

KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

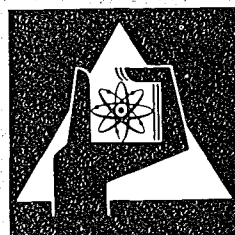
Juli 1974

KFK 1979

Institut für Datenverarbeitung in der Technik

**Simulation von Warteschlangensystemen:
Programmsystem zur Stichprobenerhebung und -auswertung**

O. Drobnik, F. Schumacher, R. Senger



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

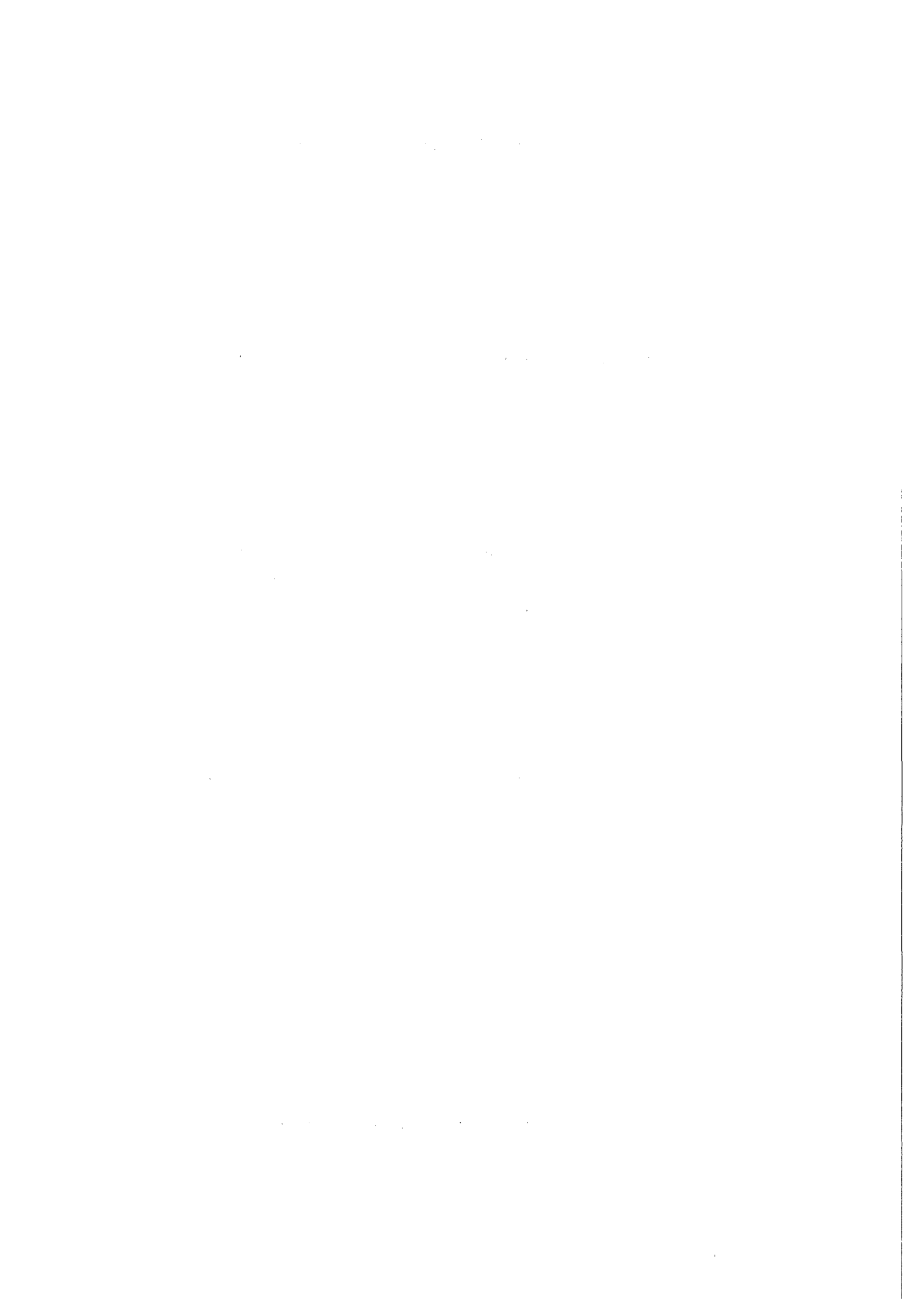
KFK 1979

Institut für Datenverarbeitung in der Technik

Simulation von Warteschlangensystemen:
Programmsystem zur Stichprobenerhebung
und -auswertung

O. Drobnik, F. Schumacher, R. Senger

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe



Kurzfassung:

Der Vergleich alternativer Strategien in stochastischen Warteschlangensystemen ist oft nur mittels Simulation möglich. Hauptprobleme sind die Umwandlung der durch die Simulation gewonnenen Rohdaten in Stichproben, die den Voraussetzungen statistischer Auswertungsverfahren entsprechen, und die Anwendung dieser Verfahren selbst. Im Bericht werden hierzu Methoden beschrieben und deren Implementierung in der Sprache SIMULA vorgestellt.

Simulation of queueing systems:
a programming system for sampling and evaluation of data

Abstract:

Simulation is often used to compare alternative strategies in stochastic queueing systems. Problems arise as well from the necessity to transform raw data gained by simulation into samples matching the requirements of statistical decision procedures. The report presents a description of statistical evaluation methods and their implementation in the language SIMULA.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Erhebung und Auswertung von Stichproben	2
2.1. Stationarität und Einschwingverhalten	2
2.2. Autokorrelation	6
2.3. Stichprobenauswertung	8
2.3.1. Allgemeines	8
2.3.2. Diskussion der Verfahren	9
3. Verfahren und ihre Implementierung	15
3.1. Allgemeines	15
3.2. Die Hilfsprozeduren QUICKSORT, QUICKSR, NDTR	16
3.2.1. Prozedur QUICKSORT	16
3.2.2. Prozedur QUICKSR	17
3.2.3. Prozedur NDTR	18
3.3. Plotprozeduren	19
3.3.1. Histogrammausgabe	19
3.3.2. Plotausgabe von Werten einer Meßreihe	23
3.4. Einteilen einer Stichprobe in Blöcke	26
3.5. Tests auf Stationarität	29
3.5.1. Run-Test	29
3.5.2. Trend-Test	33
3.6. Korrelogramm	34
3.7. Leistungsspektrum	36
3.8. Punktschätzung von Mittelwert und Varianz	38
3.8.1. Schätzung des Mittelwerts	38
3.8.2. Schätzung der Varianz	39
3.9. Intervallschätzung für Mittelwert und Varianz	40
3.9.1. Konfidenzintervall für einen Mittelwert	40
3.9.2. Konfidenzintervall für mehrere Mittelwerte	41
3.9.3. Konfidenzintervall für die Varianz	43
3.10. Tests auf Gleichheit von $m \geq 2$ Mittelwerten	44
3.10.1. Der Fall $m = 2$	44
3.10.1.1. Student's-t-Test	44
3.10.1.2. Mann-Whitney-U-Test	46
3.10.2. Der Fall $m > 2$	49
3.10.2.1. Der Vergleich mittels F-Test	49
3.10.2.2. Kruskal-Wallis-Test	51

	<u>Seite</u>
3.11. Multiple Vergleiche von $m > 2$ Mittelwerten	53
3.11.1. Multipler t-Test	53
3.11.2. Dunnet-Test	55
3.11.3. Tukey-Test	56
3.11.4. Scheffé-Test	58
3.11.5. Prozedur PARTITION	60
3.12. Anordnung und Auswahl von Mittelwerten	61
3.12.1. Zweistufiges Verfahren von Bechhofer	61
3.12.2. Sequentielles Verfahren von Bechhofer	64
3.12.3. Sequentielles Verfahren von Paulson	67
3.13. Vergleich und Anordnung von Varianzen	72
3.13.1. Vergleich zweier Varianzen	72
3.13.2. Vergleich von $m > 2$ Varianzen	74
3.13.3. Multiple Vergleiche, Anordnung und Auswahl von Varianzen	76
3.14. Kolmogoroff-Smirnov-Test	76
4. Schlußbemerkungen	79
5. Literaturverzeichnis	80

1. Einleitung

Der Bericht enthält eine Beschreibung der Implementierung von Verfahren, die den Vergleich alternativer Strategien in stochastischen Warteschlangensystemen mittels rechnergestützter Simulation ermöglichen. Dabei wurden zwei Problemkreise unterschieden: Stichprobenerhebung und Stichprobenauswertung.

Die Strategien werden anhand verschiedener Charakteristika - wie Mittelwert, Varianz, Verteilung - von Leistungskenngrößen verglichen, die auf Grund der durch die Simulation gewonnenen Meßwerte geschätzt werden. Da diese Meßwerte im allgemeinen wegen der Autokorrelation und der Einschwingphase nicht unmittelbar für die statistischen Verfahren der Stichprobenauswertung verwendet werden können, müssen sie entsprechend umgewandelt werden. Hierzu dienen die Verfahren der Stichprobenerhebung.

Bei der Stichprobenauswertung erfolgt der eigentliche Vergleich der Strategien. Mittelwerte, Varianzen usw. der Leistungskenngrößen werden durch Konfidenzintervalle abgesichert, auf Gleichheit untersucht und im Falle signifikanter Unterschiede der Größe nach angeordnet.

Diese Arbeit entstand im Rahmen der Untersuchungen unterschiedlicher Auftragsvergabeverfahren in Rechnerverbundsystemen mittels eines in der Sprache SIMULA /12/ implementierten Simulationsmodells. Existierende Simulationssprachen - GPSS, SIMSCRIPT, SIMULA usw. - sowie statistische Programmpakete wie Stat-Pack /41/ oder der statistische Teil des SSP /40/ stellen zwar eine Anzahl statistischer Prozeduren zur Verfügung, die jedoch auf das Problem des Strategienvergleichs durch Simulation nicht zugeschnitten sind.

Im folgenden Abschnitt 2 wird die Problematik der Stichprobenerhebung und -auswertung aufgezeigt und Vorgehensweisen mittels der implementierten Prozeduren diskutiert. In Abschnitt 3 werden die Verfahren beschrieben und deren Implementierung in der für das Simulationsmodell verwendeten Sprache SIMULA vorgestellt.

2. Erhebung und Auswertung von Stichproben zum Strategienvergleich

2.1. Stationarität und Einschwingverhalten

In der Zielsetzung von Simulationsstudien lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Fragestellungen unterscheiden: die eine richtet sich auf die Untersuchung von transienten, die andere auf die stationärer Systemzustände. Transiente Zustände kann man als Ausnahmestände ansehen, d.h. als Zustände, in denen das System besonderen Bedingungen unterworfen ist, wie z.B. Betriebsbeginn, Spitzenbelastungen oder Ausfall von Systemkomponenten. Im Gegensatz dazu spricht man von stationären Zuständen, wenn die Systemparameter als von der Zeit unabhängig betrachtet werden können.

Bei unseren Untersuchungen an Simulationsmodellen von Mehrrechnersystemen beschränken wir uns stets auf den stationären Fall, und zwar auf die Stationarität im weiteren Sinn, die definiert ist durch einen zeitunabhängigen Mittelwert μ und eine zeitunabhängige Autokovarianzfunktion $\text{cov}(\tau)$

$$\mu = E(X_t) < \infty$$

$$\text{cov}(\tau) = E((X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)) < \infty$$

mit ganzzahligen t, τ und festem τ /19/. Bei den von uns vorgestellten Verfahren genügt diese im Gegensatz zur Stationarität im strengen Sinne - alle Momente sind zeitinvariant - schwächere Voraussetzung.

Eine Vereinfachung im Hinblick auf praktikable Tests zum Aufdecken von Instationaritäten erreicht man dadurch, daß anstelle der Autokovarianz nur die Varianz getestet wird. Für $\tau=0$ ist nämlich die Autokovarianz gleich der Varianz und es ist höchst unwahrscheinlich, daß stationäre Systemgrößen für alle τ außer $\tau=0$ eine zeitabhängige Autokovarianz besitzen.

Für einfache Systeme wie z.B. die M/M/1-Warteschlange lassen sich hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß sich das System asymptotisch stationär verhält. Für komplexe Systeme wie z.B. Rechnernetze ist dies jedoch i.a. nicht möglich. Man muß dann mit Hilfe statistischer Tests überprüfen, ob das System einen stationären Zustand erreicht.

In enger Verbindung mit dem Problem der Stationarität steht die Analyse des Einschwingverhaltens, die zur Eliminierung der eventuell auftretenden Verzerrung von Messungen durch die Anfangswerte - in unserem Fall leere Warteschlangen und untätige Bedienungsstationen - notwendig ist. Unter der Annahme, daß die Voraussetzungen für ein stationäres Verhalten gegeben sind, geht das Simulationssystem nach Beendigung der Einschwingperiode in die stationäre Phase über; es ist also zuerst die Einschwingperiode zu bestimmen und anschließend zu prüfen, ob sich das System im Gleichgewichtszustand befindet.

Zur Lösung des Problems der Einschwingperiode existieren heutzutage keine generell anwendbaren Verfahren, so daß man noch auf die Erfahrung angewiesen ist. Grundsätzlich lassen sich zwei Vorgehensweisen unterscheiden, zum einen den Lauf mit bestimmten für den Lauf repräsentativen Anfangswerten zu starten und zum anderen mit dem idle-Zustand, d.h. leere Warteschlangen und untätige Bedienungsstationen, zu beginnen und die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt erfaßten Werte nicht zur Berechnung der Meßgrößen heranzuziehen.

Die erste Methode entfällt für uns, da wir keine Kenntnisse über das zu erwartende Systemverhalten besitzen. Bei der anderen Methode verlagert sich das Problem der Verzerrung durch die Anfangswerte auf die Bestimmung des Zeitpunkts, nach dem das Simulationssystem in die stationäre Phase übergegangen ist.

Mit den in der Literatur vorgeschlagenen Verfahren (s. /10,17, 18,20,27,31,33/) dürfte folgende Vorgehensweise für einen Strategienvergleich geeignet sein: zuerst werden einzelne Systemgrößen über der Simulationszeit vom Zeitpunkt $t=0$ bis t größer

voraussichtliche Einschwingperiodenlänge geplottet /10/, um einen groben Einblick in das Systemverhalten zu bekommen. Er gibt sich kein offensichtliches instationäres oder oszillatorisches Verhalten, so wird dann ausgehend von der Graphik des Einschwingvorganges dessen Länge festgelegt. Hierzu bieten sich die von Morse, Tocher (s. /27/) und Conway /10/ vorgeschlagenen Methoden an. Ausgehend von einer Approximationsformel für die Autokorrelationsfunktion $cov(\tau)$ eines M/M/1-Warteschlangensystems mit der Ankunftsrate λ und der Bedienungsrate μ

$$cov(\tau) \approx a \cdot \exp\left(-\frac{(\mu-\lambda)^2}{\mu} \tau\right) + b$$

mit den Konstanten a und b , empfiehlt Morse die Einschwingphase mindestens so lang zu wählen, bis der Exponent einen Wert kleiner als -3 annimmt:

$$\tau > 3 \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$$

Tocher geht von einer Darstellungsmöglichkeit stochastischer Prozesse durch Überlagerungen zyklischer Prozesse aus. Ist der längste Zyklus drei- oder viermal durchlaufen, so kann in etwa angenommen werden, daß der stationäre Zustand erreicht ist. Bei einem Warteschlangensystem kann z.B. die Warteschlangenlänge als ein solcher Prozeß betrachtet werden. Ein Zyklus ist beendet, wenn der Warteprozeß mit dem Zustand einer untätigen Bedienungsstation begonnen und denselben Zustand zum ersten Mal wieder erreicht hat.

Conway schlägt in seinem Artikel vor, dann mit der Messung einer Größe zu beginnen, wenn der Wert dieser Größe weder das Minimum noch das Maximum der restlichen Werte der Meßreihe darstellt.

Die drei Verfahren sind zum Teil für einfache stochastische Systeme analytisch begründet. Ihre allgemeine Anwendbarkeit in der Simulation von komplexen Warteschlangensystemen beruht jedoch

vornehmlich auf der Erfahrung dieser Autoren. Daher halten wir es für angebracht, die Länge der Einschwingphase durch alle drei Verfahren abzusichern.

Das von Fishman /17/ entwickelte, auf der Theorie der Zeitfolgenanalyse beruhende Verfahren zur Eliminierung der Anfangswertverzerrung ist aufwendig und unsicher in seiner Aussagekraft und soll hier nicht weiter diskutiert werden.

In 3.3.2. ist eine Prozedur beschrieben, die unter Vorgabe eines bestimmten Formats Werte einzelner vom Anwender zu spezifizierender Systemgrößen über einen Bildschirm oder Schnelldrucker in Balkendiagrammform ausgibt.

Da die Methoden zur Bestimmung der Einschwingperiode mit einigen Unsicherheiten behaftet sind, wird als nächster Schritt mit den Daten, die nach der Einschwingphase anfallen, ein Test auf Stationarität durchgeführt. Wie bereits erwähnt, genügt es zum Nachweis der Stationarität im weiteren Sinne i.a., den Mittelwert und die Varianz der interessierten Zufallsgröße auf Stationarität zu testen. Hierbei ist im übrigen die Autokorrelation der Meßwerte zu berücksichtigen bzw. zu eliminieren (s. Kap. 2.2.). Für den eigentlichen Test auf Stationarität lassen sich im Prinzip alle bekannten Tests für die Zufälligkeit von Stichproben verwenden. Im allgemeinen wird man jedoch Mittelwerte bzw. Varianzen nicht kennen, so daß sich verteilungsunabhängige Verfahren wie der Run- bzw. Trendtest (s. 3.5.) anbieten.

Während der Runtest zum Aufdecken flukturierender Trends geeignet ist, wird der Trendtest zum Aufdecken monotoner Trends empfohlen.

2.2. Autokorrelation

Eine wichtige Voraussetzung bei der Anwendung statistischer Tests wie z.B. der Run- oder Trendtest ist die Unabhängigkeit der einzelnen Stichprobenwerte voneinander, welches bei der Simulation von Warteschlangensystemen i.a. wegen der Autokorrelation nicht zutrifft. Nimmt man z.B. als Zufallsgröße die Warteschlangenlänge, so dürfte einleuchtend sein, daß die Warteschlangenlänge zu einem bestimmten Zeitpunkt die Warteschlangenlängen an den unmittelbar folgenden Zeitpunkten beeinflusst.

Zur Bestimmung von Vertrauensintervallen bezüglich des Mittelwertes \bar{x} ist die Varianz desselben erforderlich, die bei einer Stichprobe vom Umfang N und der Varianz σ^2 abgeschätzt wird durch

$$\text{var}(\bar{x})_N = \frac{\sigma^2}{N} \quad (1)$$

Formel (1) gilt jedoch nur bei voneinander unabhängigen Stichprobenwerten, im Gegensatz zu

$$\text{var}(\bar{x})_N = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) R_s \quad (2)$$

mit den Autokovarianzen R_s . Letztere besitzen bei der Simulation von Warteschlangensystemen positive Werte, so daß eine Anwendung von Formel (1) zu einer Unterschätzung der Varianz des Mittelwertes führen würde.

Zur Berücksichtigung der Autokorrelation gibt es entsprechend Formel (1) und (2) zwei Vorgehensweisen, zum einen die Meßwerte so festzulegen, daß man unabhängige Werte erhält /10, 11,30/, und zum anderen für Formel (2) eine Abschätzung zu finden /1,15,16,17/. Beide Methoden gehen von den Meßwerten eines Simulationslaufs aus, dessen Länge von einem vorzugebenden Vertrauensintervall abhängig ist.

Eine Ausnahme zu diesen beiden Verfahren bildet die sogenannte Methode der Wiederholungsläufe /31/, bei der N Läufe mit unterschiedlichen Zufallszahlen durchgeführt werden. Jeder Lauf wird nach einem bestimmten Zeitintervall - i.a. nach der Einschwingphase - abgebrochen. Die Endwerte eines jeden Laufs werden dann für die Statistik herangezogen. Da normalerweise jeder Lauf die Einschwingperiode enthält, ist dieses Verfahren sehr aufwendig und kommt deshalb für uns nicht in Frage.

Auch die Methoden, die von einer Abschätzung der Formel (2) ausgehen, können für unseren Strategienvergleich nicht unmittelbar herangezogen werden, und zwar hauptsächlich aus zwei Gründen: zum einen ist bei einem Strategienvergleich darauf zu achten, daß die Simulationsläufe für die jeweiligen Strategien unter möglichst gleichen Bedingungen, wie z.B. gleichem Stichprobenumfang, ablaufen, zum anderen benötigen die einzelnen Tests (siehe Kap. 2.1., 2.3.) unabhängige Stichprobenwerte. Beides ist bei diesen Methoden nur unter großem Aufwand zu erreichen.

Das Verfahren von Fishman /17/ ist unter den Formel (2) zuzuordnenden Methoden die geeignetste. Sie beruht auf der Annahme, eine stationäre Zeitreihe durch einen sogenannten Autoregressiv-Moving average-Prozeß abbilden zu können, dessen Parameter eine einfache Abschätzung von Formel (2) gestatten. Das Verfahren ist statistisch fundiert, jedoch nur für die Berechnung des Vertrauensintervalls des Mittelwertes einer Zufallsgröße in einem Simulationslauf empfehlenswert.

Die von uns gewählte Vorgehensweise geht auf Conway /10/ und Crane /11/ zurück: Die durch die Simulationsläufe gewonnenen Meßreihen werden in einzelne Intervalle unterteilt, deren Mittelwerte für die Varianzanalyse herangezogen werden (3.4.). Der Umfang der Intervalle, d.h. die Unabhängigkeit der Werte der einzelnen Intervalle voneinander, wird vorher im Rahmen von Pilotläufen durch Korrelationsmessungen bestimmt (3.6.). Die Länge der Simulationsläufe ergibt sich sodann aus Intervalllänge und Stichprobenumfang und wird für alle Strategien gleich lang gesetzt (s. auch /10/).

In 3.7. ist dazu noch eine Prozedur aufgeführt, die die Möglichkeit bietet, ausgehend von bestimmten Korrelogrammwerten (3.6.) das Leistungsspektrum zu berechnen. Obwohl das Korrelogramm und das Leistungsspektrum, mathematisch gesehen, äquivalent sind (Zeit - Frequenzbereichdarstellung), liefern sie doch einen unterschiedlichen Blickwinkel auf die zu analysierenden Daten. Für unsere Simulationsanwendungen bietet die Darstellung im Frequenzbereich Möglichkeiten, gewisse Aussagen über die Varianz der Zeitreihe zu treffen und Periodizitäten der Zeitreihe zu entdecken. Im übrigen ist eine Eigenschaft des Leistungsspektrums - Bereitstellung unkorrelierter benachbarter Schätzwerte - für z.B. Validationszwecke sehr vorteilhaft. Auch ist der Aufwand zur Berechnung des Leistungsspektrums gering, wenn die Korrelationswerte vorliegen.

2.3. Stichprobenauswertung

2.3.1. Allgemeines

Zum Vergleich alternativer Strategien ziehen wir als Maß für die Bewertung der Strategien hauptsächlich die Mittelwerte der Leistungskenngrößen heran. Daneben sind auch Aussagen über die Varianzen der Kenngrößen von Interesse, nicht nur weil die Varianzen zur Mittelwertsuntersuchung unerlässlich sind, sondern auch die Gleichmäßigkeit der Strategien widerspiegeln. Die anhand der Stichproben ermittelten Schätzwerte sind durch Konfidenzintervalle abzusichern, auf Gleichheit zu untersuchen und im Falle signifikanter Unterschiede der Größe nach anzuordnen.

Naheliegend ist die Verwendung der Methoden der Varianzanalyse, die jedoch von den Stichproben neben der Unabhängigkeit die Normalverteilung und die Varianzgleichheit fordert. Da die Unabhängigkeit - wie schon in 2.2. besprochen - durch geeignete Auswahl der Stichproben und Experimentdurchführung zu gewährleisten ist, konzentrieren wir uns im weiteren nur auf Auswirkungen der Abweichungen von der Normalverteilung und Varianzgleichheit und stellen geeignete Tests zur Prüfung der Abwei-

chungen bereit. Einige Verfahren, insbesondere die auf dem F-Test bestehenden, zeigen sich unempfindlich gegenüber Abweichungen von diesen Voraussetzungen, sofern die Stichprobenumfänge der zu vergleichenden Strategien gleich und entsprechend groß sind.

Nichtparametrische Tests sind naturgemäß aussageschwächer als parametrische, da sie entweder keine Voraussetzung an die Gestalt der den Stichproben zugrundeliegenden Verteilungen stellen oder nur deren Stetigkeit verlangen. Ihre Anwendung ist daher insbesondere bei kleinen Stichprobenumfängen (< 10) unproblematischer.

Sequentielle Verfahren erlauben das sofortige Abbrechen des Experiments bei Erfüllung des durch das vorgegebene Signifikanzniveau festgelegten Abbruchkriteriums und setzen nicht die Existenz von Tabellen über kritische Werte der Irrtumswahrscheinlichkeiten voraus. Sie wurden nur bei Anordnungsproblemen berücksichtigt, da in anderen Fällen ausreichend Tabellen vorhanden sind.

2.3.2. Diskussion der Verfahren

Punktschätzungen der Mittelwerte und Varianzen (3.8.) der Verteilungen der den Stichproben zugehörigen Grundgesamtheiten liefern erste Übersichten, zumal wenn sie durch Angabe von Konfidenzintervallen (3.9.) ergänzt werden. Verfahren 3.9.2. liefert insbesondere gleichzeitig geltende Intervallschätzungen für die Mittelwerte mehrerer Stichproben. Die Methoden setzen zwar Normalverteilung voraus, können jedoch für beliebige Verteilungen verwendet werden, falls die Stichprobenumfänge geeignet gewählt werden, etwa

30 für den Mittelwert und
100 für die Varianz.

Lassen die hiermit erhaltenen Ergebnisse darauf schließen, daß Mittelwerte bzw. Varianzen sich signifikant unterscheiden könnten, so wird man multiple Vergleiche (engl.: multiple comparison) durchführen oder Anordnungs- und Auswahlverfahren (engl.: multiple ranking and selection) anwenden, ansonsten aber zuerst Gleichheitsprüfungen vornehmen.

Wir betrachten zunächst die Untersuchung von Mittelwerten.

Die Mittelwerte zweier Grundgesamtheiten vergleichen wir mittels des Student's-t-Tests (3.10.1.1.) oder seines nichtparametrischen Gegenstücks, des Mann-Whitney-U-Tests (3.10.1.2.), bei denen unterschiedliche Alternativen zur Nullhypothese berücksichtigt werden können.

Zum Vergleich der Mittelwerte mehrerer Grundgesamtheiten ziehen wir den F-Test (3.10.2.1.) oder den nichtparametrischen Kruskal-Wallis-Test (3.10.2.2.) heran, deren einzige Alternative die Ungleichheit der Mittelwerte ist.

F-Test sowie t-Test setzen Unabhängigkeit, Normalverteilung und Varianzgleichheit voraus und lassen unterschiedliche Stichprobenumfänge zu. Beide Tests sind relativ unempfindlich gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung und der Varianzgleichheit der Grundgesamtheiten, falls die betrachteten Stichprobenumfänge gleich sind und entsprechend groß gewählt werden, so beim t-Test etwa > 30 . Während zu diesen Tests Tabellen über kritische Werte der Verwerfungsbereiche in den meisten Statistikbüchern zu finden sind, existieren für ihre nichtparametrischen Gegenstücke oft nur Tabellen für kleine Stichprobenumfänge. Bei umfangreichen Stichproben sind jedoch Normalverteilung bzw. χ^2 -Verteilung gute Approximationen für die Verteilungen der Teststatistiken.

Sind $m > 2$ signifikant unterschiedliche Mittelwerte gegeben (der Fall $m = 2$ ist mit o.a. Verfahren durch entsprechende Alternativhypothesen erfaßbar), so sind Aussagen über die Mittelwertsdifferenzen erwünscht. Hierzu dienen die Verfahren von 3.11., die Unabhängigkeit, Normalverteilung und Varianzgleich-

heit voraussetzen.

Ein vor dem Versuch bestimmter fester Vergleich zweier Mittelwerte (aus einer Menge von m Mittelwerten) kann mit dem multiplen-t-Test (3.11.1.) behandelt werden.

Sollen jedoch nach Auswertung des Experiments mehrere Mittelwerte verglichen werden, so genügt es nicht, die Fehlerwahrscheinlichkeit für einen einzelnen Vergleich zu berücksichtigen, sondern man muß die Fehlerwahrscheinlichkeit für alle möglichen Vergleiche der Mittelwerte vorgeben. Aus diesem Grund kann der multiple-t-Test nicht zu Aussagen über gleichzeitig geltende Intervalle für alle $\binom{m}{2}$ -Mittelwertsdifferenzen herangezogen werden. Man verwendet hierzu im Falle des Vergleichs eines Mittelwerts mit allen restlichen die Dunnet-Methode (3.11.2.) und, falls alle $\binom{m}{2}$ -Mittelwertsdifferenzen zu prüfen sind, die Tukey-Methode (3.11.3.).

Verallgemeinerte Mittelwertvergleiche sind Gegenstand der Theorie der Kontraste /37,42/. Ein Kontrast zwischen den Parametern μ_1, \dots, μ_m ist eine lineare Funktion ψ ,

$$\psi = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i,$$

der μ_i mit bekannten konstanten Koeffizienten c_i und der Be-

dingung $\sum_{i=1}^m c_i = 0$.

Beispiele für Kontraste sind die bereits erwähnten Mittelwertsdifferenzen oder die Differenz zwischen Gruppen von Mittelwerten etwa

$$\psi = \frac{1}{3} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - \frac{1}{2} (\mu_4 + \mu_5).$$

Solche Kontraste untersucht man mit dem Scheffé-Test (3.11.4.).

Für die Mittelwertsdifferenzen ist bei gleichen Stichprobenumfängen die Tukey-Methode der Scheffé-Methode vorzuziehen, da sie kürzere Vertrauensintervalle für die Kontraste gibt. Andererseits besitzt die Scheffé-Methode den Vorteil, daß sie unempfindlich ist gegenüber Abweichungen von Normalverteilung und Varianzgleichheit bei gleichgroßen Stichprobenumfängen.

Beide Methoden liefern Vertrauensintervalle, die alle gleichzeitig für die zu untersuchenden Mittelwertsdifferenzen gelten, und können daher zur Anordnung der Mittelwerte nach ihrer Größe verwendet werden (3.11.5.), falls die Stichprobenumfänge der einzelnen Strategien gleich sind.

In der Praxis ist man aber oftmals nicht an Aussagen über Vertrauensintervalle von Mittelwertsdifferenzen interessiert, sondern will im einfachsten Fall nur entscheiden können, welche Strategie unter mehreren die im vorgegebenen Sinn "beste" ist. Sei im folgenden unter der "besten" Strategie die mit dem größten Mittelwert verstanden. Die Entscheidung wird schwierig, falls der größte und zweitgrößte Mittelwert sich nur gering unterscheiden. Daher empfiehlt sich folgende statistische Problemformulierung von Bechhofer /2/: Die Wahrscheinlichkeit der korrekten Auswahl der besten Strategie soll größer oder gleich einem vorgegebenen Wert P sein, falls der größte Mittelwert den zweitgrößten um einen vorgegebenen Wert δ oder mehr übersteigt. δ ist also der kleinste Wert der Differenz zwischen dem größten und zweitgrößten Mittelwert, den es zu entdecken gilt. Durch ihn ist eine Indifferenzzone festgelegt. Man nennt daher solche Methoden, Indifferenzzone-Methoden.

Eine andere Vorgehensweise wurde von Gupta /23/ entwickelt: man bestimmt eine Untermenge der m Strategien, die mit vorgegebener Mindestwahrscheinlichkeit die t besten Strategien enthält. Die Größe t wird als Zufallszahl behandelt und ergibt sich als Resultat des Verfahrens.

Beide Probleme werden durch die Formulierung von Sobel /29, 39/ erfaßt. Sein Ziel ist es, eine Untermenge mit Mindestum-

fang s auszuwählen, so daß mit Mindestwahrscheinlichkeit P die t besten Mittelwerte gemäß einer vorzugebenden Indifferenzonenangabe darin enthalten sind. Neben P ist hier t vorzugeben; s wird durch das Verfahren festgelegt.

Unter der Vielzahl der zu diesem Komplex entwickelten Lösungsvorschläge /4,26/ berücksichtigen wir nur die Indifferenz-Methoden, da sie es uns erlauben, mit einer vorzugebenden Wahrscheinlichkeit festzustellen, welche Strategie die beste ist, die somit die Problematik des Strategievergleichs am direktesten angehen. Die von uns ausgewählten Verfahren haben zudem den Vorzug, daß sie nur den Schätzwert der Varianz und nicht deren genauen Wert benötigen, wie dies bei speziell solchen Verfahren oft der Fall ist.

Das zweistufige Verfahren von Bechhofer (3.12.1.) kann zur Bestimmung sowohl des größten Mittelwerts als auch der vollständigen Anordnung benutzt werden. Unabhängigkeit und Normalverteilung werden vorausgesetzt, nicht jedoch gleiche Varianz, wobei über Auswirkungen einer Abweichung von der Normalverteilung nichts bekannt ist. Bei der Bestimmung des Stichprobenumfangs ist man auf Tabellen /14/ angewiesen, die jedoch nur für maximal 3 Strategien angegeben sind. Weitere Tabellen sind den Autoren nicht bekannt.

Hier helfen die sequentiellen Verfahren von Bechhofer (3.12.2.) und Paulson (3.12.3.) weiter, zu deren Anwendung keine Tabellen benötigt werden. Mit ihnen kann man nur die Strategie mit dem größten Mittelwert finden. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von 3.12.1. verlangen sie gleiche Varianzen. Da die Wahrscheinlichkeit der korrekten Strategiewahl beim sequentiellen Bechhofer-Verfahren sich ähnlich wie die Macht des F-Tests verhält, können umfangreiche und gleichgroße Stichproben Auswirkungen geringer Abweichungen von der Normalverteilung und der Varianzgleichheit mildern /26/.

Das mehr heuristische Verfahren von Paulson (3.12.3.) eliminiert in seinem Verlauf ungünstige Strategien und ist daher

aufwandsärmer in der Berechnung. Die Wahl eines effizienten Umfangs der Ausgangsstichprobe wird durch Approximationswerte unterstützt.

Bei der Untersuchung von Mittelwerten wurden für die den Stichproben zugrundeliegenden Verteilungen häufig Varianzgleichheit gefordert. Die folgenden Tests prüfen diese Bedingung und setzen dabei Unabhängigkeit und Normalverteilung voraus.

Im Falle zweier Stichproben verwendet man Verfahren 3.13.1. welches gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung empfindlich ist. Durch die in 3.13.1. beschriebene Stichproben-transformation kann jedoch der bei solchen Abweichungen unempfindliche t-Test (3.10.1.1.) herangezogen werden.

Für mehrere Stichproben empfiehlt sich die Methode von Scheffé (3.13.2.), die unempfindlich gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung ist. Die Stichproben werden mit der Scheffé-Transformation (3.13.2.) behandelt und anschließend dem F-Test unterworfen. Die Scheffé-Transformation bewirkt, daß die transformierte Stichprobe besser normalverteilt ist als die Ausgangsstichprobe.

Verfahren, die gemessen an den Aussagen über Mittelwerte ähnliches für Varianzen leisten, sind notwendig, um bei starken Abweichungen der Stichprobengrundgesamtheiten von Varianzgleichheit und Normalverteilung eine Bewertung der Strategien vornehmen zu können.

Hier zeigt sich der große Vorteil der Scheffé-Transformation. Die mit ihr gewonnenen Stichproben, die möglichst gleichen Umfang besitzen sollten, können mit den Verfahren von (3.11.) und (3.12.) behandelt werden. Bedingt durch die Art der Transformation erhält man keine Aussagen über Varianzdifferenzen, sondern über Verhältnisse zwischen Varianzen, wie in 3.13.3. näher erläutert wird. Spezielle Anordnungs- und Auswahlverfahren für Varianzen im Fall mehrerer Stichproben finden sich in /5/.

Um letztlich auch prüfen zu können, ob eine Stichprobe der Normalverteilung entstammt, wurde der Kolmogoroff-Smirnov-Test (3.14.) ausgewählt. Dieser gilt zwar nur für stetige Verteilungen im Gegensatz zum Chi-Quadrat-Test, der auch für diskrete Verteilungen verwendet werden kann. Er ist jedoch leichter handzuhaben und zusätzlich zum Vergleich zweier empirischer Verteilungsfunktionen geeignet.

3. Verfahren und ihre Implementierung

3.1. Allgemeines

Die Beschreibung der Implementierung eines Verfahrens ist wie folgt gegliedert:

- a) Beschreibung des Verfahrens
- b) Dokumentation der Implementierung des Verfahrens
- c) Literaturhinweise

zu a):

Die Beschreibung ist auf die Angabe des reinen Formalismus beschränkt und enthält i.a. keine nähere Erörterung theoretischer Hintergründe. In c) wurden deshalb neben Hinweisen auf erforderliche Tabellen auch solche auf Spezialliteratur berücksichtigt.

zu b):

Bei der Implementierung der Verfahren als Prozeduren wurde weniger auf Programmeffektivität als vielmehr auf Übersichtlichkeit des Programmflusses geachtet. Um dem Benutzer mehr Informationsmöglichkeiten zu bieten, wurde die Anzahl der Ausgabeparameter zum Teil größer gewählt, als es das jeweilige Problem verlangt. Die Dokumentation umfaßt Hinweise auf Verwendung der in 3.2. beschriebenen Hilfsprozeduren - QUICKSORT, QUICKSR und NDTR - und Einschränkungen, die beim implementierten Verfahren vorgenommen wurden. So sind z.B. einige Prozeduren nur für den Fall gleichgroßer Stichprobenumfänge angelegt.

An die Auflistung des Prozedurprogrammstücks - die Variablen-
namen entstammen dem Englischen - schließt sich die Dokumen-
tation über die formalen Prozedurparameter in Form einer
5-spaltigen Tabelle an:

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
------	-----	-----	--------	-----------

Par.: Name des Parameters

Typ: Typ des Parameters

I	Integer
IA	Integer Array
R	Real
RA	Real Array
B	Boolean
BA	Boolean Array
T	Text

E/A: Eingabe- oder Ausgabeparameter

E	Eingabe
A	Ausgabe

Überg.: Art der Parameterübergabe

Ref	Referenz	} Übergabe
Val	Wert	
Name	Namens	

Bedeutung: Beschreibung der Funktion des Parameters

3.2. Die Hilfsprozeduren QUICKSORT, QUICKSR, NDTR

3.2.1. Prozedur QUICKSORT

a) QUICKSORT sortiert die Elemente der als Vektor LIST einge-
gebenen Liste der Größe nach.

Bsp.: LIST = (4,7,2) wird durch QUICKSORT in
LIST = (2,4,7) umgewandelt.

b)

```

PROCEDURE QUICKSORT(LIST,B,E);
INIEGER B,E;REAL ARRAY LIST;

BEGIN INIEGER I,J;REAL F;
  I:=B;J:=E;
  M1: FOR J:=J-1 WHILE LIST(I) <= LIST(J)
  DO IE I=J IHEN GOIQ M2;
  F:=LIST(I);LIST(I):=LIST(J);LIST(J):=F;
  FOR I:=I+1 WHILE LIST(I) <= LIST(J)
  DO IE I=J IHEN GOIQ M2;
  F:=LIST(I);LIST(I):=LIST(J);LIST(J):=F;
  GOIQ M1;
  M2: J:=J+1;
  IE B<I-1 IHEN QUICKSORT(LIST,B,I);
  IE J+1<E IHEN QUICKSORT(LIST,J,E);
END OF QUICKSORT;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
LIST	RA	E	Ref	zu sortierende Liste
		A		sortierte Liste
B	I	E	Val	untere Bereichsgrenze
E	I	E	Val	um 1 erhöhte obere Bereichsgrenze (ist N obere Bereichsgrenze, so ist für E der Wert N+1 einzugeben)

c) Lit: /44/

3.2.2. Prozedur QUICKSR

a) QUICKSR sortiert nicht nur wie die Prozedur QUICKSORT eine Liste LIST, sondern gibt zur sortierten Liste die ursprüngliche Stellung der Elemente in der Liste im Vektor RANG aus. RANG besitzt dieselben Bereichsgrenzen wie LIST.

Bsp.: LIST = (4,7,2) und RANG = (1,2,3) werden von QUICKSR in LIST = (2,4,7) und RANG = (3,1,2) umgewandelt.

b)

```

PROCEDURE QUICKSR(LIST,B,E,RANG);
INIEGER B,E;INIEGER ARRAY RANG;REAL ARRAY LIST;

BEGIN INIEGER I,J,G;REAL F;
  I:=B;J:=E;
  M1: FOR J:=J-1 WHILE LIST(I) <= LIST(J)
  DO IF I=J THEN GO TO M2;
  F:=LIST(I);LIST(I):=LIST(J);LIST(J):=F;
  G:=RANG(I);RANG(I):=RANG(J);RANG(J):=G;
  FOR I:=I+1 WHILE LIST(I) <= LIST(J)
  DO IF I=J THEN GO TO M2;
  F:=LIST(I);LIST(I):=LIST(J);LIST(J):=F;
  G:=RANG(I);RANG(I):=RANG(J);RANG(J):=G;
  GO TO M1;
  M2: J:=J+1;
  IF B<I-1 THEN QUICKSR(LIST,B,I,RANG);
  IF J+1<E THEN QUICKSR(LIST,J,E,RANG);
END OF QUICKSR;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
LIST	RA	E	Ref	} wie bei QUICKSORT (3.2.1.)
		A		
B	I	E	Val	
E	I	E	Val	} wie oben unter a) erläutert
RANG	IA	E	Ref	
		A		

3.2.3. Prozedur NDTR

a) Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1. Die Prozedur berechnet zu vorgegebenem Argument X den Wert der Verteilungsfunktion und den der Dichtefunktion. Hierbei wurde die Approximation aus /40/ verwendet, deren maximaler Fehler bei $7 \cdot 10^{-7}$ liegt.

b)

```
PROCEDURE NCTR(X,PROB,DENS);
NAME PRCB,DENS;REAL X,PROB,DENS;

BEGIN REAL XABS,S,T;
  XABS:=ABS(X);
  S:=1.0/(1.0+0.2316419*XABS);
  DENS:=0.3989423*EXP(-X*X/2.0);
  T:=(((1.330274*S-1.821256)*S+1.781478)*S-0.3565638)*S+0.3193815;
  PROB:=1.0-DENS*S*T;
  IF X<0 THEN PROB:=1.0-PROB;
END OF NCTR;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R	E	Val	Argument
PROB	R	A	Name	Wert der Verteilungsfunktion
DENS	R	A	Name	Wert der Dichtefunktion

c) Lit: /40/

3.3. Plotprozeduren

3.3.1. Histogrammausgabe

a) Die Prozedur HISTO_PLOT dient der Ausgabe von Histogrammen über einen Bildschirm oder Schnelldrucker. Ausgehend von Wertepaaren (x_i, y_i) für $i = 0(1)N$, die in den beiden Feldern X und Y bereitstehen, werden die y_i 's in Balkenform über den x_i -Werten dargestellt, und zwar jeweils ein Wertepaar (x_i, y_i) pro Schreibzeile, so daß die X-Achse senkrecht zur Schreibzeile verläuft (s. Beispiel Abb. 1).

Die Werte des Feldes Y werden innerhalb der Prozedur auf die maximale Schreibstellenanzahl einer Ausgabezeile CHARPLINE normiert und Zeile für Zeile zusammen mit den

arithmetischen Werten der x_i , y_i ausgegeben. Die Lage der Abzisse ist dabei durch den maximalen negativen (minimalen positiven) und maximalen positiven (minimalen negativen) Ordinatenwert bestimmt.

Das Balkendiagramm kann wahlweise mit entsprechenden Überschriften und Achsenbezeichnungen versehen werden.

SPECTRUM

FREQUENCY	SPECTRALVALUE
0.000E+00	1.811E+05 *****
5.236E-02	1.318E+05 *****
1.047E-01	5.403E+04 *****
1.571E-01	2.435E+04 *****
2.094E-01	2.681E+04 *****
2.618E-01	2.999E+04 *****
3.142E-01	2.587E+04 *****
3.665E-01	2.052E+04 *****
4.189E-01	1.943E+04 *****
4.712E-01	2.190E+04 *****
5.236E-01	2.375E+04 *****
5.760E-01	2.144E+04 *****
6.283E-01	1.934E+04 *****
6.807E-01	2.239E+04 *****
7.330E-01	2.658E+04 *****
7.854E-01	2.648E+04 *****
8.378E-01	2.506E+04 *****
8.901E-01	2.792E+04 *****
9.425E-01	3.055E+04 *****
9.948E-01	2.757E+04 *****
1.047E+00	2.465E+04 *****
1.100E+00	2.752E+04 *****
1.152E+00	3.332E+04 *****
1.204E+00	3.689E+04 *****
1.257E+00	3.545E+04 *****
1.309E+00	2.932E+04 *****
1.361E+00	2.630E+04 *****
1.414E+00	2.942E+04 *****
1.466E+00	2.920E+04 *****
1.518E+00	2.312E+04 *****
1.571E+00	1.819E+04 *****
1.623E+00	1.700E+04 *****

Abb. 1: Beispiel einer Histogrammausgabe eines Leistungs-
spektrums mit dem Prozeduraufruf HISTO PLOT("SPECTRUM",
"FREQUENCY", "SPECTRALVALUE", X, Y, 60, 90, 4);

```
b) PROCEDURE HISTO_PLOT(TITLE, ABSZ, ORDIN, X, Y, N, CHARPLINE,
DIGPVALUE);
VALUE TITLE, ORDIN, ABSZ;
IEXI TITLE, ABSZ, ORDIN;
ARRAY X, Y;
INIEGER N, CHARPLINE, DIGPVALUE;

BEGIN INIEGER I, AUX1, AUX2, BEAMLENGTH;
IEXI STRCKE, STAR;
REAL VMAX, VMIN, CENTRE;
BEAMLENGTH:=CHARPLINE-2*(DIGPVALUE+7);
STROKE:=BLANKS(CHARPLINE); STAR:=BLANKS(CHARPLINE);
FOR I:=1 STEP 1 UNIL CHARPLINE DO
BEGIN STROKE.PUTCHAR('_'); STAR.PUTCHAR('*'); END;
FOR I:=0 STEP 1 UNIL N DO
BEGIN IF Y(I)>VMAX THEN VMAX:=Y(I);
IF Y(I)<VMIN THEN VMIN:=Y(I);
END;
IF VMIN>0 THEN CENTRE:=VMIN ELSE IF VMAX<0 THEN CENTRE:=VMAX
ELSE CENTRE:=0;

EJECT(1);
OUTTEXT(BLANKS((CHARPLINE-TITLE.LENGTH)/2));
OUTTEXT(TITLE); OUTIMAGE;
EJECT(LINE+2);
OUTCHAR(' '); OUTTEXT(ABSZ); OUTIMAGE;
OUTTEXT(BLANKS(DIGPVALUE+8)); OUTTEXT(ORDIN); OUTIMAGE;
OUTIMAGE;
OUTTEXT(STROKE); OUTIMAGE;

AUX1:=ENTIER((CENTRE-VMIN)*(BEAMLENGTH-1)/
(IE VMAX-VMIN < 1 THEN 1 ELSE VMAX-VMIN)+0.5);
FOR I:=0 STEP 1 UNIL N DO
BEGIN OUTREAL(X(I), DIGPVALUE, DIGPVALUE+6);
OUTREAL(Y(I), DIGPVALUE, DIGPVALUE+7);
AUX2:=ENTIER((Y(I)-VMIN)*(BEAMLENGTH-1)/
(IE VMAX-VMIN < 1 THEN 1 ELSE VMAX-VMIN)+0.5);
IF AUX2<AUX1 THEN
BEGIN OUTTEXT(BLANKS(AUX2)); OUTTEXT(STAR.SUB(1, AUX1-AUX2));
OUTCHAR('|'); OUTTEXT(BLANKS(BEAMLENGTH-AUX1-1));
END;
IF AUX2=AUX1 THEN
BEGIN OUTTEXT(BLANKS(AUX2)); OUTCHAR('*');
OUTTEXT(BLANKS(BEAMLENGTH-AUX1-1));
END;
IF AUX2>AUX1 THEN
BEGIN
OUTTEXT(BLANKS(AUX1)); OUTCHAR('|');
OUTTEXT(STAR.SUB(1, AUX2-AUX1));
OUTTEXT(BLANKS(BEAMLENGTH-AUX2-1));
END;
OUTIMAGE;
END;
END OF HISTO_PLOT;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
TITLE	T	E	Val	Übersicht des Histogramms
ABSZ	T	E	Val	Abszissenbeschriftung
ORDIN	T	E	Val	Ordinatenbeschriftung
X	RA	E	Ref	Abszissenwerte (x_i), $i=0(1)N$
Y	RA	E	Ref	Ordinatenwerte (y_i), $i=0(1)N$
N	I	E	Name	Dimension von X und Y
CHARPLINE	I	E	Name	maximale Druckstellen- anzahl pro Zeile
DIGPVALUE	I	E	Name	Anzahl der Ziffern eines Werts

3.3.2. Plotausgabe von Werten einer Meßreihe

- a) Die Prozedur VALUE_PLOT stellt Meßwerte in Balkendiagrammform über einen Schnelldrucker oder Bildschirm graphisch dar. Die aufzuzeichnenden Werte x_i , $i=1(1)N$, werden der Prozedur mittels eines Feldes X mit dem Umfang N übergeben. Innerhalb der Prozedur werden die x_i auf ihren größten Wert, entsprechend der maximal zulässigen Balkenlänge, normiert und sequentiell ausgedruckt. Da im Gegensatz zur Ausgabe bei der Prozedur HISTO_PLOT in diesem Fall kein hoher Auflösungsgrad benötigt wird - es soll nur ein grober Einblick in die Meßwertestruktur gegeben werden -, verläuft die Abszisse parallel zu einer Druckzeile mit der maximalen Schreibstellenanzahl CHARPLINE und der Druckzeilenanzahl pro Seite LINESPPAGE. Der Parameter NPAGE gibt die Anzahl der Abschnitte einer Druckseite an (im Beispiel (s. Abb. 2) ist NPAGE = 4).

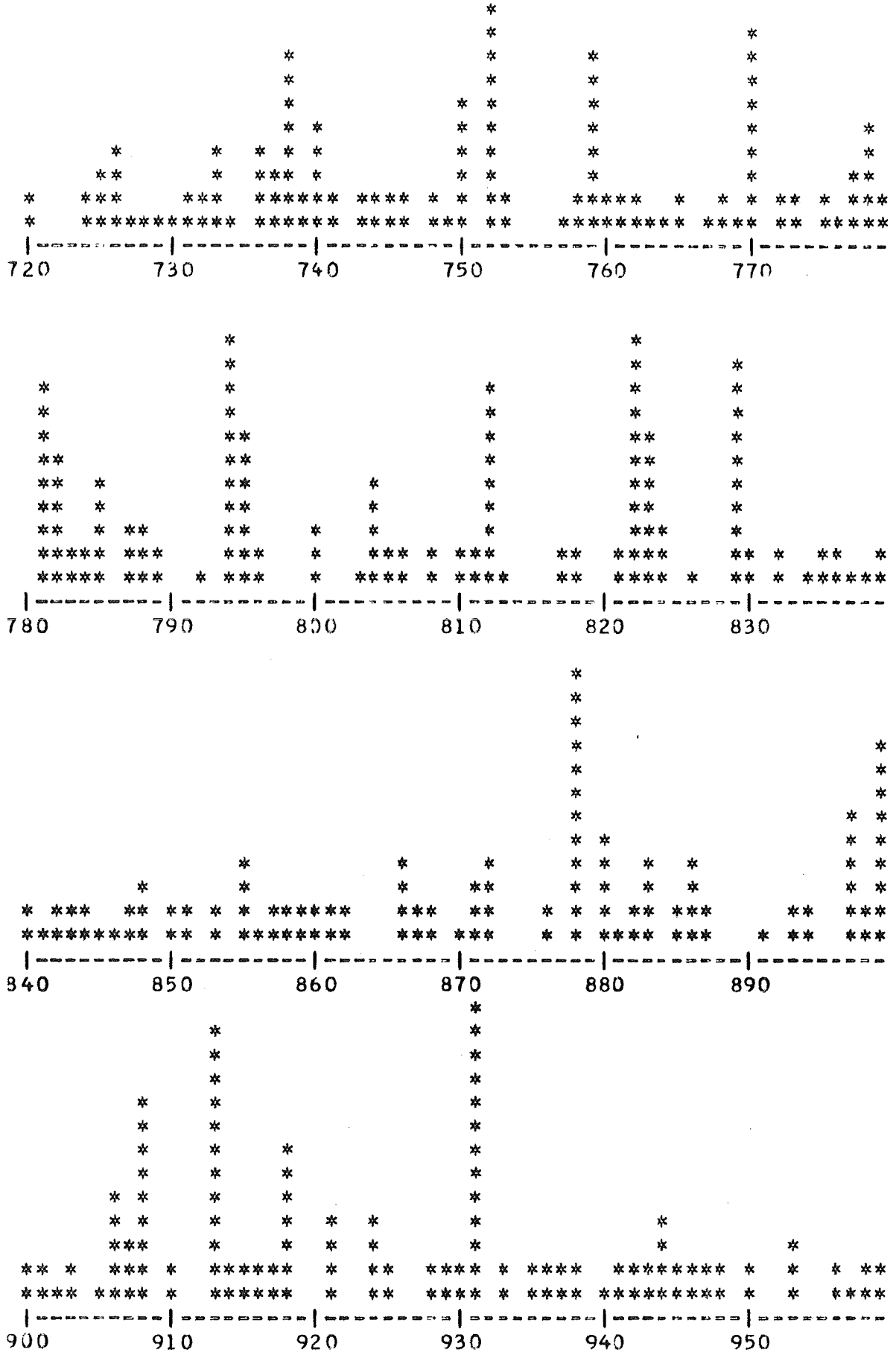


Abb. 2: Auszug aus einer Plotausgabe mit dem Prozeduraufruf
VALUE_PLOT(X,2000,4,65,60);


```
b)  PROCEDURE VALUE_PLOT(X,N,NPAGE,CHARPLINE,LINESPPAGE);
     REAL ARRAY X;
     INTEGER N,NPAGE,CHARPLINE,LINESPPAGE;

     BEGIN INTEGER I,J,K,L,BLMAX,AUX1,AUX2,COUNTER;
           REAL XMAX;
           IEXI AXIS;
           LINESPPAGE(LINESPPAGE);
           BLMAX:=ENTIER(LINESPPAGE/NPAGE+0.5)-2;
           AUX1:=ENTIER((CHARPLINE-1)/10);
           AUX2:=ENTIER(N/(10*AUX1));
           AXIS:=BLANKS(AUX1*10+1);
           AXIS.PUTCHAR(' ');
           FOR I:=1 STEP 1 UNTIL AUX1 DO
           BEGIN AXIS.PUTCHAR('|');FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 9 DO
                 AXIS.PUTCHAR('-');
           END;
           FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
           IF X(I) > XMAX THEN XMAX:=X(I);
           FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
           X(I):=ENTIER(X(I)*BLMAX/XMAX+0.5);

           EJECT(1);
           FOR L:=0 STEP 1 UNTIL AUX2 DO
           BEGIN
                 FOR J:=BLMAX STEP -1 UNTIL 1 DO
                 BEGIN OUTCHAR(' '); FOR K:=1 STEP 1 UNTIL AUX1*10 DO
                       IF L*AUX1*10+K > N THEN GOTO FARTHER
                       ELSE IF X(L*AUX1*10+K)>=J THEN OUTCHAR('*')
                               ELSE OUTCHAR(' ');
                 FARTHER:OUTIMAGE;
                 END;
                 OUTTEXT(AXIS); OUTIMAGE;
                 FOR J:=1 STEP 1 UNTIL AUX1 DO
                 BEGIN IF COUNTER<100 THEN
                       BEGIN OUTINT(COUNTER,2);OUTTEXT(BLANKS(8)); END
                       ELSE IF COUNTER<1000 THEN
                       BEGIN OUTINT(COUNTER,3);OUTTEXT(BLANKS(7));END
                       ELSE BEGIN OUTINT(COUNTER,4);OUTTEXT(BLANKS(6));END;
                       COUNTER:=COUNTER+10;
                 END;
                 OUTIMAGE;
           END;
           END OF VALUE_PLOT;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Meßwertefeld (x_i), $i=1(1)N$
N	I	E	Val	Anzahl der Meßwerte
NPAGE	I	E	Val	Balkendiagrammzeilen pro Seite
CHARPLINE	I	E	Val	maximale Druckstellen- anzahl pro Zeile
LINESPPAGE	I	E	Val	Druckzeilenanzahl pro Seite

3.4. Einteilen einer Stichprobe in Blöcke

Die Prozedur COMPRESS teilt die durch einen Simulationslauf gewonnenen Daten in Blöcke ein und berechnet die Mittelwerte und Varianzen der Blöcke. Voraussetzung für die Anwendung dieser Prozedur ist, daß die Werte der zu analysierenden Zufallsgröße auf einem Datenträger sequentiell in folgender Form abgespeichert sind

Nummer	Wert
--------	------

Nehmen wir als Beispiel die Verweilzeit eines Auftrags in einem Warteschlangensystem, in dem Überholvorgänge möglich sind, dann gibt <Nummer> die laufende Nummer und <Wert> die Verweilzeit eines Auftrags an.

Auf dem Datenträger stehen die Daten ungeordnet in der Reihenfolge wie sie bei der Simulation zeitlich nacheinander angefallen sind. <Nummer> dient dazu, sie wieder in die ursprüngliche Ordnung zu bringen, d.h. in die Reihenfolge, in der die Aufträge erzeugt wurden. Die durch die Simulation gewonnenen Daten werden in Blöcke gleicher Länge eingeteilt, deren Mittelwerte der weiteren Datenanalyse zur Verfügung gestellt werden.

Die Länge eines Blocks und der Beginn der Messung (Eliminierung der Einschwingperiode) werden aufgrund vorhergehender Untersuchungen der Daten festgelegt.

Die Prozedur verwendet folgende Rechenalgorithmen

$$j = \text{entier} ((i - \text{BM})/\text{BL} + 1) \qquad i = \text{BM}(1)\text{ENDNR}$$

$$B_j = \{k \mid j = \text{entier} ((k - \text{BM})/\text{BL} + 1)\}$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{\text{BL}} \sum_{k \in B_j} x_k$$

$$s_j^2 = \frac{1}{\text{BL}-1} \left| \sum_{k \in B_j} x_k^2 - \frac{1}{\text{BL}} \left(\sum_{k \in B_j} x_k \right)^2 \right|$$

Dabei bedeuten

- i Nummer des Datums
- BM Nummer des Auftrags, mit dem die Messung beginnen soll
- ENDNR größte Nummer, die noch gelesen wird
- BL Blocklänge
- x_i Wert des Datums i $i = \text{BM}(1)\text{ENDNR}$
- j Blocknummer
- B_j Menge der Nummer der zu Block j gehörigen Aufträge
- \bar{x}_j Mittelwert des Blocks j
- s_j^2 Varianz des Blocks j

```
b) PROCEDURE COMPRESS (STATPOINT, BATCHSIZE, ENDNO, N, LIMIT, SUMM,  
                      SUMS, MEAN, VAR);  
  INTEGER STATPOINT, BATCHSIZE, ENDNO, N, LIMIT;  
  REAL ARRAY SUMM, SUMS, MEAN, VAR;  
  BEGIN INTEGER NO, I, INDEX, CCOUNT; REAL X;  
    REE (INFILE) TAPE;  
    IF (ENDNO-STATPOINT+1)/BATCHSIZE /= N THEN  
      BEGIN OUTTEXT ("INCORRECT NUMBER OF BATCHES"); OUTIMAGE;  
        OUTIMAGE; OUTTEXT ("N=(ENDNO-STATPOINT+1)/BATCHSIZE");  
        OUTIMAGE; GOIQ LAB;  
      END;  
    TAPE := NEW INFILE ("IN");  
    TAPE.OPEN (BLANKS (80));  
    WHILE NCI (TAPE.LASTITEM OR COUNT > LIMIT) DO  
      BEGIN NC := TAPE.ININT;  
        X := TAPE.INREAL;  
        IF NO >= STATPCINT AND NO <= ENDNO THEN  
          BEGIN INDEX := ENTIER ((NO-STATPOINT+BATCHSIZE)/BATCHSIZE);  
            SUMM (INDEX) := SUMM (INDEX) + X;  
            SUMS (INDEX) := SUMS (INDEX) + X**2;  
          END;  
          COUNT := CCOUNT + 1;  
        END;  
      IF TAPE.ENDFILE THEN OUTTEXT ("E N D O F F I L E") ELSE  
        BEGIN OUTTEXT ("NUMBER OF IMAGES READ =");  
          OUTINT (LIMIT, 10);  
        END;  
      OUTIMAGE; OUTIMAGE;  
      ENDE : TAPE.CLOSE;  
      FOR I := 1 STEP 1 UNTIL N DO  
        BEGIN MEAN (I) := SUMM (I) / BATCHSIZE;  
          VAR (I) := (SUMS (I) - SUMM (I)**2 / BATCHSIZE) / (BATCHSIZE - 1);  
          OUTTEXT ("BATCH-NO "); OUTINT (I, 5);  
          OUTTEXT ("      MEAN = "); OUTREAL (MEAN (I), 5, 20);  
          OUTTEXT ("      VARIANCE = "); OUTREAL (VAR (I), 5, 20);  
          OUTIMAGE; OUTIMAGE;  
        END;  
      LAB : ;  
    END COMPRESS;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
STATPOINT	I	E	Val	Beginn der stationären Daten (Nr. des Datums)
BATCHSIZE	I	E	Val	Zahl der Datensätze, die zu einem Block zusammengefaßt werden
ENDNO	I	E	Val	größte Nummer, die noch gelesen wird
N	I	E	Val	Zahl der Blöcke
LIMIT	I	E	Val	Maximalzahl der Datensätze, die gelesen werden sollen
SUMM	RA	A	Ref	Summe der eingelesenen Werte (für jeden Block)
SUMS	RA	A	Ref	Summe der Quadrate der Werte (für jeden Block)
MEAN	RA	A	Ref	Mittelwerte für jeden Block
VAR	RA	A	Ref	Varianzen für jeden Block

c) Lit: /10/

3.5. Tests auf Stationarität

3.5.1. Run-Test

Der Run-Test wird dazu verwendet, eine Folge von Werten darauf hin zu untersuchen, ob sie als unabhängige Realisierungen einer Zufallsvariablen betrachtet werden können. Hier wird er als Test zum Aufdecken von Instationaritäten benutzt.

Das Prinzip des Tests besteht darin, die zu untersuchenden Daten in zwei Klassen (+) und (-) einzuteilen und daraus Teststatistiken zu berechnen.

In unserem Fall dient als Kriterium für die Klassifikation der Median M der gegebenen Daten x_1, x_2, \dots, x_N . Er ergibt sich nach Anordnen der Daten in der Reihenfolge $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq \dots \leq x_{[N]}$ als

$$M = \begin{cases} x_{[\frac{N+1}{2}]} & \text{n ungerade} \\ \frac{x_{[\frac{N}{2}] + x_{[\frac{N}{2} + 1]}}{2} & \text{n gerade} \end{cases} \quad \text{falls}$$

Die Klasseneinteilung erfolgt sodann durch

$$\begin{aligned} x_i &\geq M && \text{Klasse (+)} \\ x_i &< M && \text{Klasse (-)} \end{aligned} \quad i = 1(1)N$$

Nach der Klassifikation der Meßwerte ergibt sich eine Folge

++----+----+++-+--

Ein Run ist nun eine ununterbrochene Folge von Werten einer Klasse.

Zur Prüfung von Instationaritäten wurde folgende Teststatistik (sum of squared lengths) gewählt

$$T = \sum_{l=1}^N l^2 m_l$$

dabei ist l die Länge eines Runs und m_l die Häufigkeit des Runs mit der Länge l .

Tafeln für T findet man in /24/.

- b) Zum Ordnen der Daten benutzt die Prozedur RUN_TEST die Hilfsprozedur QUICKSORT (3.2.1.). Bei der Anwendung der Prozedur ist darauf zu achten, daß die Anzahl der Daten N gerade ist und in dem Bereich $6 \leq N \leq 30$ liegt.

```
PROCEDURE RUN_TEST(X,N,NOFRUNS,TESTSTAT);
NAME NOFRUNS,TESTSTAT; REAL ARRAY X; INIEGER N,NOFRUNS,
TESTSTAT;
SIMSET BEGIN INIEGER I,J,LENGTH; REAL MEDIAN;
REAL ARRAY AUXLIST(1:N);

PROCEDURE REGRUN;
BEGIN NEW RUN(LENGTH).INTO(RUNLIST);
LENGTH:=0;
NOFRUNS:=NOFRUNS+1;
END REGRUN;

PROCEDURE TESTST;
TESTSTAT:=TESTSTAT+(R1 QUA RUN.LENGTH**2)*R1 QUA RUN.MULT;

PROCEDURE COMPARE;
IF R1 QUA RUN.LENGTH=R2 QUA RUN.LENGTH THEN
BEGIN R1 QUA RUN.MULT:=R1 QUA RUN.MULT+1;
R2 QUA RUN.OUT;
END*****;

LINK CLASS RUN(LENGTH);
INIEGER LENGTH;
BEGIN INIEGER MULT;
MULT:=1;
END RUN;

BEE(LINK)R1,R2;
BEE(HEAD)RUNLIST;
```

```
COMMENT MAIN FOR PROC RUN_TEST*****;

NOFRUNS:=TESTSTAT:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
  AUXLIST(I):=X(I);
RUNLIST:=-NEW HEAD;
LENGTH:=1;
QUICKSORT(AUXLIST,1,N+1);
IF N/2=ENTIER(N/2) THEN
  MEDIAN:=(AUXLIST(N/2)+AUXLIST(N/2+1))/2
ELSE MEDIAN:=AUXLIST((N+1)/2);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO
  BEGIN IF (X(I)<=MEDIAN EQV X(I+1)>MEDIAN) THEN
    REGRUN;
    LENGTH:=LENGTH+1;
  END;
REGRUN;
FOR R1:-RUNLIST.FIRST,R1.SUC WHILE R1/=NONE DO
  BEGIN R2:-R1;
    FOR R2:-R2.SUC WHILE R2/=NONE DO
      COMPARE;
    END;
  FOR R1:-RUNLIST.FIRST,R1.SUC WHILE R1/=NONE DO
    TESTST;
  END RUN_TEST;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Feld der Eingabedaten (x_i), $i = 1(1)N$
N	I	E	Val	obere Feldgrenze
NOFRUNS	I	A	Name	Zahl der Runs
TESTSTAT	I	A	Name	Teststatistik T

c) /6,24/

3.5.2. Trend-Test

a) Für die Anwendungsmöglichkeiten des Trend-Test gilt das zum Run-Test (3.5.1.a) gesagte. Als Teststatistik dient hier die Zahl der Inversionen, d.h. die Zahl der Fälle, in denen auf ein Element x_i einer Folge x_1, x_2, \dots, x_N ein Element x_j mit $x_i > x_j$ folgt. Ist die Zahl N der Meßwerte groß ($N > 10$), so läßt sich der kritische Wert aus einer Normalverteilung mit dem Mittelwert

$$\mu = \frac{N(N-1)}{4}$$

und der Varianz

$$\sigma^2 = (2N^3 + 3N^2 - 5N)/72$$

bestimmen.

b)

```
PROCEDURE TREND_TEST(A,N,TESTSTAT); NAME TESTSTAT;  
REAL ARRAY A; INIEGER N,TESTSTAT;  
BEGIN INIEGER I,J;  
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO  
    FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL N DO  
      IF A(I)<A(J) THEN TESTSTAT:=TESTSTAT+1;  
END TREND_TEST;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
A	RA	E	Ref	Feld der Eingabedaten (a_i) $i = 1(1)N$
N	I	E	Val	obere Feldgrenze
TESTSTAT	I	A	Name	Teststatistik

c) /6,24/

3.6. Korrelogramm

a) Die Prozedur CORRELOGRAMM dient der Berechnung des Korrelogramms einer schwach stationären Zeitreihe. Ausgehend von einer Stichprobe einer Zeitreihe x_1, \dots, x_N werden die Kovarianzen $cov(k)$ nach folgender Formel berechnet

$$(1) \quad cov(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x}) (x_{i+k} - \bar{x}) \quad k=0(1)M$$

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

\bar{x} ist der Mittelwert der Stichprobe und M die maximale Verzögerung (engl. lag). Die Korrelationswerte $cov(k)$ berechnen sich aus den Kovarianzen mit

$$(3) \quad cov(k) = \frac{cov(k)}{cov(0)}, \quad k=0(1)M$$

Die Schätzung der Kovarianzen nach (1) ist zwar konsistent, jedoch nur asymptotisch unverzerrt, im Gegensatz zur üblichen Schätzung:

$$(4) \quad cov(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x}) (x_{i+k} - \bar{x}), \quad k=0(1)M$$

Formel (1) ist jedoch entgegen Formel (4) positiv semidefinit, welches zur Schätzung des Spektrums (s. 3.7.) eine günstige Eigenschaft (nur positive Spektralwerte) darstellt. Weiterhin besitzt die Abschätzung (1) einen kleineren mittleren quadratischen Fehler als (4). Insgesamt wird aus diesen Gründen heute bei günstigen Verhältnissen von N zu M ($N \gg M$) und großem N ($N > 50$) die Schätzung (1) der von (4) vorgezogen /8,25/. Im übrigen ist bei Simulationsanwendungen der Stichprobenumfang relativ groß ($N > 500$) und i.a. $N \gg M$.

- b) Die Prozedur CORRELOGRAMM liefert als Ausgabe sowohl die Kovarianz - als auch Korrelationswerte einer Stichprobe vom Umfang N.

```

PROCEDURE CORRELOGRAM(X,N,COV,COR,M);
ARRAY X,COV,COR;
INTEGER N,M;

BEGIN INTEGER I,J;
      REAL MEAN;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO MEAN:=X(I)+MEAN;
      MEAN:=MEAN/N;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO X(I):=X(I)-MEAN;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO COV(I):=0;
      FOR J:=0 STEP 1 UNTIL M DO
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
      COV(J):=COV(J)+(IF I+J > N THEN 0 ELSE X(I)*X(I+J));
      FOR I:=0 STEP 1 UNTIL M DO COV(I):=COV(I)/N;
      FOR I:=0 STEP 1 UNTIL M DO COR(I):=COV(I)/COV(0);
END OF CORRELOGRAM;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Eingabefeld (x_i), $i=1(1)N$
N	I	E	Val	Umfang von X
COV	RA	A	Ref	Feld der Kovarianzen (COV_i), $i=0(1)M$
COR	RA	A	Ref	Feld der Korrelationswerte (COR_i), $i=0(1)M$
M	I	E	Val	Umfang von COV und COR

- c) Lit.: /8,25/

3.7. Leistungsspektrum

Die Prozedur SPECTRUM berechnet das Leistungsspektrum durch die Formel

$$f(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} (\lambda_0 \cdot \text{cov}(0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^M \lambda_i \text{cov}(i) \cdot \cos(\omega_j \cdot i))$$

mit den Frequenzen

$$\omega_j = \frac{\pi \cdot j}{M} \quad j=0(1)M$$

und den Parzen-Gewichtsfaktoren

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 - \frac{6i^2}{M} \left(1 - \frac{i}{M}\right) & 0 \leq i < \frac{M}{2} \\ 2\left(1 - \frac{i}{M}\right)^3 & \frac{M}{2} \leq i \leq M \end{cases} \quad \text{für}$$

Die Kovarianzen $\text{cov}(i)$ mit $i=0(1)M$ müssen zuvor mit der Prozedur CORRELOGRAMM (3.6.) bestimmt werden.

Zur Berechnung des Spektrums wurde nicht die Fast-Fourier-Transform herangezogen (s. /25/), weil primär das Korrelogramm interessiert, der Rechenaufwand im Vergleich zur Rechenzeit für die Simulation gering ist und, wie schon in 3.1. bemerkt, unser Interesse auf einer mehr übersichtlichen als laufzeit-effizienten Programmierung lag.

b)

```

PROCEDURE SPECTRUM(COV,FREQ,SPEC,M);
REAL ARRAY COV,FREQ,SPEC;
INIEGER M;

BEGIN INIEGER I,K;
      REAL PI,AUX1,AUX2;
      PI:=4*ARCTAN(1.0);
      AUX1:=PI/M;
      FOR I:=0 STEP 1 UNIL M DO FREQ(I):=AUX1*I;
      AUX1:=COV(0)/(2*PI);
      FOR I:=0 STEP 1 UNIL M DO
      BEGIN AUX2:=M//2;
            FOR K:=1 STEP 1 UNIL AUX2 DO
              SPEC(I):=SPEC(I)+(1-6*(K/M)**2*(1-K/M))*COV(K)*
                COS(FREQ(I)*K);
            AUX2:=M//2+1;
            FOR K:=AUX2 STEP 1 UNIL M-1 DO
              SPEC(I):=SPEC(I)+2*(1-K/M)**3*COV(K)*COS(FREQ(I)*K);
            SPEC(I):=SPEC(I)/PI+AUX1;
          END;
      END OF SPECTRUM;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
COV	RA	E	Ref	Feld der Kovarianzen (COV _i), i=0(1)M
FREQ	RA	A	Ref	Feld der Frequenzen (FREQ _i), i=0(1)M
SPEC	RA	A	Ref	Feld der Spektralwerte (SPEC _i), i=0(1)M
M	I	E	Val	Dimension von COV, FREQ, SPEC

c) Lit.: /8,22,25,43/

3.8. Punktschätzung von Mittelwert und Varianz

3.8.1. Schätzung des Mittelwerts

- a) Der Mittelwert \bar{x} einer Stichprobe x_1, \dots, x_n wird als Schätzung für den Mittelwert μ der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Grundgesamtheit benutzt:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

b)

```
PROCEDURE MEAN_VALUE(X,N,MEAN);  
NAME MEAN;  
INIEGER N;REAL MEAN;REAL ARRAY X;  
  
BEGIN INIEGER I;  
  MEAN:=0;  
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO MEAN:=MEAN+X(I);  
  MEAN:=MEAN/N;  
END OF MEAN_VALUE;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Stichprobenvektor (x_i) $i=1(1)n$
N	I	E	Val	Umfang der Stichprobe
MEAN	R	A	Name	Mittelwert der Stichprobe

c) Lit.: /28/

3.8.2. Schätzung der Varianz

a) Als Schätzung für die Varianz σ^2 der Verteilung der Grundgesamtheit wird die Varianz s^2 unabhängiger Stichprobenwerte x_1, \dots, x_n herangezogen:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

\bar{x} ist die Schätzung des Mittelwertes.

b)

```
PROCEDURE VARIANCE(X,N,MEAN,VAR);
NAME VAR;
INIEGER N;REAL MEAN,VAR;REAL ARRAY X;

BEGIN INIEGER I;
  VAR:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNIL N DO VAR:=VAR+(X(I)-MEAN)**2;
  VAR:=VAR/(N-1);
END OF VARIANCE;
```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Stichprobenvektor (x_i) $i=1(1)n$
N	I	E	Val	Umfang der Stichprobe
MEAN	R	E	Val	Mittelwert der Stichprobe
VAR	R	A	Name	Varianz der Stichprobe

c) Lit.: /28/

3.9. Intervallschätzung für Mittelwert und Varianz

3.9.1. Konfidenzintervall für einen Mittelwert

a) Das Konfidenzintervall für den Mittelwert μ einer Normalverteilung mit bekannter Varianz σ^2 anhand einer Stichprobe x_1, \dots, x_n ist bestimmt durch:

$$x - Q \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq x + Q \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

wobei x die Schätzung des Mittelwertes und Q zu vorgegebener Konfidenzzahl γ (95%, 99% od. dgl.) die Lösung der Gleichung

$$F(Q) = \frac{1}{2} (1+\gamma)$$

aus Tabellen für die Normalverteilung F mit Mittelwert 0 und Varianz 1 ist.

Ist die Varianz σ^2 unbekannt, so ist in obigem Verfahren die Lösung Q aus der Student's-t-Verteilung mit $(n-1)$ -Freiheitsgraden zu bestimmen und σ^2 durch die Schätzung s^2 zu ersetzen. Für große Stichproben mit $n > 30$ kann hierzu aber auch die Normalverteilung herangezogen werden.

b)

```
PROCEDURE MEAN_CONF(N,Q,MEAN,VAR,MCONF,LMEAN,UPMEAN);
NAME MCCNF,LMEAN,UPMEAN;
INTEGEE N;REAL Q,MEAN,LMEAN,UPMEAN,MCONF,VAR;

BEGIN
  MCONF:=Q*SQRT(VAR/N);
  LMEAN:=MEAN-MCONF;
  UPMEAN:=MEAN+MCONF;
END OF MEAN_CONF;
```


Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
N	I	E	Val	Stichprobenumfang
Q	R	E	Val	Wert Q aus Normal- bzw. Student's-t-Verteilung
MEAN	R	E	Val	Mittelwert der Stichprobe
VAR	R	E	Val	Varianz der Stichprobe
MCONF	R	A	Name	Wert des Ausdrucks $Q \cdot \sqrt{\sigma^2/n}$ bzw. $Q \cdot \sqrt{s^2/n}$
LMEAN	R	A	Name	MEAN-MCONF
UPMEAN	R	A	Name	MEAN+MCONF

c) Lit.: /21,28,42/

3.9.2. Konfidenzintervall für mehrere Mittelwerte

a) Man erhält Intervallschätzungen für die wahren Mittelwerte μ_1, \dots, μ_m von m Stichprobengruppen x_{i1}, \dots, x_{in} , $i=1(1)m$, x_{ij} unabhängig, mit jeweiligem Umfang n wie folgt:

Zu vorgegebenem α (0.05, 0.01 od. dgl.) entnimmt man einer Tafel für Studentized maximum modulus den Wert $q_{\alpha, m, v}$, wobei $v = m(n-1)$ die Anzahl der Freiheitsgrade der Stichprobenvarianz

$$MSE = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

und \bar{x}_i , $i=1(1)m$, der Mittelwert der i -ten Stichprobe sind. Mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ erfüllen dann alle μ_i , $i=1(1)m$, gleichzeitig:

$$\bar{x}_i - q_{\alpha, m, v} \cdot \sqrt{\frac{MSE}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{x}_i + q_{\alpha, m, v} \cdot \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

b)

```

PROCEDURE COM_MEAN_CONF(X,M,N,Q,MEAN,MCONF,LMEAN,UPMEAN,MSE,DF);
NAME MCONF,MSE,DF;
INTEGER M,N,DF; REAL Q,MCONF,MSE; REAL ARRAY X,MEAN,LMEAN,UPMEAN;

BEGIN INTEGER I,J; REAL S,T;
  DF:=M*(N-1);
  S:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  BEGIN T:=0;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO T:=T+(X(I,J)-MEAN(I))**2;
    S:=S+T;
  END;
  MSE:=S/DF;
  MCONF:=Q*SQRT(MSE/N);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  BEGIN LMEAN(I):=MEAN(I)-MCONF;UPMEAN(I):=MEAN(I)+MCONF;END;
END OF COM_MEAN_CONF;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Stichprobenmatrix (x_{ij}) $i=1(1)m, j=1(1)n$
M	I	E	Val	Anzahl der Stichprobengruppen
N	I	E	Val	Umfang der Stichprobengruppen
Q	R	E	Val	Tafelwert $q_{\alpha,m,v}$
MEAN	RA	E	Ref	Mittelwertsvektor (\bar{x}_i) $i=1(1)m$
MCONF	R	A	Name	Wert des Ausdrucks $q_{\alpha,m,v} \cdot \sqrt{MSE/n}$
LMEAN	RA	A	Ref	Vektor $(\bar{x}_i - MCONF)$ } $i=1(1)m$ Vektor $(\bar{x}_i + MCONF)$ }
UPMEAN	RA	A	Ref	
MSE	R	A	Name	MSE
DF	I	A	Name	Freiheitsgrade von MSE

c) Lit.: /35/

3.9.3. Konfidenzintervall für die Varianz

a) Das Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 einer Normalverteilung, deren Mittelwert nicht bekannt ist, wird bestimmt durch

$$\frac{(n-1)s^2}{Q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{Q_1}$$

wobei s^2 die Schätzung der Varianz aus einer Stichprobe des Umfangs n und Q_1, Q_2 zu vorgegebener Konfidenzzahl γ (95%, 99% od. dgl.) die Lösungen der Gleichungen

$$\chi^2(Q_1) = \frac{1}{2} (1-\gamma) , \quad \chi^2(Q_2) = \frac{1}{2} (1+\gamma)$$

aus der χ^2 -Verteilung mit $(n-1)$ -Freiheitsgraden sind.

b)

```

PROCEDURE VAR_CONF(N,VAR,Q1,Q2,LVAR,UPVAR);
NAME LVAR,UPVAR;
INTEGER N;REAL VAR,Q1,Q2,LVAR,UPVAR;

BEGIN REAL H;
  H:=(N-1)*VAR;
  LVAR:=H/Q2;
  UPVAR:=H/Q1;
END OF VAR_CONF;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
N	I	E	Val	Stichprobenumfang n
VAR	R	E	Val	Varianz s^2
Q1	R	E	Val	} Tafelwerte Q_1, Q_2 aus χ^2 -Verteilung
Q2	R	E	Val	
LVAR	R	A	Name	Wert des Ausdrucks $(n-1) \cdot s^2 / Q_2$
UPVAR	R	A	Name	Wert des Ausdrucks $(n-1) \cdot s^2 / Q_1$

c) Lit.: /21,28,42/

3.10. Tests auf Gleichheit von $m > 2$ Mittelwerten

3.10.1. Der Fall $m=2$

3.10.1.1. Student's-t-Test

- a) Gegeben seien 2 Stichproben $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ mit den entsprechenden Mittelwerten \bar{x}, \bar{y} und Varianzen s_x^2, s_y^2 . Ihre Grundgesamtheiten seien normalverteilt mit Mittelwerten μ_x, μ_y und gleicher Varianz, die nicht bekannt zu sein braucht. Man testet die Hypothese $\mu_x = \mu_y$ gegen die Alternative $\mu_x > \mu_y$, indem man zu vorgegebener Signifikanzzahl α (0.05, 0.01 od. dgl.) die Zahl q gemäß der Gleichung

$$F(q) = 1 - \alpha$$

aus Student's-t-Verteilung F mit $n+m-2$ Freiheitsgraden bestimmt und die Teststatistik

$$t_0 = \sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (n+m-2)}{n+m}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}}$$

berechnet. Ist $t_0 \leq q$, so wird die Hypothese angenommen. Ist $t_0 > q$, so wird sie verworfen.

Ersetzt man die Alternative $\mu_x > \mu_y$ durch $\mu_x < \mu_y$ bzw. $\mu_x = \mu_y$ so ist $F(q) = 1 - \alpha$ durch $F(q) = \alpha$ bzw. $F(q) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ zu ersetzen. Für $n=m$ ergibt sich die Vereinfachung

$$t_0 = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

```

b) PROCEDURE T_TEST(NX,NY,XMEAN,YMEAN,XVAR,YVAR,A,Q,T,DEC,ZEROVAR);
NAME T,DEC,ZEROVAR;
INIEGER NX,NY;REAL XMEAN,YMEAN,XVAR,YVAR,Q,T;
BOCLEAN A,DEC,ZEROVAR;

BEGIN INIEGER DF;REAL AUX1,AUX2;
  IF XVAR=0 AND YVAR=0 THEN BEGIN ZEROVAR:=TRUE;GO TO LAB;END
  ELSE ZEROVAR:=FALSE;
  IF NX=NY THEN
    BEGIN DF:=2*(NX-1);
      T:=(XMEAN-YMEAN)*SQRT(N/(XVAR+YVAR));
    END
  ELSE BEGIN DF:=NX+NY-2;
    AUX1:=SQRT(NX*NY*DF/(NX+NY));
    AUX2:=SQRT((NX-1)*XVAR+(NY-1)*YVAR);
    T:=AUX1*(XMEAN-YMEAN)/AUX2;
  END;
  IF A THEN BEGIN
    IF ABS(T)<=Q THEN DEC:=TRUE ELSE DEC:=FALSE;END
  ELSE IF T<=Q THEN DEC:=TRUE ELSE DEC:=FALSE;
  LAB:
END OF T_TEST;

```

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
NX	I	E	Val	Umfang der Stichprobe X
NY	I	E	Val	Umfang der Stichprobe Y
XMEAN	R	E	Val	Mittelwert der Stichprobe X
YMEAN	R	E	Val	Mittelwert der Stichprobe Y
XVAR	R	E	Val	Varianz der Stichprobe X
YVAR	R	E	Val	Varianz der Stichprobe Y
A	B	E	Val	$\left. \begin{array}{l} \text{TRUE} = \text{zweiseitige} \\ \text{FALSE} = \text{einseitige} \end{array} \right\}$ Alternative
Q	R	E	Val	Tafelwert q
T	R	A	Name	Wert der Teststatistik t_0
DEC	B	A	Name	TRUE, falls $t_0 < q$ FALSE sonst
ZEROVAR	B	A	Name	TRUE, falls $s_x^2 = s_y^2 = 0$ FALSE sonst

c) Lit.: /7,21,28,42/

3.10.1.2. Mann-Whitney-U-Test

a) Dieser Test prüft, ob zwei unabhängige Stichprobengruppen derselben Grundgesamtheit entstammen. Seien n_1, n_2 die Umfänge der Stichprobengruppen mit $n_1 < n_2$ und $n_2 > 20$ (für $n_2 < 20$ siehe /38/). Die Stichprobenwerte aus beiden Gruppen werden zusammengefaßt, der Größe nach angeordnet und mit dem kleinsten Wert beginnend von 1 bis $N=n_1+n_2$ durchnumeriert. Ist ein Wert von allen anderen verschieden, so wird ihm seine Nummer als Rangzahl zugewiesen. Sind mehrere Werte gleichgroß, so werden diesen als Rangzahl der Mittelwert ihrer Platzziffern zugeordnet. Man berechnet die Summe R_1 der Rangzahlen der Gruppe mit Umfang n_1 und hiermit den Wert

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

Existieren j Gruppen gleichgroßer Stichprobenwerte, deren Umfang mit t_i , $i=1(1)j$, bezeichnet sei, so bestimmt man zunächst

$$T = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^j (t_i^3 - t_i)$$

und danach die Teststatistik

$$z_0 = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{N(N-1)}\right) \cdot \left(\frac{N^3 - N}{12} - T\right)}}$$

Man entnimmt einer Tafel für Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 1 den der Alternative entsprechenden Wahrscheinlichkeitswert p und vergleicht ihn mit vorgegebenem α (0.05, 0.01 od. dgl.) Ist er größer als α , so entstammen die Stichprobengruppen derselben Grundgesamtheit.

Bezeichnet Z die zu z_0 zugehörige Zufallsvariable und $\text{Prob}(Z > z_0)$ die Wahrscheinlichkeit, daß $Z > z_0$ ist, so ist bei einseitiger Alternative $p = \text{Prob}(Z > z_0)$ und bei zweiseitiger Alternative $p = 2 \text{Prob}(Z > z_0)$ zu setzen.

- b) Die folgende Implementierung gilt nur für den Fall $n_2 > 20$, kann jedoch zur Berechnung der Teststatistik durchaus verwendet werden. Zur ausführlichen Darstellung der Entscheidungsfindung für $n_2 < 20$ wird auf /38/ verwiesen.

```
PROCEDURE MANN_WHITNEY_TEST(X,NX,Y,NY,ALPHA,A,RX,RY,C,Z,DEC);
NAME C,Z,DEC;
INIEGER NX,NY,DEC;REAL ALPHA,C,Z;
REAL ARRAY X,RX,Y,RY;BOOLEAN A;

BEGIN INIEGER I,I1,J,N,H,IND,L;REAL D,INC,U,S,RS,T,ZABS,PROB;
  INIEGER ARRAY NUM(1:2);REAL ARRAY R(1:2,1:NY);
  N:=NX+NY;
  BEGIN INIEGER ARRAY RANK(1:N);REAL ARRAY LIST(1:N);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NX DO
      BEGIN LIST(I):=X(I);RANK(I):=1; END;
    FOR I:=NX+1 STEP 1 UNTIL N DO
      BEGIN LIST(I):=Y(I-NX);RANK(I):=2; END;
    NUM(1):=NUM(2):=0;
    L:=N+1;
    QUICKSR(LIST,1,L,RANK);
    I:=0;K:=1;T:=0;
    FOR I:=I+K WHILE I<L DO
      BEGIN J:=I;K:=1;
        FOR J:=J+1 WHILE J<L DO
          BEGIN IF LIST(J)=LIST(I) THEN K:=K+1 ELSE GO TO LAB;END;
          LAB: IF K=1 THEN
            BEGIN H:=RANK(I);NUM(H):=NUM(H)+1;R(H,NUM(H)):=I;
            IF H=1 THEN X(NUM(H)):=LIST(I) ELSE Y(NUM(H)):=LIST(I);END
          ELSE BEGIN I1:=I+K-1;INC:=I;
            FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL I1 DO INC:=INC+J;
              INC:=INC/K;
            FOR J:=I STEP 1 UNTIL I1 DO
              BEGIN H:=RANK(J);NUM(H):=NUM(H)+1;R(H,NUM(H)):=INC;
                IF H=1 THEN X(NUM(H)):=LIST(J) ELSE Y(NUM(H)):=LIST(J);END;
              T:=T+(K**3-K)/12;
            END;
          END;
        RS:=C;H:=NX*NY;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NX DO
          BEGIN RS:=RS+R(1,I);RX(I):=R(1,I);END;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NY DO RY(I):=R(2,I);
        U:=H+NX*(NX+1)/2-RS;
        S:=(H/(N*(N-1)))*((N**3-N)/12-T);
        Z:=(U-H/2)/(SQRT(S));ZABS:=ABS(Z);
        NDTR(ZABS,PROB,D);
        C:=1-PROB;
        IF A THEN C:=C*2;
        IND:=(IF C<=ALPHA THEN 1 ELSE 0);
        IF A THEN DEC:=2*IND ELSE DEC:=-SIGN(Z)*IND;
      END;
    END OF MANN_WHITNEY_TEST;
```

Die Prozedur benutzt die Hilfsprozedur QUICKSR,NDTR.

Par.	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E A	Ref	Stichprobenvektor $(x_i)_{i=1(1)n_1}$ sortierte Stichprobe
NX	I	E	Val	n_1 (Umfang von X,RX)
Y	RA	E A	Ref	Stichprobenvektor $(y_i)_{i=1(1)n_2}$ sortierte Stichprobe
NY	I	E	Val	n_2 (Umfang von Y,RY)
ALPHA	R	E	Val	α
A	B	E	Val	TRUE: falls zweiseitige Alternative FALSE: sonst
RX	RA	A	Ref	Rangzahlen des sortierten Vektors X
RY	RA	A	Ref	Rangzahlen des sortierten Vektors Y
C	R	A	Name	Wahrscheinlichkeit der Teststatistik
Z	R	A	Name	Wert der Teststatistik
DEC	I	A	Name	bei einseitiger Alternative: -1 X stochastisch kleiner als Y 0 X stochastisch gleich Y 1 X stochastisch größer als Y bei zweiseitiger Alternative: 0 X stochastisch gleich Y 2 X stochastisch ungleich Y

c) Lit.: /7,38/

3.10.2. Der Fall $m > 2$

3.10.2.1. Der Vergleich mittels F-Test

a) Hiermit testet man die Hypothese, daß m normalverteilte Grundgesamtheiten gleicher Varianz, aus denen die unabhängigen Stichprobengruppen stammen, alle denselben Mittelwert besitzen.

Sei n_i der Umfang der i -ten Stichprobengruppe, \bar{x}_i deren Mittelwert

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad i=1(1) m$$

und \bar{x} der Mittelwert der gesamten Stichprobe

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i \quad \text{wobei } n = \sum_{i=1}^m n_i$$

Man berechnet die Quadratsumme q_1 zwischen den Mittelwerten der Gruppen

$$q_1 = \sum_{i=1}^m n_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

die Quadratsumme q_2 innerhalb der Gruppen

$$q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

und den Quotienten

$$v_0 = \frac{q_1 / (m-1)}{q_2 / (n-m)}$$

Zur vorgegebenen Signifikanzzahl α (0.05, 0.01 od. dgl.) bestimmt man die Lösung c der Gleichung

$$F(c) = 1-\alpha$$

aus einer Tafel für die F-Verteilung mit $(m-1, n-m)$ Freiheitsgraden.

Ist $v_0 \leq c$, so wird die Hypothese angenommen, andernfalls verworfen.

b) Die Prozedur ist für den Fall $n_i=N$, $i=1(1)m$ implementiert.

```

PROCEDURE F_TEST(X,M,N,MFAN,C,SSP,MSP,DMSP,SSE,MSE,DMSE,TOT,
                DTOT,VO,ZEROMSE,DEC);
NAME SSP,MSP,DMSP,SSE,MSE,DMSE,TOT,DTOT,VO,ZEROMSE,DEC;
INIEGER M,N,DMSP,DMSE,DTOT;
REAL C,SSP,MSP,SSE,MSE,TOT,VO;
REAL ARRAY X,MEAN;
BOOLEAN DEC,ZEROMSE;

BEGIN INIEGER I,J;REAL S,TOTMEAN;
  S:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO S:=S+MEAN(I);
  TOTMEAN:=S/M;
  SSP:=SSE:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  BEGIN SSP:=SSP+(MEAN(I)-TOTMEAN)**2;
    S:=0;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+(X(I,J)-MEAN(I))**2;
    SSE:=SSE+S;
  END;
  DMSP:=M-1;DMSE:=M*(N-1);DTOT:=DMSE+DMSP;
  SSP:=N*SSP;
  TOT:=SSP+SSE;
  MSP:=SSP/DMSP;MSE:=SSE/DMSE;
  IF MSE=0 THEN ZEROMSE:=TRUE
  ELSE BEGIN ZEROMSE:=FALSE;
    VO:=MSP/MSE;
  DEC:=(IE VOK<C THEN TRUE ELSE FALSE);END;
END OF F_TEST;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Stichprobenmatrix (x_{ij}) , $i=1(1)m$, $j=1(1)N$
M	I	E	Val	m
N	I	E	Val	N
MEAN	R.A.	E	Ref	Mittelwertsvektor (\bar{x}_i) , $i=1(1)m$
C	R	E	Val	Tafelwert c
SSP	R	A	Name	q_1
MSP	R	A	Name	$q_1/(m-1)$
DMSP	I	A	Name	m-1
SSE	R	A	Name	q_2
MSE	R	A	Name	$q_2/(m(m-1))$
DMSE	R	A	Name	m(n-1)
TOT	R	A	Name	SSP+ SSE
DTOT	I	A	Name	DMSE+DMSP
VO	R	A	Name	Wert von v_0

ZEROMSE	B	A	Name	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls MSE=0} \\ \text{FALSE sonst} \end{array} \right.$
DEC	B	A	Name	

c) Lit: /28, 37/

3.10.2.2. Kruskal-Wallis-Test:

a) Es seien m unabhängige Stichprobengruppen $(x_{ij}), i=1(1)m, j=1(1)n_i$, mit n_j zufälligen Beobachtungen gegeben. Der Test prüft die Hypothese, daß die m Gruppen der gleichen Grundgesamtheit entstammen, gegen die Alternative, daß die Grundgesamtheiten verschiedene Lageparameter wie z.B. Mittelwert, besitzen.

Die $x_{ij}, i=1(1)m, j=1(1)n_i$, werden zusammengefaßt, der Größe nach geordnet und wie im Falle des Mann-Whitney-U-Tests mit Rangzahlen von

$$1 \text{ bis } n = \sum_{i=1}^m n_i$$

versehen. Existieren k Gruppen gleichgroßer Stichprobenwerte mit jeweiligem Umfang $t_l, l=1(1)k$, so berechne man zunächst

$$S = 1 - \frac{1}{n^3 - n} \cdot \sum_{l=1}^k (t_l^3 - t_l)$$

sowie die Rangzahlensummen R_i der Stichprobengruppen. Die Teststatistik lautet

$$T = \left(\frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \right) / S;$$

Für $m > 3$ oder $n_i > 5, i=1(1)m$ ist aus einer Tabelle für die χ^2 -Verteilung mit $m-1$ Freiheitsgraden der Wert T_{crit} zu entnehmen, so daß die Wahrscheinlichkeit, bei vorgegebener Signifikanzschwelle α (0.05, 0.01 od. dgl.) einen gleich großen oder größeren Wert als T_{crit} zu erhalten, α beträgt. Ist $T \leq T_{crit}$, so ist die Hypothese anzunehmen. Für $m=3$ und $u_1, u_2, u_3 \leq 5$ existieren Tabellen /38/, denen man die dem Wert von T zukommende Wahrscheinlichkeit direkt entnehmen kann.

Ist diese größer als α , so kann die Hypothese angenommen werden.

b) Die folgende Implementierung ist nur für den Fall $m > 3$, $n_i > 5$ und $n_i = N$, $i=1(1)m$, gedacht; sie kann jedoch stets zur Berechnung der Teststatistik T herangezogen werden.

Die Prozedur benutzt QUICKSR.

```
PROCEDURE KRUSKAL_WALLIS_TEST(X,M,N,TCRIT,DF,T,R,SR,DEC);
NAME DF,T,DEC;
INIEGER M,N,DF;
REAL TCRIT,T;
REAL ARRAY X,R,SR;
BOOLEAN DEC;

BEGIN INIEGER I,J,K,JK,I1,H,L;
INTEGER ARRAY Z(1:M);
REAL D,S,SS,INC,PROB,ST;
L:=M*N;DF:=M-1;
BEGIN INIEGER ARRAY RANK(1:L);REAL ARRAY Y(1:L);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN K:=(I-1)*N;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN KK:=K+J;Y(KK):=X(I,J);RANK(KK):=I; END;
Z(I):=0;
END;
QUICKSR(Y,1,L+1,RANK);
I:=0;K:=1;ST:=0;L:=L+1;
FOR I:=I+K WHILE I<L DO
BEGIN J:=I;K:=1;
FOR J:=J+1 WHILE J<L DO
BEGIN IF Y(J)=Y(I) THEN K:=K+1 ELSE GOTO LAB;END;
LAB: IF K=1 THEN BEGIN H:=RANK(I);Z(H):=Z(H)+1;R(H,Z(H)):=I;
X(H,Z(H)):=Y(I);END
ELSE BEGIN I1:=I+K-1;INC:=I;
FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL I1 DO INC:=INC+J;
INC:=INC/K;
FOR J:=I STEP 1 UNTIL I1 DO
BEGIN H:=RANK(J);Z(H):=Z(H)+1;R(H,Z(H)):=INC;X(H,Z(H)):=Y(J);END;
ST:=ST+K**3-K;
END;
END;
L:=L-1;
ST:=1-ST/(L**3-L);
SS:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN S:=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+R(I,J);
SR(I):=S;
SS:=SS+SR(I)**2;
END;
T:=(12*SS/(L*(L+1)*N)-3*(L+1))/ST;
DEC:=(IF T<=TCRIT THEN TRUE ELSE FALSE);
END;
END OF KRUSKAL_WALLIS_TEST;
```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenmatrix $(x_{ij}), i=1(1)m, j=1(1)N$
		A		Stichprobenwerte innerhalb der Gruppen der Größe nach sortiert
M	I	E	Val	Anzahl der Gruppen
N	I	E	Val	Gruppenumfang N
TCRIT	R	E	Val	T_{crit}
DF	I	A	Name	Anzahl der Freiheitsgrade m-1
T	R	A	Name	Wert der Teststatistik
R	RA	A	Ref	Rangzahlen $(r_{ij}), i=1(1)m, j=1(1)N$ der sortierten Stichprobenmatrix
SR	RA	A	Ref	Vektor $(sr_i), i=1(1)m$ der Rangzahlensummen der Gruppen
DEC	B	A	Name	$\begin{cases} \text{TRUE falls Hypothese anzunehmen} \\ \text{FALSE sonst} \end{cases}$

c) Lit: /7, 38, 42/

3.11 Multiple Vergleiche von m > 2 Mittelwerten:

In 3.11 wird folgendes vorausgesetzt:

Seien $x_{ij}, i=1(1)m, j=1(1)n_i$ zufällige Beobachtungen unabhängiger normalverteilter Zufallszahlen mit gleicher Varianz. Sie seien weiter in m Gruppen eingeteilt mit Umfang $n_i, i=1(1)m$, innerhalb der die Zufallszahlen gleiche Mittelwerte μ_i besitzen sollen. Mit \bar{x}_i wird die Schätzung des Mittelwertes μ_i bezeichnet und sei

$$MSE = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=1}^m n_i.$$

3.11.1. Multipler t-Test:

a) Für ein vor dem Versuch festgelegter Vergleich zweier Mittelwerte $\mu_i, \mu_j, i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$, konstruiert man unter vorgegebenem α (0.05, 0.01 od. dgl.) das zugehörige Konfidenzintervall gemäß

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \pm t \cdot \sqrt{\text{MSE} \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

wobei t aus Student's-t-Verteilung F mit n Freiheitsgraden als Lösung der Gleichung $F(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ bestimmt wird.

b) Die folgende Implementierung setzt $n_i = N$ für $i=1(1)m$ voraus.

```

PROCEDURE MULTIPLE_T(X,M,N,T,DF,I,J,MEAN,MDIFF,CONF,A,MSE,DEC);
NAME MDIFF,CONF,MSE,DF,DEC;
INIEGER M,N,I,J,DF;
REAL T,MDIFF,CONF,MSE;REAL ARRAY X,MEAN;
BOOLEAN A,DEC;

BEGIN INIEGER K,L;REAL S;
  DF:=N*M;
  IF A THEN
  BEGIN MSE:=0;
    FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    BEGIN S:=0;
      FOR L:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+(X(K,L)-MEAN(K))**2;
      MSE:=MSE+S;
    END;
    MSE:=MSE/(M*(N-1));
  END;
  MDIFF:=MEAN(I)-MEAN(J);
  CONF:=T*SQRT(2*MSE/N);
  DEC:=(IF ABS(MDIFF)<=CONF THEN TRUE ELSE FALSE);
END OF MULTIPLE_T;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Stichprobenmatrix (x_{ij}) , $i=1(1)m$, $j=1(1)N$
M	I	E	Val	m
N	I	E	Val	N
T	R	E	Val	Wert t aus Student's-t-Verteilung
DF	I	A	Name	Anzahl der Freiheitsgrade $n=m \cdot N$
Y	I	E	Val	Indizes der zu vergleichenden Mittelwerte
J	I	E	Val	
MEAN	R.A.	E	Ref	Vektor (\bar{x}_i) , $i=1(1)m$, der Mittelwerte
MDIFF	R	A	Name	$(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$
CONF	R	A	Name	$t \cdot \sqrt{2\text{MSE}/N}$

A	B	E	Val	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls MSE von Prozedur zu berechnen} \\ \text{ist} \\ \text{FALSE falls MSE eingegeben werden kann} \end{array} \right.$
MSE	R	E/A	Name	
DEC	B	A	Name	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls } \bar{x}_i - \bar{x}_j \leq t \cdot \sqrt{2 \cdot \text{MSE}/N} \\ \text{FALSE sonst} \end{array} \right.$

c) Lit: /42/

3.11.2. DUNNET-Test:

a) Dieser Test vergleicht einen bestimmten Mittelwert μ_j , $j \in \{1, \dots, m\}$ mit allen andern μ_i , $i=1(1)m$, $i \neq j$, setzt aber $n_i=N$ für $i=1(1)m$ voraus. Die Wahrscheinlichkeit ist $1-\alpha$ ($\alpha=0.05$, 0.01 od. dgl.), daß alle der folgenden Vertrauensbereiche für die Differenzen $\mu_j - \mu_i$, $i=1(1)m$, $i \neq j$ gelten:

$$(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \pm d \cdot \sqrt{2 \cdot \text{MSE}/N}, \quad i=1(1)m, \quad i \neq j$$

wobei d aus Dunnets - t - Statistik mit $m \cdot (N-1)$ Freiheitsgraden entnommen wird.

```

b) PROCEDURE DUNNET_TEST(X,M,N,D,DF,J,MEAN,MDIFF,CONF,A,MSE,DEC);
  NAME DF,MSE,CONF;
  INIEGER M,N,DF,J;
  REAL D,CONF,MSE;
  REAL ARRAY X,MEAN,MDIFF;
  BOOLEAN A;BOOLEAN ARRAY DEC;

  BEGIN INIEGER K,L;REAL S;
    DF:=M*(N-1);
    IF A THEN
      BEGIN MSE:=0;
        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
          BEGIN S:=0;
            FOR L:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+(X(K,L)-MEAN(K))**2;
            MSE:=MSE+S;
          END;
        MSE:=MSE/DF;
      END;
    CONF:=D*SQRT(2*MSE/N);
    FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
      BEGIN MDIFF(K):=MEAN(J)-MEAN(K);
        DEC(K):=(IE ABS(MDIFF(K))<=CONF THEN IRUE ELSE FALSE);
      END;
  END OF DUNNET;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenmatrix $(x_{ij}), i=1(1)m, j=1(1)N$
M	I	E	Val	m
N	I	E	Val	N
D	R	E	Val	d aus Dunnet's - t - Statistik
DF	I	A	Name	Anzahl der Freiheitsgrade $m \cdot (N-1)$
J	I	E	Val	Index des Mittelwertes, der mit den anderen verglichen werden soll
MEAN	R.A.	E	Ref	Vektor der Mittelwerte $(\bar{x}_i), i=1(1)m$
MDIFF	R.A.	A	Ref	Vektor der Mittelwertdifferenzen $(\bar{x}_j - \bar{x}_i), i=1(1)m$
CONF	R	A	Name	$d \cdot \sqrt{2MSE/N}$
A	B	E	Val	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls MSE innerhalb Prozedur} \\ \text{berechnet werden muß} \\ \text{FALSE sonst} \end{array} \right.$
MSE	R	E/A	Name	MSE
DEC	B	A	Name	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls } \text{MDIFF}(i) \leq \text{CONF}, i=1(1)m \\ \text{FALSE sonst} \end{array} \right.$

c) Lit: /13/

3.11.3 TUKEY-Test:

a) Dieser Test vergleicht alle Mittelwerte miteinander und setzt $n_i = N$ für $i=1(1)m$ voraus.

Die Wahrscheinlichkeit ist $1-\alpha$ ($\alpha=0.05, 0.01$ od dgl.), daß alle $\binom{m}{2}$ Differenzen der Mittelwerte $\mu_i, i=1(1)m$, gleichzeitig erfüllen.

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \pm q \cdot \sqrt{\frac{MSE}{N}}$$

wobei q der Studentized-Range-Statistik mit $(m, m \cdot (N-1))$ - Freiheitsgraden gemäß obigem α zu entnehmen ist.

b)

```

PROCEDURE TUKEY(X,M,N,Q,DF1,DF2,MEAN,MDIFF,CONF,A,MSE,DEC);
NAME DF1,DF2,CONF,MSE;
INTEGER M,N,DF1,DF2;
REAL Q,CONF,MSE;
REAL ARRAY X,MEAN,MDIFF;
BOOLEAN A;BOOLEAN ARRAY DEC;

BEGIN INTEGER I,J;REAL S;
  DF1:=M-1;DF2:=M*(N-1);
  IF A THEN
    BEGIN MSE:=0;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
        BEGIN S:=0;
          FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+(X(I,J)-MEAN(I))**2;
          MSE:=MSE+S;
        END;
      MSE:=MSE/DF2;
    END;
  CONF:=Q*SQRT(MSE/N);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL DF1 DO
    BEGIN
      FOR J:=I+1 STEP 1 UNTIL M DO
        BEGIN MDIFF(I,J):=MEAN(I)-MEAN(J);
          DEC(I,J):=(IE ABS(MDIFF(I,J))<=CONF THEN TRUE ELSE FALSE);
        END;
      END;
    END;
END OF TUKEY;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	RA	E	Ref	Stichprobenmatrix $(x_{ij}), i=1(1)m,$ $j=1(1)N$
M	I	E	Val	m
N	I	E	Val	N
Q	R	E	Val	Wert q der Studentized-Range-Statistik
DF1	I	A	Name	DF1= m-1
DF2	I	A	Name	DF2= m·(N-1)
MEAN	RA	E	Ref	Vektor der Mittelwerte $(\bar{x}_i), i=1(1)m$
MDIFF	RA	A	Ref	Matrix der Mittelwertsdifferenzen $(\bar{x}_i - \bar{x}_j), i=1(1)m-1, j=2(1)m$

CONF	R	A	Name	$Q \cdot \sqrt{\text{MSE}/N}$
A	B	E	Val	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls MSE innerhalb Prozedur zu be-} \\ \text{rechnen} \\ \text{FALSE falls MSE eingegeben wird} \end{array} \right.$
MSE	R	E/A	Name	MSE
DEC	BA	A	Ref	$\text{DEC}(i,j) = \left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls } \text{MDIFF}(i,j) \leq \text{CONF} \\ \text{FALSE sonst} \end{array} \right.$ für $i=1(1)m-1$ und $j=2(1)m$

c) Lit: /37/

3.11.4. SCHEFFE-Test:

a) Ein Kontrast ψ der Mittelwerte μ_1, \dots, μ_m ist eine Linearform der μ_i ,

$$\psi = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i$$

mit bekannten, konstanten Koeffizienten und der Bedingung

$$\sum_{i=1}^m c_i = 0 .$$

Geschätzt wird ψ mittels

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_i$$

und die Varianz $\sigma_{\bar{\psi}}^2$ von $\bar{\psi}$ mittels

$$\sigma_{\bar{\psi}}^2 = \text{MSE} \cdot \sum_{i=1}^m (c_i^2 / n_i).$$

Die Wahrscheinlichkeit ist $1-\alpha$ ($\alpha=0.05, 0.01$ od. dgl.), daß die Werte aller Kontraste ψ gleichzeitig erfüllen

$$\bar{\psi} \pm \sqrt{(m-1) \cdot F_{\bar{\psi}} \cdot \sigma_{\bar{\psi}}^2}$$

mit $F_{\bar{\psi}}$ aus Tafeln für die F-Verteilung mit

$$(m-1, \sum_{i=1}^m n_i - m)\text{-Freiheitsgraden.}$$

b) Die folgende Implementierung setzt $n_i = N$ für $i=1(1)m$ voraus.

```

PROCEDURE SCHEFFE(X,M,N,MEAN,C,F,DF1,DF2,PSI,A,MSE,CONF,DEC);
NAME DF1,DF2,PSI,MSE,DEC;
INIEGER M,N,DF1,DF2;
REAL F,PSI,MSE,CONF;
REAL ARRAY X,C,MEAN;
BOOLEAN A,DEC;

BEGIN INIEGER I,J;REAL S,SC;
  DF1:=M-1;DF2:=M*(N-1);
  IF A THEN
  BEGIN MSE:=0;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    BEGIN S:=0;
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+(X(I,J)-MEAN(I))**2;
      MSE:=MSE+S;
    END;
    MSE:=MSE/DF2;
  END;
  SC:=PSI:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  BEGIN SC:=SC+C(I)**2;PSI:=PSI+C(I)*MEAN(I);END;
  CONF:=SQRT(DF1*F*MSE*SC/N);
  DEC:=(IE ABS(PSI)<=CONF THEN IRUE ELSE EALSE);
END OF SCHEFFE;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenmatrix $(x_{ij}), i=1(1)m, j=1(1)N$
M	I	E	Val	m
N	I	E	Val	N
MEAN	R.A.	E	Ref	Mittelwertsvektor $(\bar{x}_i), i=1(1)m$
C	R.A.	E	Ref	Vektor $(c_i), i=1(1)m$
F	R	E	Val	$F_{\bar{\psi}}$ aus F-Verteilung
DF1	I	A	Name	m-1
DF2	I	A	Name	m(N-1)
PSI	R	A	Name	$\bar{\psi}$
A	B	E	Val	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls MSE innerhalb Prozedur zu be-} \\ \text{rechnen} \\ \text{FALSE falls MSE bekannt und eingegeben} \\ \text{werden kann} \end{array} \right.$
MSE	R	E/A	Name	MSE
CONF	R	A	Name	$\sqrt{(m-1) F_{\bar{\psi}} \sigma_{\bar{\psi}}^2}$
DEC	B	A	Name	$\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE falls } \bar{\psi} \leq \text{CONF} \\ \text{FALSE sonst.} \end{array} \right.$

c) Lit: /37/

3.11.5. Prozedur PARTITION:

- a) Die Prozedur ordnet n Mittelwerte $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ der Größe nach unter Beibehaltung ihrer Identifikation. Weiter druckt sie zu jedem Mittelwert die Gruppierung der Mittelwerte, die sich nur um einen vorgegebenen Wert δ von ihm unterscheiden.
- b)

```

PROCEDURE PARTITION(X,N,DELTA);
INIEGER N;REAL DELTA;REAL ARRAY X;

BEGIN SIMSET
  BEGIN INIEGER I,J,K1,K2,L;
    INIEGER ARRAY RANK(1:N);
    REF(HEAD) ARRAY V(1:N);
    REF(LINK) Z;
    REF(GROUP) W;
    LINK CLASS GROUP(J,X);INTEGER J;REAL X; ;
    L:=N+1;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO RANK(I):=I;
    QUICKSR(X,1,L,RANK);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
      BEGIN V(I):=-NEW HEAD;
        J:=K1:=K2:=I;
        FOR J:=J-1 WHILE J>0 DO
          IE ABS(X(J)-X(I))<=DELTA THEN K1:=K1-1 ELSE GOIQ LAB1;
          LAB1: J:=I;
        FOR J:=J+1 WHILE J<L DO
          IE ABS(X(J)-X(I))<=DELTA THEN K2:=K2+1 ELSE GOIQ LAB2;
          LAB2: FOR J:=K1 STEP 1 UNTIL K2 DO
            BEGIN W:=NEW GROUP(RANK(J),X(J));W.INTO(V(I));END;
          END;
        OUTTEXT("PARTITION");OUTIMAGE;OUTIMAGE;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
          BEGIN OUTTEXT("GROUP");OUTINT(RANK(I),3);OUTIMAGE;
            FOR Z:=-V(I).FIRST,Z.SUC WHILE Z/=NONE DO
              BEGIN OUTINT(Z QUA GROUP.J,3);OUTREAL(Z QUA GROUP.X,5,15);
                OUTIMAGE;END;
              OUTIMAGE;
            END;
          END;
        END OF PARTITION;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	zu sortierende Mittelwertsliste (\bar{x}_i), $i=1(1)n$
		A		sortierte Liste
N	I	E	Val	n
DELTA	R	E	Val	δ

3.12 Anordnung und Auswahl von Mittelwerten:

3.12.1. Zweistufiges Verfahren von Bechhofer:

a) Seien x_{ij} zufällige Beobachtungen normalverteilter, unabhängiger Zufallsvariablen der Population i mit Mittelwert μ_i und Varianz

$$\sigma_i^2 = a_i \sigma^2, \quad i=1(1)m, \quad j=1,2,\dots \text{ ad inf.}$$

Die a_i seien bekannte natürliche Zahlen, die μ_i und σ^2 seien unbekannt. Die angeordneten μ_i seien bezeichnet mit $\mu_{|1|} \leq \dots \leq \mu_{|m|}$ und die Differenzen zwischen ihnen mit $\delta_{ij} = \mu_{|i|} - \mu_{|j|}$, $i, j=1(1)m$.

Es ist nicht bekannt, welche Population der von $\mu_{|i|}$ entspricht. Zwei Ziele werden behandelt:

Ziel 1: Es ist die Population mit dem größten Mittelwert auszuwählen. Hierzu muß man den kleinsten Wert von $\delta_{m,m-1}$, im weiteren mit δ bezeichnet, spezifizieren, den man entdecken will, sowie den kleinsten annehmbaren Wert P für die Wahrscheinlichkeit, Ziel 1 zu erreichen, falls $\delta_{m,m-1} \geq \delta$ ist.

Ziel 2: Es ist die Population mit dem größten, die mit dem zweitgrößten, ..., und die mit dem kleinsten Mittelwert auszuwählen. Hierzu muß man die kleinsten Werte von $\delta_{i+1,i}$, $i=1(1)m-1$, im weiteren mit $\delta_{i+1,i}^*$ bezeichnet, spezifizieren, die man gemeinsam auffinden will, sowie den kleinsten annehmbaren Wert P für die Wahrscheinlichkeit, Ziel 2 zu erreichen, falls $\delta_{i+1,i} \geq \delta_{i+1,i}^*$, $i=1(1)m-1$, ist. Im folgenden wird für $i=1(1)m-1$ $\delta_{i+1,i}^* = \delta$ angenommen.

Verfahren:

Man nimmt eine erste Stichprobe von $a_i \cdot N_0$ Beobachtungen von jeder Population i , die mit x_{ij} , $j=1(1) a_i \cdot N_0$, bezeichnet wird. Die natürliche Zahl N_0 muß dabei die Bedingung erfüllen, daß

$$j = N_0 \cdot \sum_{i=1}^m a_i - m$$

positiv ist.

Man berechnet

$$s^2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{a_i \cdot N_0} (x_{ij} - \frac{1}{a_i \cdot N_0} \sum_{k=1}^{a_i \cdot N_0} x_{ik})^2$$

welches eine erwartungstreue Schätzung von σ^2 ist mit f Freiheitsgraden, und bestimmt die kleinste ganze Zahl, die gleich oder größer als

$$N_1 = 2 \cdot s^2 \cdot \left(\frac{h_f}{\delta} \right)^2$$

ist, wobei die Bestimmung von h_f weiter unten behandelt wird. Sei $N = \max \{N_0, N_1\}$. Man nimmt eine zweite Stichprobe des Umfangs $(N_1 - N_0) \cdot a_i$ von jeder Population $i, i=1(1)m$, falls $N_1 > N_0$ ist.

Die Stichprobenmittelwerte

$$\bar{x}_i = \frac{1}{a_i \cdot N} \cdot \sum_{j=1}^{a_i \cdot N} x_{ij} \quad i = 1(1)m$$

sind zu berechnen und der Größe nach anzuordnen:

$$\bar{x}_{|1|} \leq \dots \leq \bar{x}_{|m|}$$

Sind zwei oder mehrere der \bar{x}_i gleich, sollten sie mittels einer Zufallsprozedur angeordnet werden, die jeder möglichen Anordnung gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet. Gemäß dem vorgegebenen Ziel kann von dieser Anordnung auf die Anordnung $\mu_{|1|} \leq \dots \leq \mu_{|m|}$ geschlossen werden. h_f ist eine positive Konstante, die von f , P und dem Ziel abhängt.

Für $m=2$ kann die univariate Students-t-Verteilung für beide Ziele verwendet werden. Für $m=3$ ist h_f in /14/ Tafel 3 für Ziel 1 und Tafel 4 für Ziel 2 gegeben. Für $m > 4$ sind den Autoren keine Tabellen für h_f bekannt.

b) Implementiert wurden 2 sich ergänzende Prozeduren, die beide gleiche Stichprobenumfänge voraussetzen, also $a_i=1$ für $i=1(1)m$.

BECH_TWO_A entscheidet, ob das Verfahren beendet ist oder weitere Stichproben zu nehmen sind. Im ersten Fall werden die Anordnung der Mittelwerte und ihre Identifikation ausgegeben; im zweiten Fall wird die Anzahl der zusätzlichen Beobachtungen angegeben.

BECH_TWO_B liefert Anordnung und Identifikation der Mittelwerte, falls zusätzliche Beobachtungen erforderlich waren.

Die Anordnung der Mittelwerte durch beide Prozeduren erfolgt ohne die Sonderbehandlung, die bei Auftreten gleichgroßer Mittelwerte zu erfolgen hat. Beide Prozeduren setzen die Existenz der Prozedur QUICKSR voraus.

```

PROCEDURE BECH_2_A(X,M,N,DEL,H,MEAN,MEANID,A,MSE,N1,DEC,SAMP);
NAME SAMP,DEC,MSE,N1;
INIEGER M,N,SAMP,N1;
REAL DEL,H,MSE;
INIEGER ARRAY MEANID;REAL ARRAY X,MEAN;
BOOLEAN DEC,A;

BEGIN INIEGER I,J;REAL S;
  IE A IHEN BEGIN MSE:=0;
    FOR I:=1 STEP 1 UNIL M DO
      BEGIN S:=0;
        FOR J:=1 STEP 1 UNIL N DO S:=S+(X(I,J)-MEAN(I))**2;
          MSE:=MSE+S;
        END;
      MSE:=MSE/(M*(N-1));
    END;
  N1:=ENTIER(2*MSE*((H/DEL)**2));
  IE N1>N IHEN BEGIN DEC:=FALSE;SAMP:=N1-N;END
  ELSE
  BEGIN DEC:=TRUE;SAMP:=0;
    FOR I:=1 STEP 1 UNIL M DO MEANID(I):=I;
      QUICKSR(MEAN,1,M+1,MEANID);
    END;
  END OF BECH_2_A;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenmatrix (x_{ij}), $i=1(1)m, j=1(1)n$
M	I	E	Val	Anzahl der Gruppen
N	I	E	Val	Anzahl der Beobachtungen pro Gruppe
DEL	R	E	Val	δ
H	R	E	Val	h_f
MEAN	R.A.	E	Ref	Vektor der Mittelwerte (\bar{x}_i), $i=1(1)m$ falls DEC=TRUE: Vektor der angeordneten Mittelwerte
MEANID	I.A.	A	Ref	falls DEC=TRUE: Identifikation der Mittelwerte
A	B	E	Val	{ TRUE falls MSE von Prozedur zu berechnen FALSE sonst
MSE	R	E/A	Name	MSE

N1	I	A	Name	Wert von N_1
DEC	B	A	Name	TRUE falls $N_1 \leq n$
SAMP	I	A	Name	Anzahl zusätzlicher Beobachtungen, falls DEC=FALSE.

```
PROCEDURE BECH_2_B(MEAN,M,MEANID);
INIEGER M;INIEGER ARRAY MEANID;REAL ARRAY MEAN;

BEGIN INIEGER I;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO MEANID(I):=I;
  QUICKSR(MEAN,1,M+1,MEANID);
END OF BECH_2_B;
```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
MEAN	R.A	E	Ref	Vektor der Mittelwerte (\bar{x}_i), $i=1(1)m$
		A		Vektor der angeordneten Mittelwerte
MEANID	J.A	A	Ref	Mittelwertsidentifikation
M	J	E	Val	m

c) Lit: /2, 14/

3.12.2. Sequentielles Verfahren von Bechhofer

a) Die Voraussetzungen hierzu sind die gleichen wie für Bechhofers zwei-Stufen-Verfahren bis auf folgende Ausnahmen:

- 1) $a_i = 1$, $i = 1(1)m$
- 2) Es wird nur Ziel 1 (3.12.1) behandelt.

Verfahren:

Auf der n-ten Stufe des Experiments ($n=1,2,\dots$) nimmt man eine Beobachtung von jeder der m Populationen.

Mit $n=2$ beginnend, berechnet man die unten definierte Stoppstatistik $z_n(d_n)$.

Ist $z_n(d_n) \leq (1-P)/P$, beendet man das Experiment und wählt die Population mit dem größten Wert der Summe der Stichprobenwerte als die mit dem größten Mittelwert.

Ist $z_n(d_n) > (1-P)/P$, nimmt man eine weitere Beobachtung von jeder Population und berechnet $z_{n+1}(d_{n+1})$.
Man fährt in dieser Weise fort, bis die Stoppregel erfüllt ist.

Seien die $y_{in} = \sum_{j=1}^n x_{ij}$, $i=1(1)m$, angeordnet gemäß

$$y_{|1|n} \leq \dots \leq y_{|m|n}.$$

Man berechnet für $i=1(1)m-1$

$$L_{in} = \left[\frac{H_m - 2 \cdot \delta \cdot y_{|m|n}}{H_m - 2 \cdot \delta \cdot y_{|i|n}} \right] \left(\frac{d_n + m - 1}{2} \right)$$

mit $d_n = m(n-1)$ und

$$H_n = \frac{1}{m \cdot n} \left\{ m \cdot n \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^m y_{in} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2n \delta \sum_{i=1}^m y_{in} + (m-1) \cdot (n \cdot \delta)^2 \right\}$$

und damit $z_n(d_n) = \sum_{i=1}^{m-1} L_{in}$

- b) Die Prozedur entscheidet zu vorgegebenem n , ob die Population mit dem größten Mittelwert feststeht oder das Verfahren fortgesetzt werden muß.
Sie benutzt die Hilfsprozedur QUICKSR.

```

PROCEDURE BECH_SEQ(X,M,N,P,DELTA,Z,PROB,DEC,STRAT);
NAME Z,PROB,DEC,STRAT;
INIEGER M,N,STRAT;REAL P,DELTA,PROB,Z;REAL ARRAY X;
BOOLEAN DEC;

BEGIN INIEGER I,J,E,B;
      INIEGER ARRAY RANK(1:M);
      REAL D,HA,HB,HC,H,LA,LB,SX2,SY,SYQ;
      REAL ARRAY HSX2,HSY,LIST,L(1:M);

      FOR I:=1 STEP 1 UNIL M DO
      BEGIN
        FOR J:=1 STEP 1 UNIL N DO
          BEGIN HSY(I):=HSY(I)+X(I,J);
                HSX2(I):=HSX2(I)+X(I,J)**2;
          END;
        SX2:=SX2+HSX2(I);
        SY:=SY+HSY(I);
      END;
      SYQ:=SY**2;
      FOR I:=1 STEP 1 UNIL M DO
        BEGIN LIST(I):=HSY(I);RANK(I):=I;END;
      B:=1;E:=M+1;
      QUICKSR(LIST,B,E,RANK);

      D:=M*(N-1);
      HA:=SYQ/(M*N);
      HB:=SY*2*DELTA/M;
      HC:=(M-1)*N*(DELTA**2)/M;
      H:=SX2-HA+HB+HC;
      LA:=H-2*DELTA*LIST(M);
      FOR I:=1 STEP 1 UNIL M-1 DO
        BEGIN LB:=H-2*DELTA*LIST(I);
              L(I):=(LA/LB)**((D+M-1)/2);
        END;
      FOR I:=1 STEP 1 UNIL M-1 DO Z:=Z+L(I);
      PROB:=(1-P)/P;
      IF Z<=PROB THEN
        BEGIN DEC:=TRUE;STRAT:=RANK(M);END ELSE DEC:=FALSE;
      END OF BECH_SEQ;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenmatrix (x_{ij}) , $i=1(1)m$, $j=1(1)n$
M	I	E	Val	Anzahl m der Populationen
N	I	E	Val	Umfang n der Populationen
P	R	E	Val	Wahrscheinlichkeit P
DELTA	R	E	Val	δ
Z	R	A	Name	Wert der Stopp-Statistik
PROB	R	A	Name	Wert von $(1-P)/P$

DEC B A Name $\left\{ \begin{array}{l} \text{TRUE: Verfahren beendet} \\ \text{FALSE: weitere Beobachtungen notwendig} \end{array} \right.$
 STRAT I A Name falls DEC = TRUE: ist i die Population mit dem größten Mittelwert, dann STRAT=i

c) Lit: /3/

3.12.3 Sequentielles Verfahren von Paulson:

a) Die Voraussetzungen und die Problemformulierung sind die des sequentiellen Bechhofer-Verfahrens (3.12.2).

Man beginnt mit n Beobachtungen zu jeder der m Stichproben-
gruppen und berechnet

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, i=1(1)m \quad \text{sowie}$$

$$MSE = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad \text{mit } f=m(n-1)$$

Freiheitsgraden. Danach wird zu vorgegebenem Signifikanzniveau α (0.05, 0.01 od.dgl.) und δ die folgenden Größen g, a und w bestimmt:

$$g = \left(\left(\frac{m-1}{\alpha} \right)^{\frac{2}{f}} - 1 \right) \cdot \frac{f}{2}$$

$$a = \frac{4 \cdot MSE \cdot g}{3 \cdot \delta}$$

$w = \left[\frac{4a}{\delta} \right]$, wobei mit [c] die größte ganze Zahl kleiner als c bezeichnet wird.

Ist $n > w$, so ist das Verfahren beendet, und es wird die Gruppe i^* ausgewählt, für die gilt:

$$\sum_{j=1}^n x_{i^*j} = \max_{k=1(1)m} \left\{ \sum_{j=1}^n x_{kj} \right\} .$$

Falls $n \leq w$, wird jede Gruppe eliminiert, für die gilt:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} < \max_{k=1(1)m} \left\{ \sum_{j=1}^n x_{kj} \right\} - a + \frac{n \cdot \delta}{4}$$

Falls genau eine Gruppe übrigbleibt, ist das Verfahren ebenfalls beendet.

Ansonsten wird zu (n+1) - ten Stufe übergegangen, indem zu jeder der n-ten Stufe noch nicht eliminierten Gruppe eine neue Beobachtung getätigt wird. So fortfahrend, werden nach der (n+t)-ten Stufe, t=1,2,...,w-n, diejenigen Gruppen eliminiert, für die gilt:

$$\sum_{j=1}^{n+t} x_{ij} < \max_{k=1(1)m} \{ \sum_{j=1}^{n+t} x_{kj} \} - a + (n+t) \cdot \frac{\delta}{4}$$

wobei das Maximum über die nach der (n+t-1)-ten Stufe noch nicht eliminierten Gruppen genommen wird. Bleibt nach der w-ten Stufe mehr als eine Gruppe übrig, so wird das Verfahren nach der (w+1)-ten Stufe beendet, indem die Gruppe als Gruppe mit dem größten Mittelwert ausgewählt wird, deren Summe der Beobachtungswerte am größten ist.

Die Wahl des Ausgangswerts von n ist sehr wichtig für die Effizienz des Verfahrens.

Paulson schlägt vor, die den Wert n bestimmende Größe f so auszuwählen, daß g seinen Grenzwert nicht um mehr als einen spezifizierten Betrag (z.B. 10%) überschreitet, d.h. man wählt als f die kleinste ganze Zahl, für die gilt

$$\left(\left(\frac{m-1}{\alpha} \right)^{\frac{2}{f}} - 1 \right) \cdot \frac{f}{2} < 1.1 \ln \left(\frac{m-1}{\alpha} \right)$$

wobei ln den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Paulson liefert auch einige Annäherungswerte für bestimmte m, f und α .

m	2	4	10	20
$\alpha = 0.05$	30	45	55	60
$\alpha = 0.01$	50	60	70	80

b) Die Implementierung umfaßt die Prozeduren PAULSON1, PAULSON2 und PAULSON_3, die alle die Existenz der Procedure QUICKSR voraussetzen.

PAULSON_1 liefert die Entscheidung, ob n Beobachtungen der m Gruppen zum Auffinden der Gruppe mit dem größten Mittelwert genügen oder noch zusätzliche Beobachtungen vorzunehmen sind.

PAULSON_2 liefert diese Entscheidung für die (n+t)-te Stufe.

PAULSON_3 bestimmt für die (w+1)-te Stufe diejenige Gruppe, deren Mittelwert am größten ist.

```
PROCEDURE PAULSON_1(X,M,N,MEAN,SUMX,ALPHA,DELTA,MSE,DF,DEC,STRAT,
                   CAT,W,A,ANZ,SAMP);
NAME DF,MSE,DEC,STRAT,W,A,ANZ,SAMP;
INIEGER M,N,DF,STRAT,W,SAMP,ANZ;REAL ALPHA,DELTA,MSE,A;
REAL ARRAY X,MEAN,SUMX;
INIEGER ARRAY CAT;
BOOLEAN DEC;

BEGIN INIEGER I,J,K;INIEGER ARRAY RANK(1:M);
      REAL G,MAX,S; REAL ARRAY LIST(1:M);
      MSE:=0;DF:=M*(N-1);
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
      BEGIN S:=0;
           FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+(X(I,J)-MEAN(I))**2;
           MSE:=MSE+S;
      END;
      MSE:=MSE/DF;
      G:=(((M-1)/ALPHA)**(2/DF)-1)*DF/2;
      A:=4*MSE*G/(3*DELTA);
      W:=ENTIER(4*A/DELTA);
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
      BEGIN LIST(I):=SUMX(I);RANK(I):=I;END;
      QUICKSR(LIST,1,M+1,RANK);

      IF N>W THEN BEGIN DEC:=TRUE;STRAT:=RANK(M);END
      ELSE BEGIN MAX:=LIST(M)-A+N*DELTA/4;
            K:=0;
            FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M-1 DO
            IF LIST(I)<MAX THEN K:=K+1 ELSE GO TO LAB;
            LAB: ANZ:=M-K;
            IF K=M-1 THEN BEGIN DEC:=TRUE;STRAT:=RANK(M);END
            ELSE BEGIN DEC:=FALSE;
                  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL K DO CAT(RANK(I)):=0;
                  FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL M DO CAT(RANK(I)):=1;
                  SAMP:=W-N;
            END;
      END;
END OF PAULSON_1;
```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenmatrix $(x_{i,j}), i=1(1)m, j=1(1)n$
M	I	E	Val	Anzahl m der Stichprobengruppen
N	I	E	Val	Umfang n der Stichprobengruppen
MEAN	R.A.	E	Ref	Vektor der m Gruppenmittelwerte (\bar{x}_i)
SUMX	R.A.	E	Ref	Vektor der m Gruppenstichprobensummen
ALPHA	R.	E	Val	α
DELTA	R.	E	Val	δ
MSE	R	A	Name	MSE
DF	I	A	Name	f
DEC	B	A	Name	{ TRUE Verfahren beendet FALSE sonst
STRAT	I	A	Name	Falls DEC=TRUE: Nummer der Gruppe mit größtem Mittelwert
CAT	I.A.	A	Ref	Falls DEC=FALSE, dann für $i=1(1)m$ $CAT(i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i\text{-te Gruppe eliminiert} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
W	I	A	Name	w
A	R	A	Name	a
ANZ	I	A	Name	falls DEC = FALSE: Anzahl der elimi- nierten Gruppen
SAMP	I	A	Name	falls DEC=FALSE: SAMP=w-n

```
PROCEDURE PAULSON_2(SUMX,M,NOPLUST,W,A,DELTA,
                   DEC,STRAT,CAT,ANZ,SAMP);
```

```
NAME DEC,STRAT,ANZ,SAMP;
INIEGER M,NOPLUST,STRAT,ANZ,SAMP,W;
REAL A,DELTA;
REAL ARRAY SUMX;INIEGER ARRAY CAT;
BOOLEAN DEC;
```

```
BEGIN INIEGER I,K;
  REAL MAX;REAL ARRAY LIST(1:M);INIEGER ARRAY RANK(1:M);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  BEGIN LIST(I):=SUMX(I);RANK(I):=I;END;
  QUICKSR(LIST,1,M+1,RANK);
  MAX:=LIST(M)-A+NOPLUST*DELTA/4;
  OUTREAL(MAX,5,15);OUTIMAGE;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO BEGIN
  OUTFAL(LIST(I),5,15);OUTIMAGE;END;
  K:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M-1 DO
  IF LIST(I)<MAX THEN K:=K+1 ELSE GO TO LAB;
  LAB: ANZ:=M-K;
  IF K=M-1 THEN BEGIN DEC:=TRUE;STRAT:=RANK(M);END
  ELSE BEGIN DEC:=FALSE;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL K DO CAT(RANK(I)):=0;
    FOR I:=K+1 STEP 1 UNTIL M DO CAT(RANK(I)):=1;
    SAMP:=W-NOPLUST;
```

```
END;
END OF PAULSON_2;
```

Par	Typ	E/A	Über.	Bedeutung
SUMX	R.A.	Em	Ref	Vektor der Stichprobensummen der m noch nicht eliminierten Gruppen
M	I	E	Val	m
NOPLUST	I	E	Val	n+t
W	I	E	Val	w
A	R	E	Val	a
DELTA	R	E	Val	δ
DEC	B	A	Name	{TRUE Verfahren beendet FALSE sonst
STRAT	I	A	Name	falls DEC=TRUE: Nummer der Gruppe mit größtem Mittelwert
CAT	I.A.	A	Ref	falls DEC=FALSE, dann für $i=1(1)m$ $CAT(i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i\text{-te Gruppe eliminiert} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
ANZ	I	A	Name	falls DEC=FALSE: Anzahl der eliminierten Gruppen
SAMP	I	A	Name	falls DEC=FALSE: $SAMP=W-(n+t)$

```

PROCEDURE PAULSON_3(SUMX,M,STRAT);
NAME STRAT;
INIEGER M,STRAT;REAL ARRAY SUMX;

BEGIN INIEGER ARRAY RANK(1:M);
  INTEGER I;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO RANK(I):=I;
  QUICKSR(SUMX,1,M+1,RANK);
  STRAT:=RANK(M);
END OF PAULSON_3;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
SUMX	RA	E	Ref	Vektor der Stichprobensummen der m noch nicht eliminierten Gruppen
M	I	E	Val	m
STRAT	I	A	Name	Nummer der Gruppe mit dem größten Mittelwert.

c) Lit: /34/

3.13 Vergleich und Anordnung von Varianzen:

3.13.1. Vergleich zweier Varianzen:

a) Das folgende Verfahren testet die Hypothese, daß die Varianzen σ_1^2, σ_2^2 zweier Normalverteilungen gleich sind, gegen die Alternative $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ unter Benutzung der unabhängigen Stichproben x_1, \dots, x_{n_1} und y_1, \dots, y_{n_2} .

Man wählt hierzu eine Signifikanzzahl α (0.05, 0.01 od. dgl.), bestimmt die Zahl c als Lösung der Gleichung $F(c) = 1-\alpha$ aus Fisher's-F-Verteilung mit $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ Freiheitsgraden, berechnet die Stichprobenvarianzen s_1^2, s_2^2 und bildet

$$v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} .$$

Ist $v_0 \leq c$, so wird die Hypothese angenommen und als Schätzwert σ^2 für die Varianzen σ_1^2, σ_2^2

$$\sigma^2 = \frac{(n_1-1) s_1^2 + (n_2-1) s_2^2}{(n_1-1) + (n_2-1)}$$

verwendet. Ist $v_0 > c$, wird die Hypothese verworfen.

Weichen die Verteilungen stark von der Normalverteilung ab, so bilde man aus der ersten Stichprobe die Werte

$$x_i^* = |x_i - \bar{x}|, \quad i=1(1)n_1, \quad \text{und aus der}$$

und aus der zweiten $y_j^* = |y_j - \bar{y}|, \quad j=1(1)n_2,$

wobei \bar{x}, \bar{y} die entsprechenden Stichprobenmittelwerte sind. Die Hypothese $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ testet man dann, indem man mittels des gegenüber Abweichungen von der Normalität unempfindlichen t-Tests (3.10.1.1) prüft, ob die zugehörigen Variablen X^*, Y^* denselben Mittelwert besitzen.

b) Die Implementierung setzt Normalverteilung voraus, nimmt also keine Transformation der Stichproben vor.


```

PROCEDURE VARCCMP_TWO(X,NX,Y,NY,MEANXY,VARXY,F,DFXY,VO,
                    DEC,SVAR,ZEROVARY);
NAME VO,DEC,ZEROVARY,SVAR;
INTEGER NX,NY;INTEGER ARRAY DFX;
REAL F,VO,SVAR;REAL ARRAY X,Y,MEANXY,VARXY;
BOOLEAN DEC,ZEROVARY;

BEGIN INTEGER I;REAL S;
  DFX(1):=NX-1;DFX(2):=NY-1;
  S:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NX DO S:=S+(X(I)-MEANXY(1))**2;
  VARXY(1):=S/DFX(1);
  S:=0;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NY DO S:=S+(Y(I)-MEANXY(2))**2;
  VARXY(2):=S/DFX(2);
  IF VARXY(2)=0 THEN BEGIN ZEROVARY:=TRUE;GOTO LAB;END;
  ZEROVARY:=FALSE;
  VO:=VARXY(1)/VARXY(2);
  IF VO<=F THEN
    BEGIN DEC:=TRUE;
      SVAR:=(DFX(1)*VARXY(1)+DFX(2)*VARXY(2))/(DFX(1)+DFX(2));
    END
  ELSE DEC:=FALSE;
  LAB:
END OF VARCCMP_TWO;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenvektor $(x_i), i=1(1)n_1$
NX	I	E	Val	n_1
Y	R.A.	E	Ref	Stichprobenvektor $(y_j), j=1(1)n_2$
NY	I	E	Val	n_2
MEANXY	R.A.	E	Ref	Vektor mit den Stichprobenmittelwerten $MEANXY(1)=\bar{x}, MEANXY(2)=\bar{y}$
VARXY	R.A.	A	Ref	Vektor mit den Stichprobenvarianzen $VARXY(1)=s_1^2, VARXY(2)=s_2^2$
F	R	E	Val	Wert für c aus F-Verteilung
DFXY	I	A	Ref	$DFXY(1)=n_1-1, DFX(2)=n_2-1$
VO	R	A	Name	v_0
DEC	B	A	Name	$\begin{cases} \text{TRUE} & \text{Hypothese angenommen} \\ \text{FALSE} & \text{sonst} \end{cases}$
SVAR	R	A	Name	falls $DEC=TRUE, SVAR= \sigma^2$
ZEROVARY	B	A	Name	$\begin{cases} \text{TRUE} & \text{falls } s_2^2 = 0 \\ \text{FALSE} & \text{sonst} \end{cases}$

c) Lit: /28/

3.13.2. Vergleich von $m > 2$ Varianzen:

a) Das Verfahren prüft die Hypothese, daß die Varianzen σ_i^2 , $i=1(1)m$, von m Normalverteilungen gleich sind, gegen die Alternative, daß nicht alle gleich sind, unter Benutzung m unabhängiger Stichproben-

$$(x_{ik}), i=1(1)m, k = 1(1)n_i .$$

Man teilt hierzu jede Gruppe in J_i Mengen des Umfangs n_{ij} ein, bildet die Varianzen s_{ij}^2 dieser Mengen und benutzt diese als Schätzwert für die jeweilige Varianz σ_i^2 , $i=1(1)m$, also

$$E(s_{ij}^2) = \sigma_i^2, j = 1(1)J_i, i=1(1)m$$

wobei $E(s)$ den Erwartungswert der Zufallsgröße s bedeutet.

Dann bildet man mit dem natürlichen Logarithmus \ln

$$y_{ij} = \ln(s_{ij}^2), i = 1(1)m, j = 1(1)J_i$$

für $s_{ij}^2 \neq 0$. Da mit $E(s_{ij}^2) = \sigma_i^2$ gilt, daß $E(y_{ij}) \approx \ln \sigma_i^2 = : \eta_i$, $i=1(1)m$, wird die Hypothese $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_m^2$ der Hypothese $\eta_1 = \dots = \eta_m$ äquivalent, die mit dem F-Test (3.10.2.1) geprüft werden kann, falls alle n_{ij} gleich groß sind. Der Fall unterschiedlicher n_{ij} wird hier nicht betrachtet (siehe dazu /37/).

Diese Transformation der Stichproben x_{ik} in die y_{ij} bezeichnen wir als Scheffé-Transformation, deren Implementierung unter b) aufgeführt ist.

Die Methode kann nicht angewendet werden, falls alle $J_i=1, i=1(1)m$, sie ist empfindlich, falls

$$\sum_{i=1}^m (J_i - 1)$$

klein ist.

b) Die Prozedur SCHEFFE_TRANS unterwirft die Stichprobenmatrix (x_{ik}) $i=1(1)m$, $k=1(1)n$ der Scheffe-Transformation, wobei $n_i=n$, $i=1(1)m$ sowie alle n_{ij} gleich groß und die J_i gleich groß vorausgesetzt werden.

```

PROCEDURE SCHEFFE_TRANS(X,M,N,JI,NIJ,S2,Y,ZEROVAR);
INIEGER M,N,JI,NIJ;REAL ARRAY X,Y,S2;BOOLEAN ARRAY ZEROVAR;

BEGIN INIEGER I,J,JK,K,L;REAL S,SS;
  L:=NIJ-1;
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL JI DO
  BEGIN S:=SS:=0;JK:=(J-1)*NIJ;
    FOR K:=1 STEP 1 UNTIL NIJ DO
    BEGIN S:=S+X(I,JK+K);SS:=SS+X(I,JK+K)**2;END;
    S:=S/NIJ;
    S2(I,J):=(SS-NIJ*(S**2))/L;
    ZEROVAR(I,J):=(IE S2(I,J)=0 THEN TRUE ELSE FALSE);
    IE NOT ZEROVAR(I,J) THEN Y(I,J):=LN(S2(I,J));
  END;
END OF SCHEFFE_TRANS;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref.	Stichprobenmatrix $(x_{ik}), i=1(1)m, k=1(1)n$
M	I	E	Val	m
N	I	E	Val	n
JI	I	E	Val	J_i
NIJ	I	E	Val	n_{ij}
s2	R.A.	A	Ref	Matrix $(s_{ij}^2), i=1(1)m, j=1(1)J_i$
Y	R.A.	A	Ref	Matrix $(y_{ij}), i=1(1)m, j=1(1)J_i$
ZEROVAR	B.A.	A	N me	für $i=1(1)m, j=1(1)J_i$ $ZEROVAR(i,j) = \begin{cases} \text{TRUE} & \text{falls } s_{ij}^2 = 0 \\ \text{FALSE} & \text{sonst} \end{cases}$

c) Lit: /37/

3.13.3 Multiple Vergleiche, Anordnung und Auswahl von Varianzen

Wendet man auf die mittels Scheffé-Transformation erhaltene Stichproben $y_{ik} = \ln(s_{ik}^2)$ mit $E(y_{ik}) = \eta_i = \ln(\sigma_i^2)$ die Scheffé- bzw. Tukey-Methode für Kontraste (3.11) der Art $(\eta_i - \eta_j)$ an, erhält man zur Aussage

$$a \leq \eta_i - \eta_j \leq b$$

deren äquivalente Aussage

$$e^a \leq \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2} \leq e^b, \text{ falls } \sigma_j^2 \neq 0.$$

Ähnliches ist zu berücksichtigen, falls man die Anordnungs- und Auswahlverfahren des Abschnittes 3.12 zu Aussagen über die Anordnung

$$\eta_{|1|} \leq \dots \leq \eta_{|m|}$$

verwendet. Für Ziel 1 (3.12) ergibt sich wegen $\eta_{|m|} - \eta_{|m-1|} \geq \delta$

die Beziehung

$$\frac{\sigma_{|m|}^2}{\sigma_{|m-1|}^2} \geq e^\delta$$

und für Ziel 2 (3.12) entsprechend

$$\frac{\sigma_{|m|}^2}{\sigma_{|i-1|}^2} \geq e^\delta, \quad i=2(1)m.$$

3.14 Kolmogoroff-Smirnov-Test:

a) Dieser testet die Hypothese, daß $F(x)$ die Verteilungsfunktion der stetig verteilten Grundgesamtheit ist, der die Stichprobe x_1, \dots, x_n entstammt.

Man berechnet die Werte der Verteilungsfunktion $\tilde{F}(x)$ der Stichprobe, wobei $\tilde{F}(x)$ gleich der Summe der relativen Häufigkeiten aller Stichprobenwerte ist, die kleiner oder gleich x sind.

Man bestimmt

$$a = \max_{x \in \{x_1, \dots, x_n\}} | \tilde{F}(x) - F(x) | \text{ und}$$

zur Signifikanzzahl α (0.05, 0.01 od. dgl.) die Lösung c der Gleichung $K(c) = 1 - \alpha$ aus der dem Stichprobenumfang n entsprechenden Tafel des Kolmogoroff-Smirnov-Tests. Für große n ($n > 100$) existieren Näherungen z.B.

	0.05	α	0.1
c	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$		$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$

Ist $a \leq c$, so wird die Hypothese angenommen, andernfalls verworfen.

- b) Die folgende Prozedur nimmt für $F(x)$ die Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 an und benötigt hierzu die Prozedur NDTR.

Außerdem wird die Prozedur QUICKSORT verwendet.

```

PROCEDURE KOLMO_SMIR(X,N,MEAN,VAR,KOLM,LIST1,MAX,DEC);
NAME MAX,DEC;
INTEGER N;
REAL MEAN,VAR,KOLM,MAX;
REAL ARRAY X,LIST1;
BOOLEAN DEC;

BEGIN INTEGER I,J,L,B,EN;
  REAL AMAX,S,P,D,H;
  REAL ARRAY LIST2,WERT,A1,A2,RELFREQ(1:N);
  REAL ARRAY F,PHI(0:N);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO LIST1(I):=X(I);
  S:=SQRT(VAR);
  B:=1; EN:=N+1;
  QUICKSORT(LIST1,B,EN);
  L:=1; F(0):=PHI(0):=MAX:=0;
  FOR I:=1 STEP J UNTIL N DO
  BEGIN LIST2(L):=LIST1(I);
    J:=1;
    LAB: IF I+J<=N THEN
    BEGIN IF LIST1(I+J)=LIST1(I) THEN BEGIN J:=J+1;GOTO LAB;END;END;
    RELFREQ(L):=J/N;
    F(L):=F(L-1)+RELFREQ(L);
    WERT(L):=(LIST2(L)-MEAN)/S;
    H:=WERT(L);
    NDTR(H,P,D);
    PHI(L):=P;
    A1(L):=ABS(PHI(L)-F(L-1));
    A2(L):=ABS(PHI(L)-F(L));
    IF A1(L)>A2(L) THEN AMAX:=A1(L) ELSE AMAX:=A2(L);
    IF MAX<AMAX THEN MAX:=AMAX;
    L:=L+1;
  END;
  DEC:=(IF MAX<=KOLM THEN TRUE ELSE FALSE);
END CF KOLMO_SMIR;

```

Par	Typ	E/A	Überg.	Bedeutung
X	R.A.	E	Ref	Stichprobenvektor (x_i) , $i=1(1)n$
N	I	E	Val	n
MEAN	R	E	Val	μ = Mittelwert der Normalverteilung
VAR	R	E	Val	σ^2 = Varianz der Normalverteilung
KOLM	R	E	Val	Wert c
List1	R.A.	E	Ref	Vektor der nach Größe angeordneten Stichprobenwerte
MAX	R	A	Name	$\max \bar{F}(x)-F(x) $
DEC	B	A	Name	{ TRUE falls Hypothese angenommen FALSE sonst

c) Lit: /7,28,38/

4. Schlußbemerkungen

Die Verwendung varianzreduzierender Techniken zur Bestimmung von Schätzwerten kann oft eine Verkürzung des Simulationslaufs bedeuten /27,33/. Da aber hierzu Korrelationen zwischen Meßgrößen bekannt sein müssen, deren Kenntnis oftmals nicht vorausgesetzt werden kann, wären diese zuvor zu untersuchen. Die Anwendung solcher Methoden kann somit gerade bei komplexen Systemen aufwendig und unter Umständen zweifelhaft sein (siehe /31/). Daher wurden solche Verfahren hier nicht berücksichtigt.

Die aufgeführten Verfahren, insbesondere die der Stichprobenerhebung, sind nicht nur im Fall des Strategienvergleichs von Interesse, sondern auch zur Untersuchung anderer Problemstellungen in Warteschlangensystemen mittels Simulation, z.B. die Analyse von Zeitreihen. Insgesamt kann hierdurch dem Anwender die Durchführung von Simulationsstudien erleichtert werden.

5. Literaturverzeichnis

- /1/ A.J. Bayes
Statistical Techniques for Simulation Models
The Australian Computer Journal, Vol.2, No.4,
Nov. 1970
- /2/ R.E. Bechhofer, C.W. Dunnett, M. Sobel
A Two Sample Multiple Decision Procedure for
Ranking Means of Normal Populations with Common
Unknown Variance
Biometrika, Vol.41 (1954), pp. 170-176
- /3/ R.E. Bechhofer, S. Blumenthal
A Sequential Multiple Decision Procedure for
Selecting the best one of several Normal Populations
with a Common Unknown Variance II: Monte Carlo
Sampling Results and New Computing Formulae
Biometrics, March 1962, pp. 52-67
- /4/ R.E. Bechhofer, J. Kiefer, M. Sobel
Sequential Identification and Ranking Procedures
The University of Chicago Press, Chicago and London 1968
- /5/ R.E. Bechhofer
Single Stage Procedures for Ranking Multiply-
Classified Variances of Normal Population
Technometrics, Vol.10, No.4, Nov. 1968, pp. 693-714
- /6/ J.S. Bendat, A.G. Piersol
Measurement and Analysis of Random Data
John Wiley and Sons, Inc., New York 1971
- /7/ E.P. Billeter
Grundlage der erforschenden Statistik
Springer-Verlag Wien, New York 1972

- /8/ G.E.P. Box, G.M. Jenkins
Time Series Analysis: Forecasting and Control
Holden Day, San Francisco 1970
- /9/ R.W. Conway
An Experimental Investigation of Priority
Assignment in a Job Shop
Rand Corp., RM-3789-PR, Febr. 1964
- /10/ R.W. Conway
Some Tactical Problems in Digital Simulation
Management Science, Vol.10, No.1, Oct. 1963
- /11/ M.A. Crane, D.L. Iglehart
Simulating Stable Stochastic Systems,
I: General Multiserver Queues
Journal of the Association for Computing Mach.,
Vol.21, No.1, Jan. 74
- /12/ O.-J. Dahl u.a.
"SIMULA-67 Common Base Language"
Norwegian Computing Center, Oslo 1968
- /13/ C.W. Dunnet
A Multiple Comparison Procedure for Comparing
Several Treatments with a Control
Journal of the American Statistical Association L
(1955), pp. 1096-1121
- /14/ C.W. Dunnet, M. Sobel
A Bivariate Generalization of Student's-t-Distribution
with Tables for Certain Special Cases
Biometrika, Vol.41 (1954) pp. 153-169

- /15/ G.S. Fishman, P.J. Kiviat
The Analysis of Simulation-Generated Time Series
Management Science, Vol.13, No.7, March 1967
- /16/ G.S. Fishman
Problems in the Statistical Analysis of Simulation
Experiments: The Comparison of Means and the Length
of Sample Records
Comm. ACM, Vol.10, Febr. 1967
- /17/ G.S. Fishman
Estimating Sample Size in Computer Simulation
Experiments
Management Science, Vol.18, No.1, Sept. 1971
- /18/ G.S. Fishman
Bias Considerations in Simulation Experiments
Operations Research, 1972, pp. 785
- /19/ G.S. Fishman
Concepts and Methods in Discrete Event Digital
Simulation
John Wiley, N.Y., 1973
- /20/ G. Gordon
System Simulation
Prentice-Hall, N.J., 1969
- /21/ Graf, H.J. Henning, K. Stange
Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1966
- /22/ C.W.J. Granger
Spectral Analysis of Economic Time Series
Princeton University Press 1964

- /23/ S.S. Gupta, S. Panchapakesan
Selection and Ranking Procedures, in
Naylor: The Design of Computer Simulation
Experiments. Duke University Press, Durham 1969,
pp. 132-160
- /24/ D.M. Himmelblau
Process Analysis by Statistical Methods
John Wiley and Sons, Inc. New York 1968
- /25/ G.M. Jenkins, D.G. Watts
Spectral Analysis and its Application
Holden Day 1968
- /26/ J.P.C. Kleijnen, T.H. Naylor, T.G. Seaks
The Use of Multiple Ranking Procedures to
Analyze Simulations of Management Systems:
A Tutorial
Management Science, Vol.18, No.6, Febr. 1972,
pp. B245-B257
- /27/ D. Köcher, G. Matt, C. Oertel, H. Schneeweiß
Einführung in die Simulationstechnik
DGOR-Schrift Nr. 5
- /28/ E. Kreyszig
Statistische Methoden und ihre Anwendungen
Vandenhoeck u. Rupprecht, Göttingen 1973
- /29/ D.M. Mahamunulu, M. Sobel
A Fixed Subset-Size Approach to the Selection
Problem
Biometrika 1968, 55, 2, pp. 401-410

- /30/ H. Mechanic, W. McKay
Confidence Intervals for Averages of Dependent
Data in Simulations II
Report No. ASDD 17-202, IBM, Yorktown Heights,
N.Y., 1966
- /31/ G.A. Mihram
SIMULATION: Statistical Foundations and
Methodology
Academic Press New York, London 1972
- /32/ T.H. Naylor
The Design of Computer Simulation Experiments
Duke University Press, Durham, N.C., 1969
- /33/ T.H. Naylor
Computer Simulation Experiments with Models
of Economic Systems
John Wiley & Sons, Inc., New York, London,
Sydney, Tronto, 1971
- /34/ E. Paulson
A Sequential Procedure for Selecting the Population
with the Largest Mean from k Normal Populations
Ann. Math. Stat. 35/1964
- /35/ K.C.S. Pillai, K.V. Ramachandran
On the Distribution of the Ratio of the i-th
Observation in an Ordered Sample from a Normal
Population to an Independent Estimate of the
Standard Deviation
Ann. Math. Stat. 25/1954, pp. 565-572
- /36/ T.L. Saaty
Elements of Queuing Theory
McGraw-Hill, N.Y., 1961

- /37/ H. Scheffé
The Analysis of Variance
New York, John Wiley & Sons, Inc., 1967
- /38/ S. Siegel
Nonparametric Statistics for the Behavioral
Sciences
McGraw Hill, New York, 1956
- /39/ M. Sobel
Selecting a Subset Containing at Least One of
the t Best Populations
Multivariate Analysis II
New York, Academic Press 1969
- /40/ System/360 Scientific Subroutine Package
(360A-CM-03X) Version III
Programmer's Manual
1968
- /41/ "UNIVAC Large Scale System Stat-Pack"
Programmer's Reference
UP 7502 Rev.1, 1967
- /42/ E. Walter
Statistische Methoden 1
Grundlagen und Versuchsplanung
Lecture Notes in OR and Math. Systems 38
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York,
1970
- /43/ D. Watts
Time Series Analysis, in
T.H. Naylor: The Design of Computer Simulation
Experiments
Duke University Press, Durham 1969

/44/ H. Wettstein
Systemprogrammierung
Hanser-Verlag München, 1972