

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

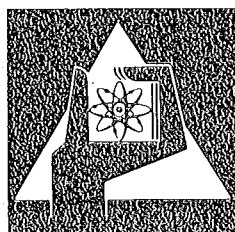
Mai 1976

KFK 2280

Institut für Reaktorbauelemente
Projekt Nukleare Sicherheit

**Analytische Untersuchung von Gasströmungen in
Ringspalten beim Aufblähvorgang von Zirkaloy-
Hüllrohren**

M. Reimann



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2280

Institut für Reaktorbauelemente

Projekt Nukleare Sicherheit

Analytische Untersuchung von Gasströmungen in Ringspalten
beim Aufblähvorgang von Zirkaloy-Hüllrohren

M. Reimann

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

Zusammenfassung

Für die Programmsysteme SSYST und FRAP-T, die zur analytischen Beschreibung des Brennstabverhaltens bei Störfalltransienten dienen, werden Modellvorstellungen zur Gasströmung im Ringspalt zwischen Hüllrohr und Brennstoffoberfläche entwickelt.

Ausgehend von den allgemeingültigen Erhaltungssätzen werden die physikalischen Vereinfachungsschritte aufgezeigt, die zu einem quasi-stationären, quasi-inkompressiblen Strömungsmodell führen. Das resultierende Gleichungssystem kann für laminare Strömung in axial durchströmten konzentrischen und exzentrischen Ringspalten gelöst werden, wobei auch radial einströmende, freigesetzte gasförmige Spaltprodukte berücksichtigt werden können.

Die Ergebnisse für eindimensionale, isotherme Spaltströmung werden mit den Methoden der Gasdynamik überprüft.

Für ausgebildete turbulente Strömung in glatten und rauhen Ringspalten werden ebenfalls Lösungen abgeleitet. Im Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung wird ein Auswertungsverfahren angegeben, um Widerstandsbeiwerte aus Versuchsergebnissen zu ermitteln.

Diese Arbeit wurde im Rahmen der beim Projekt Nukleare Sicherheit laufenden Untersuchungen zur Wechselwirkung zwischen aufblähenden Zirkaloy-Hüllen und einsetzender Kernnotkühlung erstellt.

Analytical Investigation of Annular Gap Gas Flow during Ballooning of Zircaloy Claddings

Abstract

For the program systems SSYST and FRAP-T describing analytically the behaviour of the fuel elements during transients under accident conditions, models for gas flow in the annular gap between cladding and fuel surface are derived.

Starting from the generally valid conservation laws, the steps of simplification and their physical significance are shown which lead to a quasi-stationary, quasi-incompressible flow model. The resulting set of equations can be solved for axial, laminar flow in concentric and excentric annular gaps. Radial entering of generated gaseous fission products can be taken into account.

The results for one-dimensional, isothermal flow are tested by means of gas dynamics.

For fully developed turbulent flow in smooth and rough annular gaps, solutions are given as well. For the transition region between laminar and turbulent flow, a method for evaluating friction coefficients from experiments is given.

This paper was achieved within the research program of Projekt Nukleare Sicherheit in connection with investigations of the interaction between ballooning zircaloy claddings and emergency core cooling.

Inhaltsübersicht

Seite

Formelzeichen

I

1. Einleitung

1

2. Ausgangsgleichungen

2

3. Vereinfachungen des Gleichungssystemes

4

4. Lösungen der inkompressiblen Ausgangsgleichungen

9

4.1 Vergleich von ebenem Spalt und Ringspalt

9

4.2 Strömung durch einen exzentrischen Ringspalt

10

5. Lösungen der kompressiblen Ausgangsgleichungen

13

5.1 Spaltströmung mit radialem Temperaturgradienten

13

5.2 Isotherme Spaltströmung mit radialem Einströmen

16

5.3 Einfluß der elastischen Hüllrohrdehnung auf
die Spaltströmung

19

6. Gasdynamische Betrachtung einer isothermen Spalt-
strömung

21

7. Spaltströmung mit vom laminaren Fall abweichenden
Reibungsgesetzmäßigkeiten

28

8. Schlußfolgerungen

31

Literatur

33

Formelzeichen

c	Spaltbreite
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
D	Durchmesser
D_H	hydraulischer Durchmesser
e_{ij}	Tensor nach Gl. (2.3)
E	spezifische Gesamtenergie
E	Elastizitätsmodell
f	Reibungsbeiwert
F_i	Feldvektor
F	Fläche
G	Geometriefaktor
H	spezifische Enthalpie
Ha	Hagen-Zahl
K	Konstante
L	Spaltlänge
\dot{m}	Massenstrom
Ma	Mach-Zahl
p	Druck
Pr	Prandtl-Zahl
q	zugeführte Wärme pro Masseneinheit
r	Radius
R	Gaskonstante
Re	Reynolds-Zahl
T	absolute Temperatur
T_0	isentropie Ruhetemperatur
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
u^2	Quadrat des Betrages des Geschwindigkeitsvektors
u_i	Geschwindigkeitsvektor
U	spezifische innere Energie
U	Umfang
w	Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
W	Bezugsgeschwindigkeit
x	Ortskomponente quer zum Spalt
x_i	Ortsvektor
z	Ortskomponente in axialer Richtung

γ	elastische Hüllrohrdehnung
δ	kleine Größe $\delta \ll 1$
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
Δ	Verschiebung der Mittelpunkte beim exzentrischen Ringspalt
Δp ΔD_H	} Differenzen
ε	dimensionslose Temperatur
ζ	dimensionslose Koordinate in z - Richtung
η	dynamische Zähigkeit
α	Verhältnis der spezifischen Wärmen
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ_0	spezifischer Massenstrom
ξ	dimensionslose Koordinate in x - Richtung
π	3,14159....
ρ	Dichte
σ_{ij}	Spannungstensor
τ	Zeit
τ_w	Wandschubspannung
φ	Winkel in Umfangsrichtung
Φ	dimensionsloser Druck
χ	Abkürzung nach Gl. (5.15)

Indizes

a	außen (radial)
A	Anfang (axial)
b	Bezugszustand für thermodyn. Größen
E	Ende (axial)
ES	ebener Spalt
EK	Spaltende, kritische Strömung
exS	exzentrischer Ringspalt

G	Berechnung mit gasdynamischen Methoden
i	innen (radial)
K	kritische Strömung
m	mittlere Größe
o	Referenzzustand
P	Poiseuille - Strömung (quasi - inkompressibel)
RS	Ringspalt
w	Wand (Hüllrohr)

1. Einleitung

Beim Kühlmittelverluststörfall eines Leichtwasserreaktors können die Brennstabhüllen unter Umständen Temperaturen erreichen, bei denen sie unter der Wirkung des inneren Überdrucks aufblähen. Dabei entstehen zwischen der beulenden Stelle und den Gasplena Druckdifferenzen, die eine Gasströmung durch den Spalt zwischen Hüllrohr und Brennstoffoberfläche in Gang setzen. Dieser Strömungsvorgang beeinflusst den zeitabhängigen Druck in der Beule und bestimmt damit in Zusammenarbeit mit Temperatur und Werkstoffeigenschaften der Hülle den weiteren Ablauf des Aufblähvorganges.

Zur analytischen Beschreibung der Vorgänge beim Kühlmittelverluststörfall werden vom IKE-Stuttgart in Zusammenarbeit mit der GfK das Programmsystem SSYST und von der ANC das Programmsystem FRAP-T entwickelt. Diese Programmsysteme werden aus Modulen aufgebaut, die physikalische Modellvorstellungen der Einzelvorgänge enthalten.

Die Modelle zur axialen Gasströmung, die für SSYST in [1] und für FRAP-T in [2] angegeben sind, werden mit einem eigenen Modell verglichen, das im vorliegenden Bericht abgeleitet wird. Dazu werden, ausgehend von den allgemeingültigen Erhaltungssätzen, schrittweise die notwendigen Vereinfachungen aufgezeigt, um das System der Ausgangsgleichungen lösbar zu machen.

Es werden Lösungen für laminar in axialer Richtung durchströmte zentrische und exzentrische Ringspalte angegeben. Beim zentrischen Ringspalt wird der Einfluß von starken Temperaturgradienten in radialer Richtung und der Einfluß der elastischen Hüllrohrdehnung untersucht. Weiter wird zu Vergleichszwecken die isotherme Spaltströmung mit den Methoden der Gasdynamik betrachtet.

Da bei starken Temperaturtransienten erhebliche Mengen von Spaltgasen aus dem Brennstoff freigesetzt werden können, wird ferner eine Lösung der vereinfachten Ausgangsgleichungen mit der zusätzlichen Randbedingung des radialen Einströmens entwickelt.

Schließlich werden Beziehungen für Strömungen angegeben, deren Reibungsgesetzmäßigkeiten vom laminaren Fall abweichen.

2. Ausgangsgleichungen

Das Verhalten eines strömenden idealen Gases wird durch das folgende Gleichungssystem in Tensorschreibweise allgemein beschrieben [3,4]:

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{D\rho}{D\tau} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} ; \quad (2.1)$$

b) Bewegungsgleichung:

$$\rho \frac{Du_i}{D\tau} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

mit dem Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (2.2)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ e_{kk} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

und der Kronecker-Operator

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (2.4)$$

ist.

Damit folgt:

$$\rho \frac{Du_i}{D\tau} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right]; \quad (2.5)$$

c) Zustandsgleichungen eines idealen Gases:

Thermische Zustandsgleichung

$$\rho = \frac{p}{RT}; \quad (2.6)$$

Kalorische Zustandsgleichung

$$\left. \begin{aligned} H &= c_p T \\ c_p &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Beziehung für die dynamische Viskosität

$$\eta = \eta_b \left(\frac{T}{T_b} \right)^n; \quad (2.8)$$

Prandtl - Zahl

$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \text{const.}; \quad (2.9)$$

d) Energiegleichung

$$\rho \frac{DE}{D\tau} = \rho u_i F_i + \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

mit

$$E = U + \frac{u^2}{2}; \quad u^2 \equiv |u_i|^2. \quad (2.11)$$

Durch die Einführung der spezifischen Enthalpie

$$H = U + \frac{p}{\rho} \quad (2.12)$$

wird die Energiegleichung (2.10) zu

$$\rho \frac{D}{D\tau} \left(H + \frac{u^2}{2} \right) = \rho \frac{D}{D\tau} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \rho u_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\eta}{Pr} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j}$$

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (2.1) gilt für

$$\rho \frac{D}{D\tau} \left(\frac{p}{\rho} \right) \equiv \frac{\partial p}{\partial \tau} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial (p u_i)}{\partial x_i},$$

damit folgt:

$$\rho \frac{D}{D\tau} \left(H + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) u_i + \frac{\eta}{Pr} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\} + \rho F_i u_i$$

oder

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(H + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho u_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \eta \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) u_i + \frac{1}{Pr} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right]. \quad (2.13)$$

Die beiden skalaren Gleichungen (2.1) und (2.13) und die Vektorgleichung (2.5) stellen zusammen mit den Zustandsgleichungen (2.6) bis (2.8) das bestimmende Gleichungssystem für das vektorielle Geschwindigkeitsfeld u_i und für die beiden skalaren Felder des Druckes p und der Temperatur T dar.

3. Vereinfachungen des Gleichungssystems

Es wird eine stationäre, ebene Strömung in einem kartesischen Koordinatensystem betrachtet, deren Orts- und Geschwindigkeitsvektor

$$x_i = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \quad u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ist. Der Einfluß der Gravitationskraft F_i wird vernachlässigt.

Mit diesen Voraussetzungen wird die Kontinuitätsgleichung (2.1) zu

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

die beiden Komponenten der Bewegungsgleichung (2.5) lauten in x-Richtung:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right]; \quad (3.3)$$

in z-Richtung:

$$\rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (3.4)$$

und die Energiegleichung (2.13) lautet unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (3.2)

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H}{Pr} + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H}{Pr} + \frac{4}{3} \frac{w^2}{2} \right) - \rho w \left(H + \frac{w^2}{2} \right) \right]. \quad (3.5)$$

Zunächst wird inkompressible isotherme Strömung ($\rho = \text{const.}$, $T = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$) vorausgesetzt. Damit wird das Gleichungssystem (3.2-4) unmittelbar zu

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \sigma; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.8)$$

In einem zylindrischen Koordinatensystem mit den Bezeichnungen nach (3.1) bleiben Gln. (3.6,7) erhalten und Gl.(3.8) wird zu

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.9)$$

Bei kompressibler Strömung muß das Gleichungssystem (3.2-5) durch eine Größenordnungsabschätzung der Terme weiter vereinfacht werden. Dazu werden die Gleichungen durch die Wahl geeigneter Bezugsgrößen in dimensionslose Form gebracht, so daß die variablen Terme möglichst von der Größenordnung 1 sind. Die Zustandsgrößen werden auf mittlere Zustände bezogen:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_m}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_m}; \quad \bar{H} = \frac{H}{H_m}; \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_m}, \quad (3.10)$$

die Variablen x und z auf charakteristische Abmessungen quer zur Strömungsrichtung und in Strömungsrichtung

$$\bar{x} = \frac{x}{c}; \quad \bar{z} = \frac{z}{L} \quad (3.11)$$

und die Geschwindigkeit w wird mit der noch nicht näher bestimmten Geschwindigkeit W skaliert:

$$\bar{w} = \frac{w}{W}. \quad (3.12)$$

Die durchströmte Geometrie ist so beschaffen, daß der Quotient

$$\frac{c}{L} = \delta \quad (3.13)$$

von sehr kleiner Größenordnung $\delta \ll 1$ ist. Führt man ferner die Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho_m W c}{\eta_m} \quad (3.14)$$

und die Mach-Zahl

$$Ma^2 = \frac{\rho_m W^2}{\alpha p_m} = \frac{W^2}{(\alpha-1) H_m} \quad (3.15)$$

ein, und legt man die noch freie Bezugsgeschwindigkeit W durch die Definition

$$\frac{\alpha Ma^2}{Re} \cdot \left(\frac{L}{c}\right)^2 = 1 \quad (3.16)$$

fest, so ist der Quotient $\alpha Ma^2/Re$ ebenfalls von der Größenordnung δ^2 , was physikalisch plausibel ist ($Ma < 1$: Unterschall, $Re \gg 1$).

Das Gleichungssystem lautet damit:

$$\frac{\partial(\bar{p}\bar{w})}{\partial\bar{z}} = 0; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} - \frac{\alpha Ma^2}{Re} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left(\bar{\eta} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} \right) + \frac{2}{3} \frac{\alpha Ma^2}{Re} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left(\bar{\eta} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} \right) = 0; \quad (3.18)$$

$$\alpha Ma^2 \bar{p}\bar{w} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} = - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \left(\frac{L}{c}\right)^2 \frac{\alpha Ma^2}{Re} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left(\bar{\eta} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} \right) + \frac{\alpha Ma^2}{Re} \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left(\bar{\eta} \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} \right); \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left\{ \alpha Ma^2 \bar{p}\bar{w} \left[\bar{H} + (\alpha-1) Ma^2 \frac{\bar{w}^2}{2} \right] - \frac{\alpha Ma^2}{Re} \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[\frac{\bar{H}}{Pr} + \frac{4}{3} (\alpha-1) Ma^2 \frac{\bar{w}^2}{2} \right] \right\} - \\ & - \left(\frac{L}{c}\right)^2 \frac{\alpha Ma^2}{Re} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left\{ \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left[\frac{\bar{H}}{Pr} + (\alpha-1) Ma^2 \frac{\bar{w}^2}{2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Setzt man in einem ersten Vereinfachungsschritt alle Terme der Größenordnung δ bzw. δ^2 gleich Null, so wird das Gleichungssystem zu:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w})}{\partial z} = \sigma ; \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 ; \quad (3.22)$$

$$x Ma^2 \bar{\rho} \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right] ; \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{H}}{Pr} + (x-1) Ma^2 \frac{\bar{w}^2}{2} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ x Ma^2 \bar{\rho} \bar{w} \left[\bar{H} + (x-1) Ma^2 \frac{\bar{w}^2}{2} \right] \right\}. \quad (3.24)$$

Aus Gleichung (3.18) folgt die wichtige Konsequenz, daß unter den getroffenen Einschränkungen der Druck p unabhängig von der Koordinate x ist, also

$$p = p(z).$$

In einem zweiten Vereinfachungsschritt werden die Terme mit dem Faktor Ma^2 zu Null gesetzt. Das bedeutet, daß in der Bewegungsgleichung (3.23) die Impulsänderung gegenüber Einflüssen der Druckkraft und der Zähigkeitskraft vernachlässigt wird, und daß in der Energiegleichung (3.24) die Einflüsse der kinetischen Energie und des Enthalpietransports gegenüber der Wärmeleitung vernachlässigt wurden. Mit dieser zusätzlichen Voraussetzung wird das Gleichungssystem (3.21-24), wenn man wieder zur dimensionsbehafteten Schreibweise zurückkehrt, zu

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \sigma ; \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right] ; \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial H}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.28)$$

Der Vereinfachungsschritt $Ma \rightarrow 0$ bedeutet, daß die Strömung als quasi-inkompressibel betrachtet wird, wie auch ein Vergleich von (3.26, 27) mit (3.7, 8) zeigt. Der Einfluß der veränderlichen Dichte wird lediglich in der Kontinuitätsgleichung (3.25) berücksichtigt. Die Energiegleichung (3.28) besagt, daß Energie nur durch Wärmeleitung in Richtung senkrecht zur Strömungsrichtung transportiert wird.

Die Zulässigkeit des Vereinfachungsschrittes $Ma \rightarrow 0$ liegt bei durchströmten zylindrischen Geometrien nicht unmittelbar auf der Hand, da die Strömung durch Reibungseinflüsse bis zur kritischen Mach-Zahl beschleunigt werden kann. In Abschnitt 6 soll dieses Problem mit den Methoden der Gasdynamik untersucht werden.

4. Lösungen der inkompressiblen Ausgangsgleichungen

4.1 Vergleich von ebenem Spalt und Ringspalt

Aus Gl. (3.6) folgt unmittelbar, daß die Geschwindigkeit w unabhängig von der Koordinate z ist und aus Gl. (3.7), daß der Druck unabhängig von der Koordinate x ist.

Deshalb können in den Gl. (3.8) und (3.9) die partiellen Differentiale durch totale Differentiale ersetzt werden. Die Randbedingungen für einen durchströmten Spalt sind:

$$\left. \begin{array}{l} x = r_i : w = 0 \\ x = r_a : w = 0 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Gl. (3.8) und (3.9) lassen sich mit (4.1) elementar integrieren. Unter Verwendung der Definition des Massenstromes

$$\dot{m} = \int_{(F)} \rho w dF = 2\pi \rho \int_{r_i}^{r_a} x w dx \quad (4.2)$$

folgt aus Gl. (3.9) für den Ringspalt:

$$\dot{m}_{RS} = - \frac{\pi}{8} \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (r_a^2 - r_i^2) \left[\frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln r_a/r_i} - (r_a^2 + r_i^2) \right] \quad (4.3)$$

und aus Gl. (3.8) für den ebenen Spalt (Grenzfall $\frac{r_a}{r_i} \rightarrow 1$):

$$\dot{m}_{ES} = - \frac{\pi}{12} \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (r_a + r_i) (r_a - r_i)^3 \quad (4.4)$$

Nach Einführung des hydraulischen Durchmessers

$$D_H = \frac{4F}{u} = 2(r_a - r_i) = 2c \quad (4.5)$$

und des mittleren Durchmessers

$$D_m = r_a + r_i \quad (4.6)$$

wird der Quotient $\dot{m}_{ES}/\dot{m}_{RS}$ zu

$$\frac{\dot{m}_{ES}}{\dot{m}_{RS}} = \frac{2}{3} \frac{D_m D_H^3}{D_m D_H \left[2 D_m^2 + \frac{D_H^2}{2} - \frac{2 D_m D_H}{\ln \frac{2 D_m + D_H}{2 D_m - D_H}} \right]} \quad (4.7)$$

Die Auswertung von Gl. (4.7) wird in Tabelle 1 wiedergegeben. Erst bei $D_H/D_m \approx 1$ beginnt der Quotient $\dot{m}_{ES}/\dot{m}_{RS}$ vom Wert 1 abzuweichen. Deshalb kann die Betrachtung der Gasströmung beim Kühlmittelverluststörfall durchwegs auf den ebenen Spalt (Grenzfall $r_a/r_i \rightarrow 1$) beschränkt werden.

$\frac{D_H}{D_m}$	$\frac{\dot{m}_{ES}}{\dot{m}_{RS}}$
0.0108	1.0000
0.0216	1.0000
0.1081	0.9998
1.0811	0.9774
1.6216	0.9330
1.7297	0.9158
1.8378	0.8910
1.9459	0.8454
1.9784	0.8159
1.9892	0.7981
2.0000	0.6667

Tabelle 1: Vergleich von ebenem Spalt und Ringspalt

4.2 Strömung durch einen exzentrischen engen Spalt

Die Verhältnisse in einem exzentrischen Ringspalt werden in Abb.1 dargestellt. Das Polarkoordinatensystem x, φ wird auf den Mittelpunkt M_m bezogen. Die Verschiebung der Mittelpunkte M_j, M_a beträgt Δ .

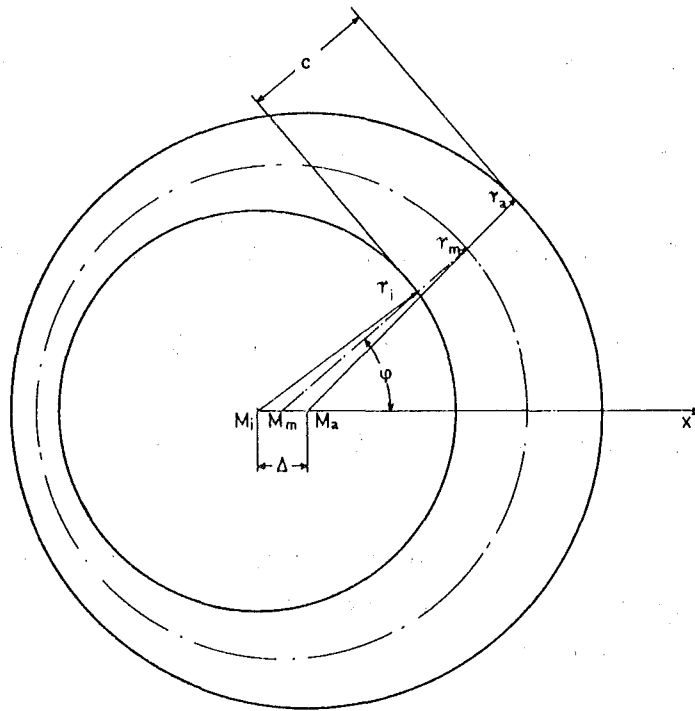


Abb. 1: Koordinatensystem für den exzentrischen Ringspalt

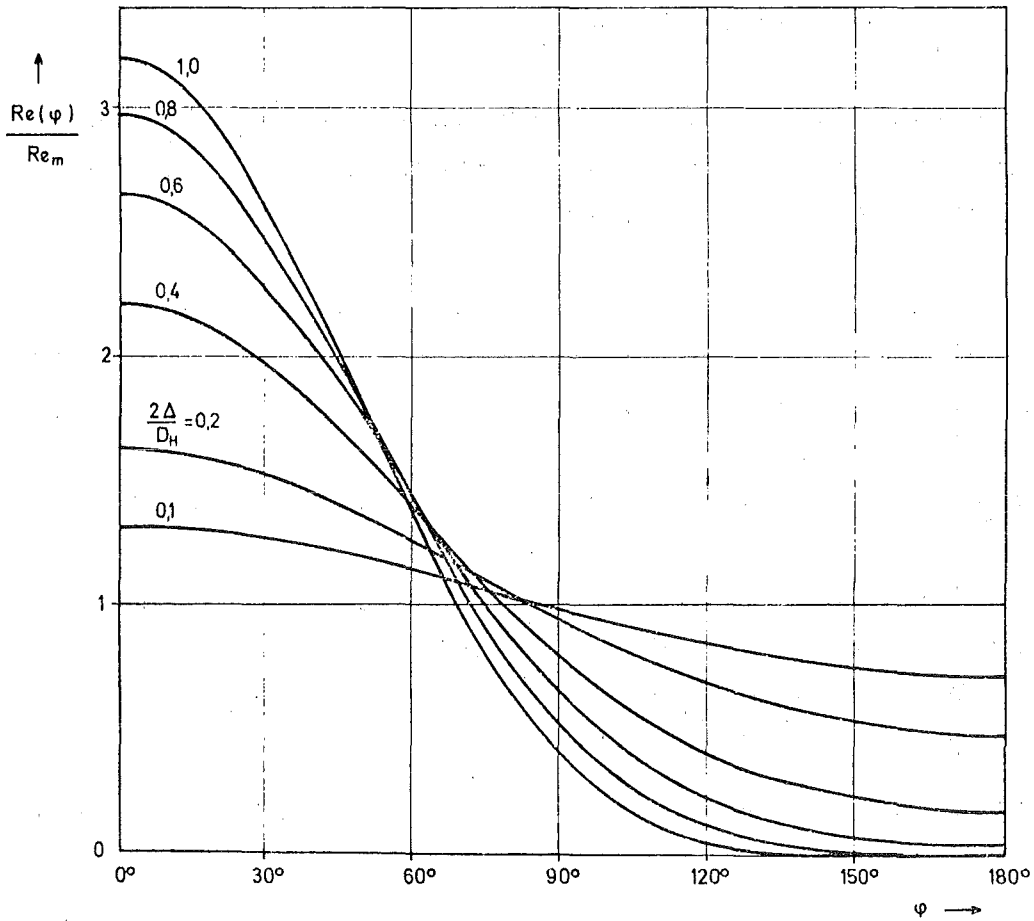


Abb. 2: Ortsabhängige Reynolds-Zahl beim exzentrischen Ringspalt

Die Spaltweite $c(\varphi)$ ergibt sich zu

$$c(\varphi) = r_a - r_i + \Delta \cos \varphi . \quad (4.8)$$

Damit können die Randbedingungen angegeben werden:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Innere Kontur: } x = r_m - \frac{1}{2} c(\varphi) : w = 0 \\ \text{Äußere Kontur: } x = r_m + \frac{1}{2} c(\varphi) : w = 0. \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

Die Integration der für enge Ringspalte bzw. für ebene Spalte gültigen Gleichung (3.8) mit der Definition (4.2) führt mit den Randbedingungen (4.9) zu

$$\dot{m}_{\text{exS}} = -\frac{\pi}{12} \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} (r_a + r_i) (r_a - r_i)^3 \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta}{r_a - r_i} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

Der Quotient $\dot{m}_{\text{exS}} / \dot{m}_{\text{ES}}$ lautet:

$$\dot{m}_{\text{exS}} / \dot{m}_{\text{ES}} = \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2\Delta}{D_H} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Die Auswertung von Gl. (4.11) wird in Tabelle 2 wiedergegeben. Die Ergebnisse zeigen, daß auch geringe Exzentrizitäten den Massenstrom stark beeinflussen.

$\frac{2\Delta}{D_H}$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\dot{m}_{\text{exS}} / \dot{m}_{\text{ES}}$	1	1,015	1,06	1,24	1,54	1,96	2,50

Tabelle 2: Einfluß von Exzentrizitäten auf die Spaltströmung.

Das Verhältnis der ortsabhängigen Reynolds-Zahl $Re(\varphi)$ zur mittleren Reynolds-Zahl Re_m lautet

$$\frac{Re(\varphi)}{Re_m} = \frac{\left(1 + \frac{2\Delta \cos \varphi}{D_H} \right)^3}{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2\Delta}{D_H} \right)^2} \quad (4.12)$$

und wird in Abb.2 wiedergegeben. Die örtliche Reynoldszahl kann

den Mittelwert erheblich übersteigen. Deshalb ist zu erwarten, daß bei exzentrischen Ringspalten schon bei wesentlich kleineren mittleren Reynolds-Zahlen ein Abweichen von den laminaren Reibungsgesetzmäßigkeiten zu beobachten ist als bei zentrischen Ringspalten oder beim Kreisrohr.

5. Lösungen der kompressiblen Ausgangsgleichungen

5.1 Spaltströmung mit radialem Temperaturgradienten

Die Einführung des Potenzansatzes (2.8) für die Viskosität in das vereinfachte Gleichungssystem (3.21 - 24) ergibt die Ausgangsgleichungen

$$\frac{\partial(qw)}{\partial z} = 0; \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma; \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{H}{H_0} \right)^n \frac{\partial w}{\partial x} \right]; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{H}{H_0} \right)^n \frac{\partial H}{\partial x} \right] = \sigma. \quad (5.4)$$

Der Exponent n wurde für Helium aus Tafelwerten [5] zu

$$n = 0,69342 \quad (5.5)$$

bestimmt.

Als weitere Einschränkung wird vorausgesetzt, daß die innere Wand und die äußere Wand die konstanten Temperaturen T_i bzw. T_a besitzen. Damit folgt

$$H = H(x); \quad (5.6)$$

aus (5.2) folgt

$$p = p(z). \quad (5.7)$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\left. \begin{array}{l} x = r_a: \quad H = H_a \\ x = r_i: \quad H = H_i \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Nun werden die dimensionslosen Variablen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x - r_m}{c}; & \eta &= \frac{z}{c}; \\ Re &= \frac{\rho w c}{\eta}; & \epsilon &= \frac{H}{H_0} = \frac{T}{T_0}; \\ \phi &= \frac{c}{\eta_0 \left[\frac{\rho w}{\eta} H_0 \right]^{1/2}} \rho \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

eingeführt. Aus der Kontinuitätsgleichung (5.1) folgt mit (5.6) und der in (5.9) angegebenen Definition der Reynolds-Zahl

$$Re = Re(\xi). \quad (5.10)$$

Im verbleibenden Gleichungssystem können wegen (5.7) und (5.10) die partiellen Differentiale durch totale Differentiale ersetzt und die Variablen separiert werden:

$$\left. \begin{aligned} \phi \frac{d\phi}{d\xi} &= K; \\ \frac{d}{d\xi} \left\{ \epsilon(\xi)^n \frac{d[Re(\xi) \epsilon(\xi)^{n+1}]}{d\xi} \right\} &= K; \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \epsilon(\xi)^n \frac{d\epsilon(\xi)}{d\xi} \right\} = 0. \quad (5.12)$$

Die Randbedingungen sind:

$$\left. \begin{aligned} \xi = -\frac{1}{2}: & Re = 0; \quad \epsilon = \epsilon_i; \\ \xi = +\frac{1}{2}: & Re = 0; \quad \epsilon = \epsilon_a. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Die Integration der Energiegleichung (5.12) ergibt:

$$\epsilon^{n+1} = (\epsilon_a^{n+1} - \epsilon_i^{n+1}) \xi + \frac{1}{2} (\epsilon_a^{n+1} + \epsilon_i^{n+1}). \quad (5.14)$$

Mit diesem Ergebnis läßt sich die Impulsgleichung (5.11) nach Einführung der Substitution

$$\chi = \epsilon^{n+1} \quad (5.15)$$

integrieren:

$$Re \cdot \chi = \frac{n+1}{n+2} \frac{K}{(\epsilon_a^{n+1} - \epsilon_i^{n+1})^2} \left[\chi^{\frac{n+2}{n+1}} - \frac{\epsilon_a^{n+2} - \epsilon_i^{n+2}}{\epsilon_a - \epsilon_i} \chi^{\frac{1}{n+1}} + \frac{\epsilon_a^{n+1} - \epsilon_i^{n+1}}{\epsilon_a - \epsilon_i} \epsilon_a \epsilon_i \right]. \quad (5.16)$$

Die Integration über γ mit den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \gamma = 0: & \quad p = p_A \\ \gamma = \frac{L}{c}: & \quad p = p_E \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

ergibt für die Konstante K mit der in (5.9) angegebenen Definition von Φ :

$$K = - \frac{c^3}{\eta_0^2 \frac{x-1}{x} H_0} \frac{p_A^2 - p_E^2}{2L} = - \frac{D_H^3}{8\eta_0 RT_0} \frac{p_A^2 - p_E^2}{2L} \quad (5.18)$$

Mit der Definition des Massenstroms (4.2) ergibt die weitere Integration:

$$\begin{aligned} \dot{m} = & - \frac{\pi}{8} \frac{D_H^3}{\eta_0 RT_0} D_m \frac{p_A^2 - p_E^2}{2L} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_i} \frac{1}{(\epsilon_a^{n+1} - \epsilon_i^{n+1})^4} \cdot \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{D_H}{12D_m} - \frac{1}{2} \right) \epsilon_a^{3n+4} + \left(\frac{D_H}{12D_m} + \frac{1}{2} \right) \epsilon_i^{3n+4} + \right. \\ & + \epsilon_a \epsilon_i \left[\left[- \left(\frac{1}{12} + \frac{n+1}{2n(2n+1)} \right) \frac{D_H}{D_m} + \frac{n+2}{2n} \right] \epsilon_a^{3n+2} + \left[- \left(\frac{1}{12} + \frac{n+1}{2n(2n+1)} \right) \frac{D_H}{D_m} - \frac{n+2}{2n} \right] \epsilon_i^{3n+2} \right] + \\ & + \epsilon_a^{n+1} \epsilon_i^{n+1} \left[\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{n+1}{2n} \right) \frac{D_H}{D_m} + \frac{n-2}{2n} \right] \epsilon_a^{n+2} + \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{n+1}{2n} \right) \frac{D_H}{D_m} - \frac{n-2}{2n} \right] \epsilon_i^{n+2} \right] + \\ & \left. + \epsilon_a^{n+2} \epsilon_i^{n+2} \left[\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{n+1}{2n+1} \right) \frac{D_H}{D_m} + \frac{n-2}{2n} \right] \epsilon_a^n + \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{n+1}{2n+1} \right) \frac{D_H}{D_m} - \frac{n-2}{2n} \right] \epsilon_i^n \right] \right\} \quad (5.19) \end{aligned}$$

Die beiden Sonderfälle $n=0$ (lineares Temperaturprofil, $\eta = \eta_0 = \text{const.}$) und $\epsilon_a - \epsilon_i = 0$ (isotherme Strömung, $T = T_0 = \text{const.}$) können nicht unmittelbar aus Gl. (5.19) abgeleitet werden. Die Integration der Ausgangsgleichungen ergibt im ersten Fall ($\eta = \eta_0 = \text{const.}$) für den Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} = & - \frac{\pi}{16} \frac{D_H^3}{\eta_0 RT_0} D_m \frac{p_A^2 - p_E^2}{2L} \frac{1}{(\epsilon_a - \epsilon_i)^4} \cdot \left\{ \epsilon_a^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{5 D_H}{12 D_m} \right] + \right. \\ & + \epsilon_i^3 \left[\frac{1}{2} + \frac{5 D_H}{12 D_m} \right] + \epsilon_a^2 \epsilon_i \left[\left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{\epsilon_a}{\epsilon_i} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{\epsilon_a}{\epsilon_i} \right) \frac{D_H}{D_m} \right] + \\ & \left. + \epsilon_i^2 \epsilon_a \left[\left(-\frac{1}{2} - \ln \frac{\epsilon_a}{\epsilon_i} \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{\epsilon_a}{\epsilon_i} \right) \frac{D_H}{D_m} \right] \right\} \quad (5.20) \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung isothermer Strömung ($\epsilon = \text{const.}$) führt die Integration der Ausgangsgleichungen zu

$$\dot{m} = \frac{\pi}{96} D_H^3 D_m \frac{p_A^2 - p_E^2}{2\eta_0 RT_0 L} \quad (5.21)$$

Vergleichsrechnungen mit den Beziehungen (5.19, 20, 21) ergaben nur geringfügige Unterschiede im Massenstrom. So wichen bei einer Temperaturdifferenz zwischen innerer und äußerer Begrenzung des Spaltes von 200 K ($D_H = 10^{-4}$ m ; $D_m = 9,25 \cdot 10^{-3}$ m) die Ergebnisse aus den Gln. (5.19, 20, 21) nur um 0,2% voneinander ab. Deshalb kann auch beim Auftreten von starken Temperaturgradienten die Spaltströmung als isotherm bei gemittelter Temperatur betrachtet und durch Gl. (5.21) beschrieben werden.

Der in Gl. (4.4) ^{für} inkompressible Strömung abgeleitete Massenstrom geht in die Beziehung (5.21) über, wenn die Dichte ρ vor der Integration über die Spaltlänge durch die Zustandsgleichung (2.6) ausgedrückt wird. Die Ergebnisse für den exzentrischen Ringspalt (Gl. 4.10) können deshalb ebenfalls auf kompressible Strömung übertragen werden. Während die Gl. (4.4, 10) exakte Lösungen für eindimensionale, inkompressible Strömungen darstellen, sind die entsprechenden Beziehungen für kompressible Strömungen nur gültig, wenn die in Abschnitt 3 getroffenen Vereinfachungen physikalisch gerechtfertigt sind.

5.2 Isotherme Spaltströmung mit radialem Einströmen

Es wird angenommen, daß im Brennstoff gasförmige Spaltprodukte freigesetzt werden, so daß durch ein Element der Brennstoffoberfläche, die die innere Begrenzung des Spaltes darstellt, ein spezifischer Massenstrom

$$\mu_0 = \rho u_0 \quad (5.22)$$

in x - Richtung eintritt. Der Orts- und Geschwindigkeitsvektor ist

$$x_i = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \quad u_i = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Die Vereinfachung der Impulsgleichung (2.5) und der Energiegleichung (2.13) für stationäre, zweidimensionale Strömung mit den in Abschnitt 3 angegebenen Vereinfachungsschritten führt ebenfalls zu den in (3.22, 23, 24) angegebenen Gleichungen.

Die Geschwindigkeitskomponente u kommt lediglich in der Kontinuitätsgleichung vor:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (5.24)$$

Die Kontinuitätsgleichung wird über die Querschnittsfläche integriert:

$$\frac{d}{dz} \int_{r_i}^{r_a} \rho w x dx = r_i \rho u_0. \quad (5.25)$$

Mit den dimensionslosen Koordinaten nach (5.9), mit

$$Re_0 = \frac{\rho u_0 c}{\eta} \quad (5.26)$$

und unter der Bedingung $T = \text{const.}$ (isotherme Strömung) folgt für das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Re \cdot \left(\xi \frac{c}{r_m} + 1 \right) d\xi = \frac{r_i}{r_m} Re_0 = \text{const.} \quad (5.27)$$

und

$$\Phi \frac{d\Phi}{dy} = \frac{d^2 Re}{d\xi^2}. \quad (5.28)$$

Mit den Randbedingungen in radialer Richtung

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -\frac{1}{2} : Re = 0; \\ \xi = +\frac{1}{2} : Re = \sigma \end{array} \right\} \quad (5.29)$$

ergibt die Integration von (5.28)

$$\frac{\Phi}{2} \frac{d\Phi}{dy} \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right) = Re. \quad (5.30)$$

Nach Einsetzen von (5.30) in (5.27) folgt durch Integration

$$\frac{d^2 \Phi^2}{dy^2} = -24 \frac{r_i}{r_m} Re_0. \quad (5.31)$$

In axialer Richtung sind die Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 : \phi = \phi_A \\ y = \frac{L}{c} : \phi = \phi_E \end{array} \right\} \quad (5.32)$$

Ferner folgt aus Gl. (5.30) die Bedingung

$$\frac{d\phi^2}{dy} = \sigma : Re = \sigma \quad (5.33)$$

Die Integration von Gl. (5.31) führt mit diesen Bedingungen zu

$$\frac{d\phi^2}{dy} = -24 \frac{r_i}{r_m} Re_o (y - y_o) \quad (5.34)$$

mit

$$y_o = \frac{L}{2c} - \frac{\phi_A^2 - \phi_E^2}{24 \frac{r_i}{r_m} Re_o \frac{L}{c}} \quad (5.35)$$

oder, in dimensionsbehafteter Form:

$$\frac{dp^2}{dz} = -144 \frac{\eta RT}{D_H^3} \left(1 - \frac{D_H}{2D_m}\right) \cdot (z - z_o) \quad (5.36)$$

mit

$$z_o = \frac{1}{2} \left[L - \frac{D_H^3}{72\eta RTL} \cdot \frac{1}{1 - \frac{D_H}{2D_m}} \cdot \frac{1}{\rho u_o} (p_A^2 - p_E^2) \right] \quad (5.37)$$

Durch weitere Integration folgt für den Druckverlauf

$$p^2(z) = p_A^2 - 144 \frac{\eta RT}{D_H^3} \left(1 - \frac{D_H}{2D_m}\right) \rho u_o z \left(\frac{z}{2} - z_o\right) \quad (5.38)$$

und für den Betrag des Massenstromes

$$|\dot{m}| = \pi \left(\frac{D_m}{D_H} - \frac{1}{2}\right) \rho u_o (z - z_o)^2 \quad (5.39)$$

Die Richtung des Massenstromes kann aus Tabelle 3 entnommen werden.

Bereich von z_0	Bereich von z	Vorzeichen von dp^2/dz	Richtung von \dot{m}	
$-\infty < z_0 < 0$	$0 \leq z \leq L$	neg.	↓	$z=0:$ $p=p_A$ $z=L:$ $p=p_E$
$0 \leq z_0 \leq L$	$0 \leq z \leq z_0$	pos.	↑	
	$z_0 \leq z \leq L$	neg.	↓	
$L < z_0 < \infty$	$0 \leq z \leq L$	pos.	↑	

Tabelle 3: Richtung des Massenstromes.

5.3 Einfluß der elastischen Hüllrohrdehnung auf die Spaltströmung

Die äußere Begrenzung des Spaltes wird beim Brennstab durch ein Zirkaloy-Rohr mit den Abmessungen

$$\left. \begin{aligned} D_a = D_{wi} &= 9,3 \text{ mm} \\ D_{wa} &= 10,75 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

gebildet. Zirkaloy hat bei Raumtemperatur einen Elastizitätsmodul von

$$E = 9,81 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad (5.41)$$

Wird ein derartiges Rohr mit einem Differenzdruck

$$\Delta p = p - p_0 \quad (5.42)$$

beaufschlagt, wobei p_0 der Umgebungsdruck ist, so wird das Rohr und damit die Spaltweite nach der Kesselformel um

$$\gamma = \Delta D_H = \frac{(D_{wa} + D_{wi})^2}{4(D_{wa} - D_{wi})} \frac{\Delta p}{E} \quad (5.43)$$

gedehnt.

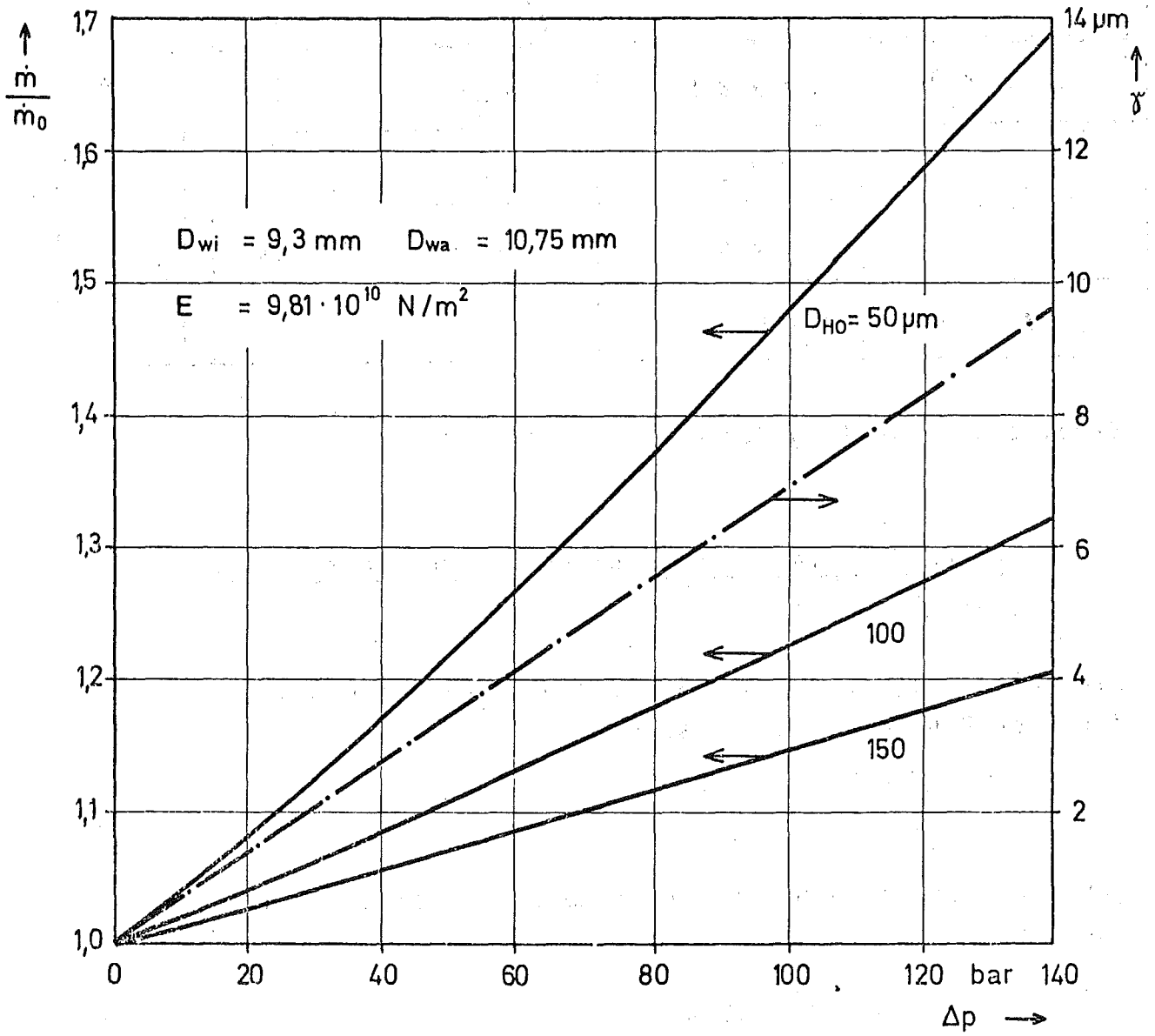


Abb. 3: Elastische Dehnung bei Raumtemperatur

Wie Gl. (5.21) zeigt, geht der hydraulische Durchmesser D_H in dritter Potenz in die Berechnung des Massenstromes ein. In Abb. 3 ist die Hüllrohrdehnung γ und das Verhältnis

$$\dot{m}/\dot{m}_c = (D_H/D_{H0})^3 \quad (5.44)$$

über dem Differenzdruck Δp aufgetragen, wobei der Index 0 den ungedehnten Zustand charakterisiert.

Es wird gezeigt, daß die Hüllrohrdehnung selbst bei Raumtemperatur besonders bei kleinen Spaltweiten erheblichen Einfluß auf den Massenstrom hat.

Mit der Abkürzung

$$G = \frac{(D_{wa} + D_{wi})^2}{4(D_{wa} - D_{wi})} \quad (5.45)$$

ergibt die Auflösung von Gl. (5.43) nach dem Druck p

$$p = (D_H - D_{H0}) \frac{E}{G} + p_0 \quad (5.46)$$

Damit kann der Druck vor der Integration über die Spaltlänge L eliminiert werden:

$$\dot{m} = -\frac{\pi}{96} \frac{D_m}{\eta R T} D_H^3 \left[(D_H - D_{H0}) \frac{E}{G} + p_0 \right] \frac{E}{G} \frac{dD_H}{dz} \quad (5.47)$$

oder, nach Integration über die Spaltlänge und Rücksubstitution von p :

$$\dot{m} = \frac{\pi}{96} \frac{D_m}{\eta R T L} \frac{1}{20} \left(\frac{E}{G} \right)^2 \left\{ \left[D_{H0} + \frac{G}{E} (p_A - p_0) \right]^4 \left[\frac{G}{E} (4p_A + p_0) - D_{H0} \right] - \left[D_{H0} + \frac{G}{E} (p_E - p_0) \right]^4 \left[\frac{G}{E} (4p_E + p_0) - D_{H0} \right] \right\} \quad (5.48)$$

6. Gasdynamische Betrachtung einer isothermen Spaltströmung

In Abschnitt 3 war bei der Vereinfachung des Systems der allgemeingültigen, differentiellen Ausgangsgleichungen unter anderem vorausgesetzt worden, daß in der Impulsgleichung die Impulsänderung von vernachlässigbarer Größenordnung gegenüber den Einflüssen der Druck- und Zähigkeitskräfte ist.

Die Rechtfertigung dieser Annahme soll durch die gasdynamische Betrachtung einer isothermen Spaltströmung nachgewiesen werden.

In der Gasdynamik [6] wird in der stationären Stromfadentheorie die Strömung mit über den durchströmten Querschnitt (Fläche F , Umfang U) gemittelter Geschwindigkeit

$$w_m = \frac{1}{F} \int_{(F)} w dF \quad (6.1)$$

und gemittelter Temperatur

$$T_m = \frac{1}{F} \int_{(F)} T dF \quad (6.2)$$

betrachtet. Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\dot{m} = \rho w_m F = \text{const.} \quad (6.3)$$

Weiter folgt mit den in Abb.4 a, b eingetragenen Bezeichnungen für stationäre, reibungsbehaftete kompressible Strömung für die Impulsgleichung

$$-dp F - \tau_w U dz = \dot{m} dw_m \quad (6.4)$$

und für die Energiegleichung

$$dq = c_p dT_m + d\left(\frac{w_m^2}{2}\right), \quad (6.5)$$

oder, nach Einführung der isentropen Ruhetemperatur

$$T_0 = T_m + \frac{1}{c_p} \frac{w_m^2}{2} ; \quad (6.6)$$

$$dq = c_p dT_0 \quad (6.7)$$

In Gl. (6.4) werden die Reibungseinflüsse durch die Wand-schubspannung τ_w berücksichtigt. Aus der Energiegleichung (6.7), die Dissipationseffekte nicht berücksichtigt, folgt, daß Änderungen der isentropen Ruhetemperatur T_0 ein direktes Maß für Größe und Richtung der dem Gas zugeführten Wärme sind.

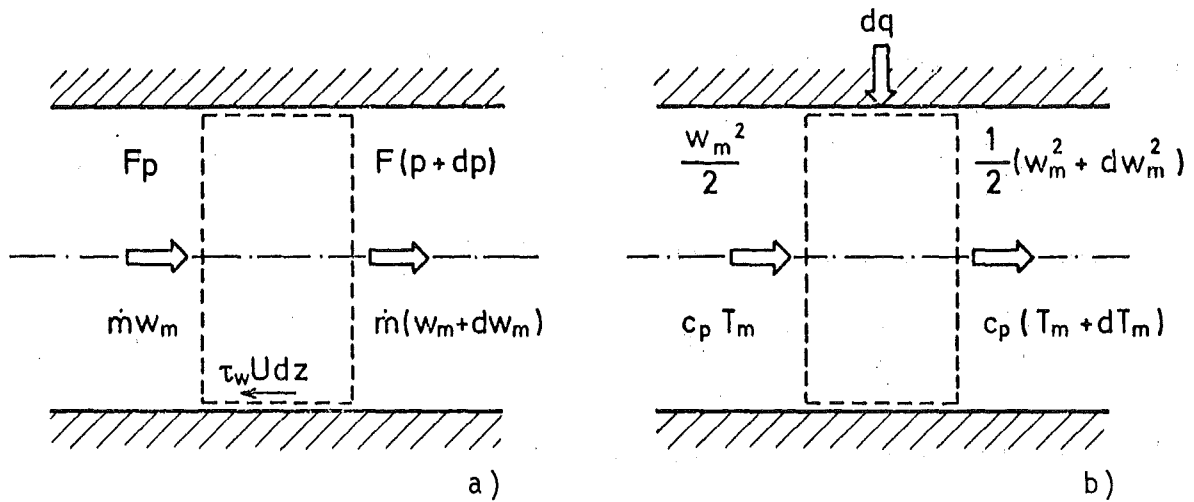


Abb.4: Zur Ableitung der Grundgleichungen der Gasdynamik
 a) Impulsgleichung
 b) Energiegleichung

Definiert man den Reibungsbeiwert

$$f = \frac{4\tau_w}{\rho \frac{w_m^2}{2}}, \quad (6.8)$$

den hydraulischen Durchmesser

$$D_H = \frac{4F}{U}, \quad (6.9)$$

und die Mach - Zahl

$$Ma^2 = \frac{w_m^2}{\alpha R T_m}, \quad (6.10)$$

so folgt durch logarithmisches Differenzieren für isotherme Strömung aus Gl. (6.6)

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{(\alpha-1) Ma^2}{2(1+\frac{\alpha-1}{2} Ma^2)} \frac{dMa^2}{Ma^2}, \quad (6.11)$$

aus der Gleichung (2.6)

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad (6.12)$$

aus der Definition der Mach - Zahl (6.10)

$$\frac{dMa^2}{Ma^2} = \frac{dw_m^2}{w_m^2}, \quad (6.13)$$

aus der Kontinuitätsgleichung (6.3)

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{dw_m^2}{w_m^2} = 0 \quad (6.14)$$

und aus der Impulsgleichung (6.4)

$$\frac{dp}{\rho} = - \frac{\alpha}{2} Ma^2 \frac{dw_m^2}{w_m^2} - \frac{\alpha}{2} Ma^2 \frac{f}{D_H} dz; \quad (6.15)$$

aus den Gln. (6.11) bis (6.15) ergibt sich:

$$\frac{dp}{\rho} = - \frac{1}{2} \frac{dMa^2}{Ma^2} = - \frac{\alpha Ma^2}{2(1-\alpha Ma^2)} \frac{f}{D_H} dz, \quad (6.16)$$

und

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{\alpha(\alpha-1) Ma^4}{2(1+\frac{\alpha-1}{2} Ma^2)(1-\alpha Ma^2)}. \quad (6.17)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt sofort, daß bei isothermer Strömung der Wert

$$\alpha Ma^2 = 1 \quad (6.18)$$

nicht ohne weiteres überschritten werden kann.

Bei $Ma < \frac{1}{\alpha}$ nimmt der Druck in Durchströmungsrichtung ab, die Geschwindigkeit (und Mach - Zahl) hat zunehmende Tendenz und auch die Ruhetemperatur T_0 nimmt zu. Zur Aufrechterhaltung der isothermen Strömung ist Wärmezufuhr notwendig. Bei Annäherung an den kritischen Wert der Mach - Zahl nach Gl. (6.18) wird nach Gl. (6.17) eine gegen Unendlich gehende Wärmezufuhr erforderlich, was nicht erfüllbar ist.

Die Strömung wird deshalb bei Annäherung an den kritischen Wert der Mach - Zahl nicht mehr streng isotherm verlaufen.

Da bei der hier vorliegenden Strömung durch enge Spalte die begrenzenden Materialien sehr hohe Speicherkapazitäten gegenüber dem Gas haben, kann jedoch angenommen werden, daß die Strömung bis zur kritischen Mach - Zahl angenähert isotherm verläuft.

Gl. (6.16) wird nun über eine fiktive Spaltlänge L_{\max} integriert, bei der sich gerade die kritischen Mach - Zahl nach Gl. (6.18) einstellt:

$$\int_0^{L_{\max}} \frac{f}{D_H} dz = \int_{Ma_A^2}^{1/x} \frac{1 - x Ma^2}{x Ma^4} dMa^2 \quad (6.19)$$

Der Reibungsbeiwert f ist allgemein eine Funktion der Reynolds-Zahl. Mit Gl. (6.3) gilt für isotherme Strömung ($\eta = \text{const.}$)

$$Re = \frac{\rho w_m D_H}{\eta} = \text{const.} \quad (6.20)$$

oder, unter der Voraussetzung laminarer Reibung:

$$f = \frac{96}{Re} = \text{const.} \quad (6.21)$$

Aus den Gleichungen (6.12, 13, 14) folgt weiter:

$$Ma_p = \text{const.} \quad (6.22)$$

Mit diesen Voraussetzungen wird aus Gl. (6.19)

$$\frac{96\eta}{\rho Ma D_H^2} \sqrt{\frac{RT_m}{x}} L_{\max A} = \frac{1 - x Ma_A^2}{x Ma_A^2} + \ln(x Ma_A^2). \quad (6.23)$$

Betrachtet man die wahre Spaltlänge L als Differenz der fiktiven Spaltlängen

$$L = L_{\max A} - L_{\max E}, \quad (6.24)$$

so folgt, wenn bei $z = 0$ der Druck p_A und bei $z = L$ der Druck p_E herrscht, nach Auflösung nach Ma_A :

$$Ma_A = \frac{1}{2 \ln\left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2} \left[\frac{L}{D_H^2} \frac{96\eta \sqrt{\frac{RT_m}{\alpha}}}{p_A} - \sqrt{\left(\frac{L}{D_H^2} \frac{96\eta \sqrt{\frac{RT_m}{\alpha}}}{p_A}\right)^2 - \frac{4}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2\right] \ln\left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2} \right]. \quad (6.25)$$

Für den Massenstrom \dot{m}_G folgt aus (6.3) mit (6.10) und (2.6):

$$\dot{m}_G = \frac{\pi}{2} D_m D_H p_A Ma_A \sqrt{\frac{\alpha}{RT_m}}. \quad (6.26)$$

Der Vergleich des mit gasdynamischen Methoden (Index G) berechneten Massenstromes mit dem in Gl. (5.21) angegebenen Ergebnis (Poiseuille-Strömung, Index P) ergibt

$$\frac{\dot{m}_G}{\dot{m}_P} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\ln\left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2} \left[\frac{L}{D_H^2} 96\eta - \sqrt{\left(\frac{L}{D_H^2} 96\eta\right)^2 - 4 \frac{p_A^2}{RT} \left[1 - \left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2\right] \ln\left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2} \right]}{\frac{D_H^2}{L} \frac{1}{96\eta} \frac{p_A^2}{RT} \left[1 - \left(\frac{p_E}{p_A}\right)^2\right]} \quad (6.27)$$

Gln. (6.25, 26, 27) gelten für unterkritische Druckverhältnisse.

Ist das Druckverhältnis überkritisch, so stellt sich der Enddruck p_E so ein, daß Bedingung (6.18) im Austritt erfüllt ist. Die Absenkung von Austrittsdruck auf den Umgebungsdruck erfolgt durch Drosselung.

Aus Gl. (6.22) folgt mit der Bedingung (6.18) für kritische Strömung (Index K)

$$Ma_A = \left(\frac{p_E}{p_A}\right)_K \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (6.28)$$

oder, mit (6.26)

$$\dot{m}_{GK} = \frac{\pi}{2} D_m D_H p_E \frac{1}{\sqrt{RT_m}}. \quad (6.29)$$

Für p_{EK} folgt aus (6.23) unter Verwendung von (6.28)

$$p_{EK} = \frac{96\eta L}{D_H^2} \sqrt{RT} \frac{1}{\left[\left(\frac{p_A}{p_E}\right)^2 - 1 - \ln\left(\frac{p_A}{p_E}\right)^2\right]} \quad (6.30)$$

Der Vergleich von (6.29,30) mit \dot{m}_p nach Gl. (5.21) ergibt für kritische Strömung:

$$\frac{\dot{m}_{GK}}{\dot{m}_p} = 1 - \frac{\ln\left(\frac{p_A}{p_E}\right)_K^2}{\left(\frac{p_A}{p_E}\right)_K^2 - 1} \quad (6.31)$$

Die Auswertung der Beziehungen (6.27) und (6.31) ergibt, daß nur für sehr hohe Anfangsdrücke p_A und größere Spaltweiten das Verhältnis $\dot{m}_{G(K)}/\dot{m}_p$ wesentlich vom Wert 1 abweicht. Die in Tabelle 4 wiedergegebenen Beispiele zeigen, daß in den interessierenden Bereichen des Druckes und der Spaltweite selbst in dem extremen Fall kritischer Strömung die in (5.21) angegebene Beziehung verwendet werden kann.

D_H μm	$\left(\frac{p_A}{p_E}\right)_K$ -	p_A bar	p_{EK} bar	$\frac{\dot{m}_{GK}}{\dot{m}_p}$ -	Re -
200 	27,35	27,35	1,000	0,9911	1297
	25	29,97	1,199	0,9897	1554
	20	37,67	1,884	0,9850	2443
	15	50,80	3,386	0,9758	4392
	10	78,42	7,842	0,9535	10170
	5	178,1	35,62	0,8659	46196
150 	36,39	36,39	1,000	0,9946	972,6
	35	37,85	1,081	0,9942	1052
	30	44,25	1,475	0,9924	1435
	25	53,27	2,131	0,9897	2073
	20	66,97	3,348	0,9850	3257
	15	90,30	6,020	0,9758	5856
	10	139,4	13,94	0,9535	13560
100 	54,50	54,50	1,000	0,9973	648,5
	50	59,43	1,189	0,9969	770,7
	40	74,41	1,860	0,9954	1206
	30	99,56	3,319	0,9924	2152
	20	150,7	7,534	0,9850	4885

Tabelle 4: Kritische Strömung bei verschiedenen Spaltweiten
 $L = 2 \text{ m}$; $T = 295 \text{ K}$; $\eta = 1,97 \cdot 10^{-5} \text{ kg/sm}$;
 $R = 2077,2 \text{ J/kgK}$

Der in Tabelle 4 durchgeführte Vergleich zeigt ferner, wie weitgehend der in Abschnitt 3 durchgeführte Vereinfachungsschritt $Ma \rightarrow 0$ gültig ist, da die gasdynamischen Lösungen die Impulsänderung berücksichtigen, die bei der Lösung nach Gl. (5.21) vernachlässigt wird. Wie in Abschnitt 3 aufgezeigt wurde, sind in der Bewegungsgleichung (3.19) und in der Energiegleichung (3.20) Terme mit dem Faktor Ma charakterisiert durch Einflüsse der bewegten Masse des strömendem Mediums. Bei transienten Strömungen ist der instationäre Term von gleicher Art. Wenn die Strömung als quasi-inkompressibel betrachtet werden kann, so kann sie ebenfalls als quasistationär angesehen werden.

7. Spaltströmung mit vom laminaren Fall abweichenden Reibungsgesetzmäßigkeiten

In den vorausgegangenen Abschnitten wurde stets laminare Strömung vorausgesetzt. Bei hohen Anfangsdrücken und größeren Spaltweiten ergeben sich jedoch, selbst wenn das quasi-inkompressible Konzept gültig ist, Reynolds-Zahlen, die eindeutig auf turbulente Strömung hinweisen.

Zum anderen ist aus der Viskosimetrie bekannt, daß bei Kapillarströmungen schon bei Reynolds-Zahlen weit unter der für Rohrströmungen üblichen kritischen Reynolds-Zahl

$$Re_{krit} = 2320 \quad (7.1)$$

Abweichungen von den Gesetzmäßigkeiten der laminaren Reibung zu beobachten sind. So gibt Nagashima [7] für Strömungen mit Wasserdampf und n-Pentan durch eine Kapillare mit $D \approx 263 \mu\text{m}$ schon ab $Re = 300$ ein deutliches Abweichen von laminarer Strömung an. Für isotherme Strömung folgt aus Gl. (5.21) unter Verwendung der Definition der Reynolds-Zahl (6.20) und der Kontinuitätsgleichung (6.3):

$$Re = \frac{D_H^3}{96} \frac{p_A^2 - p_E^2}{\eta^2 R T L} \quad (7.2)$$

Weiter wurden schon in Gl. (6.21) der Widerstandsbeiwert für laminare Strömung in ebenen Spalten eingeführt. Durch Einführung von Gl. (6.21) in Gl. (7.2) wird Gl. (5.21) für beliebige Strömungen verallgemeinert:

$$f = \frac{1}{Re^2} D_H^3 \frac{p_A^2 - p_E^2}{\eta^2 RTL} \quad (7.3)$$

Laminare Strömungen sind stark von der Ausbildung der durchströmten Querschnittsfläche abhängig.

Allgemein gilt:

$$f_{lam.} = \frac{Ha}{Re} \quad (7.4)$$

wobei Ha in der Literatur (z.B. [8]) als Hagen - Zahl (Verhältnis von Druckkraft zu Zähigkeitskraft) bezeichnet wird. In Tabelle 5 werden Hagen - Zahlen für verschiedene Geometrien zusammengefaßt.

Geometrie	Hagen - Zahl
ebener Spalt	96
Kreisrohr	64
exzent.Ringspalt	$\frac{96}{1 + 1,5 \left(\frac{2\Delta}{D_H} \right)^2}$
voll exzent. Ringspalt	38,4

Tabelle 5: Hagen - Zahlen bei verschiedenen durchströmten Geometrien.

Diese Werte gelten alle für den Fall, daß die Geometrien in axialer Richtung durchströmt werden.

Der Mittelpunkt M_j , M_a der exzentrischen Anordnung in Abb. 1 müssen nicht unbedingt in axialer Richtung auf Mantellinien des zylindrischen Koordinatensystems x, φ, z liegen.

Sind diese Mittelpunkte z.B. auf Schraubenlinien angeordnet, so wird sich auch eine schraubenförmige Strömung (mit einer zusätzlichen Komponente in Umfangsrichtung) einstellen. Die effektiv durchströmte Spaltlänge wird dadurch erhöht. Weiter sind bei sehr kleinen Spaltweiten c die Bearbeitungstoleranzen in der Größenordnung von c und auch die Rauheitswerte der Oberfläche sind nicht mehr gegenüber c vernachlässigbar. Diese Effekte führen zu einer nicht näher quantifizierbaren Vergrößerung der Hagen'schen Kennzahl.

Die Hagen - Zahlen sollen bei laminarer Strömung in glatten Ringspalten aus Experimenten bestimmt werden, wobei für Verschiebungen gegenüber dem in Tabelle 5 für den ebenen Spalt angegebenen Wert die genannten Effekte verantwortlich sind. Der zu erwartende Bereich ist

$$38,4 \leq Ha \leq Ha_{max}, \quad (7.5)$$

wobei unter Umständen $Ha_{max} > 96$ sein kann.

Bei voll ausgebildeter turbulenter Strömung ist die Form der durchströmten Querschnittsfläche ohne Einfluß auf den Massendurchsatz; die allein maßgebliche Größe ist der hydraulische Durchmesser D_H . Für turbulente Strömungen in hydraulisch glatten Geometrien gilt nach Blasius

$$f_{\text{turb. glatt}} = 0,364 Re^{-1/4}. \quad (7.6)$$

Für turbulente Strömungen in Geometrien mit technischen Rauigkeiten k ist der Widerstandsbeiwert f unabhängig von der Reynolds-Zahl. Nach Nikuradse gilt

$$f_{\text{turb. rauh}} = \left(1,74 + 2 \log \frac{D_H}{2k}\right)^{-2}. \quad (7.7)$$

Der Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung ist beim vorliegenden Problem von großer Bedeutung. So behindern die Pellets durch ihre Stoßstellen die Ausbildung der laminaren Strömung. Dieser Übergangsbereich wird in der Literatur nicht abgedeckt. Deshalb sollen durch Experimente Widerstandsbeiwerte ermittelt werden. Gemessen wird dabei bei stationärer Strömung

der Massenstrom \dot{m} in Abhängigkeit vom Anfangsdruck p_A und Enddruck p_E . Es gilt:

$$Re = \frac{2\dot{m}}{\eta D_m} \quad (7.8)$$

Damit kann der Widerstandsbeiwert aus Gl. (7.3) ermittelt werden. Bei Berücksichtigung der elastischen Hüllrohrdehnung folgt:

$$f = \frac{1}{Re^2} \frac{(E/G)^2}{10\eta^2 RTL} \left\{ \left[D_{HO} + \frac{G}{E} (p_A - p_0) \right]^4 \left[\frac{G}{E} (4p_A + p_0) - D_{HO} \right] - \left[D_{HO} + \frac{G}{E} (p_E - p_0) \right]^4 \left[\frac{G}{E} (4p_E + p_0) - D_{HO} \right] \right\} \quad (7.9)$$

Gl. (7.9) soll zur Auswertung der Experimente dienen.

8. Schlußfolgerung

Im Programmsystem SSYST wird der Massenstrom mit den hier gewählten Bezeichnungen und unter den zusätzlichen Voraussetzungen konstanter Spaltweite und isothermer Strömung nach der Gleichung

$$\dot{m} = \frac{\pi}{96} D_i D_H^3 p_E \frac{p_A - p_E}{\eta RTL} \left[1 + 1,5 \left(\frac{2\Delta}{D_H} \right)^2 \right] \quad (8.1)$$

berechnet. Diese Beziehung gilt für laminare, inkompressible Strömung in einem ebenen Spalt. Die Dichte des strömenden Mediums wird als konstant über die Spaltlänge zu

$$\rho_E = \frac{p_E}{RT} \quad (8.2)$$

angenommen. Exzentrizitäten werden berücksichtigt.

Das Programmsystem FRAP-T beschreibt den Massenstrom durch die Beziehung

$$\dot{m} = \frac{\pi}{64} D_a D_H^3 \frac{p_A^2 - p_E^2}{2\eta RTL} \quad (8.3)$$

Ein Vergleich mit Gl. (5.21) und Tabelle 5 ergibt, daß laminare, quasi-inkompressible Strömung in einem Kreisrohr oder in einem

Ringspalt mit fest vorgegebener Exzentrizität

$$\frac{2\Delta}{D_H} = 0,57735 \quad (8.4)$$

vorliegt.

Zur Programmverifizierung (Vergleich von Experimenten mit Rechenergebnissen der Programmsysteme) müssen die Gasströmungsmoduln mit entsprechenden mechanischen Deformationsmoduln gekoppelt werden, um die elastische Hüllrohrdehnung zu berücksichtigen.

Zur Verbesserung der Gasströmungsmoduln wird vorgeschlagen:

1. Grundlage der Berechnungen ist Gl. (7.3) mit Gl. (7.8).
2. Bei laminarer Strömung gilt für den Widerstandsbeiwert Gl. (7.4). Die Hagen-Zahl wird aus Experimenten ermittelt und als Variable in die Berechnungen eingeführt.
3. Bei ausgebildeter turbulenter Strömung wird jeweils mit konstantem Widerstandsbeiwert (turbulent rauh) gerechnet, wobei die Widerstandsbeiwerte in Abhängigkeit von der Spaltweite aus Experimenten ermittelt werden.
4. Für den Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung werden aus Experimenten empirische Beziehungen

$$f = f(Re, D_H)$$

ermittelt.

5. Sollte sich die Berücksichtigung von radial einströmenden, gasförmigen Spaltprodukten als notwendig erweisen, so kann die Berechnung nach Abschnitt 5.2 unter Berücksichtigung von Abschnitt 7 erfolgen.

Literatur:

1. Gulden, W.: Dokumentation von SSYST - MOD - 1,
PNS (1975), unveröffentlicht

2. Domenico, W.F.: IFA - 430 Preliminary Design Report,
Aerojet Nuclear Company
June 1975

3. Landau, L.D.,
Lifshitz, E.M.: Fluid Mechanics, Oxford 1963

4. Loitsyanskii, L.G.: Mechanics of Liquids and Gases,
Oxford 1966

5. Mc Carty, R.D.: Thermophysical Properties of Helium-4
NBS Technical Note 631,
Nov. 1972

6. Shapiro, A.H.: The Dynamics and Thermodynamics of
Compressible Fluid Flow,
New York 1953

7. Nagashima, A.,
Tanishita, I.: Bull. JSME 12 (1969) 52, 1467 - 1478

8. Albring, W.: Angewandte Strömungslehre
Dresden 1966