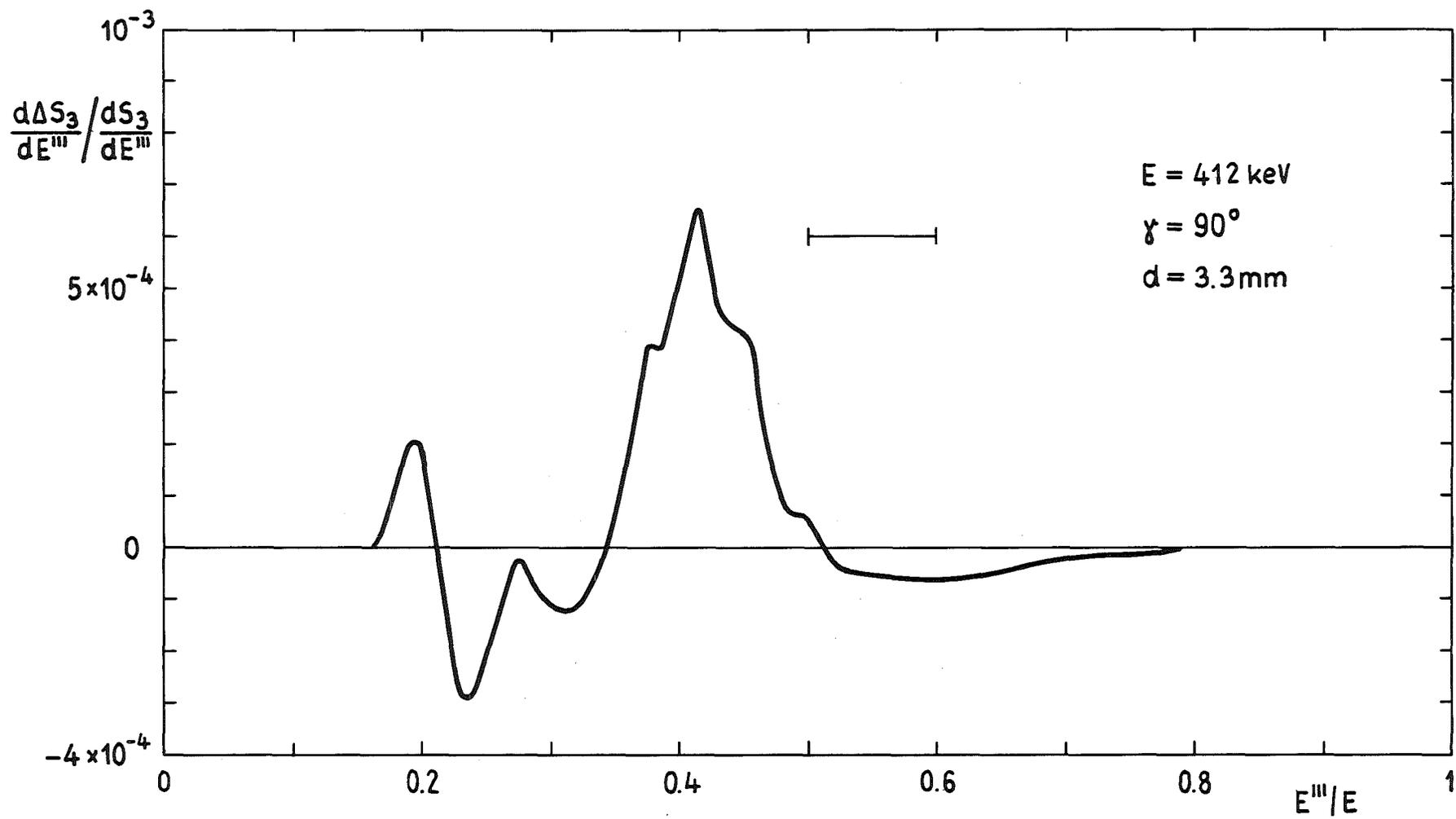


Fig. 17

Tabelle 12

Streuung am Bleikonus und am Target

			Pb - Absorber							
			0		1		2		3 mm	
			R	$\delta \times 10^6$						
E = 412 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.037	0.08	0.032	-0.21	0.028	-0.36	0.026	-0.45
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.037	0.10	0.032	-0.10	0.028	-0.22	0.026	-0.28
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.036	1.0	0.032	0.7	0.029	0.5	0.027	0.4
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.036	0.7	0.032	0.5	0.029	0.4	0.027	0.3
E = 482 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.046	0.07	0.041	-0.24	0.037	-0.42	0.033	-0.53
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.047	0.10	0.041	-0.12	0.037	-0.25	0.033	-0.33
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.045	1.2	0.041	0.9	0.038	0.7	0.035	0.5
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.045	0.9	0.041	0.7	0.038	0.5	0.035	0.4

Tabelle 13

Streuung am Target und am Magnetjoch

			Pb - Absorber							
			0		1		2		3 mm	
E = 412 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.007	-0.6	0.002	-0.9	0.001	-0.7	0.001	-0.5
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.007	+0.0	0.002	-0.6	0.001	-0.5	0.001	-0.3
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.004	10.3	0.001	2.9	0.001	1.1	0.000	0.4
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.004	8.8	0.001	2.4	0.001	0.8	0.000	0.3
E = 482 keV	$\gamma = 90^\circ$	d = 3.3 mm	0.007	-0.6	0.003	-1.0	0.001	-0.8	0.001	-0.5
	$\gamma = 90^\circ$	d = 2.2 mm	0.008	+0.1	0.003	-0.6	0.001	-0.5	0.001	-0.4
	$\gamma = 53^\circ$	d = 3.3 mm	0.004	10.2	0.001	3.4	0.001	1.3	0.000	0.6
	$\gamma = 53^\circ$	d = 2.2 mm	0.004	8.7	0.002	2.7	0.001	1.0	0.000	0.5

Tabelle 14

Gesamtergebnisse für Gammastrahlungen der Energie 412 keV und 482 keV

E	γ	d	0		1		2		3 mm Pb	
			R	δ×10 ⁶						
412 keV	90° *)	3.3 mm	0.343	+46.4	0.217	13.6	0.188	0.3	0.186	- 4.9
	90° *)	2.2 mm	0.260	36.2	0.160	11.3	0.135	1.7	0.131	- 1.8
	53°**)	3.3 mm	0.200	137.9	0.127	43.8	0.104	17.3	0.092	+ 8.1
	53°**)	2.2 mm	0.156	97.1	0.098	29.0	0.080	10.7	0.071	+ 4.7
482 keV	90° *)	3.3 mm	0.349	44.9	0.229	15.4	0.196	2.1	0.189	- 3.7
	90° *)	2.2 mm	0.266	34.8	0.171	12.4	0.144	2.8	0.136	- 1.1
	53°**)	3.3 mm	0.204	133.3	0.138	48.1	0.115	20.9	0.102	+10.4
	53°**)	2.2 mm	0.161	93.1	0.109	31.8	0.090	13.0	0.081	+ 6.2

*) ohne Streuung Target-Joch

***) mit Streuung Target-Joch

XIII. Schlußbemerkungen

Durch Addition der Beiträge der Zweifach- und Dreifachstreuung sowie der Untergrundanteile $\bar{I}_u = \bar{I}_k (+ \bar{I}_j)$ und $\Delta\bar{I}_u = \Delta\bar{I}_k (+ \Delta\bar{I}_j)$ der gestreuten Strahlung erhält man die in Tabelle 14 aufgeführten Endergebnisse. Die Normierung von δ unterscheidet sich von der im vorigen Kapitel benutzten Konvention:

$$R = \frac{\bar{I}_2 - \bar{I}'_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_u}{\bar{I}_1}$$

$$\delta = \frac{\Delta\bar{I}_2 - \Delta\bar{I}'_2 + \Delta\bar{I}_3 + \Delta\bar{I}'_3 + \Delta\bar{I}_u}{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}'_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_u}$$

Die wesentlichen Resultate dieser Arbeit lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Es ist möglich, experimentelle Anordnungen für die Untersuchung der Links-Rechts-Asymmetrie zu finden, bei denen Targets von mehr als einem mm Dicke verwendet werden und der Einfluß des Faraday-Effektes trotzdem in Grenzen gehalten wird. Man muß jedoch mit Störungen durch Doppel- und Dreifachstreuung rechnen, die von gleicher Größenordnung wie die Links-Rechts-Asymmetrie sind.
2. Es ist möglich, die erforderlichen Korrekturen mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Der experimentelle Parameter, der am empfindlichsten in die Störasymmetrien eingeht, ist der Streuwinkel. Er sollte experimentell auf besser als 0.5° bekannt sein. Die Ergebnisse hängen etwas von der Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors ab. Hieraus resultieren keine wesentlichen Unsicherheiten, wenn der im Experimentent verwendete Detektor zuvor geeicht wird. Durch die Form der Kollimierung des Gammastrahls

entstehen nur geringe Unsicherheiten, die sich völlig beseitigen lassen, wenn die Dosisverteilung auf der Targetoberfläche vermessen wird.

Die hier beschriebenen Rechnungen besitzen noch einige Begrenzungen:

1. Vierfachstreuung wurde nicht berücksichtigt und der Einfluß der Targetberandung auf die Dreifachstreuung (Korrekturen analog zu Kap. VII) wurde nicht behandelt. Es ist zu erwarten, daß sich beide Effekte wenigstens teilweise kompensieren. Auch Untergrund-Streuprozesse höherer Ordnung wie Streuung am Konus mit nachfolgender Doppelstreuung im Target wurden vernachlässigt. Ihr Einfluß sollte nur wenige % betragen.
2. Die Klein-Nishina-Formel gilt nicht bei beliebig kleinen Streuwinkeln, vielmehr hat man zwischen elastischer und inelastischer Streuung zu unterscheiden. Korrekturen würden jedoch nur für solche Gammaquanten entstehen, die sich nach der ersten Streuung fast senkrecht zum Magnetfeld bewegen. Daher ist der Einfluß der elastischen Streuung bzw. der inkohärenten Streufunktion auf die Ergebnisse wahrscheinlich klein.
3. Build-up-Effekte in den Bleiabsorbern vor dem Zähler wurden nicht berücksichtigt. Sie würden dazu führen, daß
 - a) die Transmission als Funktion der Energie abgeändert wird und
 - b) die Winkelverteilung der gestreuten Photonen etwas 'verschmiert' wird.Das Auftreten dieser Fehler hängt sicher in starkem Maße vom experimentellen Aufbau ab. Um sie zu vermeiden, ist es zweckmäßig, zwischen Detektor und Target einen Kollimator anzubringen und die Bleiabsorber vor dem Kollimator aufzustellen.
4. Die Ansprechwahrscheinlichkeit $w(E)$ wurde als unabhängig von R' und der Einfallsrichtung der Photonen angenommen, was in Wirklichkeit nicht exakt zutrifft. Da in $w(E)$ auch

die Licht-Sammeleigenschaften des Szintillationszählers eingehen, kann dieses Problem nur in Verbindung mit Messungen gelöst werden.

5. Unsicherheiten der Größenordnung 1% können auch dadurch entstehen, daß zur Verkürzung der Rechenzeit eine näherungsweise analytische Integration über die Targetdicke vorgenommen wurde. Monte Carlo-Rechnungen, die diese Approximation nicht enthielten, konvergierten relativ langsam [8].

Für die Messungen ist es eine große Hilfe, daß die berechneten Störeffekte von der Targetdicke und der Dicke der Bleiabsorber abhängen. Dies macht eine experimentelle Prüfung der durchgeführten Rechnungen möglich.

Mein Dank gilt den Herren Dr. B. Jenschke, J. Semmrich und P. Luksch, die durch mannigfache Diskussionen und die Durchführung einiger numerischer Rechnungen zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben.

Literaturverzeichnis

- 1) S.C. Miller und R.M. Wilcox, Phys. Rev. 124 (1961) 637
- 2) G.V. Frolov, JETP (Sov. Phys.) 12 (1961) 1277
- 3) P. Christillin und E. Remiddi, Nuovo Cim. Lett. 4 (1970) 525
- 4) M.G. Ryskin und G.V. Frolov, Yad. Fiz. 13 (1971) 1270
G.V. Frolov, Yad. Fiz. 17 (1973) 355
- 5) P. Bock, Nucl. Phys. A177 (1971) 289
- 6) W.Y. Tsai, L.L. de Raad und K.A. Milton, Phys. Rev.
D6 (1972) 1411 und 1428
- 7) P. Bock, 'Eine experimentelle obere Grenze für Zeitum-
kehrverletzung in der Quantenelektrodynamik'
Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe, 1972
- 8) J. Semmrich, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1973
- 9) V.M. Lobashov, L.A. Popeko, L.M. Smotritski, A.P. Serebrov
und E.A. Kolomenski, JETP Lett. 14 (1971) 251
- 10) P. Bock und P. Luksch, Nuovo Cim. Lett. 2 (1971) 1081
- 11) P. Bock und P. Luksch, Z. f. Physik 263 (1973) 147
- 12) V.G. Baryshevski und V.L. Lyuboshits, Yad. Fiz. 2 (1965) 666
- 13) V.G. Baryshevski, O.V. Dumbrais und V.L. Lyuboshits,
JETP Lett. 15 (1972) 78
- 14) W.H. Mc Master, Revs. Mod. Phys. 33 (1961) 8

- 15) M. Irfan und R.D.G. Prasad, Nucl. Instr. 88 (1970) 165
- 16) J. Menefee, Y. Cho und C. Swinehart, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-14, no. 1 (1967) 464
- 17) S.H. Vegors, L.L. Marsden und R.L. Heath, IDO-16370 (1958)

Anhang A - Hauptprogramm zur Berechnung der Dreifachstreuung

Zuordnung einiger in dieser Arbeit verwendeter Bezeichnungen zu den im Programm benutzten Symbolen

Eingabedaten		Vektoren		Wirkungsquerschnitte		Summations-Indizes und Gewichtungsfaktoren	
Target-Breite	XT	\vec{Q}_0	Q0 (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	SIG1 (1)	l	L
Y_0	YT	\vec{Q}_1	Q1 (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}^p$	SIG1 (2)	m	M
Y_1	YT2	\vec{Q}_2	Q2 (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}^i$	SIG2 (1)	l_2	L_2
Y_2	YT3	\vec{Q}_3	Q3 (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{p,i}$	SIG2 (2)	m_2	M_2
R_q	RQ	\vec{S}	S (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}''$	SIG3 (1)	g(1)	G(L)
R_d	RD	\vec{Q}	SQ (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{p''}$	SIG3 (2)	$g_2(l_2)$	G2(L2)
ψ	PSI	\vec{D}	SD (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{pp,i}$	PLS (1)	j	J
d	D	\vec{P}_1	PØL1 (3)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{ss,i}$	PLS (2)	Gew.-Fakt. für	GR(J,K)
E	E	\vec{P}_2	PØL2 (3)			Target-Ober- Fläche	K=1: Kollimator
γ	GAMMA	\vec{P}_3	PØL3 (3)				K=2: Rechteck
Z_1	ZL = LM						K=3: Ellipse
Z_m	ZM = 2·MM						

Winkelfunktionen		Einige Hilfsgrößen		Ergebnisse	
$\sin\theta_1$	SIT=SITA (L)	R^2	DØM	$\frac{dS_3}{dE^{HT}}$	SPEKD (K)
$\cos\theta_1$	CØT=CØTA (L)	R^{n^2}	PYT	$\frac{d\Delta S_3}{dE^{HT}}$	SPEKF (K)
$\sin\theta_2$	SIT2=SITA (L2)	$n \cdot r_o^2 / 2$	CØNST		$K = E3 / E \times 100$
$\cos\theta_2$	CØT2=CØTA (L2)	E'	E1	R	(SUM(N))
$\cos\phi$	(CØN1)	E''	E2	δ	(SUMF(N)) ^{*)}
$\cos\phi'$	(CØN2) ^{*)}	E'''	E3		N-1=Dicke der Pb-Absorber in mm
$\sin\phi_1$	SIPHI (M)	$ \cos\xi' ^{-1}$	VA1		
$\cos\phi_1$	CØPHI (M)	$ \cos\xi'' ^{-1}$	VA2		
$\sin\phi_2$	SIPHI (M2)	Sinus-Quadrate der Streuwinkel	CØ1 CØ2 CØ3		
$\cos\phi_2$	CØPHI (M2)	m_o	H1		
$\cos 2\phi$	C12	m_1	H3		
$\cos 2\phi'$	C22	m_2	H5		
$\sin\phi$	S11	m_3	H7		
$\sin\phi'$	S21	$(m_o \pm m_1)^{-1}$	HO1		
		$(m_o \pm m_2)^{-1}$	HO2		
		$(m_o - m_3)^{-1}$	HO3		
		$(m_1 \pm m_2)^{-1}$	H12		
		$(m_1 \pm m_3)^{-1}$	H13		
		$(m_2 \pm m_3)^{-1}$	H23		
		$W_d \cdot \cos\xi' \cdot \cos\xi'' $	WD		
		$W_{g1} \cdot \cos^2\xi' \cdot \cos\xi'' $	WEG1		
		$W_{g2} \cdot \cos\xi' \cdot \cos^2\xi'' $	WEG2		

*) Eingeklammerte Symbole kommen im Programm in mehrfacher Bedeutung vor.

```

C      HAUPTPROGRAMM FARADAY-EFFEKT BEI DREIFACHSTREUUNG
0001      DIMENSION SQ(3),TAR(3,5),SD(3),QO(3),Q1(3),Q2(3),Q3(3),S(3),VN(3),      06666
      1SIG(2),SIG1(2),SIG2(2),SIG3(2),PLS(2),POL1(3),POL2(3),POL3(3)      06666
0002      DIMENSION G(32),WAHR(4),SUM(4),SUMF(4),AB(5,4),ABD(5,4),ABF(5,4)
0003      DIMENSION G2(64),SITA(32),COTA(32),SIPHI(64),CGPHI(64),DREH(3)
0004      DIMENSION SPEK(100),SPEKD(100),SPEKF(100),SUMSP(100),SUFSP(100),
      LGR(5,3),ANSP(100,2)
0005      DOUBLE PRECISICN H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,WD1,WD2,WD3,WD4,WD5,H01,
      1H02,H03,H12,H13,H23,EFUN1,EFUN2,EFUN3,EFUN4,WD,WEG1,WEG2
0006      COMMON COM
0007      PI2=2.*3.14159
0008      CONST=(2.82E-13)**2*7.87/(55.85)*(6.03E+23)*13.
0009      READ(5,1002)XT,YT,YT2,YT3
0010      1002 FORMAT(4F6.2)
0011      FLAE=40.*YT+10.*(YT2+YT3)
0012      GR(1,1)=(32.*YT-6.*(YT2+YT3))/FLAE
0013      GR(2,1)=(4.*YT+8.*YT2-2.*YT3)/FLAE
0014      GR(3,1)=(4.*YT-2.*YT2+8.*YT3)/FLAE
0015      GR(4,1)=5.*(YT2+YT3)/FLAE
0016      GR(5,1)=GR(4,1)
0017      GR(1,2)=1./3.
0018      GR(1,3)=0.5
0019      DO 51 K=2,5
0020      GR(K,2)=1./6.
0021      51 GR(K,3)=1./8.
0022      31 READ(5,1000) RQ,PSI,E,D
0023      1000 FORMAT(F5.1,F4.0,F6.1,F6.3)
0024      IF(RQ)40,4C,30
0025      30 READ(5,1001) GAMMA,RD,ZL,ZM
0026      1001 FORMAT(F4.0,F5.1,2F4.0)
0027      WRITE(6,1020)D,PSI,E,GAMMA,ZL,ZM
0028      1020 FORMAT(/7H TARGET,F6.3,5X,F4.0,5X,9HSTRAHLUNG,F7.1,5X,F7.1,5X,7HGI
      1TTER ,2F6.C/)
0029      PSI=PSI/360.*PI2
0030      GAMMA=GAMMA/360.*PI2
0031      E=E/511.
0032      DE=E/100.
0033      MM=ZM/2.
0034      LM=ZL
0035      LM2=2.*ZL
0036      SQ(1)=-RQ*COS(PSI)
0037      SQ(2)=0.
0038      SQ(3)=+RQ*SIN(PSI)
0039      VN(1)=COS(GAMMA+PSI)
0040      VN(2)=0.
0041      VN(3)=-SIN(GAMMA+PSI)
0042      SD(1)=RD*VN(1)
0043      SD(2)=0.
0044      SD(3)=RD*VN(3)
0045      DO 1 L=2,LM2,2
0046      G(L)=2./3.
0047      G2(L)=G(L)
0048      G(L-1)=4./3.
0049      1 G2(L-1)=G(L-1)
0050      G(LM)=1./3.
0051      LM2=LM2-1
0052      DO 2 I=1,3
0053      DO 2 J=1,5

```

```
0054      2 TAR(I,J)=0.
0055      TAR(1,2)=XT/2.
0056      TAR(1,3)=-XT/2.
0057      TAR(2,4)=+YT/2.
0058      TAR(2,5)=-YT/2.
0059      DO 3 J=1,5
0060      DO 3 N=1,4
0061      ABD(J,N)=0.
0062      3 ABF(J,N)=0.
0063      DT=PI2/ZL/4.
0064      DPHI=PI2/ZL
0065      T=0.
0066      DO 4 L=1,LP2
0067      T=T+DT
0068      SITA(L)=SINT
0069      4 COTA(L)=CCS(T)
0070      PHI=-DPHI/2.
0071      DO 44 M=1,MM
0072      PHI=PHI+DPHI
0073      SIPHI(M)=SIN(PHI)
0074      44 COPHI(M)=CCS(PHI)
0075      DO 52 K=1,100
0076      SPEK(K)=0.
0077      SPEKD(K)=0.
0078      SPEKF(K)=0.
0079      DO 52 N=1,2
0080      52 ANSP(K,N)=C.
0081      S(3)=-D/2.
0082      DO 100 J=1,5
0083      S(1)=TAR(1,J)
0084      S(2)=TAR(2,J)
0085      DO 53 K=1,100
0086      SUMSP(K)=0.
0087      53 SUFSP(K)=0.
0088      CALL RICHT(SQ,S,Q0,DCM)
0089      CALL RICHT(S,SD,Q3,PYT)
0090      CALL SKAL(VN,Q3,COM)
0091      CALL SKAL(CO,Q3,WINK)
0092      CALL STREUE(E,E3,WINK,SIG,CU1)
0093      K=E3/DE
0094      H1=-FMUE(E)/Q0(3)
0095      H3=-FMUE(E3)/Q3(3)
0096      DIF=(H1-H3)/H1
0097      IF(ABS(DIF)-0.0001)5,5,6
0098      5 H3=H3*1.001
0099      6 H2=-H1*D
0100      EFUN1=DEXP(H2)
0101      H4=-H3*D
0102      WE=(DEXP(H4)-DEXP(H2))/(H1-H3)*SIG(1)
0103      SPEK(K)=SPEK(K)+WE/DCM/PYT*GR(J,1)
0104      CALL DET(E3,WAHR)
0105      DO 7 N=1,4
0106      7 AB(J,N)=WE*WAHR(N)/DCM/PYT
0107      DO 90 L=1,LM
0108      SIT=SITA(L)
0109      COT=COTA(L)
0110      STA=SIT*G(L)
0111      DO 8 N=1,4
```

```
0112      SUM(N)=0.
0113      8 SUMF(N)=0.
0114      DO 89 M=1,MM
0115      Q1(1)=SIT*COPHI(M)
0116      Q1(2)=COT
0117      Q1(3)=-SIT*SIPHI(M)
0118      13 CALL SKAL(CO,Q1,WINK1)
0119      CALL STREU(E,E1,WINK1,SIG1,CO1)
0120      CALL VEPRO(QO,Q1,PCL1)
0121      H3=-FMUE(E1)/Q1(3)
0122      IF(H3)16,16,17
0123      16 H3=-H3
0124      VA1=1./Q1(3)
0125      GO TO 18
0126      17 VA1=1./(-Q1(3))
0127      18 DIF=(H1-H3)/H1
0128      IF(ABS(DIF)-0.001)9,9,10
0129      9 H3=H3*1.002
0130      10 H4=-H3*D
0131      EFUN2=DEXP(H4)
C      BEGINN DER INNEREN SCHLEIFE
0132      DO 80 L2=1,LM2
0133      SIT2=SITA(L2)
0134      COT2=COTA(L2)
0135      STG=STA*SIT2*G2(L2)
0136      ST1=STG*COT
0137      ST2=STG*COT2
0138      DO 79 M2=1,MM
0139      Q2(1)=SIT2*COPHI(M2)
0140      Q2(2)=COT2
0141      Q2(3)=-SIT2*SIPHI(M2)
0142      20 CALL SKAL(C1,Q2,WINK2)
0143      CALL STREU(E1,E2,WINK2,SIG2,CO2)
0144      CALL SKAL(Q2,Q3,WINK3)
0145      CALL STREU(E2,E3,WINK3,SIG3,CO3)
0146      K=E3/DE
0147      CALL VEPRO(Q1,Q2,PCL2)
0148      CALL VEPRO(Q2,Q3,PCL3)
0149      CALL SKAL(FOL1,POL2,CON1)
0150      CALL SKAL(POL2,POL3,CON2)
0151      EPO=(E2/E1)**2
0152      PLS(1)=EPO*(2.-CO2)
0153      PLS(2)=2.*EPO*WINK2
0154      26 CALL VEPRO(POL1,POL2,DREH)
0155      CALL SKAL(Q1,DREH,VA)
0156      C=CO1*CO2
0157      IF(C)22,22,21
0158      22 CON1=1.
0159      S11=0.
0160      GO TO 23
0161      21 C=SQRT(C)
0162      CON1=CON1/C
0163      S11=VA/C
0164      23 C=CO2*CO3
0165      IF(C)25,25,24
0166      25 CON2=1.
0167      S21=0.
0168      GO TO 34
```

```
0169          24 C=SQRT(C)
0170          29 CALL VEPRO(POL2,PCL3,DREH)
0171          CALL SKAL(Q2,DREH,VA)
0172          CON2=CON2/C
0173          S21=VA/C
0174          34 H5=-FMUE(E2)/Q2(3)
0175          H7=-FMUE(E3)/Q3(3)
0176          IF(H5)47,35,35
0177          47 H5=-H5
0178          VA2=1./Q2(3)
0179          GO TO 39
0180          35 VA2=1./(-Q2(3))
0181          39 DIF=(H5-H3)/H3
0182          IF(ABS(DIF)-0.001)37,36,36
0183          36 DIF=(H5-H1)/H1
0184          IF(ABS(DIF)-0.001)37,38,38
0185          37 H5=H5*1.002
0186          GO TO 39
0187          38 DIF=(H7-H1)/H1
0188          IF(ABS(DIF)-0.001)41,42,42
0189          42 DIF=(H7-H3)/H3
0190          IF(ABS(DIF)-0.001)41,43,43
0191          43 DIF=(H7-H5)/H5
0192          IF(ABS(DIF)-0.001)41,45,45
0193          41 H7=H7*0.998
0194          GO TO 38
0195          45 H6=-H5*D
0196          H8=-H7*D
0197          FI=VA1*VA2
0198          IF(Q2(3))48,48,60
0199          48 IF(Q1(3))46,46,50
C          VORWAERTS-VORWAERTS
0200          46 EFUN3=DEXP(H6)
0201          EFUN4=DEXP(H8)
0202          H01=1./(H1-H3)
0203          H02=1./(H1-H5)
0204          H03=1./(H1-H7)
0205          H12=1./(H3-H5)
0206          H13=1./(H3-H7)
0207          H23=1./(H5-H7)
0208          WD1=EFUN1*H01*H02*H03
0209          WD2=EFUN2*H01*H12*H13
0210          WD3=EFUN3*H23*H12*H02
0211          WD4=EFUN4*H03*H13*H23
0212          WD=-WD1+WD2-WD3+WD4
0213          WEG1=WD1*HC1-WD3*H12+WD4*H13+WD2*(-D-H01+H12+H13)
0214          WEG2=WD1*HC2-WD2*H12+WD4*H23+WD3*(-D-H23+H12+H02)
0215          GO TO 70
C          RUECKWAERTS-VORWAERTS
0216          50 EFUN3=DEXP(H6)
0217          EFUN4=DEXP(H8)
0218          H01=1./(H1+H3)
0219          H02=1./(H1+H5)
0220          H03=1./(H1+H7)
0221          H12=1./(H3+H5)
0222          H13=1./(H3+H7)
0223          H23=1./(H5+H7)
0224          WD1=EFUN1*H02*H13
```

```

0225      WD2=EFUN3*F01*H02*H23
0226      WD3=EFUN4*F01*F23*F03
0227      WD4=EFUN1*EFUN2*EFUN4*H23*H13*H01
0228      WD5=EFUN1*EFUN2*EFUN3*H23*H12*H01
0229      WD=WD1*(H03-H12)-WC2+WD3+WD4-W05
0230      WEG1=WD1*(F03*H13-H12*H12-H12*H13)-WD2*H01+WD3*H01+WD4*(D+H13+H01)
          1-W05*(D+H12+H01)
0231      WEG2=WD1*(-H02*H03-H12*H12+H12*H02)+WD3*H23+WD2*(-D+H02-H23)+WD4*H
          123+WD5*(-D-H23-H12)
0232      GO TO 70
0233      60 IF(Q1(3))61,61,65
          C   VORWAERTS-RUECKWAERTS
0234      61 EFUN3=DEXP(H6)
0235      EFUN4=DEXP(H8)
0236      H01=1./(H1-H3)
0237      H02=1./(H1+H5)
0238      H03=1./(H1-H7)
0239      H12=1./(H3+H5)
0240      H13=1./(H3-H7)
0241      H23=1./(H5+H7)
0242      WD1=EFUN1*F23*H03*H01
0243      WD2=EFUN2*F01*H13*H23
0244      WD3=EFUN4*H02*H13
0245      WD4=EFUN2*EFUN3*EFUN4*H23*H12*H01
0246      WD5=EFUN1*EFUN3*EFUN4*H23*H02*H01
0247      WD=WD1-WD2+WD3*(H03+H12)+WD4-WD5
0248      WEG1=-WD1*F01+WD2*(-D+H01-H13)+WD3*(H13*H03+H12*H12+H12*H13)+WD4*(
          1D+H12-H01)+WD5*H01
0249      WEG2=WD1*F23-WD2*H23+WD3*(H02*H03+H12*H12+H12*H02)+WD4*(D+H23+H12)
          1+WD5*(-D-H23-H02)
0250      GO TO 70
          C   RUECKWAERTS-RUECKWAERTS
0251      65 EFUN3=DEXP(H6)
0252      EFUN4=DEXP(H8)
0253      H01=1./(H1+H3)
0254      H02=1./(H1+H5)
0255      H03=1./(H1-H7)
0256      H12=1./(H3+H5)
0257      H13=1./(H3+H7)
0258      H23=1./(H5+H7)
0259      WD1=EFUN1*F03*H13*H23
0260      WD2=EFUN4*F03*H01*H02
0261      WD3=EFUN1*EFUN2*EFUN4*H12*H01*H13
0262      WD4=EFUN1*EFUN3*EFUN4*H12*H02*H23
0263      WD=-WD1+WD2-WD3+WD4
0264      WEG1=-WD1*F13+WD2*H01+WD3*(-D-H12-H01-H13)+WD4*H12
0265      WEG2=-WD1*F23+WD2*H02+WD3*H12+WD4*(D-H12+H02+H23)
0266      70 CALL DET(E3,WAHR)
0267      C12=2.*CON1*CON1-1.
0268      C22=2.*CON2*CON2-1.
0269      WDM=WD
0270      WI1=(SIG1(1)*SIG2(1)*SIG3(1)+SIG1(2)*SIG2(2)*SIG3(1)*C12+SIG1(1)*S
          1IG2(2)*SIG3(2)*C22+SIG1(2)*SIG3(2)*(PLS(1)*C12*C22-4.*PLS(2)*S11*S
          221*CON1*CGN2))*WDM*FI*STG
          WDM=WEG1
0271      WI2=(SIG1(2)*SIG2(2)*SIG3(1)+SIG1(2)*PLS(1)*SIG3(2)*C22)*S11*CON1
0272      1+SIG1(2)*PLS(2)*SIG3(2)*C12*S21*CON2)*FAR(E1)*WDM*FI*VA1*ST1
0273      WDM=WEG2

```

```

0274      WI3=((SIG1(1)*SIG2(2)*SIG3(2)+SIG1(2)*PLS(1)*SIG3(2)*C12)*S21*CON2
          1+SIG1(2)*PLS(2)*SIG3(2)*C22*S11*CON1)*FAR(E2)*WDM*FI*VA2*ST2
0275      SUMSP(K)=SLMSP(K)+WI1
0276      SUFSP(K)=SUFSP(K)+WI2+WI3
0277      DO 71 N=1,4
0278      SUM(N)=SUM(N)+WI1*WAHR(N)
0279      71 SUMF(N)=SUMF(N)+(WI2+WI3)*WAHR(N)
0280      IF(Q2(3))72,72,79
0281      72 Q2(3)=-Q2(3)
0282      GO TO 20
0283      79 CONTINUE
0284      80 CONTINUE
          C ENDE DER INNEREN SCHLEIFE
0285      IF(Q1(3))12,12,89
0286      12 Q1(3)=-Q1(3)
0287      GO TO 13
0288      89 CONTINUE
0289      DO 15 N=1,4
0290      ABD(J,N)=ABD(J,N)+SUM(N)
0291      15 ABF(J,N)=ABF(J,N)+SUMF(N)
0292      90 CONTINUE
0293      DO 91 N=1,4
0294      ABD(J,N)=ABD(J,N)*CONST*CONST*DT*DT*DPHI*DPHI/DM/PYT*2.
0295      91 ABF(J,N)=ABF(J,N)*CONST*CONST*DT*DT*DPHI*DPHI/DM/PYT*64.*CONST/13
          1.
0296      DO 92 K=1,100
0297      SPEKD(K)=SPEKD(K)+SUMSP(K)*CONST*CONST*DT*DT*DPHI*DPHI/DM/PYT*2.*
          1GR(J,1)
0298      92 SPEKF(K)=SPEKF(K)+SUFSP(K)*CONST*CONST*DT*DT*DPHI*DPHI/DM/PYT*64.
          1*CONST/13.*GR(J,1)
0299      100 CONTINUE
0300      E3=-DE/2.
0301      DO 102 K=1,100
0302      E3=E3+DE
0303      IF(SPEK(K)+SPEKD(K))103,102,103
0304      103 CALL DET(E3,WAHR)
0305      ANSP(K,1)=WAHR(1)
0306      ANSP(K,2)=WAHR(2)/WAHR(1)
0307      102 CONTINUE
0308      DO 120 J=1,5
0309      120 WRITE(6,1010)J,(AB(J,N),ABF(J,N),N=1,4)
0310      1010 FORMAT(I4,4(2X,2E12.4))
0311      DO 112 K=1,3
0312      IF(K-2)113,114,115
0313      113 WRITE(6,1011)
0314      1011 FORMAT(/13H KGLL.-MITTEL)
0315      GO TO 116
0316      114 WRITE(6,1013)
0317      1013 FORMAT(/15H QUADRAT-MITTEL)
0318      GO TO 116
0319      115 WRITE(6,1014)
0320      1014 FORMAT(/13H KREIS-MITTEL)
0321      116 DO 117 N=1,4
0322      WAHR(N)=AB(1,N)*GR(1,K)
0323      SUM(N)=ABD(1,N)*GR(1,K)
0324      SUMF(N)=ABF(1,N)*GR(1,K)
0325      DO 117 J=2,5
0326      WAHR(N)=WAHR(N)+AB(J,N)*GR(J,K)

```

```
0327          SUM(N)=SUM(N)+ABD(J,N)*GR(J,K)
0328          117 SUMF(N)=SUMF(N)+ABF(J,N)*GR(J,K)
0329          DO 118 N=1,4
0330          SUM(N)=SUM(N)/WAHR(N)
0331          118 SUMF(N)=SUMF(N)/WAHR(N)
0332          DO 119 N=2,4
0333          WAHR(N)=WAHR(N)/WAHR(1)
0334          WRITE(6,1012)(WAHR(N),N=1,4)
0335          WRITE(6,1012)(SUM(N),N=1,4)
0336          WRITE(6,1012)(SUMF(N),N=1,4)
0337          1012 FORMAT(/1X,4E12.4)
0338          112 CONTINUE
0339          WRITE(6,1015)
0340          1015 FORMAT(/9H SPEKTREN)
0341          DO 122 N=1,4
0342          DO 121 J=1,10
0343          K1=10*(J-1)+1
0344          KJ=10*J
0345          121 WRITE(6,1016) (SPEK(K),K=K1,KJ),(SPEKD(K),K=K1,KJ),(SPEKF(K),K=K1,
          1KJ)
0346          1016 FORMAT(/3(10E11.3/))
0347          FI=0.
0348          FD=0.
0349          FF=0.
0350          DO 105 K=1,100
0351          FI=FI+SPEK(K)*ANSP(K,1)
0352          FD=FD+SPEKD(K)*ANSP(K,1)
0353          FF=FF+SPEKF(K)*ANSP(K,1)
0354          SPEK(K)=SPEK(K)*ANSP(K,2)
0355          SPEKD(K)=SPEKD(K)*ANSP(K,2)
0356          105 SPEKF(K)=SPEKF(K)*ANSP(K,2)
0357          FD=FD/FI
0358          FF=FF/FI
0359          122 WRITE(6,1017) FI,FD,FF
0360          1017 FORMAT(/3E14.4)
0361          GO TO 31
0362          40 STOP
0363          END
```


Druckfehlerberichtigung

In einem zweiten Teil dieser Arbeit (KFK-Bericht 1938) wurde das Hauptprogramm 'T5-D1' zur Berechnung der Doppelstreuung abgedruckt. Irrtümlicherweise wurde ein Unterprogramm 'DOPP', das in diesem Bericht beschrieben wird, inmitten des Hauptprogramms doppelt wiedergegeben, während die Seite 5 des Hauptprogramms fehlt. Sie wird an dieser Stelle nachgetragen.