

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

Februar 1975

KFK 1981

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

**Messungen von Geschwindigkeits- und
Temperaturfeldern in laminaren und turbulenten
Grenzschichten bei Naturkonvektion**

G. Fieg



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1981

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Messungen von Geschwindigkeits- und
Temperaturfeldern in laminaren
und turbulenten Grenzschichten
bei Naturkonvektion

G. Fieg

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Hydrodynamik laminarer und turbulenter Grenzschichten längs einer senkrechten isothermen Platte bei freier Konvektion. Sowohl im laminaren als auch im turbulenten Bereich ist die Übereinstimmung mit bisherigen Experimenten und der Theorie recht zufriedenstellend. An den Experimenten können weiterhin wesentliche Rückschlüsse auf die Entstehung von Instabilitäten im Übergangsbereich gezogen werden, die zur Turbulenz führen.

Measurements of velocity-fields and temperature-fields in laminar and turbulent free convection boundary layers

Abstract

This work deals with the hydrodynamics of laminar and turbulent free convection boundary layers on a vertical flat isothermal plate. Both for the laminar and turbulent region there is a good agreement with previous experimental and theoretical investigations. From these experiments one can draw important conclusions to the growth of instabilities in the transition region which lead to turbulence.

Nomenclatur

x	longitudinale Koordinate, längs der Platte
y	Koordinate senkrecht zur Platte
u	Geschwindigkeitskomponente längs der x-Richtung
\bar{u}	mittlere Geschwindigkeitskomponente längs der x-Richtung
u'	fluktuierende Geschwindigkeitskomponente längs der x-Richtung
u_{\max}	maximale mittlere Geschwindigkeit
v	Geschwindigkeitskomponente längs der y-Richtung
\bar{v}	mittlere Geschwindigkeitskomponente längs der y-Richtung
v'	fluktuierende Geschwindigkeitskomponente längs der y-Richtung
T	Temperatur
T_w	Wandtemperatur
T_{∞}	Temperatur außerhalb der Grenzschicht
$\Delta T = T_w - T_{\infty}$	
q	Wärmefluß (pro Zeiteinheit und Flächeneinheit) von der Wand in das Fluid
τ_w	Wandschubspannung
ρ	Dichte des Fluids

β	kubischer Ausdehnungskoeffizient des Fluids
g	Erdbeschleunigung
μ	dynamische Viskosität
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	kinematische Viskosität
λ	thermische Leitfähigkeit
c_p	Wärmekapazität
$\alpha = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}$	Temperaturleitzahl
θ	dimensionslose Temperatur
η	dimensionsloser Wandabstand
δ_{\max}	Abstand von der Wand zur Koordinate mit der maximalen Geschwindigkeit u_{\max}
δ_{Th}	thermische Grenzschichtdicke
$Re_l = \frac{u_{\max} \cdot \delta_{\max}}{\nu}$	Reynold-Zahl
$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	Prandtl-Zahl
$Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda}$	lokale Nusselt-Zahl
$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot x^3}{\nu^2}$	Grashof-Zahl

Einführung

Im Gegensatz zur erzwungenen Konvektion wurde bis vor wenigen Jahren der Naturkonvektion wenig Beachtung geschenkt. Mit dem Problem des Wärmetransports von einer isothermen senkrechten Wand an das umgebende Fluid befaßte sich L. Lorentz /1/ nur am Rande der grundlegenden Fragen nach Wärmeleitung und elektrischer Leitung in Metallen. Erste systematische Studien sind die Arbeiten von GRIFFITHS und DAVIS /2/ und SCHMIDT und BECKMANN /3/. Beide Arbeiten untersuchen die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder des Fluids in der Umgebung einer isothermen senkrechten Wand. Mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen gelang POHLHAUSEN /4/ als erstem die theoretische Behandlung des obigen Problems bei laminarer Strömung; die Ergebnisse stimmen gut mit den Experimenten überein. Die Ergebnisse einer ersten Analyse der turbulenten Grenzschicht bei Naturkonvektion von ECKERT und JACKSON /5/, die aus Vergleichen des Verhaltens bei erzwungener Konvektion gewonnen wurden, wiesen große Diskrepanzen zu den experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen auf.

Die Experimente von CHEESEWRIGHT /6/ bestätigten wiederum die früheren Messungen von GRIFFITHS und DAVIS /2/. Eine Literaturrecherche /7-17/ zeigt, daß der Hauptteil an Arbeiten turbulenter Grenzschichten bei Naturkonvektion seit etwa 1965 entstanden ist, teils deshalb, weil vorher keine genauen Meßverfahren zur Verfügung standen, andererseits aber auch durch das wachsende technische Interesse.

Experimenteller Aufbau

Die schematische Zeichnung, Abb. 1, zeigt den prinzipiellen Aufbau des Experiments. Er entspricht im wesentlichen demjenigen von KUTATELADZE /12/. Im unteren Teil eines Edelstahl-Behälters (25 cm x 15 cm Grundfläche, 100 cm Höhe) befindet sich die vertikale beheizte Fläche (8 cm breit, 30 cm hoch). Sie ist die polierte Frontfläche eines Wärmetauschers aus Kupfer, dessen äußere Dimensionen 30x8x2 cm betragen, die Wandstärke des Kupferbleches ist 5 mm stark. Außer der einen polierten Frontfläche befinden sich sämtliche anderen innerhalb eines Polyäthylenblockes und sind somit thermisch isoliert. Durch den Wärmeaustauscher zirkuliert temperiertes Wasser aus einem Thermostaten; die Konstanz der Wandtemperatur wurde kontrolliert mittels 5 Fe-Const-Thermoelementen in verschiedener Höhe der Wand. Dazu wurden die Thermoelemente durch Löcher parallel im Abstand von 1.5 mm zur polierten Frontfläche bis zur Mitte des Wärmetauschers hindurchgeführt. Der Temperaturgradient längs der Wand betrug maximal $1.3 \times 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/cm}$ ($\approx 0.4 \text{ }^\circ\text{C}$ über die gesamte Höhe).

Um bei zeitlich stationären Verhältnissen die Messung durchführen zu können, wurde ein weiterer Wärmeaustauscher im oberen Bereich des Behälters eingesetzt, der an den Kreislauf eines Kühlaggregats angeschlossen wurde. Eine gute zeitliche Stationarität konnte somit nach einer Einlaufphase von etwa 5 Stunden aufrechterhalten werden. Die Temperatur außerhalb der Grenzschicht variierte in der Höhe nur gering ($\approx 1.5 \text{ }^\circ/60 \text{ cm}$), insgesamt kontrollierten 8 Thermoelemente die Temperaturkonstanz.

In der Höhe der vertikalen beheizten Platte befinden sich am Behälter 3 Fenster. Durch eines blickt man senkrecht auf die beheizte Fläche, die beiden anderen lassen die Durchsicht parallel zur Platte frei. Der Behälter steht auf einem stabilen ölhydraulischen Hubtisch, an den sich eine besonders stabile optische Bank anschließt, Abb.2.

Die Geschwindigkeitsmessungen wurden nach der stroboskopischen Methode zur Sichtbarmachung der Strömung ausgeführt /12/. Das Licht einer Stroboskoplampe bildet durch einen 20 mm hohen und 0.3 mm breiten Schlitz mit Hilfe eines Kondensors in der mittleren Falllinie der beheizten Platte ein enges Lichtband (≈ 0.4 mm) ab. Senkrecht zur Einfallsrichtung des Blitzlichtes steht eine Kamera, deren Objektstand gerade dem Abstand zum Lichtband entspricht. Der Flüssigkeit (≈ 30 l) wurden Aluminiumpartikel der mittleren Größe $\approx 10 \mu$ beigegeben. Das Stroboskopsandte eine endliche Anzahl (5-10) von Blitzen mit festen Zeitintervallen. Das an den Partikeln reflektierte Licht zeichnete auf dem ruhenden Film eine diskontinuierliche Spur auf. Aus dem bekannten Vergrößerungsmaßstab (etwa 3:1 bis 7:1) des Kamerasystems und der Stroboskopfrequenz können die Geschwindigkeitskomponenten der Partikel bestimmt werden, siehe Abb.3.

Es wurde theoretisch und experimentell untersucht, inwieweit der Schlupf dieser Aluminium-Partikel im strömenden Medium systematische Fehler verursachen kann, siehe Anhang. Die Ergebnisse zeigten, daß der Schlupf äußerst gering ist. Der Grund, warum gerade Äthylalkohol mit einer relativ hohen Prandtl-Zahl, $Pr \approx 14$, verwendet wurde, liegt darin, daß im Gegensatz zu Wasser keine Entgasung nötig und die Benetzung der Alupartikel besser ist. Das Temperaturfeld der Grenzschicht wurde mit Hilfe eines 0.25 mm Cr-Alumel-Thermoelements gemessen, dessen Position durch eine Mikrometerschraube eingestellt wurde. Durch eine Widerstandsmessung zwischen der Wand und dem Thermoelement wurde die wandnächste Position ermittelt. Der minimale Abstand betrug ≈ 0.2 mm. Durch Extrapolation des in diesem Bereich linearen Temperaturverlaufs wurde die Wandtemperatur ermittelt, die auch weiterhin durch lineare Extrapolation aus dem Innern des Kupferbehälters zur Frontfläche ermittelt werden konnte; die Differenzen lagen unter 1%.

Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im laminaren Bereich

Die Gleichungen, welche das Phänomen der Naturkonvektion im stationären und laminaren Fall an einer senkrechten beheizten Fläche beschreiben, sind:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad (1) \text{ Kontinuitätsgleichung}$$

$$\rho \left(u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} \right) = \beta g \rho \Delta T + \mu \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \quad (2) \text{ Impulsgleichung}$$

$$u \frac{\delta T}{\delta x} + v \frac{\delta T}{\delta y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} \quad (3) \text{ Energiegleichung}$$

Eine Dichteänderung, $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta T}$, geht in diese Gleichungen ausschließlich in den Auftriebsterm ein, die Flüssigkeit wird ansonsten als inkompressibel angenommen.

Die Randbedingungen lauten:

$$y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v = 0 \\ T = T_w \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array}$$

$$y \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ T = T_\infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6) \\ (7) \end{array}$$

Mit Pohlhausens Ähnlichkeitstransformation /4/ werden diese drei partielle Differentialgleichungen in zwei gewöhnliche umgeformt:

$$\eta = \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{Gr}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (8)$$

$$\phi = 4\nu \cdot \left(\frac{Gr}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot f(\eta) \quad (9)$$

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \quad (10)$$

Dabei stellt ϕ die Stromfunktion dar:

$$u = \frac{\delta \phi}{\delta y} = 2 \cdot \sqrt{g \beta \Delta T x} \cdot \frac{df}{d\eta} \quad (11)$$

$$v = -\frac{\delta \phi}{\delta x} = \frac{\nu \left(\frac{Gr}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}{x} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - 3f\right) \quad (12)$$

Mit $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ (Prandtl-Zahl) (13) lauten die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + 3f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2 \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 + \theta = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + 3 Pr f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (15)$$

mit den Randbedingungen:

$$\theta(0) = 1 \quad (16)$$

$$\theta(\infty) = 0 \quad (17)$$

$$f'(0) = 0 \quad (18)$$

$$f(0) = 0 \quad (19)$$

$$f(\infty) = 0 \quad (20)$$

Abb.4 zeigt das Ergebnis von Rechnungen /16/ und Experimenten für verschiedene Prandtl-Zahlen als Parameter. Bei den Temperaturen $\theta(\eta)$ ist die Steigung $(\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0}$ von der Prandtl-Zahl abhängig.

Für den Wärmeübergang direkt an der Wand ($u=v=0$) gilt das Gesetz der Wärmeleitung $q = \lambda (\frac{\delta T}{\delta y})_{y=0}$. Mit dem Newton'schen Ansatz $q = a(T_w - T_\infty)$ und den Transformationen von Pohlhausen folgt

$$\lambda (\frac{\delta T}{\delta y})_{y=0} = a (T_w - T_\infty) \quad (21)$$

$$(\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0} = Nu_x \frac{1}{(\frac{Gr}{4})^{\frac{1}{4}}} \quad (22)$$

wobei $Nu_x = \frac{ax}{\lambda}$ die lokale Nusseltzahl darstellt, basierend auf den senkrechten Abstand x vom Beginn der Platte. Für den Bereich $Gr < 10^9$ zeigen die Experimente, daß $(\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0}$ unabhängig von Gr ist, d.h. $(\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0} = c = const$

$$Nu_x = c (\frac{Gr}{4})^{\frac{1}{4}} \quad (23)$$

wobei c nur von der Prandtlzahl abhängt. Abb.5 zeigt den Verlauf der Funktion $Nu_x = f(Gr_x)$ für sämtliche gemessenen Temperaturverteilungen. Ebenfalls mit eingezeichnet ist die Gerade $Nu_x = (\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0} \cdot (\frac{Gr}{4})^{\frac{1}{4}}$, wobei $(\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0} = 1,27$ (siehe Abb.4) genommen wurde; dieser Wert liegt 3% unter den von POTTER und THRONE /16/ sowie von OSTRACH /7/ berechneten Werten ($\theta'(0)=1,31$). Wie die Temperaturverteilung, zeigt auch die Geschwindigkeitsverteilung eine starke Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl.

Als Ordinate aufgetragen ist $\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{2\sqrt{g\beta\Delta T x}}$, wobei $\sqrt{g\beta\Delta T x}$ ein Maß ist für die Auftriebsgeschwindigkeit eines Fluidpartikels nach dem Durchlaufen der Höhe x ohne Wechselwirkung mit anderen Fluidpartikeln. Mit wachsender Prandtlzahl $\frac{v}{a}$ bleibt die wahre Geschwindigkeit hinter dieser Auftriebsgeschwindigkeit zurück.

Geschwindigkeits- und Temperaturmessungen im turbulenten Bereich

Wie Abb.5 zeigt, treten oberhalb $Gr \approx 10^9$ deutliche Abweichungen vom laminaren Verlauf der Wärmeübergangszahl auf. Dieser Bereich $Gr > 10^9$ war Gegenstand weiterer Untersuchungen. Kutateladze /12/ vermutete im turbulenten Bereich eine quasistationäre Wandschicht in der turbulenten Grenzschicht. Die Dicke der Schicht und die maximale Geschwindigkeit derselben sollen der Bedingung

$$Re_i \sqrt{Pr} = \frac{u_{max} \cdot \delta_{max}}{(v \cdot a)^{1/2}} = const \quad (25)$$

gehörchen. Abb.6 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Als Funktion der Grashof-Zahl sind die Werte $Re_i \sqrt{Pr}$ der vorliegenden Messungen sowie diejenigen anderer Autoren aufgetragen.

Die Quasistationarität der Wandschicht stellt sich bei $Gr \approx 10^9$ ein. Die Stoffgrößen in der Prandtlzahl (v, a) wurden bei den mittleren Temperaturen $\frac{T_w + T_\infty}{2}$ genommen.

Abb.7 zeigt eine Geschwindigkeitsverteilung $\bar{u}(y)$, gemittelt über viele Teilchenspuren und die aus den individuellen Teilchenspuren

$$u_i(y) = \bar{u}(y) + u'_i(y) \quad (26)$$

ermittelten statistischen Schwankungsgrößen

$$\sqrt{\overline{u'^2}}$$

Im Gegensatz zur erzwungenen Konvektion längs einer ebenen Platte, bei welcher eine laminare Unterschicht mit linearem Geschwindigkeitsprofil existiert, $u^+ = y^+$, gilt bei freier Konvektion kein linearer Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Wandabstand: In Wandnähe ist die turbulente Schubspannung $\tau = -\rho \cdot \overline{u'v'}$ gegen die molekulare $\tau = \mu \frac{\delta u}{\delta y}$ zu vernachlässigen, daher gilt dort für die Bewegungsgleichung (auch die Trägheitsterme vernachlässigbar):

$$v \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = - \beta g \Delta T \quad (27)$$

mit der Randbedingung

$$u(0, x) = 0 \quad (28)$$

$$\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\mu} \quad (29)$$

Lösung

$$u = - \iint \frac{\beta g \Delta T}{\nu} d^2 y + \frac{\tau_w}{\mu} y \quad (30)$$

Anstelle des Begriffs "laminare Unterschicht" kann hier nur von einer viskosen Unterschicht gesprochen werden, innerhalb welcher die mittleren Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile durch turbulente Felder nicht beeinflusst werden können.

Wie Yang und Nee /15/ mit Hilfe einer Transportgleichung für turbulente Diffusion, Konvektion, Generation und Zerfall nachweisen konnten, treten sowohl bei der Geschwindigkeit als auch der Temperatur die ersten Auswirkungen der turbulenten Schubspannungen erst in einem Term der Ordnung $O(y^4)$ auf.

In dieser viskosen Unterschicht mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung gilt nach Yang und Nee ein lineares Temperaturprofil:

$$T(y) = T_w + \left(\frac{\delta T}{\delta y}\right)_0 y \quad (31)$$

Abb.8 zeigt die normierten Temperaturverteilungen für mehrere Grashof-Zahlen. Auch hier wiederum zeigen sich deutliche Abweichungen von den laminaren oberhalb $Gr \approx 10^9$. Um diesen Sachverhalt noch etwas genauer zu untersuchen, wurde mit Hilfe einer optischen Methode die Abhängigkeit der thermischen Grenzschicht von der Grashof-Zahl gemessen, Abb.9. Ein Laserstrahl durchdringt horizontal etwa parallel zur Platte das strömende Medium. In Abhängigkeit vom Abstand y von der Platte wird die Auslenkung D infolge Refraktion in der thermischen Grenzschicht gemessen. Bei unbeheizter Platte gilt $D(y)=y$. Bei beheizter Platte treten durch Lichtbrechung in den Schichten variabler Temperaturen Abweichungen von dieser Kurve auf. Die Größen δ_{Th} ($D = \frac{1}{2} D_{max}$) sind ebenfalls in Abb.9 mit eingezeichnet. Sie sind ein Maß für die thermische Grenzschichtdicke und zeigen bis $Gr \approx 10^9$ einen Verlauf, der sich sehr gut durch

$\delta_{Th} \sim \sqrt{x}$ darstellen läßt, oberhalb $Gr \approx 10^9$ treten deutliche Abweichungen auf. Diese Meßmethode soll weiterhin verfolgt werden, um Temperaturgradienten in einem strömenden Medium zu bestimmen.

Weitere Untersuchungen galten der Bestimmung der Schwankungsgrößen sowohl bei Geschwindigkeiten als auch Temperatur. Die Größe $\sqrt{u'^2}$, Abb.7, zeigt im Bereich der viskosen Unterschicht ein Anwachsen vom Wert 0 bis zu einem maximalen Wert, welcher in diesem Fall etwa 30% der mittleren Maximalgeschwindigkeit entspricht. Mit größerem Abstand von der Wand nimmt $\sqrt{u'^2}$ allmählich ab. Die Geschwindigkeitskomponente v senkrecht zur vertikalen Platte wurde ebenfalls bei den einzelnen Teilchenspuren ausgewertet. Abb.10 zeigt für $Gr = 2,3 \cdot 10^9$ sämtliche ermittelten Werte \bar{u} , \bar{v} , $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{v'^2}$. Die Größen \bar{v} und $\sqrt{v'^2}$ sind mit größeren systematischen Fehlern behaftet als \bar{u} und $\sqrt{u'^2}$, da die Beträge dieser Komponenten sehr gering sind, siehe Abb.3. Einer Teilchenspur war bisher nicht die Richtung anzusehen. Für alle Teilchen galt zwar $u_i = \bar{u} + u'_i > 0$, über die y -Komponente konnten jedoch keine eindeutigen Aussagen gemacht werden. Zur Auswertung dieser Komponenten für die einzelnen Spuren wurden plausible Annahmen gemacht, die durch stroboskopisches Betrachten der Strömung während längerer Zeit gewonnen wurden. Die Größe $v(y \rightarrow \infty)$ läßt sich aus der Kontinuitätsgleichung abschätzen:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad (1)$$

Nach der Höhe x beträgt die Maximalgeschwindigkeit

$$u_{\max} = c \cdot \sqrt{\beta g \Delta T x} \quad , \quad (32) \quad c = \text{konstant (siehe Abb.4)}$$

Mit

$$\frac{\delta u}{\delta x} \approx \frac{\delta u_{\max}}{\delta x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{\max}}{x} \quad (33)$$

folgt

$$\frac{\delta v}{\delta y} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{\max}}{x} \quad (34)$$

$$\rightarrow v(y_{\text{asympt.}}) = - \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{\max}}{x} \cdot \delta_{\text{asympt}} \quad (35)$$

Im speziellen Fall hier ($u_{\max} = 5,2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, $x = 22 \text{ cm}$, $\delta_{\text{asympt}} = 1,7 \text{ cm}$) ist $v(y_{\text{asympt}}) = v_{\infty} \approx -0,19 \text{ cm/sec}$, aus den Teilchenspuren ergab sich $v_{\infty} \approx -0,21 \text{ cm/sec}$.

Bei zukünftigen Messungen werden während der stroboskopischen Blitzfolge durch Variation der Blitzintensität diese obengenannten Mängel aufgehoben, die Flugrichtung ist dann eindeutig festgelegt. Es können dann genaue Aussagen über die turbulente Schubspannung $\tau = -\rho \cdot \overline{u'v'}$ gemacht werden. Aus den bisherigen Messungen (siehe Abb.10) kann gefolgert werden, daß $\overline{u'v'}$ sein Maximum nicht in Wandnähe, d.h. bei etwa $y \approx \delta_{\max}$, sondern in wandfernen Bereichen annimmt, was mit der Theorie von Yang und Nee übereinstimmt.

Als vorläufig letzten Punkt dieser Meßreihe wurde das Wachsen natürlicher (d.h. nicht von außen angeregten) Instabilitäten im Übergangsbereich laminar-turbulent gemessen, und zwar mit Hilfe zweier Methoden: 1. Es werden die Schwankungsgrößen T' eines Thermoelements aufgenommen und 2. mit Hilfe eines Schlierenverfahrens werden diese Instabilitäten sichtbar gemacht. Im ersten Fall mißt man sowohl die Störungsamplitude als auch die Störfrequenz, im zweiten Fall ihre Wellenlänge. Eine genaue Fourieranalyse war zur Zeit noch nicht möglich; die Ergebnisse, Abb.11, zeigen jedoch ein sehr enges Frequenzband mit einer mittleren Frequenz $\bar{\nu} = 2,5 \text{ Hz}$ und einer mittleren Wellenlänge $\bar{\lambda} = 1,9 \text{ cm}$. Die Phasengeschwindigkeit $c = \bar{\lambda} \cdot \bar{\nu} = 4,75 \text{ cm/sec}$ entspricht etwa der mittleren maximalen Transportgeschwindigkeit $u_{\max} = 4,5 \text{ cm/sec}$. Wie Gebhart /17/ zeigte, läßt sich dieser Sachverhalt durch Störungsrechnungen deuten. Der laminaren Grundströmung wird eine kleine Störung der Frequenz ν überlagert und danach gefragt, ob der Grundströmung Energie zugunsten der Störung entzogen wird oder umgekehrt. Die resultierenden Störungsdifferentialgleichungen (ORR-SOMMERFELD) sind infolge der Kopplung Temperatur-Geschwindigkeit über den Auftriebsterm wesentlich komplizierter als die bei erzwungener Strömung. Ein Ergebnis ist, daß für die wichtigsten Störungen, d.h. jene mit der größten instabilen Anfachung, die Phasengeschwindigkeit $c = \lambda \cdot \nu$ gleich der Transportgeschwindigkeit ist. Zu diesen Störungen zählen gerade die natürlich

erzeugten Instabilitäten, für welche die Bedingung $c = u_{\max}$ nachgewiesen wurden.

Als nächste Meßreihe ist vorgesehen, den Übergangsbereich laminar-turbulent durch von außen aufgeprägte Instabilitäten bestimmter Frequenzen zu studieren.

A N H A N G

Bestimmung des Schlupfes der Alu-Teilchen im strömenden Medium

Der Dichteunterschied zwischen strömendem Medium ($\rho_{\text{fluid}} \approx 0,8 \text{ gr cm}^{-3}$) und den Aluminiumpartikeln ($\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ gr cm}^{-3}$) ist beträchtlich. Eine genaue Untersuchung des Verhaltens dieser Partikel in Strömungen mußte daher erfolgen.

Die Konzentration der Partikel war so gering, daß eine Wechselwirkung untereinander ausgeschlossen werden konnte. In der Folge macht man daher keinen Fehler, nur ein einziges Partikel in der Strömung zu betrachten. Die mittlere Größe der Aluminiumteilchen wurden zu etwa $d \approx 10 \mu$ bestimmt. Unter der Annahme, daß die Teilchen idealisiert als kugelförmig anzusehen sind, errechnet man für die im strömenden Medium auftretenden Geschwindigkeiten von etwa 5 cm/sec eine Reynoldszahl

$$\text{Re} < 1$$

Der Strömungswiderstand des Partikels in der umgebenden Flüssigkeit wird als vollständig viskoser Natur angenommen. Dafür gilt das Gesetz von Stokes für die Reibungskraft $K_{\text{St}} = 6\pi\eta r v$ wobei v die Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und strömendem Medium in der Umgebung bedeutet.

Die Bewegungsgleichung des Tracer-Teilchens lautet /18/:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p \frac{du_p}{dt} &= 6\pi\eta r (u_f - u_p) - \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_p - \rho_f) g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_f \frac{du_f}{dt} \\ &+ \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_f \left(\frac{du_f}{dt} - \frac{du_p}{dt} \right) + 6r^2 \sqrt{\pi \rho_f \eta} \int_{t_0}^t \frac{\left(\frac{du_f}{dt'} - \frac{du_p}{dt'} \right)}{\sqrt{t - t'}} dt' \end{aligned}$$

r = Partikelradius

ρ_p = Partikeldichte

u_p = Partikelgeschwindigkeit

g = Erdbeschleunigung

ρ_f = Fluiddichte

u_f = Fluidgeschwindigkeit
in der Umgebung des
Partikels

Folgende Bedeutung haben die einzelnen Terme:

Der linke Term stellt die am Partikel angreifende Kraft dar. Sie setzt sich aus mehreren Teilkomponenten zusammen:

$6\pi\eta r(u_f - u_p)$ ist die Stokes'sche viskose Reibungskraft,

$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_p - \rho_f)g$ ist der Auftriebsterm, die Kraft
 $-\pi r^3 \rho_f \frac{du_f}{dt}$ wirkt infolge des Druckgradienten bei Änderung der Fluidgeschwindigkeit

auf das Teilchen; der vierte Term auf der rechten Seite ist der Strömungswiderstand auf eine beschleunigende Kugel; der letzte Term endlich ("Basset"-Term) ist die Widerstandskraft auf das Teilchen infolge instationärer Beschleunigungen.

Mit

$$a = \frac{9\eta}{(2\rho_p + \rho_f)r^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}; \quad b = \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f} \approx 0,39; \quad c = \frac{9}{(2\rho_p + \rho_f)r} \sqrt{\frac{\rho_f \eta}{\pi}} \approx 73 \text{ sec}^{-1/2}$$

und

$$d = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} \approx 0,7$$

lautet die Gleichung

$$\frac{du_p}{dt} + au_p = au_f + b \frac{du_f}{dt} + c \int_{t_0}^t \frac{\left(\frac{du_f}{dt'} - \frac{du_p}{dt'} \right)}{\sqrt{t-t'}} dt' - d \cdot g$$

Der letzte homogene Term beschreibt den Auftrieb; die Auftriebsgeschwindigkeit überlagert sich sämtlichen anderen Geschwindigkeiten. Die asymptotische Sinkgeschwindigkeit $u_{\text{sink}} = \frac{d \cdot g}{a} \approx 0,04 \text{ cm/sec}$ kann man als unterste Grenze der

Meßgenauigkeit für die stroboskopische Geschwindigkeitsmessung festsetzen. In der Folge wird dieser homogene Term nicht mehr berücksichtigt werden. Tchen /18/ gab einen Weg zur Lösung obiger Gleichung an: Seine Annahme ist, daß ein stationärer Fall vorliegt, d.h. Anlaufphasen in der Strömung werden nicht berücksichtigt. Die bekannte Fluidgeschwindigkeit wird als Fourierintegral dargestellt:

$$u_f = \int_0^{\infty} [\alpha(\omega) \cos \omega t + \beta(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

Für die Partikelgeschwindigkeit wird der entsprechende Ansatz mit anderen Amplituden gemacht:

$$u_p = \int_0^{\infty} [\gamma(\omega) \cos \omega t + \delta(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

Nach dem Einsetzen in die obige Gleichung ergeben sich für die unbekanntenen Amplitudenwerte γ und δ :

$$\gamma(\omega) = (1 + f_1(\omega)) \cdot \alpha(\omega) + f_2(\omega) \cdot \beta(\omega)$$

$$\delta(\omega) = -f_2(\omega) \cdot \alpha(\omega) + (1 + f_1(\omega)) \cdot \beta(\omega)$$

mit

$$f_1(\omega) = \frac{\omega(\omega + c\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}})(b-1)}{(a + c\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}})^2 + (\omega + c\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}})^2}$$

$$f_2(\omega) = \frac{\omega(a + c\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}})(b-1)}{(a + c\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}})^2 + (\omega + c\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}})^2}$$

Es seien $E_f(v)dv$ und $E_p(v)dv$ die spektralen Energieverteilungen für die Fluidgeschwindigkeit und Partikelgeschwindigkeit

$$\overline{v_f^2} = \int_0^{\infty} E_f(v) dv = \pi^2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{T} dv$$

$$\overline{v_p^2} = \int_0^{\infty} E_p(v) dv = \pi^2 \int_0^{\infty} \frac{\gamma^2 + \delta^2}{T} dv$$

wobei $\overline{v_f^2}$ und $\overline{v_p^2}$ über einen genügend langen Zeitraum T gemittelt wurden (Stationarität der Strömung!). Aus dem Verhältnis der spektralen Energieverteilungen,

$$\frac{E_p(\nu)}{E_f(\nu)} = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = (1 + f_1(2\pi\nu))^2 + f_2^2(2\pi\nu)$$

kann man für den vorliegenden Fall folgern, daß bis zu Frequenzen von etwa 1 kHz das Alupartikel der Strömungsgeschwindigkeit genau folgt.

Experimentell nachgeprüft wurde das Verhalten der Partikel bei konstanter Fluidgeschwindigkeit und Beschleunigung, in beiden Fällen sowohl die Anlaufphase als auch die stationäre Strömung. Der Behälter mit der Flüssigkeit senkte sich dabei auf dem Hubtisch mit konstanter Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung ab. Beobachtet mit der stroboskopischen Methode wurde sowohl die Weg-Zeitkurve der Partikel im Fluid als auch eine feste Marke am Behälter. Die Differenz in beiden Fällen lag unter der Meßgenauigkeit von 0,5% und bestätigte die oben gemachten Ausführungen zum Schlupf der Aluminiumteilchen im Fluid.

Referenzen

- /1/ L. LORENZ
Über das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und
Elektrizität
Wiedemann's Annalen der Physik, Bd.13, S.582 (1881)
- /2/ E. GRIFFITHS and A.H. DAVIS
The transmission of heat by radiation and convection
Food Investigation Board, Spec. Rep. No. 9,
Dept. Sci. Ind. Res. London (1931)
- /3/ E. SCHMIDT und W. BECKMANN
Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer
Wärme abgebenden senkrechten Platte
Tech. Mech. Thermodyn., Bd.1 (1930)
- /4/ K. POHLHAUSEN
ZAMM, Bd.1 (1925)
- /5/ E.R.G. ECKERT and T. JACKSON
Analysis of turbulent free convection boundary layers
on a flat plate
NACA TN2207 (1950)
- /6/ R. CHEESEWRIGHT
Turbulent natural convection from a vertical plane
surface
J. Heat Transf., vol.90, Series C, p.1/8 (1968)
- /7/ S. OSTRACH
New aspects of natural convection heat transfer
Tr. ASME 75, p.1287 (1958)

- /8/ C.Y. WARNER and V.S. ARPACI
An experimental investigation of turbulent natural convection in air at low pressures along a vertical heated flat plate
Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.11, No.3, p.397/406 (1968)
- /9/ G.S.H. LOCK and F.J. de B. TROTTER
Observations on the structure of a turbulent free convection boundary layer
Int. Journ. of Heat and Mass Transfer, Vol.11, p.1225/1232 (1968)
- /10/ J. COUTANCEAU
Convection naturelle turbulente sur une plaque vertical isotherme
Int. Journ. of Heat and Mass Transfer 12, 753 (1969)
- /11/ A. PIROVANO, S. VIANNAY et M. JANNOT
Convection naturelle en regime turbulent le long d'une plaque plan verticale
Heat Transfer, Vol.IV (1970)
- /12/ S.S. KUTATELADZE, A.G. KIRDYASHKIN and V.P. IVAKIN
Turbulent Natural Convection on a Vertical Plate and in a Vertical Layer
Int. Journ. of Heat and Mass Transfer, Vol.15, pp.193-202 (1972)
- /13/ T. FUJII and H. IMURA
Natural Convection Heat Transfer from a plate with arbitrary inclination
Int. Journ. of Heat and Mass Transfer, Vol.15, pp.755-767 (1972)
- /14/ V.W. NEE and L.S.G. KOVASZNAVY
Simple phenomenological theory of turbulent shear flows
Phys. of Fluids, Vol.12, N.3 (1969)

- /15/ K. YANG and V.W. NEE
Structure of turbulent free-convection boundary layers
along a vertical plate
Heat Transfer, Vol.IV (1970)
- /16/ W.A. POTTER and J.L. THRONE
Natural convection from a Vertical wall
Simulation, March 1970
- /17/ B. GEBHART
Natural Convection Flow, Instability and Transition
Int. Journ. of Heat and Mass Transfer, Aug. 1969
- /18/ J. O. HINZE
Turbulence
Mc Graw Hill Comp. (1959)

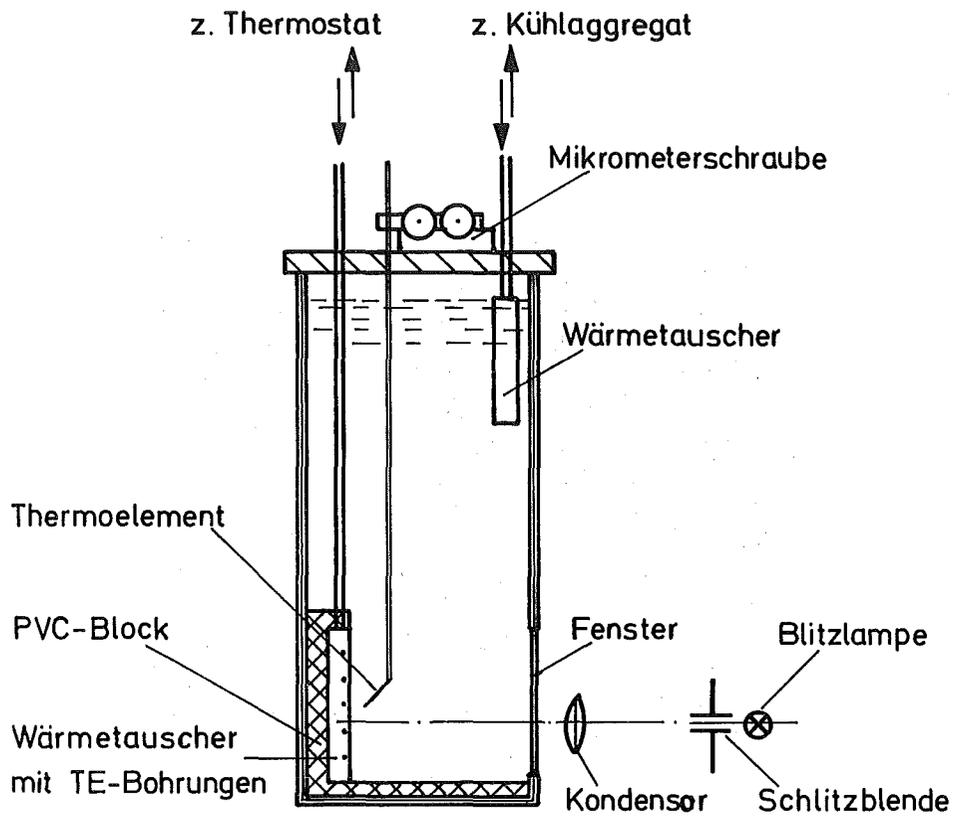


Abb.1 Schematischer Aufbau des Experiments zur Untersuchung von Naturkonvektion bei senkrechter isothermer Wand

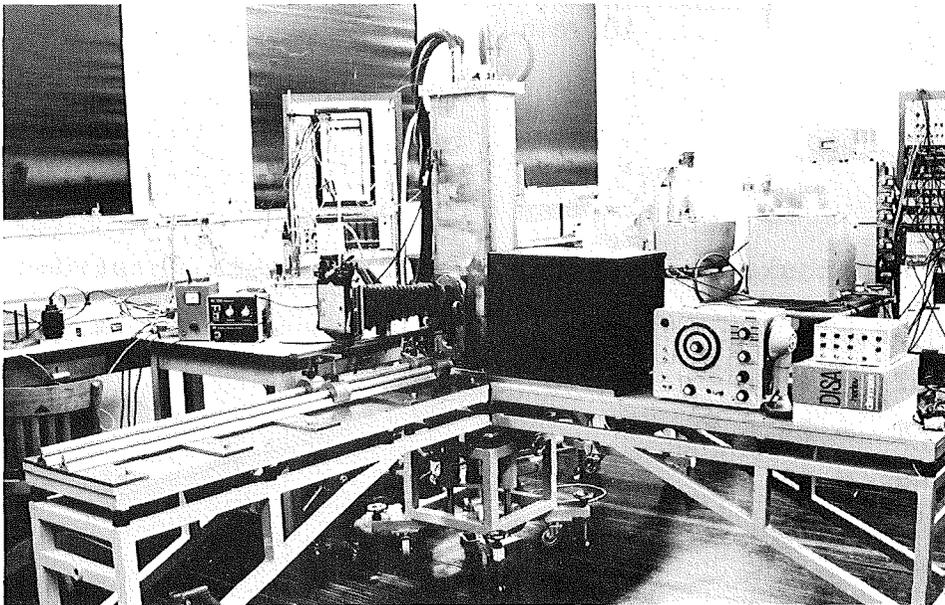


Abb.2 Photographie des Experiments

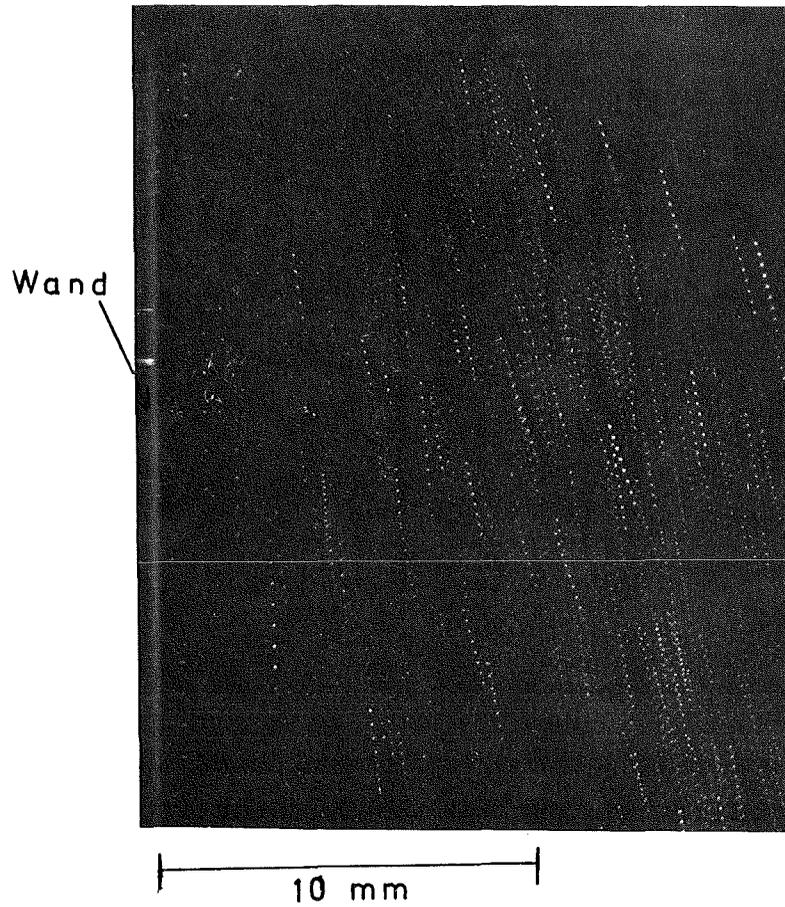


Abb.3 Stroboskopische Aufnahme der Grenzschichtströmung

$$\text{Gr} = 8,6 \times 10^8$$

Frequenz = 30 Hz (8 Lichtblitze)

$$T_w = 47,5^\circ$$

$$T = 25,5^\circ$$

$$x = 18,3$$

Abb. 4 Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung bei laminarer Strömung

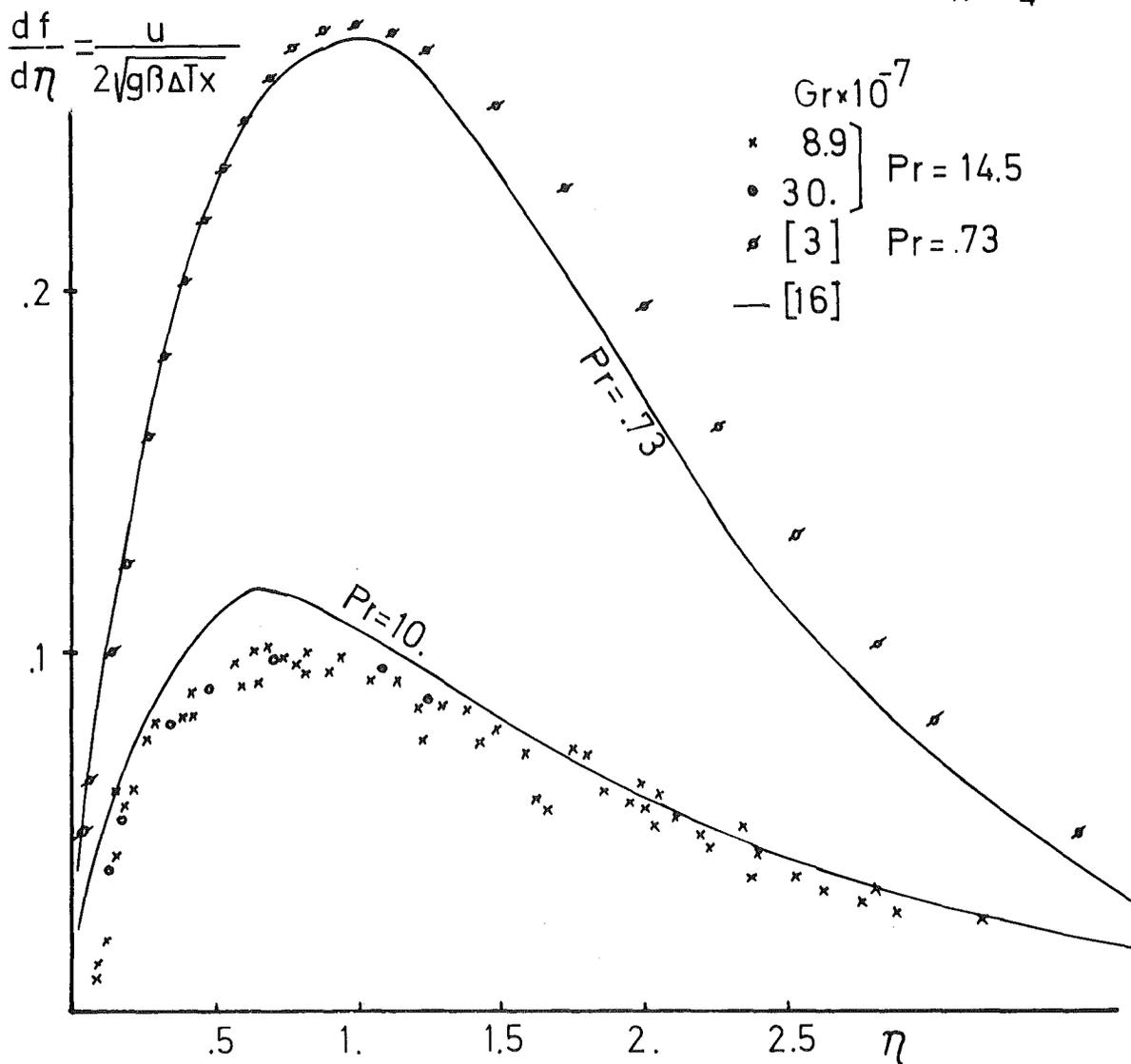
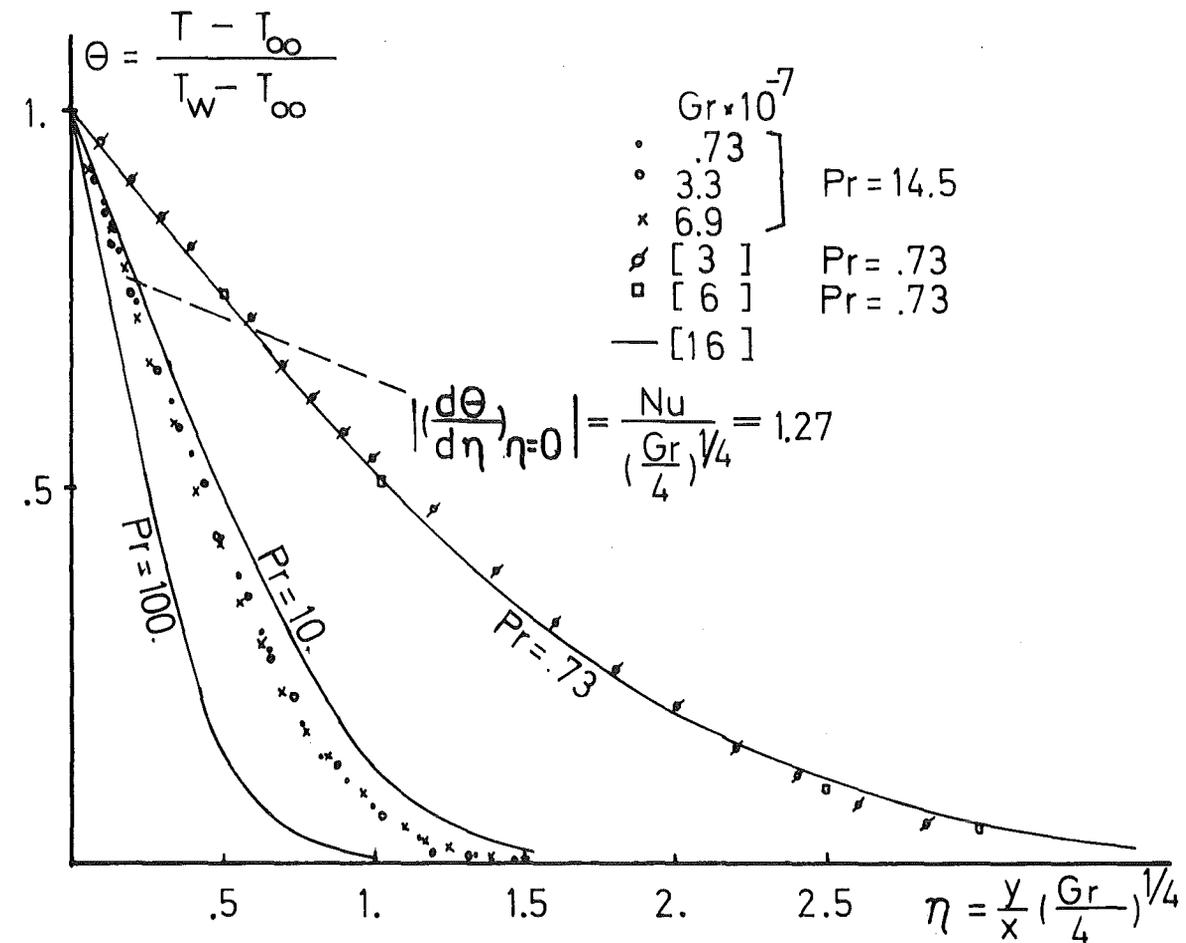


Abb.5 Abhängigkeit der lokalen Nusseltzahl von der Grashofzahl

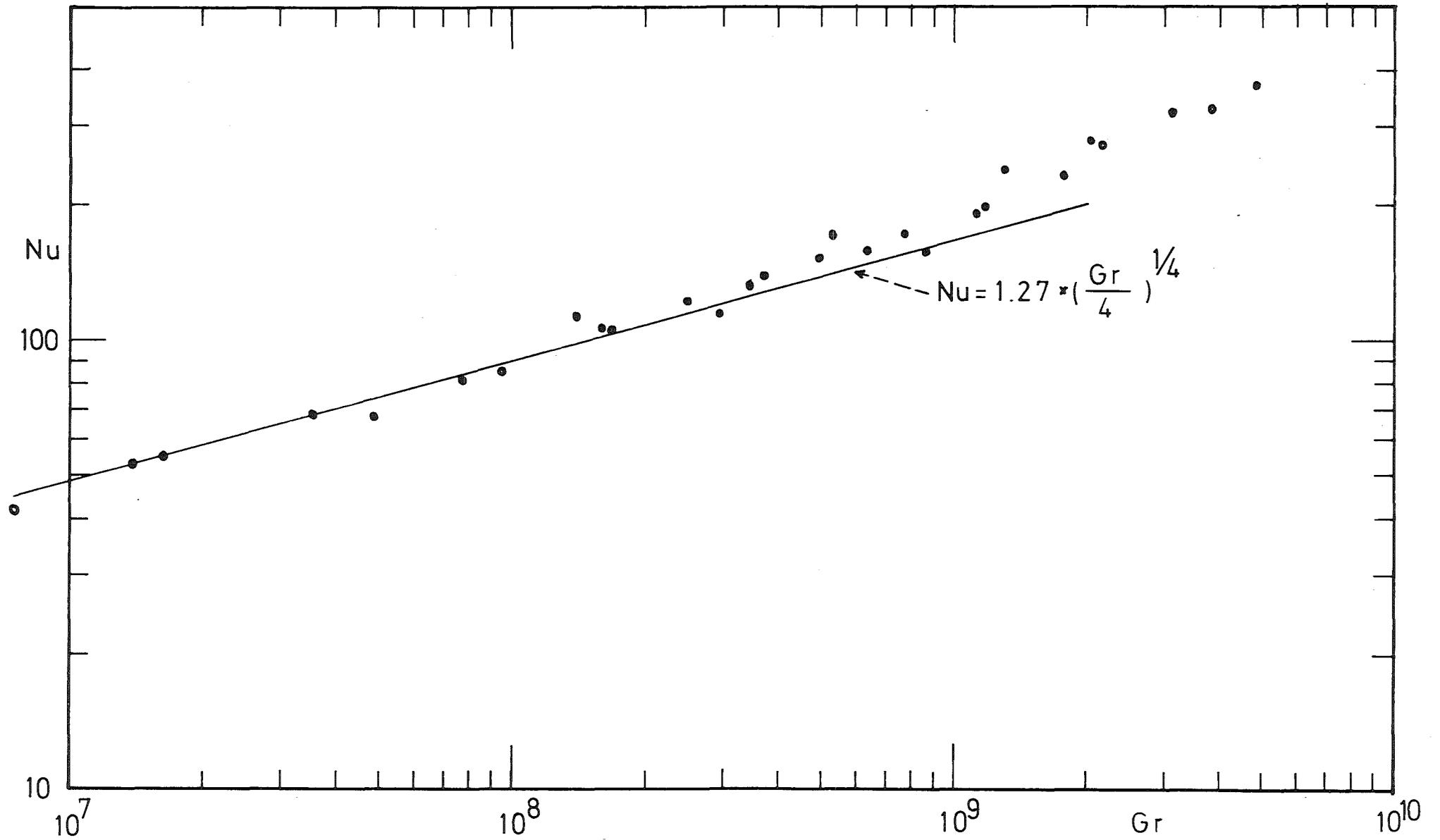
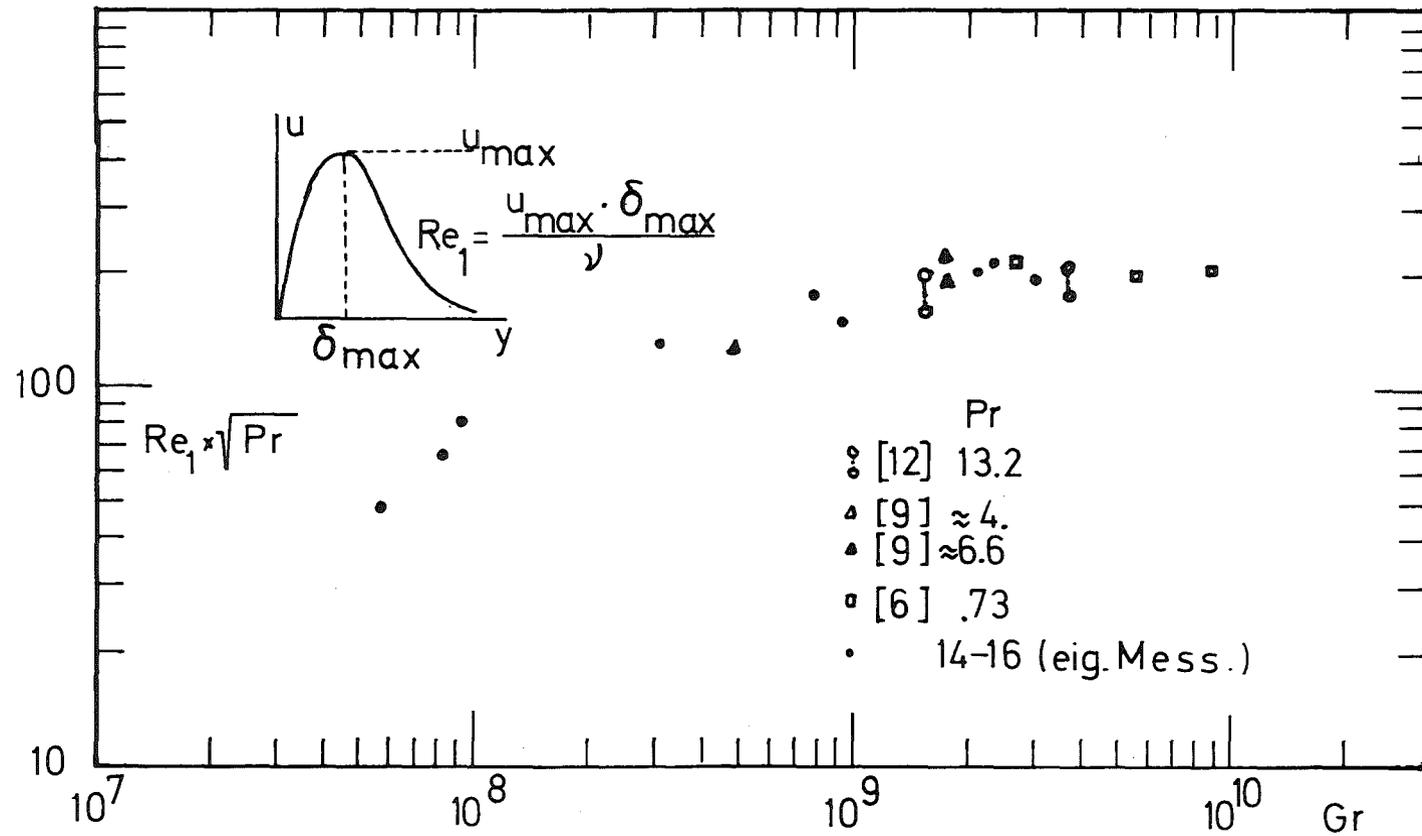


Abb.6 Ausbildung einer Quasistationären Wandschicht bei $Gr > 10^9$



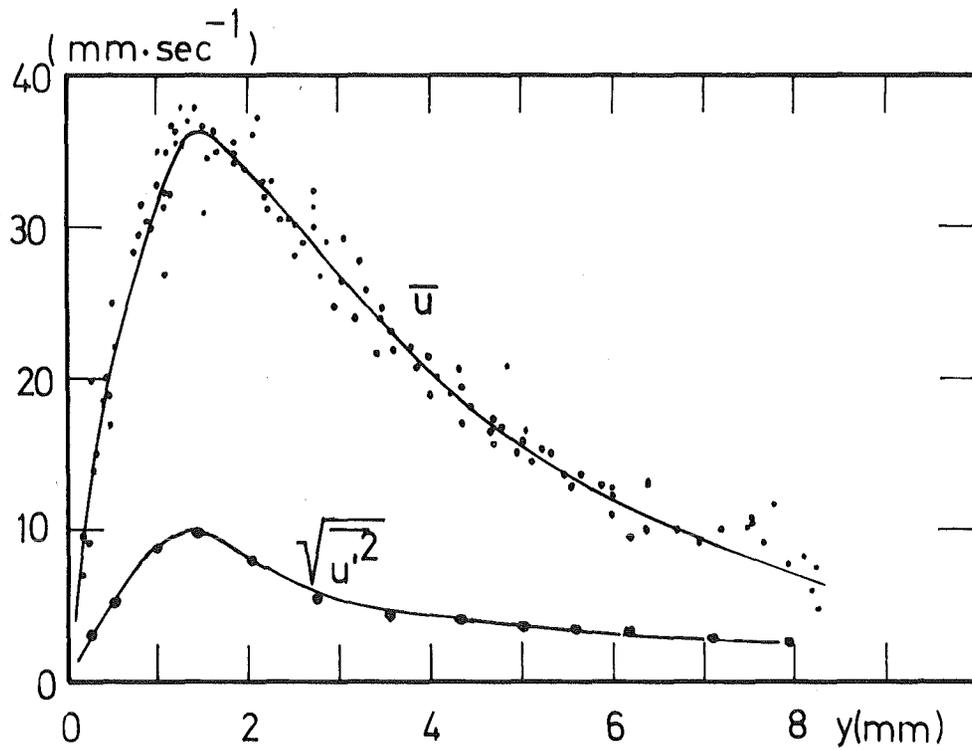


Abb.7 Profile für mittlere Geschwindigkeit und Fluktuationen für die Komponente längs zur Platte

($T_w = 34,2$; $T_\infty = 19,7$; $x = 24$ cm;
 $Ra = Gr \cdot Pr = 1,4 \times 10^{10}$)

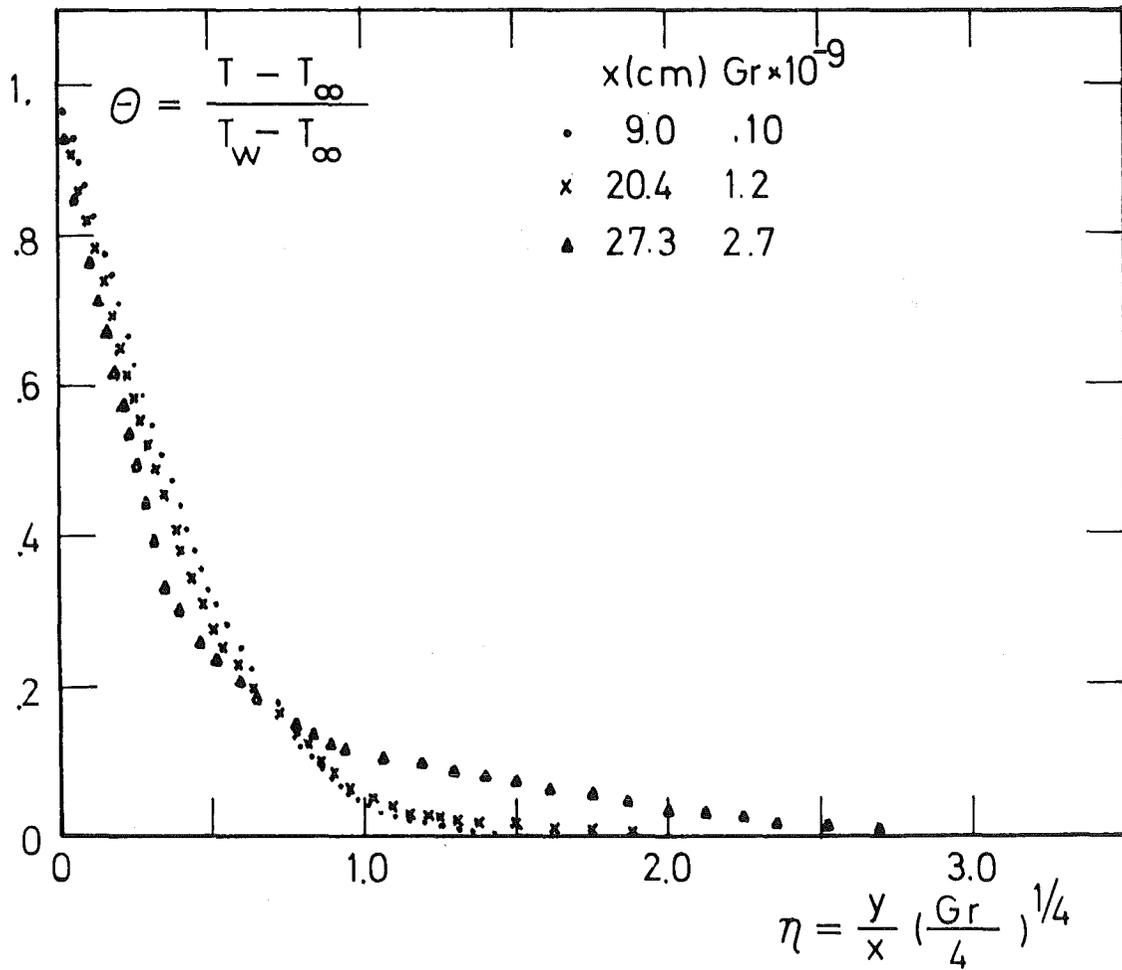


Abb.8 Normierte Temperaturprofile bei mehreren Grashof-Zahlen

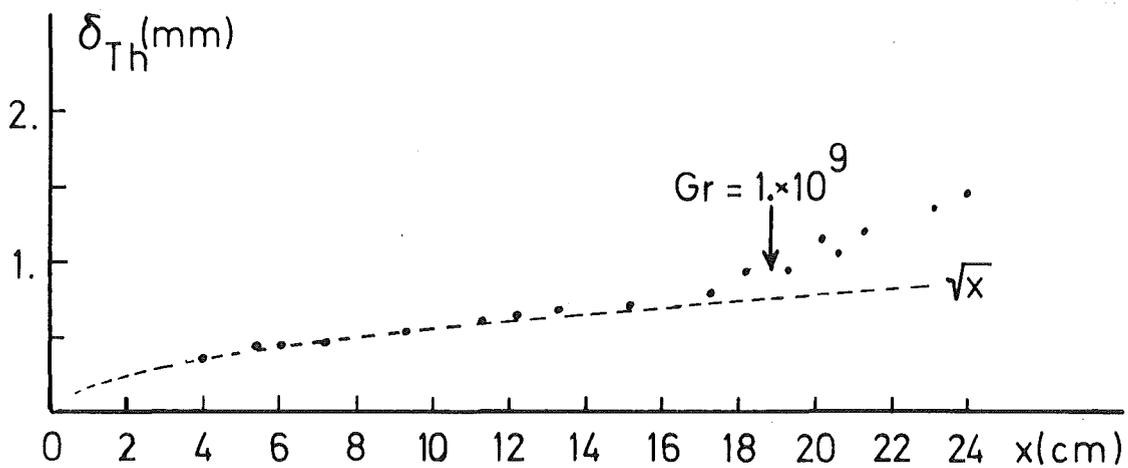
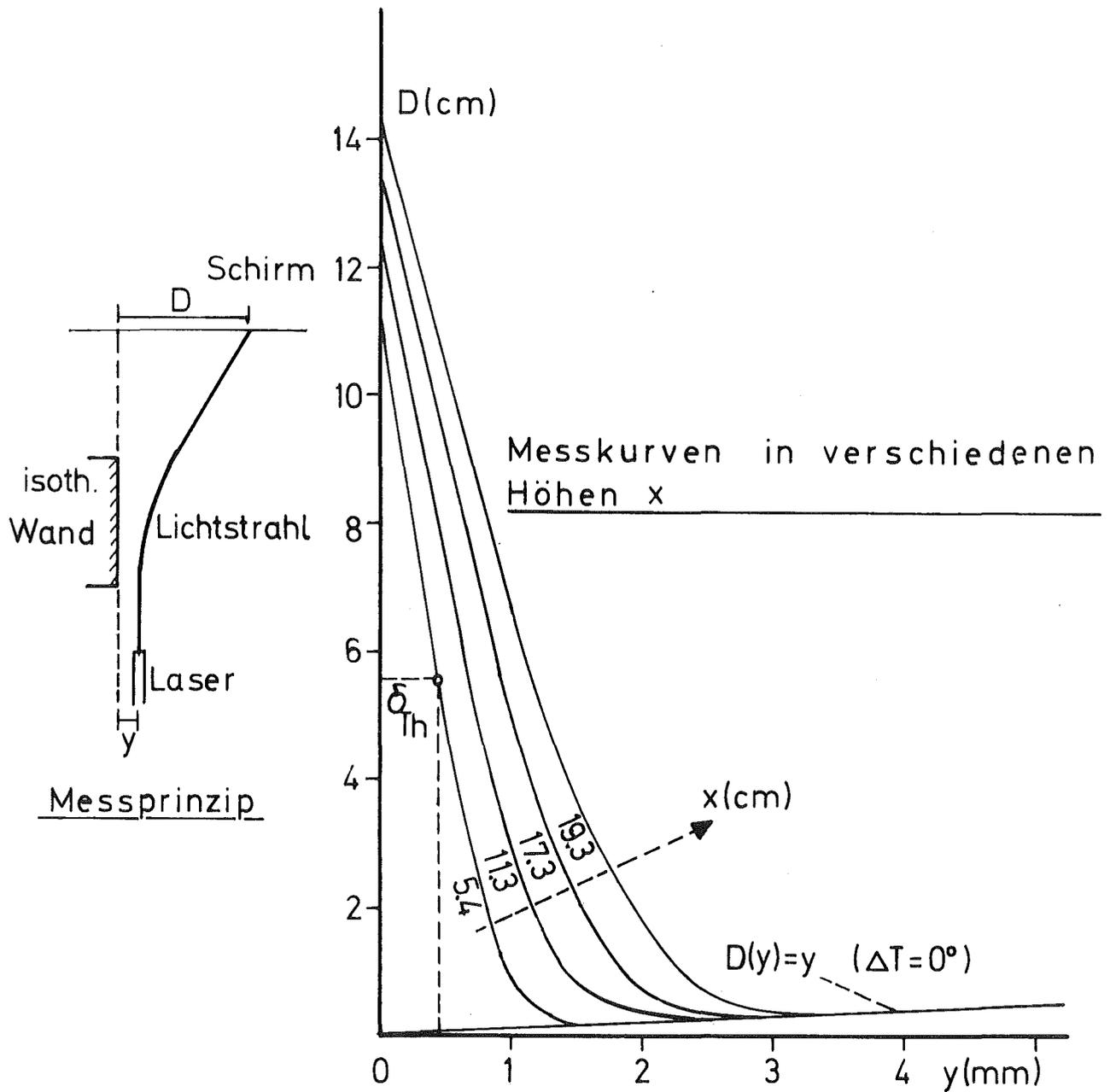


Abb.9 Abhängigkeit der Temperaturgrenzschicht von der Höhe

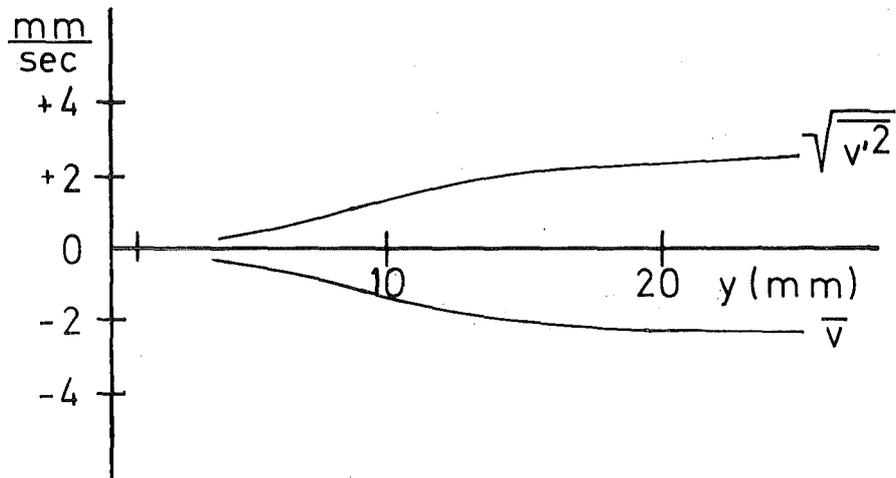
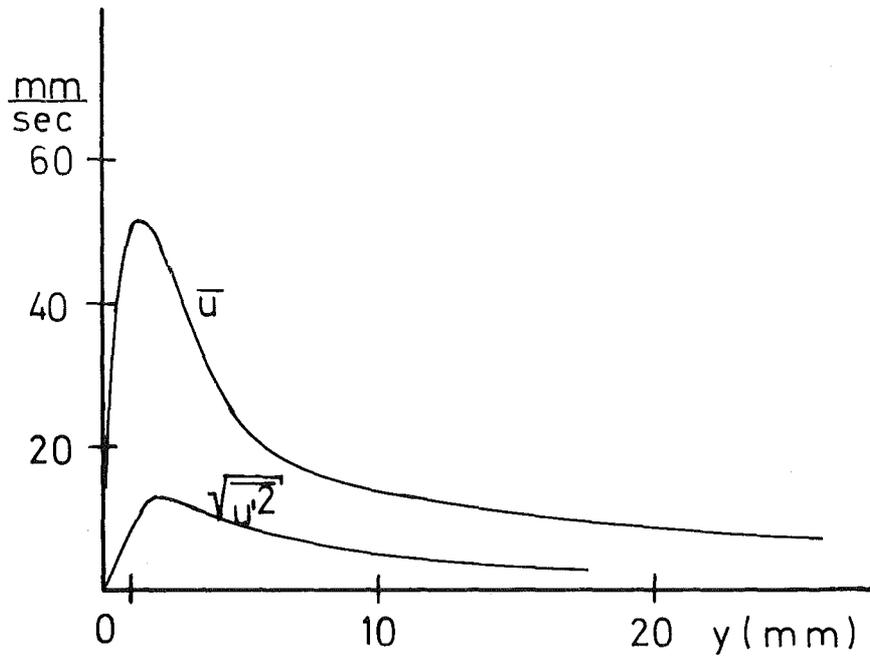
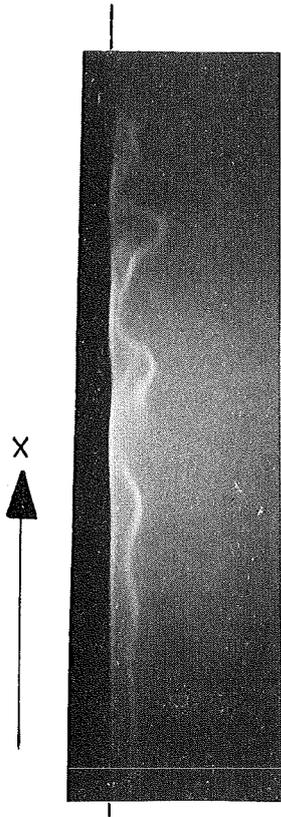
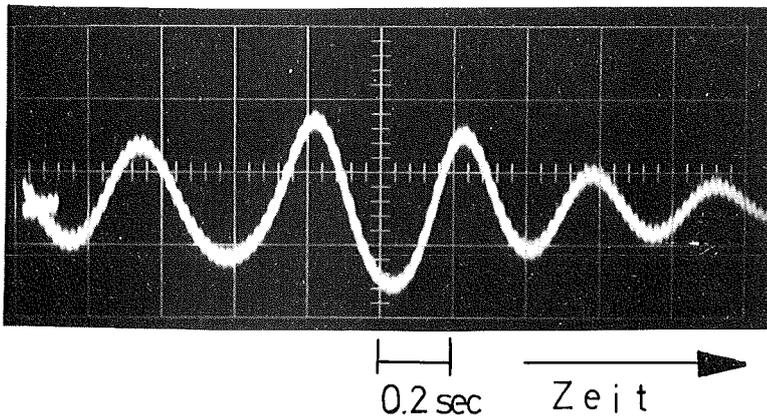
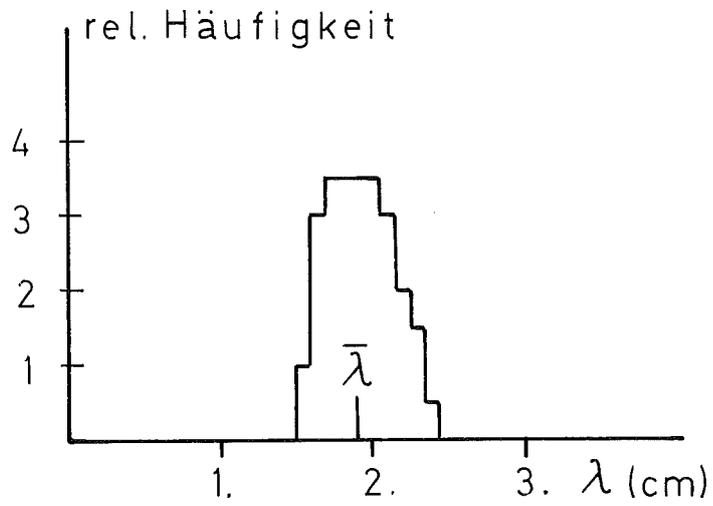


Abb.10 Mittlere Geschwindigkeitsprofile \bar{u} , \bar{v} und deren Schwankungsgrößen $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{v'^2}$ für $\text{Gr} = 2,3 \times 10^9$



Schlieren Aufnahme
längs der Wand



zeitl. Verlauf der Thermospannung

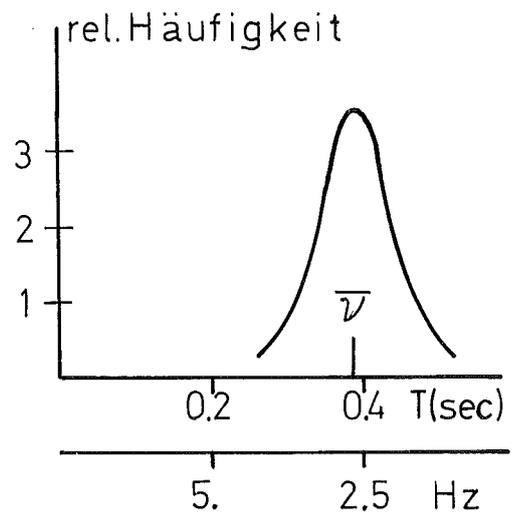


Abb. 11 Das Auftreten natürlicher Instabilitäten einer Grenzschichtströmung