

KFK-2029
(1. Ex.)

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

September 1974

KFK 2029

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

Bestimmung des turbulenten Geschwindigkeits-
und Temperaturfeldes in Stabbündeln mit Hilfe
von krummlinig orthogonalen Koordinaten

R. Meyder

K11.1
K16
Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.
— Zentralbücherei —



GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2029

INSTITUT FÜR REAKTORENTWICKLUNG

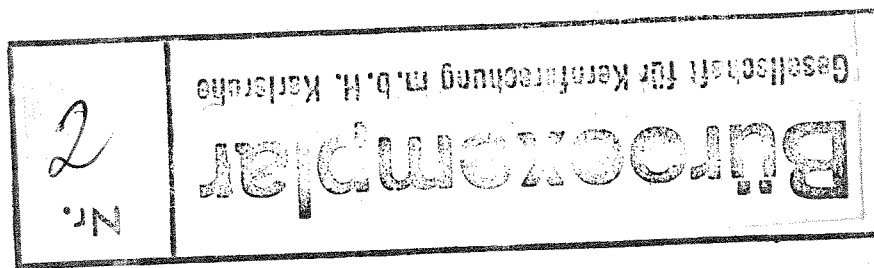
Projekt Schneller Brüter

Bestimmung des turbulenten Geschwindigkeits-
und Temperaturfeldes in Stabbündeln mit Hilfe
von krummlinig orthogonalen Koordinaten

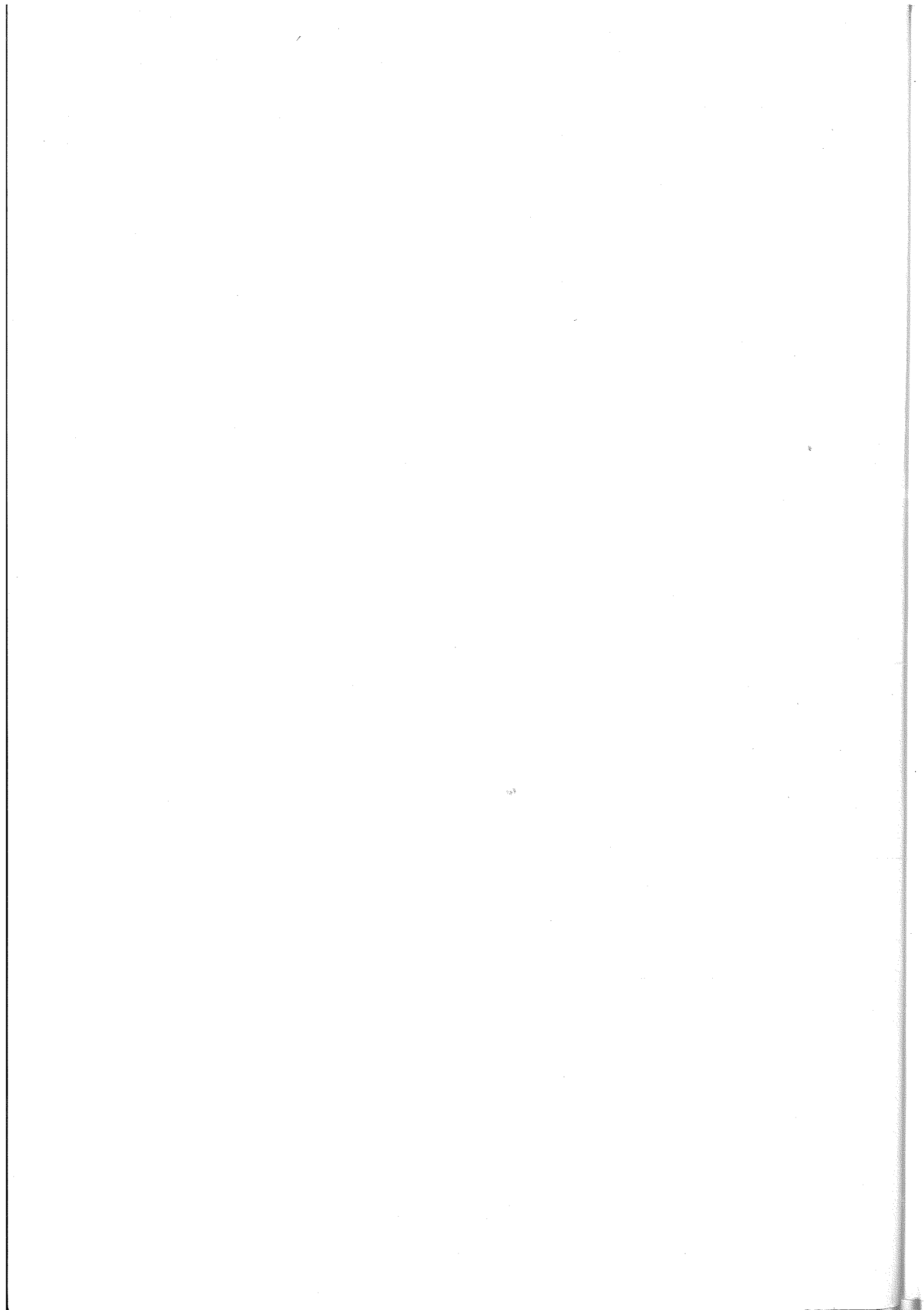
von

R. Meyder

Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.
= Zentralinstitut



Gesellschaft für Kernforschung m. b. H., Karlsruhe



Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Bilanzgleichungen für Impuls und Enthalpie im Zentralkanal eines Brennelements erstmals in einem speziell für diese Geometrie erzeugten, krummlinig orthogonalen Koordinatensystem gelöst. Die Methode wird zunächst am Beispiel einer laminaren Strömung demonstriert. Die Bestimmung der Impulsaustauschgrößen für die turbulente Strömung erfolgt nach dem Prandtl'schen Mischungswegansatz. Für die Ermittlung anisotroper Austauschgrößen wird eine neue Methode vorgeschlagen. Bei der Berechnung der Wärmeaustauschgrößen aus den Impulsaustauschgrößen werden für Natrium die Ergebnisse, die mit den Beziehungen verschiedener Autoren gewonnen wurden, gegenübergestellt. Zur Demonstration der Fähigkeiten der entwickelten Rechenprogramme wurde die dreidimensionale Temperaturverteilung im Unterkanal eines Brennelements für die Kühlmittel Natrium, Helium und Wasser unter hohem Druck bestimmt.

Die Übereinstimmung der gewonnenen Ergebnisse mit Experimenten ist bis herab zu P/D-Verhältnissen von 1,15 sehr zufriedenstellend.

Determination of the turbulent velocity and temperature field in rod bundles using general curvilinear orthogonal co-ordinates

R. Meyder

Summary

In this paper the momentum and heat transfer equations, for the central coolant channel of a reactor subassembly are solved for the first time in general curvilinear orthogonal co-ordinates. The co-ordinates were specially determined for the subchannel. The method is explained using the example of laminar flow. For turbulent flow, the eddy-diffusivities are determined by the "mixing-length" hypothesis of Prandtl. A new method is proposed to determine anisotropic eddy-diffusivities. The eddy-diffusivities of heat are calculated from the eddy-diffusivities of momentum using the relations obtained by various authors and the results are compared in the case of sodium. To show the capability of the developed computer-codes the three dimensional temperature field is calculated in the central subchannel of a fuel element cooled by sodium, helium and pressurised water.

The agreement between calculated results and experiments is very satisfactory down to a P/D ratio of 1.15.

(to be published as KFK-Bericht)

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Einleitung	1
1. Bestimmung eines Maschennetzes zur geometrischen Beschreibung des durchströmten Querschnitts in eng gepackten Brennstabbündeln	3
1.1 Kriterien für eine gute und zweckmäßige Beschreibung eines Bereichs	3
1.2 Rechnen mit krummlinig orthogonalen Koordinaten am Beispiel der laminaren Navier-Stokes-Gleichung	5
1.3 Erzeugung eines krummlinig orthogonalen Koordinatensystems	9
1.4 Ergebnisse für laminare Geschwindigkeitsfelder und Diskussion	11
2. Lösung der turbulenten Navier-Stokes-Gleichung	19
2.1 Theorie isotroper Impulsaustauschgrößen	19
2.1.1 Der Prandtl'sche Mischungswegansatz	20
2.1.2 Das Buleev'sche Austauschmodell	23
2.2 Ergebnisse isotroper Modelle	26
2.3 Theorie anisotroper Turbulenzmodelle	33
2.4 Ergebnisse für anisotrope Turbulenz	37
3. Lösung der turbulenten Wärmetransportgleichung	48
3.1 Theorie der anisotropen Wärmetransportgleichung	48
3.2 Ergebnisse für die thermisch ausgebildete Strömung bei Verwendung verschiedener ψ -Beziehungen	52
4. Anwendung auf konkrete Probleme bei der Kernausslegung	57
5. Schlußbemerkungen	65
6. Nomenklatur	68
7. Literatur	71



Einleitung:

Bei der Auslegung von Kernreaktoren mit glatten Brennstäben benötigt man zur Bestimmung optimaler Abmessungen von Brennstab-Abstand , -durchmesser und -wandstärken sowie der zu fordernden Toleranzen dieser Größen möglichst genaue Informationen über die Beanspruchung der Brennstabhüllrohre, d.h. über die an ihnen auftretenden Temperaturen und Temperaturgradienten.

Die Temperaturen und Temperaturgradienten im Brennstabhüllrohr sind in hohem Maße durch das thermohydraulische Verhalten des Kühlmittels bestimmt. Dabei sind von besonderem Interesse:

- die Temperaturverteilung an der gekühlten Oberfläche des Brennstabhüllrohres,
- die mittlere und örtliche Wärmeübergangszahl von der Brennstaboberfläche ins Kühlmittel,
- der Wärmestrom zwischen zwei benachbarten Unterkanälen bei unterschiedlicher mittlerer Temperatur.

Diese Größen sind besonders wichtig, bei Brennelementen mit einem starken radialen Leistungsgradienten, an allen Eck- und Wandbrennstäben und bei Störungen in der Brennstabanordnung. Da sich der Einfluß dieser Störungen bzw. der Brennelementkastenwände nicht auf die Umgebung eines Brennstabes beschränkt ist es notwendig, daß ein mehrere Brennstäbe umfassender Bereich betrachtet wird.

Die Beantwortung der gestellten Fragen erfordert die Lösung der Bilanz - Gleichungen für Masse, Impuls und Enthalpie im Kühlmittel eines Brennelements. Dabei muß sowohl der unmittelbare Wandnahbereich (zähe Unterschicht) der Strömung als auch die makroskopische Geometrie (Brennelementausschnitt) gut beschrieben werden.

Für die Lösung der Bilanzgleichungen wird ein Differenzenverfahren angestrebt, da sich diese Verfahren durch hohe Flexibilität bezüglich der verwendeten Modellvorstellungen auszeichnen. Turbulente Strömungen bei Berücksichtigung der laminaren und der scheinbaren turbulenten Zähigkeit sind für Kanal- und Plattenströmungen einfacher Geometrie mit Differenzennäherungen für die Erhaltungsgleichungen schon erfolgreich berechnet worden [1, 2, 3, 4]. Kennt man die scheinbare turbulente

Zähigkeit als Funktion des Ortes, dann kann man auch, zum Beispiel unter Verwendung der Reynoldsanalogie oder anderer geeigneter Umrechnungen, auf die turbulente Austauschgröße für die Wärme schließen. Damit kann dann auch das Wärmetransportproblem für diese Strömung gelöst werden [2, 3].

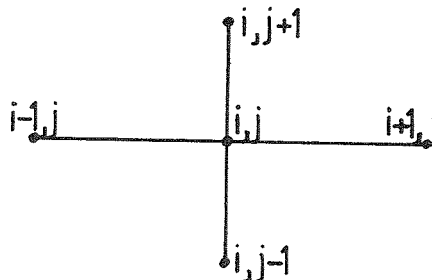
Da mit den üblichen zylindrischen und kartesischen Koordinatensystemen ein Stabbündel geometrisch schwer zu beschreiben ist, wird zunächst ein Maschennetz erzeugt, das zur geometrischen Beschreibung eines Stabbündels besser geeignet ist.

1. Bestimmung eines Maschennetzes zur geometrischen Beschreibung des durchströmten Querschnitts in eng gepackten Brennstabbündeln
- 1.1 Kriterien für eine gute und zweckmäßige Beschreibung eines Bereichs

Eine gute geometrische Darstellung erfordert die Erfüllung folgender Forderungen:

- 1) Die Bereichsrandlinien sollen Koordinatenlinien sein. Fällt die Randlinie auf eine Koordinatenlinie, so sind die Randbedingungen ohne Schwierigkeit genau angebar. Die genaue Angabe der Randbedingungen ist aber eine Voraussetzung für eine zufriedenstellende Lösung.
- 2) Es soll eine gezielte Feinunterteilung in den Gebieten mit großen Funktionswertänderungen möglich sein. Bei zunehmender Differenz zwischen zwei benachbarten Funktionswerten wird i. a. die Annäherung des Funktionsverlaufs immer ungenauer. Daher ist es wünschenswert, in solchen Gebieten eine feinere Unterteilung wählen zu können.
- 3) Es soll mit möglichst wenig Punkten ein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt werden. Dies bedeutet, daß möglichst wenig Speicherplatz und kleine Rechenzeiten für eine Rechnung benötigt werden sollen, damit man in einer Rechnung einen größeren Teil eines Brennelements behandeln kann.
- 4) Die Maschenpunkte sollen nach einfachen Gesetzen angeordnet sein, d. h. in jeder Zeile bzw. Spalte des Maschennetzes soll stets dieselbe Anzahl von Stützpunkten sein. Dann lassen sich geometrisch benachbarte Punkte im Datenfeld auf der Rechenmaschine stets wie in nebenstehender Skizze anordnen.

Ist diese Forderung erfüllt, so ist das Abarbeiten des Feldes, d. h. die Aufstellung und Lösung des Systems der Differenzgleichungen, wesentlich erleichtert. Hat man nämlich die Gleichung für den Punkt (i, j) aufgestellt, so genügt es, die Indizes i und j zu variieren, um den gesamten Bereich zu beschreiben.



Sämtliche dieser vier Forderungen werden für die Geometrie eines Stabbündels durch das krummlinig orthogonale Maschennetz nach Bild 1 erfüllt, während alle anderen sonst gebräuchlichen Koordinatensysteme eine oder höchstens zwei der Forderungen erfüllen.

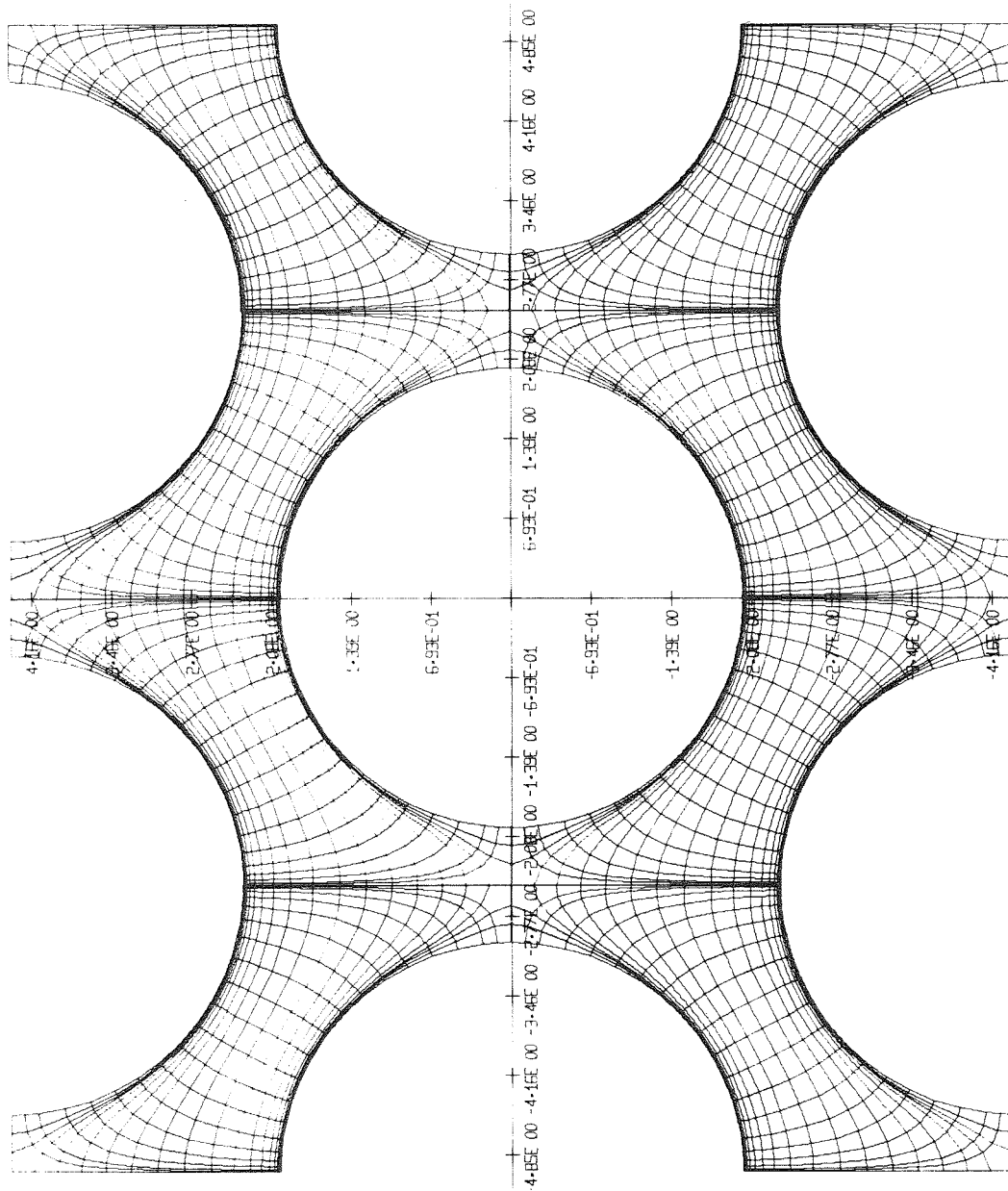


Abb. 1: Darstellung eines Brennelement-Ausschnitts mit hexagonaler Stabanordnung durch ein krummlinig orthogonales Maschennetz von 40 x 80 Punkten. Die Maschenpunkte wurden linear miteinander verbunden.

1.2 Rechnen mit krummlinig orthogonalen Koordinaten am Beispiel der laminaren Navier-Stokes-Gleichung

Die Theorie zur Behandlung von Problemen in krummlinig orthogonalen Koordinatensystemen ist nicht neu [6]. Dennoch werden kaum Rechnungen mit ihr durchgeführt. So ist dem Autor lediglich die Behandlung eines Festigkeitsproblems in krummlinig orthogonalen Koordinaten bekannt [7]. In [7] konnte aber nur eine qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse mit den Resultaten anderer Verfahren (z.B. Finite-Elemente-Methode) festgestellt werden. Im Gegensatz zu der in [7] verwendeten tensoriellen Darstellung der Problemgleichung wird sie hier an einem krummlinig orthogonalen Volumenelement bekannter Abmessungen abgeleitet.

Die Navier-Stokes-Gleichung für eine dreidimensionale Strömung besteht aus drei miteinander verkoppelten Differentialgleichungen. Nehmen wir jedoch an, daß es zur Beschreibung unseres Strömungsproblems genügt, nur eine Geschwindigkeitsrichtung zu betrachten, daß die Stoffwerte konstant sind und daß es sich um eine stationäre, laminare, ausgebildete Strömung in einem Kanal von nichtkreisförmigem Querschnitt handelt, so erhält man in kartesischen Koordinaten nur noch folgende Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \quad (1).$$

Dies ist eine Kräftebilanz in x_1 -Richtung an einem Volumenelement. Im folgenden wird die entsprechende Differenzengleichung an einem Volumenelement gemäß Bild 2 abgeleitet.

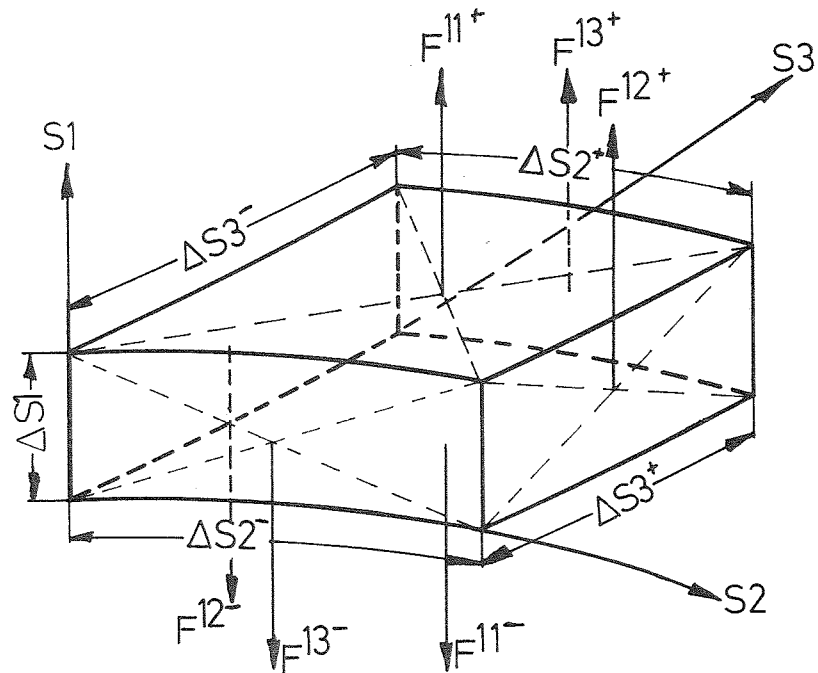


Bild 2: Krummlinig orthogonales Volumenelement

Da, wie oben vorausgesetzt, eine Kanalströmung betrachtet werden soll, wird S_1 als eine Gerade gewählt. Die Koordinatenlinien S_2 und S_3 sollen krummlinig orthogonale Koordinaten in der Ebene senkrecht zu S_1 sein.

Da nur eine Geschwindigkeit in S_1 -Richtung auftritt, sind die Kräfte:

$$F^{11+} = - p^+ \cdot \left(\frac{\Delta S_2^+ + \Delta S_2^-}{2} \right) \cdot \left(\frac{\Delta S_3^+ + \Delta S_3^-}{2} \right) \quad (2)$$

$$F^{11-} = + p^- \cdot \left(\frac{\Delta S_2^+ + \Delta S_2^-}{2} \right) \cdot \left(\frac{\Delta S_3^+ + \Delta S_3^-}{2} \right) \quad (3)$$

$$F^{21+} = \left(\mu \frac{\Delta u_1}{\Delta S_2} \right)^+ \cdot \Delta S_1 \cdot \Delta S_3^+ \quad (4)$$

$$F^{21-} = - \left(\mu \frac{\Delta u_1}{\Delta S_2} \right)^- \cdot \Delta S_1 \cdot \Delta S_3^- \quad (5)$$

$$F^{31+} = \left(\mu \frac{\Delta u_1^+}{\Delta S_3}\right) \cdot \Delta S_1 \cdot \Delta S_2^+ \quad (6)$$

$$F^{31-} = - \left(\mu \frac{\Delta u_1^-}{\Delta S_3}\right) \cdot \Delta S_1 \cdot \Delta S_2^- \quad (7)$$

Für das betrachtete Problem sind das alle am Volumenelement angreifenden Kräfte; also muß gelten:

$$0 = F^{11+} + F^{11-} + F^{21+} + F^{21-} + F^{31+} + F^{31-} \quad (8),$$

oder mit den rechten Seiten von (2 ÷ 7) ausgedrückt:

$$0 = - (p^+ - p^-) \cdot \left(\frac{\Delta S_2^+ + \Delta S_2^-}{2}\right) \cdot \left(\frac{\Delta S_3^+ + \Delta S_3^-}{2}\right) +$$

$$\mu \cdot \Delta S_1 \left(\frac{\Delta u_1^+}{\Delta S_2} \cdot \Delta S_3^+ - \frac{\Delta u_1^-}{\Delta S_2} \cdot \Delta S_3^- + \frac{\Delta u_1^+}{\Delta S_3} \cdot \Delta S_2^+ - \frac{\Delta u_1^-}{\Delta S_3} \cdot \Delta S_2^-\right) \quad (9).$$

Teilt man wie üblich die Gleichung durch das Volumen des Elements, so ergibt sich die Differenzengleichung

$$0 = - \frac{p^+ - p^-}{\Delta S_1} + \frac{4 \mu}{(\Delta S_2^+ + \Delta S_2^-) \cdot (\Delta S_3^+ + \Delta S_3^-)}$$

$$\cdot \left(\frac{\Delta u_1^+}{\Delta S_2} \cdot \Delta S_3^+ - \frac{\Delta u_1^-}{\Delta S_2} \cdot \Delta S_3^- + \frac{\Delta u_1^+}{\Delta S_3} \cdot \Delta S_2^+ - \frac{\Delta u_1^-}{\Delta S_3} \cdot \Delta S_2^-\right) \quad (10).$$

Man kann diese Gleichung je nach der Definition der Koordinatenlinien sehr leicht in die Form der Gleichung (1) bringen.

Setzt man z.B.

$$S_1 = x_1 \quad \text{damit} \quad \Delta S_1 = \Delta x_1 \quad (11),$$

$$S_2 = x_2 \quad \text{damit} \quad \Delta S_2^+ = \Delta S_2^- = \Delta S_2 = \Delta x_2 \quad (12),$$

und

$$S_3 = x_3 \quad \text{damit} \quad \Delta S_3^+ = \Delta S_3^- = \Delta x_3 \quad (13),$$

so erhält man:

$$0 = \frac{-\Delta p}{\Delta x_1} + \mu \left(\frac{\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_2}\right)^+ - \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_2}\right)^-}{\Delta x_2} + \frac{\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_3}\right)^+ - \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_3}\right)^-}{\Delta x_3} \right) \quad (14).$$

Durch Grenzübergang erhält man dann:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \quad (1).$$

Zur Aufstellung von Differenzengleichungen müssen also nur die lokalen Abmessungen einer Masche, also Längen und Flächen bzw. Winkel bekannt sein. Diese Längen und Winkel können jedoch auch von Masche zu Masche verschieden sein. Dies ist der grundlegende Unterschied zu einem kartesischen Koordinatensystem. Während im kartesischen System in der Regel die Abmessungen aller Maschen gleich sind, sind bei krummlinigen Systemen die Abmessungen aller Maschen unterschiedlich.

Ebenso wie die Navier-Stokes-Gleichung kann natürlich auch die Energiegleichung in krummlinig-orthogonalen Koordinaten dargestellt werden.

1.3 Erzeugung eines krummlinig orthogonalen Koordinaten-Systems

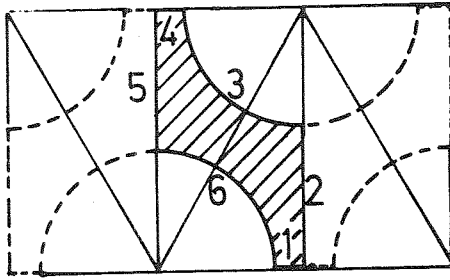


Bild 3: Schematische Darstellung des gewählten Brennstabbündelausschnitts

Zur Erleichterung der Diskussion werden die Teilstücke der Randkurve durchnummeriert. In dieser Randkurve treten sechs Ecken auf. Das angestrebte Maschennetz soll aber nur 4 Ecken enthalten damit die 4 Forderungen aus Abschnitt 1.1 leicht erfüllbar sind, d.h. man muß 2 Winkel "glatt ziehen". Wie aus Bild 1 zu erkennen, wurden die Ecken (1,2) und (4,5) glatt gezogen.

Damit kann festgestellt werden, daß die Ecken (6,1), (2,3), (3,4), (5,6) auch für das krummlinige Maschennetz Ecken bleiben werden.

Wie findet man nun in dem gegebenen Gebiet orthogonale Koordinatenlinien? Orthogonale Linien treten bekanntlich in der Potentialtheorie auf. Z.B. gibt es in einem elektrischen Feld zwischen zwei Kondensatorplatten Feldlinien, d.h. Äquipotentiallinien für die Ladungen, und Kraftlinien, also die Gradientenlinien des Ladungsfeldes. Beide Linienarten stehen im gesamten Feld, insbesondere aber an den Feldrändern, senkrecht aufeinander. Beide Linienarten gehorchen der Potentialgleichung. Man muß also nur die Potentialgleichung zweimal in dem gesuchten Gebiet lösen, wobei einmal die Randbedingung für die Ladungen und einmal die für die Kraftlinien angegeben werden. Die Randbedingungen für die Ladungen wurden wie folgt gewählt:

Teilstück 4,5	Ladung $\phi = 100$
Teilstück 1,2	Ladung $\phi = 0$
Teilstück 3	$\partial \phi / \partial n = 0$
Teilstück 6	$\partial \phi / \partial n = 0$

Die Randbedingungen für die Kraftlinien:

Teilstück 3	Kraft $\psi = 0$
Teilstück 6	Kraft $\psi = 100$
Teilstück 4,5	$\partial \psi / \partial n = 0$
Teilstück 1,2	$\partial \psi / \partial n = 0$

Die Lösung der Potentialgleichungen erfolgt numerisch. Ist eine Lösung fertiggestellt, so wird das Lösungsfeld nach Linien gleichen Potentials abgesucht. Sind diese Feld- und Kraftlinien bekannt, so müssen die Schnittpunkte dieser Linien bestimmt werden und schließlich die Bogenlängen der Koordinatenlinien zwischen den Maschenpunkten.

Damit sind die zur Lösung von Gleichung (10) erforderlichen Geometriedaten bekannt.

Eine etwas andere Methode zur Bestimmung eines krummlinig orthogonalen Maschennetzes in einem gegebenen Gebiet wird von Barfield [8] angegeben. Dabei wird die Randkurve des interessierenden Gebietes zunächst auf einen Kreis und dieser dann auf ein Rechteck abgebildet. In der damit gewonnenen kartesischen Darstellung (Bildbereich) werden ähnlich, wie in diesem Abschnitt beschrieben, die Koordinaten der Maschenpunkte berechnet. Der Vorteil dieser Methode ist, daß wegen der konformen Abbildung Gebiete mit sehr verschiedenen Typen von Randkurven betrachtet werden können, wogegen bei der hier beschriebenen Methode Änderungen im Typ der Randkurve Änderungen des Rechenprogramms erfordern. Ein Nachteil der in [8] angegebenen Methode ist, daß nur die Schnittpunkte der Koordinatenlinien bestimmt werden. Es fehlen daher Stützpunkte der Koordinatenlinien bei der Berechnung der Bogenlängen zwischen den Maschenpunkten.

Die getrennte Berechnung der Geometriedaten mag zunächst als zusätzlicher Aufwand empfunden werden; tatsächlich ist dieses Vorgehen aber ein Gewinn, denn hierbei werden die Geometriedaten einmal berechnet und dann abgespeichert. Bei der Lösung einer Problemgleichung muß man von der ganzen Geometrie nur noch wissen, daß jeder Maschenpunkt vier Nachbarpunkte hat.

1.4 Ergebnisse für laminare Geschwindigkeitsfelder und Diskussion

Die Bestimmung des orthogonalen Maschennetzes, d.h. die Berechnung der Lage der Maschenpunkte und der Längen zwischen den Maschenpunkten wird mit dem PL/1-Programm KRØKØPI (KRummlinig-Ortogonale Koordinaten in Pingeometrie) durchgeführt. Dieses Programm benötigt ca. 100 k Programmspeicher und je nach den gewählten Parametern ca. 250 bis 350 k Datenspeicher. Die Rechenzeiten liegen bei 5 bis 7 Minuten für die IBM 370/165. Als Koordinatensystem wurde ein gemischt zylindrisch-kartesisches System nach Bild 4 gewählt. Mit der Lösung der Potentialgleichungen nach Abschnitt 1.3 in diesem Koordinatensystem wird das krummlinig orthogonale Koordinatensystem erzeugt.

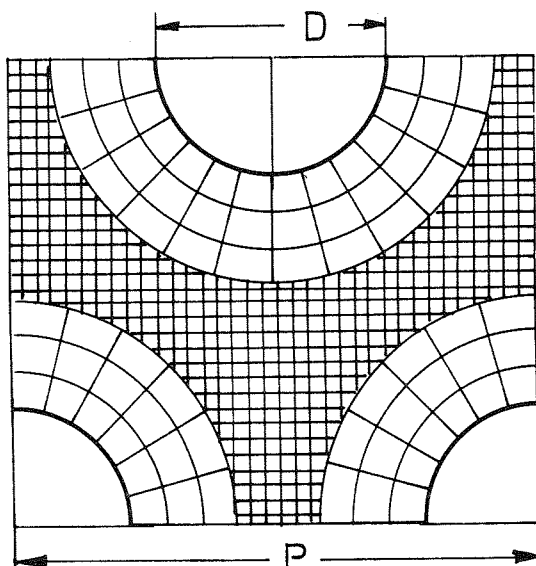


Bild 4: Beschreibung eines Brennstabbündels in gemischt zylindrisch-kartesischen Koordinaten

Mit in das Programm eingebaut ist die Lösung der Gleichung (10) in krummlinig orthogonalen Koordinaten. Ein Benutzer dieses Programms hat damit nicht nur Geometriedaten vorliegen, sondern zugleich eine Aussage über die Güte dieser Daten.

Die Bilder 5 bis 8 zeigen einige Darstellungen der Ergebnisse. Dabei sind auf der linken Hälfte der Bilder die Maschennetze abgebildet, mit denen die Strömung berechnet wurde, die rechte Hälfte zeigt Linien

gleicher Geschwindigkeit dieser Strömung. Die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den Linien nehmen von der Wand her quadratisch ab.

In diesen Bildern kommt die Flexibilität und die Leistungsfähigkeit des verwendeten Koordinatensystems deutlich zum Ausdruck, insbesondere wenn man bedenkt, daß alle Koordinatensysteme nur aus 31×31 Punkten bestehen.

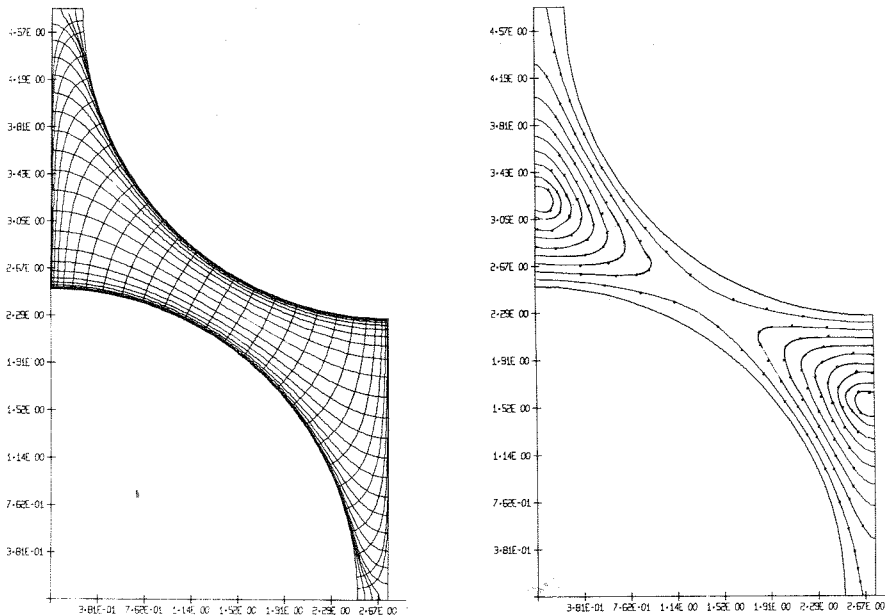


Bild 5: Iso-tachen der Laminarströmung in einem hexagonalen Brennstabbündel $P/D = 1,1$. Diese Strömung wurde mit dem daneben gezeichneten Maschennetz bestimmt.

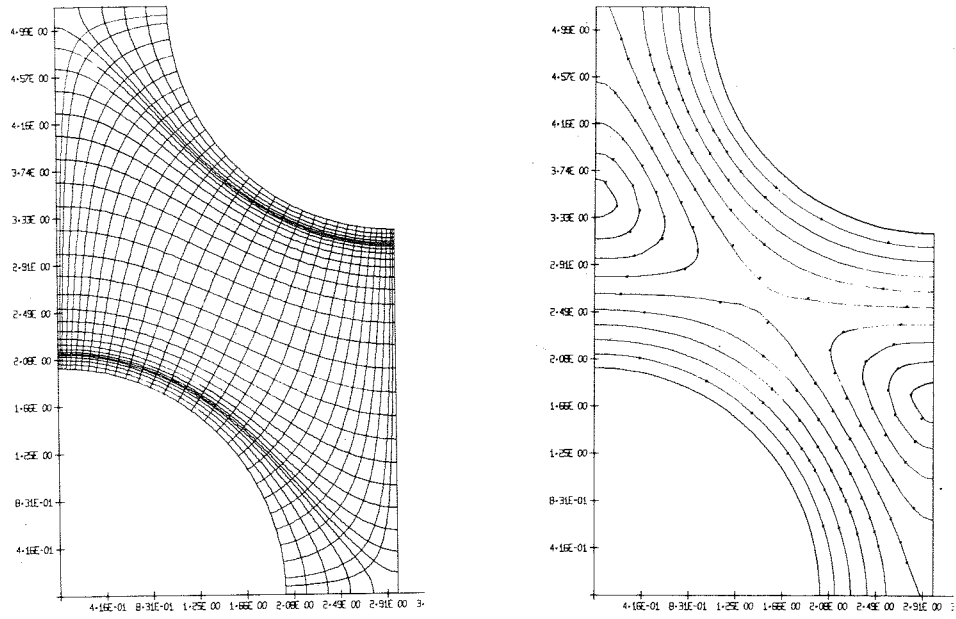


Bild 6: Isotachen der Laminarströmung in einem hexagonalen Brennstabbündel $P/D = 1,5$. Diese Strömung wurde mit dem daneben gezeichneten Maschennetz bestimmt.

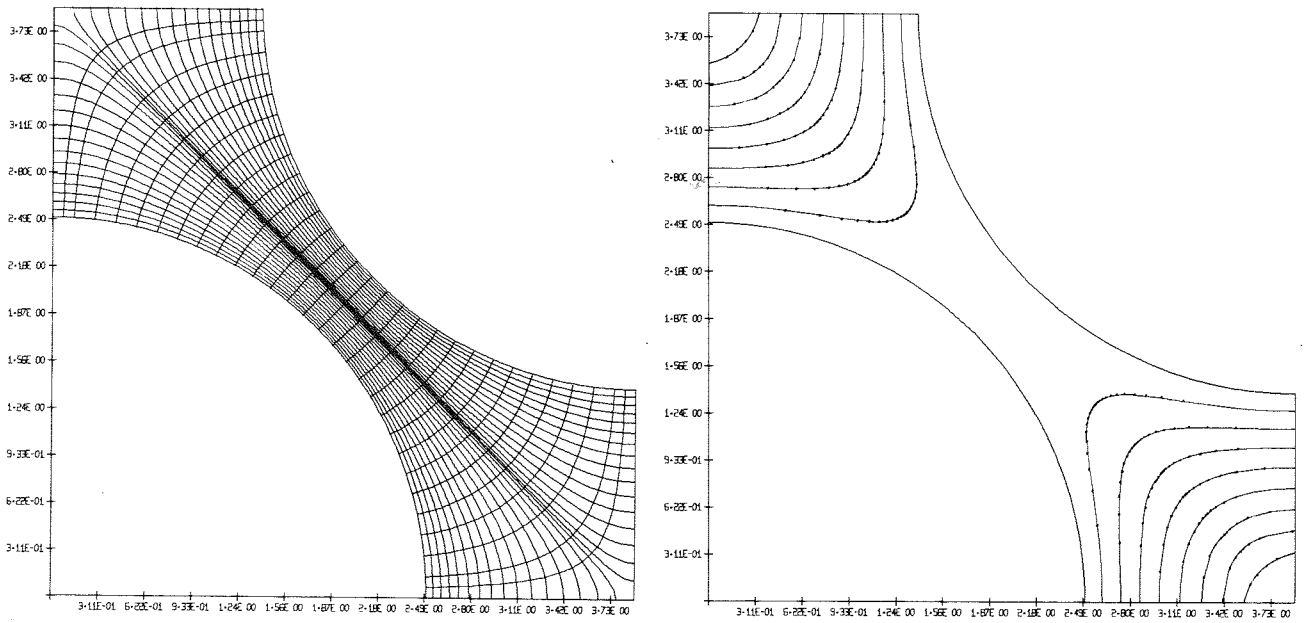


Bild 7: Isotachen der Laminarströmung in einem quadratischen Brennstabbündel $P/D = 1,1$. Diese Strömung wurde mit dem daneben gezeichneten Maschennetz bestimmt.

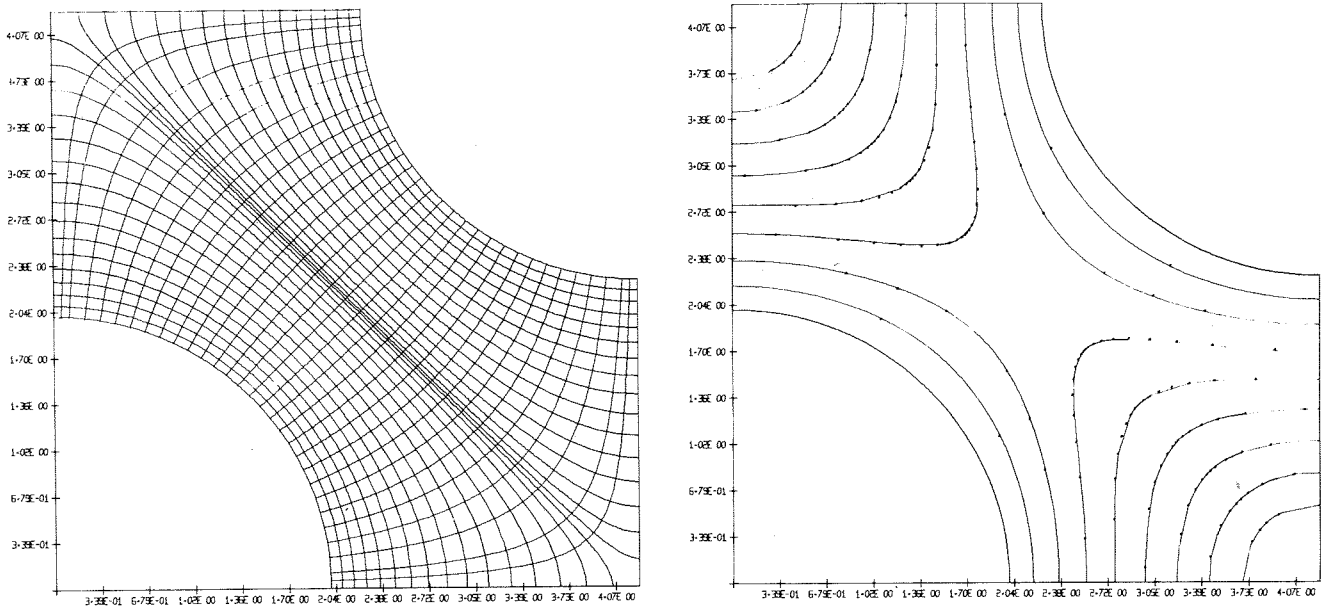


Bild 8: Isotachen der Laminarströmung in einem quadratischen Brennstabbündel $P/D = 1,5$. Diese Strömung wurde mit dem daneben gezeichneten Maschennetz bestimmt.

Bei der Bewertung der Ergebnisse müssen zwei verschiedene Kriterien berücksichtigt werden. Einmal muß die Lösung in sich konsistent sein, d.h. z.B. dort, wo sich aus Symmetriegründen derselbe Funktionswert ergibt, muß dies auch bei der Lösung mit einer vertretbaren Toleranz erreicht werden. Zum zweiten kann man die mit diesem Verfahren gewonnenen Ergebnisse für eine Laminarströmung vergleichen mit den Ergebnissen anderer Autoren [9].

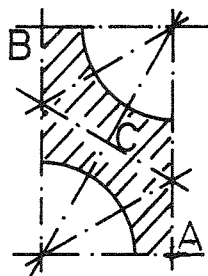


Bild 9: Darstellung der Symmetrielinien einer hexagonalen Brennstabanordnung

Bei der Symmetriepfung kann man für eine hexagonale Stabanordnung den Funktionswert bei A bzw. B (Bild 9) mit dem bei C vergleichen. Dies wurde für verschiedene Stababstand-zu-Stabdurchmesser- (P/D)-Verhältnisse geprüft und das Ergebnis im Diagramm 1 aufgetragen.

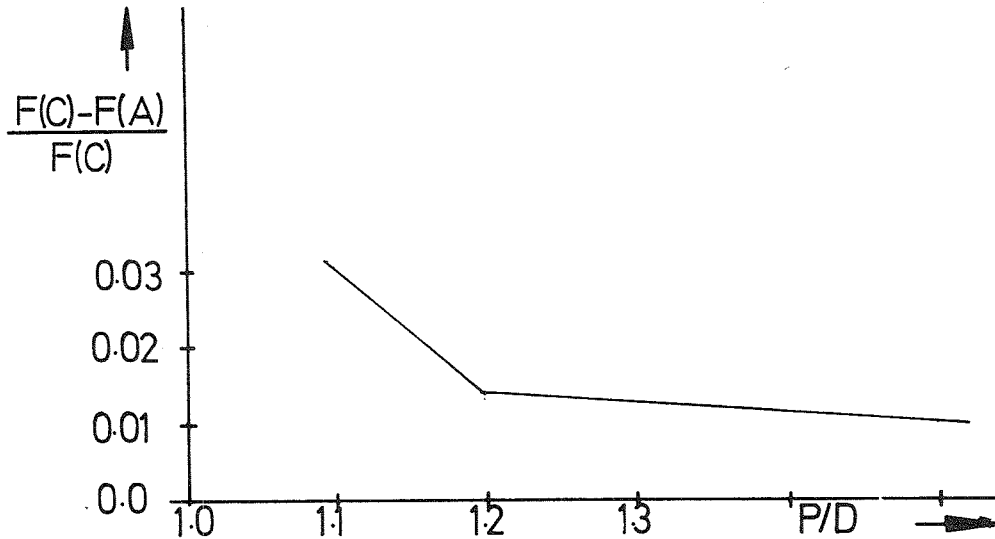


Diagramm 1: Maximale Symmetriefehler in Abhängigkeit vom P/D-Verhältnis, hexagonale Stabanordnung

Wie zu erwarten, steigt die Abweichung bei abnehmendem P/D-Verhältnis an. Sie bleibt aber dennoch in tolerierbaren Grenzen.

Während der Vergleich der Funktionswerte in A und C (Bild 9) für die hexagonale Stabanordnung eine gute Aussage über die Darstellung der Geometrie macht, gilt dies nicht für eine quadratische Stabanordnung. Es ist deshalb für diese Anordnung die Gleichung, die den Koordinatenverlauf beschreibt (Potentialgleichung) zweifach gelöst worden, und zwar zunächst im gemischten zyl.-kart. Maschennetz zur Erzeugung der krummlinig orthogonalen Koordinaten, und dann in dem neu gewonnenen krummlinigen Koordinatensystem.

Bei einer exakten Darstellung muß sich bei der zweiten Lösung in jedem Maschenpunkt der Potentialwert wieder einstellen, der bei seiner erstmaligen Berechnung gefunden wurde. Die maximale relative Abweichung zwischen der ersten und zweiten Berechnung der Potentialwerte ist im folgenden Diagramm 2 abhängig vom P/D-Verhältnis aufgetragen.

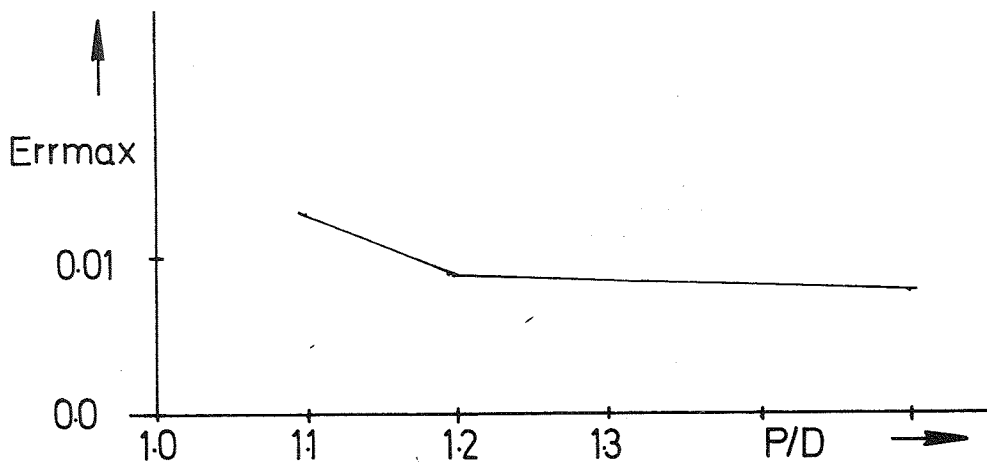


Diagramm 2: Maximale Fehler durch die Darstellung in krummlinig orthogonalen Koordinaten in Abhängigkeit vom P/D-Verhältnis, quadratische Stabanordnung

Die maximalen Fehler treten nur in den Ecken A und B (Bild 9) auf. Im übrigen Feld liegen die Fehler deutlich niedriger ($1 \div 2$ Zehnerpotenzen kleiner).

Damit kann festgestellt werden, daß die mit diesen Geometriedaten gelösten Problemgleichungen einen Maximalfehler von der Darstellung her von ca. $1 \div 2$ % haben werden. Der Fehler kann aber bei feinerer Teilung der Maschen noch verkleinert werden.

Die hier gewonnenen Ergebnisse werden nun mit denen von Rehme [9_7] verglichen. Rehme hat einen charakteristischen Unterkanal-Ausschnitt durch Zylinderkoordinaten dargestellt und die Gleichung für eine Laminarströmung numerisch gelöst.

	P/D	eigene Werte	REHME [9_7]
hexagonale Stabanordnung	1,1	2,28	2,43
	1,2	1,98	2,02
	1,3	1,78	1,79
	1,5	1,59	1,59
quadratische Stabanordng.	1,1	2,47	2,46
	1,2	2,31	2,31
	1,5	1,88	1,89

Tab. 1: Verhältnis maximaler zu mittlerer Geschwindigkeit

	P/D	eigene Werte	REHME [9_7]
hexagonale Stabanordnung	1,1	0,53	0,57
	1,2	0,90	0,91
	1,3	1,08	1,09
	1,5	1,22	1,22
quadratische Stabanordng.	1,1	0,14	0,14
	1,2	0,38	0,38
	1,5	0,85	0,85

Tab. 2: Verhältnis der Sattelpunktsgeschwindigkeit (Punkt C, Bild 9) zur mittleren Geschwindigkeit

	P/D	eigene Werte	REHME [97]
hexagonale Stabanordnung	1,1	83,7	83,7
	1,2	100	101
	1,3	110	110
	1,5	125	122
quadratische Stabanordnung	1,1	58,6	59
	1,2	81,0	81
	1,5	119	120

Tab. 3: Geometriefaktor $K = \frac{2\Delta p \cdot D_h}{\Delta z \cdot u_b}$

Der Vergleich mit den Ergebnissen von Rehme in den Tabellen 1 bis 3 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, zumal auch Rehme für seine Werte einen Fehler von ca. 1 % angibt. So bleibt noch der Vergleich des Aufwandes beider Lösungsmethoden. Rechnet man bei den krummlinig orthogonalen Koordinaten den Aufwand für die Bestimmung der Geometriedaten nicht hinzu, so ergibt sich folgendes Bild:

	Zylindrische Darstellung	krummlinig orthogonale Koordinaten
Punkte/Fläche	ca. 4 000	70 bis 150
Rechenzeit	ca. 1 min	0,3 min
Übergang zur Darstellung eines größeren Bereichs	Anschlußgleichung stets erforderlich	Anschlußgleichung nur dort erforderlich, wo sich das P/D-Verhältnis ändert.

Tab. 4: Vergleich des Aufwandes zur Darstellung dieses charakteristischen Unterkanalausschnitts

Die Rechenzeit bei Verwendung von krummlinig orthogonalen Koordinaten (Tab. 4) kann noch reduziert werden, wenn man das Rechenprogramm diesbezüglich optimiert.

Die Ergebnisse zeigen, daß die anfangs in dieses Verfahren gesetzten Hoffnungen in die ökonomische Darstellung einer Brennstabgeometrie sich voll bestätigt haben.

2. Lösung der turbulenten Navier-Stokes-Gleichung

2.1 Theorie isotroper Impuls-Austauschgrößen

Die turbulente Strömung wird, wie allgemein angenommen, durch die instationären Navier-Stokes'schen Gleichungen beschrieben. Diese lauten für konstante Stoffwerte in Tensorschreibweise:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (15).$$

Ein Verfahren zur Lösung dieser Gleichung gibt Schumann [10] für den speziellen Fall eines zentrischen Ringspaltkanals an. Der dazu notwendige Aufwand lässt die Anwendung dieses Verfahrens für das vorliegende Problem jedoch als weniger geeignet erscheinen. Es wird daher, wie allgemein üblich, die Momentangeschwindigkeit u_i in einen zeitlichen Mittelwert \bar{u}_i und eine Schwankungsgeschwindigkeit entsprechend

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (16)$$

aufgeteilt. Da hier nur der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit von Interesse ist, wird die Gleichung (15) über der Zeit gemittelt. Berücksichtigt man noch, daß eine ausgebildete Kanalströmung vorliegt und vernachlässigt die Geschwindigkeiten senkrecht zur Hauptströmungsrichtung (Sekundärströmung), so erhält man:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho \cdot \overline{u_1' u_2'} + \mu \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\rho \cdot \overline{u_1' u_3'} + \mu \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right) \quad (17).$$

Die in Gleichung (17) auftretenden Koorelationen $\overline{u_i' u_j'}$ werden als kinematische Reynoldsspannungen bezeichnet. Sie werden offensichtlich durch die den mittleren Geschwindigkeiten überlagerten Schwankungsgeschwindigkeiten hervorgerufen. Zur Bestimmung dieser Größen gibt es kein geschlossenes Gleichungssystem. Man führt daher im allgemeinen den von Boussinesq [11] vorgeschlagenen Ansatz

$$\overline{u_i' u_j'} = - \epsilon^M \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (\epsilon^M > 0) \quad (18).$$

ein. Dabei ist ϵ^M die Austauschgröße für den Impuls. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß sich Gleichung (17) nun einfacher schreibt, nämlich:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho (\epsilon^M + \nu) \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho (\epsilon^M + \nu) \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}) \quad (19).$$

Ein Nachteil dieses Ansatzes ist, daß durch ihn die Linie der maximalen Geschwindigkeiten auf die Nullschubspannungslinie gezwungen wird. Dies ist nur für symmetrische Strömungen richtig [46]. Da aber das turbulente Geschwindigkeitsprofil in der Nähe dieser Maxima einen sehr flachen Verlauf hat, ist diese Abweichung tolerierbar. Ein anderer und zunächst wohl wichtigerer Nachteil ist, daß zwar die Korrelationen $\overline{u_i' u_j'}$ nicht mehr auftreten, dafür aber ϵ^M noch geeignet bestimmt werden muß.

Die in der Literatur angegebenen Rechenvorschriften zur Bestimmung dieser Größe sind recht zahlreich. Dies läßt darauf schließen, daß es noch keine allgemein gültige Berechnungsmethode gibt. Für ausgebildete Kanalströmungen werden zwei Methoden im folgenden kurz diskutiert und ihre mögliche Anwendung auf das hier behandelte Problem untersucht.

2.1.1 Der Prandtl'sche Mischungswegansatz

Das älteste und wohl auch das bewährteste Modell wurde von Prandtl [12] angegeben. Er geht davon aus, daß sich die Schwankungsgeschwindigkeit $|\overline{u_1'}|$ durch die Beziehung

$$|\overline{u_1'}| \sim \ell \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \quad (20)$$

beschreiben läßt.

Die Schwankungsgeschwindigkeit ergibt sich demnach daraus, daß ein Flüssigkeitsballen von einem um ℓ entfernten Punkt, ohne seine ursprüngliche Geschwindigkeit zu ändern, an der Beobachtungsstelle eintrifft. Die zweite Schwankungsgröße $|\overline{u_3'}|$ sei zu der ersten proportional, also

$$|\overline{u_3'}| \sim |\overline{u_1'}| \quad (21).$$

Schließlich sei die Korrelation $\overline{u_1' u_3'}$ noch proportional zu dem Produkt der einzelnen Schwankungsgrößen und negativ. Also

$$\overline{u_1' u_3'} \sim - |\overline{u_1'}| \cdot |\overline{u_3'}| \quad (22).$$

Fasst man die Gleichungen (20) bis (22) zusammen, so ergibt sich:

$$\overline{u_1' u_3'} \sim - \ell^2 \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \right)^2 \quad (23).$$

Führt man den Proportionalitätsfaktor c und die Gleichung (23) in Gleichung (18) ein, so erhält man:

$$\epsilon^M = (c \cdot \ell)^2 \cdot \left| \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \right| \quad (24).$$

Da dieser Ableitung eine eindimensionale Strömung (ebene Platten, Kreisrohr) zugrunde gelegt ist, und dort $\partial u_1 / \partial x_3$ dem maximalen Geschwindigkeitsgradienten entspricht, kann man diesen Ausdruck verallgemeinern, indem man $\partial u_1 / \partial x_3$ durch den maximalen Geschwindigkeitsgradienten $\partial u_1 / \partial x_n$ ersetzt. Es ist dann:

$$\epsilon^M = (c \cdot \ell)^2 \left| \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_n} \right| \quad (25).$$

Damit verschwindet nun die Größe ϵ^M aus Gleichung (19). Dafür taucht aber wieder eine neue Größe ℓ auf, die zunächst noch unbekannt ist. Zur Berechnung von Platten und Rohrströmungen haben sich drei verschiedene Ansätze für ℓ im Laufe der Zeit recht gut bewährt.

Ein einfacher Ansatz, der z.B. von Escudier [13] angegeben wird, lautet:

$$c \cdot \ell^x = \begin{cases} 0,4 \cdot \hat{y} & \text{für } y \leq 0,35 \hat{y} \\ 0,14 \cdot \hat{y} & \text{für } y > 0,35 \hat{y} \end{cases} \quad (26)$$

Dabei ist \hat{y} die Profillänge (Wandnormale bis zum Maximum der Geschwindigkeit) und y der Wandabstand des betrachteten Punktes. Die Größen 0,14 und 0,4 wurden aus dem Vergleich mit Experimenten bestimmt und haben daher eine gewisse Streuung.

Ein anderer Ansatz wurde von Nikuradse [14] aufgestellt. Er hat seine Beziehung aus den von ihm gemessenen Rohrprofilen abgeleitet. Sie unterscheidet sich von der ersten im wesentlichen dadurch, daß die Rampenfunktion durch einen parabolischen Verlauf ersetzt wird. Sie lautet:

$$c \cdot \ell^x = \hat{y} \left(0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{\hat{y}}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{\hat{y}}\right)^4 \right) \quad (27).$$

Ein dritter Ansatz stammt von Kármán [15]. Er leitete auf theoretischem Wege eine Beziehung zwischen ℓ^x und den anderen Feldgrößen ab. Dabei geht er von der Vorstellung aus, daß der zeitlich gemittelten Strömung $\bar{u}_1(x_2, x_3)$ eine reibungsfreie Potentialströmung überlagert ist. Diese überlagerte Strömung führe die Schwankungsbewegung aus. Nach seiner Ähnlichkeitshypothese ist diese Potentialströmung dimensionslos dargestellt unabhängig vom Ort. Die dimensionsbehaftete Potentialströmung ist dann nur noch von den lokalen Maßstabsfaktoren für Länge und Geschwindigkeit abhängig. Mit diesen Annahmen findet man aus der Wirbeltransportgleichung die die Potentialströmung beschreibt:

$$c \cdot \ell^x = \kappa \cdot \left| \frac{\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}}{\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2}} \right| \quad (28)$$

Die soweit vorgestellten Verfahren zur Berechnung der Austauschgröße ϵ^M haben noch den Nachteil, daß sie in der wandnahen Zone $0 \leq y^+ \leq 30$ zu große Werte liefern. Um diesen Mangel zu beheben, hat van Driest [16] folgende Korrektur vorgeschlagen:

$$\ell = \ell^x \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right) \right) \quad (29).$$

Dabei ist y^+ der mit der Wandschubspannung und der kinematischen Zähigkeit dimensionslos gemachte Wandabstand und A eine aus dem Vergleich mit Experimenten in glatten Kanälen bestimmte Größe mit dem Wert 26. Diese Korrektur hat sich ausgezeichnet bewährt.

Eine anderer, für eine Kanalströmung aber nicht so entscheidender Nachteil ist das Verschwinden der Austauschgröße ϵ^M an den Maxima bzw. Minima des Geschwindigkeitsfeldes. Im Rahmen des Prandtl'schen Mischungswegansatzes gibt es hierfür noch keine bewährte Korrekturfunktion. Dies liegt einmal daran, daß ℓ^2 gegen unendlich gehen muß,

wenn $\partial u_1 / \partial x_3$ gegen Null geht, derartige zunächst unbestimmte Ausdrücke sind zur Behandlung auf Rechenmaschinen endlicher Genauigkeit nicht geeignet. Zum anderen ist auch die experimentelle Bestimmung dieser Grenzwerte äußerst schwierig, da die Geschwindigkeitsgradienten verschwinden. Weil hier entsprechend Gleichung (25) die Bestimmung der ϵ^M -Größe an den maximalen Geschwindigkeitsgradienten geknüpft ist, verschwindet ϵ^M für eine Stabbündelgeometrie nur in einzelnen Feldpunkten. Da außerdem bei der Verwendung von Differenzgleichungen die Austauschgröße nur in den Begrenzungsflächen des Kontrollvolumens bekannt sein muß, was dem Mittelwert der Austauschgröße zweier benachbarter Punkte entspricht, verschwindet die Austauschgröße für die Differenzgleichungen an keiner Stelle des betrachteten Gebiets. Es konnte daher das Prandtl'sche Modell ohne Änderung übernommen werden.

2.1.2 Das Buleev'sche Austauschmodell

Ein weiteres Modell zur Berechnung der turbulenten Scherspannungen ist das von Buleev [17]. Buleev hat die recht einfachen Modellvorstellungen von Prandtl wesentlich verfeinert und bietet eine wenn auch sehr komplizierte Rechenvorschrift für die turbulenten Scherspannungen an. Daneben gibt er als Vereinfachungen des komplizierten Modells auch verschiedene Formeln zur Bestimmung der Austauschgröße ϵ^M an. Bei ihm ist der Beitrag der Geschwindigkeit im Punkte M zur Schwankungsgeschwindigkeit im Punkte M_0

$$u_i' (M \rightarrow M_0) = \left[\overline{u_i} (M) - \overline{u_i} (M_0) \right] \cdot f_1 - u_i' (M) \cdot f_0 \quad (30).$$

Oder in Worten: Der Beitrag des Punktes M zur Schwankungsgeschwindigkeit im Punkte M_0 ergibt sich aus der Differenz der Momentangeschwindigkeit im Punkte M und der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit in M_0 , modifiziert mit den Einflußfunktionen f_0 und f_1 , die die Wechselwirkung des von M nach M_0 wandernden Flüssigkeitsballens mit seiner Umgebung beschreiben. Da dies nur der Beitrag des Punktes M ist, ergibt sich die Korrelation $\overline{u_i' u_j'}$ erst durch Integration über das umgebende Volumen zu:

$$\overline{u_i' u_j'} = \int_V u_i' (M \rightarrow M_0) \cdot u_j' (M \rightarrow M_0) \cdot \phi (M \rightarrow M_0) dV \quad (31).$$

Die Funktion ϕ gibt darin die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Flüssigkeitsballen aus dem Punkt M in M_0 eintrifft. Für die Funktionen f_0 , f_1 und ϕ werden Plausibilitätsansätze gemacht, deren Konstanten durch Vergleich mit Experimenten angepasst werden. Führt man Gleichung (30) in Gleichung (31) ein und ersetzt die Differenz zwischen den mittleren Geschwindigkeiten in M und M_0 durch den Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten in Richtung $\overline{M M_0}$ multipliziert mit dem Abstand s dieser Punkte, so erhält man:

$$\begin{aligned} \overline{u_i' u_j'} = \int_V (s^2 \cdot f_1^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial s}}_I + s \cdot \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial s} \cdot f_1 \cdot u_j' (M) \cdot f_0}_{II} \\ + \underbrace{u_j' (M) \cdot f_0 \cdot s \cdot \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial s} \cdot f_1}_{III} + \underbrace{u_i' (M) \cdot f_0^2 \cdot u_j' (M)}_{IV}) \\ * \phi (M \rightarrow M_0) dV \end{aligned} \quad (32).$$

Da die Schwankungsgeschwindigkeit kollinear mit der Richtung $\overline{M M_0}$ ist, gilt:

$$u_i' (M) = \vec{V}' (M) \cdot \cos (S, x_i) \quad (33).$$

Mit der Beziehung für die Schwankungsgeschwindigkeit im Punkte M

$$\vec{V}' (M) = \mu \cdot L \cdot \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_n} \right| ; (\mu = \text{const}) \quad (34)$$

und

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\ell(\varphi)} d\varphi ; (\ell(\varphi) = \text{Wandabstand}) \quad (35)$$

ist das Gleichungssystem geschlossen. Wie man aus Gleichung (34) erkennt, ist dieses Modell isotrop.

Ausgehend von Gleichung (32) werden nun verschiedene Vereinfachungen eingeführt. Betrachtet man eine Kanalströmung, so treten z.B. nur in i-Richtung zeitlich gemittelte Geschwindigkeiten auf, damit entfallen die Terme I und III. Vernachlässigt man nun noch den Term IV, zerlegt

die Ableitung nach s nach den Koordinatenrichtungen x_i und nimmt die Gradienten der gemittelten Geschwindigkeit als konstant über dem Integrationsvolumen an, so ergibt sich für eine eindimensionale Strömung (d.h. $\partial / \partial x_2 = 0$) z.B.

$$\overline{u_1' u_3'} = \epsilon^M \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}$$

$$= \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \cdot \mu \cdot \int_V S \cdot L \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_n} \right| \cdot f_0 \cdot f_1 \cdot \cos^2(x_3, S) \cdot \phi (M \rightarrow M_0) dV \quad (36)$$

Durch die Beschränkung auf eine Kanalströmung kann man nun noch die Integration über ein Kugelvolumen auf die Integration über eine Kreisfläche zurückführen. Damit ergibt sich:

$$\epsilon^M = \mu \int_F S \cdot L \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_n} \right| \cdot f_0 \cdot f_1 \cdot \cos^2(x_3, S) \cdot G (M \rightarrow M_0) dF \quad (37).$$

Fasst man das Flächenintegral in einer Konstanten zusammen, so ergibt sich eine Formel des Typs der von Prandtl vorgeschlagen wurde:

$$\epsilon^M = c_1 \cdot f_0 \cdot f_1 \cdot L^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_n} \right| \quad \underline{[18]} \quad (38).$$

Eine andere nicht näher begründete Beziehung wurde von Buleev [19] 1964 vorgeschlagen. Sie lautet:

$$\epsilon^M = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{L \cdot \bar{u}_1}{\nu} \leq 7,1^2 \\ \frac{\nu}{7,1^2} \left(\frac{L \cdot \bar{u}_1}{\nu} - 7,1^1 \right) & \text{für } \frac{L \cdot \bar{u}_1}{\nu} > 7,1^2 \end{cases} \quad (39).$$

Diese Formel ist interessant, da sie in der Nähe der Geschwindigkeitsmaxima noch endliche ϵ^M Größen liefert.

Das Buleev-Modell in der Form der Gleichung (37) wird von Ramm und Johansson [20] in Ringspalt und Stabbündelgeometrie angewendet. Sie haben das Modell dahingehend erweitert, daß bei der Integration von Gleichung (37) die tatsächliche Kanalberandung berücksichtigt wird

und daß zur Simulation von Anisotropie bei der Bestimmung der Schwingungsgeschwindigkeiten parallel zur Wand in Gleichung (34) für L eine neue empirische Funktion eingesetzt wird.

2.2 Ergebnisse isotroper Modelle

Neben diesen Verfahren, die die Austauschgrößen aus dem zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsfeld berechnen, sind in den letzten Jahren Methoden in den Vordergrund getreten, die weitere Transportgleichungen für die turbulente Energie, turbulente Längen oder gar für die turbulenten Schubspannungen selbst lösen. Diese Verfahren sind vielversprechend. Man hat heute aber noch nicht den Stand an allgemeiner Gültigkeit erreicht, der es erlaubt, sie ohne neue Annahmen zum Beispiel auf eine Stabbündelgeometrie zu übertragen. Ein derartiger Versuch wurde von Kjellström [21] durchgeführt. Er verwendet das Modell von Spalding [22]. Neben einer Abweichung zwischen den gemessenen und berechneten Geschwindigkeiten von -25 % stellte er fest, daß dieses Verfahren im Hinblick auf Rechenzeit und Speicherplatz noch optimiert werden muß. Dabei ist es interessant zu wissen, daß Kjellström nur ein Sechstel der in dieser Arbeit betrachteten Fläche berechnete.

Auf die Anwendung der Buleev'schen Modelle wurde in dieser Arbeit mit Ausnahme von Gleichung (39) ebenfalls verzichtet, da zum einen Buleev selbst von seiner differenzierten Theorie schließlich auf dasselbe Ergebnis wie Prandtl kam und zum anderen weil hier drei "plausible" Funktionen mit insgesamt sechs aus Experimenten bestimmten Koeffizienten eingeführt werden; selbst dieses Bündel von Annahmen reicht aber offensichtlich noch nicht aus (Verbesserungen von Ramm - Johannsen), um eine befriedigende Übereinstimmung mit den Experimenten zu erzielen.

Schließlich mußte auch noch auf die Bestimmung der Mischweglänge nach Kármán verzichtet werden, da sich durch Testrechnungen gezeigt hat, daß infolge der Verwendung der zweiten Ableitung dieses Modell zu Gleichungssystemen führt, die bei iterativer Lösung sehr instabil sind.

Die verbliebenen Modelle wurden in das Rechenprogramm VERA (Velocity distribution with Eddy-diffusivity models in Rod Assemblies) eingebaut. Für jedes der Modelle wurden dann Nachrechnungen der Experimente von Kjellström [21] durchgeführt. In der Tabelle 5 sind die Parameter der Rechnung zusammengestellt.

Tabelle 5: Parameter der Nachrechnungen der Experimente von Kjellström

Fall	Darstellung der zähen Unterschicht	turbul. Länge	Profillänge y	Turbulenz-Modell	Re
1	0	$\frac{l}{L} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\ell(\varphi)} d\varphi$	0	Gl. (39)	270000
2	Gl. (29) y^+ mit gemitteltem τ_{φ}	Gl. (26) Rampe	äquivalente Ringzone [23]	Gl. (25)	"
3	"	"	$f(\varphi)$ [24]	"	"
4	Gl. (29) y^+ mit lokalem τ_{φ}	"	"	"	"
5	"	Gl. (27) Parabel	"	"	"

Um den starken Funktionswertänderungen in den wandnahen Zonen gerecht zu werden, wurde dem krummlinigen System dort ein zylindrisches Koordinatensystem unterlegt (Bild 10). Die Behandlung der Erhaltungsgleichungen erfolgt jedoch wie in Abschnitt 1 beschrieben.

Die Verwendung des zylindrischen Systems bringt den Vorteil, daß man dort die Verteilung der Maschenlinien senkrecht zur Wand erneut unabhängig vom krummlinig orthogonalen System steuern kann und daß verschiedene P/D-Verhältnisse mit einem krummlinigen System eingestellt werden können.

Ein Querschnitt des von Kjellström verwendeten Kanals ist in Bild 11 gezeigt. Das P/D-Verhältnis ist 1.217 und der Stabdurchmesser 156 mm.

Bei diesem Vergleich der gemessenen und berechneten Geschwindigkeiten werden möglichst unverarbeitete Werte verwendet, also Geschwindigkeiten, Reibbeiwerte und Wandschubspannungen. Bei den sonst üblichen dimensionslosen Darstellungen geht stets die lokale Wandschubspannung ein, deren Messung ist aber, wenn sie überhaupt durchgeführt wird, mit relativ großen Fehlern behaftet.

Zunächst werden die radialen Geschwindigkeitsprofile entlang der Symmetrielinien $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 30^\circ$ verglichen. Sie sind in Bild 12 für den Fall 1 aufgetragen. Aus Bild 12 erkennt man, daß die berechneten Profile in Wandnähe zu steil und im Bereich der Maxima zu flach verlaufen. Die Ursache dafür ist, daß im Fall 1 die maximalen Austauschgrößen im Zentrum der Strömung auftreten und dort nur sehr kleine Geschwindigkeitsgradienten zulassen.

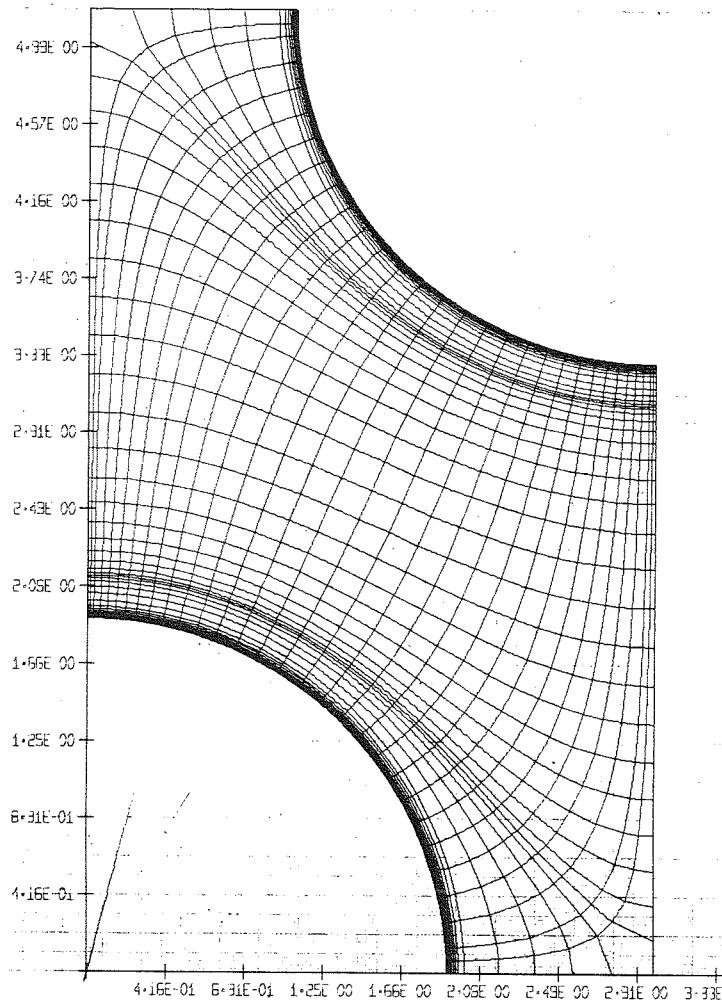


Bild 10: Krummlinig orthogonales Maschennetz mit besonderer Feinteilung für die wandnahe Zone

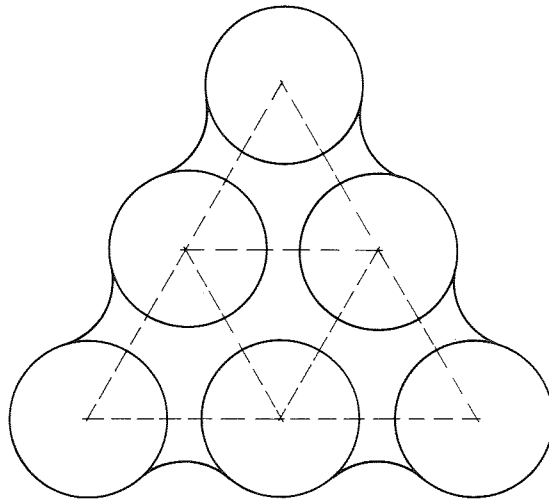


Bild 11: Querschnitt des Testkanals von Kjellström [21_7]

In Bild 13 ist das Ergebnis für den Fall 2 aufgetragen. Es ergibt sich hiernach von dem Profilverlauf her gesehen eine wesentlich bessere Übereinstimmung als im Fall 1. Die maximalen Geschwindigkeiten zeigen aber sehr deutliche Abweichungen. Die Ursache dafür kann sein, daß hier die Profillänge bei der Bestimmung der Austauschgröße (Gleichung (26)) konstant gleich der Dicke der äquivalenten Ringzone gesetzt wurde. Damit wird die Austauschgröße bei $\varphi = 30^\circ$ zu klein berechnet, dies führt zu einer Überschätzung der Geschwindigkeit. Bei $\varphi = 0^\circ$ dagegen wird die Austauschgröße zu groß berechnet, dies führt zu einer Unterschätzung der Geschwindigkeit.

Im Fall 3 (Bild 14) wurde daher die Profillänge \hat{y} als winkelabhängige Größe eingeführt. Sie entspricht der Länge der Wandnormalen von der Wandoberfläche zur Symmetrielinie. Man stellt fest, daß sich die Profile in der Nähe ihrer Maxima in der gewünschten Richtung verschoben haben. Dagegen ist der Verlauf der Profile in den wandnäheren Zonen etwas schlechter geworden.

Im Fall 4, wo bei der Berechnung der Austauschlänge für die zähe Unterschicht (Gleichung (29)) die lokale und nicht mehr wie zuvor, die mittlere Wandschubspannung eingesetzt wurde, konnte keine Auswirkung auf die Profile festgestellt werden.

Im Fall 5, in dem die Austauschlänge nach Nikuradse bestimmt wurde, werden die Geschwindigkeitsmaxima angehoben (Bild 15). Dies rührt daher, daß die Austauschlänge λ ihren Maximalwert nicht so rasch wie zuvor erreicht. Damit werden die Austauschgrößen im Bereich um $0,35 \cdot \hat{y}$ kleiner als vorher und ermöglichen damit höhere Maximalgeschwindigkeiten. Trotz der stärkeren Überschätzung bei $\varphi = 30^\circ$ paßt sich das mit der Nikuradse-Formel bestimmte Geschwindigkeitsprofil dem Experiment am besten an. Für diesen Fall wurde in einer weiteren Testrechnung die Iterationsgenauigkeit um eine Zehnerpotenz erhöht. Dies brachte aber keine Änderung der Ergebnisse. Ebenso wenig brachte eine weitere Rechnung, in der das Maschennetz von 30 x 60 Maschen

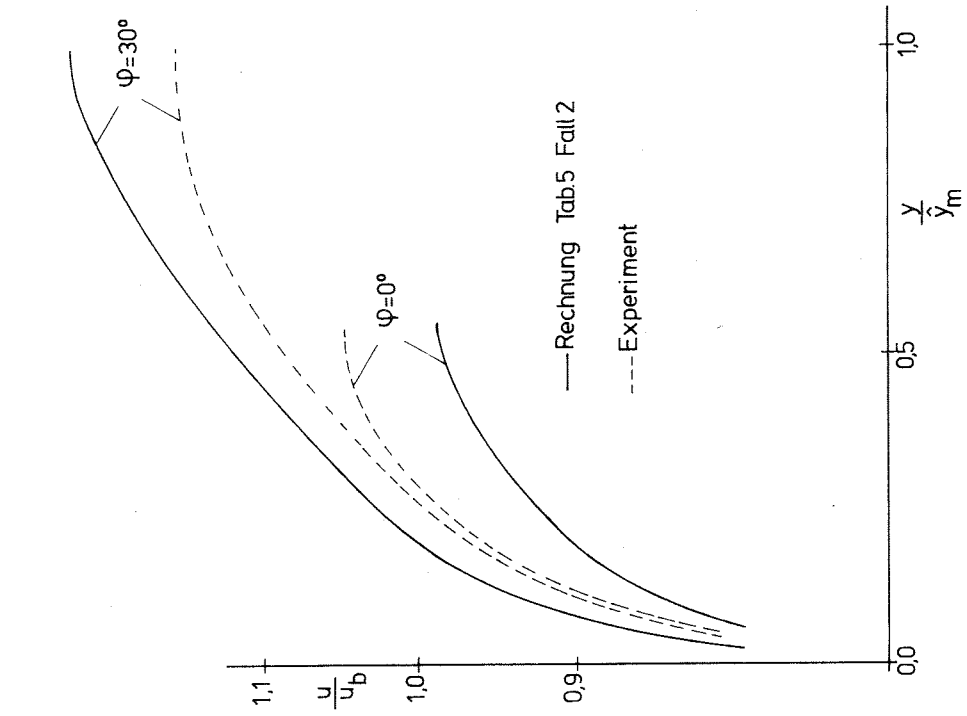


Bild 13: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

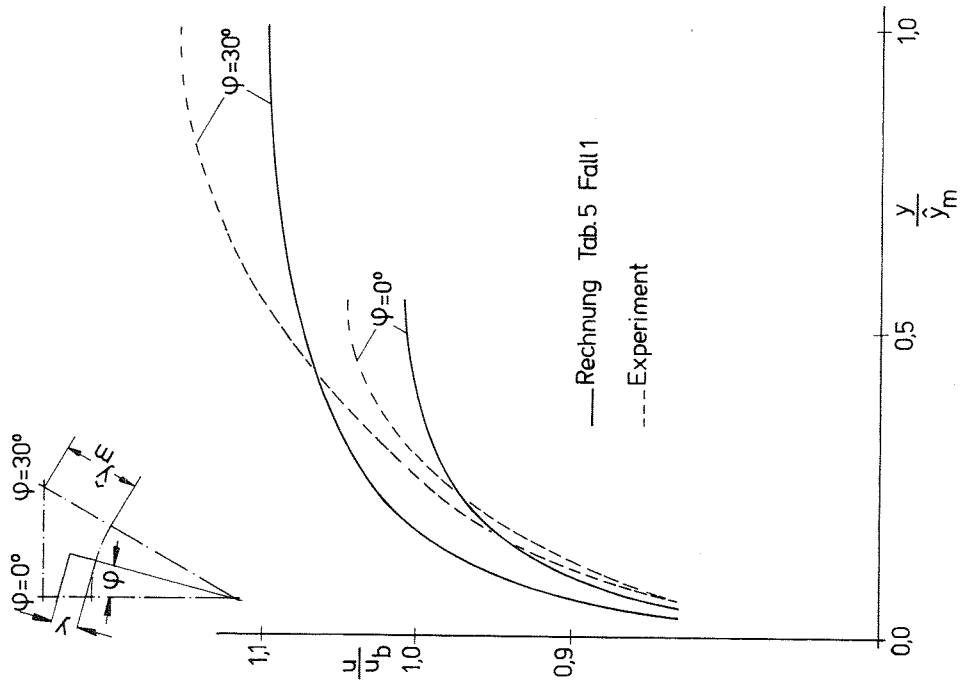


Bild 12: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

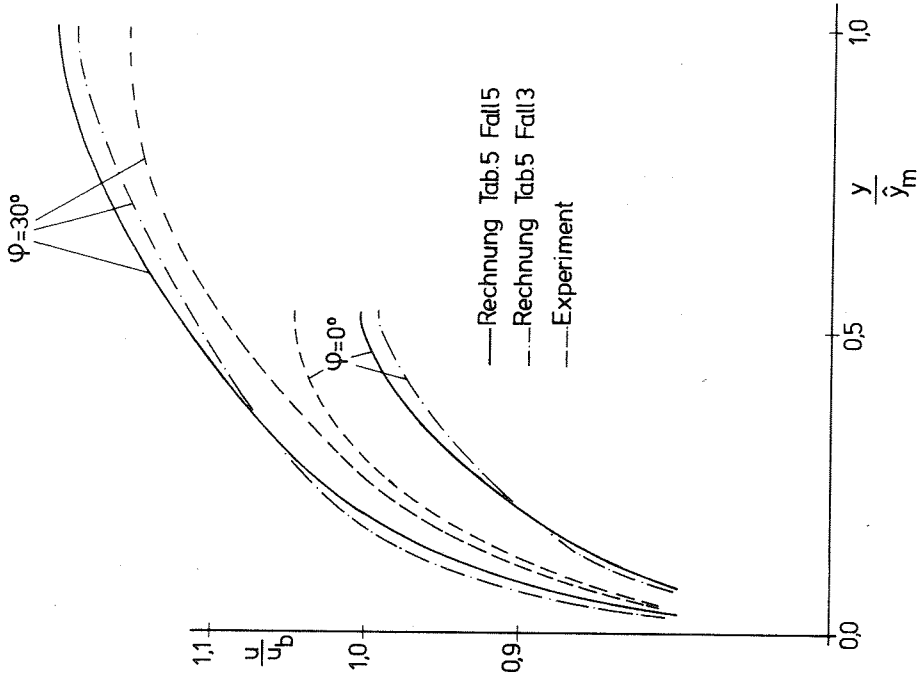


Bild 15: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

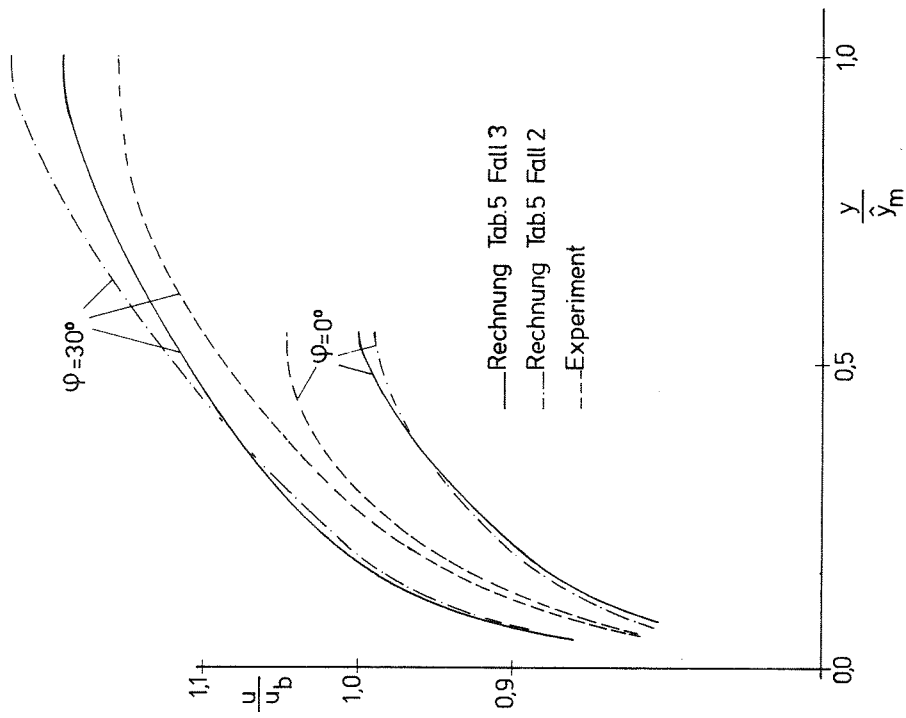


Bild 14: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

auf 50 x 80 Maschen verfeinert wurde, nennenswerte Änderungen.

Das so bestimmte Geschwindigkeitsfeld stellt also die numerisch richtige Lösung des Problems bei den gegebenen Randbedingungen und Modellvorstellungen dar.

Die noch vorhandenen Abweichungen können einmal durch Mängel in den Experimenten und zum anderen durch unzureichende theoretische Modellvorstellungen verursacht werden. Besonders kritische Punkte für die Experimente sind:

- Der Einfluß der Testkanalwände.
Diese im theoretischen Modell nicht vorhandenen Wände, beeinflussen das Geschwindigkeitsprofil um so stärker, je weniger Unterkänäle im Testkanal gebildet werden.
- Das Verhältnis Stababstand zu Stabdurchmesser
Dies ist im theoretischen Modell in axialer Richtung konstant. Für ein Experiment ist es aber schwierig, diese Konstanz zu erreichen.
- Die Abmessungen des Strömungsquerschnitts.
Sind die Strömungsquerschnitte klein, so sind die Geschwindigkeitsgradienten groß und eine Fehlpositionierung der Meßsonde führt zu entsprechend großen Fehlern bei der Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils.

Dies zeigt, daß auch bei Verwendung einer richtigen Theorie stets Abweichungen zwischen Rechnung und Experiment zu erwarten sind. Eine Verbesserung der theoretischen Modellvorstellungen wird im nächsten Abschnitt durchgeführt.

2.3 Theorie anisotroper Turbulenzmodelle

Bis hierher war in allen Modellen davon ausgegangen worden, daß es nur eine Austauschgröße ϵ^M gibt. Diese hat in jedem Ortspunkt einen anderen Wert, für einen Punkt ist er jedoch richtungsunabhängig. Nun wurde aber durch Experimente für den Stofftransport nachgewiesen [25], daß die Austauschgröße für den Stofftransport in Wandnähe ($< 0,35 y$) parallel zur Wand deutlich größer ist, als die senkrecht zur Wand. Dies legt die Annahme nahe, daß ein ähnlicher Effekt auch

bei der Impulsaustauschgröße auftritt. Er wurde inzwischen auch durch Experimente bestätigt [26]. Die dabei ermittelten Werte streuen aber so stark, daß noch keine zuverlässigen Zahlenangaben für das Verhältnis radialer zu tangentialer Austauschgröße gemacht werden können.

Trotzdem sollte man bei der Weiterentwicklung des Modells davon ausgehen, daß die Impulsaustauschgrößen anisotrop sind.

Obwohl die Austauschgrößen keine physikalischen Stoffwerte, sondern nur Pseudostoffwerte sind, kann man den Formalismus für physikalische Stoffgesetze auf sie anwenden. Bei einem allgemeinen anisotropen "Stoffgesetz" ist der Spannungstensor mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor über den Stoffgesetzentensor 4. Stufe verknüpft.

$$\tau_{ij} = \rho(v \cdot \delta_{il} \delta_{jk} + \epsilon_{ijkl}^M) \cdot (\bar{u}_{k,l} + \bar{u}_{l,k}) \quad (40).$$

Nach unseren Voraussetzungen tritt nur eine Geschwindigkeit in 1-Richtung auf, damit ist k identisch 1; außerdem benötigen wir für die Impulsbilanz nur die Schubspannungen, die in 1-Richtung wirken, damit ist auch j identisch 1. Wegen der ausgebildeten Strömung verschwinden Ableitungen in 1-Richtung also ist $l \neq 1$ und schließlich sollen in den Flächen senkrecht zur Hauptströmungsrichtung in 1-Richtung nur Druckkräfte wirken, also ist auch $i \neq 1$. Damit verbleiben aus Gleichung (40) folgende Beziehungen:

$$\tau_{21} = \rho(v + \epsilon_{2112}^M) \cdot \bar{u}_{1,2} + \rho \epsilon_{2113}^M \cdot \bar{u}_{1,3} \quad (41).$$

$$\tau_{31} = \rho \epsilon_{3112}^M \cdot \bar{u}_{1,2} + \rho(v + \epsilon_{3113}^M) \cdot \bar{u}_{1,3}$$

Im Falle eines isotropen Stoffgesetzes ist ϵ_{2112}^M gleich ϵ_{3113}^M und ϵ_{2113}^M bzw. ϵ_{3112}^M gleich Null. Die einfachste Annahme für ein anisotropes Stoffgesetz ist nun, daß man senkrecht zur Wand (Größe ϵ_{3113}^M) die Gesetze beibehält, die in Punkt 2.1 erläutert wurden, parallel zur Wand, also für die Größe ϵ_{2112}^M , eine neue Rechenvorschrift sucht und

die Größen ϵ_{2113}^M bzw. ϵ_{3112}^M gleich Null setzt. Die Hauptachsen des anisotropen Stoffgesetzes liegen damit senkrecht bzw. parallel zur Wand.

Als nächstes muß der Ausdruck ϵ_{2112}^M bestimmt werden. Analog zu dem Prandtl'schen Mischungswegansatz:

$$\epsilon_{3113}^M = \epsilon_{3113}^M = \ell_r^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_n} \right| \quad (42)$$

wird folgender Ansatz vorgeschlagen:

$$\epsilon_{2112}^M = \ell_\varphi^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_n} \right| \quad (43).$$

Da die Anisotropie mit zunehmendem Abstand von der Wand kleiner wird, ist es sinnvoll, dort der Länge ℓ_φ denselben Wert zu geben wie der Länge ℓ_r . Andererseits muß aber auch die Größe ϵ_{2112}^M an der Wand gleich Null sein. Da wie oben ausgeführt ϵ_{2112}^M größer als ϵ_{3113}^M sein soll, muß auch ℓ_φ größer als ℓ_r sein. Die einfachste Funktion, die diesen Vorstellungen entspricht, ist eine Rampenfunktion mit dem Maximalwert $0,14 \hat{y}$ und einer Steigung m_{ℓ_φ} zwischen $0,4$ und unendlich.

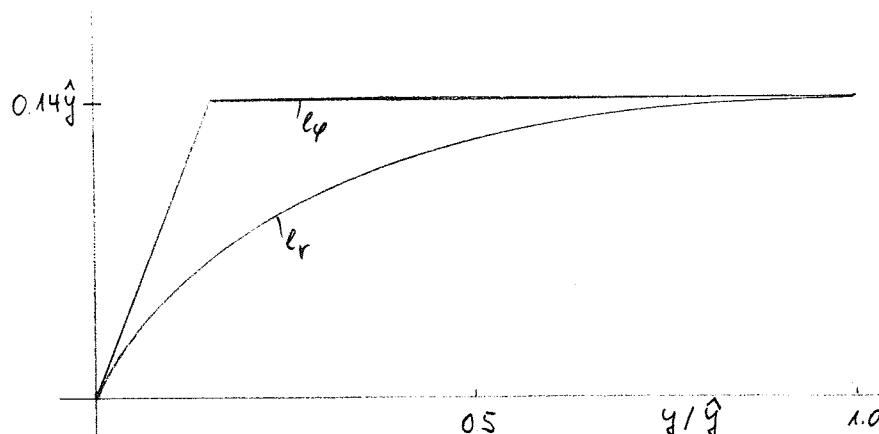


Diagramm 3: Die Mischweglängen ℓ_r und ℓ_φ über dem Wandabstand.

Bevor dieses Modell programmiert werden konnte, war die Frage zu klären, wie sich der Stoffgesetzentensor transformiert, wenn das Koordinatensystem, in dem die Problemgleichung gelöst wird, gegenüber der Wandnormalen verdreht ist.

Diese Transformation ergibt sich wiederum in Tensornotation zu:

$$\epsilon^{M'}_{ijkl} = a_{im} \cdot a_{jn} \cdot a_{ko} \cdot a_{lp} \cdot \epsilon^M_{mnop} \quad (44)$$

wobei der gestrichene Tensor im gedrehten System gültig ist. Die Größen a_{im} usw. sind Tensoren, die den Cosinus des Drehwinkels der einzelnen Koordinatenachsen gegeneinander enthalten. Da das gedrehte System ebenfalls orthogonal ist und die 1-Achse nicht verdreht wurde, bleibt aus Gleichung (44)

$$\epsilon^{M'}_{2112} = \epsilon^M_{2112} \cdot \cos^2 \varphi + \epsilon^M_{3113} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$\epsilon^{M'}_{3113} = \epsilon^M_{2112} \cdot \sin^2 \varphi + \epsilon^M_{3113} \cdot \cos^2 \varphi \quad (45).$$

$$\epsilon^{M'}_{2113} = \epsilon^{M'}_{3112} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (\epsilon^M_{2112} - \epsilon^M_{3113})$$

Dabei ist φ der Drehwinkel des Koordinatensystems zur Wandnormalen.

Da nach Gleichung (45) $\epsilon^{M'}_{3112}$ bzw. $\epsilon^{M'}_{2113} \neq 0$, ergibt sich nach Gleichung (41), daß in einer Schnittebene eine Schubspannung auftritt, obwohl der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zu dieser Ebene verschwindet. Oder anders ausgedrückt, die Flächennormale der Nullschubspannungsebene und die Isotachenlinie fallen nicht zusammen.

2.4 Ergebnisse für anisotrope Turbulenz

Um die Steigung $m_{\ell\varphi}$ der Rampenfunktion von ℓ_{φ} festzulegen, wurde diese unter Beibehaltung der übrigen Größen wie in Fall 5, Tabelle 5 variiert und die damit bestimmte Wandschubspannungsverteilung mit den Messungen von Kjellström verglichen. Die Ergebnisse sind in Bild 16 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß das isotrope Stoffgesetz eine zu hohe Schubspannungsvariation vorhersagt. Mit zunehmender Steigung der Rampenfunktion von ℓ_{φ} ergibt sich aber auf Grund der damit zunehmenden Austauschgrößen in Umfangsrichtung eine Dämpfung der Schubspannungsvariation, die etwa ab einer Steigung von $m_{\ell\varphi} = 5$ bedingt durch die angenommene Rampenfunktion ein Sättigungsverhalten zeigt.

Bei einer Steigung von $m_{\ell\varphi} = 5$ hat man aber die Wandschubspannungsverteilung im Rahmen der Meßgenauigkeit schon erreicht. Zum Vergleich sind in Tabelle 6 die nach den Methoden anderer Autoren berechneten Maximal- und Minimalwerte der Wandschubspannung für diesen Fall entsprechend der Tabelle von Kjellström [21] angegeben.

	$\tau_{\varphi} / \tau_{av}$	
	$\varphi = 0^{\circ}$	$\varphi = 30^{\circ}$
Ibragimov (halbempirisch)	0,981	1,019
Nijsing Eifler (mit Sekundärströmung)	0,94	1,08
Papier + Redman $\epsilon_{\varphi}^M = \text{Max}(\epsilon_r^M) = \text{const}$	0,984	1,020
diese Theorie Steigung $m_{\ell\varphi} = 5$	0,959	1,037

Tabelle 6: Vergleich der Amplituden der Wandschubspannung aus [21]

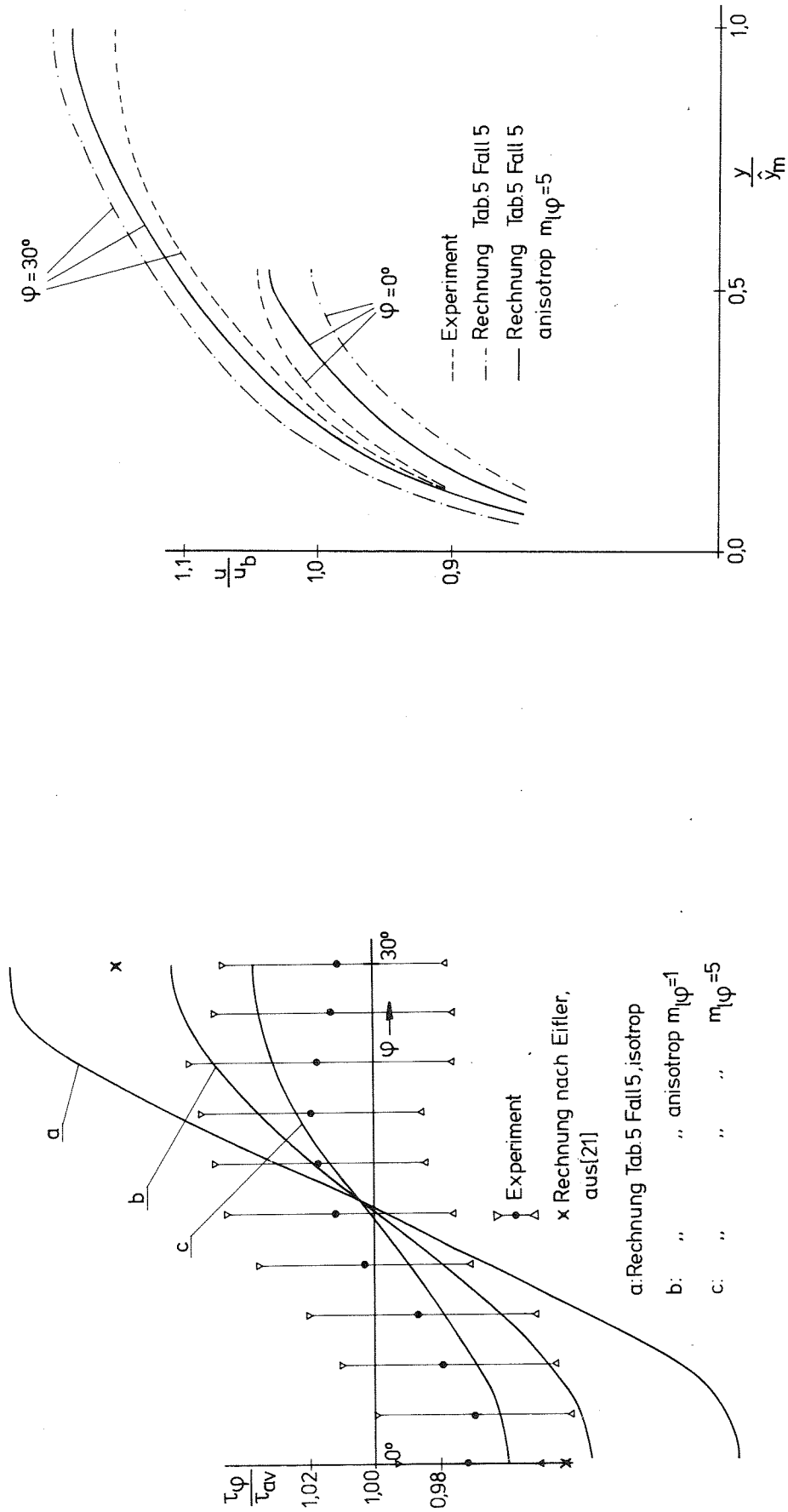


Bild 17: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

Bild 16: Wandschubspannungsverteilung am Stabumfang

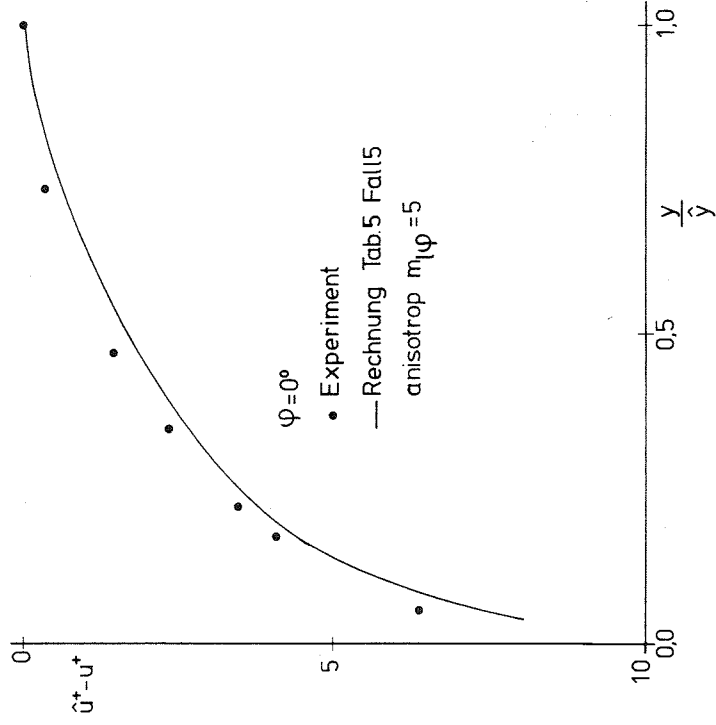


Bild 19: Vergleich dimensionsloser radialer Geschwindigkeitsprofile

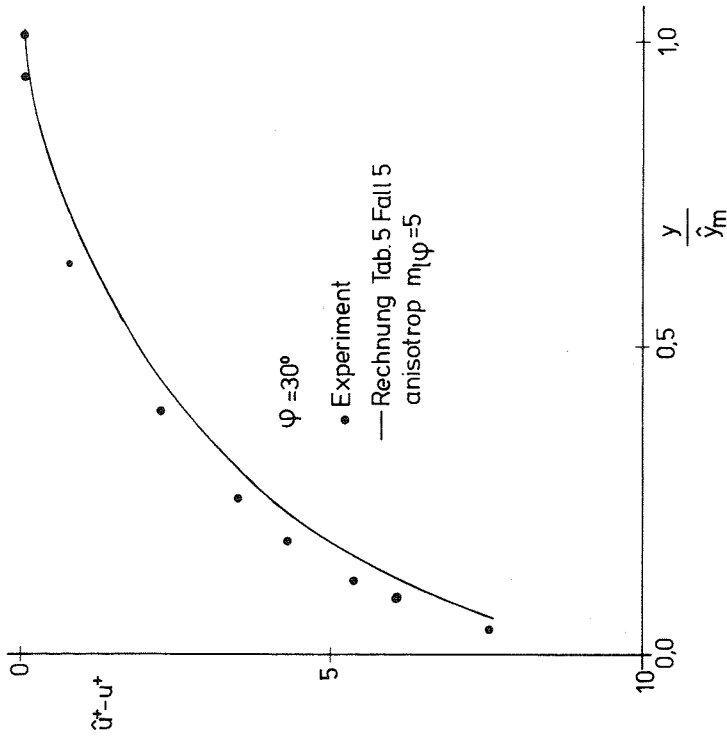


Bild 18: Vergleich dimensionsloser radialer Geschwindigkeitsprofile

Wie schon Hofmann [24] gezeigt hat, ist die Variation der in radialer Richtung gemittelten Geschwindigkeit bei Rapier-Redman zu klein. Damit ist auch die Variation der Wandschubspannung zu klein. Andererseits ist die Variation von $\bar{\tau}_\varphi$ nach Eifler-Nijsing im Vergleich zu den Messungen hier zu groß. Die in Abschnitt 2.3 entwickelte Theorie liegt in der Mitte dieser Grenzwerte und gibt damit die wirklichen Verhältnisse am besten wieder.

In Bild 17 werden noch die mit dem anisotropen Modell gewonnenen Geschwindigkeitsprofile verglichen. Auch hier kann man jetzt eine sehr zufriedenstellende Übereinstimmung mit den gemessenen Profilen feststellen.

Zum Abschluß dieser Betrachtungen über die Geschwindigkeitsprofile sind in Bild 18 und 19 die mit der Wandschubspannung dimensionslos gemachten Geschwindigkeitsprofile bei $\varphi = 30^\circ$ bzw. $\varphi = 0^\circ$ aufgetragen. Auch hier ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Schließlich ist in Bild 20 das Isotachenfeld für den zuletzt besprochenen Fall aufgetragen.

Neben diesen lokalen Größen müssen auch integrale Größen übereinstimmen. Diese integrale Größe ist der Reibbeiwert. Die hier berechneten Werte für $Re = 270\ 000$ und $Re = 149\ 000$ sind in das Protokoll von Kjellström eingetragen (Bild 21). Auch hier erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Die unterbrochene Linie gilt für glatte Rohre. Darunter liegen die Meßpunkte für den ganzen Kanal und darüber als Dreiecke die für das unendlich ausgedehnte Bündel umgerechneten Werte. In Bild 22 sind noch die Profile für $Re = 149\ 000$ verglichen, mit diesem Vergleich ist die Aussage erlaubt, daß die Experimente von Kjellström mit der hier vorgestellten Methode sehr gut nachgerechnet werden können.

Da dies aber nur für ein Experiment gilt, wurden auch Vergleichsrechnungen für die Messungen von Eifler-Nijsing [27] bei $P/D = 1,15$ und $Re = 26\ 000$ bzw. $Re = 54\ 000$ durchgeführt, obwohl die Fehler dieser Messungen, wie von Eifler bestätigt [28], ziemlich groß sind. Besonders wichtig ist, daß dort sowohl die Reynoldszahl als auch die bezogenen Geschwindigkeitsprofile mit der mittleren Geschwindigkeit im Testkanal gebildet wurden und nicht, wie es im Rechenprogramm und bei Kjellström geschieht, mit der mittleren Geschwindigkeit eines Unterkanals im unendlichen Bündel. Man muß daher die Geschwindigkeitsprofile von Eifler-

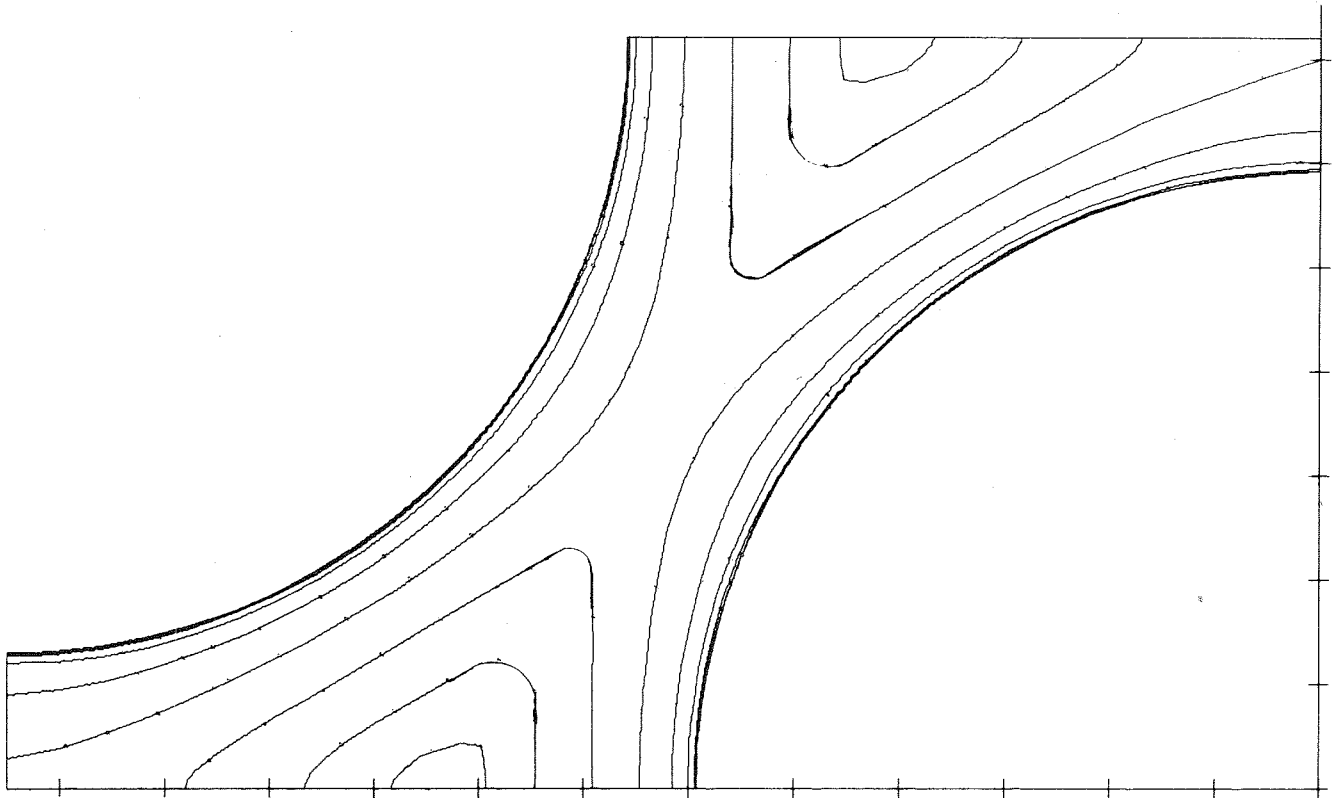


Bild 20: Isotachenfeld des berechneten Querschnitts,
Parameter nach Tab. 5, Fall 5 anisotrop $m_{\varphi} = 5$

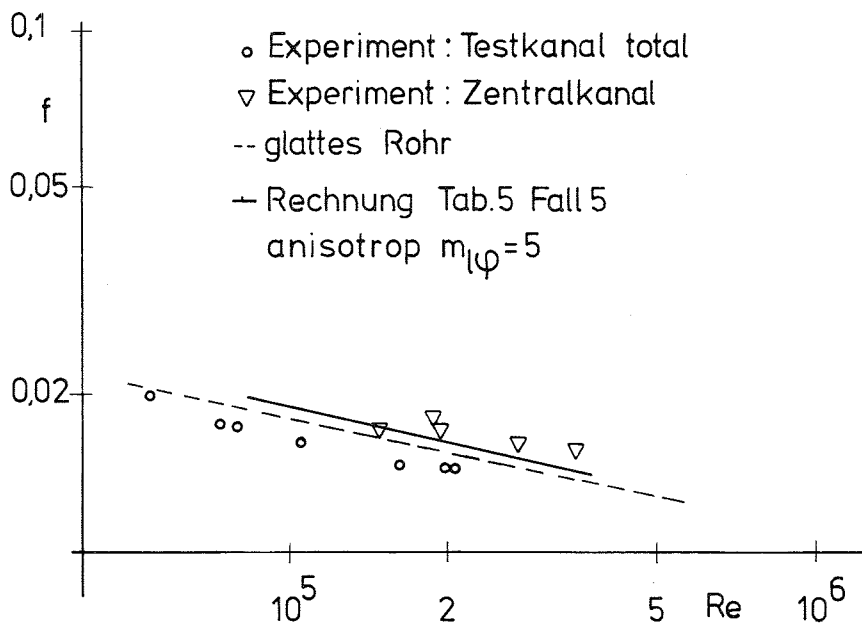


Bild 21: Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit von der Reynoldszahl,
Meßwerte nach Kjellström [21_7]

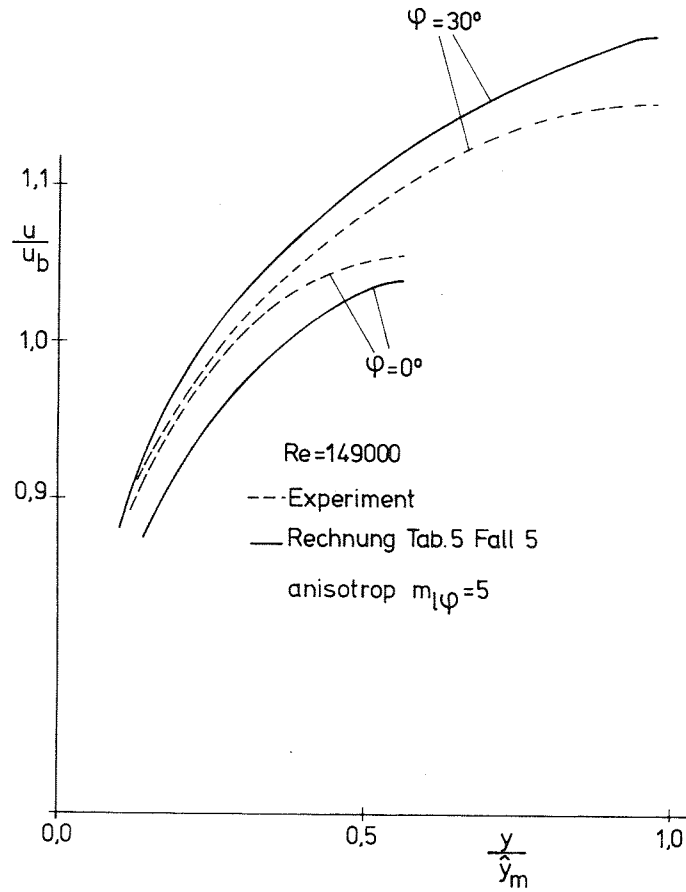


Bild 22: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

Nijsing auf die mittlere Geschwindigkeit im Unterkanal umrechnen. Ebenso muß bei der Vergleichsrechnung eine geänderte Reynoldszahl zugrunde gelegt werden.

Für das endliche Bündel gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \rho \cdot u_{be}^2 \frac{f_e}{D_{he}} \quad (46)$$

für das unendliche Bündel gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \rho \cdot u_{bu}^2 \frac{f_u}{D_{hu}} \quad (47)$$

Setzt man den Druckgradienten in beiden Fällen gleich, so ist

$$\frac{u_{be}}{u_{bu}} = \sqrt{\frac{D_{he} \cdot f_u}{D_{hu} \cdot f_e}} \quad (48)$$

Es gilt auch

$$\frac{D_{he}}{D_{hu}} = \frac{\pi \cdot D}{\pi \cdot D + 4(P - D)} = 0,84, \quad (P/D = 1,15) \quad (49)$$

und

$$\frac{f_u}{f_e} > 1 \quad (50)$$

Da über die Größe f_u/f_e keine genauen Aussagen gemacht werden können, bleibt nur die Grenzaussage

$$0,91 \leq \frac{u_{be}}{u_{bu}} \leq 1,0 \quad \frac{u_{be}}{u_{bu}} \approx 0,95 \quad (51)$$

Da danach im unendlichen Bündel eine um ca. 5 % höhere Reynoldszahl vorliegt, wurde diese um 5 % erhöht.

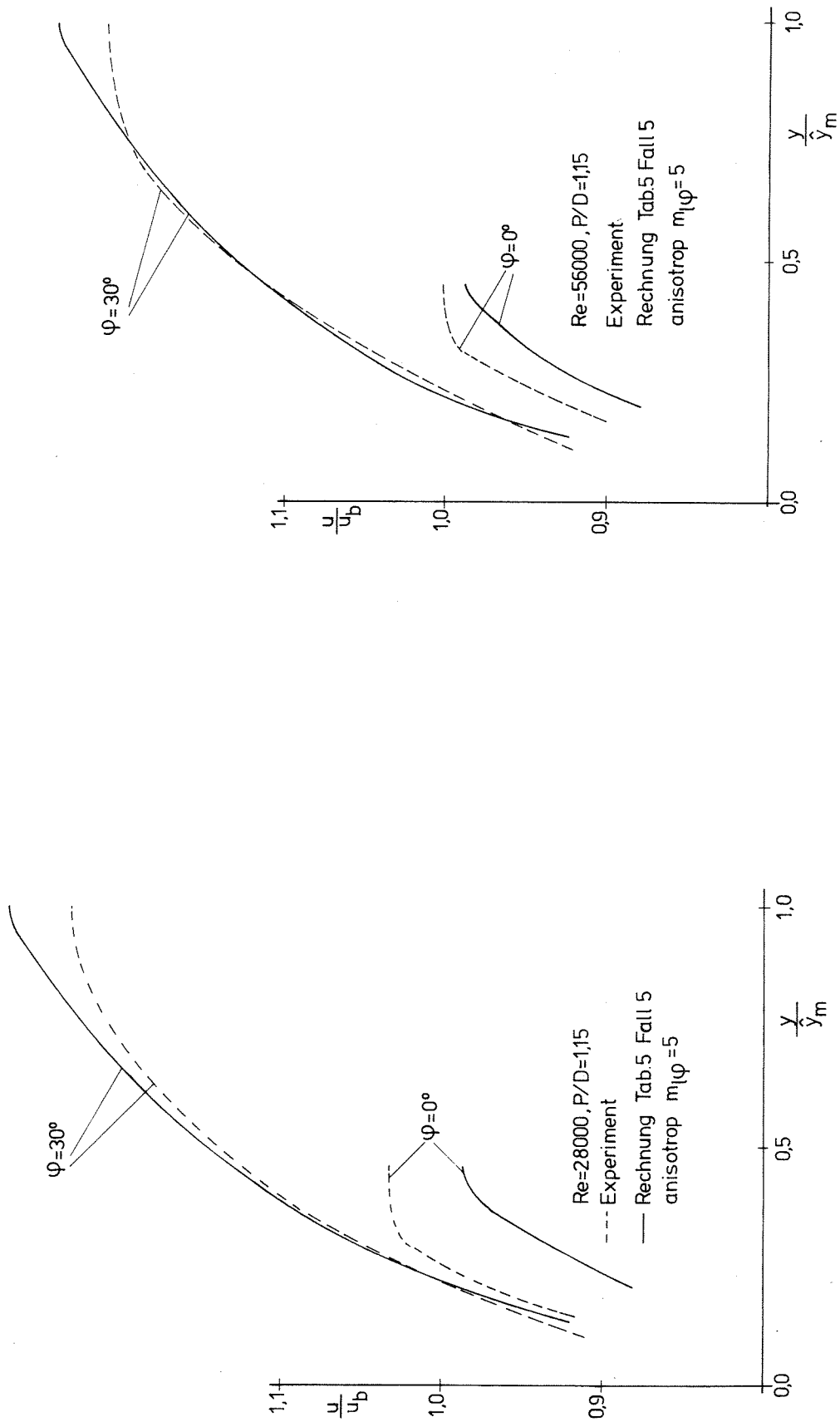


Bild 23: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

Bild 24: Vergleich radialer Geschwindigkeitsprofile

Die mit diesen Reynoldszahlen gewonnenen Ergebnisse sind mit den korrigierten Meßwerten in Bild 23 und 24 aufgetragen. Man sieht, daß die Abweichungen größer sind als bei den Experimenten von Kjellström. In Anbetracht der Fehlerbreite der Messwerte (ca. 3 % in Strömungsmitte und ca. 10 % in Wandnähe) ist die Übereinstimmung mit einer maximalen Abweichung von ca. 7 % zufriedenstellend.

Schließlich wird in den Bildern 25 und 26 für eine hexagonale bzw. quadratische Stabanordnung der Einfluß des P/D-Verhältnisses auf den Druckverlustbeiwert untersucht. Mit in die Diagramme aufgenommen ist die Beziehung für den äquivalenten Ringspalt. Durch eine sehr sorgfältige Analyse von vielen Meßergebnissen kommt Rehme [23] zu dem Ergebnis, daß für große P/D-Verhältnisse die Werte der äquivalenten Ringzone als richtig anzusehen sind. Gemessen an dieser Lösung sind die hier gewonnenen Werte sehr zufriedenstellend. Im Bereich zwischen $1,0 \leq P/D \leq 1,20$ für die hexagonale und zwischen $1,0 \leq P/D \leq 1,30$ für die quadratische Anordnung ist die Streuung sowohl für Experimente als auch für die verschiedenen theoretischen Ansätze recht groß. Die mit der hier beschriebenen Methode gewonnenen Werte liegen im mittleren Bereich des Streubandes und stellen damit auch hier recht gute Ergebnisse dar. Wie man aus den Bildern weiter erkennen kann, liegen die Widerstandsbeiwerte von Eifler-Nijsing [29, 30] sowohl für hexagonale als auch für quadratische Stabanordnungen deutlich zu hoch.

Ramm und Johannsen geben dagegen für die hexagonale Stabanordnung kleinere und für die quadratische Stabanordnung größere Reibbeiwerte als die der jeweils entsprechenden äquivalenten Ringzone an. Dies ist nicht konsistent, da bei Verwendung desselben Turbulenzmodells für die hexagonale und die quadratische Stabanordnung die Reibbeiwerte entweder über oder unter denen für die äquivalente Ringzone liegen müssen.

Für die Hydrodynamik kann abschließend festgehalten werden:

- Das Prandtl'sche Mischwegmodell mit den hier eingeführten Erweiterungen wurde auf eine Kanalströmung mit einem nichtkreisförmigen Strömungsquerschnitt angewendet. Es liefert sehr zufriedenstellende Ergebnisse.
- Durch die Verwendung eines Anisotropie-Modells ist es möglich, das anisotrope Verhalten der Strömung in Abhängigkeit vom Wandabstand anzugeben. Dies stellt einen wesentlichen Fortschritt gegenüber den Annahmen von Eifler-Nijsing [31] dar, die die

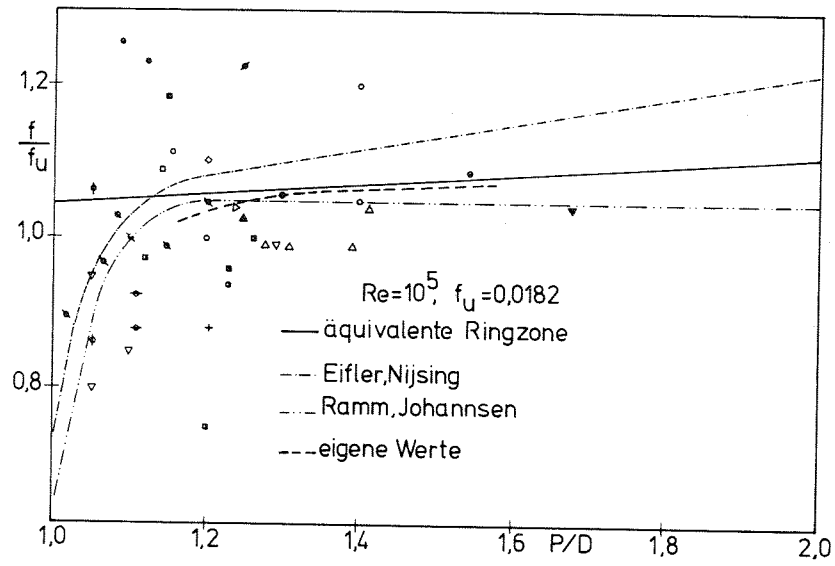


Bild 25: Widerstandsbeiwert in einer hexagonalen Stabanordnung als Funktion von P/D , Meßwerte aus [20].

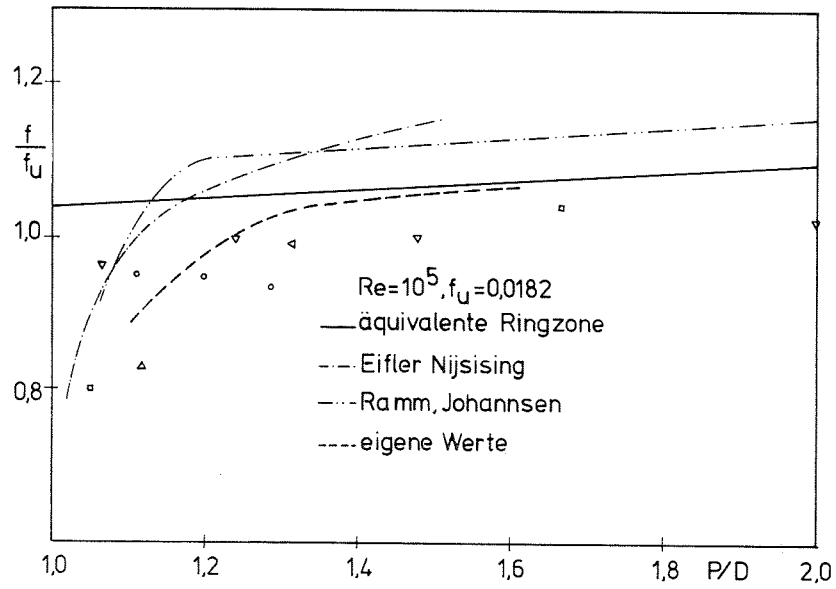


Bild 26: Widerstandsbeiwert in einer quadratischen Stabanordnung als Funktion von P/D , Meßwerte aus [20].

Impulsaustauschgröße in azimuthaler Richtung als unabhängig vom Wandabstand annehmen.

- Wie gezeigt werden konnte, ist die Anisotropie von großer Bedeutung für die Wandschubspannungsverteilung. Diese wird hier ohne Berücksichtigung von Sekundärströmung besser berechnet als nach den Methoden von Eifler-Nijsing, die diese berücksichtigen. Daraus folgt, daß der Einfluß der Anisotropie auf die Wandschubspannungsverteilung größer ist als der der Sekundärströmung.

3. Lösung der turbulenten Wärmetransportgleichung

3.1 Theorie der anisotropen Wärmetransportgleichung

Für die Bestimmung der Temperaturverteilung ist die Wärmetransportgleichung zu lösen. Sie lautet für den quellfreien Bereich im Kühlmittel in Tensorschreibweise:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (52)$$

Auch diese Gleichung wird nun wie oben die Impulsgleichung mit dem Ansatz

$$T = \bar{T} + T'; \quad u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (53)$$

geschrieben und über die Zeit gemittelt. Führt man noch die Randbedingungen $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$ ein und vernachlässigt die axiale Wärmeleitung, so ergibt sich:

$$\rho c_p \cdot \bar{u}_1 \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho c_p \cdot \overline{u_2' T'} + \lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} \right) + \left(\rho c_p \cdot \overline{u_3' T'} + \lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right) \quad (54)$$

Führt man hier wieder einen Ansatz in der Art von Boussinesq

$$-\overline{u_i' T'} = \epsilon_{ij}^H \cdot \partial \bar{T} / \partial x_j \quad \text{ein, so ergibt sich:}$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \cdot \bar{u}_1 \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left((\rho c_p \epsilon_{22}^H + \lambda) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left((\rho c_p \cdot \epsilon_{33}^H + \lambda) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Bei der Bestimmung der Austauschgrößen ϵ^H geht man im allgemeinen von der Verteilung der Austauschgröße ϵ^M aus. Man kann sie aber auch z.B. wie Buleev bestimmen, der sie in ähnlicher Weise wie die Austauschgrößen für Impuls berechnet. Er benötigt dazu allerdings eine vierte "plausible" Funktion. Dieses Buleev-Modell wird ebenfalls von Ramm und Johansson verwendet.

Im Rahmen des hier verwendeten Prandtl'schen Modells wurde das Verfahren der Umrechnung der turbulenten Impulsaustauschgröße in die turbulente Wärmeaustauschgröße gewählt. In der Literatur werden dazu im wesentlichen folgende Beziehungen für ψ dem Verhältnis von ϵ^H / ϵ^M , dem Kehrwert der turbulenten Prandtl-Zahl, angegeben

$$a) \quad \psi = 1 \quad (56)$$

Diese Beziehung stammt aus Ähnlichkeitsbetrachtungen und ist nur für Prandtlzahlen in der Nähe von 1 gültig (Reynolds-Analogie).

$$b) \quad \psi = \left(1 - \frac{0,2/Pr - 0,2}{(\epsilon^M/\nu)^{0,9}} \right) \quad (57)$$

Diese Beziehung stammt von Dwyer [32] und wurde aus Experimenten mit Flüssigmetall gewonnen. Sie hat den Nachteil, daß sie für kleine Werte von ϵ^M negative ϵ^H Werte ergibt. Die Größe ψ ist für Prandtlzahlen kleiner 0,1 stets kleiner 1 und wächst mit zunehmendem ϵ^M auf ihren maximalen Wert.

$$c) \quad \psi = (1 + 400(z - 1)); \quad z = 1 - \frac{y}{\hat{y}} \quad (58)$$

Diese Beziehung wird von Quarmby [33] angegeben. Sie wurde aus Experimenten für Stoff- und Wärmetransport bei Schmidt- bzw. Prandtlzahlen von 0,7 bestimmt. Nach dieser Formel ist ψ nur vom Wandabstand abhängig. ψ hat in der Mitte der Strömung den Wert 1 und steigt zur Wand hin auf einen Wert von 2. Nach dieser Beziehung ist das Verhältnis unabhängig von der Prandtl- und der Reynoldszahl.

$$d) \quad \psi = Pr \frac{1 - \frac{90}{\pi^6} \frac{\epsilon^M \cdot Pr}{\nu} \sum_{n=1}^6 \frac{1}{n^6} (1 - \exp(-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu}{\epsilon^M \cdot Pr}))}{1 - \frac{90}{\pi^6} \cdot \frac{\epsilon^M}{\nu} \sum_{n=1}^6 \frac{1}{n^6} (1 - \exp(\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu}{\epsilon^M}))} \quad (59)$$

Diese Beziehung stammt von Jenkins [34] und wurde aus theoretischen Überlegungen für die Wärmeleitung eines festen kugelförmigen

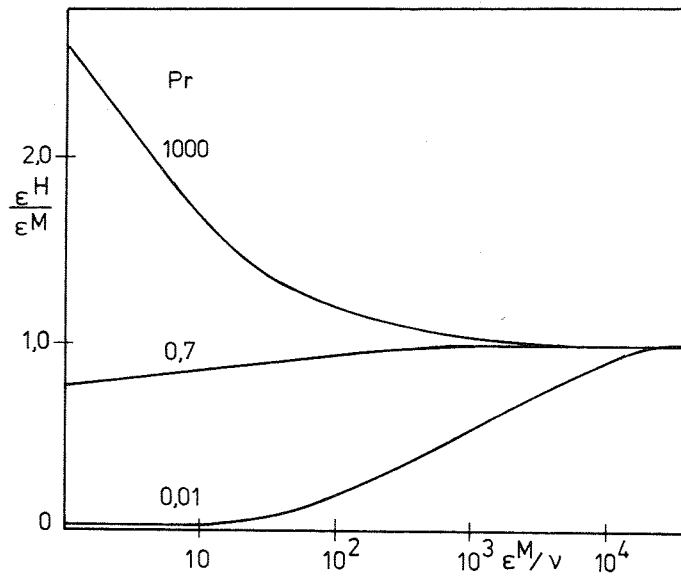


Bild 27: ϵ^H/ϵ^M als Funktion von ϵ^M und Pr, nach Jenkins aus [33].

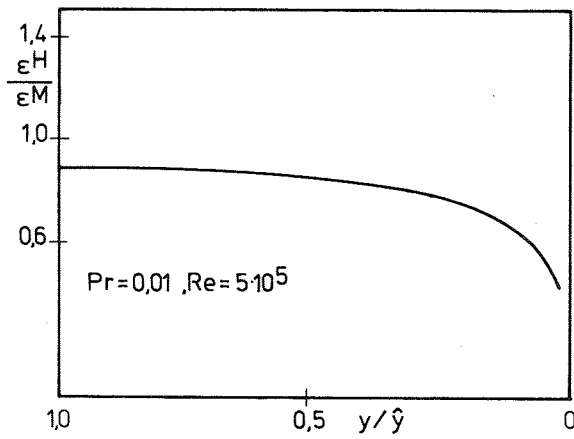


Bild 28: ϵ^H/ϵ^M als Funktion vom Wandabstand nach Davies [35].

gen Wirbels abgeleitet. Der Einfluß der Prandtlzahl und der Impulsaustauschgröße ϵ^M auf ψ ist in Bild 27 zu sehen.

Auch hier steigt der Wert von ψ bei Prandtlzahlen kleiner 1 mit zunehmendem ϵ^M , bei Prandtlzahlen größer 1 sinkt er hingegen mit wachsendem ϵ^M ab.

- e) Zu einem ganz ähnlichen Ergebnis kommt ebenfalls durch theoretische Überlegungen auch Davies [35].

Auch bei ihm wächst ψ bei Prandtlzahlen kleiner 1 mit zunehmendem ϵ^M und fällt bei Prandtlzahlen größer 1 mit wachsendem ϵ^M . Der charakteristische Verlauf von ψ über dem Wandabstand ist für kleine Prandtlzahlen im Bild 28 gezeigt. Der Verlauf dieser Kurven ähnelt dem eines turbulenten Geschwindigkeitsprofils.

- f) Da die von Davies angegebene Beziehung relativ kompliziert ist, ist es interessant festzustellen, daß in der von Bobkov [36] vorgeschlagenen und von Nijsing [31] überarbeiteten Beziehung die Geschwindigkeitsverteilung mit eingeht. D.h., daß man zumindest qualitativ den Verlauf der Funktion auch viel einfacher erhält.

$$\psi = \left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^{0,5} \cdot 1,45 \left(1 - \exp\left(-1,24 \cdot 10^{-4} \cdot \text{Re} \cdot \frac{\hat{y}}{D_H} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}\right)\right) \quad (60)$$

Der radiale Verlauf von ψ über dem Wandabstand ist daher dem von Davies oder Jenkins sehr ähnlich. Es steigt mit wachsender Reynoldszahl und fällt mit kleiner werdender Prandtlzahl. Allerdings tritt für Prandtlzahlen größer 1 keine Umkehr des Einflusses der Re-Zahl auf, wie sie von Davies und Jenkins angegeben wird. Daher wird der Anwendungsbereich dieser Beziehung auf Flüssigmetalle beschränkt sein.

Alle hier vorgestellten Beziehungen sind für isotrope Turbulenz abgeleitet. Tatsächlich tritt aber, wie schon in Abschnitt 2.3 erwähnt, Anisotropie auch beim Wärmetransport auf. Will man dies hier berücksichtigen, so muß man für den Wärmestrom dieselbe Betrachtung wie in 2.3 für die Schubspannungen durchführen. Allgemein gilt für den Wärmestrom:

$$q_i = (\lambda \cdot \delta_{ij} + \rho c_p \cdot \epsilon_{ij}^H) \cdot \bar{T},_j \quad (61)$$

Da axiale Wärmeleitung vernachlässigt ist, gilt:

$$q_2 = (\lambda + \rho c_p \cdot \epsilon_{22}^H) \cdot \bar{T},_2 + \rho c_p \cdot \epsilon_{23}^H \cdot \bar{T},_3 \quad (62)$$

$$q_3 = \rho c_p \cdot \epsilon_{32}^H \cdot \bar{T},_2 + (\lambda + \rho c_p \cdot \epsilon_{33}^H) \cdot \bar{T},_3$$

Berücksichtigt man wieder die Verdrehung des Koordinatensystems gegenüber den Anisotropieachsen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \epsilon_{22}^{H'} &= \epsilon_{22}^H \cdot \cos^2 \varphi + \epsilon_{33}^H \cdot \sin^2 \varphi \\ \epsilon_{33}^{H'} &= \epsilon_{22}^H \cdot \sin^2 \varphi + \epsilon_{33}^H \cdot \cos^2 \varphi \\ \epsilon_{23}^{H'} &= \epsilon_{32}^{H'} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (\epsilon_{22}^H - \epsilon_{33}^H) \end{aligned} \quad (63)$$

Die Umrechnungsbeziehungen a bis f werden aus Mangel an besserer experimenteller Unterstützung auf ϵ_{22}^H und ϵ_{33}^H in gleicher Weise angewendet.

3.2 Ergebnisse für die thermisch ausgebildete Strömung bei Verwendung verschiedener ψ -Beziehungen

Die im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Beziehungen b, c, d und f wurden in das Rechenprogramm TERA (Temperatures with Eddy-diffusivity Models in Rod Assemblies) aufgenommen, das die turbulente anisotrope Wärmetransportgleichung für den Fall thermisch ausgebildeter Strömung oder für den Fall thermischer Einlaufströmung berechnet. Da hier in erster Linie Flüssigmetall als Kühlmittel berechnet werden soll, wurde die Option eingebaut, nur einen Teil der für die Hydrodynamik erforderlichen Maschenlinien in der zähen Unterschicht für die Thermodynamik zu verwenden. Außerdem sei an dieser Stelle erwähnt, daß die Stoffwerte so-

wohl für die Hydrodynamik als auch für die Thermodynamik entweder mit einer für den Querschnitt repräsentativen oder mit der lokalen Temperatur bestimmt werden; schließlich wird insbesondere für Gas als Kühlmittel auch der Druck im Querschnitt bei der Bestimmung der Stoffwerte mit berücksichtigt.

Das hier zugrunde gelegte Geschwindigkeitsprofil wurde mit den Parametern entsprechend Fall 5 Tabelle 5 mit Anisotropie berechnet.

Standen zum detaillierten Vergleich der Geschwindigkeitsprofile in Stabbündelgeometrie nur wenige Experimente zur Verfügung, so sind es zum Vergleich von Temperaturprofilen in Flüssigmetallen noch weniger. Für den Vergleich bleiben daher in erster Linie nur integrale Nusseltzahlen. Diese integralen Meßwerte sind, wie Hoffmann et al. [37] ausführen, mit einem statistischen Meßfehler von $\pm 40\%$ behaftet. Generell lässt sich sagen, daß theoretisch bestimmte Nusseltzahlen größer sind als die, die aus Experimenten gewonnen wurden. Dies hängt damit zusammen, daß bei kleinen Peclet-Zahlen im Experiment die Strömungsverhältnisse wegen überlagerter Naturkonvektion nicht mehr eindeutig bestimmbar sind. Im folgenden werden nun die Ergebnisse, die mit den Umrechnungsvorschriften nach b, c, d und f gewonnen wurden, verglichen. Um eine Vergleichsbasis zu haben, wurde zunächst das Temperaturfeld unter Annahme reiner molekularer Wärmeleitung bestimmt.

Die Parameter waren dabei:

thermisch ausgebildete Strömung

$$Re = 100\ 000$$

$$Pe = 494$$

$$P/D = 1,31$$

$$q_w = 234\ \text{W/cm}^2$$

Stabanordnung hexagonal

		Nusselt- zahl	ΔT_w °C	$\frac{\alpha(\varphi)_{\max}}{\bar{\alpha}}$	$\frac{\alpha(\varphi)_{\min}}{\bar{\alpha}}$
Molekulare Leitung		12,4	3,3	1,13	0,90
Isotroper Wärmetransport	Jenkins	12,58	3,3	1,13	0,90
	Dwyer	12,90	3,5	1,15	0,88
	Nijsing	13,90	3,5	1,16	0,88
	Quarmby	16,00	3,2	1,16	0,88
Anisotroper Wärmetransport	Jenkins	12,60	2,6	1,10	0,91
	Dwyer	12,95	2,0	1,07	0,92
	Nijsing	13,90	2,5	1,10	0,90
	Quarmby	16,10	1,5	1,07	0,93

Tabelle 7: Vergleich charakteristischer Größen bei Anwendung verschiedener ψ -Beziehungen

Aus Tabelle 7 findet man das Resultat, daß bei Annahme isotropen Wärmetransports die Variation der Wärmeübergangszahlen an der Wand größer ist als bei molekularer Leitung. Dies ist so zu interpretieren, daß die im Verhältnis zur molekularen Leitfähigkeit kleine Variation der turbulenten Austauschgröße in radialer Richtung am Stabumfang sich nicht auswirken kann und der turbulente Austausch somit nur zu einer allgemeinen Verbesserung der Wärmeleitfähigkeit und damit zu einer dickeren thermischen Grenzschicht führt.

Die größten Nusselt-Zahlen liefert nach Tabelle 7 die Umrechnungsvorschrift nach Quarmby. Da seine Vorschrift aber für Prandtlzahlen $\approx 0,7$ abgeleitet wurde, stellt dies sicher die obere Grenze des wirklichen Wertes dar. An zweiter Stelle jedoch mit großem Abstand steht die Beziehung nach Nijsing, dann folgen relativ dicht beieinander die Nusseltzahlen, die mit den Beziehungen von Dwyer und Jenkins berechnet wurden. Da Jenkins bei der Ableitung seiner Beziehung von der Wärmeleitung einer Kugel ausgeht, was in Wirklichkeit jedoch nicht zutrifft, wird der turbulente Wärmetransport sicher unterschätzt. Es verbleiben also die Beziehungen von Dwyer und Nijsing als vernünftig erscheinende Gleichungen. Für diese beiden Modelle wurde nun

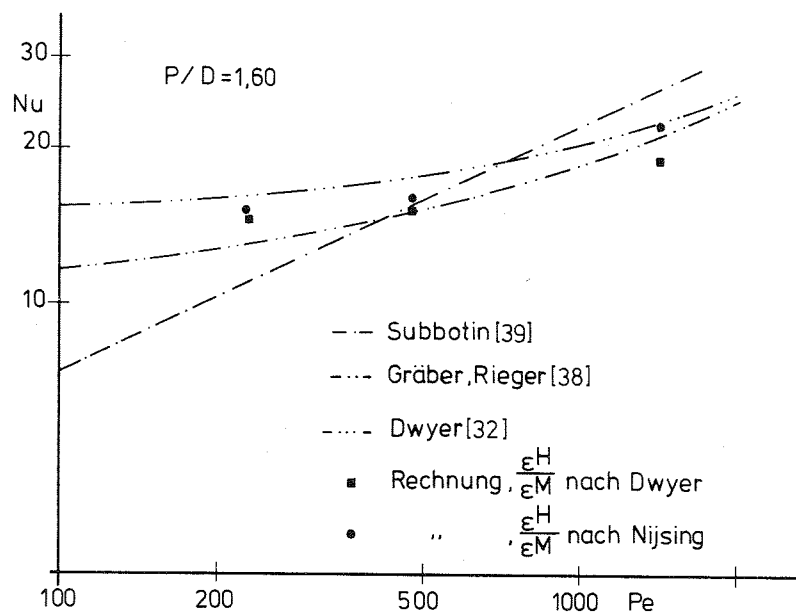


Diagramm 4: Variation der Nusselt-Zahl mit der Peclet-Zahl, aus Experiment [39, 38] und Theorie [47].

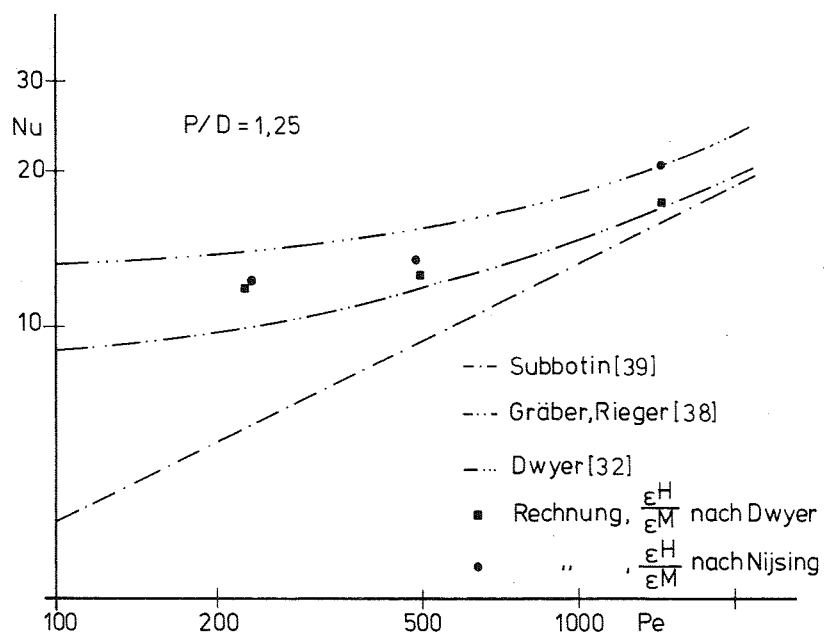


Diagramm 5: Variation der Nusselt-Zahl mit der Peclet-Zahl, aus Experiment [39], [38] und Theorie [47].

der Einfluß des P/D-Verhältnisses und der Peclet-Zahl auf die Nusselt-Zahl untersucht. Die Ergebnisse sind in den Diagrammen 4 und 5 aufgetragen.

Wie schon weiter oben angedeutet, sind die aus Experimenten gewonnenen Nusselt-Zahlen bei abnehmendem P/D-Verhältnis und abnehmender Peclet-Zahl wegen überlagerter Naturkonvektion mit zunehmenden Fehlern behaftet. Für den Vergleich der verschiedenen Beziehungen für ψ mit den Experimenten sind daher größere P/D-Verhältnisse und größere Peclet-Zahlen ($Pe > 500$) besser geeignet. Aber selbst für das P/D-Verhältnis 1.6 ist die Abweichung zwischen verschiedenen Experimenten (Gräber - Rieger [38], Subbotin et al. [39]) im Bereich von $1000 < Pe < 2000$ noch sehr groß. Da die absoluten Werte relativ unsicher sind, kann man die Zunahme der Nusselt-Zahl über der Peclet-Zahl betrachten. Bei dieser Betrachtungsweise ergibt sich eine bessere Übereinstimmung der Experimente. So kann auch der Einfluß der ψ -Funktion einmal nach Dwyer und einmal nach Nijsing besser beurteilt werden. Es ergibt sich, daß die ψ -Funktion nach Dwyer einen zu flachen Verlauf der Nusselt-Zahl angibt. Die ψ -Funktion nach Nijsing liefert im Vergleich zu den Experimenten zufriedenstellende Werte. Daher wird diese Funktion für Natrium als Kühlmittel angewandt.

Für die im nächsten Abschnitt behandelten Demonstrationsrechnungen ist noch festzulegen, welche ψ -Funktion für Helium ($Pr = 0,7$) und Wasser unter hohem Druck ($Pr = 0,9$) angewendet werden soll. Dazu wurde für Helium eine Testrechnung ($P/D = 1,314$, $Re = 145\ 000$, Druck = 100 bar, $T = 400\ ^\circ C$, thermisch ausgebildet, Stabanordnung hexagonal) unter Verwendung der ψ -Funktion nach Quarmby durchgeführt. Es ergab sich eine Nusselt-Zahl von 319. Dieser Wert liegt um 16 % über dem Wert der sich nach der Beziehung:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \quad (64)$$

von Dittus-Boelter [40] ergibt. Obwohl diese hier berechnete Nusselt-Zahl als etwas zu hoch erscheint, wird die Beziehung von Quarmby für Helium und Wasser unter hohem Druck angewendet. Für eine genauere Analyse der Temperaturfelder dieser Fluide erscheint es jedoch angebracht, diesen Ansatz nochmals zu überprüfen.

4. Anwendung auf konkrete Probleme bei der Kernausslegung

Um die Fähigkeiten der Programme KROKOPI, VERA und TERA zu verdeutlichen, wurde die thermische Einlaufströmung für den Zentralkanal eines natriumgekühlten schnellen Brütters, eines heliumgekühlten schnellen Brütters und eines modernen Druckwasserreaktors berechnet. Bei diesen Rechnungen ist die Durchsatzverteilung (Tab. 5, Fall 5, anisotrop, hydraulisch voll ausgebildet) über dem durchströmten Querschnitt bei der Integration in axialer Richtung beibehalten worden. Die Änderung der Geschwindigkeiten auf Grund von Dichteänderungen und ihre Rückwirkung auf die turbulenten Austauschgrößen wurde jedoch berücksichtigt. Für die Bestimmung der Stoffwerte wurde die mittlere Temperatur im Querschnitt verwendet.

Die charakteristischen Daten für die Rechnung sind in Tabelle 8 zusammengestellt.

	Natrium	Helium	Druckwasser
Stabanordnung	hexagonal	hexagonal	quadratisch
Stababstand mm	7,9	11,0	14,3
Stabdurchmesser mm	6	8,2	10,75
Re	101 000	145 000	628 000
mittlere Geschwindigkeit u_b m/sec	6,07	87,9	5,7
Eintrittsdruck N/m^2	$5 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^7$
Eintrittstemperatur $^{\circ}C$	377	280	288
Leistungs-Formfaktor, axial	0,8	0,8	0,7
Corehöhe mm	970	1 500	3 900
max. Wärmestromdichte W/cm^2	234	160	162

Tabelle 8: Charakteristische Daten für die Demonstrationsrechnungen

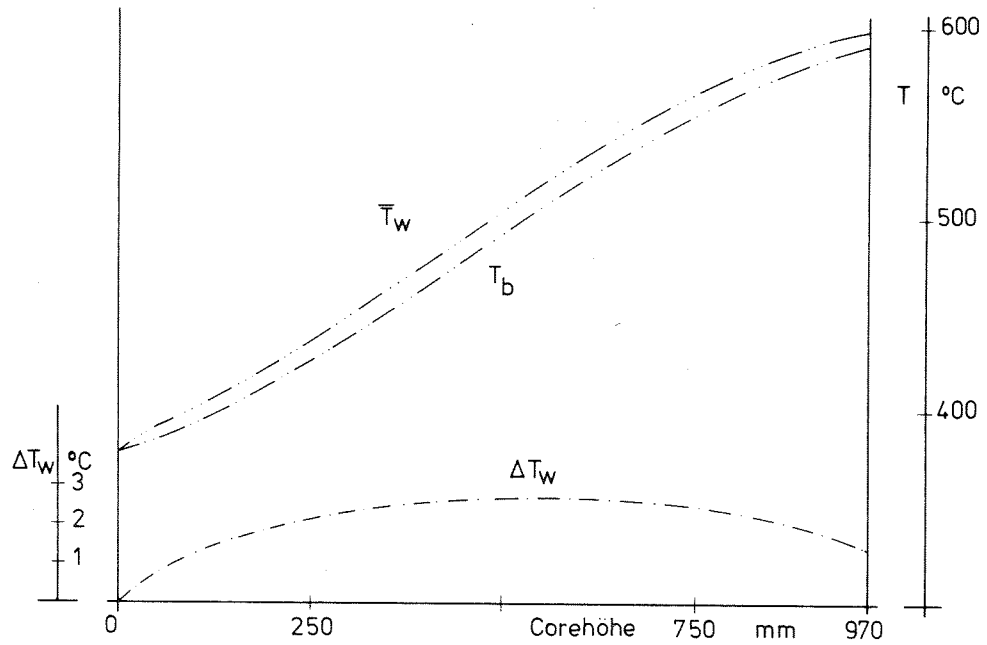


Diagramm 6: Temperaturverteilung für Natrium, Parameter nach Tabelle 8

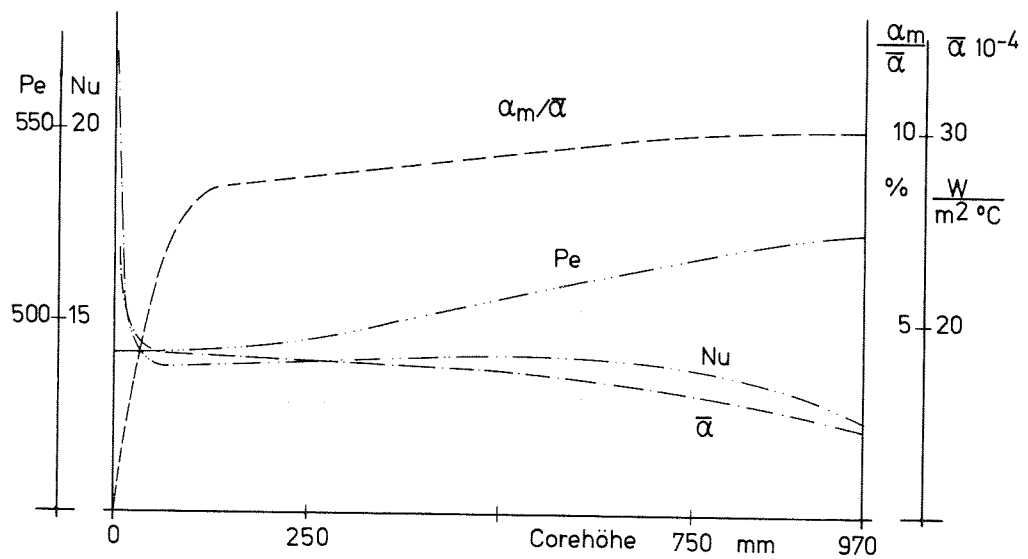


Diagramm 7: Wärmeübergangszahlen für Natrium, Parameter nach Tabelle 8

Für Natrium entsprechen die Daten in Tabelle 6 etwa den Verhältnissen des SNR 300 [41]. Für Helium wurde auf ein älteres Konzept zurückgegangen [41]. Moderne Heliumbrüter werden, um den Wärmeübergang zu verbessern, in der zweiten Corehälfte mit künstlichen Rauigkeiten versehen. Solche Rauigkeiten können von den vorliegenden Programmen VERA und TERA noch nicht berücksichtigt werden. Die Daten für den Druckwasserreaktor entsprechen etwa denen des Biblis-Reaktors [48].

Da nicht alle in Tabelle 8 aufgeführten Daten explizit gegeben waren, wurden sie zum Teil interpoliert oder abgeschätzt.

Die Ergebnisse sind in den Diagrammen 6 und 7 für den Na-gekühlten Reaktor gezeigt. Betrachtet man die maximale Temperaturdifferenz am Stabumfang ΔT_w über der Corehöhe, so stellt man fest, daß sie mit maximal $2,5^\circ\text{C}$ sehr klein ist. Die Differenz der mittleren Kühlmitteltemperatur und der mittleren Wandtemperatur $\bar{T}_w - T_b$ beträgt maximal 13°C . Die Pecletzahl steigt gleichmäßig über der Corehöhe. Die Nusseltzahl zeigt, nach einem steilen Abfall auf den ersten 20 mm der beheizten Länge, im zweiten Drittel des Cores einen leichten, aber deutlichen Anstieg und fällt schließlich im letzten Drittel wieder ab. Die Wärmeübergangszahl nimmt mit der Corehöhe stetig ab, wobei der Abfall am Coreeintritt und am Coreaustritt stärker ist als in der Mitte des Cores. Die Amplitude der lokalen Wärmeübergangszahl am Stabumfang, gebildet mit der lokalen Wandtemperatur und der mittleren Temperatur im Unterkanal, zeigt nach einem steilen Anstieg im Einlauf mit zunehmender Corehöhe eine gleichmäßig steigende Tendenz und erreicht am Coreende 10 %.

Die Diagramme 8 und 9 zeigen die Ergebnisse für den heliumgekühlten Reaktor. Die maximale Temperaturdifferenz an der Brennstaboberfläche beträgt hier mit 7°C etwa das dreifache der bei Natrium. Die Differenz der mittleren Wand- und Kühlmitteltemperaturen erreicht in Coremitte einen Wert von 145°C und ist damit etwa das elffache des Wertes in einem natriumgekühlten Reaktor. Die Nusseltzahl fällt über der gesamten Corehöhe ziemlich gleichmäßig auf ca. 60 % ihres Ausgangswertes. Die mittlere Wärmeübergangszahl hingegen fällt auf den ersten 100 mm der beheizten Corehöhe, steigt dann leicht bis kurz vor das Ende der beheizten Länge an und fällt schließlich wieder ab. Die Variation der Wärmeübergangszahl am Stabumfang ist für Helium mit $\pm 2,5\%$ jedoch nur ein viertel des Wertes bei Natrium als Kühlmittel.

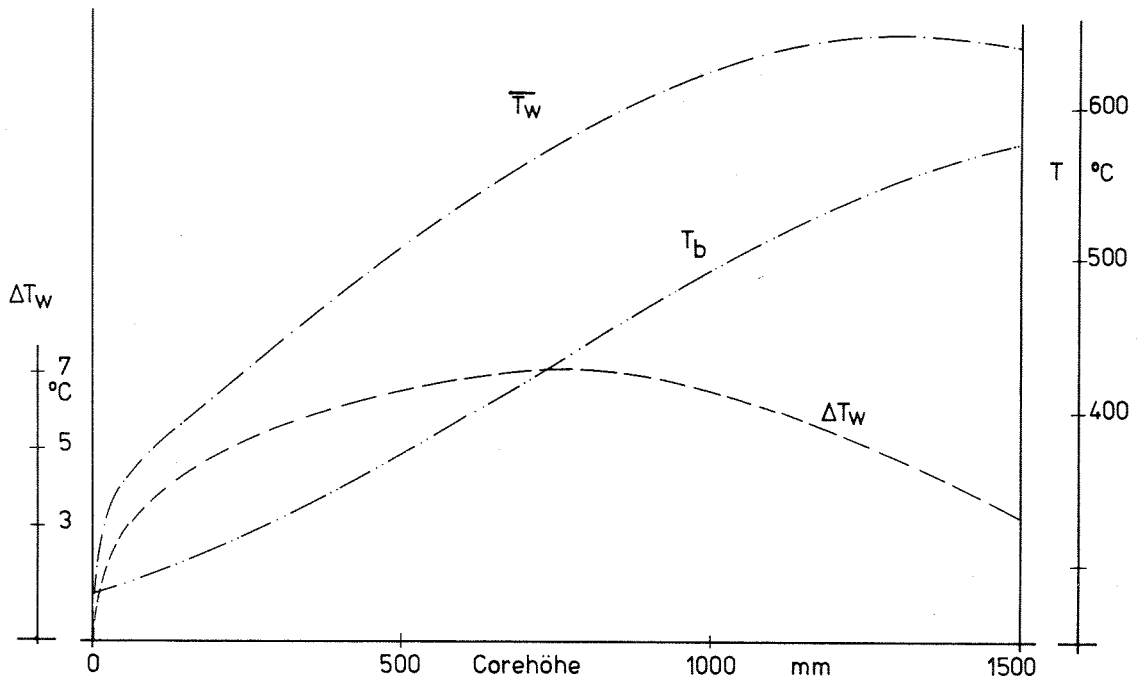


Diagramm 8: Temperaturverteilung für Helium, Parameter nach Tabelle 8.

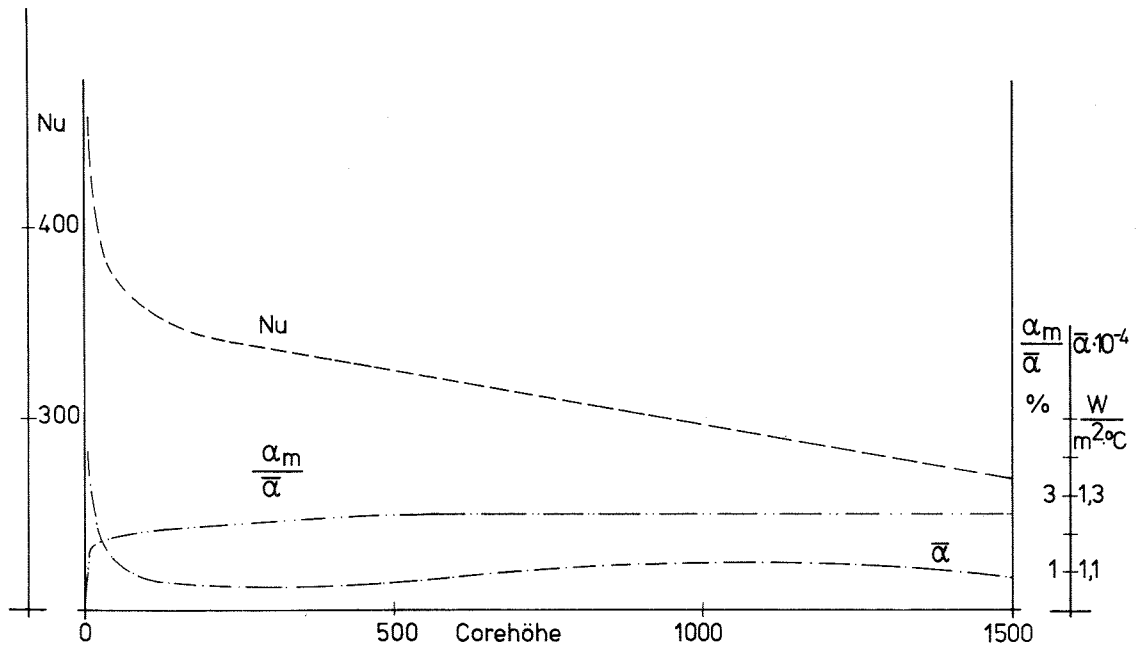


Diagramm 9: Wärmeübergangszahlen für Helium, Parameter nach Tabelle 8.

Dies liegt daran, daß der Wärmetransport bei Natrium in erster Linie durch molekulare Leitung und bei Helium in erster Linie durch turbulenten Austausch erfolgt. Dieses Verhalten ist analog zu dem Verhalten der Wandschubspannung für ein Fluid, das einmal mit kleiner Reynoldszahl (laminar) und einmal mit großer Reynoldszahl (turbulent) strömt. Auch hier nimmt die Variation der Wandschubspannung mit zunehmender Reynoldszahl ab.

Die Ergebnisse für den höchstbelasteten Kanal in einem Druckwasserreaktor sind in den Diagrammen 10 und 11 aufgetragen. Für diese Rechnung werden die Stoffwerte im ganzen Corebereich konstant gehalten, da einmal die in Karlsruhe vorhandene Stoffdatenbibliothek MAPLIB [42] für den hier interessierenden Bereich sehr hohe Rechenzeiten benötigt und zum anderen einfachere Stoffdatenfunktionen den hier verlangten Druck- und Temperaturbereich nicht abdecken. Damit wird aber auch das unterkühlte Sieden an der Staboberfläche unterdrückt.

Unter diesen Annahmen ergibt sich die maximale Temperaturdifferenz am Stabumfang zu $3,5^{\circ}\text{C}$. Der schlechtere Leistungsformfaktor von 0,7, anstelle von 0,8 für die Brutreaktoren, führt zu einem relativ hohen Maximum der Temperaturdifferenz in der Coremitte. Die Differenz der mittleren Wandtemperatur und der mittleren Temperatur im Unterkanal beträgt maximal 30°C und steht im zweiten Drittel des Cores an. Die maximale Wandtemperatur liegt bei 358°C und wird bei 75 % der Corehöhe erreicht. Die Nusseltzahl zeigt nach einer Einlaufstrecke von 100 mm bis etwa 25 % der Corehöhe einen leichten Anstieg, anschließend bis etwa 75 % Corehöhe eine leicht fallende Tendenz und fällt danach relativ stark auf 80 % des Mittelwertes im Core am Coreende ab. Da die Stoffwerte konstant gehalten wurden, ist der Verlauf der Wärmeübergangszahl über der Corehöhe gleich dem der Nusseltzahl. Die Amplitude der Wärmeübergangszahl am Stabumfang beträgt fünf bis sechs Prozent bezogen auf die mittlere Wärmeübergangszahl. Dieser Wert ist größer als man es nach den Ergebnissen von Helium erwartet. Berücksichtigt man jedoch, daß für den Druckwasserreaktor die Stabanordnung quadratisch und nicht wie beim Heliumbrüter hexagonal ist, so ist die größere Amplitude in der Wärmeübergangszahl verständlich.

Damit ist gezeigt, daß die zu Beginn dieser Arbeit aufgestellten Fragen nach den lokalen Temperaturen und Wärmeübergangszahlen von den Programmen KROKOPI, VERA und TERA beantwortet werden.

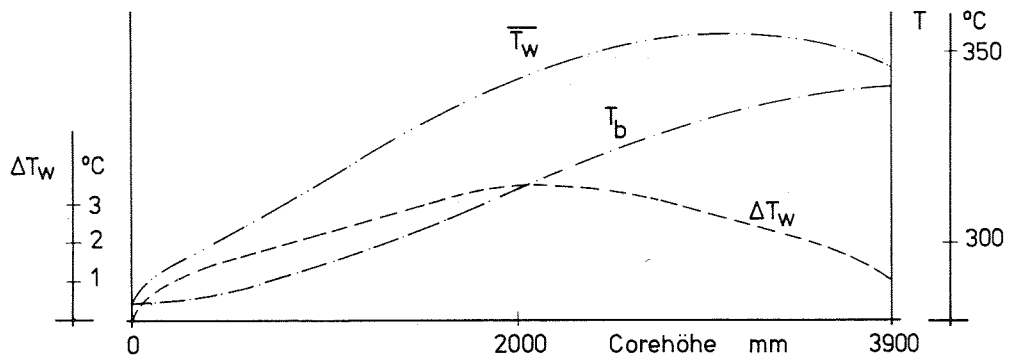


Diagramm 10: Temperaturverteilung für Druckwasser,
Parameter nach Tabelle 8.

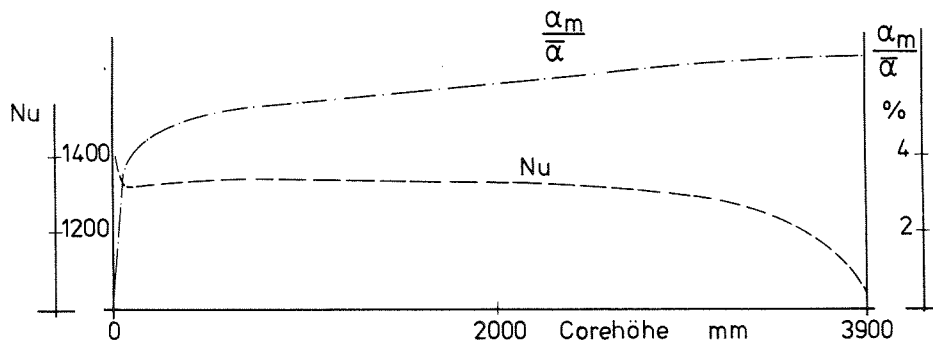


Diagramm 11: Wärmeübergangszahlen für Druckwasser,
Parameter nach Tabelle 8.

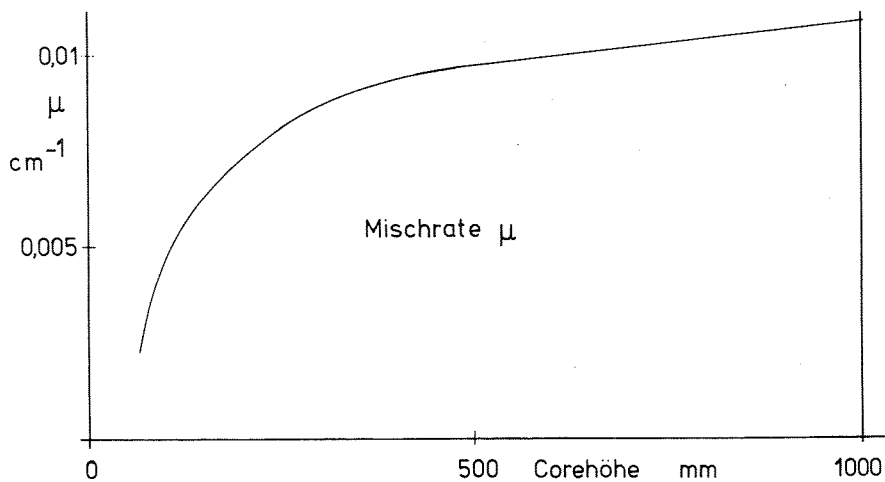


Diagramm 12: Mischrate bei Schiefplast eines angenommenen
natriumgekühlten Reaktors.

Es bleibt noch die Frage nach dem Wärmestrom zwischen zwei benachbarten Unterkanälen unterschiedlicher mittlerer Temperatur. Diese Größe ist, wenn man sie auf die mittlere Enthalpiedifferenz zwischen den Unterkanälen bezieht, eine wichtige Eingabegröße für Unterkanalprogramme vom Typ THESYS [43] oder COBRA [44]. Auch sie ist aus den detailliert vorliegenden Temperaturfeldern berechenbar. Um dies zu zeigen, wurden, für Natrium als Kühlmittel, in dem Brennelementausschnitt gemäß Bild 10 die beiden hereinragenden Brennstäbe unterschiedlich beheizt. Die Randbedingungen des hier angenommenen hypothetischen Reaktors waren:

$Re = 100\ 000$, Stababstand = 5 mm, Stabdurchmesser = 3,8 mm
 $Pe = 475$, Eintrittstemperatur = 280 °C, maximale Heizflächenbelastung Stab 1 = 400 W/cm², maximale Heizflächenbelastung Stab 2 = 200 W/cm², Leistungsformfaktor = 0,8, Feldgrenzen im Fluid adiabatisch.

Als Austauschgröße zwischen den Unterkanälen wurde die Mischrate μ berechnet. Sie ist definiert als

$$\mu = \frac{\frac{Q_{ij}}{h_i - h_j}}{0.5 \cdot (\dot{m}_i + \dot{m}_j) \cdot \Delta z} \quad (65)$$

Dabei ist Q_{ij} der Wärmestrom, der zwischen den Unterkanälen fließt, h_i , h_j die Unterkanalenthalpie, \dot{m}_i , \dot{m}_j der axiale Massendurchsatz und Δz die Höhe der austauschenden Fläche zwischen den Unterkanälen. Da in dieser Arbeit der Massendurchsatz im Unterkanal über der Corehöhe konstant gehalten wird, stellt μ das Verhältnis zwischen der tatsächlich ausgetauschten Wärmemenge und der Enthalpiedifferenz zwischen den Unterkanälen dar.

Es ergibt sich demnach aus Diagramm 12, daß nach ca. 50 mm ein Wärmestrom zwischen den Unterkanälen einsetzt. Dieser steigt in der ersten Corehälfte wesentlich rascher an als die Enthalpiedifferenz zwischen den Unterkanälen. Erst in der zweiten Corehälfte wächst die tatsächlich übertragene Wärmemenge in erster Näherung proportional zur Enthalpiedifferenz. Der Verlauf dieser Kurve ist ganz ähnlich dem, den Eifler-Nijsing [5] für die Mischrate zwischen einem Zentralkanal und einem Wandkanal angeben.

Ein unmittelbarer Vergleich der angegebenen Temperaturen, der berechneten Wärmeübergangszahlen und der Austauschgrößen ist aus Mangel an entsprechend detaillierten Experimenten nicht möglich. Die mittleren Wärmeübergangszahlen sowohl als auch die Mischraten stimmen jedoch mit den bisher bekannten Werten recht gut überein. Man kann damit feststellen, daß es gelungen ist, auf theoretischem Wege lokale und integrale Wärmeübergangszahlen und Mischraten in den Unterkanälen eines Brennelements für Fluide zu berechnen, deren Prandtlzahlen mehrere Größenordnungen voneinander entfernt sind.

5. Schlußbemerkungen

Zur Lösung der Impuls- und Wärmetransportgleichung in Stabbündelgeometrie werden in der vorliegenden Arbeit folgende Punkte erstmalig bzw. neu behandelt:

1. Verwendung eines krummlinig orthogonalen Maschennetzes in Stabbündelgeometrie.
2. Die Lösung der Erhaltungsgleichungen in einem krummlinig orthogonalen Maschennetz.
3. Die Anwendung des Prandtl'schen Mischungswegansatzes auf einen Kanal von nicht kreisförmigem Querschnitt.
4. Die Aufstellung eines einfachen Gesetzes zur Bestimmung von anisotropen Austauschgrößen.
5. Die Bestimmung des dreidimensionalen Temperaturfeldes im Zentralkanal eines helium- bzw. wassergekühlten Reaktors.

Diese Arbeit ist im Vergleich zu den Arbeiten von Eifler-Nijsing [31] und Ramm-Johannson [20] zu sehen. Dieser Vergleich ist in Tabelle 9 zusammengestellt. Danach erweist sich in der Arbeit von Eifler-Nijsing der Mangel an Austauschgrößen in der zähen Unterschicht als nachteilig, da dadurch nur das Kühlmittel Natrium berechenbar ist. Ein zweiter Nachteil ist das analytische Verfahren zur Integration der Temperaturen in axialer Richtung. Dadurch kann weder die Änderung der Stoffwerte mit der Temperatur noch die Änderung der Wärmeaustauschgrößen auf Grund veränderter Stoffwerte berücksichtigt werden. Drittens beschreiben Eifler-Nijsing die komplizierte Brennstabgeometrie zweimal, einmal zur Lösung der Impulsgleichung und einmal zur Lösung der Wärmetransportgleichung. Schließlich führt die Verwendung eines lokalen zylindrischen Koordinatensystems für jeden Brennstab zu einem hohen Aufwand bei der Verknüpfung dieser Koordinatensysteme. Da diese Verknüpfung explizit programmiert werden muß, erfordert der Anschluß jedes weiteren Brennstabes eine Programmänderung. Zusätzlich müssen während jeder Rechnung die Funktionswerte in den Stützpunkten sämtlicher Anschlußgleichungen aus den jeweiligen Feldern interpoliert werden.

Da Ramm-Johannson ebenfalls ein zylindrisches Maschennetz für jeden Brennstab verwenden, ist hier diesbezüglich dieselbe Feststellung wie bei Eifler-Nijsing zu treffen.

	Eifler-Nijssing [31]	Ramm-Johannsen [20]	vorliegende Arbeit
Geschwindigkeitsverteilung	Impulsaustauschgröße	Aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnet nach Buleev Gleichung (37)	Aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnet nach Prandtl Gleichung (25)
	Anisotrope Austauschgröße ϵ_M 2112	in radialer Richtung konstant -	abhängig vom Wandabstand +
	Güte der Reibbeiwerte (Bild 26)	ca. 10 % zu hoch -	gut +
Temperaturfeld	Lösungsverfahren	analytisch	Differenzenverfahren in krummlinig orthogonalen Koordinaten
	Lösungsverfahren	Differenzenverfahren in Zylinderkoordinaten. Axiale Integration: * analytisch -	Differenzenverfahren in krummlinig orthogonalen Koordinaten Axiale Integration: +
	Stoffwerte	grundsätzlich konstant	mit lokaler oder mittlerer Temperatur mit H Rückwirkung auf ϵ_M, ϵ .
	Kühlmittel	nur Natrium (dicke Grenzschicht) -	H, ϵ_M bei $y^+ < 70$ bekannt, daher Natrium, Helium, Wasser
	Anschluß weiterer Unterkanäle	Hoher Aufwand, da Randlinien keine Koordinatenlinien -	Hoher Aufwand, da Randlinien keine Koordinatenlinien -

Tabelle 9: Vergleich verschiedener Methoden zur Bestimmung des Temperaturfeldes im Kühlmittel eines Brennelements

* Rechenprogramm nicht verfügbar

Die Vorteile der hier vorliegenden Arbeit sind daher in folgenden Punkten zu sehen: Durch die Verwendung eines Turbulenzmodells werden die Austauschgrößen bis in die zähe Unterschicht (ca. $2 y^+$) hinein bestimmt. Durch die Verwendung eines Differenzenverfahrens kann die Änderung der Stoffwerte und die daraus folgende Änderung der Austauschgrößen berücksichtigt werden. Durch die getrennt durchgeführte Analyse der Geometrie des Kanalquerschnitts (Erstellung des Maschennetzes) wird dieser mit sehr wenig Maschenpunkten beschreibbar. So wurden bei den in Abschnitt 4 gezeigten Rechnungen, für eine Querschnittsfläche entsprechend Bild 10, Maschennetze mit 1540 Punkten verwendet. Davon standen zur Beschreibung der zähen Unterschicht 810 Punkte zur Verfügung. Zum zweiten konnten die Gleichungssysteme durch die Verwendung des krummlinig orthogonalen Maschennetzes nach der sehr schnellen SLOR (Successive Line Overrelaxation) Methode gelöst werden. Zum dritten wird eine hohe Flexibilität beim Anschluß weiterer Unterkänäle erreicht.

Schließlich konnte in der vorliegenden Arbeit eine sehr zufriedenstellende Übereinstimmung berechneter und experimentell bestimmter Größen nachgewiesen werden.

Dieselben Methoden, die hier am Beispiel eines zentralen Unterkanales in einem Brennelement erprobt wurden, können nun analog auf die Berechnung der Temperaturfelder in Wand- und Eckkanälen angewendet werden. Damit ergibt sich ein Rechenprogramm, das durch die vollständige Beschreibung der realen Geometrie z.B. einer Testanordnung ein wichtiges Hilfsmittel bei der Auslegung und Analyse von Experimenten darstellt. Außerdem lassen sich mit diesem Programm auf theoretischem Wege für Unterkanalprogramme neben den sehr wichtigen Mischungsraten zwischen benachbarten Unterkänälen auch genauere Heißkanalfaktoren aus den Amplituden der Wärmeübergangszahlen am Stabumfang bestimmen.

Abschließend kann man feststellen, daß mit den Programmen VERA und TERA ein Werkzeug erstellt worden ist, das zur Berechnung der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in allen Kanalquerschnitten, die durch krummlinig orthogonale Koordinatensysteme darstellbar sind, sehr gut geeignet ist.

6. Nomenklatur

<u>Symbol</u>	<u>Dimension</u>	<u>Bedeutung</u>
a_{ij}	l	Transformationstensor
c_p	W sec/kg °C	Wärmekapazität
D	m	Stabdurchmesser
D_h	m	hydraulischer Durchmesser
f	l	Reibbeiwert
F^{ij}	N	Krafttensor
l, l^*	m	Mischweglänge
l_r	m	Mischweglänge für die Austauschgröße in radialer Richtung
l_φ	m	Mischweglänge für die Austauschgröße in azimuthaler Richtung
m_{l_φ}	l	Steigung der Rampenfunktion von l_φ
Nu	l	$\alpha \cdot D_H / \lambda$
P	m	Stababstand
p	N/m ²	Druck
Pr	l	$\rho \cdot c_p \cdot \nu / \lambda$
q_w	W/cm ²	Wärmestrom an der Wand
q_i	W/cm ²	Wärmestrom in i-Richtung
Re	l	$u_b \cdot D_H / \nu$
S_i (i=1,2,3)	m	Koordinatenlinie
T	°C	Temperatur
\bar{T}	°C	Zeitlich gemittelte Temperatur
T'	°C	Temperaturschwankung
T_b	°C	über dem Kanalquerschnitt gemittelte Temperatur
\bar{T}_w	°C	am Stabumfang gemittelte Temperatur
ΔT_w	°C	maximale Temperaturdifferenz am Stabumfang

<u>Symbol</u>	<u>Dimension</u>	<u>Bedeutung</u>
\bar{T}, ℓ	$^{\circ}\text{C}/\text{m}$	$\partial \bar{T} / \partial x_{\ell}$
u	m/sec	axiale Geschwindigkeit
u_i	m/sec	Geschwindigkeit in i-Richtung
u_b	m/sec	über dem Kanalquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit
\bar{u}_i	m/sec	zeitlich gemittelte Geschwindigkeit
u'_i	m/sec	Schwankungsgeschwindigkeit
$\partial \bar{u}_1 / \partial x_n$	$1/\text{sec}$	Ableitung nach der Richtung des maximalen Gradienten
$\bar{u}_{i,j}$	$1/\text{sec}$	$\partial \bar{u}_i / \partial x_j$
u^+	1	$u / \sqrt{\tau_w / \rho}$
\hat{u}^+	1	u^+ im Maximum des Geschwindigkeitsprofils
x_i	m	Koordinaten eines kartesischen Dreibeins
y	m	Wandabstand
y^+	1	$y \cdot \sqrt{\tau_w / \rho} / \nu$
\hat{y}	m	Profillänge
\hat{y}_m	m	maximale Profillänge
$\bar{\vec{v}}$	m/sec	Geschwindigkeitsvektor zeitlich gemittelt
\vec{v}'	m/sec	Geschwindigkeitsvektor Schwankungsgröße
$\bar{\alpha}$	$\text{W}/\text{m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}$	$q_w / (\bar{T}_w - T_b)$
α_m	$\text{W}/\text{m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}$	Amplitude der Wärmeübergangszahl in azimuthaler Richtung am Stabumfang
ϵ^M	m^2/sec	Impulsaustauschgröße
ϵ^M_{ijkl}	m^2/sec	Pseudostoffgesetzentensor für Impulsaustausch
ϵ^H	m^2/sec	Wärmeaustauschgröße

<u>Symbol</u>	<u>Dimension</u>	<u>Bedeutung</u>
ϵ_{ij}^H	m^2/sec	Pseudostoffgesetzentensor für Wärmeaustausch
δ_{ij}	1	$\begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$
λ	$W/m \text{ } ^\circ C$	molekulare Leitfähigkeit
μ	$kg/m \text{ sec}$	dynamische Zähigkeit
ν	m^2/sec	kinematische Zähigkeit
ρ	kg/m^3	Dichte
τ_{ij}	N/m^2	Schubspannungstensor
τ_φ	N/m^2	lokale Wandschubspannung
τ_{av}	N/m^2	mittlere Wandschubspannung
ψ	1	ϵ^H / ϵ^M
φ	grad	Winkel

7. Literatur

- [1] A. Quarmby:
Improved Application of the von Kármán Similarity Hypothesis
to turbulent Flows in Ducts
Journal of Mechanical Engineering Science Vol. 11 (1969)
p. 14
- [2] T. Cebeci, A. Smidt, G. Mosinskis:
Solution of the Incompressible Turbulent Boundary-Layer
Equations with Heat Transfer
Trans. ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 92 (1970)
p. 133
- [3] M. Doshi, W. Gill:
An Improved Mixing Length Theory of Turbulent Heat and
Mass Transfer
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 14 (1971), p. 1355
- [4] S. Patankar, D. Spalding:
Heat Transfer in Boundary Layers
2nd edn., Intertext, London (1970), p. 91
- [5] R. Nijsing, W. Eifler:
Axial Development of Temperature Fields in Hexagonal Fast
Reactor Fuel Rod Assemblies with Liquid Metal Cooling
Int. Meeting on Reactor Heat Transfer, Karlsruhe (1973)
Oct. 9-11, paper 60
- [6] Duschek-Hochrainer:
Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung
Bd. 1 - 3, Springer, Wien 1960
- [7] K. Rothert:
Anwendung der Schalentheorie auf hyperbolische Paraboloid
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1970
- [8] W. Barfield:
Numerical Method for Generating Orthogonal Curvilinear Meshes
Journal of Computational Physics, Vol. 5 (1970) p. 23

- [9] K. Rehme:
Laminarströmung in Stabbündeln
Chemie-Ingenieur-Technik, Vol. 43 (1971), p. 962
- [10] U. Schumann:
Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen.
KFK-1854, Okt. 1973
- [11] J. Boussinesq:
Theorie de l'ecoulement tourbillant
Mem. pres Acad. Sci. XXIII, 46 Paris (1877)
- [12] L. Prandtl:
Über die ausgebildete Turbulenz
Zamm 5, (1925), S. 136
- [13] D. Spalding:
Mathematical Models of Turbulence,
Lecture 2, Imperial College, Mech. Engng. Dep., April 1971,
TM/TN/A/2
- [14] J. Nikuradse:
Gesetzmäßigkeit der turbulenten Strömung in glatten Rohren
Forsch. Arb. Ing. Wes., Heft 356 (1932)
- [15] Th. v. Kármán:
Mech. Ähnlichkeit und Turbulenz
Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 58 (1930)
- [16] R. van Driest:
On Turbulent Flow Near a Wall
J. of. Aerospace Sciences, Vol. 23, No. 11 (1956)
- [17] N. Buleev:
Theoretical Model of the Mechanism of Turbulent Exchange in Fluid Flow
Report AERE TRANS 957

- [18] N. Buleev, M. Timukhina:
Simplified Formulas for the Turbulent-Exchange Coefficients
in Fluid Flow
High Temperature, Vol. 7 (1969), p. 96
- [19] N. Buleev, K. Polosukhina, V. Pyshin:
Hydraulic Resistance and Heat Transfer in a Turbulent Liquid
Stream High Temperature, Vol. 2 (1964), p. 673
- [20] H. Ramm, K. Johannson:
Hydrodynamics and Heat Transfer in Regular Arrays of
Circular Tubes
Paper at the Int. Seminar on Recent Developments in Heat
Exchangers, Trogir, Yugoslavia, (1972) August 30
- [21] B. Kjellström:
Studies of Turbulent Flow Parallel to a Rod Bundle of
Triangular Array
AE-RV-196 (1971)
- [22] A. Gosman, U. Pun, A. Runchal, D. Spalding, M. Wolfshtein:
Heat and Mass-Transfer in Recirculation Flows
Academic Press, London (1969)
- [23] K. Rehme:
Der Druckverlust für isotherme, inkompressible Strömung
in Stabbüdeln mit hexagonaler Stabanordnung
KFK-1427 (1971)
- [24] F. Hofmann:
Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in Brennstabbüdeln
symmetrischer und asymmetrischer Geometrie
KFK-1653 (1973)
- [25] J. Nikuradse:
Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreis-
förmigen Röhren.
Ing. Archiv 1, (1930), S. 306

- [26] V. Sandborn:
Experimental Evaluation of Momentum Terms in Turbulent
Pipe Flow
N.A.C.A. TN 3266 (1955)
- [27] W. Eifler, R. Nijssing:
Fundamental Studies of Fluid Flow and Heat Transfer in
Fuel Element Geometries
EUR 2193 e (1965)
- [28] W. Eifler:
Über die turbulente Geschwindigkeitsverteilung und Wand-
reibung in Strömungskanälen verschiedener Querschnitte
Dissertation TH Darmstadt (1968)
- [29] W. Eifler, R. Nijssing:
Turbulenter Reibungsbeiwert und Mischungsbeiwert für den
Impulsaustausch zwischen Unterkanälen - typische Beispiele
für nicht universelle Gesetzmäßigkeiten
Reaktortagung, Hamburg (1972) p. 7
- [30] W. Eifler, R. Nijssing:
Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung
und der Wandreibung in unendlich ausgedehnten parallel
angeströmten Stabbündeln
Wärme- und Stoffübertragung, Vol. 2 (1969), p. 246
- [31] R. Nijssing, W. Eifler:
Temperature Fields in Liquid-Metal Cooled Rod Assemblies
Int. Seminar on Heat Transfer in Liquid Metals
Trogir, Yugoslavia, Sept. (1971)
- [32] O. Dwyer:
Heat Transfer to Liquid Metals Flowing in Line Through
unbaffled Rod Bundles: A Review
Nuclear Engineering and Design, Vol. 10 (1969), p.3

- [33] A. Quarmby, R. Quirk:
Measurements of the Radial and Tangential Eddy Diffusivities
of Heat and Mass in Turbulent Flow in a Plain Tube
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol, 15 (1972) p. 2309
- [34] R. Jenkins:
Variation of the Eddy Conductivity with Prandtl Modulus
and its use in Prediction of Turbulent Heat Transfer
Coefficients
Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford,
Calif. (1951), p. 147
- [35] F. Davies:
Eddy Viscosity and Eddy Conductivity a Statistical Approach
and Experimental Verification.
Dissertation No. 4107, Schweiz Federal Institute of Technology
Zürich (1969)
- [36] V. Bobkov, M. Ibragimov, V. Subbotin:
Calculating the Coefficient of Turbulent Heat Transfer
for a Liquid Metal Flowing in a Tube
Sov. Ar. Energ., Vol. 24 (1968), p. 545
- [37] H. Hoffmann, D. Markfort, P. Voj, D. Weinberg:
Experimentelle Untersuchungen zur Wärme- und Strömungs-
mechanik von Schnellbrüter-Brennelementen
Fachtagung der Fachgruppen Reaktorphysik und Thermo-
Fluiddynamik, Jülich, 23. Januar (1973)
- [38] H. Gräber, M. Rieger:
Experimentelle Untersuchungen des Wärmeübergangs an
Flüssigmetallen (NaK) in parallel durchströmten Rohrbündeln
bei konstanter und exponentieller Wärmeflußverteilung
ATKE, Vol. 19 (1972), p. 23
- [39] V. Subbotin, P. Ushakov, V. Kirillov et al.:
Heat Removal from the Reactor Fuel Elements cooled by
Liquid Metals
3 UN-Int. Conf. 1964, A/Conf. 28/P/328

- [40] F. Dittus, L. Boelter:
Heat Transfer in Automobile Radiators of the Tubular Type
Univ. of Calif. (Berkeley) Publs. Eng. 2 (13), p. 443 (1930)
- [41] K. Doetschmann:
Institut für Reaktorentwicklung, private Mitteilung
- [42] U. Schumann:
MAPLIB - ein Programmsystem zur Bereitstellung von Stoff-
daten für Rechenprogramme
KFK 1253, Sept. (1970)
- [43] K. Doetschmann:
THESYS - ein Fortran Programm zur Berechnung der nominellen
Temperaturverteilung in schnellen Reaktorkernen
KFK in Vorbereitung
- [44] D. Rowe:
COBRA II - A Digital Computer Program for Thermal
Hydraulik Subchannel Analysis of Rod Bundle Nuclear
Fuel Elements
BNWL 1229, Febr. (1970)
- [45] H. Reichhardt:
Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeits-
verteilung in glatten Leitungen
ZAMM, Vol. 31 (1951) p. 208
- [46] K. Maubach, K. Rehme:
Negative Austauschgrößen bei unsymmetrischen
Geschwindigkeitsprofilen ?
PSB-Bericht 1970 (unveröffentlicht)
- [47] M. Maresca, O. Dwyer:
Heat Transfer to Mercury flowing in Line through a Bundle
of Circular Rods
J. Heat Transfer Vol. 86 (1964), p. 180
- [48] A. Fiege;
Projekt Nukleare Sicherheit, private Mitteilung