KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

Dezember 1976 KFK 2413

Institut für Angewandte Systemanalyse

Lineare mehrstufige Inspektionsspiele

H. Wenzelburger

GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2413

Institut für Angewandte Systemanalyse

Lineare mehrstufige Inspektionsspiele

Heinz Wenzelburger

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

Zusammenfassung

In mehrstufigen 2 x 2 Nullsummen-Matrixspielen, deren Auszahlung schon optimal ist, wenn nur einer der beiden Spieler seine optimale Politik verfolgt, reduziert sich die Funktionalgleichung für den Spielwert auf eine lineare partielle Differenzengleichung.

Wir geben hier einige Beispiele für diesen Spieltyp in Form von Inspektionsspielen und lösen die betreffenden linearen partiellen Differenzengleichungen einmal direkt mit der Z-Transformation, was mitunter mühsam sein kann, oder eleganter mit einer probabilistischen Methode, die auf D. Blackwell und J.L. Hodges zurückgeht.

Linear Multi-Stage Games for Inspection

Abstract

In multi-stage 2 x 2 zero sum matrix games the payoff of which is already optimized in case only one of the two players uses his optimum strategy, the functional equation for the value of the game is reduced to a linear partial difference equation.

In this paper some examples for this type of games are given in form of inspection games. The linear partial difference equations are first solved with the help of a Z-transformation which leads to cumbersome calculations; it is shown that these solutions can be found more effectively with the help of a probabilistic method which has been developed by D. Blackwell and J.L. Hodges.

21. Februar 1977

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

		Seite
0.		
0.1	Abkürzungen	0 - 3
0.2	Literaturverzeichnis	0 - 4
1.	Einführung	
1.0	Motivation	1 - 1
1.1	Definition mehrstufiger Inspektionsspiele	1 - 5
1.2	Lösung der Funktionalgleichung	1 - 8
2.	Spiel $\Gamma(i,j)$	
2.0	Bezeichnungen	2 - 1
2.1	Definition des Spiels $\Gamma(i,j)$	2 - 3
2.2	Spezialfall $\Gamma(3,2)$	2 - 4
2.3	Vorbereitung des allgemeinen Falls	2 - 8
2.4	Berechnung des Spielwerts val $\Gamma(i,j)$ über die probabilistische Methode	2 - 14
2.5	Berechnung des Spielwerts val $\Gamma(i,j)$ über eine Differenzengleichung	2 - 20
2.6	Untersuchung des Spiels $\Gamma(i,j)$ auf Sattelpunkte	2 - 29
3.	Spiel $\Gamma(i,j;k)$	
3.1	Definition des Spiels $\Gamma(i,j;k)$	3 - 1
3.2	Spezialfall $\Gamma(k,j;k)$	3 - 3
3.3	Spezialfälle $\Gamma(i,k;k)$ und $\Gamma(k,k;k)$	3 - 11

Seite

3.4 Berechnung des Spielwerts val $\Gamma(i,j;k)$ des allgemeinen Falls mit der probabilistischen Methode 3 - 16

3.5 Berechnung des Spielwerts val $\Gamma(i,j;k)$ des allgemeinen Falls über eine Differenzengleichung. Allgemeine Form der Lösung 3 - 20

3.6 Lösung der partiellen Differenzengleichung für den Spezialfall $v_1(j,k) := v(k,j;k)$ 3 - 23

3.7 Lösung der partiellen Differenzengleichung für den Spezialfall $v_2(i,k) := v(i,k;k)$ 3 - 26

4. Anhänge

4.1 Anhang 1 zu p 2-10 4 - 1

4.2 Anhang 2 zu p 2-17 4 - 2

4.3 Anhang 3 zu p 2-19 4 - 8

4.4 Anhang 4 zu p 2-24 4 - 12

4.5 Anhang 5 zu p 3-5 4 - 14

Korrespondenztafeln 5 - 1

Abbildungen 5 - 4

0.1 Verzeichnis der Abkürzungen

Gl	Gleichung
DGl	Differentialgleichung
DzGl	Differenzengleichung
pDGl	partielle Differentialgleichung
pDzGl	partielle Differenzengleichung
W	Wahrscheinlichkeit
WV	Wahrscheinlichkeitsverteilung
zV	zufällige Variable
z$\vec{V}$	zufälliger Vektor

Die Numerierung der Gleichungen beginnt in jedem Teilabschnitt bei 1 .

0.2 Literaturverzeichnis

/1/ Bellman, R.
Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton (1957).

/2/ Parzen, E.
Stochastic Processes. Holden Day, San Francisco (1967).

/3/ Motzkin, T.S. et al.
The Double Description Method.
Contributions to the Theory of Games, Vol. III (1953), p. 51.
Annals of Mathematics Studies, Number 28, Princeton.
H.W. Kuhn, A.W. Tucker Ed..

/4/ Blackwell, D. and Hodges, J.L.
Design for the Control of Selection Bias.
Annals of Math. Statistics, 28 (1957) pp 449 - 460.

/5/ Dresher, M
A Sampling Inspection Problem in Arms Control Agreements.
Rand Memorandum RM-2972-ARPA (1962).

/6/ Jury, E.I.
Theory and Application of the Z-Transform Method.
Wiley, New York (1964).

/7/ Vich, R.
Z-Transformation
VEB Verlag Technik, Berlin 1964.

/8/ Alper, P.
Two Dimensional Z-Transforms.
Technological University Electronics Laboratory,
Delft - Netherlands, August, 1963.

/9/ Wenzelburger, H.
Zur gestutzten negativen Binomialverteilung, Karlsruhe (1974), unveröffentlicht.

/10/ Abramowitz, M. and Stegun, I.A.
Handbook of Mathematical Functions
Dover, New York (1968).

Manuskript abgeschlossen im April 1974 in der ADI (Abteilung für Datenverarbeitung und Instrumentierung).

1.0 Motivation

Den linearen Inspektionsspielen, die wir hier behandeln, liegt das folgende anschauliche Modell zugrunde, das sich auf viele ähnliche Situationen wie z.B. in der Spaltstoffflußkontrolle übertragen läßt:

Ein Gendarm hat den Auftrag eine Bank zu überwachen, um einen Räuber daran zu hindern Geld aus ihr zu entwenden. Der Räuber kann innerhalb einer vorgegebenen Zeitperiode von k Tagen an jedem beliebigen Tag die Bank überfallen, der Gendarm kann sie jedoch nur an einer begrenzten Zahl j von Tagen ($0 \leq j \leq k$) bewachen.
Dem Räuber gelingt ein Überfall auf die Bank immer dann, wenn sie nicht bewacht wird und mißlingt, wenn sie bewacht wird, wobei er gefaßt und bestraft wird. Er kann in einer Zeitperiode von k Tagen mehrere gelungene und mehrere mißlungene Einbrüche ausführen.
Die Frage ist nun, welche Strategien Räuber und Gendarm verfolgen müssen, d.h. wie sie "ihre" Tage aussuchen müssen, daß beide optimale Erfolgsaussichten haben.
Dazu weiß der Räuber, daß der Gendarm in einer Inspektionsperiode von k Tagen die Bank an genau (bzw. maximal) j Tagen ($j \leq k$) bewachen kann. Außerdem ist ihm am $(\nu+1)$ten Tag $(1 < \nu < k-1)$ bekannt, wie oft der Gendarm die Bank bis zum νten Tag bewacht hat.
Er weiß aber am $(\nu+1)$ten Tag im allgemeinen nicht, ob der Gendarm die Bank bewacht oder nicht, es sei denn, daß dieser bis zum νten Tag die Bank schon j-mal bewacht hat. In diesem Fall kann der Räuber am $(\nu+1)$ten und den restlichen Tagen der laufenden Inspektionsperiode in die Bank ohne Risiko einbrechen.

Wir übertragen nun dieses Modell auf das Problem der Spaltstoff-flußkontrolle, durch das diese Arbeit angeregt wurde.

Hier geht es darum, die Daten der Eingangs-, Ausgangs- und Abfallströme spaltbaren Materials in kerntechnischen Anlagen zu kontrollieren.
Dies geschieht, indem diese Daten vom Anlagebetreiber (= Räuber) an einen Inspektor (= Gendarm) geliefert und von diesem in unabhängigen Messungen überprüft werden.
Der Eingangsstrom besteht üblicherweise aus einer Folge von diskreten Materialeinheiten (z.B. UF_6 in Transportzylindern), die vom Betreiber ausgemessen werden, bevor sie in den Prozess gehen und damit ihre Identität verlieren.
Der Inspektor kann somit die Daten des Betreibers nur innerhalb eines kurzen Zeitraums überprüfen.
Unter der Voraussetzung, daß der Betreiber Material entwenden will und deshalb bei einigen der k in einem gewissen Zeitraum ankommenden Meßeinheiten die Daten verfälscht, liegt wieder die Situation des Räuber- und Gendarmspiels vor. Denn der Inspektor kann bei vertretbarem Aufwand nur einen Teil der Meßeinheiten überprüfen.
Wenden wir also das Räuber- und Gendarmspiel auf die Spaltstoff-flußkontrolle an, so entspricht der Anzahl von k Inspektionstagen die Anzahl k der ankommenden Meßeinheiten.

Wir untersuchen hier zwei Arten von linearen Spielen:

Im Spiel $\Gamma(i,j)$ wird vorausgesetzt, daß der Gendarm in einer

Zeitperiode von k Tagen die Bank an genau j Tagen bewacht und an genau i Tagen nicht bewacht ($i+j = k$).
Das Spiel $\Gamma(i,j;k)$ ist hingegen allgemeiner. Dort wird vorausgesetzt, daß der Gendarm die Bank in einer Zeitperiode von k Tagen an minimal ($k-i$) Tagen und maximal an j Tagen ($i+j \geq k$) bewacht. Dieser Aussage ist gleichwertig, daß der Gendarm die Bank in einer Zeitperiode von k Tagen an minimal ($k-j$) Tagen und maximal i Tagen ($i+j \geq k$) nicht bewacht.

Damit ein Inspektionsspiel linear bleibt, d.h. sein Spielwert über eine lineare partielle Differenzgleichung bestimmt werden kann, muß mindestens einer der beiden Spieler über unbegrenzte Resourcen verfügen.
D.h. beim Räuber- und Gendarmspiel. daß die Anzahl der zulässigen Handlungen entweder des Räubers (= Einbruch, kein Einbruch), oder des Gendarms (= Bewachung, keine Bewachung) innerhalb des Spielverlaufs (k Teilspiele entsprechen einer Inspektionsperiode von k Tagen) unbegrenzt sind.
Wir haben hier im Hinblick auf die Spaltstoffflußkontrolle die Resourcen des Gendarmen beschränkt.
Begrenzen wir die Anzahl der zulässigen Handlungen beider Spieler, erhalten wir für den Spielwert eine nichtlineare partielle Differenzgleichung.
Insbesondere trifft dies zu, wenn der Räuber in einer Zeitperiode von k Tagen höchstens einmal in die Bank einbrechen und der Gendarm sie höchstens j-mal ($j \leq k$) bewachen kann. Nichtlineare Spiele ergeben sich jedoch nicht nur über die Art der Resourcen sondern auch über die Art der Elemente in der Auszahlungsmatrix (vgl. Abschnitt 1.2).

So stoßen wir z.B. auf ein solches Spiel, wenn der Räuber eine umso höhere Strafe erhält, je öfter er erwischt wird.

Die hier konstruierten Spiele besitzen als wichtige qualitative Eigenschaft, daß ihr Verlauf hinsichtlich des Spielwerts schon optimal ist, wenn nur einer der beiden Spieler seine optimale Strategie benutzt.
So ist insbesondere die optimale Auszahlung schon dann gewährleistet, wenn nur der Gendarm seine optimale Strategie verfolgt. Der Gendarm kann also in diesen Spielen den Räuber dazu "zwingen", de facto ebenfalls optimal zu spielen.
Für die praktische Anwendung spieltheoretischer Modelle ist es wichtig, solche und weitere qualitativen Eigenschaften in Spielen aufzudecken, bzw. Spiele mit vorgegebenen qualitativen Eigenschaften zu konstruieren.
Denn meist ist es nicht möglich, Gewinn und Verlust der beiden Kontrahenten genau zu quantifizieren oder mit anderen Worten den Elementen der Auszahlungsmatrix des Spiels numerische Werte zuzuordnen.

1.1 Definition mehrstufiger Inspektionsspiele

Die mehrstufigen Inspektionsspiele mit endlichen Resourcen, die wir hier näher behandeln wollen, gehören zur Klasse der Zwei-Personen-Nullsummenspiele. Sie sind alle "lineare" Spezialfälle eines Modells, das dem von R. Bellmann in /1/ X, §5, p 287 beschriebenen sehr ähnlich ist.

Bei diesem wird das Gesamtspiel Γ durch eine endliche Menge von Teilspielen γ_κ definiert, wobei jedes Teilspiel γ_κ ein 2 x 2 Matrixspiel mit einer Auszahlungsmatrix

$$M_\kappa = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \quad , \quad a_{ij} = a_{ij}(\kappa) \tag{1}$$

ist, deren Elemente im allgemeinen von einem Vektorindex $\kappa = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_m$ abhängen.

Die Realisation eines k-stufigen Spiels besteht darin, daß die beiden Spieler S_A und S_B aus der Menge sämtlicher Teilspiele γ_κ eine zulässige Folge $\{\gamma_\kappa\}$ von maximal k Teilspielen auswählen und spielen.

Dabei bestimmen die Strategien, welche die Spieler im Teilspiel γ_κ anwenden nicht nur, was am Ende dieses Teilspiels der Spieler S_B an den Spieler S_A zu bezahlen hat, sondern auch, was für ein Teilspiel auf das Teilspiel γ_κ folgt.

Sei nun, um diesen Spielverlauf näher zu erläutern, die Zuordnung

$$\begin{array}{lcc} & & \underline{\text{Spieler } S_B} \\ & \text{Strategie} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \underline{\text{Spieler } S_A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

getroffen und $\gamma(i'_1, i'_2, j'_1, j'_2; k')$ ein Teilspiel, bei dem der Spieler S_A (S_B) über einen Vorrat von i'_λ (j'_λ) Strategien A_λ (B_λ), $\lambda=1,2$ verfügt, wobei $i'_1 + i'_2 \geq k'$ ($j'_1 + j'_2 \geq k'$) ist.

Dann läßt sich das erste Teilspiel eines Spiels Γ in operativer Form gemäß

$$\gamma(\kappa): \begin{pmatrix} a_{11}(\kappa)+\gamma(i_1-1,i_2,j_1-1,j_2;k-1), & a_{12}(\kappa)+\gamma(i_1-1,i_2,j_1,j_2-1;k-1) \\ a_{21}(\kappa)+\gamma(i_1,i_2-1,j_1-1,j_2;k-1), & a_{22}(\kappa)+\gamma(i_1,i_2-1,j_1,j_2-1;k-1) \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit $\kappa = (i_1,i_2,j_1,j_2;k)$ darstellen. Dies heißt, wenn z.B. der Spieler S_A die Strategie A_2 und der Spieler S_B die Strategie B_1 wählt, daß der Spieler S_B an den Spieler S_A den Betrag DM $a_{21}(\kappa)$ zu bezahlen hat und das zweite Teilspiel

$$\gamma(\kappa): \begin{pmatrix} a_{21}(\lambda)+\gamma(i_1-1,i_2-1,j_1-2,j_2;k-2), & a_{12}(\lambda)+\gamma(i_1-1,i_2-1,j_1-1,j_2-1;k-2) \\ a_{21}(\lambda)+\gamma(i_1,i_2-2,j_1-2,j_2;k-2), & a_{22}(\lambda)+\gamma(i_1,i_2-2,j_1-1,j_2-1;k-2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

mit $\lambda = (i_1,i_2-1,j_1-1,j_2;k-1)$ lautet.

Ganz analog hierzu läuft das restliche Spiel ab.

Die Beträge, die am Ende eines Teilspiels ausbezahlt werden, sind nicht in Resourcen konvertierbar. Daher setzt sich, was am Ende eines Spiels Γ der Spieler S_A (S_B) gewinnt bzw. verliert, lediglich aus den Beträgen der Teilspiele zusammen.

Ein spezielles Spiel Γ, bei dem jeder Spieler die Politik (= Plan, wie im Gesamtspiel die Strategien ausgewählt werden) verfolgt, seinen größtmöglichen Gewinn zu erzielen, muß nicht erst mit dem k-ten Spielzug endigen. Es gehört jedoch zur Definition eines Spiels, unter welchen Umständen es vorzeitig abbrechen kann.

Der Wert des Spiels Γ, d.h. der Erwartungswert val Γ (val = value) für den Gewinn des Spielers S_A, wenn beide Spieler ihre optimale Politik betreiben, wird gewöhnlich über eine rekursive Beziehung ermittelt. Um diese herzuleiten, betrachten wir zunächst den Erwartungswert $v(i_1,i_2,j_1,j_2;k)$ des Gewinns von Spieler S_A im Gesamtspiel $\Gamma = \Gamma\,(i_1,i_2,j_1,j_2;k)$, wenn beide Spieler eine beliebige aber nicht notwendig optimale Politik verfolgen.

Diese bestehe u.a. bei Spieler S_A (S_B) darin, im ersten Teilspiel mit W p_μ (q_μ) die Strategie A_μ (B_μ), $\mu=1,2$ zu wählen, wobei die Wn p_μ bzw. q_μ zwei voneinander stochastisch unabhängige WVn bilden ($p_1+p_2 = 1$, $q_1+q_2 = 1$). Daher ist die W, daß im ersten Teilspiel der Spieler S_A die Strategie A_μ und der Spieler S_B die Strategie B_ν wählt, $p_\mu q_\nu$ ($\mu=1,2$; $\nu=1,2$).
Nunmehr brauchen wir, um den Erwartungswert $v(i_1,i_2,j_1,j_2;k)$ rekursiv zu berechnen, nur noch zu beachten, daß im Gesamtspiel $\Gamma\,(i_1,j_2,j_1,j_2;k)$

mit maximal k Teilspielen das erste Teilspiel $\gamma(i_1, i_2, j_1, j_2; k)$ eines der vier verschiedenen Gesamtspiele $\Gamma(i_1-\delta_{1\mu}, i_2-\delta_{2\mu}, j_1-\delta_{1\nu}, j_2-\delta_{2\nu}; k-1)$ mit maximal k-1 Teilspielen nach sich ziehen kann ($\delta_{\mu\nu}$ Kronecker-δ).

Dann ist, wie man unschwer sieht,

$$v(i_1, i_2, j_1, j_2; k) = \sum_{\mu,\nu=1,2} a_{\mu\nu} p_\mu q_\nu$$

$$+ \sum_{\mu,\nu=1,2} v(i_1-\delta_{1\mu}, i_2-\delta_{2\mu}, j_1-\delta_{1\nu}, j_2-\delta_{2\nu}; k-1)\ p_\mu q_\nu \quad . \tag{5}$$

Hierbei gibt die erste Summe den Erwartungswert für das erste Teilspiel, und die zweite Summe den Erwartungswert für die restlichen k-1 Teilspiele an.

Der Erwartungswert Gl (5) beruht auf der Beziehung (vgl. Parzen /2/ p 43)

$$E\left[\,Y\,\right] = \sum_{x} E\left[\,Y \,\middle|\, X = x\,\right] p_X(x) \quad , \tag{6}$$

insbesondere ist in der zweiten Summe in Gl (5) $v(i_1', i_2', j_1', j_2'; k')$ dem bedingten Erwartungswert $E\left[Y \,\middle|\, X = x\right]$ und $p_\mu q_\nu$ der WV $p_X(x)$ zuzuordnen (Y := zV der Auszahlung, X := zV der Resourcen).

Bezeichnen wir von nun an den Spielwert val $\Gamma(i_1, i_2, j_1, j_2; k)$ ebenfalls mit $v(i_1, i_2, j_1, j_2; k)$, so erhalten wir für diesen die Funktionalgleichung

$$v(i_1, i_2, j_1, j_2; k) = \underset{p}{\text{Max}} \ \underset{q}{\text{Min}} \left\{ \sum_{\mu,\nu=1,2} p_\mu q_\nu \ \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[a_{\mu\nu} + v(i_1-\delta_{1\mu}, i_2-\delta_{2\mu}, j_1-\delta_{1\nu}, j_2-\delta_{2\nu}; k-1) \right] \right\}$$

$$= \underset{q}{\text{Min}} \ \underset{p}{\text{Max}} \left\{ \quad \dots \quad \right\} \tag{7}$$

Die Optimierung läuft über alle WVn $p = (p_1, p_2)$ und $q = (q_1 \cdot q_2)$. Daß Min und Max vertauscht werden dürfen, ist nicht selbstverständlich und wird bei Bellman /1/ p 291 bewiesen.

Die Funktionalgleichung kann natürlich nur gelöst werden, wenn für $v(i_1, i_2, j_1, j_2; k)$ Randbedingungen wie z.B.

$$v(i_1, i_2, j_1, j_2; k) = 0 \quad \text{für} \quad i_1, i_2, j_1, j_2, k \leqslant 0 \tag{8}$$

angegeben werden. Durch sie wird bestimmt, unter welchen Bedingungen ein Spiel Γ abbricht.

Da bei uns die Auszahlungsmatrix M_κ nur die Dimension 2x2 hat, sind bei optimalem Spielverlauf, wie man sich überlegen kann, alle vernünftigen Abbruchbedingungen einander äquivalent. D.h. sie führen auf denselben optimalen Spielwert und dieselbe optimale Politik.

Dennoch ist es gelegentlich nützlich, zwischen dem Spieltyp Γ', der schon abbricht, wenn eine der vier Resourcen erschöpft ist und dem Spieltyp Γ'', der erst abbricht, wenn alle (zwei) Resourcen eines Spielers erschöpft sind, zu unterscheiden

1.2 Lösung der Funktionalgleichung

Die Funktionalgleichung Gl (1.1 - 7) läßt sich rekursiv mit der Theorie der 2x2 Matrix-Spiele lösen. (Vgl. T.S. Motzkin /3/).

Ist $v(i_1-\delta_{1\mu}, i_2-\delta_{2\mu}, j_1-\delta_{1\nu}, j_2-\delta_{2\nu}; k-1)$ für $\mu,\nu=1,2$ bekannt, ergibt sich $v(i_1, j_2, j_1, j_2; k)$ als Spielwert des 2x2 Matrixspiels

$$\begin{pmatrix} a_{11}+v_{11}, & a_{12}+v_{12} \\ a_{21}+v_{21}, & a_{22}+v_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit

$$a_{mn} := a_{mn}(i_1, i_2, j_1, j_2; k)$$

$$v_{mn} := v(i_1-\delta_{1m}, i_2-\delta_{2m}, j_1-\delta_{1n}, j_2-\delta_{2n}; k-1) \quad .$$

Der Spielwert v eines 2x2 Matrixspiels

$$\begin{array}{llcc} & & \multicolumn{2}{c}{\underline{\text{Spieler } S_B}} \\ & \text{Strategie} & B_1 & B_2 \\ \underline{\text{Spieler } S_A} & \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \end{array} \tag{2}$$

hängt davon ab, ob in der Matrix mindestens eines der Elemente a_{mn} zugleich Maximum seiner Spalte und Minimum seiner Zeile ist (sog. Sattelpunkt).

Trifft dies z.B. für $a_{m'n'}$ zu, gilt der Spielwert

$$v = \text{"Sattelpunkt"} = a_{m'n'} \tag{3}$$

und die optimale Strategie des Spielers S_A (S_B) ist eine reine Strategie, d.h.

$$A_{m'} \quad (B_{n'}) \quad . \tag{4}$$

Trifft dies nicht zu, gilt für den Spielwert

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{12}+a_{21})} \tag{5}$$

und die optimalen Strategien sind gemischte Strategien, d.h. Spieler S_A hat die Strategien A_1 bzw. A_2 mit den Wn

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{12}+a_{21})} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{12}+a_{21})} \tag{6}$$

$$q_1 + q_2 = 1 \quad ,$$

und der Spieler S_B die Strategien B_1 bzw. B_2 mit den Wn

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{12}+a_{21})} \quad \text{bzw.} \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{12}+a_{21})} \tag{7}$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

zu wählen.

Somit erhält man für den Spielwert $v_{oo} := v(i_1,i_2,j_1,j_2;k)$ des Matrixspiels Gl (1)

$$v_{oo} = a_{m'n'} + v_{m'n'} \quad , \tag{8}$$

falls dieses in seiner Auszahlungsmatrix einen Sattelpunkt in der m'-ten Zeile und der n'-ten Spalte besitzt und sonst die DzGl (= Differenzengleichung)

$$v_{oo} = \frac{(a_{11}+v_{11})(a_{22}+v_{22}) - (a_{12}+v_{12})(a_{21}+v_{21})}{(v_{11}+v_{22})-(v_{12}+v_{21}) + (a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \tag{9}$$

oder

$$v_{oo} = \frac{(v_{11}v_{22}-v_{12}v_{21}) + a_{22}v_{11}-a_{21}v_{12}-a_{12}v_{21}+a_{11}v_{22} + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}{(v_{11}+v_{22}) - (v_{12}+v_{21}) + (a_{11}+a_{22}) - (a_{12}+a_{21})}$$

In beiden Fällen müssen der gesuchte Spielwert v_{oo} und entsprechend die zugehörigen optimalen Strategien rekursiv ermittelt werden.

Die DzGl (9) ist im allgemeinen nicht linear und schwer lösbar.[1] Um eine lineare DzGl zu erhalten, muß gemäß Gl (9)

$$v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} = 0$$

$$(v_{11}+v_{22}) - (v_{12}+v_{21}) = 0 \qquad \text{gelten,} \tag{10}$$

1) Für die Lösung eines Spezialfalls vgl. Dresher /5/ .

woraus entweder

$$v_{11} = v_{12} \quad , \quad v_{22} = v_{21} \tag{11}$$

oder

$$v_{11} = v_{21} \quad , \quad v_{22} = v_{12} \tag{12}$$

folgt. Denn aus Gl (10a) $v_{11} = (v_{12}v_{21})/v_{22}$ eingesetzt in Gl (10b) liefert die in v_{22} quadratische Gl

$$v_{22}^2 - (v_{12}+v_{21})\, v_{22} + v_{12}v_{21} = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} v_{22} &= \left[+(v_{12}+v_{21}) \pm \sqrt{(v_{12}+v_{21})^2 - 4\, v_{12}v_{21}} \right] /2 \\ &= \left[(v_{12}+v_{21}) \pm (v_{12}-v_{21}) \right] /2 \end{aligned}$$

woraus sich mit $v_{11} = (v_{12}v_{21})/v_{22}$ die Bedingungen Gl (11) und (12) ergeben.

Diese Forderungen lassen sich im ersten Fall mit

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{12} = v(i_1-1, i_2; k-1) \\ v_{22} &= v_{21} = v(i_1, i_2-1; k-1) \end{aligned} \tag{13}$$

und im zweiten Fall mit

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{21} = v(j_1-1, j_2; k-1) \\ v_{22} &= v_{12} = v(j_1, j_2-1; k-1) \end{aligned} \tag{14}$$

erfüllen. Demnach erhalten wir genau dann eine lineare DzGl, wenn in dem betreffenden Spiel Γ entweder die Resourcen des Spielers S_B oder des Spielers S_A keinen Beschränkungen unterworfen sind. Wir nennen solche mehrstufigen Spiele zukünftig lineare (mehrstufige) Spiele.

Sie weisen als Besonderheit auf, daß sie bezüglich ihres Spielwerts schon optimal sind, wenn nur einer der beiden Spieler seine optimale Politik verfolgt.

Dies sieht man im Fall, daß Spieler S_A unbeschränkte Resourcen hat, so ein:

Sei zur Abkürzung

$$u := v(j_1-1,j_2;k-1), \quad v := v(j_1,j_2-1;k-1), \quad w := v(j_1,j_2;k);$$

$$a := +a_{11}, \quad b := -a_{12}, \quad d := -a_{21}, \quad c := +a_{22}$$

$$\text{mit} \quad a_{mn} := a_{mn}(j_1,j_2;k) \quad ;$$

und

$$\begin{array}{llll} & & & \underline{\text{Spieler } S_B} \\ & \text{Strategien} & & B_1 \qquad\quad B_2 \\ & \text{WVn} & & q \qquad\quad 1-q \\ \underline{\text{Spieler } S_A} & A_1 & p & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} u+a & v-b \\ u-d & v+c \end{pmatrix}$} \\ & A_2 & 1-p & \end{array} .$$

Dann erhalten wir gemäß Gl (1)

$$w = \mathrm{val} \begin{pmatrix} u+a & v-b \\ u-d & v+c \end{pmatrix}$$

und nach Gl (5), wenn kein Sattelpunkt vorliegt

$$w = \frac{(b+c)\ u + (a+d)\ v + (ac-bd)}{a + b + c + d} \tag{15}$$

Spieler S_A bzw. S_B hat hierbei nach Gl (6) bzw. Gl (7) als WV für seine optimale Strategie

$$p = \frac{(v-u) + (c+d)}{s} \qquad \text{bzw.} \qquad q = \frac{b+c}{s} \tag{16}$$

mit $s := a+b+c+d$.

Für eine beliebige gemischte Strategie des Spielers S_A $\left[S_B\right]$ mit der WV $(p',1-p')$ $\left[(q',1-q') \right]$ tritt anstelle von w der Erwartungswert

$$w' = (u+a)p'q' + (v-b)p'(1-q') + (u-d)(1-p')q' + (v+c)(1-p')(1-q') \ , \tag{17}$$

was leicht umgeformt werden kann zu

$$w' = q' \left\{ sp'+(u-v)-(c+d) \right\} - (b+c)p' + (v+c) \ , \tag{18}$$

oder

$$w' = p' \left\{ sq'-(b+c) \right\} + \left\{ (u-v)-(c+d) \right\} q' + (v+c) \ . \tag{19}$$

Benutzt nun Spieler S_A seine optimale und Spieler S_B eine beliebige Strategie, ergibt Gl (18) mit $p' = \left\{ (v-u)+(c+d) \right\} /s = p$

$$w' = q' \cdot 0 - (b+c)p + (v+c) = w \tag{20}$$

und im umgekehrten Fall ergibt Gl (19) mit $q' = (b+c)/s = q$

$$w' = p' \cdot 0 + \left\{ (u-v)-(c+d) \right\} q + (v+c) = w \ . \tag{21}$$

Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Nebenbei ergab sich noch als wichtiges Ergebnis, siehe Gl (16), daß die WV $(q,1-q)$ des Spielers S_B nicht von den Spielwerten u und v und nur dann von dessen Resourcen abhängt, wenn dies auch für die Größen a,b,c,d zutrifft.

Die zuletzt besprochene Eigenschaft linearer Spiele kann auch dadurch charakterisiert werden, daß man von einseitigen Spielen spricht. Soweit uns bekannt, wurde ein derartiges Spiel zuerst von D. Blackwell und J. L. Hodges in /4/ behandelt.

Wir greifen im folgenden ihre Methode auf und wenden sie auf Inspektionsspiele an.

2. Das Spiel $\Gamma(i,j)$

2.0 Bezeichnungen

Die linearen mehrstufigen Spiele, die wir im folgenden im Detail behandeln, haben den Spielwert

$$v(i,j;k) \; = $$

$$\operatorname{val}\begin{pmatrix} a_{11}(i,j;k) + v(i-1,j;k-1) \, , & a_{12}(i,j;k) + v(i,j-1;k-1) \\ a_{21}(i,j;k) + v(i-1,j;k-1) \, , & a_{22}(i,j;k) + v(i,j-1;k-1) \end{pmatrix},$$

wobei Spieler S_1 (früher S_A) über unbeschränkte und Spieler S_2 (früher S_B) nur über beschränkte Resourcen verfügt.

Wir verwenden zur Kennzeichnung der Strategien, Resourcen usw. die nun günstigen Bezeichnungen (vgl. z.B. Gl (1.1 - 2)):

Spieler S_2

$$\begin{array}{llll|cc}
 & & & \text{Strategien} & A_2 & B_2\\
 & & & \text{Resourcen} & i_2 & j_2\\
 & & & \text{WVn} & p_2 & q_2\\
\hline
\text{Spieler } S_1 & A_1 & i_1 & p_1 & a & -b\\
 & B_1 & j_1 & q_1 & -d & +c
\end{array}$$

Auszahlungsmatrix
$a,b,c,d \geq 0$

Anzahl der Strategien $\left.\begin{matrix} A_1 \\ B_1 \end{matrix}\right\}$ des Spielers S_1

Spielwert: $v(i_1, j_1, i_2, j_2; k)$ — Anzahl der Stufen

Anzahl der Strategien $\left.\begin{matrix} B_2 \\ A_2 \end{matrix}\right\}$ des Spielers S_2

Indizes lassen wir weg, wenn sie sich aus dem Zusammenhang ergeben. Gewöhnlich ist, wie oben

$$i_1 = j_1 = \infty \; ; \quad i_2 = i, \quad j_2 = j; \quad p_2 = p, \quad q_2 = q \quad .$$

Wie wir in Abschnitt 1.2 gesehen haben, gibt es bei diesem Spieltyp für die beiden Spieler, wenn kein Sattelpunkt vorhanden ist, zwei Serien von optimalen Strategieplänen (= "Politiken") .

Wir nehmen im allgemeinen an, daß jeweils der Spieler S_2 (Inspektor) seine optimale Politik benutzt, wobei dann jede (zulässige) Politik des Spielers S_1 (Betreibers) optimal bleibt.

Dies ermöglicht es uns nach einem Vorschlag von D. Blackwell und J. L. Hodges /4/ die Politik des Spielers S_1 so zu wählen, daß wir den Spielwert auch mittels einer probabilistischen Überlegung finden können. Die übliche Methode, den Spielwert über die Lösung einer DzGl zu ermitteln, benutzen wir dazu, um dieses Ergebnis zu überprüfen.

2.1 Definition des Spiels $\Gamma(i,j)$

Anzahl der Stufen: k (Tage)

(Stufe = Teilspiel = Spielzug)

Resourcen:

Spieler S_1 (Betreiber)

$$\left.\begin{array}{llll} \text{maximal} & k & A_1\text{-Strategien} & \text{(verbotene Handlungen)} \\ \text{maximal} & k & B_1\text{-Strategien} & \text{(erlaubte Handlungen)} \end{array}\right\} \text{keine Beschränkung}$$

Spieler S_2 (Inspektor)

$$\left.\begin{array}{lll} \text{genau } i_2 & A_2\text{-Strategien} & \text{(Tage ohne Kontrolle)} \\ \text{genau } j_2 = k-i_2 & B_2\text{-Strategien} & \text{(Tage mit Kontrolle)} \end{array}\right\} \text{Beschränkungen}$$

Auszahlungsmatrix pro Stufe

$$\begin{array}{lcc} & & \text{Spieler } S_2 \\ & \text{Strategie} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \text{Spieler } S_1 & \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} +a & -b \\ -d & +c \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Die Auszahlungsmatrix pro Stufe ist unabhängig von der jeweiligen Stufe und für die Elemente gilt $a,b,c,d \geq 0$.

Spielwert von $\Gamma(i,j)$

Da das Gesamtspiel nur von der Anzahl k der Stufen und den beiden Resourcen des Spielers S_2 abhängt, verringern sich die 5 Parameter des Spielwerts $v(i_1,j_1,i_2,j_2;k)$ des allgemeinen Falls auf zwei. Wir wählen als die beiden Parameter $i := i_2$ und $j := j_2$ mit $k = i+j$ und schreiben für

$$v(i_1,j_1,i_2,j_2;k) = v(i_2,j_2;k) = v(i,j) \qquad (2)$$

(Beachte, daß v hier anders definiert ist als in Abschnitt 1).

Der Spielwert $v(i,j)$ wird rekursiv gegeben durch die Beziehung

$$v(i,j) = \operatorname{val} \begin{pmatrix} v(i-1,j)+a & v(i,j-1)-b \\ v(i-1,j)-d & v(i,j-1)+c \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit den Randbedingungen

$$v(i,0) = ia \quad , \quad v(0,j) = jc \quad . \tag{4}$$

<u>Bemerkung</u>

Dem oben erklärten Spielwert entspricht ein k-stufiges 2x2 - Matrix-Zwei-Personenspiel Γ', das abgebrochen wird, wenn mindestens eine Resource des Spielers S_2 erschöpft ist.

Der Problemstellung würde jedoch eher ein k-stufiges Spiel vom Typ Γ'' gerecht.

Dies ist jedoch ohne Belang, da die Randbedingungen so gewählt wurden, daß beide Spiele einander äquivalent sind.

2.2 Spezialfall $\Gamma(3,2)$

<u>Berechnung des Spielwerts mit der probabilistischen Methode</u>

Um den allgemeinen Fall vorzubereiten, behandeln wir zunächst den Spezialfall $i=3$, $j=2$ $(k = i+j = 5)$.

Wir nehmen an, daß Spieler S_2 seine optimale Politik benutzt, die wir wie Blackwell und Hodges /3/ gestutzte Binomialpolitik (= truncated binomial design) nennen wollen.

Hierbei wählt Spieler S_2 die Strategie A_2 mit der W

$$p = \frac{b+c}{a+b+c+d} = \frac{b+c}{s} \tag{1a}$$

und die Strategie B_2 mit der W

$$q = \frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{s} \tag{1b}$$

bis entweder der Vorrat an einer der beiden Strategien erschöpft oder der k-te Spielzug beendet ist.

Wenn eine der beiden Strategien A_2, B_2 vor dem k-ten Spielzug nicht mehr verfügbar ist, so bricht das Spiel beim Typ Γ' ab. Beim Typ Γ'' setzt der Spieler S_2 das Spiel mit der ihm verbliebenen Strategie bis zum k-ten Spielzug fort. Es entartet dabei zum Ein-Personenspiel für Spieler S_1.

Die Randbedingung Gl (2.2-4) im Spiel Γ' drückt nichts weiter aus, als daß Spieler S_1 im Spiel Γ'' mit optimaler Politik weiterspielt.

Um den Spielwert des Spiels $\Gamma(i,j)$ zu berechnen, wählen wir für Spieler S_1 die im folgenden beschriebene A- oder B-Politik, die seinen Gewinn zumindest nach der Erschöpfung einer der Resourcen des Spielers S_2 maximiert.

A-Politik (B-Politik): Spieler S_1 spielt solange Strategie A_1 (B_1), bis Spieler S_2 nur nach Strategie A_2 oder B_2 spielen kann. Danach spielt er weiterhin Strategie A_1 (B_1), wenn Strategie B_2 (A_2) erschöpft ist und Strategie B_1 (A_1), wenn Strategie A_2 (B_2) erschöpft ist.

Wir überlegen nun, auf wieviele Arten das Spiel $\Gamma(i,j) = \Gamma(3,2)$ ablaufen kann. Dazu betrachten wir zunächst eine typische Realisation

Spielzug		1	2	3	4	5	W:	
Spieler S_2	Inspektor	B_2	A_2	A_2	A_2	B_2		
Spieler S_1	Betreiber	A_1	A_1	A_1	A_1	B_1	p^3q	(2)

eines Spiels $\Gamma(3,2)$, bei der die Binomialpolitik des Spielers S_2 mit dem vierten Spielzug endigt. Danach muß er die Strategie B_2 spielen, was Spieler S_1 weiß und gemäß der Auszahlungsmatrix am besten mit Strategie B_1 beantwortet.

Diese Realisation hat für Spieler S_2 und für beide Spieler wegen der von ihnen benutzten gestutzten Binomial- bzw. A-Politik die W p^3q. (Spieler S_1 benutzt mit W =1 die Strategie A_1 !).

Führt man die zVn

$$\left.\begin{array}{lll} X_A & = & \text{Anzahl der } A_2 \text{ - Strategien} \\ X_B & = & \text{Anzahl der } B_2 \text{ - Strategien} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{bis zur Erschöpfung} \\ \text{einer der Resourcen}\end{array}$$

und

$$\left.\begin{array}{lll} R_A & = & \text{Anzahl der restl. } A_2 \text{ - Strategien} \\ R_B & = & \text{Anzahl der restl. } B_2 \text{ - Strategien} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{bei Erschöpfung einer} \\ \text{der Resourcen}\end{array}$$

ein, kommt der obigen Realisation der Wert $(X_A,X_B;\ R_A,R_B) = (3,1;0,1)$ zu, wobei eines der Variablenpaare (X_A,X_B) und (R_A,R_B) genügt, um das andere zu bestimmen.

Die Auszahlung an Spieler S_1 beträgt im obigen Beispiel

$$\begin{aligned} \text{Auszahlung} &= -b \ \left(\text{für } \begin{smallmatrix} B_2 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right) + 3a \ \left(\text{für } \begin{smallmatrix} A_2A_2A_2 \\ A_1A_1A_1 \end{smallmatrix}\right) + c \ \left(\text{für } \begin{smallmatrix} B_2 \\ B_1 \end{smallmatrix}\right) \\ &= 3a - b + c \end{aligned}$$

und allgemein

$$Y_A = aX_A - bX_B + aR_A + cR_B \quad . \tag{3}$$

Mit der in Gl (2) eingeführten Symbolik schreiben wir nun alle Realisationen des Spiels $\Gamma(3,2)$ auf, wobei wir zur Vereinfachung die Indizes weglassen.

$$p^3 \quad \begin{array}{ccc|cc} A & A & A & B & B \\ A & A & A & B & B \end{array} \qquad 3p^3q \left\{ \begin{array}{cccc|c} A & A & B & A & B \\ A & A & A & A & B \\ \\ A & B & A & A & B \\ A & A & A & A & B \\ \\ B & A & A & A & B \\ A & A & A & A & B \end{array} \right. \qquad 3p^2q^2 \left\{ \begin{array}{cccc|c} A & A & B & B & A \\ A & A & A & A & A \\ \\ A & B & A & B & A \\ A & A & A & A & A \\ \\ B & A & A & B & A \\ A & A & A & A & A \end{array} \right.$$

$$2pq^2 \left\{ \begin{array}{ccc|cc} A & B & B & A & A \\ A & A & A & A & A \\ \\ B & A & B & A & A \\ A & A & A & A & A \end{array} \right. \qquad q^2 \quad \begin{array}{cc|ccc} B & B & A & A & A \\ A & A & A & A & A \end{array} \quad . \tag{4}$$

Die den einzelnen Gruppen zukommenden Wn haben, wenn man sie zusammenaddiert die Summe 1 und bilden somit eine WV.

Dies sieht man, wenn man jede W mit einer passenden Potenz von $(p+q)=1$ multipliziert, so daß lauter Terme 5. Ordnung entstehen:

$$p^3 + 3p^3q + \underbrace{3p^2q^2 + 2pq^2 + q^2}_{} =$$

$$p^3(p+q)^2 + 3p^3q(p+q) + 3p^2q^2(p+q) + 2pq^2(p+q)^2 + q^2(p+q)^3 =$$

$$\sum_{\mu=0}^{5} \binom{5}{\mu} p^{\mu} q^{5-\mu} = (p+q)^5 = 1 \quad . \tag{5}$$

Insbesondere folgt daraus (siehe $\underbrace{\qquad}$ in Gl (5))

$$q^2(3p^2+2p+1) = 1-p^3(1+3q) \quad , \tag{6}$$

was den Erwartungswert für die zV Y_A (= val $\Gamma(3,2)$)

$$v(3,2) = (3a+2c)p^3 + (3a-b+c)\ 3p^3q + (3a-2b)\ 3p^2q^2$$
$$+ (3a-2b)\ 2pq^2 + (3a-2b)\ q^2$$

zu

$$v(3,2) = (3a-2b) + (b+c)p^3(2+3q) \tag{7}$$

vereinfacht.

2.3 Vorbereitung des allgemeinen Falls

Um die WV herzuleiten, über die wir val $\Gamma(i,j)$ berechnen wollen, benutzen wir eine Methode, die sich nicht nur bei diesem sondern auch bei dem Spiel $\Gamma(i,j;k)$ bewährt.

Sie besteht darin, den Spielverlauf eines "einseitigen" k-stufigen Spiels als Irrfahrt (= random walk) auf einem zweidimensionalen Gitter mit Maschen der Länge 1×1 zu deuten.

Wir erläutern die Zuordnung zuerst an einem einfachen Spiel, das zugleich den Vorzug hat, sich zu dem Spiel $\Gamma(i,j)$ verallgemeinern zu lassen.

Das Spiel $\Gamma(\infty, \infty)$

Dieses einfachere Spiel bauen wir auf über das einstufige 2x2-Matrix-Spiel M mit der Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} u+a & u-b \\ u-d & u+c \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} a,b,c,d \geq 0 \\ u \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

bei dem nicht nur der Spieler S_1 sondern auch der Spieler S_2 beliebig über seine Strategien verfügen kann.

Es wird zum k-stufigen Spiel $\Gamma(i,j)$ mit $i=j=\infty$ (die Argumente beziehen sich auf die Resourcen des Spielers S_2), wenn wir statt einem jeweils Serien zu je k Matrixspielen vom obigen Typ betrachten.

Wie man leicht nachprüft, besitzt die Auszahlungsmatrix keinen Sattelpunkt. So ist z.B. das Element $u+a$ zwar Maximum seiner Spalte, aber nicht Minimum seiner Zeile.

Die optimale Politik des Spielers S_2 ist im Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$ die (ungestutzte) Binomialpolitik und es können z.B. für $k=5$ Folgen von Strategien wie

A A A A B

auftreten, die im Spiel $\Gamma(3,2)$ unmöglich sind.

Wie in 1.2 besprochen, ist das Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$ aufgrund seiner Auszahlungsmatrix einseitig, wenn der Spieler S_2 seine optimale Politik anwendet. Denn es ist dann auch immer für Spieler S_2 optimal, unabhängig davon, was dieser für eine Politik wählt.

Die der Politik des Spielers S_2 entsprechende Irrfahrt erhalten wir, wenn wir uns dafür interessieren, wie ein solches Spiel zeitlich abläuft. Sei etwa am Ende der Realisation eines Spiels

A B A A A B B ...A

die vom Spieler S_2 gemäß der Binomialpolitik gewählte Folge von k Strategien A bzw. B, dann entsteht diese im Laufe des Spiels aus

A	(1,0)
A B	(1,1)
A B A	(2,1)
A B A A	(3,1)
...	...
A B A A A B B ...A	(m,n) , $m+n = k$.

Deuten wir nun (μ,ν) = (Anzahl der Strategien A, Anzahl der Strategien B) als Punkt in einem zweidimensionalen Gitter, so führt dieser darauf eine sog. gewöhnliche Irrfahrt mit folgenden Eigenschaften aus: (Abb. 1)

(1) Ausgangspunkt der Irrfahrt ist der Ursprung des zweidimensionalen Gitters.

(2) Es sind nur solche Bewegungen erlaubt, die aus einem positiven Einheitsschritt in der "A"- bzw. "B"-Richtung bestehen.

(3) Ein Schritt in der A-Richtung erfolgt mit der W p und in der B-Richtung mit der W q.

Insbesondere schließen wir aus dieser Definition, daß die W in k Schritten den Gitterpunkt $(m,k-m)$, $m=0,1,\dots,k$ auf der Diagonalen durch die Punkte $(0,k)$ und $(k,0)$ zu erreichen (:= Nebendiagonale), gleich der entsprechenden W aus der Binomial-Vf ist (Abb. 2) .

Um dies einzusehen, betrachten wir einen beliebigen Punkt (m,n). Die W vom Ursprung auf einem bestimmten aber erlaubten Weg dort hinzugelangen, ist $p^m q^n$. Nun gibt es aber nicht nur einen, sondern wie weiter unten gezeigt wird, $\binom{m+n}{n} = \binom{n+m}{m}$ derartige Wege, um zum Punkt (m,n) zu kommen. Daher ist die W , einen Punkt $(m,k-m)$ auf der Nebendiagonalen in genau k Schritten einer gewöhnlichen Irrfahrt zu erreichen

$$P\left[X_A = m \, , \, X_B = k-m \right] = \binom{k}{m} p^m q^{k-m} \quad , \quad m=0,1,\ldots,k \tag{2}$$

X_A (X_B) := zV für die Anzahl der Schritte in der A (B) - Richtung.

Die Anzahl $u(m,n)$ der erlaubten Wege, die zum Punkte (m,n) führen, gehorcht der pDzGl (= partiellen Differenzengleichung)

$$u(m+1,n+1) = u(m,n+1) + u(m+1,n) \tag{3}$$

mit den Randbedingungen

$$u(m,0) = 1 \quad \text{für} \quad m \geq 0 \, ,$$
$$u(0,n) = 1 \quad \text{für} \quad n \geq 0 \, . \tag{4}$$

Dies erkennt man unmittelbar aus der nebenstehenden Abb. 3. Die pDzGl folgt aus der Tatsache, daß man zum Punkt $(m+1,n+1)$ in einem Schritt nur vom Punkt $(m+1,n)$ oder vom Punkt $(m,n+1)$ gelangen kann. Die Randbedingungen drücken aus, daß es jeweils nur einen einzigen erlaubten Weg zu einem Punkt auf der positiven A- bzw. B-Achse gibt.

Da das obige Randwertproblem symmetrisch in m und n ist, gilt auch

$$u(m,n) = u(m,n) \quad . \tag{5}$$

Die pDzGl lösen wir im Anhang 1 mit der zweidimensionalen diskreten Laplace-Transformation, neuerdings meist Z-Transformation genannt /6/. Abgesehen davon sieht man unmittelbar, daß $u(m,n) = \binom{m+n}{n}$ die gesuchte Lösung ist, da sie den Randbedingungen genügt und in die pDzGl eingesetzt, die für Binomialkoeffizienten fundamentale Beziehung $(M = m+n+2,$ $N = n+1)$

$$\binom{M}{N} = \binom{M-1}{N} + \binom{M-1}{N-1} \tag{6}$$

ergibt.

Also gilt der <u>Satz:</u>
Bei einer gewöhnlichen Irrfahrt gibt es $u(m,n) = \binom{m+n}{n}$ verschiedene Wege vom Ursprung zum Punkt (m,n) , wobei $m,n \geq 0$ ist.

Damit haben wir gezeigt, daß wir im Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$ die WV der optimalen Politik des Spielers S_2 auch über eine entsprechende Irrfahrt erhalten können.

Dies trifft zumindest für alle einseitigen mehrstufigen Spiele zu, und ermöglicht es uns insbesondere bei den Spielen $\Gamma(i,j)$ und $\Gamma(i,j;k)$ die WV für die optimale Politik des Spielers S_2 herzuleiten.

Nunmehr berechnen wir val $\Gamma(\infty,\infty)$ einmal mit der probabilistischen und dann mit der Standardmethode.

Natürlich funktioniert die probabilistische Methode nur bei Spielen, die einseitig werden, wenn einer der Spieler seine optimale Politik betreibt.

Sie beruht auf folgender Überlegung:

Im Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$ bestimmt die Binomialpolitik des Spielers S_2 die W, in einer Serie von k Spielen vom Typ Gl (1) m mal die Strategie A und $(k-m)$ mal die Strategie B anzuwenden, und die Politik des Spielers S_1, was ausgezahlt wird, wenn sich Spieler S_1 für Strategie A bzw. B entscheidet.

D.h. aber mathematisch präzisiert, daß die optimale Politik des Spieler S_2 eine W-Algebra sowie eine zV X_A, und die (nicht optimale) Politik des Spielers S_1 über eine Variablentransformation f eine Auszahlungsvariable $Y = f(X_A)$ definieren, deren Erwartungswert $E(Y)$ gleich dem Spielwert ist.

Wir diskutieren zwei Strategiepläne des Spielers S_1.

a) Der Spieler S_1 wählt immer die Strategie A (früher A-Politik genannt, hier zur reinen Strategie entartet). Dann wird ihm bei $\binom{A}{A}$ (= Zusammentreffen von A_2 und A_1) der Betrag $(u+a)$ und bei $\binom{B}{A}$ (= Zusammentreffen von B_2 und A_1) der Betrag $(u-b)$ ausbezahlt.

   Dies ergibt für den Erwartungswert der Auszahlung im Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$, wenn m mal $\binom{A}{A}$ und $n=k-m$ mal $\binom{B}{A}$ mit der W $P\left[X_A=m, X_B=n\right]$ auftritt:

$$v_A = \sum_{m=0}^{k} \left[m(u+a) + (k-m)(u-b) \right] \binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$

$$= (u+a) \sum_{m=0}^{k} m \binom{k}{m} p^m q^{k-m} + (u-b) \sum_{\substack{m'=0 \\ m'=k-m}}^{k} m' \binom{k}{m'} q^{m'} p^{k-m'}$$

$$= (u+a)\ kp + (u-b)\ kq \tag{7}$$

b) Der Spieler S_2 wählt immer die Strategie B (früher B-Politik genannt, hier zur reinen Strategie entartet). Dann wird ihm bei $\binom{A}{B}$ der Betrag $(u-b)$ und bei $\binom{B}{B}$ der Betrag $(u+c)$ ausbezahlt. Dies ergibt analog zu v_A den Erwartungswert

$$v_B = \sum_{m-0}^{k} \left[m(u-d) + (k-m)\ (u+c) \right] \binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$

$$= (u-d)\ kp + (u+c)\ kq \tag{8}$$

Die Erwartungswerte v_A und v_B sind gleich, da mit $s := a+b+c+d$

$$ap-bq = \frac{a(b+c) - b(a+d)}{s} = \frac{c(a+d) - d(b+c)}{s} = cq-dp. \tag{9}$$

Mithin erhalten wir für den Wert des Spiels $\Gamma(\infty,\infty)$

$$v = \text{val}\ \Gamma(\infty,\infty) = v_A = v_B \ . \tag{10}$$

Damit haben wir zugleich an einem Beispiel demonstriert, daß der Spielwert val $\Gamma(\infty,\infty)$ unabhängig von der Politik des Spielers S_1 ist, wenn Spieler S_2 seine optimale Politik, die Binomialpolitik anwendet.

Die Standardmethode führt bei einem k-stufigen Spiel, wenn dies keine Sattelpunkte besitzt zu einer DzGl. Da jedoch das Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$ lediglich aus einer k-maligen Wiederholung des Matrixspiels M Gl (1) besteht, gilt

$$v = k \cdot \text{val } M \quad , \tag{11}$$

wobei nach Gl (1.2 - 5)

$$\text{val } M = \frac{(u+a)(u+c) - (u-b)(u-d)}{(u+a)+(u+c)-(u-b)-(u-d)} = \frac{(u+a)(b+c) + (u-b)(a+b)}{a+b+c+d}$$

ist, was mit p und q gemäß den Gln (2.2-1) auf

$$\text{val } M = (u+a)p + (u-b)q \tag{12}$$

führt.

2.4 Berechnung von val $\Gamma(i,j)$ über die probabilistische Methode

Den Wert des Spiels $\Gamma(\infty,\infty)$ berechneten wir im wesentlichen mit Hilfe der Binomial-Vf. Um dasselbe für das Spiel $\Gamma(i,j)$ tun zu können, müssen wir die WV ermitteln, welche anstelle der Binomial-Vf tritt, wenn in k Spielzügen der Spieler S_2 genau i mal die Strategie A und j mal die Strategie B anwenden muß.

Dazu überlegen wir zunächst, welche Irrfahrt im Spiel $\Gamma(3,2)$ der optimalen Strategie des Spielers S_2 entspricht (vgl. Abb. 4 a).

Wenn sich Spieler S_2 gemäß einer Irrfahrt zum Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$ mit $k=5$ bewegt, so endigt diese nach 5 Schritten in einem der mit Δ markierten Punkte der Nebendiagonalen.

Hat er dagegen maximal 3 Schritte in der A- und maximal 2 Schritte in der B-Richtung, so kommt er nur bis zu einem der mit o markierten Punkte des Rechtecks, das durch die Geraden $n=2$ und $m=3$ begrenzt ist.

Beim Spieltyp Γ' ist damit die Irrfahrt beendigt. Beim Spieltyp Γ'' muß und kann er sich nur noch auf dem Rand des Rechtecks bis zu dessen Eckpunkt $(i,j) = (3,2)$ bewegen. Dieser liegt auf der Nebendiagonalen durch die Punkte $(0,k)$ und $(k,0)$. Er wird bei dem Spieltyp Γ' nie erreicht und ist beim Spieltyp Γ'' stets der Endpunkt der Irrfahrt.

Rechnen wir nun aus, mit welcher W eine gewöhnliche Irrfahrt zu einem der Randpunkte o gelangt ohne eine der Geraden $n=2$ oder $m=3$ zu berühren, erhalten wir dieselben Wn wie in Gl (2.2 - 4).

Statt dies aber explizit zu tun, behandeln wir sogleich den allgemeinen Fall.

Wir bemerken hierzu als erstes, daß auf einem bestimmten Weg sowohl ein "innerer" Punkt als auch ein Randpunkt (m,n) für positive Werte von $m=i$ und $n=j$ mit der W $p^m q^n$ erreicht wird.

Die Anzahl $\bar{u}(m,n)$ der zulässigen Wege zu einem Randpunkt ist aber nicht mehr $\bar{u}(m,n) = \binom{m+n}{n}$ sondern geringer, da nun die Irrfahrt entlang der Ränder verboten ist (= eingeschränkte gewöhnliche Irrfahrt).

Es ist jedoch nicht schwer, die Anzahl $\bar{u}(m,n)$ der Wege zu einem Randpunkt über die Anzahl $u(m,n) = \binom{m+n}{n}$ der Wege zu entsprechenden inneren Punkten zu ermitteln.

Beginnen wir mit den Randpunkten (i',j) , $0 \leq i' \leq i-1$ auf der Geraden $n=j$.

Den Punkt $P_0 = (0,j)$ können wir vom Ursprung aus ungehindert erreichen, also gilt

$$\bar{u}(0,j) = \binom{0+j}{j} \quad . \tag{1}$$

Zum Punkt $P_1 = (1,j)$ können wir noch fast ungehindert gelangen, da nur die Route über P_0 nicht erlaubt ist. Wäre letzteres jedoch zulässig, so könnten wir es von dort nur auf eine einzige Weise tun. Daher ist

$$\bar{u}(1,j) = \binom{1+j}{j} - \binom{0-j}{j} \quad . \tag{2}$$

Nicht viel komplizierter ist es, die Anzahl $\bar{u}(i',j)$ der zulässigen Wege zum Randpunkt $P_{i'} = (i',j)$ zu ermitteln.

Betrachten wir noch den Punkt $P_2 = (2,j)$, um das Bildungsgesetz zu erkennen.

Punkt P_2 ist, wenn dies erlaubt wäre, vom Punkt P_0 bzw. P_1 jeweils nur auf eine Weise erreichbar. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{u}(2,j) &= \binom{2+j}{j} - \bar{u}(1,j) - \bar{u}(0,j) \\ &= \binom{2+j}{j} - \binom{1+j}{j} \end{aligned} \tag{3}$$

und allgemein

$$\bar{u}(i',j) = \binom{i'+j}{j} - \binom{i'+j-1}{j} \quad , \qquad i' = 0,1,2,\ldots,i-1 \tag{4}$$

mit $\binom{n}{m} = 0$ für $n < m$.

Dies läßt sich auch in der Form

$$\bar{u}(i-\mu,j) = \binom{i+j-\mu}{j} - \binom{i+j-\mu-1}{j}$$

$$= \binom{i+j-\mu-1}{j-1} \quad , \quad \mu = 1,2,\dots,i \tag{5}$$

schreiben, wobei wir zuletzt die Beziehung Gl (2.3 - 6) benutzten.

In derselben Weise erhalten wir für die Randpunkte $Q_{j'} = (i,j')$, $0 \leq j' \leq j-1$ auf der Geraden $m=i$

$$\bar{u}(i,j-\nu) = \binom{i+j-\nu-1}{i-1} \quad , \quad \nu = 1,2,\dots,j \quad . \tag{6}$$

Damit ist die W , zum Randpunkt $(i-\mu,j)$ zu gelangen

$$P\left[(i-\mu,j)\right] = \binom{i+j-\mu-1}{j-1} p^{i-\mu} q^{j} \quad , \quad \mu = 1,2,\dots,i \tag{7}$$

und die W , zum Randpunkt $(i,j-\nu)$ zu gelangen

$$P\left[(i,j-\nu)\right] = \binom{i+j-\nu-1}{i-1} p^{i} q^{j-\nu} \quad , \quad \nu = 1,2,\dots,j \quad . \tag{8}$$

Auf das Spiel $\Gamma(i,j)$ bezogen, bedeuten die obigen Wn , wie man unschwer erkennt:

$P\left[(i-\mu,j)\right]$ = W , daß der Spieler S_2 noch μ Strategien vom Typ A übrig hat, wenn seine Strategien vom Typ B erschöpft sind.

$P\left[(i,j-\nu)\right]$ = W , daß der Spieler S_2 noch ν Strategien vom Typ B übrig hat, wenn seine Strategien vom Typ A erschöpft sind.

Führen wir daher die zV

> R := Anzahl der Strategien A oder B , wenn der Vorrat für eine der beiden Strategien erschöpft ist

ein, so gilt:

$$P\left[R=r\right] = P\left[(i,j-r)\right] + P\left[(i-r,j)\right]$$

$$= \binom{i+j-r-1}{i-1} p^i q^{j-r} + \binom{i+j-r-1}{j-1} p^{i-r} q^j \quad , \quad r = 1,2,\ldots \max(i,j) \; . \tag{9}$$

Wegen $\binom{n}{m} = 0$ für $n<m$ ist dieser Ausdruck allgemein gültig.

Da die eingeschränkte Irrfahrt einen der Randpunkte passieren muß, ist anschaulich klar, daß $P\left[R-r\right]$ eine WV ist.

Formal beweist man dies entweder mit vollständiger Induktion oder indem man die Summe

$$S_{ij} := p^i \sum_{r=1}^{j} \binom{i+j-r-1}{i-1} q^{j-r} + q^j \sum_{r=1}^{i} \binom{i+j-r-1}{j-1} p^{i-r} \tag{10}$$

mit Hilfe der Zweidimensionalen Z-Transformation ausrechnet. Die Beweise sind nicht ganz trivial und finden sich im Anhang 2.

In / 9/ leiten wir die WV Gl (9) noch auf andere Weise her. Dabei sieht man unmittelbar, daß diese WV zur Klasse der gestutzten negativen Binomial-Vfn gehört.

Nunmehr können wir val $\Gamma(i,j)$ ermitteln. Wir verfahren dabei im Prinzip genauso wie in den Spezialfällen val $\Gamma(3,2)$ und val $\Gamma(\infty,\infty)$.

Zunächst bemerken wir, daß mit den in 2.2 eingeführten zVn X_A, X_B, R_A, R_B die Beziehungen

$$P\left[X_A = i-\mu,\ X_B = j,\ R_A = \mu,\ R_B = 0\right] = P\left[(i-\mu,j)\right] \tag{11}$$

$$P\left[X_A = i,\ X_B = j-\nu,\ R_A = 0,\ R_B = \nu\right] = P\left[(i,j-\nu)\right] \tag{12}$$

gelten. Mit der zufälligen Auszahlung (vgl. Gl (2.2-3))

$$Y_A = aX_A - bX_B + aR_A + cR_B \tag{13}$$

bei der A-Politik und

$$Y_B = -dX_A + cX_B + aR_A + cR_B \tag{14}$$

bei der B-Politik des Spielers S_1 ergibt sich daher der gesuchte Spielwert von $\Gamma(i,j)$ aus

$$v(i,j) = E\,(Y_A) = E\,(Y_B) \quad . \tag{15}$$

Die Berechnung der Erwartungswerte $E\,(Y_A)$ und $E\,(Y_B)$ über der gestutzten negativen Binomial-Vf ist nicht schwierig. Es gilt

$$E\,(Y_A) = \sum_{\mu=1}^{i}\left[(i-\mu)a - jb + \mu a + 0c\right] P\left[(i-\mu,j)\right]$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{j}\left[ia - (j-\nu)b + 0a + \nu c\right] P\left[(i,\nu-j)\right]$$

$$= (ia-jb)\left[q^j \sum_{\mu=1}^{i} \binom{i+j-\mu-1}{j-1} p^{i-\mu} + p^i \sum_{\nu=1}^{j} \binom{i+j-\nu-1}{i-1} q^{j-\nu}\right]$$

$$+ (b+c)p^i \sum_{\nu'=1}^{j} \nu' \binom{i+j-\nu'-1}{i-1} q^{j-\nu'} \quad , \tag{16}$$

was sich zu

$$E\ (Y_A) = (ia-jb) + (b+c)p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu) \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu \tag{17}$$

vereinfachen läßt, wenn wir berücksichtigen, daß die beiden Summen in der eckigen Klammer S_{ij} und damit 1 ergeben und in der letzten Summe die Variable ν' gemäß $\nu' = j-\nu$ transformiert wurde.

Analog zu $E\ (Y_A)$ erhalten wir

$$E\ (Y_B) = (jc-id) + (a+d)q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu \quad . \tag{18}$$

Aufgrund der früher diskutierten Eigenschaften des Spiels $\Gamma(i,j)$ ist $E\ (Y_A) = E\ (Y_B)$.

Direkt können wir dies einsehen mit Hilfe der Z-Transformation oder aufgrund der Identitäten (vgl. Anhang 3)

$$p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu = (j-i\frac{q}{p})\, I_p\,(i,j) + \frac{i\cdot j}{i+j}\binom{i+j}{j} p^{i-1} q^j \tag{19}$$

$$q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu = (i-j\frac{p}{q})\, I_q\,(j,i) + \frac{i\cdot j}{i+j}\binom{i+j}{j} p^i q^{j-1} \tag{20}$$

mit der unvollständigen Betafunktion

$$I_p\,(i,j) = \frac{i\cdot j}{(i+j)}\binom{i+j}{j} \int_0^p t^{i-1}(1-t)^{j-1}dt \quad , \quad (0 \leq p \leq 1) \tag{21}$$

$$I_p\,(i,j) + I_q(j,i) = 1 \quad , \quad p + q = 1 \quad . \tag{22}$$

An anderer Stelle /9/ kommen wir zu demselben Ergebnis über eine erzeugende Funktion der negativen Binomial-Verteilung.

2.5 Berechnung von val $\Gamma(i,j)$ über eine Differenzengleichung

Wir haben im letzten Abschnitt den Spielwert $v(i,j)$ des Spiels $\Gamma(i,j)$ mit einer Methode ermittelt, die nur bei einseitigen Spielen (siehe Abschnitt 1.2) anwendbar ist.

Nun wollen wir zeigen, daß wir mit der Standardmethode zu demselben Ergebnis gelangen.

Hierzu nehmen wir zunächst an, daß das Spiel $\Gamma(i,j)$ keinen Sattelpunkt besitzt und beweisen nachträglich, daß dies zutrifft.

Unter dieser Annahme gehorcht nach Gl (1.2 - 15) der Spielwert $v(i,j)$ aus Gl (2.1 - 3) der pDzGl

$$v(i,j) = \frac{(b+c)\cdot v(i-1,j) + (a+d)\cdot v(i,j-1) + (ac-db)}{a+b+c+d} \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$v(i,0) = ai \quad , \quad v(0,j) = cj \quad . \tag{2}$$

Setzen wir

$$p := \frac{b+c}{s} \quad , \quad q := \frac{a+d}{s} \quad ; \quad s := a+b+c+d \quad ,$$

so wird

$$p + q = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{ac-bd}{s} = ap - bq \quad ,$$

und wir erhalten als neue pDzGl

$$v(i+1,j+1) = pv(i,j+1) + qv(i+1,j) + ap - bq \quad , \tag{3}$$

wobei wir im Hinblick auf später die ganzzahligen Variablen i und j um jeweils eine Einheit erhöht haben.

Die pDzGl (3) mit den Randbedingungen Gl (2) läßt sich auf verschiedene Weise lösen. In unserem Fall ist es wohl am bequemsten, dies mit Hilfe der Mehrdimensionalen Z-Transformation zu tun (Eindimensionale Z-Transformation: /6/, /7/; Mehrdimensionale: /6/, /8/).

Bemerkungen zur Z-Transformation

Die Lösung einer DzGl mit der Z-Transformation wird auf ähnliche Weise ermittelt wie die Lösung einer DGl mit der Laplace-Transformation.

Dazu haben wir die DzGl zunächst in den Bildraum zu transformieren. Dies geschieht im Falle einer pDzGl mit zwei unabhängigen Variablen i,j, indem wir jede in dieser vorkommenden Funktion g(i,j) in die entsprechende Bildfunktion, d.h. die Laurentreihe ohne positive Potenzen

$$G(x,y) := Z_{xy} \{ g(i,j) \} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g(i,j)}{x^i y^j} , \qquad (4)$$

$$i,j \text{ ganz; } x,y \text{ komplex; Konvergenzbereich } /x/ > R_x \geqslant 0 , \quad /y/ > R_y \geqslant 0$$

der Variablen x,y überführen.

Dann lösen wir die Bildgleichung gemäß den Regeln der linearen Algebra nach der gesuchten Funktion F(x,y) auf und transformieren diese mittels der komplexen Umkehrformel

$$f(i,j) := Z_{xy}^{-1} \{ F(x,y) \}$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi i}\right)^2 \displaystyle\oint_{C_i} dx \oint_{C_j} dy \; x^{i-1} y^{j-1} F(x,y), & \text{für } i,j = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{für } i,j < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

C_i : Kreis $x = r_x e^{\hat{\imath}\phi_x}$, $0 \leq \phi_x \leq 2\pi$, $r_x > R_x$;

C_j : Kreis $y = r_y e^{\hat{\imath}\phi_y}$, $0 \leq \phi_y \leq 2\pi$, $r_y > R_y$;

$\hat{\imath}$:= imaginäre Einheit

oder bequemer mittels Korrespondenztafeln (vgl. Anhang KT1 bis KT3) in den Originalraum zurück.

Natürlich dürfen wir nur solche Funktionen f(i,j) der Z-Transformation unterwerfen, für welche die Reihe Gl(4) konvergiert. Nach der Funktionentheorie trifft dies für die Reihe Gl (4), wenn überhaupt irgendwo, außerhalb der Kreise $/x/ \leq R_x$ bzw. $/y/ \leq R_y$ der komplexen x- bzw. y-Ebene zu.

Da wir für die Mehrdimensionale Z-Transformation keine ausgearbeitete Theorie kennen, verwenden wir sie wie in der technischen Literatur heuristisch.

Insbesondere wird dort gewöhnlich angenommen, daß man die Summationen in der betreffenden Laurentreihe beliebig vertauschen darf.

Im zweidimensionalen Fall heißt dies

$$Z_{xy} \{ f(i,j) \} = Z_x Z_y \{ f(i,j) \} = Z_y Z_x \{ f(i,j) \} \qquad (6)$$

$$F(x,j) := Z_x \{ f(i,j) \} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i,j)}{x^i} ,$$

$$F(i,y) := Z_y \{ f(i,j) \} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(i,j)}{x^j} ,$$

so daß wir uns bei der Rücktransformation anstelle der zweidimensionalen Umkehrformel auf die zweimalige Anwendung der eindimensionalen Umkehrformel

$$f(k) = Z_z^{-1}\{F(z)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\uparrow} \displaystyle\oint_{C_k} dz \cdot z^{k-1} F(z) & k = 0,1,2,\ldots \\ & \text{für} \\ 0 & k < 0 \end{cases} \tag{7}$$

C_k : Kreis $\quad z = re^{\uparrow\phi}$, $\quad 0 \le \phi \le 2\pi$, $\quad r > R > 0$

beschränken können.

Im Gebiet, in dem F(z) eine reguläre Funktion ist, existiert die Folge f(k) $(k \geq 0)$ und wird durch

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} \dfrac{d^k}{dw^k} F(\frac{1}{w}) \Big/_{w=0} & k = 0,1,2,\ldots \\ & \text{für} \\ 0 & k < 0 \end{cases} \tag{8}$$

gegeben (siehe /7/ p 26).

Ist insbesondere wie bei uns

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

eine gebrochen rationale Funktion, läßt sich das Umkehrintegral Gl (8) mit dem Residuensatz gemäß

$$f(k) = \frac{1}{2\pi\uparrow} \oint_{C_k} dz \cdot z^{k-1} \cdot F(z) = \sum_{\rho=1}^{n} \underset{z_\rho}{\mathrm{Res}}\; F(z) \cdot z^{k-1} \tag{9}$$

auswerten, wobei n die Anzahl der verschiedenen Pole der Funktion F(z) angibt, und z_ρ die Wurzeln der Gleichung $Q(z) = 0$ sind.

Befindet sich bei z_ρ ein m-facher Pol der Funktion $F(z) \cdot z^{k-1}$, gilt

$$\underset{z_\rho}{\mathrm{Res}}\, F(z) \cdot z^{k-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_\rho} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_\rho)^m F(z) \cdot z^{k-1} \right]. \qquad (10)$$

Schon die Zweidimensionale Z-Transformation wäre sehr viel weniger praktikabel, wenn wir bei den Z-Transformierten nicht die Summationen in der Laurentreihe vertauschen dürften.

Denn viele der in dieser Arbeit vorkommenden Funktionen $f(i,j)$ sind, wenn wir die angegebenen Korrespondenztafeln benutzen, etwa leicht gemäß $Z_x Z_y \{ f(i,j) \}$ aber schwer oder gar nicht gemäß $Z_y Z_x \{ f(i,j) \}$ zu transformieren.

Da wir jedoch aufgrund der uns bekannten Literatur die Funktionenklasse nicht abgrenzen können, bei der eine derartige Vertauschung zulässig ist, haben wir in allen Fällen, in denen wir die Vertauschbarkeit ausgenutzt, aber nicht explizit nachgewiesen haben, die damit erhaltenen Ergebnisse mit anderen mathematisch korrekten Methoden gesichert.

Möglicherweise wäre dies nicht notwendig gewesen, da wir trotz allen Bemühens kein wirkliches Gegenbeispiel finden konnten (vgl. Anhang 4).

Selbst bei Funktionen wie der "Stufen"funktion

$$\delta(i-j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ 1 & \text{für } i \geq j \end{cases} \qquad (11)$$

sind die Teiltransformationen vertauschbar. Denn es gilt einerseits

$$Z_y Z_x \ \{ \delta(i-j) \} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(i-j)}{x^i} \right) \frac{1}{y^i}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{x^i} \right) \frac{1}{y^i} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i} - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{x^i} \right) \frac{1}{y^i}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(xy)^i} = \frac{x}{x-1} \ \frac{y}{y-\frac{1}{x}} = \frac{x^2 y}{(x-1)\ xy-1)} \tag{12}$$

und andererseits

$$Z_x Z_y \ \{ \delta(i-j) \} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta(i-j)}{y^j} \right) \frac{1}{x^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{y^j} \right) \frac{1}{x^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{y}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{y^{i+1}} \right) \frac{1}{x^i}$$

$$= \frac{y}{y-1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{y-\frac{1}{x}} \right) = \frac{x^2 y}{(x-1)\ xy-1)} \tag{13}$$

also

$$Z_x Z_y \ \{ \delta(i-j) \} = Z_y Z_x \ \{ \delta(i-j) \} \tag{14}$$

<u>Lösung der pDzGl für v(i,j).</u>

Wir wenden zuerst die Beziehungen 1,2,3 der Korrespondenztafel 3 (KT3) und 1 der Korrespondenztafel 2 (KT2 - 1) auf Gl (3) an und erhalten

$$xy \left[V(x,y) - \sum_{i=0}^{\infty} v(i,0)x^{-i} - \sum_{j=0}^{\infty} v(0,j)y^{-j} + v(0,0) \right]$$

$$= py \left[V(x,y) - \sum_{i=0}^{\infty} v(i,0)x^{-i} \right] + qx \left[V(x,y) - \sum_{j=0}^{\infty} v(0,j)y^{-j} \right]$$

$$+ (ap - bq) \frac{x \cdot y}{(x - 1)(y - 1)} \tag{15}$$

oder, wenn wir die Randbedingungen Gl (2) einsetzen und beachten, daß alle in Gl (15) auftretenden Summen wegen

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z} \text{ für } /z/ < 1; \quad \frac{d}{dz} \sum_{i=0}^{\infty} z^i = \sum_{i=1}^{\infty} iz^{i-1} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

$$\text{also } \sum_{i=0}^{\infty} iz^i = \frac{z}{(1-z)^2} \text{ und für } z = 1/x: \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{x^i} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

durch geschlossene Ausdrücke ersetzt werden können

$$xy \left[V(x,y) - \frac{ax}{(x-1)^2} - \frac{cy}{(y-1)^2} \right] = qx \left[V(x,y) - \frac{cy}{(y-1)^2} \right]$$

$$+ py \left[V(x,y) - \frac{ax}{(x-1)^2} \right] + (ap - bq) \frac{x \cdot y}{(x - 1)(y - 1)} .$$

Daraus folgt, wenn wir nach $V(x,y)$ auflösen

$$V(x,y) = \frac{ax}{(x-1)^2} \frac{y}{y - \frac{qx}{x-p}} + \frac{cy}{(y-1)^2} \frac{x}{x - \frac{py}{y-q}}$$

$$+ (ap - bq) \frac{x \cdot y}{(x-1)(y-1)(xy-qx-py)} . \tag{16}$$

Bei der Rücktransformation der drei Terme in Gl (16) sparen wir viel Rechenarbeit, wenn wir die Beziehung $Z_{xy}^{-1} = Z_x^{-1} Z_y^{-1} = Z_y^{-1} Z_x^{-1}$ annehmen. Wir ermitteln zunächst

erster Term:

$$Z_y^{-1} \left\{ \frac{ax}{(x-1)^2} \; \frac{y}{y - \frac{qx}{x-p}} \right\} = \frac{ax}{(x-1)^2} \left(\frac{qx}{x-p} \right)^j ,$$

vgl. (KT2 - 4)

zweiter Term:

$$Z_x^{-1} \left\{ \frac{cy}{(y-1)^2} \; \frac{x}{x - \frac{py}{y-q}} \right\} = \frac{cy}{(y-1)^2} \left(\frac{py}{y-q} \right)^i ,$$

vgl. (KT2 - 4)

dritter Term:

es ist

$$\frac{(ap-bq)\; xy}{(x-1)(y-1)\;(xy-qx-py)} = ap \, \frac{x}{(x-1)(x-p)} \; \frac{y}{(y-1)(y - \frac{qx}{x-p})}$$

$$- bq \, \frac{y}{(y-1)(y-q)} \; \frac{x}{(x-1)(x - \frac{py}{y-q})}$$

und daraus mit (KT2 - 7)

$$Z_y^{-1} \left\{ \frac{apx}{(x-1)(x-p)} \; \frac{y}{(y-1)(y - \frac{qx}{x-p})} \right\} = \frac{apx}{(x-1)(x-p)} \; \frac{1 - (\frac{qx}{x-p})^j}{1 - \frac{qx}{x-p}}$$

$$= a \, \frac{x}{(x-1)^2} \left[1 - (\frac{qx}{x-p})^j \right] \quad \text{, letzteres wegen } \; p + q = 1$$

$$Z_x^{-1}\left\{\frac{-\,bqy}{(y-1)(y-q)}\;\frac{x}{(x-1)(x-\frac{py}{y-q})}\right\} = \frac{-\,bqy}{(y-1)(y-q)}\;\frac{1-(\frac{py}{y-q})^{i}}{1-\frac{py}{y-q}}$$

$$= \;-b\,\frac{y}{(y-1)^2}\left[1-(\tfrac{py}{y-q})^{i}\right] \quad .$$

Also erhalten wir für den gesuchten Spielwert

$$v(i,j) \;=\; Z_x^{-1}\left\{\frac{ax}{(x-1)^2}\;(\tfrac{qx}{x-p})^{j} + \frac{ax}{(x-1)^2}\left[1-(\tfrac{qx}{x-p})^{j}\right]\right\}$$

$$+\; Z_y^{-1}\left\{\frac{cy}{(y-1)^2}\;(\tfrac{py}{y-q})^{i} - \frac{by}{(y-1)^2}\left[1-(\tfrac{py}{y-q})^{i}\right]\right\}$$

$$v(i,j) \;=\; Z_x^{-1}\left\{a\,\frac{x}{(x-1)^2}\right\} - Z_y^{-1}\left\{b\,\frac{y}{(y-1)^2}\right\}$$

$$+\; Z_y^{-1}\left\{(c+b)\,\frac{y}{(y-1)^2}\;(\tfrac{py}{y-q})^{i}\right\}$$

oder, wenn wir die noch verbliebenen Ausdrücke gemäß

$$Z_x^{-1}\left\{a\,\frac{x}{(x-1)^2}\right\} \;=\; ai \;, \qquad (\text{KT2 - 3})$$

$$Z_y^{-1}\left\{b\,\frac{y}{(y-1)^2}\right\} \;=\; bj \;,$$

$$Z_y^{-1}\left\{(c+b)\,\frac{y}{(y-1)^2}\;(\tfrac{py}{y-q})^{i}\right\} \;=\; (c+b)\;Z_y^{-1}\left\{G_1(y)\;G_2(y)\right\}$$

$$= \;(c+b)\sum_{\nu=0}^{j} g_1(j-\nu)\;g_2(\nu) \quad , \qquad \text{Faltungssatz (KT1 - 5)}$$

$$G_1(y) = \frac{y}{(y-1)^2} \quad , \quad g_1(j) = j \quad , \qquad (\text{KT2 - 3})$$

$$G_2(y) = \left(\frac{py}{y-q}\right)^i \quad , \quad g_2(j) = \binom{j+i-1}{j} p^i q^j \quad , \quad (\text{KT2 - 14})$$

ersetzen

$$v(i,j) = (ia - jb) + (b + c)p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu) \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu \quad . \tag{17}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem der probabilistischen Methode Gl (2.4 - 17) überein. Doch bleibt noch zu zeigen, daß das Spiel $\Gamma(i,j)$ keinen Sattelpunkt besitzt, und daher $v(i,j)$ aus Gl (17) der gesuchte Spielwert ist.

2.6 Untersuchung des Spiels $\Gamma(i,j)$ auf Sattelpunkte

Wir gehen rekursiv vor und weisen, ehe wir den allgemeinen Fall behandeln, nach, daß die Spiele $\Gamma(1,1)$ und $\Gamma(1,2)$ ohne Sattelpunkte sind.

Nach Gl (2.1 -3) bzw. (2.1 - 4) erhalten wir

$$v(1,1) = \text{val}\begin{pmatrix} v(0,1) + a & v(1,0) - b \\ v(0,1) - d & v(1,0) + c \end{pmatrix} = \text{val}\begin{pmatrix} c+a & a-b \\ c-d & a+c \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\text{mit} \quad a,b,c,d \geq 0 \quad .$$

Als Sattelpunkte der Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} c+a & a-b \\ c-d & a+c \end{pmatrix}$$

kommen nur die Elemente $(c+a)$ und $(a+c)$ in Betracht, da sie die maximalen Elemente in ihrer Spalte sind. Sie können jedoch nicht zugleich die minimalen Elemente in ihrer Zeile sein, da

$$(a-b) < (a-b) + (b+c) = c+a$$

und

$$(c-d) < (c-d) + (a+d) = a+c$$

gilt. Somit ist nach Gl (1.2 - 5)

$$v(1,1) = \frac{(a+c)^2 - (a-b)(c-d)}{2(a-c) - \left[(a-b) + (c-d)\right]} = (a-b) + (b+c)p \tag{19}$$

der Wert des Spiels $\Gamma(1,1)$, das somit keinen Sattelpunkt besitzt.

Statt des Ausdrucks Gl (19) können wir vermöge der leicht zu beweisenden Identität (vgl. 2.3 - 9)

$$ap - bq = cq - dp \tag{20}$$

auch

$$v(1,1) = (c-d) + (d+a)q \tag{21}$$

schreiben.

Mit Gl (19) und (21) ergibt sich dann analog zu Gl (18) für das Spiel $\Gamma(1,2)$ die Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} v(0,2)+a & v(1,1)-b \\ v(0,2)-d & v(1,1)+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c+a & a+(b+c)p-2b \\ 2c-d & 2c + aq - pd \end{pmatrix} . \tag{22}$$

Wiederum könnten in der Auszahlungsmatrix Gl (22) nur die Diagonalelemente Sattelpunkte sein. Dies trifft aber wegen

$$a+(b+c)p-2b \leq a+c-b < (a+c-b) + (b+c) = 2c + a$$

und

$$2c-d < 2c-d+aq \leq 2c + aq - pd$$

nicht zu.

Im allgemeinen Fall wird der Spielwert $v(i+1,j+1)$ des mehrstufigen Spiels $\Gamma(i,j)$ durch

$$v(i+1,j+1) = \mathrm{val}\begin{pmatrix} v(i,j+1)+b\,, & v(i+1)j)-b \\ v(i,j+1)-d\,, & v(i+1,j)+c \end{pmatrix} \tag{23}$$

bestimmt. Damit dieses Spiel keinen Sattelpunkt besitzt, genügt es nach unseren Vorbetrachtungen zu zeigen, daß

$$v(i,j+1)+a > v(i+1,j)-b \tag{24}$$

und

$$v(i+1,j)+c > v(i,j+1)-d \tag{25}$$

gilt, wobei nach Induktionsvoraussetzung $v(i,j+1)$ und $v(i+1,j)$ die Werte der Spiele $\Gamma(i,j+1)$ und $\Gamma(i+1,j)$ sind.

Wir verifizieren zuerst Gl (24), indem wir mit Gl (17) die Differenz $v(i+1,j) - v(i,j+1)$ abschätzen.

Es ist

$$v(i+1,j) - v(i,j+1) = (a+b)$$

$$+ (b+c)p^i \left[p \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{\nu+i}{\nu} q^\nu - \sum_{\nu=0}^{j} \left[(j+1)-\nu\right] \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu \right]$$

und wenn wir das p in der eckigen Klammer durch $1-q$ ersetzen

$$= (a+b) + (b+c)p^i \left[\sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{\nu+i}{\nu} q^\nu - \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{\nu+i}{i} q^{\nu+1} \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=0}^{j} \left[(j+1)-\nu\right] \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu \right] .$$

Führen wir nun in der zweiten Summe der eckigen Klammer die Variablentransformation $\nu' = \nu+1$ aus und fassen diese und die dritte Summe zusammen, erhalten wir

$$v(i+1,j) - v(i,j+1) = (a+b)$$

$$+ (b+c)p^i \left[\sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{\nu+i}{\nu} q^\nu - \sum_{\nu=0}^{j} (j+1-\nu) \left[\binom{\nu+i-1}{i} + \binom{\nu+i-1}{i-1} \right] q^\nu \right],$$

was sich mit der Grundbeziehung für Binomialkoeffizienten

$$\binom{\nu+i}{i} = \binom{\nu+i-1}{i} + \binom{\nu+i-1}{i-1}$$

(vgl. Gl (2.3 - 6))

zu

$$v(i+1,j) - v(i,j+1) = (a+b) - (b+c)p^i \sum_{\nu=0}^{j} \binom{\nu+i}{i} q^\nu < (a+b) \tag{26}$$

vereinfachen läßt.

Die Beziehung Gl (25) können wir auf ähnliche Weise wie Gl (24) verifizieren, wenn wir statt Gl (2.4 - 17) die Gl (2.4 - 18) verwenden:

$$v(i,j+1) - v(i+1,j) = (c+d)$$

$$+ (a+d)q^j \left[\overset{1-p}{\cancel{q}} \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{\mu+j}{\mu} p^\mu - \sum_{\mu=0}^{i} \left[(i+1)-\mu \right] \binom{\mu+j+1}{\mu} p^\mu \right]$$

$$= (c+d) + (a+d)q^j \left[\sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{\mu+j}{\mu} p^\mu - \sum_{\mu=0}^{i} (i+1-\mu) \left[\overbrace{\binom{\mu+j-1}{j} + \binom{\mu+j-1}{j-1}}^{\binom{\mu+j}{j}} \right] p^\mu \right]$$

$$v(i,j+1) - v(i+1,j) = (c+d) - (d+a)q^j \sum_{\mu=0}^{i} \binom{\mu+j}{j} p^\mu < (c+d) \quad . \qquad (27)$$

3. Das Spiel $\Gamma(i,j;k)$

3.1 Definition des Spiels $\Gamma(i,j;k)$

Anzahl der Stufen (Spielzüge): k (Tage)

Resourcen:

Spieler S_1 (= Betreiber, Überwacher)

$$\left.\begin{array}{llll} \text{maximal} & k & A_1 \text{ - Strategien} & \text{(verbotene Handlungen)} \\ \text{maximal} & k & B_1 \text{ - Strategien} & \text{(erlaubte Handlungen)} \end{array}\right\} \text{ keine Beschränkungen}$$

Spieler S_2 (= Inspektor, Überwacher)

$$\left.\begin{array}{llll} \text{maximal} & i_2 & A_2 \text{ - Strategien} & \text{(Tage ohne Kontrolle)} \\ \text{maximal} & j_2 & B_2 \text{ - Strategien} & \text{(Tage mit Kontrolle)} \end{array}\right\} \text{ Beschränkungen}$$

Nebenbedingung: $i_2 + j_2 \geq k$

Aus der Nebenbedingung können wir folgern, daß ($|A_i|$:= Anzahl der Strategien A_i , ...)

$$k - j_2 \leqslant |A_2| \leqslant i_2 , \quad k - i_2 \leqslant |B_2| \leqslant j_2$$

also Spieler S_2 über

$$\left.\begin{array}{lll} \text{minimal} & (k - j_2) & A_2 \text{ - Strategien} \\ \text{minimal} & (k - i_2) & B_2 \text{ - Strategien} \end{array}\right\} \quad \text{verfügt.}$$

Auszahlungsmatrix pro Stufe

Wie im Spiel $\Gamma(i,j)$ gilt

$$\begin{array}{llcc} & & \multicolumn{2}{c}{\underline{\text{Spieler } S_2}} \\ & \text{Strategie} & A_2 & B_2 \\ \underline{\text{Spieler } S_1} & A_1 & +a & -b \\ & B_1 & -d & +c \end{array} \qquad \begin{pmatrix} +a & -b \\ -d & +c \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Auszahlungsmatrix pro Stufe ist unabhängig von der jeweiligen Stufe und für ihre Elemente gilt $a,b,c,d \geqslant 0$.

Spielwert von $\Gamma(i,j;k)$

Setzen wir in Gl (1.1 - 5) anstelle von $v(i_1,j_1,i_2,j_2;k)$ mit $i := i_2$ und $j := j_2$

$$v(i,j;k) \; := \; v(i_1,j_1,i,j;k) \; , \tag{2}$$

so wird der Spielwert $v(i,j;k)$ rekursiv gegeben durch die Beziehung

$$v(i,j;k) = \mathrm{val} \begin{pmatrix} v(i-1,j;\,k-1) + a & v(i,j-1;\,k-1) - b \\ v(i-1,j;\,k-1) - d & v(i,j-1;\,k-1) + c \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{array}{lll} v(i,j;k) = 0, & & i + j < k \\ v(i,0;k) = ka, & \text{für} & i \geq k \\ v(0,j;k) = kc, & & j \geq k \\ v(i,j;0) = 0, & & i + j > 0 \end{array} \tag{4}$$

und den Wn (vgl. Gl (1.2 - 7) bzw. Gl (2.2 - 1)) für Spieler S_2

$$p = \frac{b+c}{a+b+c+d} \; , \qquad q = \frac{a+d}{a+b+c+d} \; . \tag{5}$$

Von den Randbedingungen verstehen sich die erste und letzte von selbst. Die übrigen beiden entsprechen dem Spieltyp vom Modus Γ' , der abgebrochen wird, wenn mindestens eine der Resourcen des Spielers S_2 erschöpft ist. D. h. sie werden so festgelegt, als wenn beide Spieler immer bis zum k-ten Spielzug ihre optimale Politik betreiben würden.

So ist natürlich beim Spiel $\Gamma(0,j;k)$, wenn wir im Modus Γ'' verfahren, für den Spieler S_1 die Strategie B_1 am günstigsten und infolgedessen der Spielwert $v(0,j;k) = kc$.

3.2 Spezialfall $\Gamma(k,j;k)$

Berechnung von val $\Gamma(k,j;k)$ über die probabilistische Methode

Beim Spiel $\Gamma(k,j;k)$ kann der Spieler S_2 (Inspektor) in k Spielzügen maximal k mal die Strategie A und maximal j mal $(0 \leq j \leq k)$ die Strategie B anwenden.

Infolgedessen entspricht der optimalen Politik des Spielers S_2 eine Irrfahrt, die auf den Rändern $n = j$ und $m+n = k$ endigt (m := Variable der A-Achse, n := Variable der B-Achse).

Um die WV dieser Irrfahrt zu erhalten, brauchen wir nur die Überlegungen des Abschnitts 2.4 ein wenig zu modifizieren.

Aus der Abb. 5a, die den Fall $\Gamma(k,j;k) = \Gamma(7,4;7)$ wiedergibt, erkennen wir unmittelbar, daß alle Punkte der Nebendiagonalen $m+n = k$ bis zum Punkt unterhalb des Schnittpunkts mit der Geraden $n = j$ in einer regulären Irrfahrt erreicht werden können. Daher gilt für dieses Stück des Rands der entsprechende Teil der Binomial - WV

$$P\left[(k-\nu,\nu)\right] = \binom{k}{\nu} p^{k-\nu} q^{\nu} \quad , \quad \nu = 0,1,\ldots,j-1 \qquad (1)$$

wobei $P\left[(k-\nu,\nu)\right]$ wie in Abschnitt 2.4 die W angibt, daß ein Punkt, der im Ursprung seine Irrfahrt beginnt, in k Schritten zu dem Punkt mit den Koordinaten $(k-\nu,\nu)$ gelangt.

Für die Randpunkte, welche sich auf der Geraden $n=j$ befinden, können wir die Beziehung (2.4 - 5) mit $i=k$ anwenden, was

$$P\left[(k-\nu,j)\right] = \binom{k+j-\nu-1}{j-1} p^{k-\nu} q^{j} \quad , \quad \nu = j,j+1,\dots,k \tag{2}$$

ergibt.

Wie beim Spiel $\Gamma(i,j)$ ist anschaulich klar, daß die Wn der Gln (1) und (2) eine WV bilden müssen und damit die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} + \sum_{\nu=j}^{k} \binom{k+j-1-\nu}{j-1} q^{j} p^{k-\nu} = 1 \tag{3}$$

erfüllen.

Beachten wir noch, daß für eine gewöhnliche Binomial - WV

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} = 1$$

gilt und in der zweiten Summe der 1. S. der Gl (3) die Variablentransformation $\rho = k+j-\nu$

$$\sum_{\nu=j}^{k} \binom{k+j-1-\nu}{j-1} q^{j} p^{k-\nu} \doteq q^{j} \sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j}$$

ergibt, erhalten wir aus Gl (3) die Identität

$$\Sigma_1 := \sum_{\nu=j}^{k} \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} = q^{j} \sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j} =: \Sigma_2 \tag{4}$$

$$k \geqslant j \quad .$$

Den Beweis für diese Identität führen wir über die Zweidimensionale Z-Transformation mit den ganzzahligen Variablen j und k im Gegenstands- und den komplexen Variablen y und z im Bildraum.

Da wir mit den Korrespondenztafeln nicht unmittelbar zeigen können, daß $(Z_yZ_z - Z_zZ_y)\ \{ \sum_2 \} = 0$ ist, geben wir für die Identität Gl (4) im Anhang 4 einen strengen Beweis mit vollständiger Induktion an.

Transformation der Summe $\sum_1$

Für $\sum_1$ sind die Einzeltransformationen Z_y und Z_z untereinander vertauschbar. Da wir sie unmittelbar mit den Korrespondenztafeln berechnen können, beschränken wir uns darauf $Z_zZ_y\ \{ \sum_1 \}$ herzuleiten.

Es ist mit (KT1 - 1)

$$Z_y \left\{ \sum\nolimits_1 \right\} = Z_y \left\{ 1 - \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} \right\}.$$

$$= \frac{y}{y-1} - Z_y \left\{ \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} \right\} .$$

Dies läßt sich weiter ausrechnen mit Hilfe des Summensatzes, (KT1 - 6)

$$Z_y \left\{ \sum_{\nu=0}^{j} f(\nu) \right\} = \frac{y}{y-1} \quad Z_y \{ f(j) \} \quad , \quad f(j) = \binom{k}{j} q^j p^{k-j}$$

und der Korrespondenz

$$Z_y \left\{ \binom{k}{j} q^j p^{k-j} \right\} = \left(\frac{py+q}{y} \right)^k \quad , \qquad (\text{KT2 - 12})$$

wenn wir zudem bedenken, daß eine Summation $g(j-j_c) = \sum_{\nu=0}^{j-j_c} f(\nu)$ über $(j-j_c)$ statt j Terme und $j-j_c > 0$ gemäß

$$Z_y \{ g(j-j_c)\ \delta(j-j_c) \} = \frac{1}{y^{j_c}} \quad Z_y \{ g(j) \} \ , \quad j_c \text{ Konstante (KT1 - 2)}$$

zu behandeln ist.

Wir erhalten dann

$$Z_y\left\{\sum_1\right\} = \frac{y}{y-1} - \frac{1}{y}\,\frac{y}{y-1}\left(\frac{py+q}{y}\right)^k$$

oder, wenn wir schließlich nach z mit Hilfe der Korrespondenz

$$Z_z\left\{\left(\frac{py+q}{y}\right)^k\right\} = \frac{z}{z - \frac{py+q}{y}} \quad , \qquad (\text{ KT2 - 4})$$

transformieren

$$Z_z Z_y\left\{\sum_1\right\} = \frac{y}{y-1}\,\frac{z}{z-1} - \frac{1}{y-1}\,\frac{z}{z-\frac{py+q}{y}}$$

$$= \frac{yz}{y-1}\,\frac{yz-py+(1-q)-z}{(z-1)(yz-py-q)} = \frac{z}{z-1}\,\frac{y(z-p)}{(yz-py-q)} \quad . \qquad (5a)$$

b) <u>Transformation der Summe $\sum_2$</u>

Da $\binom{\rho-1}{j-1} = 0$ für $\rho < j$, gilt

$$\sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j} = \sum_{\rho=0}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j}$$

und damit mit der Korrespondenz

$$Z_z\left\{\binom{k-1}{j-1} p^k\right\} = \left(\frac{p}{z-p}\right)^j \qquad (\text{ KT2 - 13})$$

und dem Summensatz (KT1 - 6)

$$Z_z\left\{\sum_2\right\} = \left(\frac{q}{p}\right)^j \frac{z}{z-1}\left(\frac{p}{z-p}\right)^j = \frac{z}{z-1}\left(\frac{q}{z-p}\right)^j \quad .$$

Dies ergibt mit (KT2 - 4) nach y transformiert

$$Z_y Z_z \left\{ \sum_2 \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{y}{y - \frac{q}{z-p}} = \frac{z}{z-1} \frac{y(z-p)}{yz-py-q} \quad . \tag{5b}$$

Vergleichen wir nun Gl (5a) mit Gl (5b), so sehen wir, daß die Summen Σ_1 und Σ_2, falls wir die Abbildungen Z_y und Z_z miteinander vertauschen dürfen, dieselben Bilder haben und damit auch im Gegenstandsraum gleich sind.

Nachdem wir nun gezeigt haben, daß

$$P_\nu := \begin{cases} P\left[(k-\nu,\nu)\right] = \binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} & \text{für } \nu = 0,1,\dots,j-1 \\ P\left[(k-\nu,j)\right] = \binom{k+j-1-\nu}{j-1} q^j p^{k-\nu} & \text{für } \nu = j,j+1,\dots,k \end{cases} \tag{6}$$

eine WV ist, sind wir berechtigt, den Spielwert $v_1(j,k) := \text{val } \Gamma(k,j;k)$ als den Erwartungswert

$$v_1(j,k) = E\left[Y_A\right] = E\left[Y_B\right] \tag{7}$$

der zufälligen Auszahlung bei der A-Politik

$$Y_A = (aX_A - bX_b) + (aR_A + cR_B) \tag{8}$$

bzw. der zufälligen Auszahlung bei der B-Politik

$$Y_B = (-dX_A + cX_B) + (aR_A + bR_B) \tag{9}$$

zu berechnen.

Die zVn in Y_A und Y_B haben dieselbe Bedeutung wie in Abschnitt 2.2 , d.h.

$$\left.\begin{array}{l} X_A = \text{Anzahl der gewählten } A_2 \text{ - Strategien} \\ X_B = \text{Anzahl der gewählten } B_2 \text{ - Strategien} \end{array}\right\} \text{ bis zur Erschöpfung einer der Resourcen, d. h. Abbruch des Spiels}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_A = \text{Anzahl der restlichen } A_2\text{- Strategien} \\ R_B = \text{Anzahl der restlichen } B_2\text{- Strategien} \end{array}\right\} \text{ bei Erschöpfung einer der Resourcen}$$

Im Bereich der uneingeschränkten Irrfahrt (siehe WV Gl (1)) kann keine der Resourcen des Spielers S_2 erschöpft sein. Es ist daher $R_A = R_B = 0$ und

$$P\left[X_A = k-\nu,\ X_B = \nu,\ R_A = 0,\ R_B = 0\right] = P\left[(k-\nu,\nu)\right] \quad . \qquad (10)$$

Im Bereich der eingeschränkten Irrfahrt (siehe WV Gl (2)) kann allenfalls ein Vorrat an Strategien vom Typ A übrig bleiben, wenn die Irrfahrt auf dem Rand endigt. Somit ist $R_A = k - (X_A + X_B) = \nu-j$, $R_B = 0$ und

$$P\left[X_A = k-\nu,\ X_B = j,\ R_A = \nu-j,\ R_B = 0\right] = P\left[(k-\nu,j)\right] \quad . \qquad (11)$$

Diese Größen haben wir, wenn wir $v_1(j,k)$ über die A-Politik des Spielers S_1 berechnen wollen, in

$$v_1(j,k) = E\left[Y_A\right] = \sum_{\nu=0}^{j-1}\left[(k-\nu)\,a-\nu b\right]\, P\left[(k-\nu,\nu)\right]$$

$$+ \sum_{\nu=j}^{k}\left[(k-\nu)a - jb + (\nu-j)a\right]\ P\left[(k-\nu,j)\right] \qquad (12)$$

einzusetzen.

Die weiteren Umformungen dieses Ausdrucks

$$E\left[Y_A\right] = ka\sum_{\nu=0}^{k} P_\nu - (a+b)\sum_{\nu=0}^{j-1} \nu P_\nu - j(a+b)\sum_{\nu=j}^{k} P_\nu$$

geeignete Zusammenfassung ,

$$= ka - j(a+b) + (a+b)\sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)P_\nu$$

Substitution des letzten Terms $\sum_{\nu=j}^{k} P_\nu = 1 - \sum_{\nu=0}^{j-1} P_\nu$,

führen schließlich auf

$$v_1(j,k) = E\left[Y_A\right] = ka - j(a+b) + (a+b)\sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} . \tag{13}$$

Die Berechnung von $v_1(j,k)$ über die B-Politik des Spielers S_1 ist nicht überflüssig, da sie einen andersartigen Ausdruck als Gl (13) ergibt, der insbesondere nützlich im Spezialfall $c = d = 0$, $a,b > 0$ ist.

Der direkte Nachweis, daß $E\left[Y_A\right] = E\left[Y_B\right]$ gilt, ist nicht ganz trivial. Wir führen ihn für $v_2(i,k)$ in Abschnitt 3.7 aus, um zu überprüfen, ob die Überlegungen in Abschnitt 1.2 über einseitige Spiele stimmen.

Wir erhalten für $v_1(j,k)$ mit der B-Politik

$$v_1(j,k) = E\left[Y_B\right] = \sum_{\nu=0}^{j-1}\left[-(k-\nu)d + \nu c\right] P\left[(k-\nu,\nu)\right]$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{k}\left[-(k-\nu)d + jc + (\nu-j)a\right] P\left[(k-\nu,j)\right] \tag{14}$$

und daraus

$$E\left[Y_B\right] = -kd + d\sum_{\nu=0}^{k}\nu P_\nu + c\sum_{\nu=0}^{j-1}(\nu-j)P_\nu + jc + a\sum_{\nu=j}^{k}(\nu-j)P_\nu$$

Addition von $jc - jc\sum_{\nu=0}^{k} P_\nu = 0$,

$$= -kd + j(c+d) - (c+d)\sum_{\nu=0}^{j-1}(j-\nu)P_\nu - (d+a)\sum_{\nu'=j}^{k}(j-\nu')P_{\nu'}$$

Addition von $jd - jd\left(\sum_{\nu=0}^{j-1} P_\nu + \sum_{\nu=j}^{k} P_\nu\right) = 0$.

Setzen wir nunmehr P_ν aus Gl (1) bzw. (2) ein und transformieren den laufenden Index der letzten Summe gemäß $\nu = k+j-\nu'$, so folgt

$$v_1(j,k) = E\left[Y_B\right] = -kd + j(c+d)$$

$$-(c+d)\sum_{\nu=0}^{j-1}(j-\nu)\binom{k}{\nu}q^\nu p^{k-\nu} + (d+a)\sum_{\nu=0}^{k-1}(k-\nu)\binom{\nu-1}{j-1}q^j p^{\nu-j} \quad . \qquad (15)$$

Im Spezialfall $c = d = 0$; $a,b > 0$ vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$v_1(j,k)\Big/_{c=d=0} = a\sum_{\nu=0}^{k-1}(k-\nu)\binom{\nu-1}{j-1}q^j p^{\nu-j} \quad . \qquad (16)$$

Wegen

$$\left.\frac{E\left[Y_A\right]}{(a+b)}\right/_{c=d=0} = \left.\frac{E\left[Y_B\right]}{(a+b)}\right/_{c=d=0} \tag{17}$$

und $p = \frac{b}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$ gilt daher die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} = (j-kq) + q^{j+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} (k-\nu)\binom{\nu-1}{j-1} p^{\nu-j} \quad , \tag{18}$$

$$p+q = 1 \quad , \quad 0 \leq p, q \leq 1 \quad .$$

3.3 Spezialfälle $\Gamma(i,k;k)$ und $\Gamma(k,k;k)$

Berechnung der Spielwerte über die probabilistische Methode.

Da wir im Spezialfall $\Gamma(i,k;k)$ ganz ähnlich wie im Spezialfall $\Gamma(k,j;k)$ verfahren können, geben wir nicht alle Details wieder.

Das Spiel $\Gamma(k,k;k)$ das für $j=k$ ein Unterfall des Spiels $\Gamma(k,j;k)$ und für $i=k$ ein Unterfall des Spiels $\Gamma(i,k;k)$ ist, behandeln wir im Anschluß an das zuletzt genannte Spiel.

Im Spiel $\Gamma(i,k;k)$ kann der Spieler S_2 (Inspektor) in k Spielzügen maximal i mal $(0 \leq i \leq k)$ die Strategie A und maximal k mal die Strategie B anwenden.

D. h., daß im Spiel $\Gamma(i,k;k)$ umgekehrt zum Spiel $\Gamma(k,j;k)$, wo nur die Anzahl der Strategien B beschränkt waren, nur die Anzahl der Strategien A beschränkt sind.

Die optimale Politik des Spielers S_2 entspricht somit einer Irrfahrt, die auf den Rändern $m=i$ und $m+n = k$ endigt (vgl. Abb. 5b)

Im Bereich der uneingeschränkten Irrfahrt (Binomial - WV) gilt

$$P\left[(\nu,k-\nu)\right] = \binom{k}{\nu} p^{\nu} q^{k-\nu} \quad , \qquad \nu = 0,1,\dots,i-1$$

und im Bereich der eingeschränkten Irrfahrt gilt, wenn wir in Gl (2.4 - 8) $j=k$ setzen

$$P\left[(i,k-\nu)\right] = \binom{i+k-\nu-1}{i-1} p^{i} q^{k-\nu} \quad , \qquad \nu = i,i+1,\dots,k \quad .$$

Ähnlich wie in Abschnitt 3.2 können wir beweisen, daß

$$P_{\mu} := \begin{cases} P\left[(\mu,k-\mu)\right] = \binom{k}{\mu} p^{\mu} q^{k-\mu} & \text{für} \quad \mu = 0,1,\dots,i-1 \quad \text{(1a)} \\ P\left[(i,k-\mu)\right] = \binom{i+k-\mu-1}{i-1} p^{i} q^{k-\mu} & \qquad\;\; \mu = i,i+1,\dots,k \quad \text{(1b)} \end{cases}$$

eine WV ist.

Den Spielwert $v_2(i,k) := v(k,k;k)$ ermitteln wir auch hier mit der A- bzw. B-Politik.

Für die relevanten Wn ergibt sich

$$P\left[X_A = \mu,\ X_B = k-\mu,\ R_A = 0,\ R_B = 0\right] = P\left[(\mu,k-\mu)\right] \qquad (2)$$

im uneingeschränkten Bereich und

$$P\left[X_A = i,\ X_B = k-\mu,\ R_A = 0,\ R_B = \mu-i\right] = P\left[(i,k-\mu)\right] \qquad (3)$$

im eingeschränkten Bereich.

Damit errechnen wir mit der <u>A-Politik:</u>

$$v_2(i,k) = E\left[Y_A\right] ,$$

$$E\left[Y_A\right] = \sum_{\mu=0}^{i-1}\left[\mu a - (k-\mu)b\right] P\left[(\mu,k-\mu)\right]$$

$$+ \sum_{\mu=i}^{k}\left[ia - (k-\mu)b + (\mu-i)c\right] P\left[(i,k-\mu)\right] \qquad (4)$$

$$E\left[Y_A\right] = -kb + a\sum_{\mu=0}^{i-1}\mu P_\mu + b\left[\sum_{\mu=0}^{i-1}\mu P_\mu + \sum_{\mu=i}^{k}\mu P_\mu\right]$$

$$+ i(a-c)\sum_{\mu=i}^{k} P_\mu + c\sum_{\mu=i}^{k}\mu P_\mu$$

$$= -kb + (a+b)\sum_{\mu=0}^{i-1}\mu P_\mu + (b+c)\sum_{\mu=i}^{k}\mu P_\mu$$

$$+ i\left[(a+b) - (b+c)\right]\sum_{\mu=i}^{k} P_\mu$$

geeignete Zusammenfassung ,

$$E\left[Y_A\right] = -kb + i(a+b) - (a+b) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)P_\mu - (b+c) \sum_{\mu'=i}^{k} (i-\mu')P_{\mu'} \quad ,$$

$$\text{Addition von} \quad i(a+b) - i(a+b) \left[\sum_{\mu=0}^{i-1} P_\mu + \sum_{\mu=i}^{k} P_\mu \right] .$$

Der letzte Ausdruck ergibt, wenn wir P_μ aus Gl (1) einsetzen und die letzte Summe gemäß $\mu = i+k-\mu'$ transformieren

$$v_2(i,k) = E\left[Y_A\right] \quad ,$$

$$E\left[Y_A\right] = -kb + i(a+b) - (a+b) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^\mu q^{k-\mu}$$

$$+ (b+c) \sum_{\mu=0}^{k-1} (k-\mu)\binom{\mu-1}{i-1} p^i q^{\mu-i} \quad . \tag{5}$$

Entsprechend errechnen wir mit der <u>B-Politik:</u>

$$v_2(i,k) = E\left[Y_B\right] = \sum_{\mu=0}^{i-1} \left[- \mu d + (k-\mu)c\right] \; P\left[(\mu,k-\mu)\right]$$

$$+ \sum_{\mu=i}^{k} \left[- id + (k-\mu)c + (\mu-i)c\right] \; P\left[(i,k-\mu)\right] \tag{6}$$

$$= kc - (c+d) \sum_{\mu=0}^{i-1} \mu P_\mu - i(c+d) \sum_{\mu=i}^{k} P_\mu$$

$$v_2(i,k) = E\left[Y_B\right] = kc - i(c+d) + (c+d) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)P_\mu \quad ,$$

$$\text{Substitution} \quad \sum_{\mu=i}^{k} P_\mu = 1 - \sum_{\mu=0}^{i-1} P_\mu$$

oder:

$$v_2(i,k) = E\left[Y_B\right] = +kc - i(c+d) + (c+d) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^\mu q^{k-\mu} \quad . \tag{7}$$

Für das Spiel $\Gamma(k,k;k)$ erhalten wir nach Gl (5) den Wert

$$\begin{aligned} v_3(k) := v_2(k,k) &= -kb + k(a+b) - (a+b) \sum_{\mu=0}^{k} (k-\mu)\binom{k}{\mu} p^\mu q^{k-\mu} \\ &= -kb + k(a+b) - (a+b)(k-kp) \\ &= k(ap - bq) \end{aligned} \tag{8}$$

oder nach Gl (7) den Wert

$$\begin{aligned} v_3(k) &= + kc - k(c+d) + (c+d) \sum_{\mu=0}^{k} (k-\mu)\binom{k}{\mu} p^\mu q^{k-\mu} \\ &= k(cq - dp) \quad , \end{aligned} \tag{9}$$

da der Erwartungswert der Binomial - WV $\binom{k}{\mu} p^\mu q^{k-\mu}$, $\mu = 0,1,\ldots,k$ gleich kp ist.

Beide Werte sind einander gleich, da nach Gl (2.5 - 20) die Identität

$$ap - bq = cq - dp$$

gilt.

3.4 Der allgemeine Fall $\Gamma(i,j;k)$

Berechnung von val $\Gamma(i,j;k)$ über die probabilistische Methode

Wir berechnen den Spielwert val $\Gamma(i,j;k)$ zuerst direkt und dann durch eine Superposition der Spielwerte der Spezialfälle $\Gamma(k,j;k)$, $\Gamma(i,k;k)$ und $\Gamma(k,k;k)$.

Die dem Spiel $\Gamma(i,j;k)$ zugeordnete Irrfahrt endigt auf dem Rand, der durch die Gerade $m=i$, die Nebendiagonale $m+n = k$ und die Gerade $n=j$ bestimmt wird (m,n = variable ganzzahlige Koordinaten).

Eine reguläre Irrfahrt ist nur zu den Punkten der Nebendiagonalen $m+n = k$ möglich, die zwischen ihren Schnittpunkten mit der Geraden $m=i$, d.h. $(i,k-i)$ und mit der Geraden $n=j$, d.h. $(k-j,j)$ liegen.

Die entsprechenden Wn lauten, wenn wir sie gemäß dem Spezialfall $\Gamma(k,j;k)$ formulieren

$$P_\nu = \binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} \quad , \nu = k-i+1,\ k-i+2,\ \ldots,\ j-1 \tag{1a}$$

und gemäß dem Spezialfall $\Gamma(i,k;k)$ formulieren

$$P_\mu = \binom{k}{\mu} p^\mu q^{k-\mu} \quad , \mu = k-j+1,\ k-j+2,\ \ldots,\ i-1 \quad . \tag{1b}$$

Der Bereich der Indizes μ und ν wird durch die "End"punkte $(k-j+1,j-1)$ bzw. $(i-1,k-i+1)$ auf der Nebendiagonalen gegeben, die unterhalb des Punkts $(k-j,j)$ bzw. oberhalb des Punkts $(i,k-j)$ des Rands liegen.

Die Wn für die eingeschränkte Irrfahrt sind dieselben wie im Spezialfall $(k,j;k)$, vgl. Gl(3.2 - 2)

$$P_\nu = \binom{k+j-1-\nu}{j-1} q^j p^{k-\nu} \quad , \quad \nu = j,j+1,\ldots,k \tag{2}$$

und im Spezialfall $\Gamma(i,k;k)$, vgl. Gl (3.3 - 1b)

$$P_\mu = \binom{i+k-1-\mu}{i-1} p^i q^{k-\mu} \quad , \quad \mu = i,i+1,\dots,k \quad . \tag{3}$$

Daß die Wn Gl (1a) oder (1b) und Gl (2), Gl (3) eine WV bilden, kann auf dieselbe Weise bewiesen werden, wie wir es im Spezialfall des Spiels $\Gamma(k,j;k)$ demonstriert haben.

Wir übergehen daher diesen Beweis und geben sofort den Spielwert val $\Gamma(i,j;k)$ an, den wir mit der A-Politik erhalten.

Es ist

$$v(i,j;k) = E\left[Y_A\right] = \sum_{\mu=i}^{k} \left[ia - (k-\mu)b + (\mu-i)c\right] \binom{k+i-1-\mu}{i-1} p^i q^{k-\mu}$$
$$+ \sum_{\lambda=k-j+1}^{i-1} \left[\lambda a - (k-\lambda)b\right] \binom{k}{\lambda} p^\lambda q^{k-\lambda} + \sum_{\nu=j}^{k} \left[(k-j)a - jb\right] \binom{k+j-1-\nu}{j-1} q^j p^{k-\nu} , \tag{4}$$

wobei die mittlere Summe nur für

$$(k-j+1) \leq i-1$$

ungleich Null ist.

Mit Hilfe der Variablentransformation $\lambda=k-\rho$ bestätigt man sofort, daß wir in der mittleren Summe in Gl (4) anstelle der Wn aus Gl (1b) auch die aus Gl (1a) hätten verwenden können:

$$\sum_{\lambda=k-j+1}^{i-1} \left[\lambda a - (k-\lambda)b\right] \binom{k}{\lambda} p^\lambda q^{k-\lambda} = \sum_{\rho=k-i+1}^{j-1} \left[(k-\rho)a - \rho b\right] \binom{k}{\rho} q^\rho p^{k-\rho} \quad . \tag{5}$$

Um die Gl (4) noch etwas kompakter zu schreiben, transformieren wir die erste Summe gemäß $\mu' = k+i-\mu$ (vgl. Gl (3.3 - 5) und die dritte Summe gemäß $\nu' = k+j-\nu$ (vgl. Gl (3.2 - 15) .

Dies ergibt, wenn wir die Striche in den Summationsindizes weglassen

$$v(i,j;k) = \sum_{\mu=0}^{k} \left[i(a+b) + kc - \mu(b+c) \right] \binom{\mu-1}{i-1} p^i q^{\mu-i}$$

$$+ \sum_{\lambda=k-j+1}^{i-1} \left[\lambda(a+b) - kb \right] \binom{k}{\lambda} p^\lambda q^{k-\lambda}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{k} \left[ka - j(a+b) \right] \binom{\nu-1}{j-1} q^j p^{\nu-j} \quad . \tag{6}$$

Wie bereits erwähnt, können wir den Spielwert $v(i,j;k)$ auch über eine Superposition der Spielwerte $v_1(j,k)$, $v_2(i,k)$ und $v_3(k)$ ermitteln. Betrachten wir nämlich die Ränder, auf denen die Irrfahrt im Spiel $\Gamma(i,j;k)$ und in den Spielen $\Gamma(k,j;k)$ bzw. $\Gamma(i,k;k)$ bzw. $\Gamma(k,k;k)$ endigt, dann muß, da jeder Randpunkt einen entsprechenden Beitrag zu dem zugehörigen Erwartungswert $v_\kappa(\kappa = i,1,3)$ leistet,

$$v(i,j;k) = v_1(j,k) + v_2(i,k) - v_3(k) \tag{7}$$

sein.

Die Abb. 5c veranschaulicht dies im Spiel $\Gamma(5,4,7)$.

Natürlich müssen Gl (6) und (7) auch formal gleich sein. Wir zeigen dies, indem wir in Gl (7) die Ausdrücke Gln (3.2 - 12) und (3.3 - 4) sowie Gl (3.3 - 4) mit $i = k$ für die A-Politik einsetzen.

Dies ergibt

$$v(i,j;k) = \sum_{\nu=0}^{j-1} \Big[(k-\nu)a - \nu b\Big] \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} + \sum_{\nu=j}^{k} \Big[(k-j)a - jb\Big] \binom{k+j-1-\nu}{j-1} q^{j} p^{k-\nu}$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{i-1} \Big[\mu a - (k-\mu)b\Big] \binom{k}{\mu} p^{\mu} q^{k-\mu} + \sum_{\mu=i}^{k} \Big[ia - (k-\mu)b + (\mu-i)c\Big] \binom{k+i-1-\mu}{i-1} p^{i} q^{k-\mu}$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{k} \Big[\lambda a - (k-\lambda)b\Big] \binom{k}{\lambda} p^{\lambda} q^{k-\lambda} \quad . \tag{8}$$

Setzen wir nun Gl (4) und Gl (8) formal gleich und streichen identische Terme heraus, dann bleibt noch nachzuweisen, daß der mittlere Term in Gl (4) die Gestalt

$$\sum_{\lambda=k-j+1}^{i-1} c(\lambda) \cdot b(\lambda;k,p) = \sum_{\mu=0}^{i-1} c(\mu) \cdot b(\mu;k,p) + \sum_{\nu=0}^{j-1} c(k-\nu) \cdot b(\nu;k,q)$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{k} c(\lambda) \cdot b(\lambda;k,p) \tag{9}$$

$$c(\lambda) := \lambda a - (k-\lambda)b \quad , \quad b(\lambda;k,p) := \binom{k}{\lambda} p^{\lambda} q^{k-\lambda} \quad \text{(Binomial - W)}$$

hat. Dies folgt aber unmittelbar aus der Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{j-1} c(k-\nu) \cdot b(\nu;k,q) = \sum_{\lambda=k-j+1}^{k} c(\lambda) \cdot b(k-\lambda;k,q)$$

$$= \sum_{\lambda=k-j+1}^{k} c(\lambda) \cdot b(\lambda;k,p) \quad . \tag{10}$$

3.5 Berechnung von val $\Gamma(i,j;k)$ über eine Differenzengleichung

Allgemeine Form der Lösung

Analog zum Spiel $\Gamma(i,j)$ (vgl. Abschnitt 2.5) erhalten wir aus Gl (3.1 - 3) für den Wert des Spiels $\Gamma(i,j;k)$ die pDzGl

$$v(i+1,j+1;k+1) = p \cdot v(i,j+1;k) + q \cdot v(i+1,j;k) + (ap-bq) \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{lll} v(i,j;k) & = & 0, \\ v(0,j;k) & = & ck, \\ v(i,0;k) & = & ak, \\ v(i,j;0) & = & 0, \end{array}\right\} \text{für} \quad \begin{array}{ll} i + j < k & (2) \\ j \geqslant k & (3) \\ i \geqslant k & (4) \\ i + j > 0 & (5) \end{array}$$

wobei sich die Randbedingungen Gl (3) und (4) auch gemäß

$$v(0,j;k) = ck \cdot \delta(j-k) \tag{3a}$$

$$v(i,0;k) = ak \cdot \delta(i-k) \tag{4a}$$

ausdrücken lassen.

Wie beim Spiel $\Gamma(i,j)$ ermitteln wir zunächst die Lösung der pDzGl und zeigen dann, daß diese gleich dem Spielwert val $\Gamma(i,j;k)$ ist, da das Spiel $\Gamma(i,j;k)$ keinen Sattelpunkt hat.

Aus rechentechnischen Gründen (vgl. Gl (2.5 - 11)) wenden wir jedoch die Dreidimensionale Z-Transformation nicht unmittelbar an, sondern bauen die gesuchte Lösung der pDzGl aus drei partikulären Lösungen auf, deren jede einer pDzGl gehorcht, die mit der Zweidimensionalen Z-Transformation behandelt werden kann.

Die pDzGln für die erste bzw. zweite dieser partikulären Lösungen ergeben sich, wenn wir in Gl (1) $i=k$ bzw. $j=k$ annehmen.

Es ist dann im ersten Fall mit $v_1(j,k) := v(k,j;k)$

$$v_1(j+1,k+1) = p \cdot v_1(j+1,k) + q \cdot v_1(j,k) + (ap-bq) \tag{6}$$

$$v_1(0,k) = ak, \quad k \geqslant 0 \tag{7}$$

$$v_1(j,0) = 0, \quad j \geqslant 0 \tag{8}$$

und im zweiten Fall mit $v_2(i,k) := v(i,k;k)$

$$v_2(i+1,k+1) = p \cdot v_2(i,k) + q \cdot v_2(i+1,k) + (ap-bq) \tag{9}$$

$$v_2(0,k) = ck, \quad k \geqslant 0 \tag{10}$$

$$v_2(i,0) = 0, \quad i \geqslant 0 \quad . \tag{11}$$

Die neuen Randbedingungen sind dabei einfacher als die alten, da im ersten Fall die Gln (2) und (4) sowie im zweiten Fall die Gln (2) und (3) nicht mehr auftreten können.

Die DzGl für die dritte partikuläre Lösung $v_3(k) := v(k,k;k)$ erhalten wir, wenn wir mit dem Ansatz

$$v(i,j;k) = v(k,j;k) + v(i,k;k) - v(k,k;k) \tag{12}$$

in die ursprüngliche pDzGl eingehen.

Zuvor bemerken wir aber, daß der Ansatz Gl (12), der, wie man leicht nachprüft, den Randbedingungen Gln (2) bis (5) genügt, aus zweierlei Gründen recht naheliegend ist:

1) Betrachten wir nämlich den Ansatz

$$v(i,j;k) \;=\; v(k,j;k) + v(i,k;k) + w(i,j;k) \tag{13}$$

mit der zunächst willkürlichen Funktion $w(i,j;k)$, dann muß diese für $i=k$ in Gl

$$v(k,j;k) \;=\; v(k,j;k) + v(k,k;k) + w(k,j;k)$$

und $j=k$ in Gl

$$v(i,k;k) \;=\; v(k,k;k) + v(i,k;k) + w(i,k;k)$$

die Funktion $v(k,k;k)$ kompensieren, d.h. sie kann nur

$$w(i,j;k) \;=\; -v(k,k;k)$$

sein.

2) Aus den probabilistischen Überlegungen in Abschnitt 3, Abb. 5c ergibt sich sofort, daß die gesuchte Lösung aus der angegebenen Superposition bestehen muß, da der Mittelteil des "diagonalen Rands" $v(k,j;k)$ und $v(i,k;k)$ gemeinsam ist und dessen oberer und unterer Teil gar nicht dazu gehört.

Natürlich dürfen wir in diesem Abschnitt, wenn wir beanspruchen, daß die Methode der DzGl unabhängig von der probabilistischen Methode ist, nur das erste Argument verwenden.

Führen wir nun den Ansatz Gl (12) in Gl (1) ein, so folgt, wenn wir passend umformen

$$\begin{aligned} &v_1(j+1,k+1) - p \cdot v_1(j+1,k) - q \cdot v_1(j,k) - (ap-bq) \\ &\quad + v_2(i+1,k+1) - p \cdot v_2(i,k) - q \cdot v_2(i+1,k) - (ap-bq) \\ &\qquad = v_3(k+1) - (p+q)v_3(k) - (ap-bq) \quad . \end{aligned} \tag{14}$$

Da die Ausdrücke für v_1 und v_2 den pDzGl (6) und (9) entsprechen, ist die Gl (14) identisch erfüllt, wenn die Funktion $v_3(k)$ der DzGl

$$v_3(k+1) = v_3(k) + (ap-bq) \tag{15}$$

$$v_3(0) = 0$$

genügt.

Diese läßt sich unmittelbar lösen, da

$$v_3(1) = (ap-bq)$$

und damit

$$v_3(k) = k(ap-bq) \tag{16}$$

ist.

3.6 Lösung der pDzGl für $v_1(j,k)$

Transformieren wir die pDzGl (6) mit den Beziehungen (KT3 -1,2,3) und KT2 - 1 (Absolutglied) in den Bildraum der Z_{yz} - Transformation, so folgt (vgl. Gln (2.5 - 15), (2.5 - 16))

$$yz \left[V_1(y,z) - \sum_{j=0}^{\infty} v_1(j,0)\, y^{-j} - \sum_{k=0}^{\infty} v_1(0,k)\, z^{-k} + v_1(0,0) \right]$$

$$= py \left[V_1(y,z) - \sum_{k=0}^{\infty} v_1(0,k)\, z^{-k} \right] + q\, V_1(y,z)$$

$$+ (ap-bq) \frac{yz}{(y-1)(z-1)} \tag{17}$$

oder, wenn wir die Randbedingungen Gl (7) und (8) sowie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^k} = \frac{z}{(z-1)^2}$ berücksichtigen

$$(yz-py-q) \cdot V_1(y,z) = a \frac{yz(z-p)}{(z-1)^2} + (ap-bq) \frac{yz}{(y-1)(z-1)} \quad . \tag{16}$$

Diesen Ausdruck formen wir um in

$$V_1(y,z) = a \frac{z(z-p)}{(z-1)^2 \left(z - \frac{py+q}{y}\right)} + (ap-bq) \frac{1}{(y-1)} \cdot \frac{z}{(z-1)\left(z - \frac{py+q}{y}\right)} \quad , \tag{17}$$

so daß wir für die Rücktransformation in der Koordinate z lediglich die Korrespondenzen

$$Z_z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)(z-\alpha)} \right\} = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \quad , \qquad (\text{KT2 - 7})$$

$$Z_z^{-1} \left\{ \frac{z(z-\beta)}{(z-1)^2 \, (z-\alpha)} \right\} = (\beta-\alpha) \frac{1-\alpha^k}{(1-\alpha)^2} + \frac{1-\beta}{1-\alpha} k \quad , \qquad (\text{KT2 - 8})$$

benötigen.

Wir erhalten mit

$$Z_z^{-1} \left\{ a \frac{z(z-p)}{(z-1)^2 \left(z- \frac{py+q}{y}\right)} \right\} = - a \frac{q}{y} \frac{1 - \left(\frac{py+q}{y}\right)^k}{\left(1 - \frac{py+q}{y}\right)^2} + a \frac{q}{1 - \frac{py+q}{y}} k$$

$$= - \frac{a}{q} \frac{y}{(y-1)^2} \left[1 - \left(\frac{py+q}{y}\right)^k \right] + ka \frac{y}{y-1}$$

und

$$Z_z^{-1}\left\{ (ap-bq)\ \frac{1}{(y-1)}\ \frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{py+q}{y}\right)}\right\} = \frac{ap-bq}{(y-1)}\ \frac{1-\left(\frac{py+q}{y}\right)^k}{1-\left(\frac{py+q}{y}\right)}$$

$$= \frac{ap-bq}{q}\ \frac{y}{(y-1)^2}\ \left[1-\left(\frac{py+q}{y}\right)^k\right]$$

für die gesuchte Funktion

$$v_1(j,k) = Z_y^{-1}\left\{ + ak\ \frac{y}{y-1} - (a+b)\ \frac{y}{(y-1)^2} + (a+b)\ \frac{y}{(y-1)^2}\ \left(\frac{py+q}{y}\right)^k \right\} \quad , \qquad (18)$$

da

$$\frac{ap - bq}{q} - \frac{a}{q} = -(a+b) \qquad \text{ist.}$$

Die ersten beiden Terme der Gl (18) transformieren wir in der Koordinate y gemäß (KT2 - 1) und (KT2 - 3) zurück und beim dritten Term wenden wir den Faltungssatz gemäß (KT1 - 5) an.

Nach diesem ist mit

$$G_1(y) = \frac{y}{(y-1)^2} \quad , \qquad g_1(j) = j \quad ;$$

$$G_2(y) = \left(\frac{py+q}{y}\right)^k \quad , \qquad g_2(j) = \binom{k}{j} q^j p^{k-j} \quad ; \quad (KT2 - 12)$$

$$Z_y^{-1}\left\{ G_1(y) \cdot G_2(y) \right\} = \sum_{\nu=0}^{j} g_1(j-\nu)\ g_2(\nu)$$

und daher

$$v_1(j,k) = ka - j(a+b) + (a+b) \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu)\binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} \quad . \qquad (19)$$

3.7 Lösung der pDzGl für $v_2(i,k)$

Hier erhalten wir für die pDzGl (9) im Bildraum der Z_{xz} - Transformation

$$xz\left[V_2(x,z) - \sum_{i=0}^{\infty} v_2(i,0)\, x^{-i} - \sum_{k=0}^{\infty} v_2(0,k)\, z^{-k} + v_2(0,0)\right]$$

$$= p\, V_2(x,z) + qx\left[V_2(x,z) - \sum_{k=0}^{\infty} v_2(0,z)\, z^{-k}\right]$$

$$+ (ap-bq)\frac{xz}{(z-1)(z-1)} \qquad (20)$$

oder, wenn wir die entsprechenden Randbedingungen Gl (10) und (11) verwerten

$$V_2(x,z) = c\,\frac{z(z-q)}{(z-1)^2}\,\frac{x}{(xz-qx-p)} + (ap-bq)\frac{xz}{(x-1)(z-1)}\,\frac{1}{(xz-qx-p)}\,. \qquad (21)$$

Um einerseits den mit der probabilistischen Methode ermittelten Ausdruck zu bestätigen und andererseits $v_2(i,k)$ möglichst kompakt darzustellen, transformieren wir die Bildfunktion $V_2(x,z)$ auf zweierlei Weise zurück.

Dabei können wir wiederum demonstrieren, daß wir mit Binomialkoeffizienten im Bildraum der Z - Transformation einfacher rechnen können als im Originalraum.

Wir verifizieren zuerst den mit der probabilistischen Methode gefundenen Ausdruck für $v_2(i,k)$ und zerlegen dazu die r.S. der Gl (21) gemäß

$$V_2(x,z) = G(x,z) + H(x,z) \qquad (22)$$

$$G(x,z) \;=:\; c\,\frac{z}{(z-1)^2}\,\frac{x}{(x-\frac{p}{z-q})} \;-\; b\,\frac{z}{(z-1)(z-q)}\,\frac{x}{(x-1)(x-\frac{p}{z-q})}$$

$$H(x,z) \;=:\; (a+b)p\,\frac{1}{(x-1)}\,\frac{z}{(z-1)(z-\frac{qx+p}{x})} \quad .$$

Dabei haben wir lediglich die Konstante des zweiten Terms der r.S. von Gl (21) in

$$(ap-bq) \;=\; (a+b)p - b$$

aufgespalten und $-b\,\dfrac{xz}{(x-1)(z-1)}\cdot\dfrac{1}{(xz-qx-p)}$ mit dem ersten Term vereinigt.

Die Bildfunktion $V_2(x,z)$ nach Gl (22) transformieren wir nach der Vorschrift

$$v_2(i,k) \;=\; Z_z^{-1}Z_x^{-1}\left\{\,G(x,z)\,\right\} + Z_x^{-1}Z_z^{-1}\left\{\,H(x,z)\,\right\} . \qquad (23)$$

Diese liefert, wenn wir $G(x,z)$ mit den Korrespondenzen

$$Z_x^{-1}\left\{ c\,\frac{z}{(z-1)^2}\,\frac{x}{x-\frac{p}{z-q}}\right\} \;=\; c\,\frac{z}{(z-1)^2}\left(\frac{p}{z-q}\right)^i \quad , \text{(KT2 - 4)};$$

$$Z_x^{-1}\left\{ -\frac{bz}{(z-1)(z-q)}\cdot\frac{x}{(x-1)(x-\frac{p}{z-q})}\right\} \;=\; -\,\frac{bz}{(z-1)(z-q)}\cdot\frac{1-(\frac{p}{z-q})^i}{1-(\frac{p}{z-q})}$$

$$= -\,\frac{bz}{(z-1)^2}\left[\,1-\left(\frac{p}{z-q}\right)^i\,\right] \quad , \qquad \text{(KT2 - 7)} ;$$

nach x transformieren

$$Z_x^{-1}\left\{ G(x,z) \right\} = -b \frac{z}{(z-1)^2} + (b+c) \frac{z}{(z-1)^2} \left(\frac{p}{z-q}\right)^i$$

und letzteres mit den Korrespondenzen

$$Z_z^{-1}\left\{ G_1(z) \cdot G_2(z) \right\} = \sum_{\nu=0}^{k} g_1(k-\nu)\, g_2(\nu) \quad , \ (\text{KT1 - 5})$$

$$G_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad , \quad g_1(k) = k \quad , \quad (\text{KT2 -3})$$

$$G_2(z) = \left(\frac{p}{z-q}\right)^i \quad , \quad g_2(k) = \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad , (\text{KT1-1}) \ , (\text{KT2-13})$$

nach z transformieren

$$Z_z^{-1} Z_x^{-1}\left\{ G(x,z) \right\} = -kb + (b+c) \sum_{\nu=0}^{k} (k-\nu)\binom{\nu-1}{i-1} p^i q^{\nu-i} \quad . \qquad (24)$$

Außerdem liefert sie, wenn wir $H(x,z)$ mit den Korrespondenzen

$$Z_z^{-1}\left\{ (a+b)p \frac{1}{x-1} \frac{z}{(z-1)(z - \frac{qx+p}{x})} \right\} = \frac{(a+b)p}{(x-1)} \frac{1 - (\frac{qx+p}{x})^k}{1 - \frac{qx+p}{x}}$$

$$= (a+b) \frac{x}{(x-1)^2} \left[1 - \left(\frac{qx+p}{x}\right)^k \right] \quad , \qquad (\text{KT2 - 7})$$

nach z transformieren und anschließend über den Faltungssatz und die Korrespondenz

$$Z_x^{-1}\left\{ \left(\frac{qx+p}{x}\right)^k \right\} = \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad , \qquad (\text{KT2 - 12})$$

nach x transformieren

$$Z_z^{-1} Z_x^{-1} \left\{ H(x,z) \right\} = i(a+b) - (a+b) \sum_{\mu=0}^{i} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^{\mu} q^{k-\mu} \quad . \qquad (25)$$

Also ist, wenn wir zusammenfassen

$$v_2(i,k) = -kb + i(a+b) - (a+b) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^{\mu} q^{k-\mu}$$

$$+ (b+c) \sum_{\mu=0}^{k-1} (k-\mu)\binom{\mu-1}{i-1} p^{i} q^{\mu-i} \quad . \qquad (26)$$

Da $\binom{\mu-1}{i-1} = 0$ für $\mu < i$, läuft der Summationsindex μ der zweiten Summe in Gl (26) tatsächlich erst ab $\mu=i$.

Den zweiten Weg für die Rücktransformation stellen wir weniger ausführlich dar, da er in ähnlicher Weise wie für $V_1(y,z)$ verläuft, wenn wir p mit q, q mit p und y mit x vertauschen.

Es gilt, wenn wir von Gl (21) ausgehen

$$Z_z^{-1} \left\{ c \frac{z(z-q)}{(z-1)^2 \left(z - \frac{qx+p}{x}\right)} \right\} = -\frac{c}{p} \frac{x}{(x-1)^2} \left[1 - \left(\frac{qx+p}{x}\right)^k \right] + kc \frac{x}{(x-1)}$$

$$Z_z^{-1} \left\{ \frac{ap-bq}{x-1} \frac{z}{(z-1)\left(z - \frac{qx+p}{x}\right)} \right\} = \frac{ap-bq}{p} \frac{x}{(x-1)^2} \left[1 - \left(\frac{qx+p}{x}\right)^k \right]$$

und daher

$$v_2(i,k) = Z_x^{-1} \left\{ kc \frac{x}{x-1} + \frac{ap-bq-c}{p} \frac{x}{(x-1)^2} \left[1 - \left(\frac{qx+p}{x}\right)^k \right] \right\} \quad .$$

Beachten wir nun, daß wegen $p+q = 1$ und $p = \frac{b+c}{a+b+c+d}$

$$\frac{ap-bq-c}{p} = (a+b) - \frac{b+c}{p} = -(c+d)$$

ist, folgt schließlich

$$v_2(i,k) = kc - i(c+d) + (c+d) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^{\mu} q^{k-\mu} \quad . \tag{27}$$

Aus der Gl (27) können wir im Gegensatz zur Gl (26) unmittelbar entnehmen, daß in einem Spiel $\Gamma(i,k;k)$ mit $a,b > 0$, $c = d = 0$

$$v_2(i,k) \Big/_{c=d=0} = 0 \tag{28}$$

wird.

Wollten wir dieses Ergebnis direkt aus Gl (26) gewinnen, müßten wir nachweisen, daß

$$0 = -kb + i(a+b) - (a+b) \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^{\mu} q^{k-\mu}$$

$$+ b \sum_{\nu=0}^{k-1} (k-\nu)\binom{\nu-1}{i-1} p^{i} q^{\nu-i}$$

oder, wenn wir durch $(a+b)$ dividieren und $p = \dfrac{b}{a+b}$, $q = \dfrac{a}{a+b}$ berücksichtigen, daß

$$\sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu)\binom{k}{\mu} p^{\mu}q^{k-\mu} = (i-kp) + p^{i+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} (k-\nu)\binom{\nu-1}{i-1} q^{\nu-i} \tag{29}$$

$$p+q = 1 \quad , \qquad 0 \leq p,\, q \leq 1 \quad .$$

4.1 Anhang 1 zu p 2-10

Lösung der partiellen Differenzengleichung

$$u(m+1,n+1) = u(m,n+1) + u(m+1,n) \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(m,0) &= 1 \quad \text{für } m \geq 0, \\ u(0,n) &= 1 \quad \text{für } n \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

über die Zweidimensionale Z-Transformation.

Mit der Zuordnung ($m \longleftrightarrow x$, $n \longleftrightarrow y$) zwischen Gegenstands- und Bildvariablen erhalten wir gemäß Korrespondenztafel KT3 für die pDzGl (1) mit den Randbedingungen (2) die Bildgleichung

$$xy \left[U(x,y) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{y^j} + 1 \right] =$$

$$y \left[U(x,y) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i} \right] + x \left[U(x,y) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{y^j} \right], \tag{3}$$

die sich unmittelbar nach $U(x,y)$ auflösen läßt. Es ist

$$U(x,y) = \frac{x \cdot y}{x \cdot y - (x+y)} = \frac{y}{y-1} \; \frac{x}{x - \frac{y}{y-1}} = \frac{x}{x-1} \; \frac{y}{y - \frac{x}{x-1}}, \tag{4}$$

woraus nach Korrespondenztafel KT2

$$\begin{aligned} Z_x^{-1} \left\{ U(x,y) \right\} &= U(m,y) = \frac{y}{y-1} \left(\frac{y}{y-1}\right)^m, \qquad \text{(KT2-4)} \\ Z_y^{-1} \left\{ U(m,y) \right\} &= u(m,n) = \binom{n+m}{m} = \binom{m+n}{n}, \qquad \text{(KT2-11)} \end{aligned} \tag{5}$$

folgt.

4.2 Anhang 2 zu p 2-17

Satz

Die Wahrscheinlichkeiten

$$P\left[R=r\right] = \binom{i+j-r-1}{i-1} \; p^i q^{j-r} + \binom{i+j-r-1}{j-1} \; p^{i-r} q^j \tag{1}$$

$$r = 1,2,\ldots, \max(i,j)$$

mit p+q=1 bilden eine WV, d.h. es gilt

$$S_{ij} := \sum_{r=1}^{\max(i,j)} P\left[R=r\right]$$

$$= p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu + q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu = 1 \tag{2}$$

oder kürzer

$$S(i,j,p) + S(j,i,q) = 1 , \tag{3}$$

wobei

$$S(k,l,x) = x^k \sum_{\nu=0}^{l-1} \binom{\nu+k-1}{\nu} (1-x)^\nu \tag{4}$$

$$k,l \geq 0, \text{ ganz} \qquad 0 \leq x \leq 1 .$$

1) Beweis mit vollständiger Induktion

Es ist nicht schwer zu sehen, daß der Satz in einfachen Spezialfällen richtig ist. Wir brauchen dazu nur die Summanden in S_{ij} mit einer passend gewählten Potenz von p+q=1 so zu multiplizieren, daß lauter Glieder gleicher Ordnung entstehen.

Wir erhalten z.B.

1) $i=1,\ j=1\ :\ p\cdot q^{o} + q\cdot p^{o} = p + q = 1$

2) $i=1,\ j=2\ :\ p(q^{o}+q) + q^{2}\cdot p^{o} = p(p+q) + pq + q^{2}$

$= (p+q)^{2} = 1$

3) $i=2,\ j=2\ :\ p^{2}(q^{o}+2q) + q^{2}(p^{o}+2p) = p^{2} + 2p^{2}q + q^{2} + 2pq^{2}$

$= p^{2}(p+q) + 2p^{2}q + q^{2}(p+q) + 2pq^{2} = (p+q)^{3} = 1$.

Den allgemeinen Fall beweisen wir, indem wir zeigen, daß aus $S_{ij} = 1$ mit Induktion nach i $S_{i+1,j} = 1$ und mit Induktion nach j $S_{i,j+1} = 1$ folgt.

a) Voraussetzung: $S_{ij} = 1$, Behauptung: $S_{i+1,j} = 1$

Wir beweisen die Behauptung, indem wir $S_{i+1,j}$ in

$$S_{i+1,j} = S_{ij} + R_{i+1,j} \tag{5}$$

zerlegen und zeigen, daß $R_{i+1,j} = 0$ ist. Dies ist einfacher, als wenn wir wie in den Spezialfällen verfahren.

Im Detail sieht dies so aus:

Zunächst gilt per def.

$$S_{i+1,j} = p^{i+1} \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i}{\nu} q^{\nu} + q^{j} \sum_{\mu=0}^{i} \binom{\mu+j-1}{\mu} p^{\mu} \quad . \tag{6}$$

Davon können wir S_{ij} abspalten, wenn wir die erste Summe mittels

$$p^{i+1} = (1-q)p^{i}$$

und

$$\binom{\nu+i}{\nu} = \binom{\nu+i-1}{\nu} + \binom{\nu+i-1}{\nu-1}$$

umformen und aus der zweiten Summe den Term mit $\mu=i$ herausziehen:

$$S_{i+1,j} = (1-q)p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} \left[\binom{\nu+i-1}{\nu} + \binom{\nu+i-1}{\nu-1} \right] q^\nu$$

$$+ q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu + q^j \binom{i+j-1}{i} p^i$$

$$= S_{ij} + p^i \left[\sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i-1}{\nu-1} q^\nu - \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i}{\nu} q^{\nu+1} + \binom{i+j-1}{i} q^i \right]$$

$$= S_{ij} + R_{i+1,j} \ . \tag{7}$$

Nun brauchen wir nur noch in der ersten Summe des Restterms $R_{i+1,j}$ die Variablentransformation $\nu' = \nu-1$ vorzunehmen, um zu sehen, daß

$$R_{i+1,j} = p^i \left[\sum_{\nu'=0}^{j-2} \binom{\nu'+i}{\nu'} q^{\nu'+1} + \binom{j-1+i}{j-1} q^j - \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i}{\nu} q^{\nu+1} \right]$$

$$= 0 \tag{8}$$

ist. Mithin gilt

$$S_{i+1,j} = S_{ij} = 1 \ . \tag{9}$$

b) <u>Voraussetzung: $S_{ij} = 1$, Behauptung: $S_{i,j+1} = 1$</u>

Hier können wir den Beweis in ähnlicher Weise wie bei a) ausführen, wenn wir die zweite Summe in $S_{i,j+1}$ mittels

$$q^{j+1} = (1-p)q^j$$

und

$$\binom{\mu+j}{\mu} = \binom{\mu+j-1}{\mu} + \binom{\mu+j-1}{\mu-1}$$

umformen.

2) Beweis mit der Zweidimensionalen Z-Tranformation

Da die Z-Transformation nur auf Gegenstandsvariable $k \geq o$, ganz anzuwenden ist, müssen wir unsere Behauptung

$$S_{ij} := S(i,j,p) + S(j,i,q) = 1$$

mit Hilfe der Stufenfunktion

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1 & \text{für } k \geq 0 \end{cases} \qquad (10)$$

zu

$$\delta(i-1) \cdot \delta(j-1) \cdot S_{ij} = \delta(i-1)\,\delta(j-1) \qquad (11)$$

oder kürzer mit $\tilde{f} := \delta(i-1) \cdot \delta(j-1) f$ für beliebige f zu

$$\hat{S}_{ij} = \delta(i-1)\ \ \delta(j-1) \qquad (12)$$

präzisieren, wenn wir die Z-Transformation als Beweismittel einsetzen wollen.

Für Gegenstands- und Bildvariable wählen wir die Zuordnung ($i \leftrightarrow x$, $j \leftrightarrow y$).

Um Rechenarbeit zu sparen, nutzen wir die Beziehung

$Z_{xy} = Z_x Z_y = Z_y Z_x$ aus und transformieren $\tilde{S}_{ij} = \tilde{S}(i,j,p) + \tilde{S}(j,i,q)$ gemäß

$$Z_{xy}(\tilde{S}_{ij}) = Z_x Z_y \left\{ \tilde{S}(i,j,p) \right\} + Z_y Z_x \left\{ \tilde{S}(j,i,q) \right\} \quad . \qquad (13)$$

Dabei erhalten wir für die Summe $\tilde{S}(i,j,p) = \delta(i-1)\,\delta(j-1)\,p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu$,

wenn wir schrittweise über die Teiltransformationen

$$Z_y \left\{ \binom{i+j-1}{j} \right\} = Z_y \left\{ \binom{j+(i-1)}{(i-1)} \right\} = \left(\frac{y}{y-1} \right)^i , \qquad \text{(KT2-11)}$$

$$Z_y \left\{ \binom{i+j-1}{j} q^j \right\} = \left(\frac{y/q}{y/q-1} \right)^i = \left(\frac{y}{y-q} \right)^i , \qquad \text{(KT1-4)}$$

$$Z_y \left\{ \delta(j-1) \sum_{\mu=0}^{j-1} \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu \right\} = \frac{1}{y} \frac{y}{y-1} \left(\frac{y}{y-q}\right)^i$$

$$= \frac{1}{y-1}\left(\frac{y}{y-q}\right)^i \; , \quad \text{(KT1-6 und KT1-2)}$$

$$Z_x \left\{ \delta(i-1)\; p^i \; \frac{1}{y-1}\left(\frac{y}{y-q}\right)^i \right\} = Z_x \left\{ \frac{y}{y-1} \frac{p}{y-q} \; \delta(i-1) \left(\frac{y}{y-q}\right)^{i-1} \right\}$$

$$= \frac{y}{y-1} \; \frac{p}{y-q} \frac{1}{x} \; \frac{x}{x-\dfrac{y}{y-q}} \; , \quad \text{(KT2-4 und KT1-2)}$$

gehen, die Gesamttransformation

$$Z_{xy} \left\{ \delta(i-1) \;\; \delta(j-1)\; p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu \right\}$$

$$= \frac{y}{y-1} \; \frac{y}{xy-qx-py} \; . \tag{14}$$

Für die Summe $\tilde{S}(j,i,q) = \delta(i-1) \cdot \delta(j-1)\; q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu$ können wir die Transformation $Z_{xy}\left\{\tilde{S}(j,i,q)\right\}$ ohne erneut zu rechnen aus $Z_{xy}\left\{\tilde{S}(i,j,p)\right\}$ durch Symmetriebetrachtungen gewinnen.

Aus diesem folgt, daß

$$Z_{xy} \left\{ \delta(i-1) \;\; \delta(j-1)\; q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu \right\}$$

$$= \frac{x}{x-1} \; \frac{q}{xy-py-qx} \; , \tag{15}$$

ist, wobei wir in $Z_{xy}\left\{\tilde{S}(i,j,p)\right\}$ (siehe Gl(14)) jeweils p mit q und x mit y zyklisch vertauschten.

Mit den Teilergebnissen Gl (14) und Gl (15) ist

$$Z_{xy} \left\{ \tilde{S}_{ij} \right\} = Z_{xy} \left\{ \tilde{S}(i,j,p) \right\} + Z_{xy} \left\{ \tilde{S}(j,i,q) \right\}$$

$$= \frac{1}{xy-qx-py} \cdot \frac{xy(p+q)-qx-py}{(x-1)(y-1)} = \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{1}{(y-1)} \quad , \tag{16}$$

woraus wir auf

$$\tilde{S}_{ij} = Z_{xy}^{-1} \left\{ \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1} \right\} = Z_x^{-1} \left\{ \frac{1}{x-1} \right\} Z_y^{-1} \left\{ \frac{1}{y-1} \right\}$$

$$= \delta(i-1) \cdot \delta(j-1) \tag{17}$$

schließen, w.z.b.w..

4.3 Anhang 3 zu p 2-19

Satz

Im Spiel $\Gamma(i,j)$ ist der Erwartungswert der Auszahlung an Spieler S_1 unabhängig davon, ob er die A- oder B-Politik benutzt, d.h. es ist

$$E[Y_A] - E[Y_B] = 0 \,. \tag{1}$$

Hilfssatz

Es gelten die Identitäten

$$p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu) \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu = f(i,j,p) + q \cdot g(i,j), \tag{2}$$

$$q^j \sum_{\mu=0}^{i-1} (i-\mu) \binom{\mu+j-1}{\mu} p^\mu = f(j,i,q) + p \cdot g(i,j) \,, \tag{3}$$

wobei

$$f(k,l,x) := 1 - k\frac{1-x}{x} \, I_x(k,l),$$

$$g(k,l) := \frac{k \cdot l}{k+l} \binom{k+l}{l} p^{k-1} q^{l-1} \,.$$

Beweis des Satzes

Aufgrund des Hilfssatzes erhalten wir aus den Gln (2.4-17) u. (2.4-18)

$$E[Y_A] - E[Y_B] = \Big[(b+c)q - (a+d)p\Big] \cdot g(i,j)$$

$$+ (b+c)q \Big[q^{-1}\big[f(i,j,p)-j\big]\Big]$$

$$- (a+d)p \Big[p^{-1}\big[f(j,i,q)-i\big]\Big] \tag{4}$$

Wegen Gl (2.3-9), d.h. $(b+c)q = (a+d)p$, ist auf der rechten Seite in Gl (4) der erste Term Null und die beiden übrigen Terme lassen sich zusammenfassen.

So erhalten wir schließlich, wenn wir noch

$I_p(i,j) + I_q(j,i) = 1$ benutzen:

$$E(Y_A)-E(Y_B) = (b+c)q \left\{ \frac{1}{q} \left[(j-i\,\tfrac{q}{p}) \cdot I_p - j \right] - \frac{1}{p} \left[(i-j\,\tfrac{p}{q}) I_q - i \right] \right\}$$

$$= (b+c)q \left\{ -\frac{1}{q} \left[jI_q + i\tfrac{q}{p}\, I_p \right] + \frac{1}{p} \left[i\, I_p + j\tfrac{p}{q}\, I_q \right] \right\} = 0 \ . \quad (5)$$

<u>Beweis des Hilfssatzes</u>

Da die zweite Identität Gl (3) aus der ersten Gl (2) folgt, wenn wir i mit j und p mit q zyklisch vertauschen, genügt es, die erste Identität zu beweisen.

Wir verwenden dazu die Beziehung

$$(1-x)^{m+1} \sum_{s=a}^{b} \binom{m+s}{s} x^s = I_x(a,m+1) - I_x(b+1,m+1), \quad (6)$$

$a,b > 0$, ganz, $0 \leq x \leq 1$,

von der ein Spezialfall als Gl (26.5.26) in /10/ p 945 enthalten ist.

Die Beziehung (6) sieht man so ein:

Aufgrund der Definition der unvollständigen Betafunktion gilt für n,k ganz und $0 \leq x \leq 1$ (vgl. /10/ p 945, Gl (26.5.25))

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = I_x(k,n-k+1) - I_x(k+1,n-k) \ . \quad (7)$$

Aus Gl (7) erhalten wir, wenn wir $n=m+s$, $k=s$ setzen, von $s=a$ bis $s=b$ summieren und mit $(1-x)$ multiplizieren

$$(1-x)^{m+1} \sum_{s=a}^{b} \binom{m+s}{s} x^s = (1-x) \sum_{s=a}^{b} \left[I_x(s,m+1) - I_x(s+1,m) \right] . \qquad (8)$$

Da nun aber

$$I_x(s,m+1) = \frac{1}{x} \left[I_x(s+1,m+1) - (1-x)\, I_x(s+1,m) \right] \qquad (9)$$

ist (vgl. /10/ p 944, Gl (26.5.11)),

ergibt sich für die Summe auf der rechten Seite von Gl (8), wenn wir $I_x(s+1,m)$ aus Gl (9) einsetzen

$$(1-x) \sum_{s=a}^{b} \left[I_x(s,m+1) - I_x(s+1,m) \right]$$

$$= \sum_{s=a}^{b} I_x(s,m+1) - \sum_{s=a+1}^{b+1} I_x(s,m+1)$$

$$= I_x(a,m+1) - I_x(b+1,m+1) \quad . \qquad (10)$$

Beweis der Identität Gl (2):

Um die Beziehung Gl (6) auf die Summe auf der linken Seite in Gl (2) anwenden zu können, müssen wir dort die Terme mit $\nu = 0$ herausnehmen, da $I_x(i,j)$ nur für $i,j > 0$ definiert ist.

Tun wir dies gemäß

$$p^i \sum_{\nu=0}^{j-1} (j-\nu) \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu = j\left[p^i + p^i \sum_{\nu=1}^{j-1} \binom{\nu+i-1}{\nu} q^\nu\right]$$

$$- i \frac{q}{p} \left[p^{i+1} + p^{i+1} \sum_{\nu=1}^{j-2} \binom{i+\nu}{\nu} q^\nu\right] = : S_p, \tag{11}$$

so folgt mit Gl (6) unmittelbar

$$S_p = j\left[p^i + I_q(1,i) - I_q(j,i)\right]$$
$$-i\frac{q}{p}\left[p^{i+1} + I_q(1,i+1) - I_q(j-1,i+1)\right] , \tag{12}$$

oder, wenn wir noch berücksichtigen, daß

$$I_p(i,j) + I_q(j,i) = 1$$
$$I_p(i,1) = p^i$$

ist ,

$$S_p = j \cdot I_p(i,j) - i\frac{q}{p} I_p(i+1,j-1) \ . \tag{13}$$

Die Form der Gl (2.4-19) bekommen wir, wenn wir beachten (vgl. /10/ p 944, Gl (26.5.15)), daß für

$$I_p(i,j) = \frac{j}{(i+j)} \binom{i+j}{j} p^i q^{j-1} + I_p(i+1,j-1) \tag{14}$$

gilt.

4.4 Anhang 4 zu p 2-24

Bemerkungen zur Vertauschbarkeit bei der Zweidimensionalen Z-Transformation

In der Literatur finden sich entsprechend einem Satz aus der Funktionentheorie Beispiele für Potenzreihen in zwei komplexen Variablen x und y, bei denen in mindestens einem Punkt auf dem Rand ihres Konvergenzgebiets die Summationen nicht vertauschbar sind.

Da diese Reihen aber gewöhnlich in einem gewissen Gebiet konvergieren, ergeben sich keine Beispiele gegen die Vertauschbarkeit
$Z_x Z_y = Z_y Z_x$.

Insbesondere können wir Doppelreihen, deren Summationen in einem Punkte nicht vertauschbar sind, nicht ohne weiteres in eine Potenzreihe "fortsetzen", bei der diese Eigenschaft in einem Gebiet erhalten bleibt.

Sei z.B. (vgl. E.C. Titchmarch, The Theory of Functions, 2. Ed., p 33 example XII)

$$f(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j+1 \quad , \qquad j = 0,1,2,\ldots \\ -1 & \phantom{\text{für}} \quad i - j-1 \quad , \qquad j = 1,2,3,\ldots \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

oder bequemer in Matrixform

$$\{f(i,j)\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & \dots \\ .. & .. & .. & .. & .. & \dots \end{bmatrix} ,$$

so erhalten wir, je nachdem wir in der obigen Matrix nach Zeilen oder Spalten summieren:

$$-1 = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} f(i,j)\right) \neq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} f(i,j)\right) = +1 \quad .$$

Betrachten wir dagegen die Laurentreihen

$$F(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(i,j)}{x^i y^j} = -\frac{1}{y} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^i} \left(\frac{1}{y^{i-1}} - \frac{1}{y^{i+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{y} + \frac{y^2-1}{y} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(xy)^i} = \frac{x-y}{1-xy}$$

und

$$G(x,y) := \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i,j)}{x^i y^j} = +\frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{y^j} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{x^{j+1}}\right)$$

$$= +\frac{1}{x} - \frac{x^2-1}{x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(xy)^j} = \frac{x-y}{1-xy} \quad ,$$

so ist im Konvergenzgebiet $/x/ > 1$, $/y/ > 1$: $F(x,y) = G(x,y)$ und im Randpunkt $x = y = 1$: $F(x,y) = G(x,y)$.

4.5 Anhang 5 zu p 3-5

Satz

Für $k > j$, $j > 0$ und $p + q = 1$, $0 < p, q < 1$
gilt die Identität:

$$B_j := \sum_{\nu=j}^{k} \binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} = q^j \sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j} =: D_j \; . \tag{1}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

a) Spezialfälle

Wir zeigen zunächst, daß die Behauptung für die "Rand"werte $j = 0,1,2$ und $j = k-1, k$ richtig ist.

Fall $j = 0$

Da die Summanden Wn aus einer Binomialverteilung sind, gilt für die

$$\text{l. S.} \quad = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} = 1 \tag{2}$$

und wegen $\binom{-1}{-1} = 1$ für die

$$\text{r. S.} \quad = \sum_{\rho=0}^{k} \binom{\rho-1}{0-1} p^\rho = 1 \; .$$

Fall $j = 1$

Ziehen wir in der Summe Gl (2) den Summanden für $\nu = 0$ ab, folgt für die

$$\text{l. S.} \quad = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} q^{\nu} \cdot p^{k-\nu} \quad - \binom{k}{0} q^0 p^k \quad = 1-p^k \quad .$$

Beachten wir, daß $\binom{m}{0} = 1$ für m ganz, reduziert sich die r. S. auf eine geometrische Reihe

$$\text{r. S.} \quad = q^1 \sum_{\rho=1}^{k} \binom{\rho-1}{0} p^{\rho-1} = q \, \frac{1-p^k}{1-p} \quad = \text{l. S.}$$

<u>Fall j = 2</u>

Analog zum Fall j = 1 erhalten wir hier für die

$$\text{l. S.} \quad = \sum_{\nu=2}^{k} \binom{k}{\nu} q^{\nu} p^{k-\nu} \quad = 1-p^k-k \cdot qp^{k-1}$$

und die

$$\text{r. S.} \quad = q^2 \sum_{\rho=2}^{k} (\rho-1)\, p^{\rho-2} \quad = q^2 \frac{d}{dp} \sum_{\rho=1}^{k-1} p^{\rho}$$

$$= q^2 \frac{d}{dp} \, \frac{p-p^k}{1-p} \quad = q\,(1-kp^{k-1}) + (p-p^k) = \text{l. S.}$$

Fast unmittelbar ergibt sich im

<u>Fall j = k</u>

$$\text{l. S.} \quad = \binom{k}{k} q^k p^0 \quad = q^k \quad ,$$

$$\text{r. S.} \quad = \quad q^k \binom{k-1}{k-1} p^0 \quad = \quad \text{l. S.}$$

und im

<u>Fall j = k-1</u>

$$\text{l. S.} \quad = \quad \binom{k}{k-1} q^{k-1} p + \binom{k}{k} q^k p^0 \quad = kq^{k-1} p + q^k$$

$$\text{r. S.} \quad = q^{k-1} \quad \binom{k-1}{k-2} p^1 + \binom{k-1}{k-1} p^0 \quad = q^{k-1} \quad 1 + (k-1)p \quad = \text{l. S.}$$

<u>b)</u> <u>Induktionsbeweis</u>

Wir schließen von j auf (j-1) mit der Induktionsvoraussetzung $B_j = D_j$. Die zu beweisende Identität gilt nur für abzählbar endlich viele j mit $0 < j < k$.

Zunächst ist

$$B_{j-1} := \sum_{\nu=j-1}^{k} \binom{k}{\nu} q^\nu p^{k-\nu} \quad = \quad \binom{k}{j-1} q^{j-1} p^{k-j+1} + B_j$$

und weiterhin, wenn wir B_j gemäß der Induktionsvoraussetzung durch D_j ersetzen

$$B_{j-1} \quad = \quad \binom{k}{j-1} q^{j-1} p^{k-j+1} + D_j \quad .$$

Nun zerlegen wir D_j mit Hilfe von $q^j = q^{j-1}\,(1-p)$ in zwei Summen und schreiben in der zweiten Summe wegen

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{M}{N-1} = \genfrac{}{}{0pt}{}{M-1}{N-1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{M-1}{N-2}$$

für $$- \genfrac{}{}{0pt}{}{\rho-1}{j-1} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\rho-1}{j-2} - \genfrac{}{}{0pt}{}{\rho}{j-1} \quad .$$

Dies ergibt

$$B_{j-1} = \binom{k}{j-1} q^{j-1} p^{k-j+1} + q^{j-1} \sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j}$$

$$+ \; q^{j-1} \sum_{\rho=j-1}^{k} \binom{\rho-1}{j-2} p^{\rho-(j-1)} - q^{j-1} - q^{j-1} \sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho}{j-1} p^{\rho-j+1} \qquad ,$$

"zweite" Summe

was wir mit der Transformation $\rho' = \rho+1$ in der dritten Summe vereinfachen können zu

$$B_{j-1} = \binom{k}{j-1} q^{j-1} p^{k-j+1} + q^{j-1} \sum_{\rho=j}^{k} \binom{\rho-1}{j-1} p^{\rho-j}$$

$$+ \; D_{j-1} - q^{j} \sum_{\rho'=j}^{k} \binom{\rho'-1}{j\;-1} p^{\rho'-j} - \binom{k}{j-1} q^{j} p^{k+1-j}$$

"dritte" Summe

$$= \qquad D_{j-1} \; .$$

KT1 Korrespondenztafel für die Eindimensionale Z-Transformation

Operationen — Gegenstandsvariable $k \geq 0$, ganz; Bildvariable z, komplex

Nr.	Gegenstand $f(k)$	Bild $F(z)$	Kommentar
1	$\sum_{\mu=0}^{n} c_\mu f_\mu(k)$	$\sum_{\mu=0}^{n} c_\mu F_\mu(z)$,	Linearität
2	$f(k-n)\cdot\delta(k-n)$	$\frac{1}{z^n}\cdot F(z)$,	erster Verschiebungssatz
3	$f(k+n)$	$z^n \left[F(z) - \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{f(\mu)}{z^\mu}\right]$	zweiter Verschiebungssatz
4	$c^k \; f(k)$	$F\left(\frac{z}{c}\right)$	Ähnlichkeitssatz
5	$\sum_{\mu=0}^{k} f(k-\mu)\, g(\mu)$ $= \sum_{\mu=0}^{k} f(\mu)\, g(k-\mu)$	$F(z)\cdot G(z)$	Faltungssatz
6	$\sum_{\mu=0}^{k} f(\mu)$	$\frac{z}{z-1}\cdot F(z)$	Summensatz
7	$k\cdot f(k)$	$-z\,\frac{d}{dz}\,F(z)$	Differentiation der Bildfunktion
8	$\frac{1}{k}\, f(k)$	$\int_{z}^{\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$	Integration der Bildfunktion
9	$\frac{d}{dt}\, f(k,t)$	$\frac{d}{dt}\, F(z,t)$	Differentiation nach einem Parameter t
10	$\int_a^b f(k,t)\, dt$	$\int_a^b F(z,t)\, dt$	Integration nach einem Parameter t

KT2 Korrespondenztafel für die Eindimensionale Z-Transformation

Spezielle Funktionen

Gegenstandsvariable $k \geq 0$, ganz

Bildvariable z, komplex

Nr.	Gegenstand $f(k)$	Bild $F(z)$	Nr.	Gegenstand $f(k)$	Bild $F(z)$
1	1	$\frac{z}{z-1}$	9	a^{k+1}	$a\frac{z}{z-a}$
2	$\delta(k-n)$	$\frac{1}{z^n}\frac{z}{z-1}$	10	a^{k-1}	$\frac{1}{z-a}$
3	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	11	$\binom{k+m}{n}$, $m \leq n$	$\frac{z^{m+1}}{(z-1)^{n+1}}$
4	a^k	$\frac{z}{z-a}$	12	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	$\left(\frac{qz+p}{z}\right)^n$
5	$\binom{k}{n}$, $k \geq n-1$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$	13	$\binom{k-1}{n-1}p^k$	$\left(\frac{p}{z-p}\right)^n$
6	$\binom{n}{k}$, $k \leq n$	$\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$	14	$\binom{k+n-1}{n-1}\ p^n q^k$	$\left(\frac{pz}{z-q}\right)^n$
7	$\frac{a^k - b^k}{a-b}$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$			
8	$\frac{1-b}{1-a}k + (b-a)\frac{1-a^k}{(1-a)^2}$	$\frac{z(z-b)}{(z-1)^2(z-a)}$			

KT3 Korrespondenztafel für die Zweidimensionale Z-Transformation

Gegenstandsvariable i,j 0 ganz

Bildvariable x,y komplex

Nr.	Gegenstand $f(i,j)$	Bild $F(x,y)$
1	$f(i+1,j)$	$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f(i+1,j)}{x^i y^j} = x \left[F(x,y) - \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f(0,j)}{y^j} \right]$
2	$f(i,j+1)$	$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f(i,j+1)}{x^i y^j} = y \left[F(x,y) - \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f(i,0)}{x^i} \right]$
3	$f(i+1,j+1)$	$xy \left[F(x,y) - \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f(i,0)}{x^i} - \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f(0,j)}{y^j} + f(0,0) \right]$

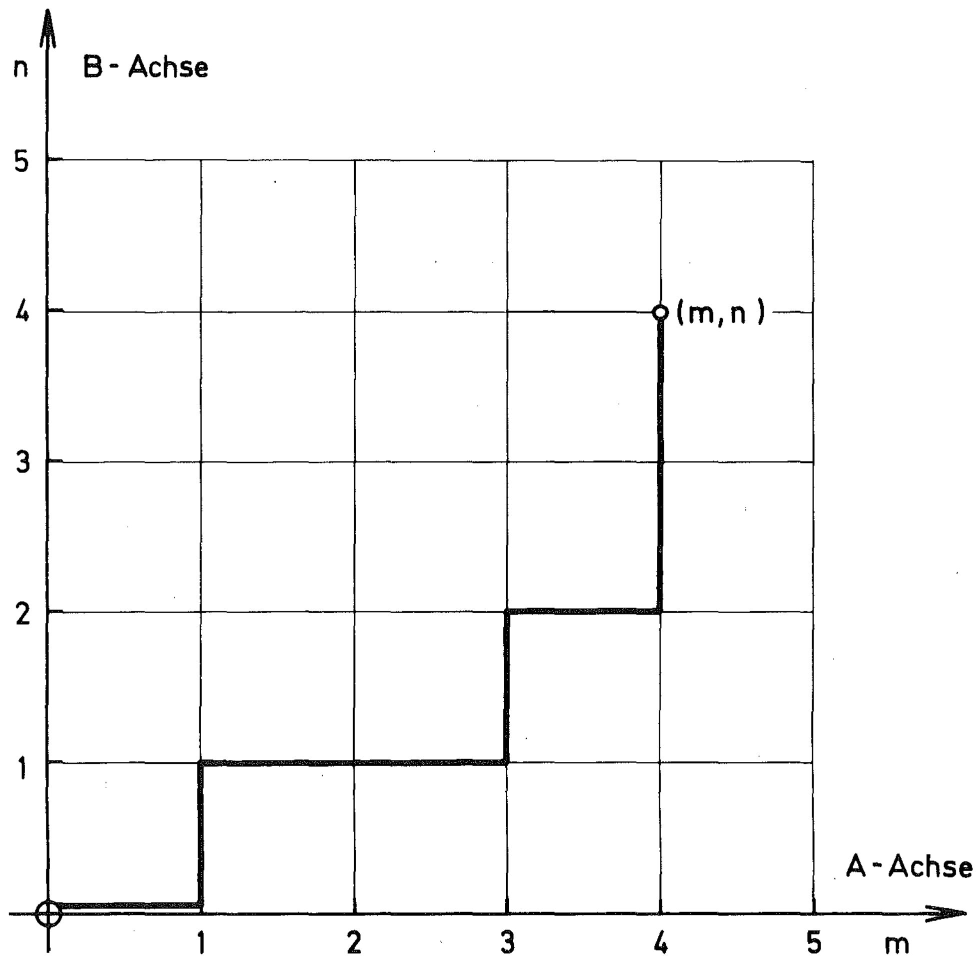

Abb. 1 Gewöhnliche Irrfahrt

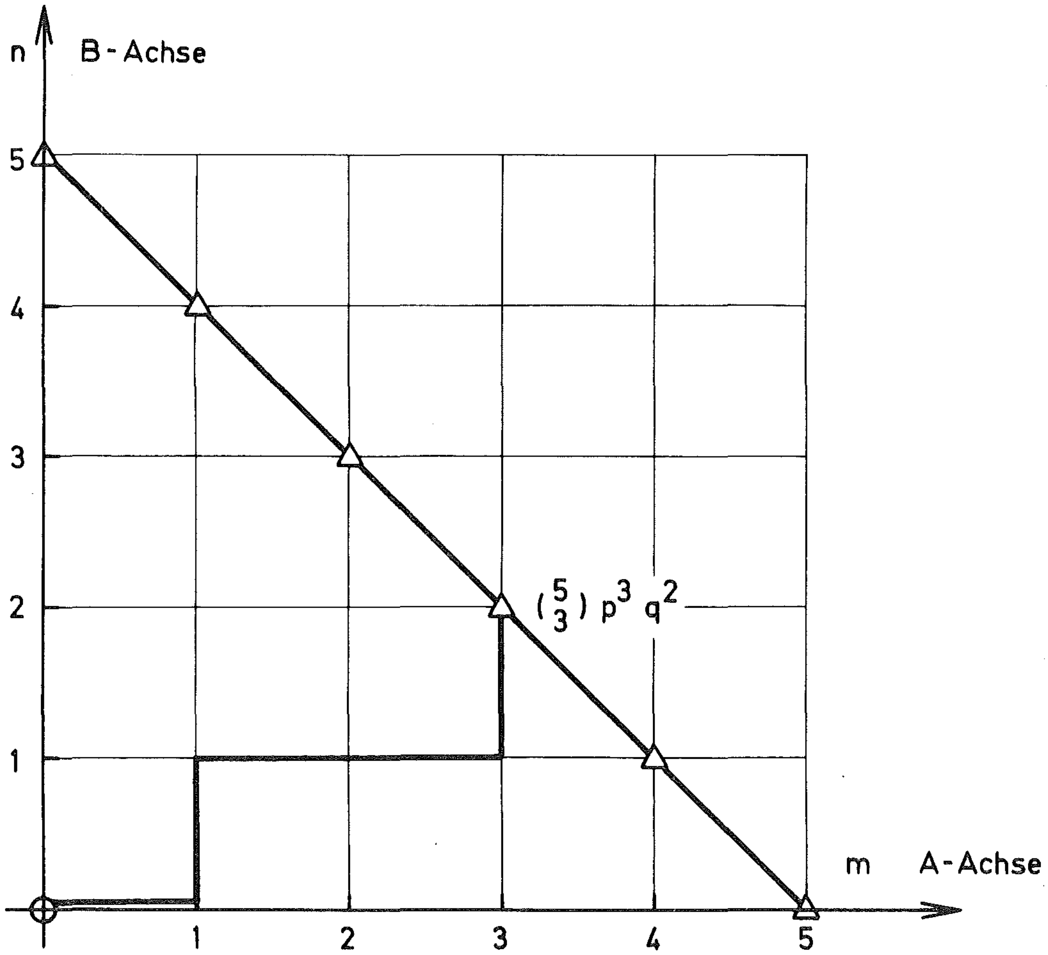

Abb.2 Binomial-Verteilung im Spiel $\Gamma(\infty,\infty)$, $k=5$

W, in einer Irrfahrt zu einem Punkt (m,k-m) auf der Nebendiagonalen zu kommen

$$P(X_A = m,\ X_B = k-m) = \binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$

$$m = 0,1,2,\dots,k$$

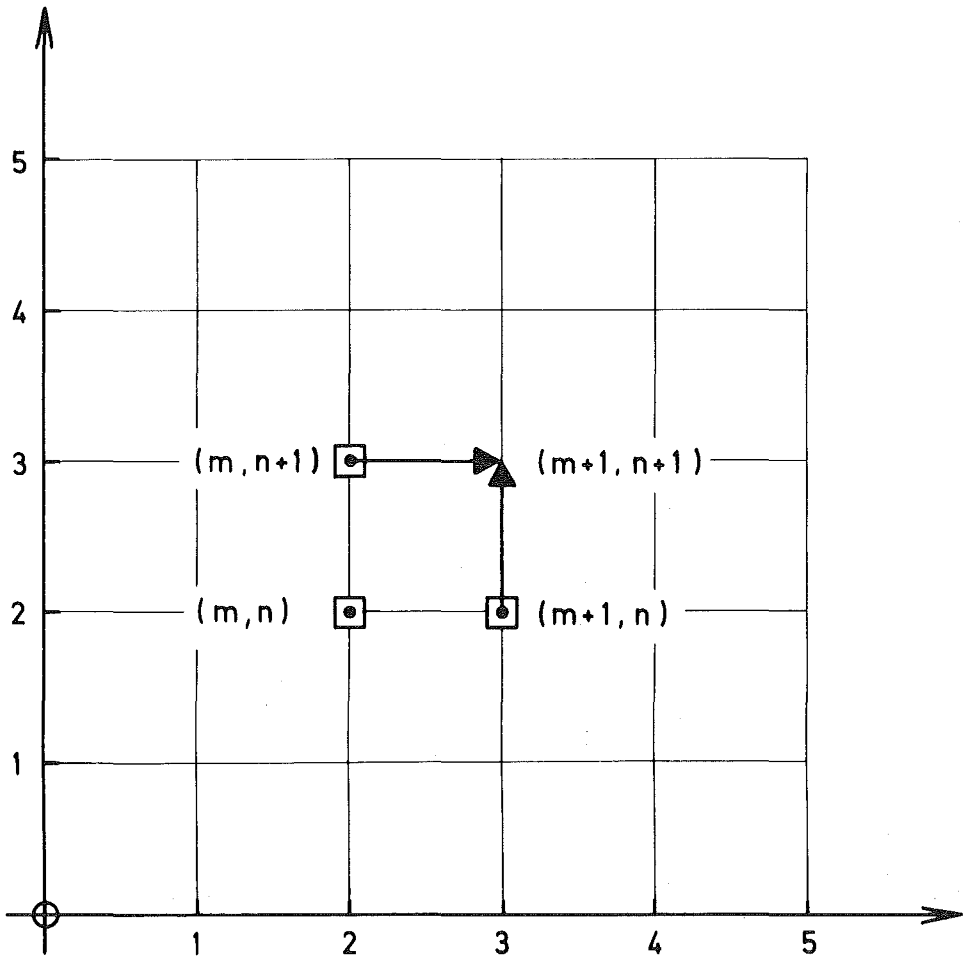

Abb. 3 **Herleitung der partiellen Differenzengleichung für die gewöhnliche Irrfahrt**

In einer gewöhnlichen Irrfahrt kann man in einem Schritt nur vom Punkt (m,n+1) bzw. (m+1,n) zum Punkt (m+1,n+1) gelangen. Daher gilt

$$u(m+1,n+1) = u(m,n+1) + u(m+1,n)$$

Hilfsfigur zur Konstruktion der Negativen
Binomial-Verteilung

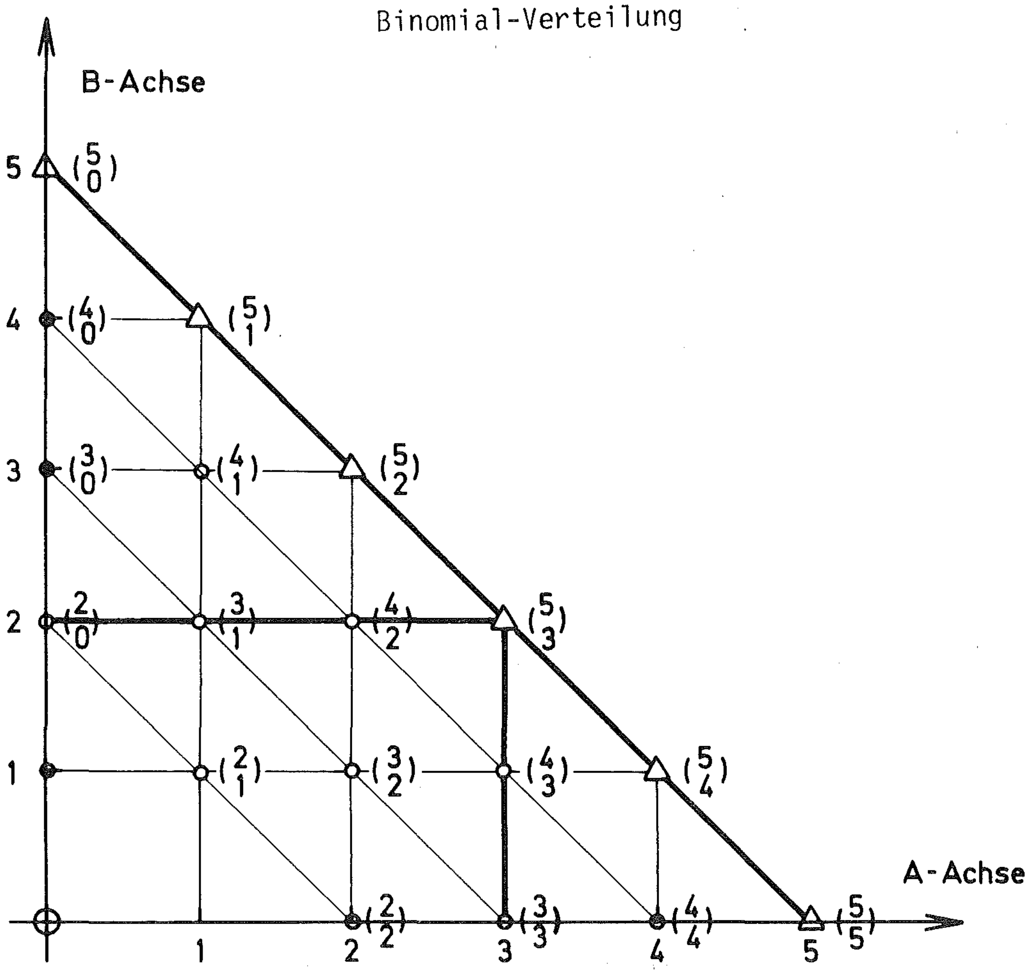

Abb.4a Negative Binomial-Verteilung im Spiel $\Gamma(3,2)$

Die Binomialkoeffizienten an den Punkten der Nebendiagonalen für k = 2,3,4,5 geben die Anzahl der möglichen Wege zu diesen Punkten bei einer gewöhnlichen Irrfahrt.

Die Anzahl der möglichen Wege bei einer eingeschränkten Irrfahrt zu den Punkten o der Abb. 4b ergeben sich über die Hilfsfigur 4a.

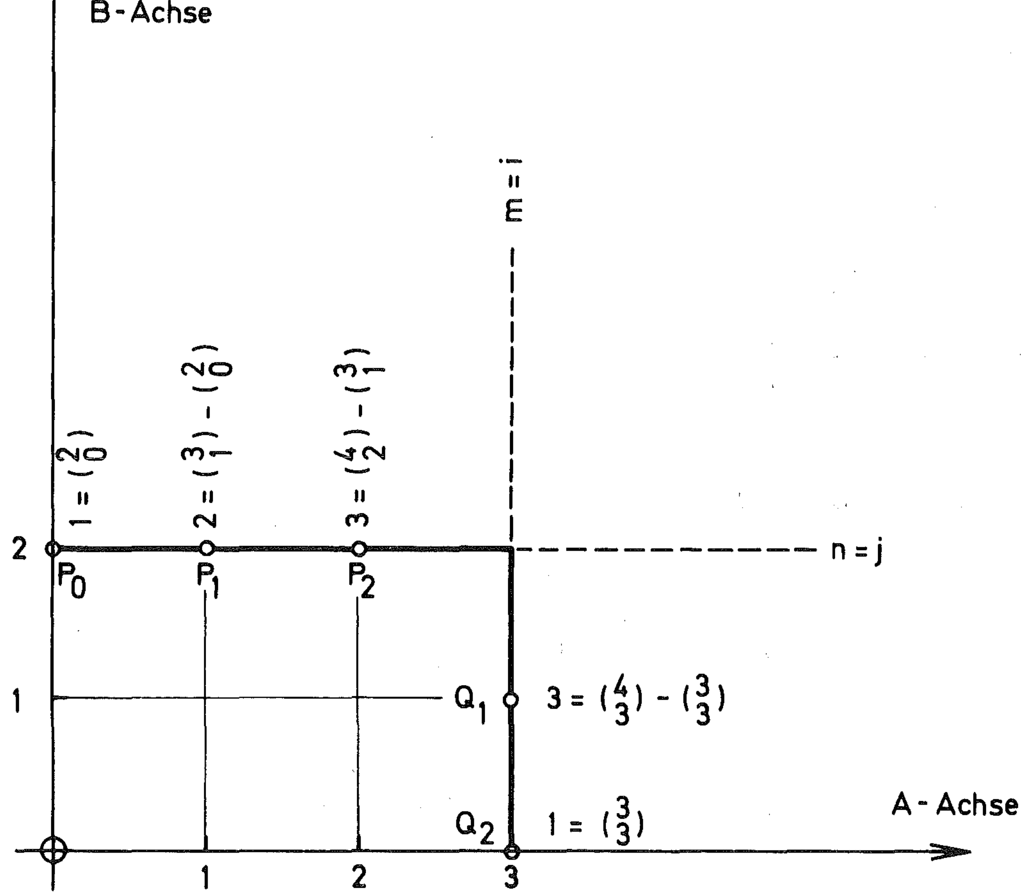

Abb. 4b Negative Binomial-Verteilung im Spiel $\Gamma(3,2)$

Für Randpunkte parallel der A-Achse:

$$P(X_A = 3-p,\ X_B = 2) \quad = \quad \binom{4-\mu}{1} p^{3-\mu} q^2 \qquad \mu = 1,2,3$$

für Randpunkte parallel der B-Achse:

$$P(X_A = 3,\ X_B = 2-\nu) \quad = \quad \binom{4-\nu}{2} p^3 q^{2-\nu} \qquad \nu = 1,2$$

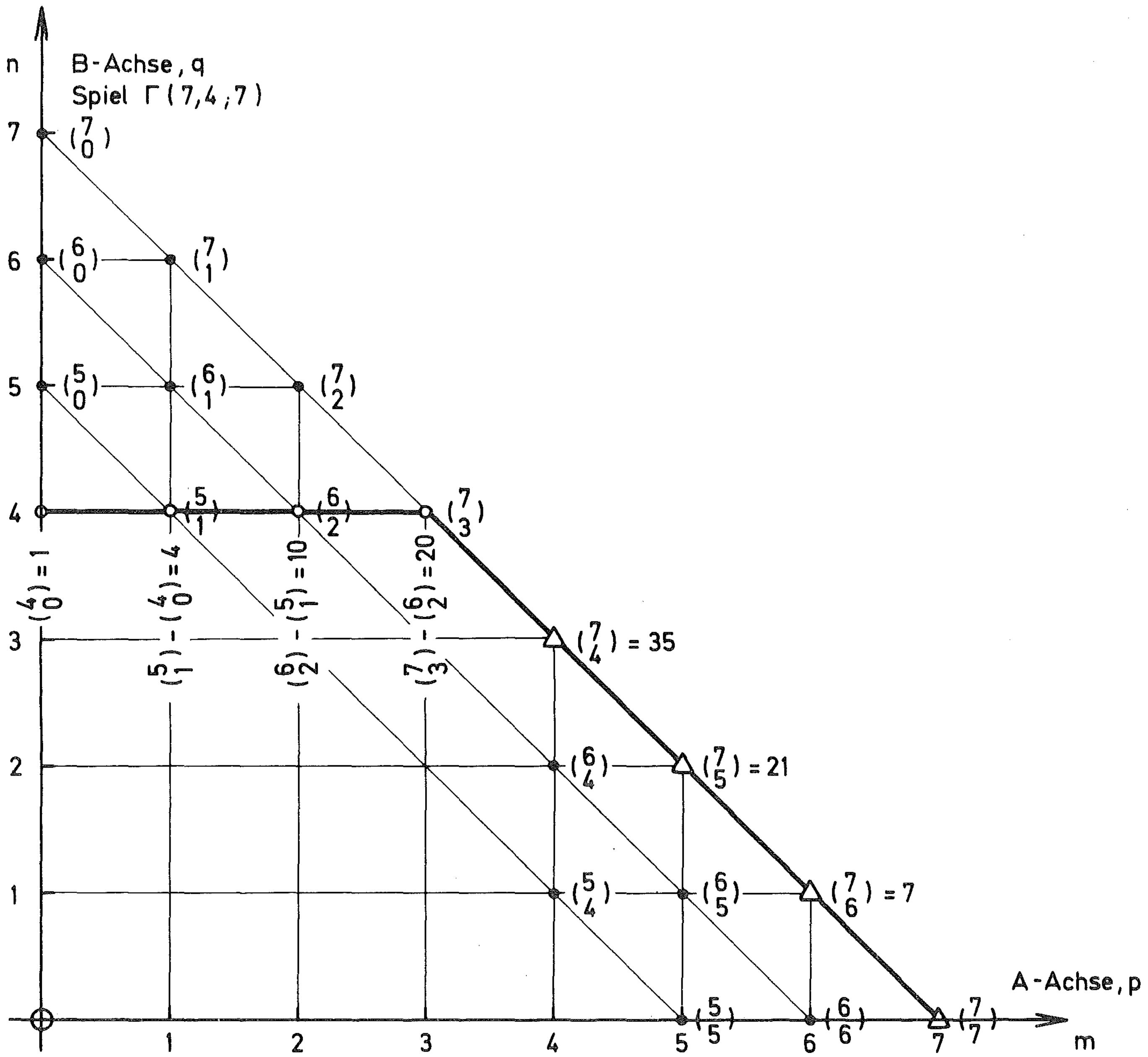

Abb. 5a Negative Binomial-Verteilung im Spiel $\Gamma(k, j; k)$

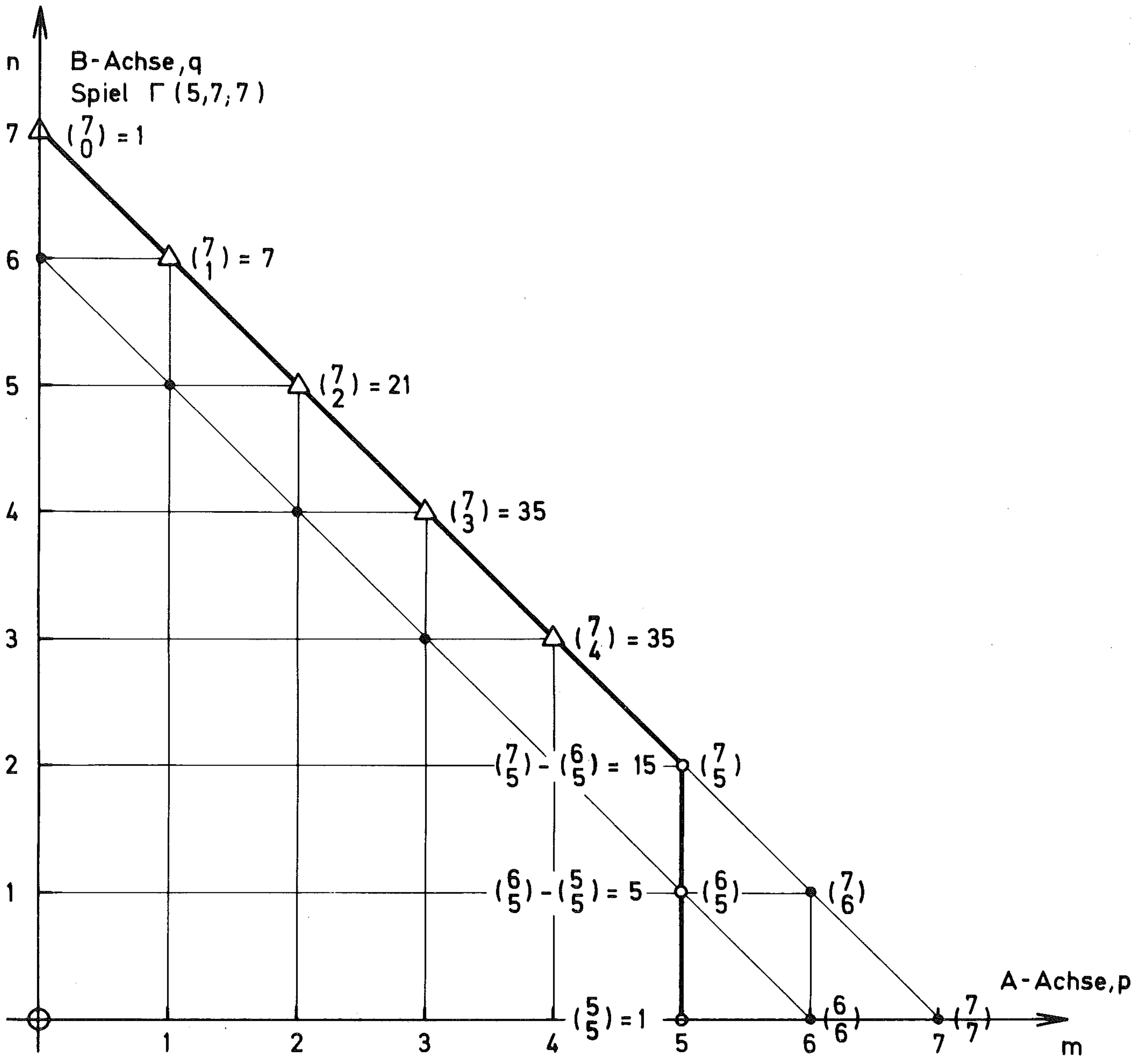

Abb. 5b Negative Binomial-Verteilung im Spiel $\Gamma(i,k;k)$

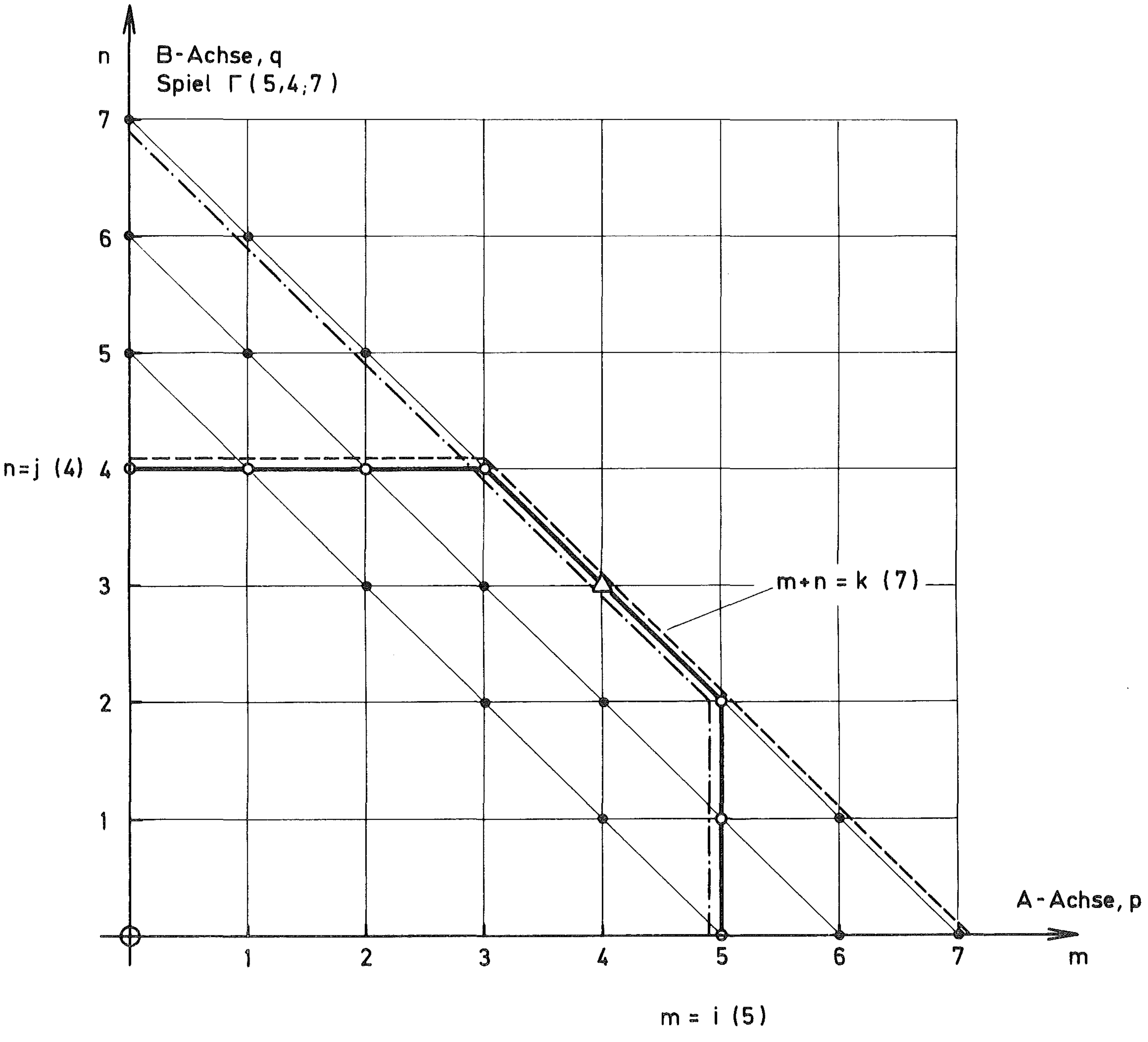

Abb.5c Negative Binomial-Verteilung im Spiel Γ(i,j;k)