KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

Januar 1976 KFK 2247

Institut für Angewandte Kernphysik

Realistische Coulomb-Potentiale bei Coupled-Channel-Rechnungen für die Streuung von α-Teilchen und ^{16}O-Ionen an deformierten Kernen

H. Rebel

GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2247

Institut für Angewandte Kernphysik

Realistische Coulomb-Potentiale bei Coupled-Channel-Rechnungen für die Streuung von α-Teilchen und ^{16}O-Ionen an deformierten Kernen.

H. Rebel

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

Zusammenfassung:

Der Einfluß der üblichen Approximationen bei der Behandlung eines deformierten Coulomb-Potentials in DWBA- und Coupled-Channel-Analysen wurde an einigen Beispielen untersucht. Der der Berechnung realistischer Coulomb-Potentiale zugrunde liegende Formalismus und die entsprechenden Rechenprogramme wurden zusammengestellt. Die Resultate der Berechnungen der differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Streuung von 50 MeV α-Teilchen an ^{238}U und 55 MeV ^{16}O-Ionen an ^{28}Si zeigen deutlich den Einfluß der Form des Coulomb-Potentials bei Energien, die nur relativ wenig über dem Coulomb-Wall liegen.

Realistic Coulomb potentials for Coupled Channel calculations of α-particle- and ^{16}O-scattering

Abstract:

The customary approximations in treating the Coulomb potentials in DWBA- and Coupled Channel calculations of nuclear scattering from deformed nuclei are studied. The formalism and numerical procedures for computing the potentials and Coulomb excitation form factors from realistic charge distributions of projectile and target nucleus are described. The calculated differential cross sections for the cases $^{238}U(\alpha,\alpha')^{238}U$ and $^{28}Si(^{16}O,{}^{16}O')^{28}Si$ demonstrate the distinct influence of the shape of the Coulomb potential for bombarding energies not far away from the Coulomb barrier.

1. Einleitung

Die Coulombanregung spielt bei der inelastischen Streuung nuklearer Teilchen bei Energien, die nicht allzu hoch über der Coulombbarriere liegen, eine wichtige Rolle. Bei DWBA-oder "Coupled-Channel"-Rechnungen für die inelastische Streuung an deformierten Kernen muß ihr Einfluß durch ein deformiertes Coulomb-Potential

$$V_c(\vec{r}) = Z_t \cdot Z_p \; e^2 \int \frac{\rho_t(\vec{r}_t) \; \rho_p(\vec{r}_p)}{|\vec{r}+\vec{r}_p-\vec{r}_t|} \, d\vec{r}_t d\vec{r}_p$$

berücksichtigt werden.

Es ist üblich - und bei höheren Energien sowie bei kleinen $Z_t \cdot Z_p$-Werten auch berechtigt - hier einige vereinfachende Näherungen einzuführen.[1,2]

a) Das Projektil wird als Punktladung behandelt
b) Der Targetkern wird als homogene deformierte Verteilung mit scharfem Rand vorausgesetzt.

(1.1)
$$\rho_t(\vec{r}_t) = \rho_{ot} \; \theta(R_c(\hat{r}_t) - r_t)$$

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & r > 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

Eine axialsymmetrische (permanente) Deformation wird z.B. durch

$$R_c(\hat{r}_t) = R_{co}(1+\beta_2 \; Y_{20} \; (\hat{r}_t)+\beta_4 \; Y_{40} \; (\hat{r}_t) \; \ldots)$$

parametrisiert und ferner die zentrale Dichte

$$\rho_{ot} \approx \frac{3}{4\pi \; R_{co}^3}$$

gesetzt.

Diese Vereinfachungen sind jedoch nicht unproblematisch in einem Energiebereich, der nur wenig die Coulombbarriere überschreitet, insbesondere im Gebiet, wo die Coulomb- und die nukleare Anregung deutlich und in empfindlicher Weise interferieren. Bei früheren Analysen der Streuung von 40 MeV ^{16}O-Teilchen an ^{28}Si zeigte sich eine große Empfindlichkeit der Resultate von der Wahl des

Coulombpotentials, ebenso bei Testrechnungen[3] für den Fall $^{238}U(\alpha,\alpha')$ mit E_α = 50 MeV. Ferner fanden Kurepin et al.[4] bei der Analyse der Streuung von 12 MeV Protonen an ^{148}Sm und ^{154}Sm eine Abhängigkeit der gewonnenen Deformationsparameter von der Wahl der Ladungsverteilung des Targets, indem sie für die Verteilung ρ_t eine Fermiverteilung einführten und damit das deformierte Coulomb-Potential

$$V_c = Z_p Z_t e^2 \int \rho_t(r_t - R_c)/|\vec{r}-\vec{r}_t| \, d\vec{r}_t \qquad (1.2)$$

erzeugten.

Der vorliegende Bericht steht im Zusammenhang mit etwas detaillierteren Untersuchungen*) des Einflusses der Deformation des Coulombpotentials für die Streuung von ^{16}O- und α-Teilchen an deformierten Kernen. Hierbei wird auch für die Ladungsverteilung des Projektils eine realistische Verteilung angesetzt. Der wesentliche Zweck des Berichtes ist die Darstellung des Verfahrens, das den numerischen Rechnungen zugrunde liegt, sowie die Ergänzung und Dokumentation der entsprechenden Subroutinen, die an den Coupled Channel Code ECIS [5] anschließen und im Grundgerüst z.T. schon 1973 von G.W. Schweimer codiert wurden. Während der Zusammenstellung der Resultate ist durch eine Veröffentlichung [7] bekannt geworden, daß R.S. Mackintosh die inelastische Streuung von α-Teilchen an ^{154}Sm unter ähnlichen Gesichtspunkten untersucht hat.

2. Das Coulomb-Potential zwischen zwei ausgedehnten Ladungsverteilungen

Für die Berechnung des Coulomb-Potentials $V_c(\vec{r})$ zweier Ladungsverteilungen $\rho_1(\vec{r}_1)$ und $\rho_2(\vec{r}_2)$

$$V_c(\vec{r}) = \text{const.} \iint \frac{\rho_1(\vec{r}_1)\cdot\rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}+\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \, d\vec{r}_1 \, d\vec{r}_2$$

---

*) Solche Untersuchungen wurden gemeinsam mit H.V. von Geramb (KFA Jülich) durchgeführt.

nehmen wir an, daß die Verteilung ρ_1 ("Target") im körperfesten System axialsymmetrisch deformiert ist, was durch die Parametrisierung der Winkelabhängigkeit etwa des Radiusparameters

$$c_1(\hat{r}_1) = c_{10} \left[1 + \sum_{\lambda=2,4} \beta_\lambda \, Y_{\lambda o} \, (\hat{r}_1)\right]$$

der Verteilung ausgedrückt wird.* Als Normierung ist

$$\int \rho_i \, (\vec{r}_i) \, d\vec{r}_i = 1$$

angenommen. Die Verteilung ρ_2 ("Projektil") wird als sphärisch vorausgesetzt.

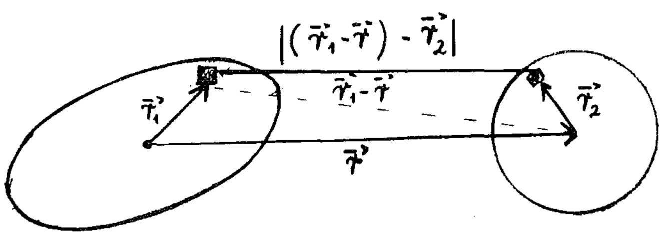

Abb. 1: Definition der Vektoren $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$

Für eine sphärische Fermi-Verteilung

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_o}{1 + \exp\left[\frac{r-c}{a}\right]}$$

läßt sich die Normierung explizit durch den Ausdruck

$$(2.1) \qquad 4\pi \, \rho_o \int_o^\infty \frac{r^2 \, dr}{1 + \exp\left|\frac{r-c}{a}\right|} = \rho_o \left[\frac{4\pi}{3} \, c^3\right] \left[1 + \left(\frac{\pi a}{c}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{c}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^{-4a})^n}{n^3}\right]$$

angeben.

Mit der Legendre-Entwicklung

$$\frac{1}{|(\vec{r}_1 - \vec{r}) - \vec{r}_2|} = \sum_{l=o}^{\infty} \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^\lambda P_\lambda(\cos\theta)$$

$$r_< = \min\,(|\vec{r}_1 - \vec{r}| \; r_2)$$

$$r_> = \max\,(|r_1 - \vec{r}|, r_2)$$

$$\theta = \sphericalangle\,((r_1 - r), r_2)$$

---

*) const $= Z_1 \cdot Z_2 e^2 = 1.43986$ [MeV fm] $Z_1 \cdot Z_2$

wird die Funktion f(x) definiert

$$f(x) = \int d\vec{r}_2 \frac{\rho_2(\vec{r}_2)}{|(\vec{r}_1-\vec{r})-\vec{r}_2|} = 4\pi \int_0^\infty dr_2 r_2^2 \rho_2(r_2) \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^o ,$$

da $\rho_2(\vec{r}_2)$ nicht von $\hat{r}_2$ abhängt.

$$x = |\vec{r} - r_1| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\hat{r r_1})}$$

Diese Funktion gibt (bis auf den Faktor $Z_1Z_2e^2$) das Coulomb-Potential an, das die Verteilung ρ_2 im Abstand x erzeugt. Dieses Potential läßt sich in zwei Teile aufspalten

$$(2.2) \quad f(x) = 4\pi \left\{\frac{1}{x} \int_0^x \rho_2(r_2) r_2^2 \, dr_2 + \int_0^\infty \rho_2(r_2) r_2 \, dr_2\right\}$$

oder

$$(2.3) \quad f(x) = \frac{1}{x} - 4\pi \left\{\int_x^\infty \rho_2(r_2) \, (r_2 - r_2^2/x) dr_2\right\}$$

Im Falle einer Fermi-Verteilung läßt sich das Integral

$$C_2 = \int_0^\infty dr_2 \frac{r_2}{1+\exp\left(\frac{r_2-c_2}{a_2}\right)} = \frac{c_2^2}{2}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi a_2}{c_2}\right)^2 - 2\left(\frac{a_2}{c_2}\right)^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\left[e^{-c_2/a_2}\right]^n}{n^2}\right]$$

explizit angeben und f(x) schreiben

$$(2.4) \quad f(x) = 4\pi \rho_{20}\left\{C_2 + \int_0^x dr_2 \frac{(r_2^2/x - r_2)}{1+\exp\left(\frac{r_2-c_2}{a_2}\right)}\right.$$

Das Normierungsintegral (2.1) legt ferner ρ_{20} fest, so daß

$$4\pi \rho_{20} C_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{c_2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi a_2}{c_2}\right)^2 - \ldots .}{1 + \left(\frac{\pi a_2}{c_2}\right)^2 - \ldots .}$$

Wir vergleichen die Funktion f(x) mit dem Ergebnis für eine homogen geladene Kugel (Referenzkugel) vom Radius R_2

$$(2.5) \qquad h(x) = \begin{cases} 1/x \\ \frac{3}{2}\frac{1}{R_2} - \frac{x^2}{2R_2^3} \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x \geqslant R_2 \\ x < R_2 \end{matrix}$$

Abb. 2 demonstriert die Unterschiede des Potentials einer Fermi-Verteilung (c_2 = 3.0 fm und a_2 = 0.5 fm) und den homogenen Verteilungen mit $R_2 = c_2$ und $R_2 = \sqrt{c_2^2 + 7/3\ \pi^2 a_2^2}$. Abb. 3 zeigt das Potential für eine realistische Ladungsverteilung des α-Teilchens[8] und für die homogenen Kugeln mit $R_2 = c_2(\alpha)$ = 0.964 fm und R_2=1.5 fm.

Es ist zweckmäßig die Abweichungen $\Delta(x)$ und $\delta(x)$ von einer homogenen Verteilung h(x) explizit einzuführen.

$$(2.6) \qquad f(x) = \begin{cases} h(x) + \Delta(x) & \text{für } x > R_2 \\ h(x) + \frac{3}{2}\frac{1}{R_2}\delta(x) & \text{für } x \leqslant R_2 \end{cases}$$

Die Funktionen $\Delta(x)$ und $\delta(x)$ sind monotone und langsam veränderliche Größen, die sich gut interpolieren lassen. Dabei ist es für eine Interpolation aus programmtechnischen Gründen günstig, die Tabelle an äquidistanten der Größe

$$u^2 \qquad \text{für } u^2 \leqslant 1$$

bzw. $$(3-2/u) \qquad \text{für } (3-2/u)>1$$

mit $$u = x/R_2$$

anzulegen.

Wie Abb. 2 und Abb. 3 andeuten, ist es ferner vorteilhaft als Radius der Referenzkugel $R_2 > c_2$ (z.B. den Äquivalentradius) zu wählen,*) um die Korrekturen zu minimalisieren. Die im Anhang angegebenen Tabellen für die Projektile ^{16}O und α-Teilchen sind berechnet mit modifizierten Fermi-Verteilungen der Parameter-Werte

---

*) In einer kürzlich erschienenen Arbeit[13] wird gezeigt, daß auch für allgemeinere sphärische Verteilungen das Potential f(x) durch geeignete Wahl von R_2 durch eine homogene Kugel außerordentlich gut approximiert werden kann.

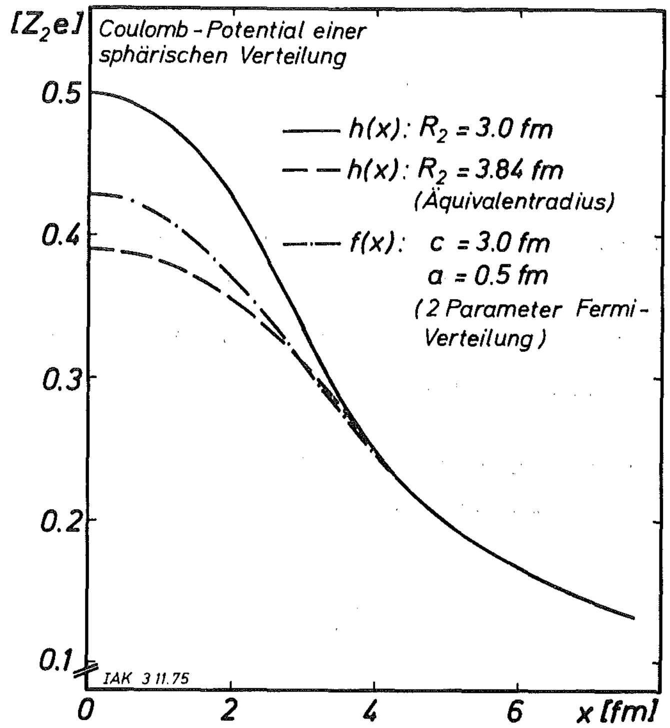

Abb. 2: Coulomb-Potential verschiedener Ladungsverteilungen des Projektils

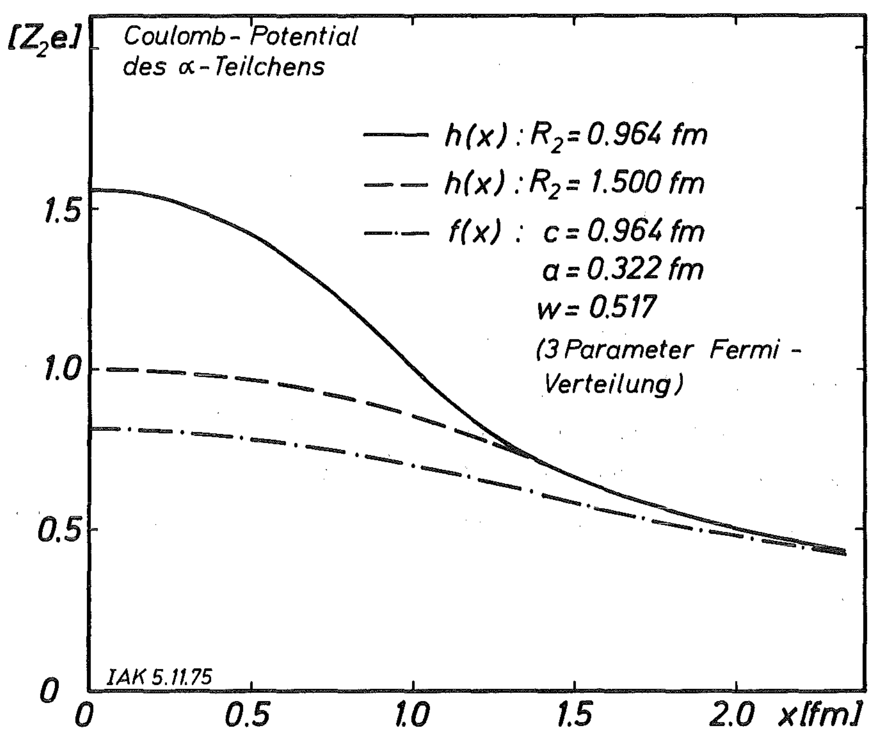

Abb. 3: Coulomb-Potential für eine realistische Ladungsverteilung des α-Teilchens und für zwei verschiedene homogene sphärische Verteilungen

^{16}O: $c_2 = 2{,}608$ fm $\quad$ α: $c_2 = 0{,}964$ fm

$a_2 = 0{,}513$ fm $\quad$ $a_2 = 0{,}322$ fm

$w = -0{,}051$ $\quad$ $w = 0{,}517$

und in den Korrekturen bezogen auf homogene Kugeln mit

$R_2 = 3{,}0$ fm bzw. $R_2 = 1{,}7$ fm

Für den Spezialfall der einfachen Zwei-Parameter-Fermiverteilung ρ_2 (c_2, a_2) und $R_2 = c_2$ lassen sich die Abweichungen in ihrer Abhängigkeit von

$$u = |\vec{r} - \vec{r}_1|/c_2 \quad \text{und} \quad z = a_2/c_2$$

mit den Bezeichnungen

$$y = r_2/c_2$$

$$B = \left(\frac{\pi a_2}{c_2}\right)^2 - 6\left(\frac{a_2}{c_2}\right)^2 \sum_{n=1} \frac{(-e^{-c_2/a_2})^n}{n^3}$$

$$C = -\frac{2}{3}\left(\frac{\pi a_2}{c_2}\right)^2 - 2\left(\frac{a_2}{c_2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^{-c_2/a_2})^n}{n^2} + 6\left(\frac{a_2}{c_2}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^{-c_2/a_2})^n}{n^3}$$

durch folgende Formeln angeben

$$\Delta(u,z) = \frac{1}{u}\left[\frac{3}{2 + B(z)} \int_u^{\infty} dy \, \frac{y^2 - y \cdot u}{1 + \exp\left(\frac{y-1}{z}\right)}\right]$$

$$\delta(u,z) = \frac{C(z)}{1+B(z)} + \frac{u^2}{3} + \frac{2}{1+B} \int_0^u dy \, \frac{y^2/u - y}{1 + \exp\left(\frac{y-1}{z}\right)}$$

$$\delta(u,z) = \frac{C(z)}{1+B(z)} + \frac{2}{3(1+B)} \left\{ \frac{(1+B)}{2} u^2 + 3\int_0^u dy \, \frac{y^2/u - y}{1 + \exp\left(\frac{y-1}{z}\right)} \right\}$$

$$\delta(u,z) = \frac{C(z)}{1+B(z)} + \frac{2}{3(1+B(z))} \cdot \int_0^u y\left[1 + B + 3\,\frac{y/u - 1}{1 + \exp\left(\frac{y-1}{z}\right)}\right] dy$$

Das im Anhang wiedergegebene Hilfsprogramm zur Berechnung der Korrekturtabelle (die in der Subroutine COULHI angegeben werden muß) läßt allgemeinere Verteilungen (Function DENS) zu.

Nach diesen Vorbereitungen werden die Multipolterme des Coulomb-Potentials (in der Subroutine COULHI) nach Standard-Methoden berechnet.

Die Multipolentwicklung des Coulomb-Potentials ist gegeben durch

$$V_c(\vec{r}) = e^2 Z_1 Z_2 \int d\vec{r}_1 \; \rho_1(\vec{r}_1) \cdot f(|r-r_1|) = \sum_{\lambda,\mu} v_\lambda^c(r) \cdot Y_{\lambda\mu}(\hat{r})$$

Da $f(|\vec{r}-\vec{r}_1|)$ nur vom $\cos(\hat{r_1 r})$ abhängt ist

$$f(|\vec{r}-\vec{r}_1|) = 4\pi \sum \frac{f_\lambda(r,r_1)}{2\lambda+1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^{*}(\hat{r}_1) \cdot Y_{\lambda\mu}(\hat{r})$$

Im körperfesten System ist

$$\rho_1(\vec{r}_1) = \sum_{\lambda=o} \rho_{\lambda'} \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda'+1}} \; Y_{\lambda' o}(\hat{r}_1)$$

mit $\rho_o = 1$

so daß sich nach der Winkelintegration

$$V_c(r) = e^2 Z_1 Z_2 \sum_{\lambda=o}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right)^{3/2} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \cdot \int_0^\infty r_1^2 dr_1^2 \; \rho_\lambda(r_1) \; f_\lambda(r,r_1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(2.7a) \quad v_\lambda^c(r) = e^2 Z_1 Z_2 \left(\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right)^{3/2} \int_0^\infty dr_1 \; r_1^2 \rho_\lambda(r_1) \; f_\lambda(r_1,r) \\ &(2.7b) \quad \rho_\lambda(r_1) = (2\lambda+1) \int_o^1 \rho_1(\vec{r}_1) \cdot P_\lambda(\cos\theta) d\cos\theta \\ &(2.7c) \quad f_\lambda(r,r_1) = \frac{2\lambda+1}{2} \int_o^1 \left[f(r^2+r_1^2+2rr_1 \cos\theta) + f(r^2+r_1^2-2rr_1 \cos\theta) \right] \\ &\qquad\qquad \times P_\lambda(\cos\theta) d \cos\theta \end{aligned}}$$

Für $r \gg R_1+R_2$ geht

$$f_\lambda(r,r_1) \to r_1^\lambda / r^{\lambda+1}$$

so daß

$$v_\lambda^c \to \left[e^2 Z_1 Z_2 \left(\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right)^{3/2} \int_o^\infty dr_1 \; r_1^{\lambda+2} \; \rho_\lambda(r_1) \right] \frac{1}{r^{\lambda+1}} \equiv \frac{Q_\lambda}{r^{\lambda+1}}$$

wobei Q_λ das Multipolmoment der Verteilung ρ_1 ist.

In Abb. 4a - d sind die Coulomb-Formfaktoren $v_\lambda^c(r)$ (λ=0,2,4,6) Streuung von α-Teilchen an ^{238}U für realistische Verteilungen $\rho_1(^{238}U)$ und $\rho_2(\alpha)$ mit den Formfaktoren der Approximation (1.1 und 1.2) verglichen. Als Parameterwerte für die Verteilung ρ_1 wurden gewählt:

$$c_{10} = 6{,}805 \text{ fm} \quad \text{(Fermi-Verteilung)}$$
$$a_1 = 0{,}605 \text{ fm}$$

oder

$$R_{co} = 1{,}2 \cdot A^{1/3} \text{ fm (Äquivalentradius für die Fermi-Vert.)}$$
$$R_{co} = 1{,}2 \cdot A^{1/3} + 1{,}7 \text{ fm}$$

mit den Deformationsparametern

$$\beta_2 = 0{,}26$$
$$\beta_4 = 0{,}10$$

Die Unterschiede sind beträchtlich und weisen darauf hin, daß dort wo die Coulomb-Anregung wesentlich beiträgt, die Werte der Deformationsparameter davon beeinflußt werden sollten.

3. Streuung von α-Teilchen und ^{16}O an deformierten Kernen

Den folgenden Fallstudien des Einflusses eines realistischen Coulombpotentials ist das optische Modell für die nukleare Wechselwirkung zugrundegelegt. Die optischen Potentiale, die mehr oder weniger willkürlich gewählt sind, können bereits als eine Faltung über die Nukleonen-Verteilungen von Projektil und Target angesehen werden. Daher werden in der Regel für die Deformationsparameter β_λ des Wechselwirkungspotentials, grob der Blair'schen Regel folgend

$$\beta_\lambda^{Pot.} \cdot R_o = \beta_\lambda \, c_o \quad ,$$

kleinere Werte für β_λ^{Pot} bei größeren Werten für R_{Pot} angenommen *)

---

*) Da Eingabe des Rechenprogramms den Radiusparameter $r_o = R \cdot A_{targ}^{-1/3}$ verlangt, ist ein entsprechend modifizierter Radiusparameter r'_o anzugeben, wenn z.B. im Falle der ^{16}O-Streuung

$$R = r_o(A_{target}^{1/3} + A_{projekt}^{1/3})$$

sein soll.

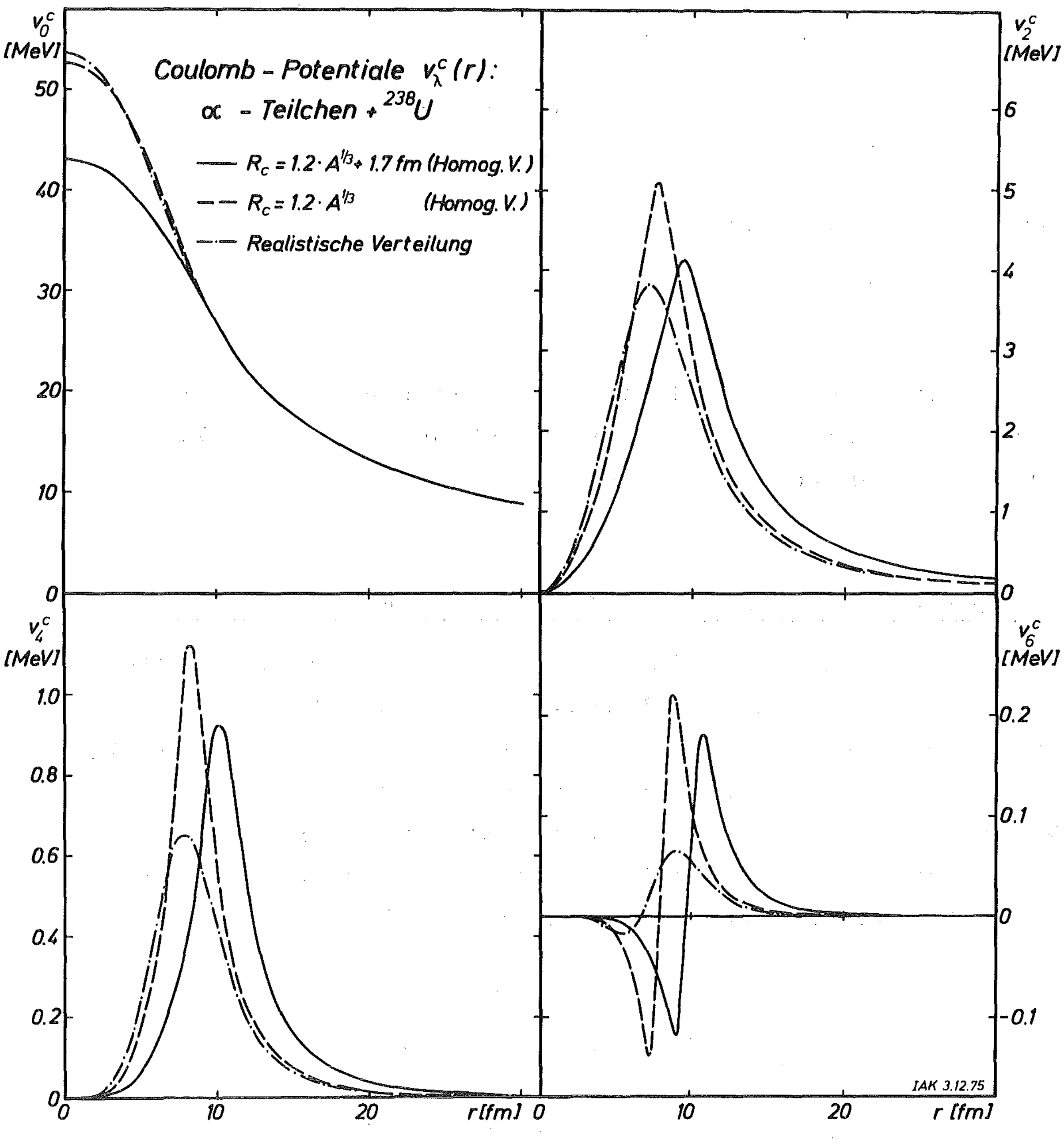

Abb. 4a-d. Coulomb-Formfaktoren für die Streuung von α-Teilchen an ^{238}U.

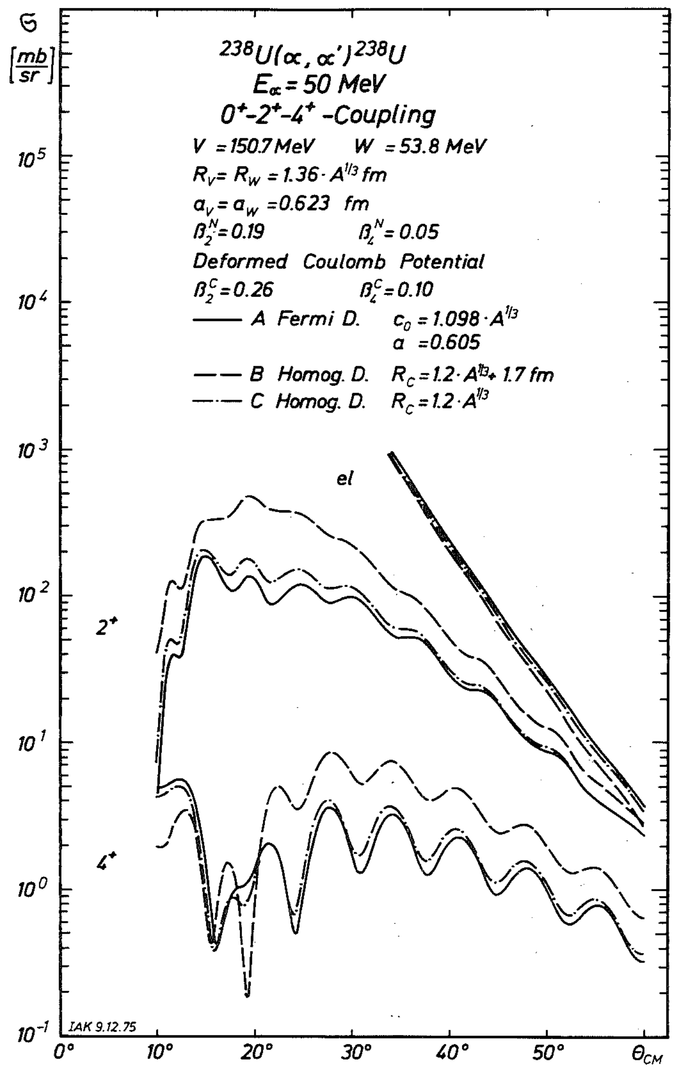

Abb. 5 Berechnete differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von 50 MeV α-Teilchen an ^{238}U: Vergleich zwischen realistischen und homogenen Ladungsverteilungen

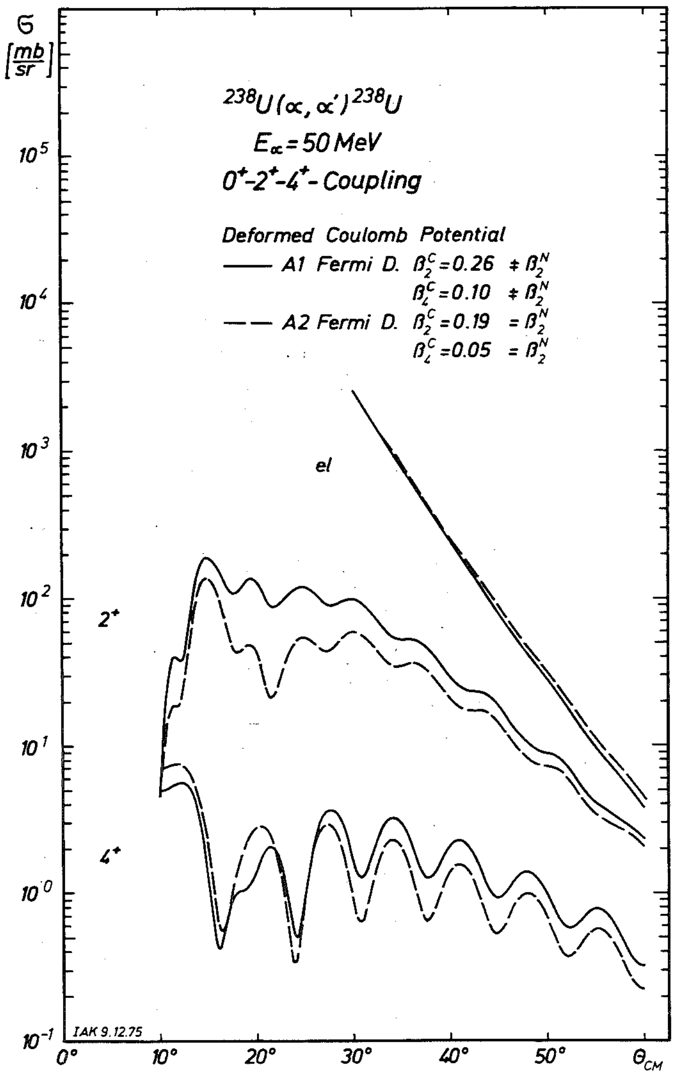

Abb. 6 Berechnete differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von 50 MeV α-Teilchen an ^{238}U: Einfluß der Deformation des Coulombpotentials.

Es wäre naheliegend, anstelle des üblichen makroskopisch deformierten optischen Potentials auch für das nukleare Wechselwirkungspotentials ein durch Faltung erzeugtes Potential zu verwenden[9,10]. Wir verzichten hier darauf, da nicht geklärt ist, ob ein einfaches Modell dieser Art bei Energien, die nur wenig über der Coulombbarriere liegen, ohne erhebliche Austauschkorrekturen nicht lediglich nur eine andere Parametrisierung darstellt, sondern auch in diesem Energiebereich wirklich einen Zugang zu den nuklearen Massenverteilungen ermöglicht.

Abb. 5 zeigt zunächst den Effekt verschiedener Formen des deformierten Coulomb-Potentials (Fermiverteilung - homogene Verteilung mit scharfem Rand verschiedener Radien). Abb. 6 demonstriert den Einfluß der Deformation des Coulomb-Potentials auf die berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitte (Vergleich $\beta_\lambda^{Nucl} \neq \beta_\lambda^c$ mit $\beta_\lambda^{Nucl} = \beta_\lambda^c$). Die Rechnungen wurden mit dem Coupled-Channel-Code ECIS[5] vorgenommen, wobei die Subroutine POTENT (Symmetric Rotational Model) für den Fall eines realistischen Coulomb-Potentials (Subroutine COULHI) leicht modifiziert wurden (der Wert des Diffuseness-Parameters a_c wird als Statement vor dem Aufruf in der Subroutine COULHI eingespeist).

Abb. 7 zeigt die theoretischen Wirkungsquerschnitte, die mit den Parameterwerten des optischen Potentials berechnet wurden, das bei der Analyse der $^{238}U(\alpha,\alpha')$-Daten von Hendrie et al. [11] benutzt wurde.

Es wurden auch Studien für 100 MeV-α-Teilchen durchgeführt. Hier ist der Einfluß der unterschiedlichen Beschreibung des Coulombpotentials kaum noch merkbar. Das Ergebnis ähnlicher Rechnungen für die Streuung von 50 MeV-^{16}O-Ionen an ^{28}Si ist in Abb. 8 gezeigt. Die Parameter der Ladungsverteilung von ^{28}Si entstammen Resultaten der Elektronenstreuung. Eine L-Abhängigkeit des Imaginärteils des optischen Potentials

$$W(r) \rightarrow W(r)/[1 + \exp\{(L-L_o)/\Delta L\}]$$

- eine derartige Dämpfung scheint bei der Streuung schwerer Ionen wichtig zu sein - wurde hierbei nicht berücksichtigt.

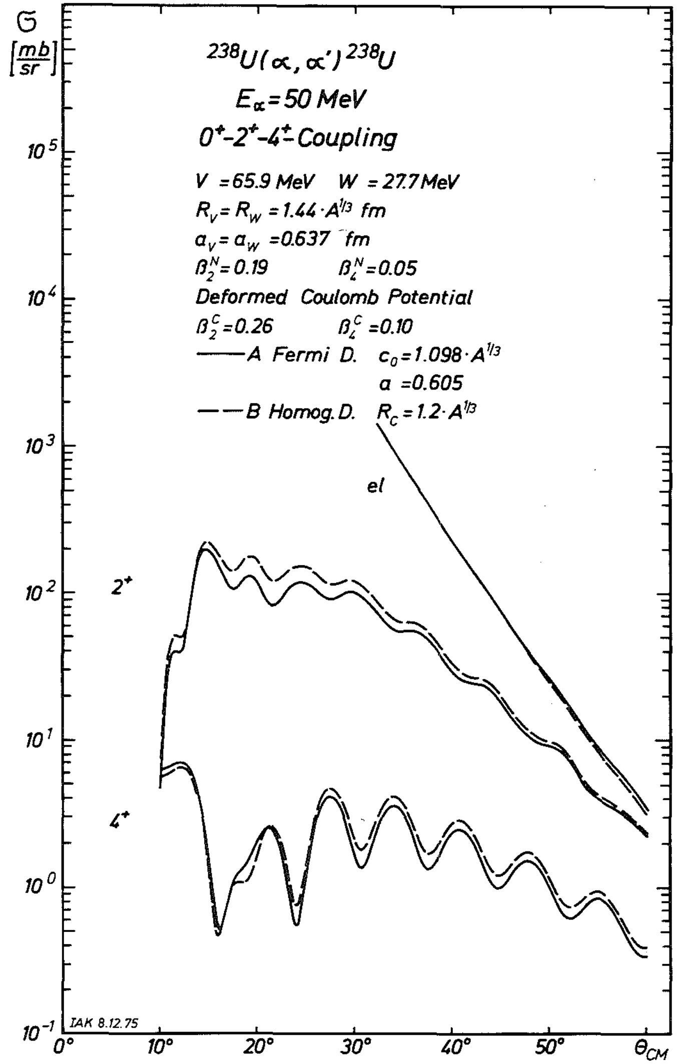

Abb. 7 Berechnete differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von 50 MeV α-Teilchen: Optisches Potential nach Hendrie et al.[11].

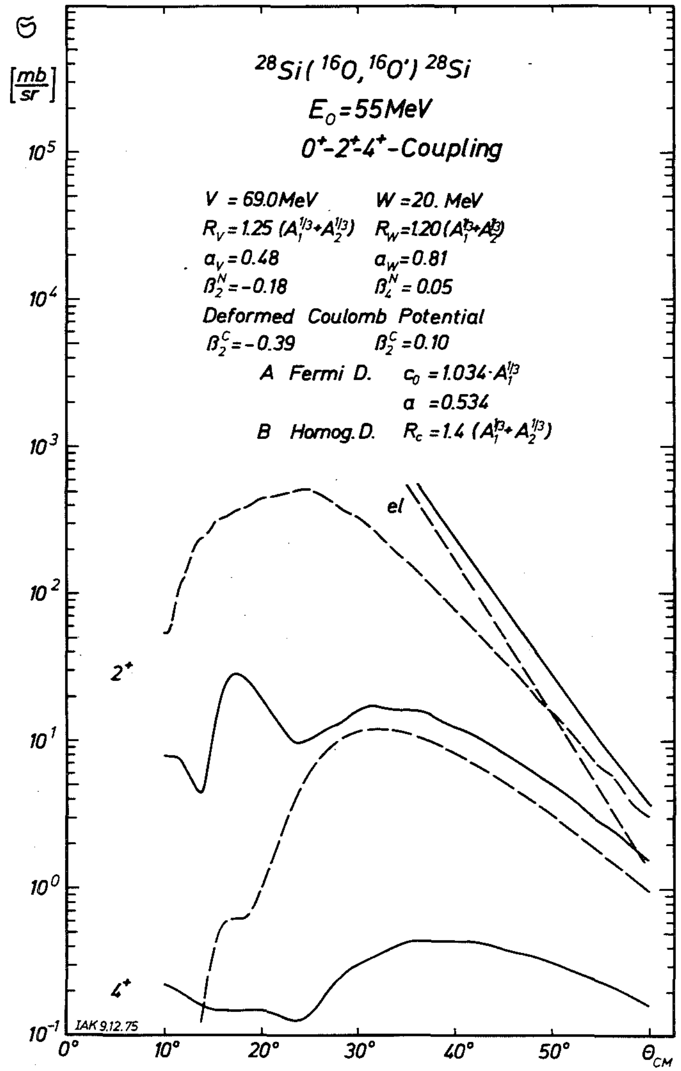

Abb. 8 $^{28}Si(^{16}O, ^{16}O')^{28}Si$ mit 55 MeV ^{16}O-Ionen.

4. Schlußbemerkungen

Die vorliegenden Ergebnisse führen zu folgenden Aussagen:

a) Es bestehen deutlich Unterschiede zwischen den Multipol-Potentialen realistischer Ladungsverteilungen und der homogenen (deformierten) Ladungsverteilung. Die Unterschiede nehmen mit wachsender Multipolarität zu.

b) Im Bereich von Projektil-Energien, die nur verhältnismäßig wenig über dem Coulomb-Wall liegen, treten Interferenz-Effekte zwischen nuklearer und elektromagnetischer Anregung auf, die empfindlich von der Form des Coulomb-Potentials abhängen. Diese Interferenzeffekte (insbesondere auch in ihrer Abhängigkeit von der Geschoß-Energie) können die Quelle interessanter Information sein, falls die Analyse korrekt durchgeführt wird.

c) Sowohl für die Streuung an deformierten Kernen der Seltenen Erden [14] wie auch der Aktiniden [11,15], liegen experimentelle Daten vor, deren Analyse mit Hilfe realistischer Coulomb-Potentiale wiederholt werden sollte, um physikalische signifikante Werte für die Deformationsparameter β_λ zu gewinnen.

Für wichtige Hinweise und aufschlußreiche Diskussionen danke ich Herrn Dr. von Geramb. Wesentliche Vorarbeiten in der Erstellung der Rechenprogramme sind von Herrn Dr. G.W. Schweimer und Herrn Dipl. Phys. H.J. Gils geleistet worden, denen ich dafür sehr dankbar bin.

Referenzen

1. N.K. Glendenning, Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi", Course XL, 1967, ed. M. Jean (Academic Press, New York, 1969)
2. T. Tamura, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 679
3. H. Rebel, unveröffentliche Ergebnisse
4. A.B. Kurepin, H. Schultz and H.J. Wiebecke, Nucl. Phys. A189 (1972) 257
5. G.W. Schweimer u. J. Raynal, unveröffentlichter Bericht (1973)
6. G.W. Schweimer, unveröffentlichtes Computer-Programm (1973)
7. R.S. Mackintosh, Nucl. Phys. A245 (1975) 255
8. C.W. Jäger, H. de Vries and C. de Vries, in Atomic Data and Nuclear Data Tables, Academic Press (1974)
9. H. Rebel, Lectures given at the Int. Summer School of Nucl. Physics Predeal, Romania, Sept. 1974, KFK-Report 2065 (1974)
10. C.B. Dover and J.P. Vary, Proceedings of the Symposium on Classical and Quantum Mechanical Aspects of Heavy Ion Collisions, Heidelberg, Germany, Okt. 1974
11. D.L. Hendrie et al. Phys. Rev. L. 30 (1973) 571
12. R.A. Chatwin, J.S. Heck, A. Richter, D. Robson, in Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions, ed. by R. Bock and W.R. Hering, North Holland Publ. Comp., Amsterdam (1970)S.76
13. A.K. Jain, M.C. Gupta and C.S. Shastry, Phys. Rev. C12 (1975) 801
14. A.A. Aponick, Jr., C.M. Chesterfield, D.A. Bromley and N.K. Glendenning, Nucl. Phys. A159 (1970) 36
15. P. David, W. Soyez, H. Essen, H. v. Geramb, Annual Report 1974, Institut für Kernphysik, KFA Jülich, S. 303
16. H.V. von Geramb, Private Mitteilungen

ANHANG

Anhang A

1. Hilfsprogramm zur Berechnung der Korrektur-Tabelle: $\Delta(x)$ und $\delta(x)$.

2. Tabellen: f(x) (D(1)) und f(x) - h(x) (Korrektur) für ^{16}O-Ionen und α-Teilchen als Projektile

Anhang B

Die SUBROUTINEN	POTENT	(Symmetric Rotational Model)
	COULHI	
	SUM	

Bemerkung:

Die numerische Zuverlässigkeit der Programme wurde getestet, in dem der Übergang von einer diffusen Ladungsverteilung ($c_o = 1{,}2 \cdot A^{1/3}$ fm, $a \to o$) zu einer homogenen Ladungsverteilung ($R_c = 1{,}2 \cdot A^{1/3}$ fm) überprüft wurde. Für die Verteilung des Projektils wurde dabei eine Gaußverteilung $\rho_o \exp(-r_1^2/\alpha^2)$ gewählt, deren Breite sukzessive verkleinert wurde.
Ergebnisse mit gaußförmigen Ladungsverteilungen konnten mit unabhängigen Rechnungen verglichen werden, die von H.V.v. Geramb[16] (KFA Jülich) durchgeführt wurden.

```
C      HILFSPROGRAMM ZUR BERECHNUNG EINER TABELLE
C      ABWEICHUNGEN DES COULOMBPOTENTIALS EINER
C      SPHAERISCHEN VERTEILUNG MIT DIFFUSEM RAND
C      VON DEM DER KUGEL MIT FESTEM RAND (R2)
C
C      DIE ROUTINE RUFT DIE SUBROUTINE FX AUF
C      FX BERECHNET DAS COULOMBPOTENTIAL
C      DER VERTEILUNG DENS (SUBROUTINE) AM
C      ORT X (= ABSTAND VOM ZENTRUM DER VERTEILUNG)
C
C      DIE TABELLE WIRD BERECHNET BEI
C
C      X = SQRT(I/50.)*R2       (I=  1 BIS  50)
C      X = 2.*R2/(3.-I/50.)     (I= 51 BIS 100)
C
C      DIE LADUNGSVERTEILUNG IST AUF 1 NORMIERT
C
C      PP(1) = ABSCHNEIDERADIUS
C      PP(2) = 1
C      PP(3) = C (RADIUSPARAMETER)
C      PP(4) = A2
C      PP(5) = W
C      R2    = RADIUS DER REFERENZ-KUGEL
C
       IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
       DIMENSION PP(5),D(100),C(100)
       REAL*4 PP4(5),R24,W(100)
       CALL FREEFO(5,4,6,0,W,W)
       READ(4) (PP4(I),I=1,5),R24
       R2=R24
       DO 100 I=1,5
   100 PP(I)=PP4(I)
       WRITE(6,6000)
  6000 FORMAT('1',39X,'I',13X,'X',18X,'D(1)'//)
       DO 200 I=1,51
       II=I-1
       X=R2*DSQRT(II/50.D0)
       IF(II.EQ.0) X=R2/500.D0
       CALL FX(X,1,PP,D)
       WRITE(6,6100) II,X,D(1)
  6100 FORMAT(' ',30X,I10,5X,1PD15.7,5X,1PD15.7)
       C(I)=D(1)-3.D0/(2.D0*R2)+(X*X)/(2.D0*R2*R2*R2)
   200 C(I)=C(I)*R2
C
       DO 300 I=51,100
       X=2.D0*R2/(3.D0-I/50.D0)
       CALL FX(X,1,PP,D)
       WRITE(6,6100) I,X,D(1)
       C(I)=D(1)-1.D0/X
   300 C(I)=C(I)*R2
       WRITE(6,6200)
  6200 FORMAT(///49X,'STUETZPUNKT',8X,'KORREKTUR'//)
       WRITE(6,6300) (I,C(I),I=1,100)
  6300 FORMAT(' ',50X,I10,5X,1PD15.7)
       WRITE(7,7000) (C(I),I=1,100)
  7000 FORMAT((5X,'*',6(1PD10.3,',')))
       STOP
       END
```

```
      SUBROUTINE FX(H,ISM12,PP,D)
C-----COULOMBPOTENTIAL EINER KUGELSYMMETRISCHEN
C     LADUNGSVERTEILUNG IM ABSTAND X=I*H, I=1,ISM12
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION PP(1),S(25),D(500)
      REAL*8 PI/3.141592653589793D0/
C-----NORMIERUNG
      S(1)=0.D0
      S(2)=PP(1)
      S(5)=.000001
      K=0
      NF=0
    1 CALL FORHAD (K,S)
      GO TO (2,2,3,3),K
    2 S(4)=S(2)*S(3)*DENSP(PP,S)
      NF=NF+1
      GO TO 1
    3 IF(NF.LE.5) GO TO 2
      RHO=PP(2)/(4.D0*PI*S(4))
C-----RADIAL-INTEGRATION
      R=0.D0
      DO 10 I=1,ISM12
      F2=0.D0
      R=R+H
      IF(R.GT.PP(1)) GO TO 10
      S(1)=0.D0
      S(2)=R
      S(5)=.000001
      K=0
      NF=0
    4 CALL FORHAD(K,S)
      GO TO (5,5,6,6),K
    5 S(4)=S(2)*S(3)*DENSP(PP,S)*RHO
      NF=NF+1
      GO TO 4
    6 IF (NF.LE.5) GO TO 5
      F1=S(4)
      S(1)=R
      S(2)=PP(1)
      S(5)=.000001
      K=0
      NF=0
    7 CALL FORHAD (K,S)
      GO TO (8,8,9,9),K
    8 S(4)=S(3)*DENSP(PP,S)*RHO
      NF=NF+1
      GO TO 7
    9 IF(NF.LE.5) GO TO 8
      F2=S(4)
   10 D(I)=4.D0*PI*(F1/R+F2)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION DENSP(PP,S)
C-----3-PARAMETER FERMIVERTEILUNG DES ALPHATEILCHENS
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION PP(1),S(1)
      DENSP=0.D0
      C=PP(3)
      A=PP(4)
      W=PP(5)
      R=S(3)
      IF (R.GT.PP(1)) RETURN
      DENSP=(1.D0+R*R*W/(C*C))/(1.D0+DEXP((R-C)/A))
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION DENS(KE,P,S)
      DENS=1.
      RETURN
      END
```

R_{Cut}		c_2	a_2	w_2	R_2
5.	1.	0.964	0.322	0.517	1.7

α

I	X	D(I)
0	3.3999977D-03	8.1429696D-01
1	2.4041614D-01	8.0749558D-01
2	3.3999977D-01	8.0071568D-01
3	4.1641298D-01	7.9393374D-01
4	4.8083229D-01	7.8719356D-01
5	5.3758684D-01	7.8045559D-01
6	5.8889688D-01	7.7373875D-01
7	6.3608123D-01	7.6704793D-01
8	6.7999954D-01	7.6038803D-01
9	7.2124843D-01	7.5376390D-01
10	7.6026260D-01	7.4718007D-01
11	7.9737014D-01	7.4064130D-01
12	8.3282595D-01	7.3415171D-01
13	8.6683273D-01	7.2771531D-01
14	8.9955464D-01	7.2133580D-01
15	9.3112772D-01	7.1501662D-01
16	9.6166458D-01	7.0876090D-01
17	9.9126115D-01	7.0257145D-01
18	1.0199993D+00	6.9645081D-01
19	1.0479457D+00	6.9040121D-01
20	1.0751737D+00	6.8451082D-01
21	1.1017252D+00	6.7852260D-01
22	1.1276517D+00	6.7269665D-01
23	1.1529953D+00	6.6654789D-01
24	1.1777938D+00	6.6127722D-01
25	1.2020807D+00	6.5568532D-01
26	1.2258866D+00	6.5017268D-01
27	1.2492389D+00	6.4473959D-01
28	1.2721627D+00	6.3938615D-01
29	1.2946806D+00	6.3411231D-01
30	1.3168125D+00	6.2891789D-01
31	1.3385804D+00	6.2380255D-01
32	1.3599991D+00	6.1876586D-01
33	1.3810856D+00	6.1380725D-01
34	1.4016550D+00	6.0892609D-01
35	1.4223211D+00	6.0412164D-01
36	1.4424969D+00	5.9939310D-01
37	1.4623943D+00	5.9473961D-01
38	1.4820246D+00	5.9016023D-01
39	1.5013983D+00	5.8565399D-01
40	1.5205252D+00	5.8121990D-01
41	1.5394144D+00	5.7685689D-01
42	1.5580747D+00	5.7256390D-01
43	1.5765141D+00	5.6833983D-01
44	1.5947403D+00	5.6418358D-01
45	1.6127605D+00	5.6009401D-01
46	1.6305816D+00	5.5606998D-01
47	1.6482100D+00	5.5211038D-01
48	1.6656519D+00	5.4821404D-01
49	1.6829130D+00	5.4437983D-01
50	1.6999989D+00	5.4060662D-01
51	1.7171706D+00	5.3683728D-01
52	1.7346927D+00	5.3301529D-01
53	1.7525761D+00	5.2914047D-01
54	1.7708321D+00	5.2521267D-01
55	1.7894725D+00	5.2123176D-01
56	1.8085094D+00	5.1719766D-01
57	1.8275558D+00	5.1311032D-01
58	1.8478248D+00	5.0896973D-01
59	1.8681306D+00	5.0477707D-01
60	1.8888876D+00	5.0053030D-01
61	1.9101111D+00	4.9623050D-01
62	1.9318169D+00	4.9187782D-01
63	1.9540217D+00	4.8747246D-01
64	1.9767429D+00	4.8301465D-01
65	1.9999987D+00	4.7850469D-01
66	2.0238082D+00	4.7394292D-01
67	2.0481914D+00	4.6932971D-01
68	2.0731653D+00	4.6466551D-01
69	2.0987640D+00	4.5995055D-01
70	2.1249986D+00	4.5518590D-01
71	2.1518973D+00	4.5037186D-01
72	2.1794857D+00	4.4550907D-01
73	2.2077907D+00	4.4059823D-01
74	2.2368406D+00	4.3564007D-01
75	2.2666651D+00	4.3063540D-01
76	2.2972958D+00	4.2558507D-01
77	2.3287656D+00	4.2048957D-01
78	2.3611095D+00	4.1535106D-01
79	2.3943646D+00	4.1016934D-01
80	2.4285658D+00	4.0494585D-01
81	2.4637665D+00	3.9968171D-01
82	2.4999983D+00	3.9437805D-01
83	2.5373117D+00	3.8903606D-01
84	2.5757558D+00	3.8365697D-01
85	2.6153829D+00	3.7824205D-01
86	2.6562482D+00	3.7279261D-01
87	2.6984109D+00	3.6730998D-01
88	2.7419336D+00	3.6179553D-01
89	2.7868834D+00	3.5625066D-01
90	2.8333314D+00	3.5067679D-01
91	2.8813540D+00	3.4507534D-01
92	2.9310325D+00	3.3944777D-01
93	2.9824541D+00	3.3379552D-01
94	3.0357122D+00	3.2812006D-01
95	3.0909070D+00	3.2242283D-01
96	3.1481460D+00	3.1670529D-01
97	3.2075450D+00	3.1096885D-01
98	3.2692266D+00	3.0521494D-01
99	3.3333311D+00	2.9943757D-01
100	3.3999977D+00	2.9366016D-01

α

STUETZPUNKT	KORREKTUR
1	-1.1569410D-01
2	-1.1725844D-01
3	-1.1878426D-01
4	-1.2031356D-01
5	-1.2177184D-01
6	-1.2322639D-01
7	-1.2464501D-01
8	-1.2601940D-01
9	-1.2734122D-01
10	-1.2860222D-01
11	-1.2979473D-01
12	-1.3091064D-01
13	-1.3194293D-01
14	-1.3288481D-01
15	-1.3372996D-01
16	-1.3447256D-01
17	-1.3510728D-01
18	-1.3562933D-01
19	-1.3603441D-01
20	-1.3631673D-01
21	-1.3633239D-01
22	-1.3651236D-01
23	-1.3641646D-01
24	-1.3618935D-01
25	-1.3582949D-01
26	-1.3533570D-01
27	-1.3470718D-01
28	-1.3394344D-01
29	-1.3304428D-01
30	-1.3200980D-01
31	-1.3084031D-01
32	-1.2953637D-01
33	-1.2809675D-01
34	-1.2652837D-01
35	-1.2482634D-01
36	-1.2299390D-01
37	-1.2103241D-01
38	-1.1894335D-01
39	-1.1672829D-01
40	-1.1428888D-01
41	-1.1192684D-01
42	-1.0934395D-01
43	-1.0664202D-01
44	-1.0382293D-01
45	-1.0088857D-01
46	-9.7840832D-02
47	-9.4681662D-02
48	-9.1412952D-02
49	-8.8036761D-02
50	-8.4554907D-02
51	-7.7377244D-02
52	-7.3874621D-02
53	-7.0461809D-02
54	-6.7139070D-02
55	-6.3906609D-02
56	-6.0764572D-02
57	-5.7713042D-02
58	-5.4752039D-02
59	-5.1879563D-02
60	-4.9099060D-02
61	-4.6408713D-02
62	-4.3808266D-02
63	-4.1297381D-02
64	-3.8875647D-02
65	-3.6542573D-02
66	-3.4297565D-02
67	-3.2140029D-02
68	-3.0069165D-02
69	-2.8084593D-02
70	-2.6184493D-02
71	-2.4368353D-02
72	-2.2635086D-02
73	-2.0983514D-02
74	-1.9412372D-02
75	-1.7920305D-02
76	-1.6505868D-02
77	-1.5167531D-02
78	-1.3903675D-02
79	-1.2712598D-02
80	-1.1592512D-02
81	-1.0541551D-02
82	-9.5577692D-03
83	-8.6391469D-03
84	-7.7835929D-03
85	-6.9889496D-03
86	-6.2529975D-03
87	-5.5734606D-03
88	-4.9480125D-03
89	-4.3742825D-03
90	-3.8498630D-03
91	-3.3723169D-03
92	-2.9391856D-03
93	-2.5479975D-03
94	-2.1962772D-03
95	-1.8815547D-03
96	-1.6013749D-03
97	-1.3533076D-03
98	-1.1349583D-03
99	-9.5647668D-04
100	-7.7806723D-04

R_{Cut} c_2 a_2 w R_2

8. 1. 2.608 0.513 -0.051 3.0

^{16}O

I	X	D(1)
0	5.9999967D-03	4.7708387D-01
1	4.2426383D-01	4.7323006D-01
2	5.9999967D-01	4.6939166D-01
3	7.3484652D-01	4.6556904D-01
4	8.4852767D-01	4.6176266D-01
5	9.4868277D-01	4.5797308D-01
6	1.0392299D+00	4.5420091D-01
7	1.1224965D+00	4.5044683D-01
8	1.1999993D+00	4.4671152D-01
9	1.2727915D+00	4.4299572D-01
10	1.3416400D+00	4.3930023D-01
11	1.4071239D+00	4.3562585D-01
12	1.4696930D+00	4.3197345D-01
13	1.5297050D+00	4.2834388D-01
14	1.5874499D+00	4.2473805D-01
15	1.6431668D+00	4.2115667D-01
16	1.6970553D+00	4.1760092D-01
17	1.7492846D+00	4.1407195D-01
18	1.7999990D+00	4.1057903D-01
19	1.8493232D+00	4.0709629D-01
20	1.8973655D+00	4.0365160D-01
21	1.9442211D+00	4.0023676D-01
22	1.9899738D+00	3.9685258D-01
23	2.0346979D+00	3.9349819D-01
24	2.0784598D+00	3.9017726D-01
25	2.1213192D+00	3.8688914D-01
26	2.1633296D+00	3.8363451D-01
27	2.2045395D+00	3.8041397D-01
28	2.2449932D+00	3.7722810D-01
29	2.2847307D+00	3.7407744D-01
30	2.3237887D+00	3.7096248D-01
31	2.3622011D+00	3.6788365D-01
32	2.3999987D+00	3.6484137D-01
33	2.4372102D+00	3.6183597D-01
34	2.4738620D+00	3.5889615D-01
35	2.5099787D+00	3.5593704D-01
36	2.5455830D+00	3.5304396D-01
37	2.5806961D+00	3.5018871D-01
38	2.6153379D+00	3.4737141D-01
39	2.6495268D+00	3.4459213D-01
40	2.6832801D+00	3.4185089D-01
41	2.7156140D+00	3.3914768D-01
42	2.7495439D+00	3.3648245D-01
43	2.7820840D+00	3.3385509D-01
44	2.8142479D+00	3.3126548D-01
45	2.8450483D+00	3.2871343D-01
46	2.8774973D+00	3.2619874D-01
47	2.9086063D+00	3.2372118D-01
48	2.9393861D+00	3.2128047D-01
49	2.9698468D+00	3.1887630D-01
50	2.9999983D+00	3.1650779D-01
51	3.0330013D+00	3.1414039D-01
52	3.0612228D+00	3.1173843D-01
53	3.0927818D+00	3.0930201D-01
54	3.1249983D+00	3.0683129D-01
55	3.1578930D+00	3.0432646D-01
56	3.1914876D+00	3.0178777D-01
57	3.2258047D+00	2.9921551D-01
58	3.2608679D+00	2.9661001D-01
59	3.2967015D+00	2.9397166D-01
60	3.3333315D+00	2.9130088D-01
61	3.3707845D+00	2.8859816D-01
62	3.4090890D+00	2.8586402D-01
63	3.4482739D+00	2.8309903D-01
64	3.4883702D+00	2.8030379D-01
65	3.5294098D+00	2.7747897D-01
66	3.5714265D+00	2.7462526D-01
67	3.6144558D+00	2.7174339D-01
68	3.6585346D+00	2.6883414D-01
69	3.7037015D+00	2.6589832D-01
70	3.7499979D+00	2.6293773D-01
71	3.7974662D+00	2.5995056D-01
72	3.8461517D+00	2.5693931D-01
73	3.8961017D+00	2.5390644D-01
74	3.9473662D+00	2.5085084D-01
75	3.9999979D+00	2.4777406D-01
76	4.0540518D+00	2.4467697D-01
77	4.1095868D+00	2.4156074D-01
78	4.1656644D+00	2.3842623D-01
79	4.2253498D+00	2.3527442D-01
80	4.2857119D+00	2.3210627D-01
81	4.3478237D+00	2.2892275D-01
82	4.4117623D+00	2.2572481D-01
83	4.4776095D+00	2.2251338D-01
84	4.5454520D+00	2.1928940D-01
85	4.6153821D+00	2.1605375D-01
86	4.6874974D+00	2.1280731D-01
87	4.7619021D+00	2.0955094D-01
88	4.8387070D+00	2.0628545D-01
89	4.9180301D+00	2.0301164D-01
90	4.9999972D+00	1.9973026D-01
91	5.0847429D+00	1.9644203D-01
92	5.1724109D+00	1.9314763D-01
93	5.2631550D+00	1.8984770D-01
94	5.3571399D+00	1.8654286D-01
95	5.4545424D+00	1.8323367D-01
96	5.5555525D+00	1.7992064D-01
97	5.6603742D+00	1.7660427D-01
98	5.7692276D+00	1.7328499D-01
99	5.8823497D+00	1.6996322D-01
100	5.9999967D+00	1.6663932D-01

16_0

STUETZPUNKT	KORREKTUR
1	-6.8747198D-02
2	-7.0310609D-02
3	-7.1825806D-02
4	-7.3293655D-02
5	-7.4712799D-02
6	-7.6081536D-02
7	-7.7398017D-02
8	-7.8660269D-02
9	-7.9866196D-02
10	-8.1013570D-02
11	-8.2100045D-02
12	-8.3123162D-02
13	-8.4080374D-02
14	-8.4969059D-02
15	-8.5786548D-02
16	-8.6530694D-02
17	-8.7197930D-02
18	-8.7784845D-02
19	-8.8290602D-02
20	-8.8711796D-02
21	-8.9045879D-02
22	-8.9290378D-02
23	-8.9442907D-02
24	-8.9506099D-02
25	-8.9468881D-02
26	-8.9333209D-02
27	-8.9097109D-02
28	-8.8758724D-02
29	-8.8316323D-02
30	-8.7768302D-02
31	-8.7113192D-02
32	-8.6349659D-02
33	-8.5476506D-02
34	-8.4492678D-02
35	-8.3312162D-02
36	-8.2189478D-02
37	-8.0868703D-02
38	-7.9434442D-02
39	-7.7886343D-02
40	-7.6224190D-02
41	-7.4447898D-02
42	-7.2557515D-02
43	-7.0553210D-02
44	-6.8435276D-02
45	-6.6204120D-02
46	-6.3860258D-02
47	-6.1404312D-02
48	-5.8837002D-02
49	-5.6159139D-02
50	-5.3371620D-02
51	-4.7579343D-02
52	-4.4785223D-02
53	-4.2094476D-02
54	-3.9506641D-02
55	-3.7021124D-02
56	-3.4637193D-02
57	-3.2353979D-02
58	-3.0170471D-02
59	-2.8085521D-02
60	-2.6097837D-02
61	-2.4205988D-02
62	-2.2408405D-02
63	-2.0703384D-02
64	-1.9089086D-02
65	-1.7563548D-02
66	-1.6124680D-02
67	-1.4770277D-02
68	-1.3498021D-02
69	-1.2305493D-02
70	-1.1187243D-02
71	-1.0148747D-02
72	-9.1825049D-03
73	-8.2811114D-03
74	-7.4479090D-03
75	-6.6782429D-03
76	-5.9695059D-03
77	-5.3181800D-03
78	-4.7216935D-03
79	-4.1771258D-03
80	-3.6815666D-03
81	-3.2321268D-03
82	-2.8259495D-03
83	-2.4602202D-03
84	-2.1321771D-03
85	-1.8391202D-03
86	-1.5784206D-03
87	-1.3475289D-03
88	-1.1439826D-03
89	-9.6541394D-04
90	-8.0955598D-04
91	-6.7424853D-04
92	-5.5744312D-04
93	-4.5720701D-04
94	-3.7172615D-04
95	-2.9930710D-04
96	-2.3837778D-04
97	-1.8748722D-04
98	-1.4530454D-04
99	-1.1061764D-04
100	-8.2331849D-05

```
     C*********************************************************************
     C  SYMMETRIC ROTATIONAL NUCLEUS
     C  FORMFACTORS WITH THE COULOMB POTENTIAL OF TWO HEAVY IONS
     C  INPUT VARIABLES:VOP(I): DEPTH OF THE POTENTIALS V,W,WD,VSO AND WSO
     C                  AOP(I): DIFFUSENESS OF THE POTENTIALS
     C                  ROP(I): RADIUS OF THE POTENTIALS, ROP(6) FOR COULOMB
     C                  H: STEP SIZE ON THE RADIAL AXIS IN FM
     C                  ISM: NUMBER OF STEPS
     C                  ZIT: PRODUCT OF CHARGE NUMBERS OF THE TARGET AND PRO.
     C                  BETA(I,L): NUCLEAR SHAPE PARAMETERS OF THE TARGET FOR
     C                            L=2,IQM ORDERED AS L = 2 4 6 ...
     C                  IQM: NUMBER OF SHAPE PARAMETERS PLUS 1; IQM < 20
     C                  NV: NUMBER OF REAL NON DIAGONAL FORMFACTORS
     C                  MV: NUMBER OF IMAGINARY NON DIAGONAL FORMFACTORS
     C                  IM: NUMBER OF DIFFERENT L VALUES
     C                  ID1: DIMENSION OF THE WORKING FIELD P(ID1,1)
     C                  ID3: DIMENSION OF VRE(ID3,1) AND VIM(ID3,1); ID3=ISM
     C                  LO(I): SEE COMMENTS IN CALC, I=2,6 AND 9,10 AND 22
     C  OUTPUT VARIABLES: VCRE(I): REAL DIAGONAL FORMFACTOR FOR R=I*H
     C                  VCIM(I): IMAGINARY DIAGONAL FORMFACTOR
     C                  VSO1(I): REAL SPIN-ORBIT FORMFACTOR
     C                  VSO2(I): IMAGINARY SPIN-ORBIT FORMFACTOR
     C                  VRE(I,J): REAL NON DIAGONAL FORMFACTORS ORDERED AS
     C                            J=1,IM: L = 2 4 6 ...
     C                            J=IM+1,2*IM FIRST NON DIAGONAL SPIN-ORBITS
     C                            J=2*IM+1,3*IM SECOND NON DIAGONAL SPIN-ORB.
     C                  VIM(I,J): IMAGINARY NON DIAGONAL FORMFACTORS
     C  TABLES:         XGN(I): INTEGRATION POINTS COS(THETA(I)) FOR THE
     C                            GAUSS-LEGENDRE METHOD
     C                  PGN(I): INTEGRATION WEIGHT AT THE POINT I
     C  NOTE:           FOR THE EXACT DEFINITIONS SEE THE PROGRAM DESCRIPTION
     C*********************************************************************
0002        SUBROUTINE POTENT(BETA,RHO2,VCRE,VCIM,VSO1,VSO2,VRE,VIM,IVQ,ZIT,P,
           1ID1,ID3,LO)
0003        COMMON VOP(5),AOP(5),ROP(6),D1(4),IQM,D2(4),H,ISM,D3(6),MV,NV,IM
0004        DIMENSION VCRE(1),VCIM(1),VSO1(1),VSO2(1),VRE(ID3,1),VIM(ID3,1),
           1IVQ(1),BETA(6,1)
0005        LOGICAL*1 LO(1)
0006        REAL*8 PP(20),ZZ1,C,D,VRRR,VRRI,VRR,R,P(ID1,1),A(5),EP(5),E(5),
           1PI/3.14159265358979300/
0007        REAL*8    XGN(10)/Z4013973DF98B86AF,Z403A502C6D25177F,
           1Z405FAB33C5594B0F,Z4082C82E09F8FFB4,Z40A20469FD3886D7,
           2Z40BF0F9B9A352A6F,Z40D6D05EAF7EB739,Z40E988320B9FEC8C,
           3Z40F6C6DD3DEBB4F5,Z40FE30AD063BE701/
0008        REAL*8    PGN(10)/Z40271AD8921466DF,Z402630336A5BB322,
           1Z4024606912694A69,Z4021B658BB64DBFB,Z401E41FF31573B48,
           2Z401A1617A317A820,Z4015519FE196E249,Z40100B467DF7E474,
           3Z3FA64DAF529DB3FA,Z3F4825A00903A2BA/
0009        IQ=MAX0(IQM,IM+IM)
0010        I=2*ID1*MAX0(10,IQM,IM+1)
0011        IF(LO(23)) WRITE(6,1006) I
0013        DO 2 I=1,5
0014        A(I)=ROP(I)/AOP(I)
0015        E(I)=DEXP(-A(I))
0016      2 EP(I)=DEXP(DBLE(H/AOP(I)))
0017        DO 4 J=1,6
0018        DO 3 I=2,IQM
0019      3 P(6+J,I)=BETA(J,I)*DSQRT(DFLOAT(2*I+1)/(4.D0*PI))
0020      4 CONTINUE
0021        D=0.D0
0022        DO 10 I=1,10
0023        PP(1)=1.D0
0024        PP(2)=XGN(I)
0025        DO 5 J=2,IQ
0026        C=1.D0/DFLOAT(J)
0027      5 PP(J+1)=(2.D0-C)*PP(2)*PP(J)+(C-1.D0)*PP(J-1)
0028        C=PGN(I)
0029        DO 8 J=1,5
0030        R=0.D0
0031        DO 6 K=2,IQM
0032      6 R=R+P(6+J,K)*PP(K+1)
0033        P(J,I)=DEXP(-R*A(J))
0034      8 CONTINUE
0035        P(13,I)=C
0036        DO 9 IT=1,IM
0037        K=IVQ(IT)+1
0038      9 P(IT+13,I)=PP(K)*C*DSQRT(DFLOAT(2*K-1)*(4.D0*PI))
0039     10 CONTINUE
0040        ZZ1=1.43986*ZIT
0041        IQ1=IM+1
0042     11 R=0.D0
0043        DO 35 IS=1,ISM
0044        R=R+H
0045        DO 13 I=1,IQ1
0046        DO 12 J=7,12
0047     12 P(J,I)=0.D0
0048     13 CONTINUE
0049        DO 28 I=1,10
0050        P(1,I)=P(1,I)*EP(1)
0051        VRRR=-VOP(1)/(1.D0+P(1,I))
0052        DO 14 J=1,IQ1
0053     14 P(7,J)=P(7,J)+VRRR*P(J+12,I)
0054        IF (LO(4)) GO TO 16
0056        P(2,I)=P(2,I)*EP(2)
0057        P(3,I)=P(3,I)*EP(3)
0058        VRRR=-VOP(2)/(1.+P(2,I))-4.*VOP(3)*P(3,I)/((1.+P(3,I))**2)
0059        DO 15 J=1,IQ1
0060     15 P(8,J)=P(8,J)+VRRR*P(J+12,I)
0061     16 IF (LO(3)) GO TO 19
0063        P(4,I)=P(4,I)*EP(4)
0064        VRR=1.D0/(1.D0+P(4,I))
0065        VRRR=2.D0*VOP(4)*VRR/(R*R)
0066        VRRI=-2.D0*VOP(4)*VRR*(1.D0-VRR)/(AOP(4)*R)
0067        DO 17 J=1,IQ1
0068        P(9,J)=P(9,J)+VRRR*P(J+12,I)
0069     17 P(10,J)=P(10,J)+VRRI*P(J+12,I)
0070        IF (LO(5)) GO TO 19
0072        P(5,I)=P(5,I)*EP(5)
0073        VRR=1.D0/(1.D0+P(5,I))
0074        VRRR=2.D0*VOP(5)*VRR/(R*R)
0075        VRRI=-2.D0*VOP(5)*VRR*(1.D0-VRR)/(AOP(5)*R)
```

```
      DO 18 J=1,IO1                                                  7 119
      P(11,J)=P(11,J)+VRRR*P(J+12,I)                                 7 120
   18 P(12,J)=P(12,J)+VRRI*P(J+12,I)                                 7 121
   19 CONTINUE
   28 CONTINUE                                                       7 133
      VCRE(IS)=P(7,1)                                                7 134
      VCIM(IS)=P(8,1)                                                7 135
      IF (LO(9)) GO TO 29                                            7 136
      VSO1(IS)=P(10,1)                                               7 137
      IF (LO(10)) GO TO 29                                           7 138
      VSO2(IS)=P(12,1)                                               7 139
   29 CONTINUE
   31 DO 33 J=1,IM                                                   7 145
      VRE(IS,J)=P(7,J+1)                                             7 146
      IF (LO(4)) GO TO 32                                            7 147
      VIM(IS,J)=P(8,J+1)                                             7 148
   32 IF (LO(3)) GO TO 33                                            7 149
      VRE(IS,J+IM)=P(10,J+1)                                         7 150
      VRE(IS,J+2*IM)=P(9,J+1)                                        7 151
      IF (LO(5)) GO TO 33                                            7 152
      VIM(IS,J+IM)=P(12,J+1)                                         7 153
      VIM(IS,J+2*IM)=P(11,J+1)                                       7 154
   33 CONTINUE                                                       7 155
      IF (.NOT.LO(4)) GO TO 34                                       7 156
      E(2)=E(2)*EP(2)                                                7 157
      E(3)=E(3)*EP(3)                                                7 158
      VCIM(IS)=-VOP(2)/(1.+E(2))-4.*VOP(3)*E(3)/((1.+E(3))**2)       7 159
   34 IF (LO(9).OR..NOT.LO(3)) GO TO 35                              7 160
      E(4)=E(4)*EP(4)                                                7 161
      VSO1(IS)=-2.*VOP(4)*E(4)/(AOP(4)*R*(1.+E(4))**2)               7 162
      IF (.NOT.LO(5)) GO TO 35                                       7 163
      E(5)=E(5)*EP(5)                                                7 164
      VSO2(IS)=-2.*VOP(5)*E(5)/(AOP(5)*R*(1.+E(5))**2)               7 165
   35 CONTINUE                                                       7 166
C  COULOMB POTENTIAL
C     AOP5 = A(CHARGE)
      AOP5=0.605
      CALL COULHI(ROP(6),AOP5,BETA,IQN/2,ZZ1,H,ISM,IM,P,PP)
      CALL SUM(ISM,IM,VCRE,VRE,P)
      IF(.NOT.LO(6)) GO TO 39                                        7 167
      WRITE (6,1000) (I,VCRE(I),VCIM(I),I=1,ISM)                     7 168
      IF (LO(9)) GO TO 36                                            7 169
      WRITE (6,1001) (I,VSO1(I),I=1,ISM)                             7 170
      IF (LO(10)) GO TO 36                                           7 171
      WRITE (6,1002) (I,VSO2(I),I=1,ISM)                             7 172
   36 WRITE (6,1003)                                                 7 173
      DO 37 I=1,ISM                                                  7 174
      WRITE (6,1004) I,(J,VRE(I,J),J=1,NV)                           7 175
   37 CONTINUE                                                       7 176
      IF (LO(4)) GO TO 39                                            7 177
      WRITE (6,1005)                                                 7 178
      DO 38 I=1,ISM                                                  7 179
      WRITE (6,1004) I,(J,VIM(I,J),J=1,NV)                           7 180
   38 CONTINUE                                                       7 181
   39 RETURN                                                         7 182
 1000 FORMAT(//' CENTRAL POTENTIAL'/(2(I15,1P2E23.6,' I')))          7 183
 1001 FORMAT('OREAL SPIN-ORBIT POTENTIAL'/(5X,6(I5,1PE15.6)))        7 184
 1002 FORMAT('OIMAGINARY SPIN-ORBIT POTENTIAL'/(5X,6(I5,1PE15.6)))   7 185
 1003 FORMAT('OREAL MULTIPOLES')                                     7 186
 1004 FORMAT(I5,6(I5,1PE15.6)/(5X,6(I5,1PE15.6)))                    7 187
 1005 FORMAT('OIMAGINARY MULTIPOLES')                                7 188
 1006 FORMAT(1H+,50X,4HPLUS,I10)                                     7 189
      END                                                            7 190
```

```
C*********************************************************************
C  COULOMB POTENTIAL BETWEEN TWO HEAVY IONS, ONE OF THEM IS DEFORMED
C  THE OTHER ONE IS A ALPHA PARTICLE
C  INPUT VARIABLES: R1: RADIUS OF THE TARGET IN FM
C                   A1: DIFFUSENESS OF THE TARGET
C                   BETA(6,L): BETA VALUE FOR LAMBDA = L, L = 2 TO 2*MB
C                   R2: RADIUS OF THE PROJECTILE
C                   H: RADIAL STEP SIZE IN FM
C                   ISM: NUMBER OF RADIAL POINTS
C                   LM: NUMBER OF MULTIPOLES
C                   ZIT: NORMALISATION OF THE POTENTIAL; V=ZIT/R
C  OUTPUT VARIABLES: VC(I,L): COULOMB POTENTIAL AT R=I*H AND FOR
C                      LAMBDA = 2*(L-1), L = 1 TO LM+1, LM < 5
C  WORKING FIELD:  P(I): EXP(-R(THETA)/A) FOR THE TARGET
C  TABLES:          XGN(I): GAUSS-LEGENDRE POINTS
C                   PGL(I,L): INTEGRATION WEIGHTS (2*LAMDA + 1)*PGN(I)*PL
C*********************************************************************
      SUBROUTINE COULHI(R1,A1,BETA,MB,ZIT,H,ISM,LM,VC,P)
      LOGICAL*1 LO(1),LO1/.FALSE./
      REAL*4 BETA(6,1)
      REAL*8 D(100)/
     *-1.157D-01,-1.173D-01,-1.166D-01,-1.203D-01,-1.218D-01,-1.232D-01,
     *-1.246D-01,-1.260D-01,-1.273D-01,-1.286D-01,-1.298D-01,-1.309D-01,
     *-1.319D-01,-1.329D-01,-1.337D-01,-1.345D-01,-1.351D-01,-1.356D-01,
     *-1.360D-01,-1.363D-01,-1.363D-01,-1.365D-01,-1.364D-01,-1.362D-01,
     *-1.356D-01,-1.353D-01,-1.347D-01,-1.339D-01,-1.330D-01,-1.320D-01,
     *-1.308D-01,-1.295D-01,-1.281D-01,-1.265D-01,-1.248D-01,-1.230D-01,
     *-1.210D-01,-1.189D-01,-1.167D-01,-1.144D-01,-1.119D-01,-1.093D-01,
     *-1.066D-01,-1.038D-01,-1.009D-01,-9.784D-02,-9.468D-02,-9.141D-02,
     *-8.804D-02,-8.455D-02,-7.738D-02,-7.387D-02,-7.046D-02,-6.714D-02,
     *-6.391D-02,-6.076D-02,-5.771D-02,-5.475D-02,-5.188D-02,-4.910D-02,
     *-4.641D-02,-4.381D-02,-4.130D-02,-3.888D-02,-3.654D-02,-3.430D-02,
     *-3.214D-02,-3.007D-02,-2.808D-02,-2.618D-02,-2.437D-02,-2.264D-02,
     *-2.098D-02,-1.941D-02,-1.792D-02,-1.651D-02,-1.517D-02,-1.390D-02,
     *-1.271D-02,-1.159D-02,-1.054D-02,-9.558D-03,-8.639D-03,-7.784D-03,
     *-6.989D-03,-6.253D-03,-5.573D-03,-4.948D-03,-4.374D-03,-3.850D-03,
     *-3.372D-03,-2.939D-03,-2.548D-03,-2.196D-03,-1.882D-03,-1.601D-03,
     *-1.353D-03,-1.135D-03,-9.565D-04,-7.781D-04/
      REAL*8 A,B,C,F,P(1),PM,PP,EH,EX,R,HR2,FL,RHO,S,VC(ISM,1)
      REAL*8    XGN(10)/Z4013973DF98B86AF,Z403A502C6D25177F,
     1Z405FAB33C559480F,Z4082C82E09FBFFB4,Z40A2D469FD3886D7,
     2Z40BF0F989A352A6F,Z40D6005EAF7E8739,Z40E988320B9FEC8C,
     3Z40F6C6DD3DEB84F5,Z40FE3DA00638E701/
      REAL*8 PI/3.14159265358979300/,PGL(10,5)/
     *Z40271AD8921466DF,Z402630336A588322,Z40246069 1E694A69,
     *Z4021B6588B64DBF8,Z401E41FF31573848,Z401A1817A317A820,
     *Z4015519FE196E249,Z4010084670F7E474,Z3FA64DAF529D83FA,
     *Z3F4825A009D3A2BA,ZC060086A59E629EF,ZC0509C1D10F4E456,
     *ZC034D7012DC42FF2,ZC0124AED89EBF088,Z40102A291284FB60,
     *Z4028C66BF8414EAB,Z403B48FF4B63B8DB,Z403C067F5D016451,
     *Z402E743283E1D61F,Z4016152F887DFB7F,Z407C4079E8766F80,
     *Z40420F422180660C,ZC014C01C3753FE10,ZC05CC093800E90F7,
     *ZC07405A1F20B1D5D,ZC053B2F041048E5D,ZC0127EE695348DCC,
     *Z40290560896BAC2D,Z403E7FC930077336,Z4025D6420F3D4078,
     *ZC088AAF990E6655A,Z8F868B9732E33401,Z407AA3B2C57F407D,
     *Z408A707E74706014,Z401DF3FA05C4237F,ZC05B82229139400C,
     *ZC0724FDBA8739007,ZC0226AEB1A7D7548,Z403205ED86FEDACF,
     *Z40327283617F31CA,Z4090ACCD3238FF19,ZC043873FD0F9C80F,
     *ZC0AE4ADC82C4221E,ZC0189905A9BE9A9A,Z4092AA4A08C14F9C,
     *Z405CF44CCA6E0BE3,ZC04F264FF62DB88D,ZC06C301093986669,
     *Z3FAD7ECD89FCB796,Z403ACE31D63A7D79/
C      RADIUS OF REFERENCE SPHERE (REF. CORRECTION TABLE)
      R2=1.7
    1 ISM1=(R1+10.*A1)/H
      ISM2=(R2+R2)/H
      ISM12=ISM1+ISM2
C  RADIUS OF THE TARGET IN DIRECTION I
      IF(ISM12.GT.ISM) ISM12=ISM
      LM1=LM+1
      IF(LM1.GT.5) LM1=5
      HR2=R2*R2/(H*H)
      DO 3 I=1,10
      X=XGN(I)
      PM=1.D0
      PP=X
      R=PM
      DO 2 L=1,MB
      PM=((4*L-1)*X*PP-(L+L-1)*PM)/(L+L)
      PP=((4*L+1)*X*PM-(L+L)*PP)/(L+L+1)
    2 R=R+DSQRT((L+.25D0)/PI)*PM*BETA(6,L+L)
    3 P(I)=DEXP(-R*R1/A1)
      EH=EXP(H/A1)
      EX=1.D0
      DO 4 L=1,LM1
      DO 4 IS12=1,ISM12
    4 VC(IS12,L)=0.D0
      DO 10 IS1=1,ISM1
      S=(1+MOD(IS1,2))*IS1*IS1
      EX=EX*EH
      DO 9 L=1,LM1
      RHO=0.D0
C  RHO(LAMBDA,R)
      DO 5 I=1,10
    5 RHO=RHO+PGL(I,L)/(1.D0+P(I)*EX)
      RHO=S*RHO
C  F(LAMBDA,R,R')
      DO 8 IS12=1,ISM12
      A=(IS1*IS1+IS12*IS12)/HR2
      B=(2*IS1/HR2)*IS12
      FL=0.D0
      DO 7 I=1,10
      C=A-B*XGN(I)
      IF(C.GT.1.D0) C=3.D0-2.D0/DSQRT(C)
      F=6.D0-C
      IF(C.GT.2.D0) GO TO 6
      X=50.D0*C
      J=X
      X=X-J
      F=F+2.D0*(D(J)+X*(D(J+1)-D(J)))
    6 C=A+B*XGN(I)
      IF(C.GT.1.D0) C=3.D0-2.D0/DSQRT(C)
```

```
      F=F-C
      IF(C.GT.2.D0) GO TO 7
      X=50.D0*C
      J=X
      X=X-J
      F=F+2.D0*(D(J)+X*(D(J+1)-D(J)))
    7 FL=FL+F*PGL(I,L)
    8 VC(IS12,L)=VC(IS12,L)+RHO*FL
    9 CONTINUE
   10 CONTINUE
      C=DSQRT(4.D0*PI)
      B=ZIT*C/(H*ISM12*VC(ISM12,1))
      DO 11 L=1,LM1
      A=DSQRT(DFLOAT(4*L-3))
      A=B/(A*A*A)
      IF(L.EQ.1) A=A/C
      DO 11 IS12=1,ISM12
   11 VC(IS12,L)=A*VC(IS12,L)
      IF(ISM12.GE.ISM) GO TO 13
      DO 12 IS=ISM12,ISM
      A=DFLOAT(ISM12)/DFLOAT(IS)
      B=A
      DO 12 L=1,LM1
      VC(IS,L)=B*VC(ISM12,L)
   12 B=B*A*A
   13 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SUM(ISM,IM,VCRE,VRE,P)
      REAL*4 VCRE(1),VRE(ISM,1)
      REAL*8 P(1)
      DO 21 IS=1,ISM
      VCRE(IS)=VCRE(IS)+P(IS)
      DO 20 J=1,IM
   20 VRE(IS,J)=VRE(IS,J)+P(IS+J*ISM)
   21 CONTINUE
      RETURN
      END
```