

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

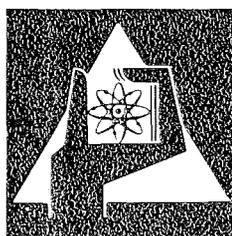
Dezember 1976

KFK 2324

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

**Instationäre Potentialströmung in komplexer
Geometrie am Beispiel von DWR-Blowdown
Strömungen**

U. Schumann



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2324

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Nukleare Sicherheit

Instationäre Potentialströmung in komplexer Geometrie am
Beispiel von DWR-Blowdown Strömungen

von

U. Schumann

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

Zusammenfassung

Unter Bezug auf DWR-Blowdown-Strömungen, insbesondere entsprechend den HDR-Experimenten, werden im Sinne einer Abschätzung inkompressible, einphasige, transiente Potentialströmungen in Strömungsröhren mit starren undurchlässigen Wänden betrachtet. Für beliebig geformte Röhren wird gezeigt, daß die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit durch die gewöhnliche Differentialgleichung von Riccati erfaßt wird, die für eine Reihe wichtiger Fälle analytisch integrierbar ist. Die Geschwindigkeits- und Druckfelder ergeben sich bei zeitunabhängigen Randbedingungen für alle Zeiten aus der Lösung von nur drei Laplace-Gleichungen. Wenn die Potentialströmung in einzelnen Röhren berechnet ist, kann daraus unter gewissen Voraussetzungen ohne Lösung zusätzlicher Differentialgleichungen auf das transiente und örtliche Verhalten in einer aus diesen Einzel-Röhren zusammengesetzten komplexen Geometrie geschlossen werden. Dies erlaubt die Behandlung dreidimensionaler Probleme durch stückweise ein- oder zweidimensionale Analyse.

Speziell wird die transiente Strömung im Übergang Ringraum-Blowdown-Stutzen sowohl eindimensional (analytisch) als auch zweidimensional (numerisch) und dreidimensional (durch Koppelung zweier zweidimensionaler Bereiche) untersucht. Die Rechnungen werden sowohl mit dem Differenzenverfahren unter Verwendung zyklischer Reduktion, als auch der Integral-Gleichungs-Methode, die dem Singularitäten-Verfahren verwandt ist, durchgeführt. Beide Methoden zeigen hierbei Vor- und Nachteile. Die Programme (LAPL) für die zweidimensionale Integral-Gleichungs-Methode werden im Anhang gelistet.

Die Zeit zur ungefähren Erreichung der Maximalgeschwindigkeit u_{\max} ist von der Größenordnung $[L+R_1 \ln (R_2/R_1)]/u_{\max}$ (L =Stutzen-Länge, R_1 =Stutzen-Radius, R_2 =Abstand zum unteren Plenum) und beträgt für HDR-Blowdown-Bedingungen ca. 10 msec. Das am Kernmantel wirkende Drehmoment wird zu 320 Mpm bei $L=1\text{m}$ berechnet. Für den abgewickelten Ringraum werden die Potential- und Stromlinien bestimmt. Sie eignen sich als orthogonales krummliniges Maschennetz für kompressible Strömungs-Simulationen.

TRANSIENT POTENTIAL FLOW IN COMPLEX GEOMETRY WITH APPLICATION TO
PWR-BLOWDOWN FLOWS

Summary

As an approximate evaluation of pressurized water reactor (PWR)-blowdown flows (in particular for the HDR experiments) we consider incompressible, one-phase, transient potential flow in flow ducts with rigid impermeable walls. For arbitrarily shaped ducts it is shown that the temporal variation of the velocity is described by the ordinary differential equation of Riccati which can be integrated analytically for a class of important cases. The velocity and pressure fields for time-independent boundary conditions are determined for all times by the solution of three Laplace equations only. If the potential flow is known for some individual ducts, it is possible under certain conditions to enumerate the temporal and spatial flow behavior in a complex duct composed of the single ducts without solving additional differential equations. This allows for the analysis of three-dimensional problems by piecewise analysis of one- and two-dimensional ducts.

In particular, we consider the transient flow through the downcomer and the blowdown-pipe in a pressurized water reactor, as expected in the HDR-blowdown experiments. The analysis is one-dimensional (analytically) as well as two-dimensional (numerically) and three-dimensional (by coupling two two-dimensional ducts). The computations are done by means of finite differences (using cyclic reduction) as well as by the integral equation method which corresponds to the singularity method. Both methods show advantages and disadvantages. The programs (LAPL) used for the two-dimensional integral equation method are listed in an appendix.

The time necessary to approximately reach the maximum velocity u_{\max} is of the order $[L+R_1 \ln(R_2/R_1)]/u_{\max}$ (L =pipe length, R_1 =pipe radius, R_2 =distance to the lower plenum); under HDR-blowdown conditions this time is about 10 msec. The bending moment acting on the core barrel is computed as 320 Mpm for $L=1m$. For the unwrapped downcomer the potential- and stream-lines are computed. They are suited as an orthogonal curvilinear mesh for compressible flow simulations.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
- Häufig verwendete Symbole	
1. Einleitung	1
1.1 Das physikalische Problem	1
1.2 Über Potentialströmungen	4
1.3 Über Anwendungen der Potentialströmungstheorie	5
2. Theorie instationärer Potentialströmungen in Röhren	6
2.1 Problemstellung und Randbedingungen	6
2.2 Separation der Variablen x und t	8
2.3 Impuls- und Energie-Gleichung und Bestimmung der Zeit-Funktion $V(t)$	8
2.4 Spezialfall: stationäre und instationäre Bernoulli-Gleichung	12
2.5 Bestimmung des Druckfeldes	13
2.6 Kopplung zweier Röhren	15
2.6.1 Problemstellung	15
2.6.2 Potential des zusammengesetzten Bereichs	16
2.6.3 Transientes Verhalten	18
2.6.4 Druckberechnung	19
3. Übersicht über numerische Methoden zur Lösung von Laplace-Gleichungen	21
4. Instationäre Potentialströmungen in speziellen Druckwasser-Reaktor-Geometrien	24
4.1 Ein analytisches Beispiel: eindimensionale Betrachtung des Übergangs Ringraum-Stutzen für HDR-Blowdown-Bedingungen	24
4.1.1 Das geometrische Modell	24
4.1.2 Strömungspotential	26
4.1.3 Transientes Verhalten	28
4.1.4 Druckberechnung	30
4.1.5 Diskussion für HDR-Blowdown-Bedingungen	33

	Seite
4.2 Zweidimensionale Finit-Differenzen-Lösung für den Stutzen-Bereich	35
4.2.1 Geometrie und Randbedingungen	35
4.2.2 Lösung mittels finiter Differenzen und zyklischer Reduktion	36
4.2.3 Transientes Verhalten	40
4.2.4 Geschwindigkeits- und Druckfeld	40
4.3 Zweidimensionaler abgewickelter Ringraum, Original-Problem, Lösung mittels Integralmethode	47
4.3.1 Geometrie und Aufgabenstellung	47
4.3.2 Direkte Potentialströmungs-Berechnung mit der Integralmethode	48
4.4 Zweidimensionaler abgewickelter Ringraum, inverses Problem, Lösung mittels Integral-Methode und Differenzen-Verfahren	59
4.4.1 Grundlagen und Randbedingungen	59
4.4.2 Lösung mittels Integral-Methode	62
4.4.3 Lösung mittels finiter Differenzen und zyklischer Reduktion	71
4.4.4 Zeitkonstante des Ringraums	73
4.5 Dreidimensionale Analyse durch Kopplung der zweidimensionalen Ringraum- und Stutzen-Modelle	74
4.5.1 Geometrie und Randbedingungen	74
4.5.2 Transientes Verhalten	75
4.5.3 Druckverteilung und resultierende Kräfte bzw. Biegemomente	75
5. Zusammenfassung	80
Literatur	83
Anhang: LAPL, PL/1 Unterprogramme zur Berechnung zwei-dimensionaler Potentialströmungen nach der Integral-Methode	87

Verzeichnis der Abbildungen

		<u>Seite</u>
<u>Abb.1</u>	Schnitt durch den HDR-Druckbehälter mit dem für Blowdown-Experimente vorgesehenen Kernmantel.	2
<u>Abb.2</u>	Skizze der Röhre S.	6
<u>Abb.3</u>	Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.	11
<u>Abb.4</u>	Skizze des zusammengesetzten Strömungskanals.	15
<u>Abb.5</u>	Skizze des abgewickelten Ringraums.	25
<u>Abb.6</u>	Skizze des eindimensional erfaßten Ringraums.	25
<u>Abb.7</u>	Eindimensionaler Übergang Ringraum-Stutzen.	26
<u>Abb.8</u>	Druckverlauf im Ringraum und Stutzen für verschiedene Zeiten bei eindimensionaler Rechnung.	32
<u>Abb.9</u>	Zeitkonstante τ als Funktion der Stutzen-Rohrlänge L gemäß eindimensionaler Rechnung.	33
<u>Abb.10</u>	Zweidimensionales Stutzen-Geometrie-Modell.	35
<u>Abb.11</u>	Maschennetz für zweidimensionale Stutzen-Rechnung.	37
<u>Abb.12</u>	Zeitkonstante der Stutzen-Strömung gemäß zweidimensionaler Rechnung.	41
<u>Abb.13</u>	Druckverteilung im Bereich des Übergangs Stutzen-Ringraum zur Zeit $t \gtrsim 0$ (ruhes Fluid).	43
<u>Abb.14</u>	Druck- und Geschwindigkeitsverteilung für $t \rightarrow \infty$.	44

		Seite
<u>Abb.15</u>	Wanddruck-Verlauf für verschiedene Zeiten im Übergang Ringraum-Stützen.	45
<u>Abb.16</u>	Maximale Druckdifferenz über den Kernmantel als Funktion der Bruchstützen-Länge L für $t \geq 0$ und $t \rightarrow \infty$.	46
<u>Abb.17</u>	Skizze des zweidimensionalen Ringraum-Modells.	47
<u>Abb.18</u>	Randbedingungen des Original-Ringraum-Problems.	50
<u>Abb.19</u>	Potential- und Stromlinien im Ringraum aufgrund der reinen Integral-Methoden-Lösung.	51
<u>Abb.20</u>	Quellen- und Senken-Anordnung der analytischen Näherungslösung.	54
<u>Abb.21</u>	Potential- und Stromlinien im Ringraum aufgrund allein der analytischen Näherung.	56
<u>Abb.22</u>	Potential- und Stromlinien im Ringraum gemäß Integral-Methoden.Lösung plus analytischer Näherung.	57
<u>Abb.23</u>	Randbedingungen des inversen Ringraum-Problems.	60
<u>Abb.24</u>	Linien $x=\text{const}$ und $y=\text{const}$ in $\varphi - \psi$ -Koordinaten.	63
<u>Abb.25</u>	Das mit der Integral-Methode aus der inversen Formulierung berechnete Maschennetz. a) $N=52$, b) $N=104$.	64
<u>Abb.26</u>	Das mit der Integral-Methode aus der inversen Formulierung berechnete Maschennetz bei Erfassung der Eck-Singularitäten. a) $N=52$, b) $N=104$.	67
<u>Abb.27</u>	Das mit der Integral-Methode iterativ bestimmte Maschennetz. a) $N=52$, b) $N=104$.	69
<u>Abb.28</u>	Das mit dem Differenzen-Verfahren direkt bestimmte Maschennetz.	72

		Seite
<u>Abb.29</u>	Zeitkonstante τ der gekoppelten Ringraum-Stutzen-Strömung als Funktion der Stutzen-Länge L.	76
<u>Abb.30</u>	Normierte maximale Quer-Kräfte K und Biegemomente M am Ringmantel als Funktion der Stutzenlänge L.	78

Häufig verwendete Symbole

A	Einström-Fläche
A	Abstand Stutzenachse-Kernmantel-Einspannung
B	Ausström-Fläche
B	Halber Kernmantel-Umfang
C	Verbindungs-Fläche zweier Strom-Röhren
E	kinetische Energie
F	Fläche
g	=grad φ an bestimmten Stellen
H	Länge des Kernmantels
L	Stutzen-Länge
N	Anzahl der diskreten Intervalle
O	Oberfläche der Strom-Röhre
p	Druck
q	Staudruck
R	Radius
R_1	effektiver Stutzen-Radius
R_2	effektiver Radius, Abstand Stutzen - unteres Plenum
s	Spaltbreite des Ringraumes
S	Strom-Röhre, innerer Bereich
t	Zeit
\underline{u}	Geschwindigkeits-Vektor
V	Zeitfunktion des Geschwindigkeits-Feldes
W	Stromröhren-Wand
\underline{x}	Orts-Vektor
λ	inverse Zeitkonstante
φ	Geschwindigkeits-Potential

ψ	Stromfunktion
τ	Zeitkonstante
ρ	Dichte

Indices

A	Zur Einström-Fläche gehörig
B	Zur Ausström-Fläche gehörig
C	Zur Zwischenfläche gehörig
1	Zum Bereich S_1 gehörig
2	Zum Bereich S_2 gehörig

1. Einleitung

1.1 Das physikalische Problem

Wir betrachten die Strömung inkompressibler einphasiger Fluide in Strömungskanälen oder Röhren mit gekrümmten Wänden und jeweils einem Eintritts- und Austrittsquerschnitt. Die Wände seien starr und undurchlässig.

Insbesondere interessieren wir uns für die Strömung bei starker Beschleunigung, beispielsweise aus der Ruhe heraus bei plötzlich auftretenden treibenden Druckgradienten. Wenn die auftretenden Beschleunigungen groß genug sind, sind die Zähigkeitskräfte vernachlässigbar gegenüber den Trägheitskräften (abgesehen von den wandnahen Bereichen). In diesem Fall kann man die Strömung als Potentialströmung betrachten.

Die Annahme eines inkompressiblen Fluids wird verwendet wegen der sich daraus ergebenden mathematischen Vereinfachung des Problems. Diese Annahme ist zulässig, wenn die Geschwindigkeiten klein sind gegenüber der Schallgeschwindigkeit. Zugleich müssen die charakteristischen Zeiten der Bewegung groß sein gegenüber der Laufzeit einer Druckwelle ($=$ größte Länge/Schallgeschwindigkeit) in dem System, da nur dann die Einzelheiten einer Druckwellenausbreitung vernachlässigt werden können.

Die vorliegende Studie resultiert aus Untersuchungen, die sich mit der Beschleunigungsphase des Fluids in einem Reaktor-Druckbehälter bei einem Blowdown nach dem Bruch eines Kaltwasser-Strangs befassen (siehe Abb.1). Insbesondere geht es um die Strömungsform, die Dauer der Beschleunigungsphase die resultierenden Druckverteilungen und Kräfte, sowie die maximalen Geschwindigkeiten. Offensichtlich ist hier die Voraussetzung eines sich inkompressibel verhaltenden einphasigen Fluids fragwürdig. Tatsächlich wird man diese Probleme mit Rechenprogrammen angehen müssen, die die Kompressibilität und damit die Druckwellenausbreitung sowie den Phasenwechsel am Bruchstutzen erfassen. Derartige Rechnungen in der vorliegenden komplizierten dreidimensionalen Geometrie sind aber sehr aufwendig. Zudem ist das Ergebnis einer derartigen Rechnung zunächst ein Zahlenberg; eine physikalisch durchsichtige Analyse ist schwierig. Aus diesem Grunde wird hier auch dieses Problem als Potentialströmung eines inkompressiblen Fluids betrachtet. Daß diese Vorgehensweise nicht so ganz abwegig ist, ergibt sich zudem aus folgenden Überlegungen:

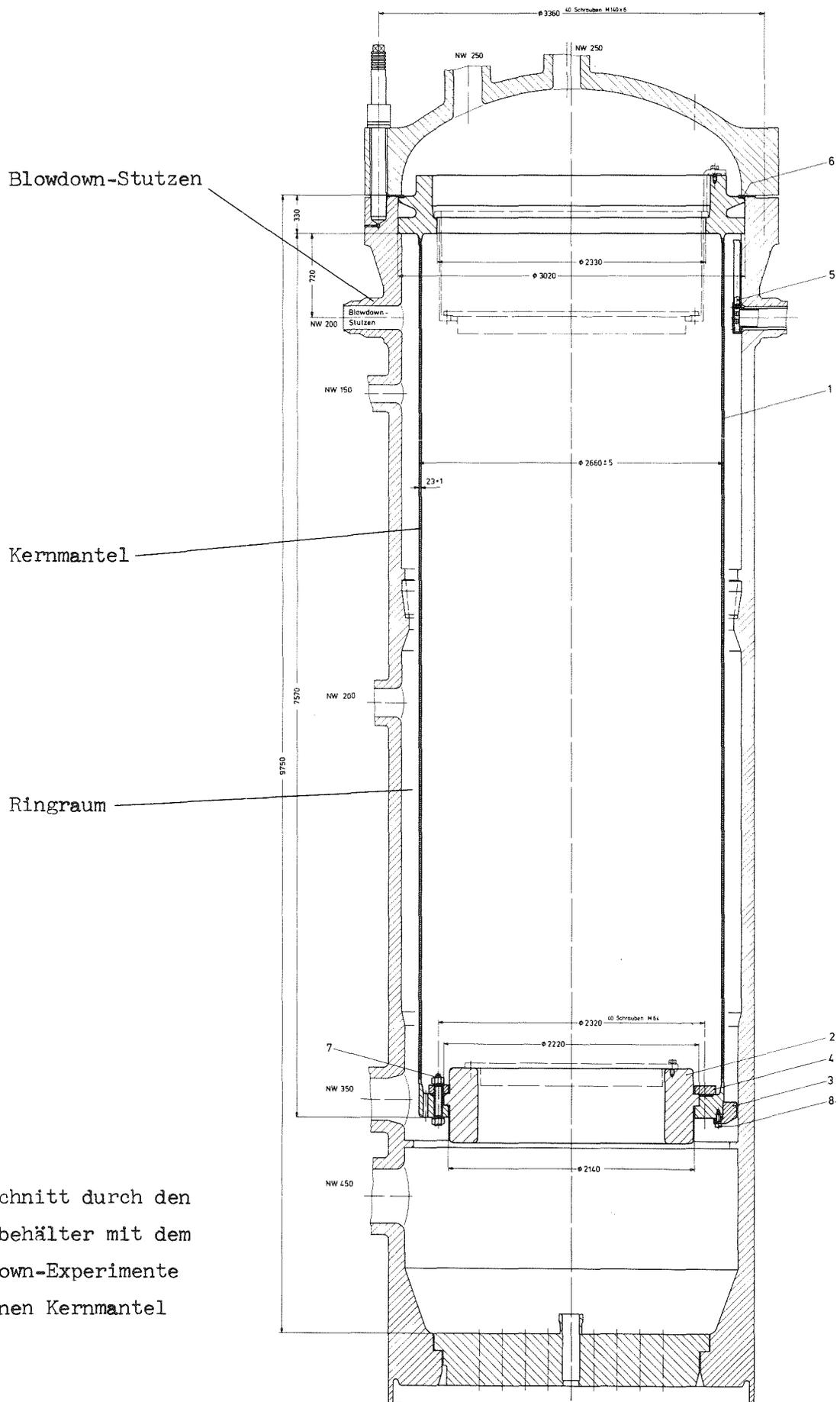


Abb. 1 Schnitt durch den HDR-Druckbehälter mit dem für Blowdown-Experimente vorgesehenen Kernmantel

Wir werden später sehen, daß die charakteristische Beschleunigungszeit fast allein von der Länge des verbleibenden Rohrstutzens am Druckbehälter abhängt. Für $L=1m$ beträgt sie ca. 10msec. Die Laufzeit der Druckentlastungswelle für diesen Bereich beträgt aber bei einer Schallgeschwindigkeit von 1000 m/s nur 1 msec. Die maximalen Geschwindigkeiten liegen zwischen 70 und 150 m/s und sind damit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit. Im Druckbehälter-Inneren sind die Geschwindigkeiten aufgrund der größeren Querschnitte nochmals um Größenordnungen kleiner. Weiterhin wurde an anderen Stellen, z.B. in [8], festgestellt, daß sich die (zweiphasige) Ausström-Rate aus einem Druckbehälter bei unterkühltem (nicht siedenden) Ausgangszustand recht gut mit der einphasigen Bernoulli-Gleichung erfassen läßt, wenn als Druck an der Rohrbruchstelle der kritische Druck (Laval-Druck) statt des niedrigeren Außendrucks angesetzt wird.

Damit soll nicht gesagt werden, daß man auf eine Analyse, die die Kompressibilität und Zweiphasigkeit berücksichtigt, hier ganz verzichten kann. Unter gewissen Vorbehalten sind jedoch Potentialströmungsrechnungen für inkompressible Fluide hier zumindest qualitativ für die Beschleunigungsphase und die quasistationäre einphasige Ausströmphase aussagefähig. Insgesamt kann man bei dem Blowdown-Problem folgende Phasen unterscheiden [9]: a) eine Wellen-Ausbreitungsphase, b) eine Beschleunigungsphase, c) eine quasistationäre unterkühlte Strömungsphase und d) eine zweiphasige Strömungsform. Mit der vorliegenden Studie erfassen wir nur die Phasen b) und c). Man kann annehmen, daß bei Nichterfassung der Phase a) sich zwar Fehler im zeitlichen Ablauf ergeben, daß aber die späteren Phasen (b und c) zumindest ihrer Größenordnung nach richtig wiedergegeben werden. Da bei Annahme einer inkompressiblen Strömungsform die Druckwellen sich unendlich schnell ausbreiten, werden in diesem Modell die Beschleunigungen und die resultierenden Kräfte vermutlich eher zu groß als zu klein berechnet. Die hier gewonnenen Ergebnisse sollten also bezüglich der Sicherheit der Reaktor-Anlage zumindest konservativ sein.

Die speziellen geometrischen Maße, die in den Anwendungen der zu entwickelnden Theorie letztlich eingesetzt werden, entsprechen den Bedingungen des HDR-Blowdown-Experiments [9].

1.2 Über Potentialströmungen

Im Bereich der Hydrodynamik gehört die Potentialströmung zu den am besten verstandenen Spezialfällen. Ihre Grundlagen wurden sehr weitgehend im 19. Jahrhundert erarbeitet. Die wichtigsten Ergebnisse finden sich in den Standardwerken [1-3].

Eine Potentialströmung ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihr das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x})$ rotationsfrei ist und sich also ausdrücken läßt durch

$$\underline{u}(\underline{x}) = - \text{grad } \varphi(\underline{x}) \quad (1-1)$$

mit $\varphi(\underline{x})$ Strömungspotential. Für ein inkompressibles Fluid muß gelten

$$\text{div } \underline{u} = 0 \quad (1-2)$$

und also erhalten wir für das Potential die Bedingung

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = 0 \quad (1-3)$$

Zusammen mit geeigneten Randbedingungen ist damit das Potential φ festgelegt und bei einfach zusammenhängenden Bereichen, auf die wir uns hier beschränken, auch tatsächlich eindeutig bestimmt [3]. Gl.(1-3) läßt sich in vielen Fällen analytisch integrieren. Diese analytische Lösung ist jedoch oft schwer zu finden oder aufwendig in der Auswertung. Man ist daher gezwungen, numerische Methoden zur Lösung zu verwenden. Mit der Entwicklung der elektronischen Rechner und entsprechender numerischer Methoden [10] hat die Potentialströmung eine Renaissance erfahren.

Dabei erweist sich die an sich seit langem bekannte Theorie der Potentialströmungen zuweilen als schwerfällig. In dieser Arbeit werden in einem theoretischen Teil zunächst einige für praktische Rechnungen recht hilfreiche Aussagen abgeleitet, die der genannten Literatur [1-3] nicht unmittelbar entnommen werden konnten. Hierzu gehören das Verhalten instationärer Potentialströmungen allgemein und insbesondere deren Verhalten in gekoppelten Strömungskanälen. Selbstverständlich kann nicht behauptet werden, daß die folgende Theorie nicht bereits an anderer Stelle vorliegt; dazu ist die Literatur zu diesem Gebiet zu umfangreich.

1.3 Über Anwendungen der Potentialströmungstheorie

Es erscheint bemerkenswert, daß selbst in jüngster Zeit analytische Lösungen der Potentialgleichung (1-3) entwickelt wurden [5,6]. Es handelt sich hier um Strömungen in komplizierter dreidimensionaler Reaktor-Geometrie; allerdings für stationäre Strömung. Zugunsten der Erfassung der komplexen Geometrie-Effekte verzichtet man hier zuweilen gern auf die Erfassung aller physikalischen Einzelphänomene wie z.B. Zähigkeit, Turbulenz u.a.

Ein zweiter wichtiger Bereich ist der der krummlinigen Koordinatennetze. Man hat erkannt, daß die Potential- und Stromlinien, die für zweidimensionale Probleme ein orthogonales Netz aus viereckigen Maschen bilden, eine gute Basis für die Untersuchung realer Strömungen in komplizierter Geometrie mittels finite Differenzen sind [10-12].

Ein Ergebnis dieser Studie wird ein orthogonales Maschennetz für den Ringraum im Reaktor-Druckbehälter ("down comer") sein, das als Basis einer kompressiblen Analyse benutzt werden soll. In diesem Zusammenhang werden wir insbesondere auf das inverse Problem eingehen, bei dem man anstelle des Potentials $\varphi(x,y)$ und der Stromfunktion $\psi(x,y)$ die Umkehrung $x(\varphi, \psi)$ und $y(\varphi, \psi)$ direkt berechnet [10, 12-13]. Diese Technik ist auch bei dreidimensionalen Problemen anwendbar [7,26], führt dort aber auf nichtlineare Gleichungen.

2. Theorie instationärer Potentialströmungen in Röhren

2.1 Problemstellung und Randbedingungen

Der betrachtete Strömungsbereich sei von folgender Art:

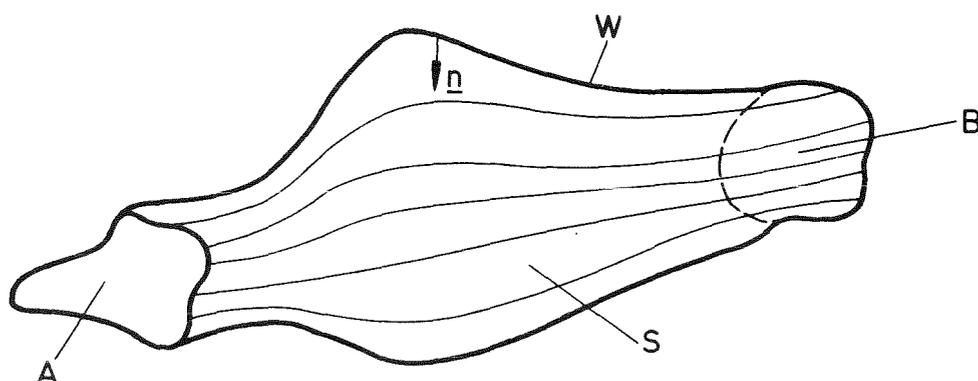


Abb.2: Skizze der Röhre S

Es handelt sich um einen beliebig geformten, einfach zusammenhängenden Strömungskanal, eine Röhre mit fester undurchlässiger Wand W und zwei Öffnungsquerschnitten A und B , die nicht notwendigerweise eben sein müssen. Das Innere S der Röhre sei mit inkompressiblem Fluid der konstanten Dichte ρ gefüllt. Die Querschnittsflächenbeträge bei A und B sind F_A und F_B . An jedem Ort der Oberfläche $O = A \cup B \cup W$ der Röhre sei der Normalenvektor \underline{n} als die nach innen weisende Flächennormale definiert.

Die Oberflächen A und B sollen an den Schnittkurven mit der Wandfläche W mit der Wandfläche einen rechten Winkel bilden. D.h., hier ist $\underline{n}_A \cdot \underline{n}_W = 0$ bzw. $\underline{n}_B \cdot \underline{n}_W = 0$ wobei $\underline{n}_A, \underline{n}_B, \underline{n}_W$ die zu den Flächen A, B und W gehörenden Normalen sind. Knicke in der Wand W sind erlaubt. Bei A und B herrschen die über die jeweiligen Querschnitte konstanten Drücke $p_A(t)$ und $p_B(t)$. In der Regel unterstellen wir, daß das Fluid zur Zeit $t=0$ in Ruhe sei. Die Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x})$ lauten:

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{für} \quad \underline{x} \in W \quad (2-1)$$

An den Öffnungsflächen schreiben wir vor, daß der Geschwindigkeitsvektor \underline{u} senkrecht auf der Öffnungsfläche stehe, also

$$\underline{u} \times \underline{n} = 0 \quad \text{für } \underline{x} \in A \cup B, \quad (2-2)$$

d.h. die Tangentialgeschwindigkeiten sind hier null. Dies ist konsistent mit der Rechtwinkligkeit der Flächen A und W bzw. B und W. Für das Potential folgt mit (1-1), daß der Gradient von φ entlang der Öffnungsfläche null ist. Hieraus folgen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_A = \text{const für } \underline{x} \in A, \\ \varphi &= \varphi_B = \text{const für } \underline{x} \in B. \end{aligned} \quad (2-3)$$

Eine Alternative wäre es hier vorzuschreiben

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{u} &= u_A \quad \underline{x} \in A \\ \underline{n} \cdot \underline{u} &= u_B \quad \underline{x} \in B \end{aligned} \quad (2-4)$$

Dies entspräche Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\underline{n} \cdot \text{grad } \varphi &= u_A \quad \underline{x} \in A \\ -\underline{n} \cdot \text{grad } \varphi &= u_B \quad \underline{x} \in B \end{aligned} \quad (2-5)$$

Letzteres ist jedoch aus zwei Gründen unpraktisch:

- a) Neumann-Randbedingungen allein legen das Potential höchstens bis auf eine additive Konstante fest.
- b) Die Parameter u_A und u_B dürfen aus Kontinuitätsgründen nicht beliebig gewählt werden; vielmehr muß $u_A F_A = u_B F_B$ sein und sie müssen bekannte Funktionen der Zeit sein.

Zudem entsprechen die Randbedingungen (2-3) den Druckrandbedingungen, was sich noch als vorteilhaft erweisen wird. Wir verwenden hier daher die durch Gl.(2-1) und (2-2) gegebenen Randbedingungen.

2.2 Separation der Variablen \underline{x} und t

Bei Gl.(1-1) wäre $\underline{\varphi}$ wie \underline{u} zeitabhängig und insbesondere φ_A und φ_B gemäß (2-3) auf dem Rand müßten bekannte Funktionen der Zeit sein. Tatsächlich aber sind die Randbedingungen (2-1) und (2-2) von der Zeit unabhängig. Dies erlaubt die Separation

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = -V(t) \text{ grad } \varphi(\underline{x}) \quad (2-6)$$

Das Strompotential φ ist allein vom Ort \underline{x} und die noch zu bestimmende Funktion $V(t)$ allein von der Zeit abhängig. (Falls V eine Funktion von \underline{x} wäre, dann wäre nicht garantiert, daß stets $\text{rot } \underline{u}=0$.) Auch hier folgt aus $\text{div } \underline{u}(\underline{x}, t)=0$, daß gilt

$$\text{div grad } \varphi(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} \in S \quad (2-7)$$

$$\underline{n} \cdot \text{grad } \varphi(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} \in W \quad (2-8)$$

$$\varphi = \varphi_A = 1 \quad \underline{x} \in A \quad (2-9)$$

$$\varphi = \varphi_B = 0 \quad \underline{x} \in B$$

Die Wahl der Werte $\varphi_A=1$ und $\varphi_B=0$ ist willkürlich; diese Werte schränken lediglich die möglichen Werte von $V(t)$ ein.

2.3 Impuls- und Energiegleichung und Bestimmung der Zeitfunktion $V(t)$

Die Navier-Stokes-Gleichung lautet für verschwindende Zähigkeit:

$$\rho \left[\dot{\underline{u}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] = - \text{grad } p \quad (2-10)$$

Hierbei bezeichnet der Punkt die partielle Zeitableitung. Allgemein gilt die Identität [2]

$$\rho (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \text{grad } E - \rho \underline{u} \times \text{rot } \underline{u} \quad (2-11)$$

mit der kinetischen Energie

$$E = \frac{1}{2} \rho \underline{u} \cdot \underline{u} \quad (2-12)$$

Wegen $\text{rot } \underline{u} = 0$ folgt die Euler-Gleichung

$$\rho \dot{\underline{u}} = - \text{grad} (p + E) \quad (2-13)$$

Die Summe $p+E$ bezeichnet man als Staudruck q :

$$q = p + E. \quad (2-14)$$

Wenn wir beide Seiten von Gl.(2-13) skalar mit \underline{u} multiplizieren erhalten wir wegen

$$\rho \underline{u} \cdot \dot{\underline{u}} = \dot{E}$$

und

$$\begin{aligned} \text{div} [\underline{u} q] &= q \text{div } \underline{u} + \underline{u} \cdot \text{grad } q \\ &= \underline{u} \cdot \text{grad } q \end{aligned}$$

die Energiegleichung

$$\dot{E} = - \text{div} [\underline{u} (p+E)] \quad (2-15)$$

Integrieren wir diese Gleichung über die Röhre S und beachten den Integralsatz von Gauß, so folgt:

$$\iiint_S \dot{E} \, dS = \iint_{A \cup B \cup W} \underline{u} \cdot \underline{n} (E+p) \, dO \quad (2-16)$$

Beachten wir $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ für $\underline{x} \in W$ und den Ansatz Gl.(2-6) so folgt nach Division durch V (wobei wir die triviale Lösung $V=0$ ausschließen):

$$M \dot{V} + K V^2 = P \quad (2-17)$$

mit

$$M = \rho \iiint_S (\text{grad } \varphi)^2 \, dS \quad (2-18)$$

$$K = \rho \iint_{A \cup B} \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 \underline{n} \cdot \text{grad } \varphi \, dO \quad (2-19)$$

$$P = - \iint_{A \cup B} p(\underline{x}, t) \underline{n} \cdot \text{grad } \varphi(\underline{x}) \, dO \quad (2-20)$$

Aus dem Greenschen Integralsatz [2,3] folgt für M:

$$M = - \rho \iint_{A \cup B} \varphi \, \underline{n} \cdot \text{grad} \varphi \, dO \quad (2-18)$$

Wir interpretieren M als die "Trägheitslänge", K als effektiven Masse-Gradienten und P als effektive Kraft.

Gl.(2-17) hat die Form der Differentialgleichung von Riccati [15]. Für ein spezielles Potentialströmungsproblem wurde dieser Differentialgleichungstyp auch von Krieg [27] gefunden. Falls $P = \text{const}$ ist (zeitunabhängige Druck-Randbedingung) und $P \cdot K \geq 0$ ist (Strömung in einem konvergierenden Strömungskanal), hat sie die Lösung

$$V(t) = \left(\frac{P}{K} \right)^{1/2} \frac{A - e^{-\lambda t}}{A + e^{-\lambda t}} \quad (2-21)$$

mit

$$A = \frac{(P/K)^{1/2} + V_0}{(P/K)^{1/2} - V_0}$$

und

$$V_0 \equiv V(t=0)$$

sowie

$$\lambda = 2 \left(\frac{P \cdot K}{M^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\tau} \quad (2-22)$$

Falls $V_0 = 0$ ist, d.h. bei Beschleunigung aus der Ruhe heraus, ist $A=1$. In diesem Fall läßt sich Gl.(2-21) schreiben als

$$V(t) = V_\infty \tanh(\lambda t/2) \quad (2-23)$$

mit der stationären Lösung

$$V_\infty = V(t = \infty) = \left(\frac{P}{K} \right)^{1/2} \quad (2-24)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Abb.3 dargestellt.

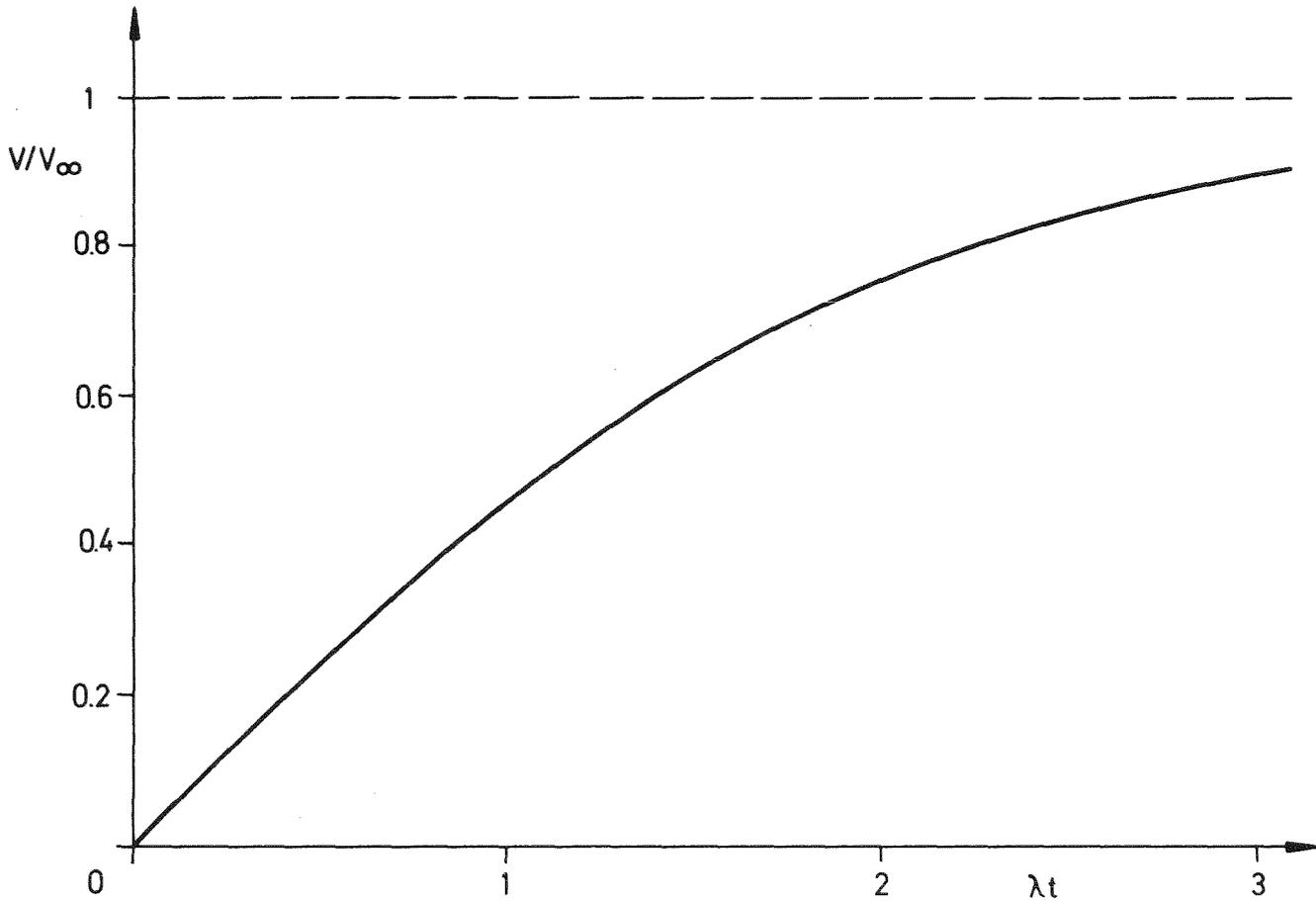


Abb.3: Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Die Halbwertszeit τ^* ergibt sich aus

$$V(t) = \frac{1}{2} V_{\infty}$$

zu
$$\tau^* = \ln(3)/\lambda \quad (2-25)$$

Wegen $\ln(3) = 1,099$ ist sie etwa gleich der Zeitkonstanten τ gemäß (2-22).

Wir sehen, zur Berechnung von $V(t)$ benötigen wir allein die Kenntnis von φ und $\text{grad}\varphi$ auf der Oberfläche 0 des Strömungskanals S.

2.4 Spezialfall: Stationäre und instationäre Bernoulli-Gleichung

Die bekannten Bernoulli-Gleichungen erweisen sich als Spezialfall obiger Theorie für den Fall, daß $\text{grad } \varphi$ bzw. die Geschwindigkeit \underline{u} auf A und B jeweils konstant sind. Mit den Querschnittsflächen F_A, F_B , den Geschwindigkeiten u_A, u_B und den Potentialgradienten $g_A = \text{grad } \varphi_A$ und $g_B = \text{grad } \varphi_B$ folgt aus Gl.(2-18 bis 2-20):

$$\begin{aligned} M &= S (\varphi_A g_A F_A - \varphi_B g_B F_B) \\ K &= \frac{1}{2} S (g_A^3 F_A - g_B^3 F_B) \\ P &= - (p_A g_A F_A - p_B g_B F_B) \end{aligned} \quad (2-26)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$u_A F_A = u_B F_B \equiv u F$$

sowie aus (2-6)

$$g_A = -u_A / V, \quad g_B = -u_B / V$$

Damit wird aus Gl.2-17 nach Division von uFV :

$$S (\varphi_A - \varphi_B) \dot{V} + S (u_A^2 - u_B^2) / 2 = p_B - p_A$$

bzw. mit

$$\dot{V} (\varphi_A - \varphi_B) = \int_A^B \dot{V} \text{grad } \varphi \cdot d\underline{s} = - \int_A^B \underline{\dot{u}} \cdot d\underline{s}$$

die bekannte Gleichung nach Bernoulli:

$$- \int_A^B S \underline{\dot{u}} \cdot d\underline{s} + \frac{1}{2} S (u_A^2 - u_B^2) = p_B - p_A \quad (2-27)$$

Wir sehen also, Gl.(2-17) ist eine Verallgemeinerung der Bernoulli-Gleichung (2-27).

2.5 Bestimmung des Druckfeldes

Wegen $\text{div } \underline{u} = 0$ und $\rho = \text{const}$ folgt aus der Euler-Gleichung Gl.(2-13):

$$\text{div grad } (p + E) = 0 \quad (2-28)$$

Hieraus folgt jedoch nicht $p+E=\text{const}$ (stationärer Bernoulli), da p und E unterschiedlichen Randbedingungen bei A und B genügen. Die Randbedingungen für den Druck lauten:

$$\begin{aligned} p(\underline{x}, t) &= p_A(t) & \underline{x} \in A \\ p(\underline{x}, t) &= p_B(t) & \underline{x} \in B \end{aligned} \quad (2-29)$$

sowie

$$\underline{n} \cdot \text{grad } p(\underline{x}, t) = \underline{n} \cdot \text{grad } E(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in W \quad (2-30)$$

Gl.(2-30) folgt aus $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ und Gl.2-10 bzw. (2-13). Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit von E scheint hier Gl.(2-28) für jeden Zeitpunkt neu zu lösen zu sein. Tatsächlich genügt es, bei zeitlich konstanten Werten von p_A und p_B , zwei Laplace-Gleichungen zu lösen:

Hierzu spalten wir den Druck auf:

$$p(\underline{x}, t) = p'(\underline{x}, t) + \rho V^2(t) p''(\underline{x}) \quad (2-31a)$$

und weiter

$$p''(\underline{x}) = q''(\underline{x}) - \frac{1}{2} [\text{grad } \varphi(\underline{x})]^2 \quad (2-31b)$$

mit

$$\text{div grad } p'(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{div grad } q''(\underline{x}) = 0 \quad (2-32)$$

$$p' = p_A(t) \quad \underline{x} \in A$$

$$p' = p_B(t) \quad \underline{x} \in B$$

$$\underline{n} \cdot \text{grad } p' = 0 \quad \underline{x} \in W$$

$$q'' = \frac{1}{2} [\text{grad } \varphi]^2, \quad \underline{x} \in A$$

$$q'' = \frac{1}{2} [\text{grad } \varphi]^2, \quad \underline{x} \in B$$

$$\underline{n} \cdot \text{grad } q'' = 0, \quad \underline{x} \in W$$

Hierbei ist p' der sich im ruhenden Fluid einstellende Druck. Falls p_A und p_B konstant sind, genügt es, die Laplace-Gleichung nur einmal zu lösen. Der Anteil p'' beschreibt die Druckänderung infolge Änderung der kinetischen Energie. Bei bekanntem Potential $\varphi(\underline{x})$ ergibt auch er sich aus der einmaligen Lösung einer Laplace-Gleichung.

Insgesamt ist das Strömungsfeld und das Druckfeld bei zeitlich konstanten Randbedingungen also durch die Lösung nur dreier Laplace-Gleichungen (Gl.2-7 und 2-32) bestimmt.

Wenn zusätzlich vorausgesetzt werden kann, daß die Geschwindigkeit über die Querschnitte nicht nur konstante Richtung sondern auch einen konstanten Betrag aufweist, so daß

$$\frac{1}{2} \rho [\text{grad } \varphi]^2 = \begin{cases} E_A = \text{const} & \underline{x} \in A \\ E_B = \text{const} & \underline{x} \in B, \end{cases} \quad (2-33)$$

dann sind die Randbedingungen für p' und q'' denen für φ ähnlich und wir können den Druck als lineare Funktion des Potentials darstellen:

$$p(\underline{x}, t) = (p_A - p_B) \varphi(\underline{x}) + p_B + v^2(t) \left[(E_A - E_B) \varphi + E_B - \frac{1}{2} \rho (\text{grad } \varphi)^2 \right] \quad (2-34)$$

Wir überzeugen uns durch Einsetzen dieser Formel in Gl.(2-28) mit $E = \frac{1}{2} \rho v^2 [\text{grad } \varphi]^2$ leicht von der Richtigkeit.

Hier genügt also die Lösung allein einer Laplace-Gleichung für das Potential, um daraus $\underline{u}(\underline{x}, t)$ und $p(\underline{x}, t)$ für alle Zeiten zu berechnen.

2.6 Kopplung zweier Röhren

2.6.1 Problemdarstellung

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Potential-Strömungsfeld in einem aus zwei Teilen S_1 und S_2 zusammengesetzten Strömungskanal.

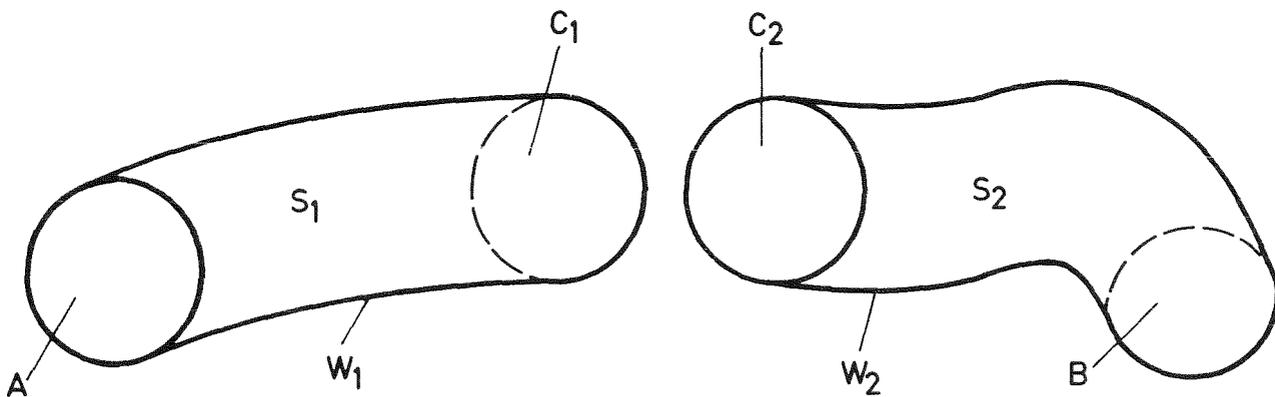


Abb.4: Skizze des zusammengesetzten Strömungskanals

Die beiden Teile seien so zusammengesetzt, daß die Öffnungsflächen C_1 und C_2 zusammenfallen ($C=C_1=C_2$). Wir unterstellen, daß die Potentialströmung in jedem der beiden Teilbereiche für sich mit vorhandenen Methoden berechnet werden kann. Hier wird untersucht, wie aus den Einzellösungen für die beiden Teilbereiche auf die Lösung für den gekoppelten Strömungskanal $S=S_1 \cup S_2$ geschlossen werden kann. Der Kanal hat die Wandung $W=W_1 \cup W_2$ und die Öffnungsflächen A und B.

Dazu müssen wir annehmen, daß der Geschwindigkeitsvektor senkrecht auf den Schnittflächen C_1 und C_2 steht und zudem dem Betrage nach über diese Schnittflächen konstant ist. Für Probleme, bei denen der Geschwindigkeitsbetrag auf C_1 und C_2 nicht konstant ist, bildet die folgende Theorie nur eine Näherung. Unter diesen Annahmen gilt für das Potential

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x}) &= \text{const} & \underline{x} &\in C \\ \underline{n} \cdot \text{grad} \varphi(\underline{x}) &= \text{const} & \underline{x} &\in C \end{aligned} \tag{2-35}$$

Die folgenden Betrachtungen sind durch schrittweise Kopplung je zweier Röhren auf beliebig viele Teil-Kanäle verallgemeinerbar.

2.6.2 Potential des zusammengesetzten Bereiches

Gesucht sei das Potential $\varphi(x)$, das folgenden Bedingungen genügt:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(x) = 0 \quad x \in S \quad (2-36)$$

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi(x) = 0 \quad x \in W \quad (2-37a)$$

$$\varphi = \varphi_A \quad x \in A \quad (2-37b)$$

$$\varphi = \varphi_B \quad x \in B \quad (2-37c)$$

Bekannt seien die Potentiale $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ mit

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_1(x) = 0 \quad x \in S_1 \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_2(x) = 0 \quad x \in S_2 \quad (2-38)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \underline{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi_1(x) = 0 \quad x \in W_1 & \underline{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi_2(x) = 0 \quad x \in W_2 \\ \varphi_1 = \varphi_{A1} \quad x \in A & \varphi_2 = \varphi_{B2} \quad x \in B \\ \varphi_1 = \varphi_{C1} \quad x \in C_1 & \varphi_2 = \varphi_{C2} \quad x \in C_2 \end{array} \right\} (2-39)$$

Wegen (2-35) reduziert sich Gl. (2-36) für $x \in C$ zur Bedingung

$$\underline{n}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi(x \in C_1) = - \underline{n}_2 \cdot \operatorname{grad} \varphi(x \in C_2) \quad (2-40a)$$

$$\varphi(x \in C_1) = \varphi(x \in C_2) \quad (2-40b)$$

Hierbei sind n_1 und n_2 die inneren Normalen der Bereiche S_1 und S_2 . Die Einzelösungen φ_1 und φ_2 werden diese Bedingungen im allgemeinen nicht erfüllen. Insbesondere gilt für

$$g_1 \equiv \underline{n}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi_1(x \in C_1) \quad (2-41)$$

$$g_2 \equiv - \underline{n}_2 \cdot \operatorname{grad} \varphi_2(x \in C_2)$$

in der Regel $g_1 \neq g_2$.

Der Ansatz

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 \varphi_1(x) + b_1 & x \in S_1 \\ a_2 \varphi_2(x) + b_2 & x \in S_2 \end{cases} \quad (2-42)$$

erfüllt Gl.(2-36) überall mit Ausnahme der Fläche C. Die vier Konstanten a_1, b_1, a_2, b_2 können aus den vier Gl. (2-37b, 37c, 40a, 40b) bestimmt werden. Wir erhalten

$$a_1(\varphi_A, \varphi_B) = \frac{g_2(\varphi_B - \varphi_A)}{g_2(\varphi_{C1} - \varphi_{A1}) - g_1(\varphi_{C2} - \varphi_{B2})} \quad (2-43a)$$

$$a_2(\varphi_A, \varphi_B) = \frac{g_1(\varphi_B - \varphi_A)}{g_2(\varphi_{C1} - \varphi_{A1}) - g_1(\varphi_{C2} - \varphi_{B2})} \quad (2-43b)$$

$$b_1(\varphi_A, \varphi_B) = \frac{g_2(\varphi_{C1} \varphi_A - \varphi_{A1} \varphi_B) - g_1(\varphi_{C2} - \varphi_{B2}) \varphi_A}{g_2(\varphi_{C1} - \varphi_{A1}) - g_1(\varphi_{C2} - \varphi_{B2})} \quad (2-43c)$$

$$b_2(\varphi_A, \varphi_B) = \frac{g_2(\varphi_{C1} - \varphi_{A1}) \varphi_B - g_1(\varphi_{C2} \varphi_B - \varphi_{B2} \varphi_A)}{g_2(\varphi_{C1} - \varphi_{A1}) - g_1(\varphi_{C2} - \varphi_{B2})} \quad (2-43d)$$

Hier wurden die Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 als Funktionen von φ_A und φ_B im Hinblick auf spätere Anwendungen definiert.

2.6.3 Transientes Verhalten

Das zeitabhängige Strömungsfeld $\underline{u}(\underline{x}, t)$ ist durch das Potential $\varphi(\underline{x})$ und die Größen M , K und P gemäß Gl.(2-18-20) determiniert.

Es seien

$$\begin{aligned} M_i &= -\rho \iint_{F_i} \varphi_i (\text{grad } \varphi_i \cdot \underline{n}_i) dO \\ K_i &= \frac{1}{2} \rho \iint_{F_i} (\text{grad } \varphi_i)^2 (\text{grad } \varphi_i \cdot \underline{n}_i) dO \\ P_i &= - \iint_{F_i} p(\underline{x}, t) (\text{grad } \varphi_i \cdot \underline{n}_i) dO \end{aligned} \quad (2-44)$$

$i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \text{mit } F_i &= A \cup C_1 \quad \text{für } i=1 \\ &= C_2 \cup B \quad \text{für } i=2 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von P_i wird für das an sich unbekannte Druckfeld auf den Flächen C_1 und C_2 ein beliebiger von p_A und p_B verschiedener Wert $p_c = p_{C_1} = p_{C_2}$ verwendet. Die Größen M , K und P finden wir dann unter Verwendung von Gl. (2-18 bis 20, 42) zu

$$\begin{aligned} M &= \alpha_1^2 M_1 + \alpha_2^2 M_2 \\ K &= \alpha_1^3 K_1 + \alpha_2^3 K_2 \\ P &= \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \end{aligned} \quad (2-45)$$

Hieraus kann $\underline{u}(\underline{x}, t)$ mit Gl.(2-6, 21, 22) berechnet werden.

2.6.4 Druckberechnung

Das Druckfeld $p(\underline{x}, t)$ in S erfüllt mit

$$q \equiv p + E, \quad E = \frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \quad (2-46)$$

folgende Gleichungen:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} q = 0, \quad \underline{x} \in S \quad (2-47)$$

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} q = 0, \quad \underline{x} \in W$$

$$\begin{aligned} p &= p_A(t) \quad \underline{x} \in A \\ p &= p_B(t) \quad \underline{x} \in B \end{aligned}, \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} q &= p_A - E_A = p_A - \rho \frac{1}{2} V^2 (\operatorname{grad} \varphi)_A^2 \\ q &= p_B - E_B = p_B - \rho \frac{1}{2} V^2 (\operatorname{grad} \varphi)_B^2 \end{aligned}$$

Die Lösung $q(\underline{x}, t)$ spalten wir auf in

$$q(\underline{x}, t) = q'(\underline{x}, t) + \rho \frac{1}{2} V^2(t) q''(\underline{x}) \quad (2-48)$$

mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} q' &= 0 \quad \underline{x} \in S & \operatorname{div} \operatorname{grad} q'' &= 0 \quad \underline{x} \in S \\ \underline{n} \cdot \operatorname{grad} q' &= 0 \quad \underline{x} \in W & \underline{n} \cdot \operatorname{grad} q'' &= 0 \quad \underline{x} \in W \\ q' &= p_A \quad \underline{x} \in A & q'' &= (\operatorname{grad} \varphi)_A^2 \equiv q''_A \quad \underline{x} \in A \\ q' &= p_B \quad \underline{x} \in B & q'' &= (\operatorname{grad} \varphi)_B^2 \equiv q''_B \quad \underline{x} \in B \end{aligned} \quad (2-49)$$

Die verbleibende Aufgabe, q' und q'' zu bestimmen, ist besonders einfach, wenn zusätzlich zu Gl.(2-35) folgende Annahme gilt:

$$(\operatorname{grad} \varphi)^2 = \text{const} \quad \text{für} \quad \underline{x} \in A \quad \text{bzw.} \quad \underline{x} \in B \quad (2-50)$$

(D.h., konstante kinetische Energie auf den Öffnungsflächen).

Dann entsprechen die Gl. für q' und q'' denen für φ selbst und wir erhalten

$$\begin{aligned} p(\underline{x}, t) &= \alpha_i'(t) \varphi_i(\underline{x}) + \beta_i'(t) \\ &+ \rho \frac{1}{2} V^2(t) [\alpha_i'' \varphi_i(\underline{x}) + \beta_i'' - \alpha_i'^2 (\operatorname{grad} \varphi_i(\underline{x}))^2] \end{aligned} \quad (2-51)$$

$$\underline{x} \in S_i, \quad i = 1, 2.$$

Hierbei sind (unter Verwendung der in Gl.(2-43) definierten Funktionen)

$$\begin{aligned}\alpha_i'(t) &= a_i(p_A(t), p_B(t)) \\ \beta_i'(t) &= b_i(p_A(t), p_B(t)) \\ \alpha_i'' &= a_i(q_A'', q_B'') \\ \beta_i'' &= b_i(q_A'', q_B'') \\ a_i &= a_i(\varphi_A, \varphi_B) \\ b_i &= b_i(\varphi_A, \varphi_B).\end{aligned}\tag{2-52}$$

Wenn die Annahme gemäß Gl.(2-50) nicht gegeben ist, dann ist die Laplace-Gl. (2-49) selbst neu zu lösen, da in diesem Fall die Randwerte q_A'' und q_B'' im Gegensatz zu φ_A und φ_B keine Konstanten sind. Zusätzlich zu den hierbei ortsabhängigen Werten q_A und q_B werden dazu Randbedingungen bei C_1 und C_2 benötigt. Eine sinnvolle Approximation für diese Randwerte ist

$$q_{C_i}'' = \alpha_i'' \varphi_i(x) + \beta_i'' \quad x \in C_i, \quad i=1,2 \tag{2-53}$$

wobei die α_i'' und β_i'' mit Mittelwerten der eigentlichen Randwerte q_A'' und q_B'' gemäß Gl.(2-52) berechnet werden.

3. Übersicht über numerische Methoden zur Lösung von Laplace-Gleichungen

Zur Berechnung von Potentialströmungen ist die Laplace-Gleichung zu lösen.

Wir suchen also die Lösung $\varphi(\underline{x})$ in einem Gebiet S mit Oberfläche O zu

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} \in S \quad (3-1a)$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) + \beta(\underline{x}) \underline{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi(\underline{x}) = \gamma(\underline{x}) \quad \underline{x} \in O \quad (3-1b)$$

wobei α und β Parameter sind, die über den Typ der Randbedingungen entscheiden:

$$\alpha = 1, \beta = 0 \quad \text{Dirichlet-Randbedingung}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \text{Neumann-Randbedingung}$$

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0 \quad \text{gemischte Randbedingung (Randbedingung 3. Art)}$$

Nun gehört Gl.(3-1) sicherlich zu denjenigen partiellen Differentialgleichungen, für die die relativ meisten analytischen Methoden bekannt sind. Insbesondere unter Verwendung der klassischen Hilfsmittel wie Greensche Funktionen und konforme Abbildungen (letztere nur bei ebenen Problemen) kann Gl.(1) in vielen Fällen analytisch ausgewertet werden [1-4]. Man darf jedoch nicht verkennen, daß die numerische Auswertung dieser analytischen Lösungen in sehr vielen Fällen einen nicht zu unterschätzenden Rechenaufwand erfordert, da hier vielfach recht umfangreiche Reihenentwicklungen auszuwerten sind. Auch versagen diese analytischen Methoden oft, wenn man das Problem, für das zunächst eine analytische Lösung vorliegt, geringfügig in der Geometrie des Randes oder der Art der Randbedingung abändert.

Aus diesen Gründen wird man in der Mehrzahl der Potentialströmungsprobleme auf numerische Methoden zurückgreifen.

Alle numerischen Methoden gehen von einer diskreten Repräsentation der Lösung $\varphi(\underline{x})$ aus. Hier gibt es jedoch viele verschiedene Möglichkeiten. Es gibt zwei große Klassen:

a) Diskretisierung von $\varphi(\underline{x})$ im Inneren von S und auf dem Rand O .

b) Diskretisierung nur auf dem Rand O .

Zur Klasse a) gehören die auf finiten Differenzen oder finiten Elementen beruhenden Verfahren. Dabei werden typischerweise N^3 Diskretisierungsparameter (für dreidimensionale Gebiete S) verwendet, wenn N die typische Anzahl der diskreten Werte zur Auflösung einer Dimension ist. Charakteristisch ist hierbei zudem, daß das entstehende lineare Gleichungssystem eine Bandstruktur aufweist. In geometrisch besonders einfachen Fällen erhält man eine block-tridiagonale Matrix. Der Speicheraufwand zur Speicherung der Bandmatrix ist im allgemeinsten Fall von der Ordnung N^5 (N^3 Gleichungen, Bandbreite N^2). Unter Verwendung spezieller Speichertechniken (sparse matrices) kann man mit der Ordnung N^3 Speicherplätzen auskommen, da die Mehrzahl der Matrixelemente auch innerhalb der Bandmatrix gleich Null ist. In geometrisch besonders einfachen Fällen sind nur wenige Zahlen (z.B. Maschenweiten) zu speichern, da die Matrixelemente hieraus jeweils neu schnell berechenbar sind. Für blocktridiagonale Gleichungssysteme variiert der Rechenaufwand, der Größenordnung nach, zwischen $N^3 \log N$ und N^4 [21].

Zur Klasse b) gehören die auf Greenschen Funktionen oder der Überlagerung diskreter oder flächenhafter Singularitäten beruhenden Integral-Gleichungs-Methoden [16-19]. Hier ist der Diskretisierungsaufwand nur proportional N^2 . Das entstehende lineare Gleichungssystem entspricht jedoch einer voll besetzten, nicht symmetrischen Matrix mit N^4 Elementen, so daß in der Regel der Speicheraufwand nicht kleiner als bei Methoden der Gruppe a) ist. Zudem ist der Rechenaufwand eventuell (bei Verwendung direkter Lösungsverfahren) von der Ordnung N^6 und damit größer. Insbesondere kann man feststellen [16], daß die Hauptdiagonale der Matrix nicht immer dominiert, so daß dann iterative Verfahren nur langsam oder gar nicht konvergieren. Den wesentlichen Vorteil der Integral-Gleichungs-Methoden bildet eine recht große Flexibilität in der Geometrie des Raumes S und der Art der Randbedingungen.

Die speziellen hier zu lösenden Potentialströmungsprobleme werden mit Methoden beider Klassen behandelt. Wir benutzen einerseits finite Differenzen und lösen die entstehenden Gleichungssysteme mittels zyklischer Reduktion, wobei die Routinen POIS [23] und POISXX [20-23] verwendet werden. Andererseits wird die Integral-Gleichungs-Methode "BIEM" [19] benutzt. Ein Satz entsprechender PL/1-Unterprogramme "LAPL" wird im Anhang genauer erläutert.

Beides sind Verfahren für zweidimensionale Probleme. Die Erweiterung auf drei Dimensionen ist möglich. Die Anwendung der Routinen POIS und POISXX ist besonders effektiv nur dann, wenn das betrachtete Gebiet rechteckig ist und die Randbedingungsparameter $\alpha(\underline{x})$, $\beta(\underline{x})$ auf jeder der vier Randstrecken jeweils konstant sind. Jedoch können diese Routinen auch darüber hinaus eingesetzt werden, wenn man die sogenannte Kapazitäts-Matrix-Technik (KMT) [20-21] verwendet. Diese Technik wird bei den späteren Anwendungen eingesetzt.

4. Instationäre Potentialströmungen in speziellen Druckwasser-Reaktor-Geometrien

4.1 Ein analytisches Beispiel: eindimensionale Betrachtung des Übergangs Ringraum-Stutzen für HDR-Blowdown-Bedingungen

4.1.1 Das geometrische Modell

In diesem Kapitel sollen die beschriebenen theoretischen Grundlagen an einem geometrisch stark vereinfachten Modell der Strömung im Übergangsbereich zwischen Ringspalt und Stutzen demonstriert werden. Hierzu benutzen wir folgende eindimensionale Beschreibungsweise.

Anstelle der tatsächlichen Ringraumgeometrie betrachten wir den abgewickelten Ringraum, also ein ebenes Problem. In ebener Darstellung haben wir folgende Situation:

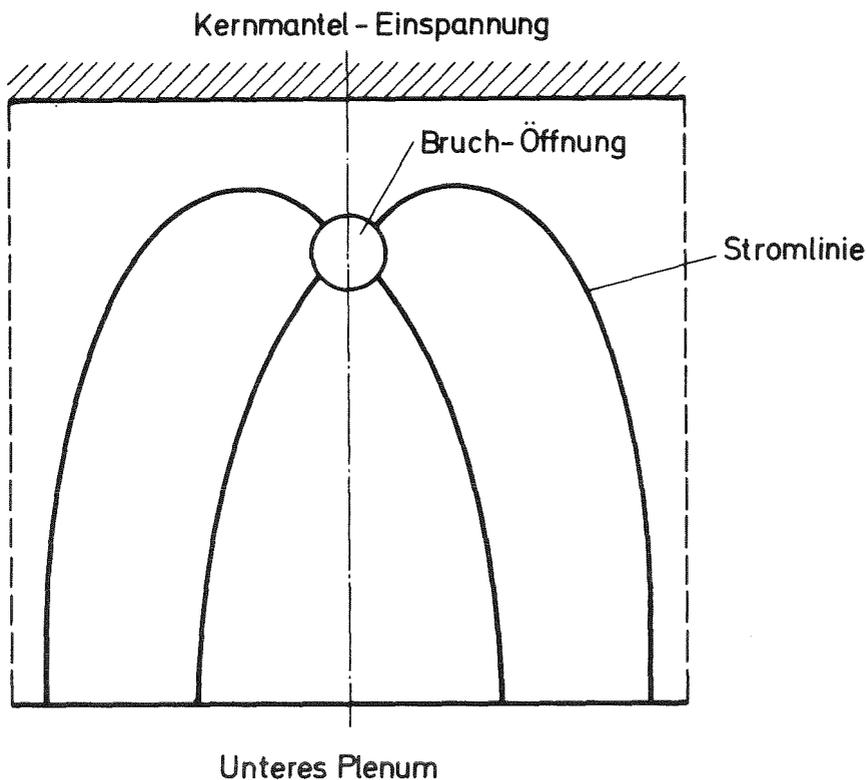


Abb.5: Skizze des abgewickelten Ringraumes

Diese Geometrie wollen wir hier zunächst noch weiter vereinfachen und durch eine achsensymmetrische Geometrie ersetzen.

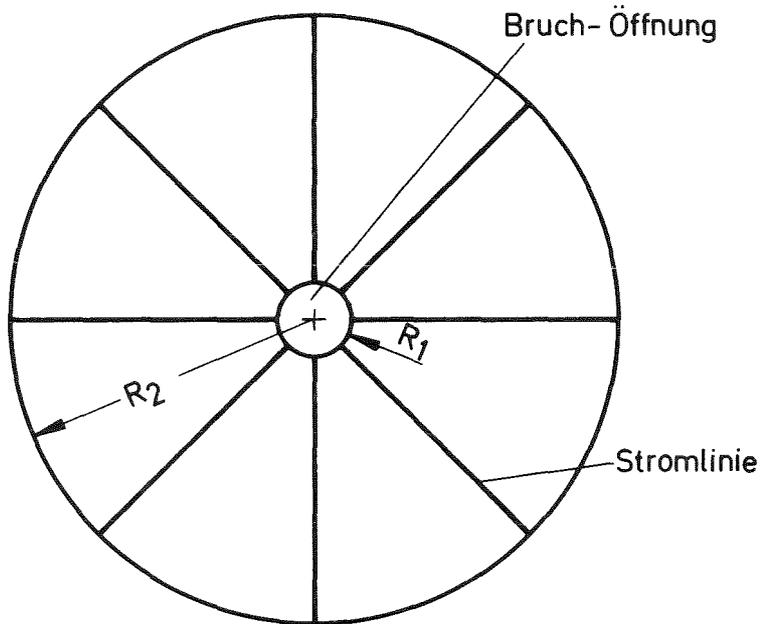


Abb.6: Skizze des eindimensionalen erfaßten Ringraumes

Wir betrachten hier also eine Lochplatte mit den Radien R_1 des Bruch-Stutzens, und einem äußeren Radius R_2 den wir etwa als die mittlere Länge der Stromlinien vom unteren Plenum zum Stutzen interpretieren können. Die Lochplatte habe die Spaltbreite s . Dies sei der Bereich S_1 .

Den Bruchstutzen selbst wollen wir ebenfalls, wenn auch nur sehr grob, erfassen. Wir vernachlässigen hier - mit dem Ziel einer einfachen analytischen Beschreibung - die Einzelheiten des Überganges und beschreiben den Stutzen einfach durch ein gerades Rohr der Länge L und mit dem Radius R . Dies sei der Bereich S_2 .

Das Ersatzmodell für den Bereich Ringraum-Stutzen ist dann die Verkopplung der Bereiche S_1 und S_2 gemäß folgender Skizze:

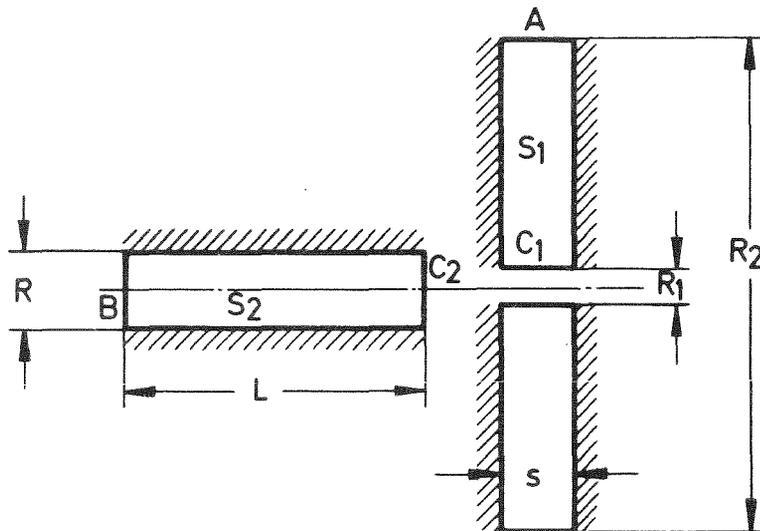


Abb.7: Eindimensionaler Übergang Ringraum-Stutzen

Den Umlenkbereich am Übergang Ringraum-Stutzen können wir so natürlich nicht erfassen. Er wird hier schlicht vernachlässigt. Wir werden diesen Bereich später genauer erfassen und dann die Fehler dieses vereinfachten Modells bestimmen.

Der Radius R_1 ist abweichend von der eigentlichen Geometrie so zu wählen, daß die Querschnittsfläche bei C_1 mit der bei C_2 übereinstimmt. Es gilt also

$$\pi R^2 = 2 \pi s R_1 \quad (4-1)$$

Bezüglich des Druckes unterstellen wir $p_A = \text{const}$ (z.B. 110 bar) und ebenso $p_B = \text{const}$ (z.B. 1 bar, oder der Siededruck von z.B. 60 bar). Die Annahme $p_A = \text{const}$ setzt selbstverständlich ein kompressibles Verhalten im Innern des Druckbehälters voraus.

4.1.2 Strömungspotential

Gesucht ist als erstes das Potential φ mit den Randbedingungen

$$\varphi_A = 1, \quad \varphi_B = 0 \quad (4-2)$$

Hierzu berechnen wir die Potentiale φ_1 und φ_2 für die beiden Teilbereiche S_1 und S_2 mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_{A1} = \varphi_A = 1 & \quad (r = R_2) & \quad \varphi_{B2} = \varphi_B = 0 & \quad (x = 0) \\ \varphi_{C1} = 0 & \quad (r = R_1) & \quad \varphi_{C2} = 1 & \quad (x = L) \end{aligned} \quad (4-3)$$

und den Differentialgleichungen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_1(r)}{\partial r} \right) = 0 \quad \quad \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0 \quad (4-4)$$

Die Lösungen sind

$$\varphi_1(r) = \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \quad \quad \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{L} \quad (4-5)$$

Mit

$$g_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} (r=R_1) = \frac{1}{R_1 \ln(R_2/R_1)} \quad \quad \quad g_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x=L) = 1/L \quad (4-6)$$

ergeben sich gemäß Gl. (2-43) die Koeffizienten

$$a_1 = \frac{R_1 \ln(R_2/R_1)}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} \quad \quad \quad a_2 = \frac{L}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} \quad (4-7)$$

$$b_1 = \frac{L}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} \quad \quad \quad b_2 = 0$$

Damit lautet das Potential φ im gekoppelten Bereich

$$\varphi = \begin{cases} \frac{R_1 \ln(r/R_1) + L}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} & \text{für } S_1 \\ \frac{x}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} & \text{für } S_2 \end{cases} \quad (4-8)$$

Probeweise überzeugen wir uns, daß

$$\varphi(x=L) = \varphi(r=R_1) \quad , \quad \partial\varphi/\partial x(x=L) = \partial\varphi/\partial r(r=R_1).$$

Das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich aus $\underline{u} = -V(t)\text{grad } \varphi(\underline{x})$

$$u = \begin{cases} - \frac{V(t) R_1 / r}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} & \text{für } S_1 \\ - \frac{V(t)}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} & \text{für } S_2 \end{cases} \quad (4-9)$$

Hierbei ist u die Geschwindigkeitskomponente in r -Richtung für S_1 und x -Richtung für S_2 . Die Zeitfunktion $V(t)$ berechnen wir im folgenden Abschnitt.

4.1.3 Transientes Verhalten

Das transiente Verhalten wird bestimmt durch die Größen M, K und P gemäß Gl. (2-18 bis 20). Wir bestimmen diese Größen zunächst für die Teilbereiche. Dabei benutzen wir für den Druck an den Flächen C_1 und C_2 den gemeinsamen Wert p_c .

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi_1 \cdot \underline{n}|_{A_1} &= -1 / (R_2 \ln(R_2/R_1)), & \text{grad } \varphi_2 \cdot \underline{n}|_{B_2} &= 1/L \\ \text{grad } \varphi_1 \cdot \underline{n}|_{C_1} &= 1 / (R_1 \ln(R_2/R_1)), & \text{grad } \varphi_2 \cdot \underline{n}|_{C_2} &= 1/L \end{aligned}$$

Die Flächen sind

$$F_{A_1} = 2\pi s R_2$$

$$F_{B_2} = \pi R^2 = 2\pi s R_1$$

$$F_{C_1} = 2\pi s R_1$$

$$F_{C_2} = \pi R^2 = 2\pi s R_1$$

Damit erhalten wir:

$$M_1 = \frac{-2\pi\gamma}{\ln(R_2/R_1)} \quad M_2 = \frac{-2\pi\gamma R_1}{L} \quad (4-10)$$

$$K_1 = \frac{\pi\gamma}{\ln(R_2/R_1)} \left[\frac{1}{(R_1 \ln(R_2/R_1))^2} - \frac{1}{(R_2 \ln(R_2/R_1))^2} \right], \quad K_2 = 0 \quad (4-11)$$

$$P_1 = \frac{2\pi\gamma}{\ln(R_2/R_1)} (p_A - p_C) \quad P_2 = \frac{2\pi\gamma R_1}{L} (p_C - p_B) \quad (4-12)$$

Hieraus berechnen wir mit Gl.(2-45) die entsprechenden Werte für das gekoppelte System:

$$M = \alpha_1^2 M_1 + \alpha_2^2 M_2 = - \frac{2\pi\gamma R_1}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} \quad (4-13)$$

$$K = \alpha_1^3 K_1 + \alpha_2^3 K_2 = \frac{\pi\gamma R_1}{[R_1 \ln(R_2/R_1) + L]^3} (1 - (R_1/R_2)^2) \quad (4-14)$$

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = \frac{2\pi\gamma R_1}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} (p_A - p_B) \quad (4-15)$$

Man kann sich zur Probe leicht davon überzeugen, daß man die gleichen Werte für M, K, P erhalten hätte, wenn man direkt von der Lösung φ gemäß Gl.(4-8) ausgegangen wäre.

Damit erhalten wir gemäß Gl.(2-21 bis 24):

$$V(t) = V_\infty \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 + e^{-\lambda t}} \quad (4-16)$$

mit

$$V_{\infty} = \left(\frac{p}{K}\right)^{1/2} = \left[\frac{2(p_A - p_B)}{(1 - (R_1/R_2)^2)}\right]^{1/2} (R_1 \ln(R_2/R_1) + L) \quad (4-17)$$

und

$$\lambda = 2 \left(\frac{p \cdot K}{M^2}\right)^{1/2} = \frac{\left[2(p_A - p_B) \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)\right]^{1/2}}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L} \quad (4-18)$$

Die maximale Geschwindigkeit ist die bei C:

$$u_{\max} = \left[\frac{2(p_A - p_B)}{1 - (R_1/R_2)^2}\right]^{1/2} \quad (4-19)$$

Wir können für die Geschwindigkeit daher auch schreiben

$$u = \begin{cases} -u_{\max} R_1 / r f(t) & \text{für } S_1 \\ -u_{\max} f(t) & \text{für } S_2 \end{cases} \quad (4-20)$$

mit

$$f(t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 + e^{-\lambda t}} \quad (4-21)$$

4.1.4 Druckberechnung

Die Methode zur Berechnung des Druckfeldes $p(x, t)$ in S ist in Kap. 2.6.4 beschrieben. Mit den Randbedingungen p_A und p_B bei A bzw. B sowie

$$q''_A = \left(\frac{R_1/R_2}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L}\right)^2 \quad (4-22)$$

$$q''_B = \left(\frac{1}{R_1 \ln(R_2/R_1) + L}\right)^2$$

erhalten wir gemäß Gl.(2-52):

$$\begin{aligned}
 \alpha_1' &= \left[(p_A - p_B) R_1 \ln(R_2/R_1) \right] / \mathcal{L} & \alpha_2' &= (p_A - p_B) L / \mathcal{L} \\
 \alpha_1'' &= \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 - 1 \right] R_1 \ln(R_2/R_1) / \mathcal{L}^3 & \alpha_2'' &= \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 - 1 \right] L / \mathcal{L}^3 \\
 \beta_1' &= p_B + (p_A - p_B) L / \mathcal{L} & \beta_2' &= p_B \\
 \beta_1'' &= \left[L \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 + R_1 \ln(R_2/R_1) \right] / \mathcal{L}^3 & \beta_2'' &= 1 / \mathcal{L}^2
 \end{aligned}
 \tag{4-23}$$

Hierbei ist \mathcal{L} die "effektive Kanallänge"

$$\mathcal{L} = R_1 \ln(R_2/R_1) + L
 \tag{4-24}$$

Mit diesen Größen und Gl.(2-51) erhalten wir für Bereich S_1 :

$$\begin{aligned}
 p(r,t) &= p_B + \frac{p_A - p_B}{\mathcal{L}} \left\{ R_1 \ln(r/R_1) (1 - f^2(t)) + L \right. \\
 &\quad \left. + f^2(t) \left[L \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right) + R_1 \ln(R_2/R_1) \left(1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right) \right] / \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4-25a}$$

Bereich S_2 :

$$p(x,t) = p_B + \frac{p_A - p_B}{\mathcal{L}} \times \left(1 - f^2(t) \right).
 \tag{4-25b}$$

Der prinzipielle Druckverlauf ist in Abb.8 dargestellt.

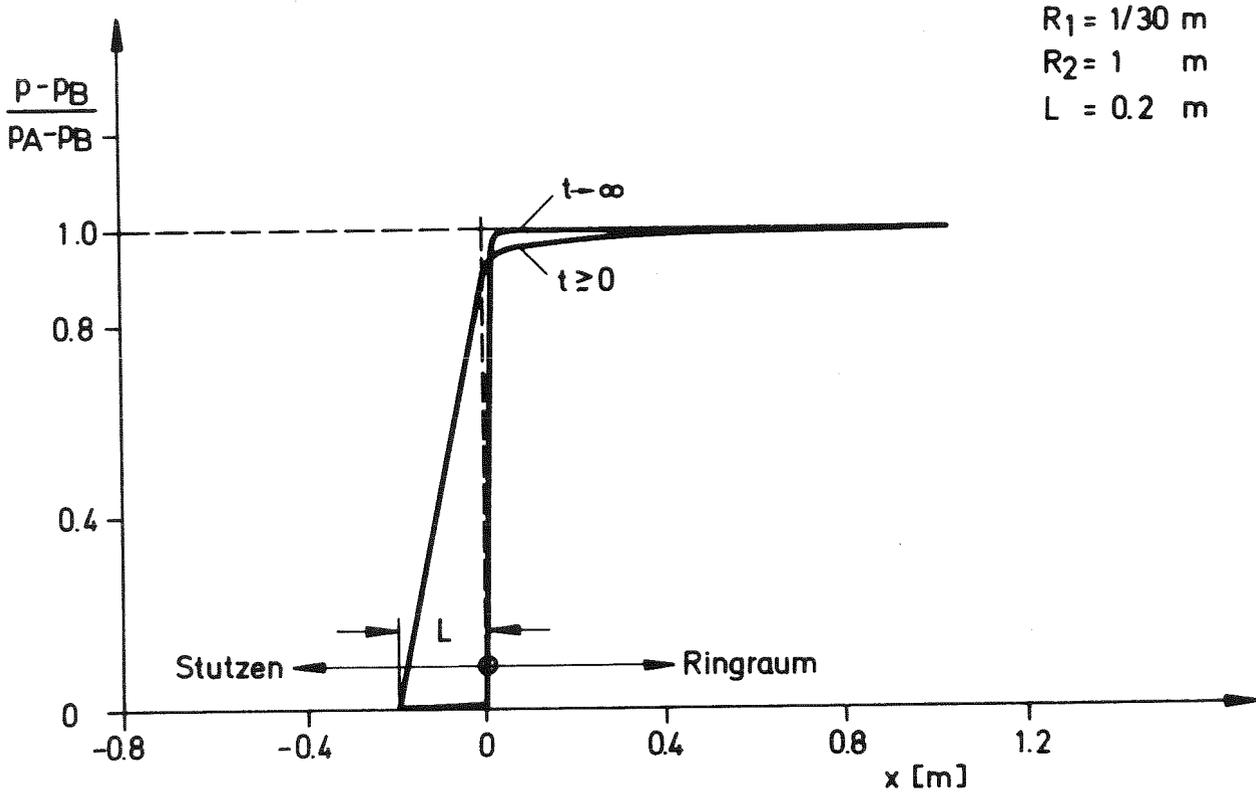


Abb.8: Druckverlauf im Ringraum und Stutzen für verschiedene Zeiten bei eindimensionaler Rechnung.

Wie physikalisch einleuchtend, ergibt sich im stationären Zustand, also für $f(t)=1$, $p(x)=p_B=\text{const}$ im Bereich S_2 , dem geradlinigen Rohr konstanten Querschnitts. Ebenso liefert Gl.(4-25a), $p(R_1, \infty)=p_B$. Weiterhin kann man sich leicht überzeugen, daß stets gilt

$$p(x=L, t) = p(r=R_1, t).$$

Jedoch gilt nur für $t=0$:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x=L, t) = \frac{\partial p}{\partial r}(r=R_1, t);$$

für größere Zeiten tritt hier ein Knick in der Druckverteilung auf als Konsequenz des Knicks in der Verteilung der kinetischen Energie im nicht genau erfaßten Übergangsbereich.

4.1.5 Diskussion für HDR-Blowdown-Bedingungen

Die Zeitkonstante τ ist in Abb.9 als Funktion von L für $(p_A - p_B)/\rho = 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$ und $\frac{1}{2} 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$ dargestellt, wobei HDR-typische Maße verwendet wurden:

$$R = 0.1 \text{ m}$$

$$s = 0.15 \text{ m} \quad (R_1 = R^2/2s = 1/30 \text{ m})$$

$$R_2 = 7 \text{ m}$$

Wir sehen die charakteristischen Beschleunigungszeiten τ liegen in der Größenordnung von 10 m sec.

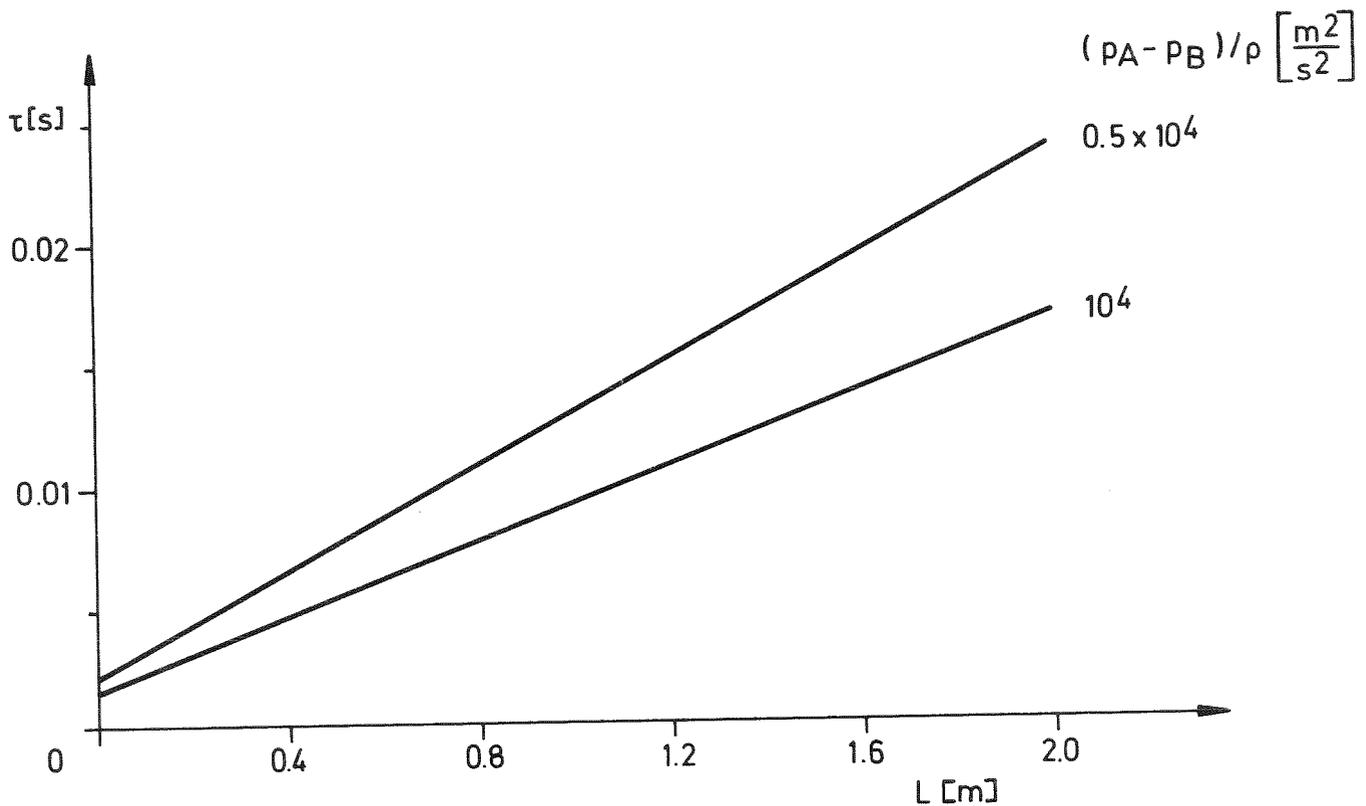


Abb.9: Zeitkonstante τ als Funktion der Stutzen-Rohrlänge L gemäß eindimensionaler Rechnung.

Die Zeitkonstante $\tau = 1/\lambda$ mit λ gemäß Gl.(4-18) hängt fast nur von der Stutzenlänge L und fast gar nicht vom Radius R_1 bzw. vom Bruch-Querschnitt ab. Dies ist ein Charakteristikum der anfänglichen Beschleunigungsphase. Die Größe des Bruchquerschnittes kontrolliert das transiente Verhalten beim Blowdown-Problem erst bei wesentlich größeren Zeiten, wenn dann das Absinken des Innendrucks von der Menge des ausströmenden Fluids abhängt.

Wir werden sehen, mit dieser einfachen analytischen Studie haben wir bereits die Zeitkonstanten und den Druckverlauf für die tatsächliche Geometrie recht genau erfaßt.

4.2 Zweidimensionale Finit-Differenzen-Lösung für den Stutzen-Bereich

4.2.1 Geometrie und Randbedingungen

In diesem Abschnitt wollen wir den Übergang Rohr-Ringmantel, den sogenannten Stutzen genauer erfassen und zwar gemäß folgender Skizze zwei-dimensional aber nach wie vor rotationssymmetrisch:

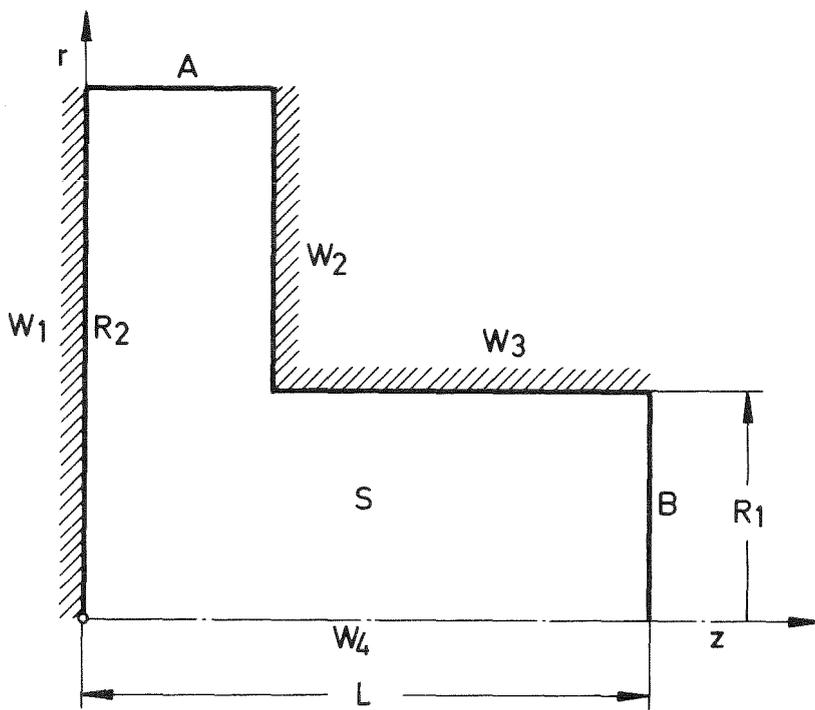


Abb.10: Zweidimensionales Stutzen-Geometrie-Modell

Gesucht ist zunächst das Potential φ mit den Randbedingungen

$$\varphi = 1 \quad \text{bei } B$$

$$\varphi = 0 \quad \text{bei } A$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{bei } W_1 \text{ und } W_2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{bei } W_3 \text{ und } W_4$$

(4-26)

und der Differentialgleichung

$$\text{div grad } \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-27)$$

Der Druck soll folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} p &= p_B && \text{bei } B \\ p &= p_A && \text{bei } A \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 && \text{bei } W_1 \text{ und } W_2 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 && \text{bei } W_3 \text{ und } W_4 \end{aligned} \tag{4-28}$$

In diesem Fall wurde der Druck p nicht aus dem Potential φ sondern direkt aus dem resultierenden Geschwindigkeitsfeld gemäß

$$\text{div grad } p = - \text{div grad } E(t); \quad E = \frac{1}{2} \rho u^2 \tag{4-29}$$

berechnet. (Der Grund ist der, daß die Technik zur Berechnung von p aus φ bei Programmierung dieses Teils dem Autor noch nicht bekannt war.)

4.2.2 Lösung mittels finiter Differenzen und zyklischer Reduktion

Allgemein haben wir also das Problem

$$\begin{aligned} \text{div grad } \psi &= q(z, t) \\ \psi &= \psi_A && \text{bei } A, \quad \psi = \psi_B && \text{bei } B \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 && \text{bei } W_1 \text{ und } W_2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0 && \text{bei } W_3 \text{ und } W_4 \end{aligned} \tag{4-30}$$

zu lösen.

Wegen der rechteckigen Umrandung des betrachteten Gebietes verwenden wir ein Differenzenverfahren. Das daraus entstehende lineare Gleichungssystem wird mittels zyklischer Reduktion [21] unter Verwendung der "Kapazitäts-Matrix-Technik" (KMT) und des FORTRAN-Unterprogramms POISSX[20,22] gelöst. Diese Technik wurde in [21] beschrieben und dabei wurde bereits über die erforderlichen Rechenzeiten berichtet.

Die Neumann-Randbedingungen lauten in Differenzenform:

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,i,1} - \psi_{1,i,0} &= 0 & i = 1, 2, \dots, M_1 \\
 \psi_{1,i,N_1} - \psi_{1,i,N_1+1} &= 0 & i = M_2+1, M_2+2, \dots, M_1 \\
 \psi_{1,1,j} - \psi_{1,0,j} &= 0 & j = 1, 2, \dots, N_1 \\
 \psi_{2,1,j} - \psi_{2,0,j} &= 0 & j = 1, 2, \dots, N_2 \\
 \psi_{2,M_2,j} - \psi_{2,M_2+1,j} &= 0 & j = 1, 2, \dots, N_2.
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

Das Maschennetz ist äquidistant in z-Richtung mit

$$\Delta z = \frac{z}{N_1}$$

für beide Bereiche. Diese Festlegung wird gewählt, weil nur bei konstantem Δz die zyklische Reduktion anwendbar ist. Die Länge L ergibt sich dann aus

$$L = \left(N_1 + N_2 + \frac{1}{2} \right) \Delta z.$$

In radialer Richtung ist Δr als konstant gewählt im Bereich $0 \leq r \leq R_1$:

$$\Delta r_1 = R_1 / M_2.$$

Für größere Radien wird Δr kontinuierlich vergrößert. Die Radien der Maschenmittelpunkte sind r_i ; die Begrenzungslinie der i-ten Masche zu größeren Radien hin ist $r_{i+1/2}$.

Das Differenzen-Analogon zu Gl.(4-30) ist:

$$\begin{aligned}
 a_R(i) \psi_R(i-1, j) + b_R(i) \psi_R(i, j) + c_R(i) \psi_R(i+1, j) \\
 + \psi_R(i, j-1) - 2 \psi_R(i, j) + \psi_R(i, j+1) = q_R(i, j)
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

für $k = 1, 2$ (Bereich 1 und 2)

und alle inneren Maschen-Mittelpunkte (i, j) sowie

$$a_R(i) = \frac{\Delta z^2}{r_i \Delta r_i} \frac{r_{i-1/2}}{\Delta r_{i-1/2}} \quad (4-33)$$

$$b_R(i) = \frac{-\Delta z^2}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{r_{i-1/2}}{\Delta r_{i-1/2}} + \frac{r_{i+1/2}}{\Delta r_{i+1/2}} \right)$$

$$c_R(i) = \frac{\Delta z^2}{r_i \Delta r_i} \frac{r_{i+1/2}}{\Delta r_{i+1/2}}$$

und

$$q_R(i, j) = q(z_j, r_i) \cdot \Delta z^2. \quad (4-34)$$

Zusätzlich gilt die innere Randbedingung

$$\psi_{2, i, 0} = \psi_{1, i, N_1} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M_2 \quad (4-35)$$

$$\psi_{1, i, N_1+1} = \psi_{2, i, 1}$$

Die KMT erfordert die Berechnung einer $p \times p$ -Kapazitätsmatrix. Hier ist $p = M_2$. Für $m_1=50$, $N_1=17$, $M_2=25$, $N_2=31$ benötigen wir für die Berechnung dieser Matrix und deren Zerlegung in das Produkt zweier Dreiecksmatrizen (L-U-Zerlegung) 3.2 sec [21]. Für jede rechte Seite q kann dann das Problem in 0.25 sec (auf IBM 370/168) gelöst werden.

Zur Erzielung einer guten numerischen Rechengenauigkeit (relativer Fehler $< 10^{-4}$) bei sehr großen Radienverhältnissen R_2/R_1 und stark variierenden Δr_i ist es unbedingt notwendig, als Randbedingung bei A $\psi_A = 0$ zu verwenden. Dies ist eine Folge der geringen Gradienten in ψ für große Radien. Für große Werte von ψ wird die Berechnung der sehr kleinen Differenzen dort sehr ungenau, wenn nicht auch ψ klein ist. Diese Bedingung läßt sich jedoch für inkompressible Fluide leicht einhalten, da der absolute Level des Potentials ψ und der Druckes p so gewählt werden können, daß $\psi_A = p_A = 0$.

4.2.3 Transientes Verhalten

Entsprechend der Theorie des Kapitels 2.6.3 berechnen wir aus der numerischen Lösung für das Potential ψ die Größen M , K und P . Der Potentialgradient ergibt sich dabei sehr einfach als die Differenz zwischen zwei benachbarten Maschenpunkten in der Normalen-Richtung an den Rändern des betrachtenden Bereichs dividiert durch den Punkteabstand.

Abb.12 zeigt die berechnete Zeitkonstante

$$\tau = 1/\lambda$$

als Funktion der Länge L . Die Rechenergebnisse gelten für verschiedene Maschenzahlen N_1 sowie für $M_1 = 50$, $M_2 = 25$ und variablem N_2 entsprechend der Länge L ($N_2 = 3, 9, 19, 29, 59, 99$), sowie den Maßen

$$R_1 = 0.1, \quad R_2 = 7, \quad s = 0.15 \quad [\text{m}]$$

$$p_A = 0, \quad p_B/s = - 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden stimmt im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit Gl.(4-18) überein. Die grobe Theorie gemäß Kap.4.1 liefert hier also Ergebnisse, die für $L \gg R_1$ für technische Zwecke als exakt anzusehen ist. Umgekehrt ist die numerische Lösung schon für wenige Maschenpunkte recht brauchbar.

Die maximale Geschwindigkeit stimmt mit der Theorie gemäß Gl.(4-19) bis auf (numerisch bedingte) Abweichungen von ca. 1 % überein und beträgt für die genannten Zahlenwerte

$$u_{\max} = 141 \text{ m/s}$$

4.2.4 Geschwindigkeits- und Druckfeld

Zur Zeit $t = 0$, d.h. bei noch ruhendem Fluid, ist die Druckverteilung im Stutzen in Abb.13 dargestellt. Hierbei entsprechen Isobaren den Linien konstanten Potentials. Die Rechnung wurde für $R_2 = 7\text{m}$ durchgeführt, es wird jedoch nur der Abschnitt für $r \leq 27 \text{ cm}$ gezeichnet. Physikalisch ist hier die Druckentlastungswelle, die wir für ein reales, schwach kompressibles Fluid erwarten, schon durchgelaufen, also gilt dieses Bild nur für geringfügig positive Zeiten und für Fluide mit extrem hohen Schallgeschwindigkeit.

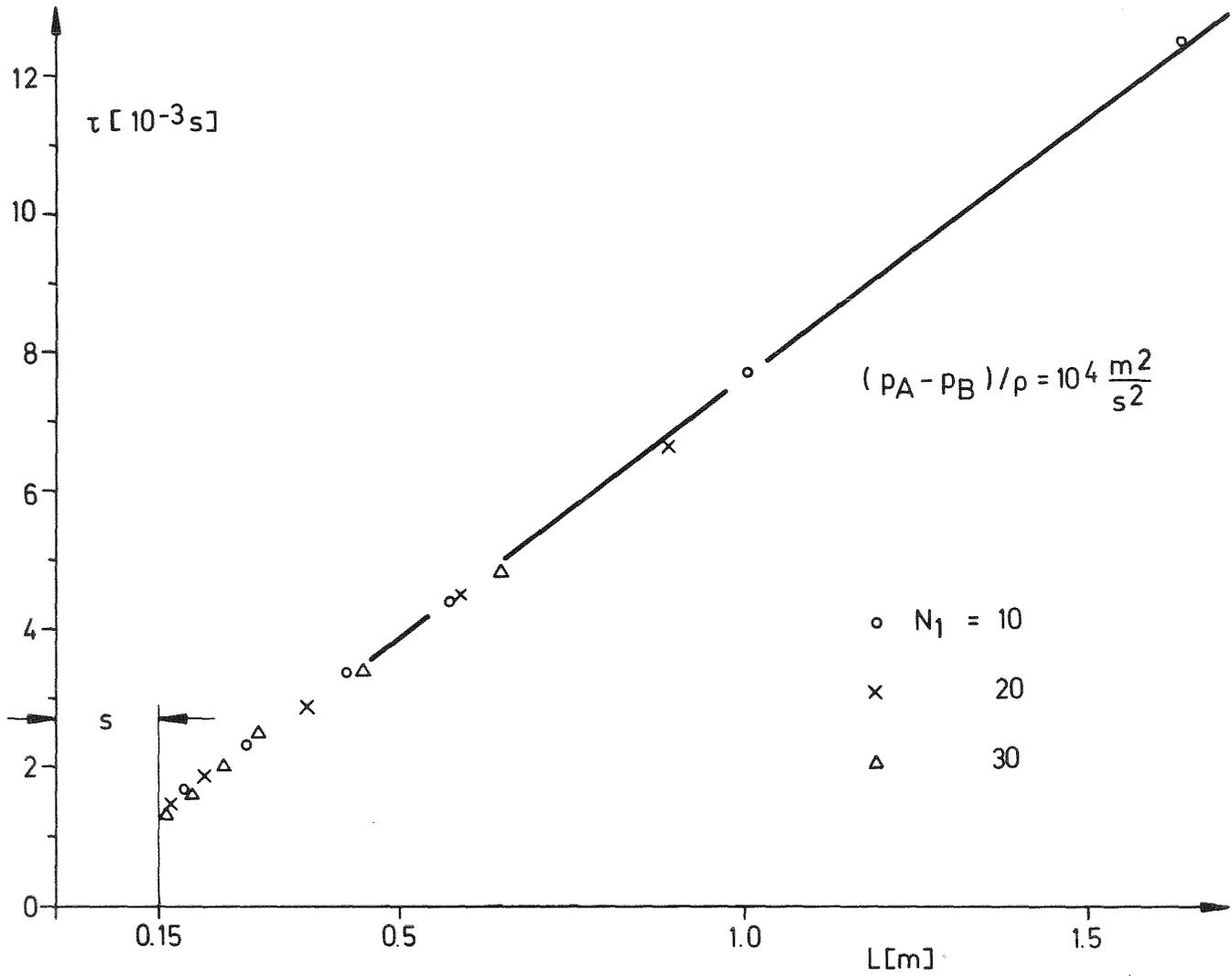


Abb. 12 Zeitkonstante der Stutzen-Strömung gemäß zweidimensionaler Rechnung

Nach relativ kurzer Zeit (ca. 10 msec) erreichen wir etwa den Zustand gemäß Abb.14. Hier ist das Geschwindigkeitsfeld als Vektorfeld und das Druckfeld durch seine Isobaren rechnerisch für die Zeit $t = \infty$ dargestellt. Die Form des Geschwindigkeitsfeldes ist zu allen Zeiten die gleiche. Wir erkennen die starke Geschwindigkeitszunahme in Stutzennähe, die aus der Querschnittsabnahme resultiert. Die Druckisobaren sind gegenüber Abb.13 stark zum Stutzenaustritt verschoben. Der Druckabfall innerhalb des Ringspaltes selbst ist sehr klein. An der Kante des Überganges Ringraum-Rohr bildet sich eine Singularität aus. Hier liefert die Potentialströmungstheorie negative Drücke von theoretisch unendlichem Betrag. In der Realität müssen wir hier also Kavitation erwarten. Zudem wird eine eventuelle Abrundung dieser Kante auf die sich ausbildende Zweiphasen-Strömung von Einfluß sein. Der Wanddruck-Verlauf für $t = 0$ und $t = \infty$ (in Praxis $t \gtrsim 10$ msec) ist in Abb.15 genauer dargestellt. Die Singularität in der Kante wird hier deutlich. Die negativen Drücke stellen sich unmittelbar hinter der umströmten Kante ein. Wir erkennen, daß für Abstände größer als ein Radius $R_1 = 10$ cm von der Kante die Drücke an der "Innen" und "Außen"-Wand etwa gleich groß sind. Ab hier kann die Druckverteilung und das Geschwindigkeitsfeld also eindimensional gerechnet werden. Tatsächlich entspricht der Druckverlauf in sehr guter Näherung hier dem in Gl.(4-25) angegebenen. Für $t \gtrsim 0$ ergibt sich die maximale Druckdifferenz Δp zwischen der Ringraumseite des Kernmantels und der Innenseite (wo $p = p_A$ sei) bei $r = 0$. Sein Wert hängt stark von der Länge L ab. Mit zunehmender Länge nimmt Δp ab, wie in Abb.16 dargestellt. Für $t = \infty$ ist der Druck am Kernmantel bei $r = 0$ gleich dem Staudruck und damit etwa gleich p_A . Hier ist die Belastung des Kernmantels also Null (Innen=Außen-Druck am Kernmantel). Die größte Druckdifferenz Δp über den Kernmantel ergibt sich zur Zeit $t = \infty$ bei $r \approx 1.5 R_1$. Diese maximale Druckdifferenz ist sehr viel kleiner als man intuitiv annehmen würde. Auch dieser Wert ist in Abb.16 als Funktion von L dargestellt.

Im Rahmen der inkompressiblen Potentialströmungstheorie ist die Belastung des Kernmantels für $t \gtrsim 10$ msec also vernachlässigbar klein im Vergleich zu dem Stoß, der in den allerersten Millisekunden auftritt.

Während in größeren Entfernungen vom Stutzen die Druckverteilung über den Querschnitt des Ringraumes nahezu konstant ist, ist dies in Stutzennähe nicht der Fall. Hier muß daher die Variation in Richtung der Stutzenachse stets aufgelöst werden. Andernfalls ergeben sich rechnerisch über den Kernmantel größere Druckdifferenzen als in der Realität.

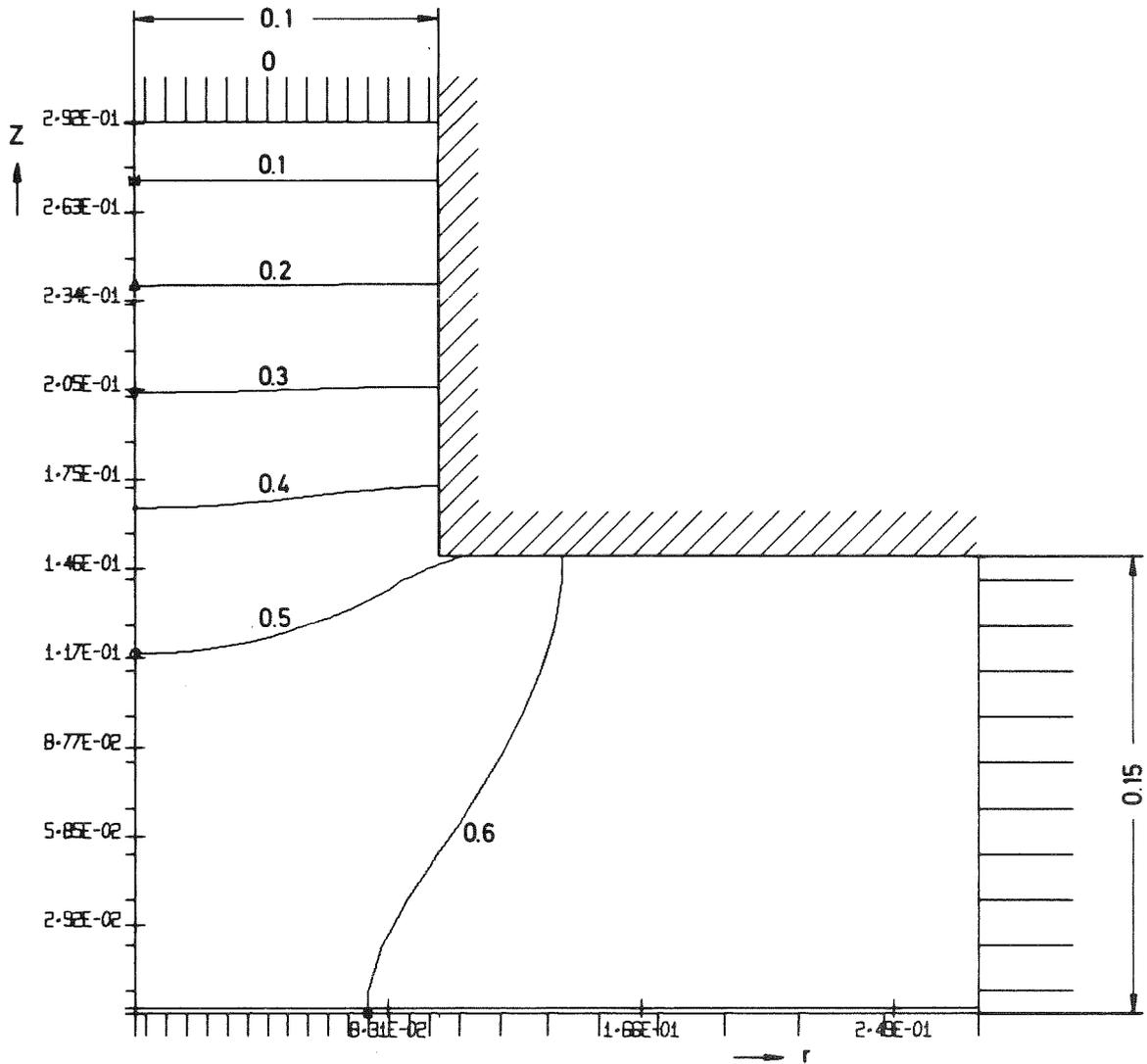


Abb. 13 Druckverteilung im Bereich des Übergangs Stutzen-Ringraum zur Zeit $t \gtrsim 0$ (ruhendes Fluid). Gezeigt ist ein kleiner Ausschnitt. Der Ringraum erstreckt sich bis zu $R_2 = 7$ m. Die Isobarenwerte verstehen sich in Einheiten von $p_A - p_B$.

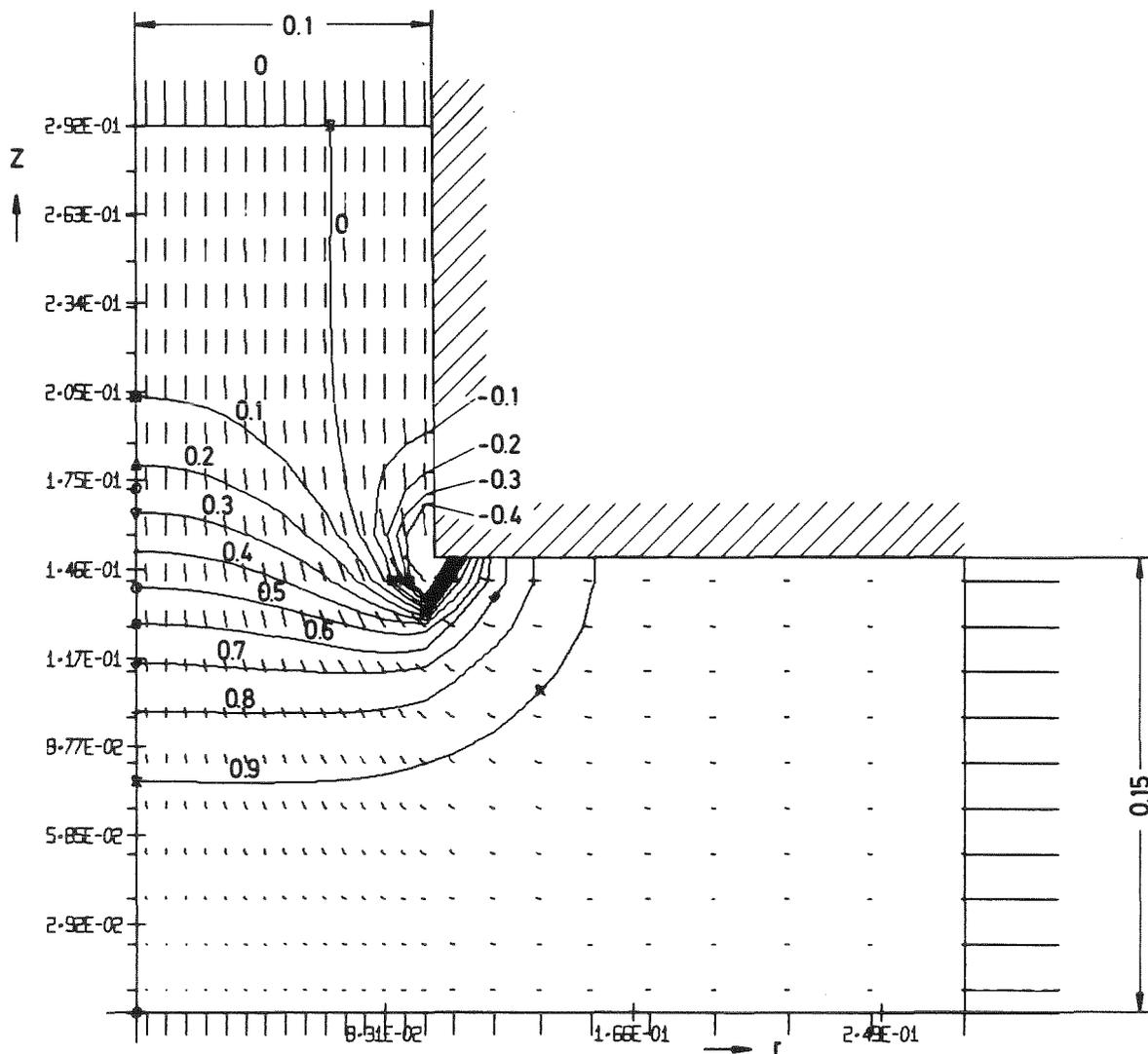


Abb. 14 Druck- und Geschwindigkeits-Verteilung für $t \rightarrow \infty$.
Vergleiche auch Abb. 13.

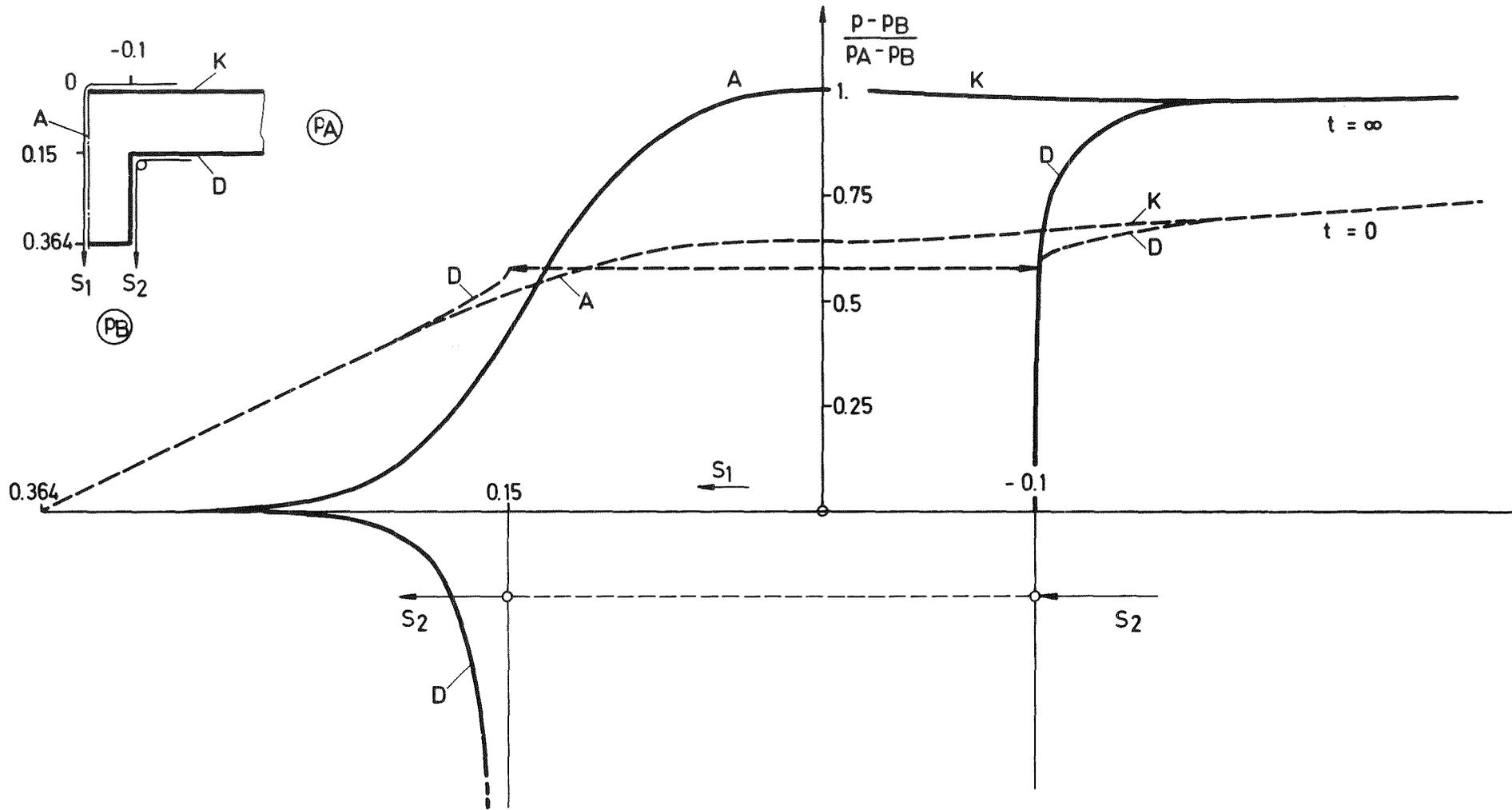


Abb.15 Wanddruck-Verlauf für verschiedene Zeiten im Übergang Ringraum-Stützen.

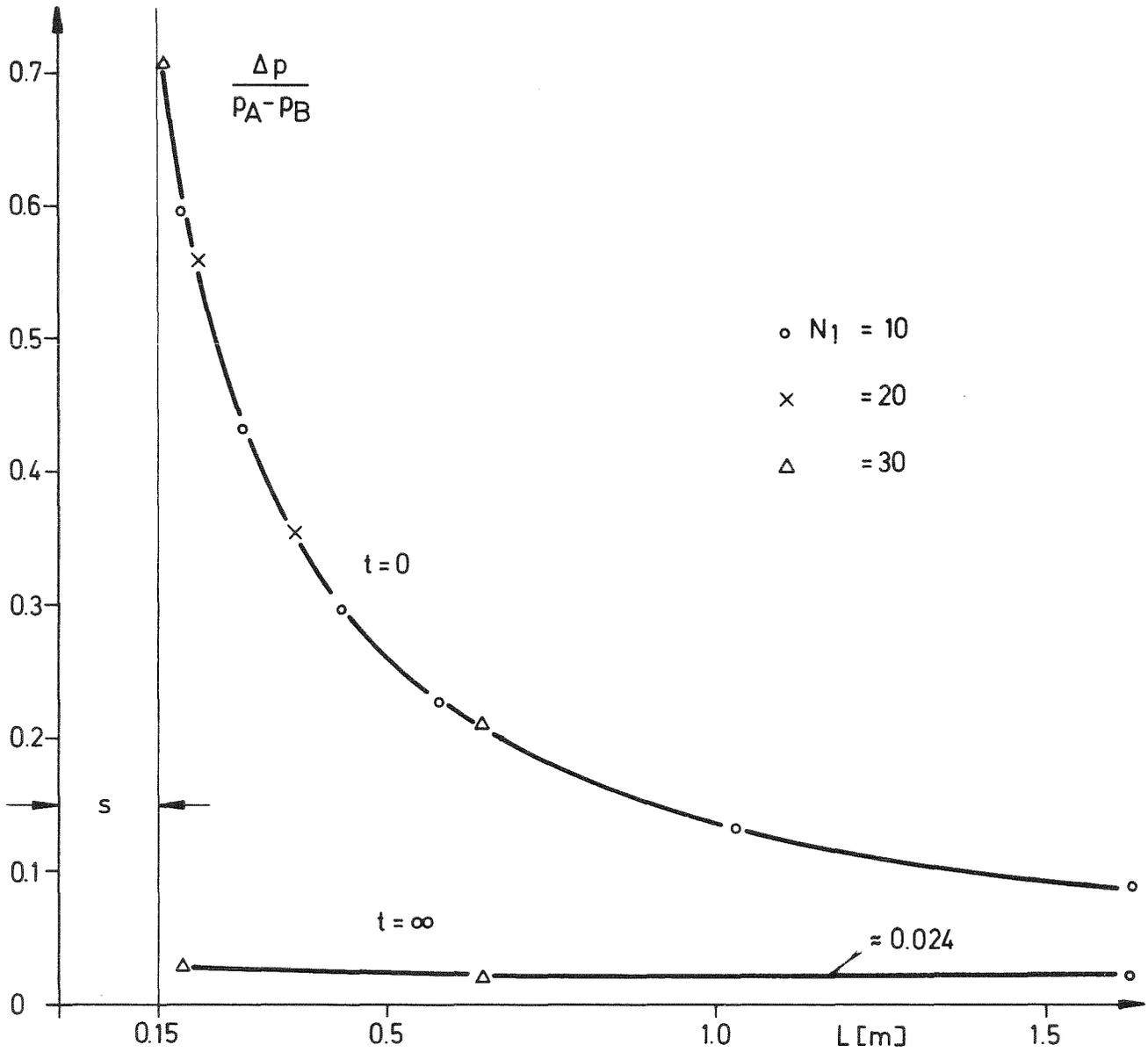


Abb. 16 Maximale Druckdifferenz über den Kernmantel als Funktion der Bruchstützen-Länge L für $t \geq 0$ und für $t \rightarrow \infty$.

4.3 Zweidimensionaler abgewickelter Ringraum, Original-Problem, Lösung mittels Integral-Methode.

4.3.1 Geometrie und Aufgabenstellung

Bisher haben wir den Ringraum - abgesehen von der unmittelbaren Stutzennähe - nur eindimensional, also nur als Funktion des Abstandes r vom Stutzen aufgelöst. Dies ist eine starke geometrische Vereinfachung. In diesem Abschnitt werden die Einzelheiten des Ringraumes in seiner abgewickelten, ebenen Darstellung gemäß Kap.4.1.1, Abb.5, erfaßt. Hierbei lassen wir zunächst die Einzelheiten des Stutzen-Bereiches außer acht. Diese werden später durch Koppelung der Ergebnisse für den Ringraum und den Stutzen erfaßt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Berechnung einer Hälfte des Ringraumes; die andere ist hierzu symmetrisch. Wir betrachten also die Geometrie gemäß Abb.17

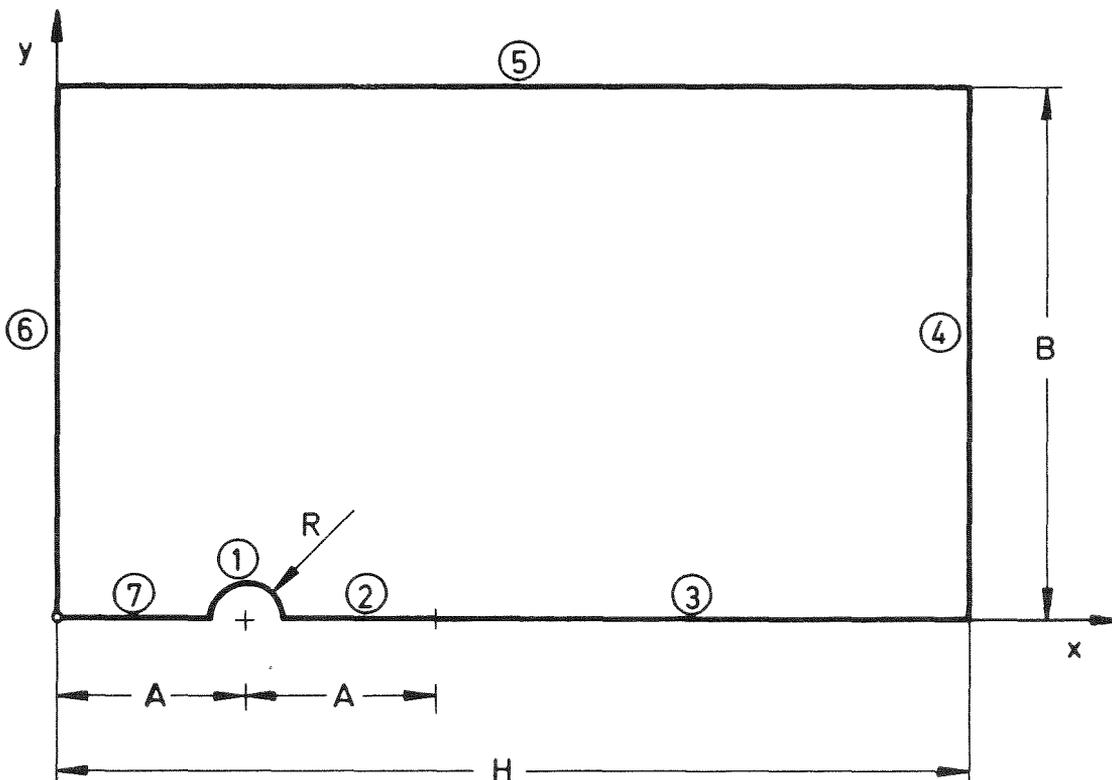


Abb.17: Skizze des zweidimensionalen Ringraum-Modells

Die verschiedenen Ränder numerieren wir mit (1) bis (7) gemäß Skizze. In diesem Fall haben wir also das Potential φ und den Druck p so zu berechnen, daß folgende Randbedingungen erfüllt werden:

$$\begin{array}{l}
 \varphi = \varphi_B = 0 \\
 p = p_B = \text{const}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi = \varphi_B = 0 \\ p = p_B = \text{const} \end{array}} \right\} \text{ bei } \textcircled{0}$$

$$\begin{array}{l}
 \varphi = \varphi_A = 1 \\
 p = p_A = \text{const}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi = \varphi_A = 1 \\ p = p_A = \text{const} \end{array}} \right\} \text{ bei } \textcircled{4} \quad (4-36)$$

$$\begin{array}{l}
 \underline{n} \cdot \text{grad } \varphi = 0 \\
 \underline{n} \cdot \text{grad } p = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{n} \cdot \text{grad } \varphi = 0 \\ \underline{n} \cdot \text{grad } p = 0 \end{array}} \right\} \text{ bei } \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{5} \textcircled{6} \text{ und } \textcircled{7}$$

Der Radius R wird hier größer als der Rohr-Radius R_1 gewählt (zu $R=2R_1$), da der Bereich $0 \leq r \leq 2 R_1$ bezüglich der zum Kernmantel senkrechten Richtung ebenfalls aufgelöst werden muß, wie bereits in Kap.4.2 geschehen.

Die rechnerische Erfassung dieses Bereiches bereitet einige Schwierigkeiten: Wir haben es hier mit einem nicht rechteckigen Gebiet zu tun. Zudem ist der Radius R (hier 20 cm) wesentlich kleiner als die anderen Maße (hier $H=8m$, $B=4m$, $A=0.8m$).

Wegen der nicht rechteckigen Geometrie eignet sich nur die Integral-Gleichungs-Methode unmittelbar für dieses Problem.

Es ist jedoch möglich, das Problem so zu transformieren, daß anstelle der Funktionen $\varphi(x,y)$ (Potential) und $\psi(x,y)$ (Stromfunktion) die inversen Funktionen $x(\varphi,\psi)$ und $y(\varphi,\psi)$ zu berechnen sind (inverses Problem). In diesem Fall handelt es sich um ein rechteckiges Gebiet und wir können sowohl die Integral-Gleichungs-Methode als auch das Verfahren der finiten Differenzen verwenden. Hierbei erhalten wir zudem explizit die Schnittpunkte (x_i, y_j) der Maschennetzlinien gebildet aus Potential- und Stromlinien. Siehe Kap.4.4. Zunächst soll hier das Original-Problem $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ gelöst werden.

4.3.2 Direkte Potentialströmungs-Berechnung mit der Integral-Methode

Die Berechnung der Potentialströmung mit LAPL ist im Prinzip extrem einfach. Es ist lediglich der Rand in eine Anzahl diskreter Intervalle einzuteilen, wobei Ecken des Randes mit Intervall-Endpunkten zusammenfallen müssen. Die Koordinaten der Intervall-Endpunkte sind anzugeben zusammen mit der Angabe des Rand-

bedingungstyps (Dirichlet oder Neumann) und dem Randwert. Für das vorliegende Problem werden die einzelnen Ränder jeweils mit konstanten Intervalllängen unterteilt. Die Anzahl der Intervalle ergibt sich aus folgender Tabelle:

Bereich	Zahl der Intervalle
1	8*i
2	5*i
3	10*i
4	8*i
5	8*i
6	8*i
7	5*i
Summe	52*i = N

Der Faktor i wurde variiert: $i = 1, 2$.

Neben dem Potential φ wird hier gleichzeitig die Stromfunktion ψ berechnet, mit

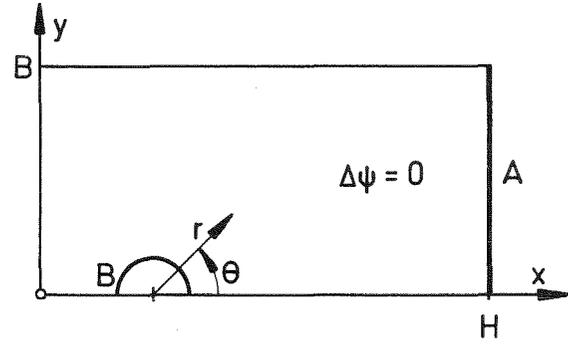
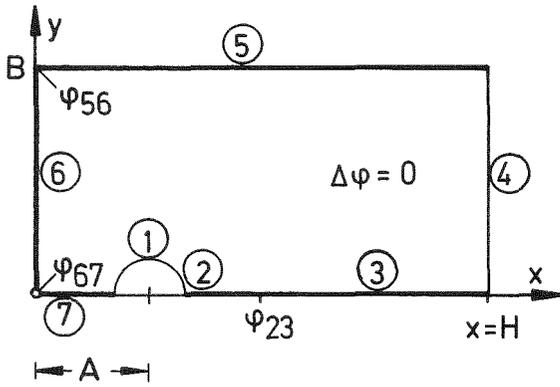
$$\text{div grad } \psi = 0$$

und Randbedingungen gemäß Abb.18. Die Linien $\psi = \text{const}$ sind orthogonal zu den Linien $\varphi = \text{const}$.

Der Wert φ_B wird zunächst zu 1 angenommen und später entsprechend den Cauchy-Riemann-Beziehungen berechnet gemäß

$$\psi_B = \int_0^B \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x=H, y) dy \quad (4-37)$$

Die Routine LAPL 1 berechnet die Randwerte von φ , ψ und $\underline{n} \cdot \text{grad } \varphi$, $\underline{n} \cdot \text{grad } \psi$, soweit sie nicht durch die Randbedingung vorgegeben sind. Mittels der Routine LAPL4 kann daraus φ, ψ sowie $u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ im Innern des betrachteten Bereichs und auf dem Rand berechnet werden. Die auf diese Weise berechneten Linien $\varphi = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$ sind in Abb.19 dargestellt. Es handelt sich hier um die Darstellung von Höhenlinien aufgrund eines Wertefeldes für φ und ψ an den Stützpunkten eines rechtwinkligen Maschennetzes. Das Maschennetz ist am Rand angedeutet. (Es handelt sich jedoch ausdrücklich nicht um das Ergebnis einer Finit-Differenzen-Rechnung.) Die Ergebnisse sind nicht sonderlich genau, wie man beim Übergang von $i=1$ auf $i=2$ feststellt. Vor allem fallen gewisse Knicke in den Linien $\varphi = \text{const}$ in Wandnähe auf. Diese Knicke sind



Bereich	Randbedingung	
	für φ	für ψ
①	$\varphi = \varphi_B = 0$	$\partial\psi/\partial r = 0$
②	$\partial\varphi/\partial y = 0$	$\psi = \psi_A = 0$
③	$\partial\varphi/\partial y = 0$	$\psi = \psi_A = 0$
④	$\varphi = \varphi_A = 1$	$\partial\psi/\partial x = 0$
⑤	$\partial\varphi/\partial y = 0$	$\psi = \psi_B > 0$
⑥	$\partial\varphi/\partial x = 0$	$\psi = \psi_B$
⑦	$\partial\varphi/\partial y = 0$	$\psi = \psi_B$

Abb. 18 Randbedingungen des Original-Ringraum-Problems

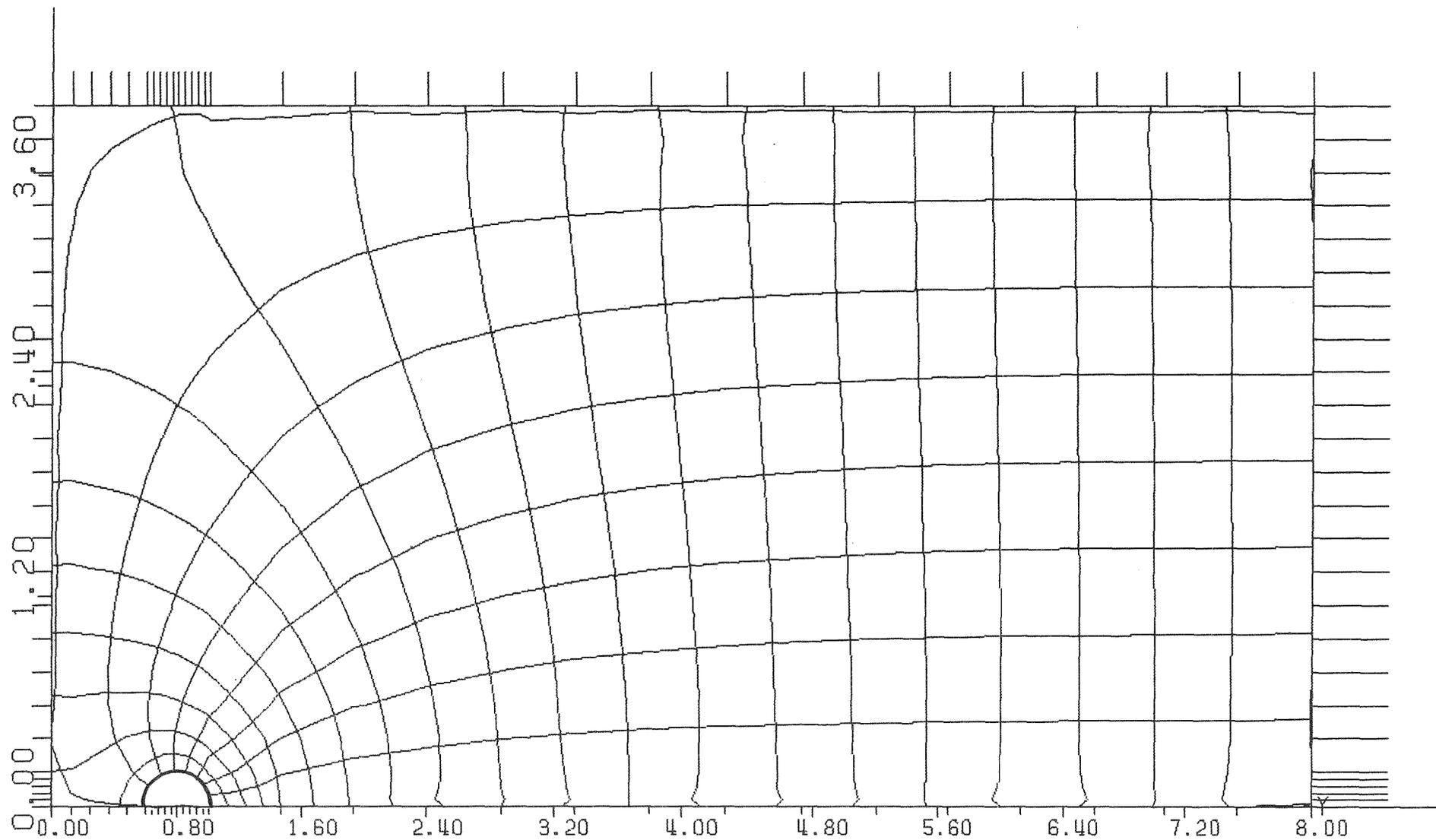


Abb. 19a Potential- und Stromlinien im Ringraum (Höhenlinien-Intervall 0.05)
 aufgrund der reinen Integral-Methoden-Lösung. Zahl der Intervalle
 auf dem Rand: $N = 52$.

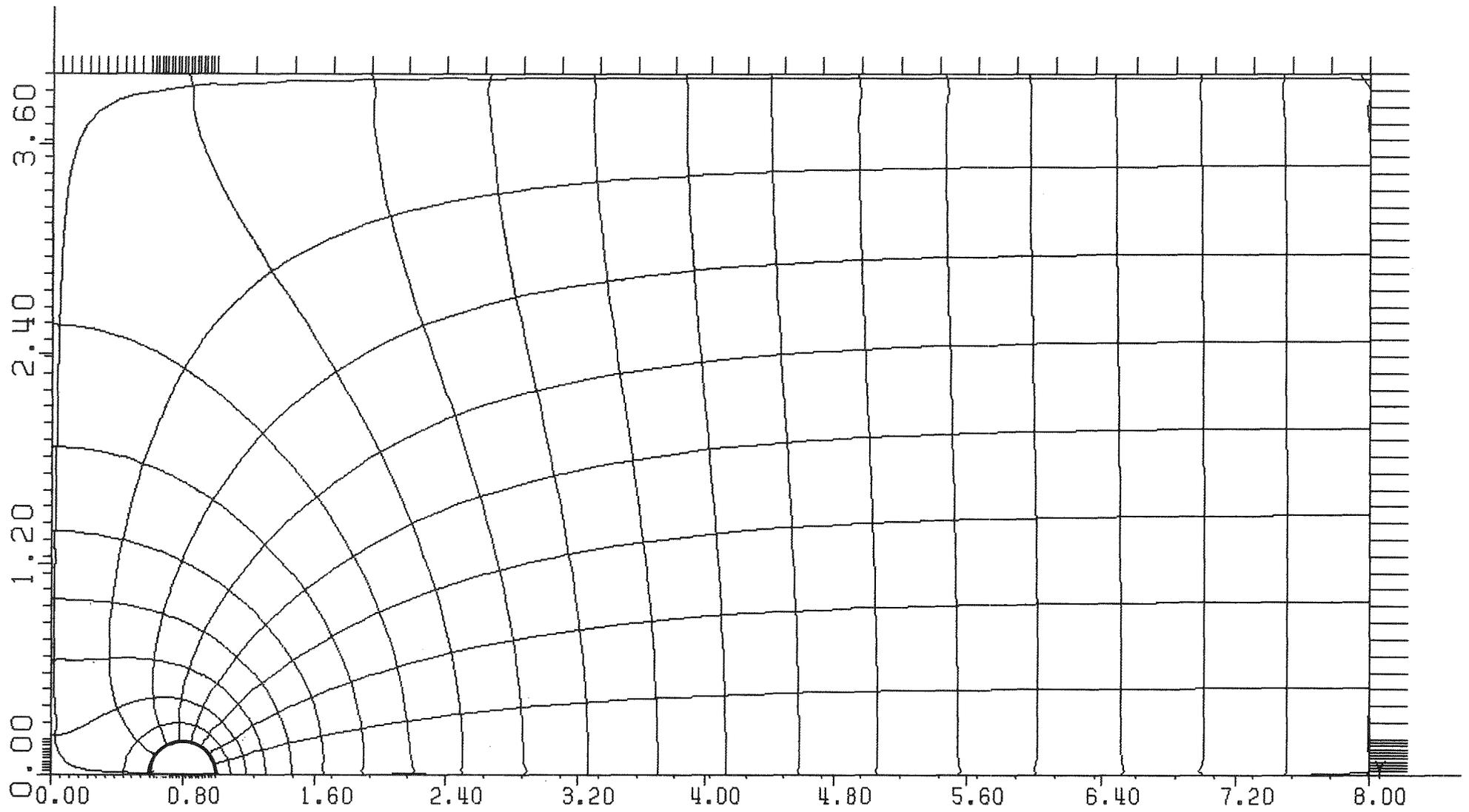


Abb. 19b Potential- und Stromlinien wie bei Abb.19a jedoch für $N = 104$.

eine Folge der unterschiedlichen Bestimmungsgleichungen für φ im Innern des Bereichs sowie auf dem Rand.

Für das Innere gilt (siehe [19] bzw. Anhang 1)

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j' F_j(\underline{x}) + \varphi_j D_j(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S.$$

Dagegen ist für den Rand

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j' F_j(\underline{x}) + \varphi_j D_j(\underline{x}), \quad \underline{x} \in O$$

wobei $D_j(\underline{x})$ verschwindet, wenn $\underline{x} \in O$ und \underline{x} auf der Verlängerung des j-ten Randstückes liegt. Im übrigen sei bezüglich der Symbole auf den Anhang verwiesen. Im Rahmen dieser Formeln ist daher $\varphi(\underline{x})$ für $\underline{x} \in O$ unabhängig von dem vorgegebenen Randwert φ_j in den Randstücken, auf deren Verlängerung sich der Randpunkt \underline{x} befindet. Für einen geringfügig in das Innere verschobenen Punkt gilt dies dagegen nicht. Bei zu grober Diskretisierung des Randes führt dies zu den in Abb. 19 sichtbaren Knicken. Auch weichen die Integrale

$$I_\varphi = \oint_0 n \cdot \text{grad} \varphi \, dO, \quad I_\psi = \oint_0 n \cdot \text{grad} \psi \, dO \quad (4-38)$$

über die Oberfläche, die eigentlich null oder zumindest klein sein sollen, gegenüber $(\varphi_A - \varphi_B)$ und $(\psi_A - \psi_B)$ deutlich von Null ab:

i	N	I_φ	I_ψ
1	52	$1.53 \cdot 10^{-3}$	$0.54 \cdot 10^{-3}$
2	104	$0.57 \cdot 10^{-3}$	$0.05 \cdot 10^{-3}$

Die Ursache hierfür liegt in der starken Variation von φ in der Nähe des Stützens in den Bereichen (2) und (7). Hier ist das Rechnen mit intervallweise konstantem φ nicht zulässig. Auch variiert auf dem Randbereich (1), d.h. am Umfang des Stützens, der Normalengradient von φ um etwa den Faktor zwei und wird also ebenfalls nur schlecht durch die Annahme intervallweise konstanter Gradienten erfaßt.

Da die Anzahl der Intervalle nicht beliebig gesteigert werden kann (der Rechenaufwand steigt mit N^3) wurde nach anderen Wegen gesucht, die Genauigkeit der Rechnung zu verbessern. Eine naheliegende Methode, die hier auch zum Erfolg führt, ist die Benutzung einer analytischen Näherungslösung φ_a , so daß φ_a

die Randbedingungen zumindest näherungsweise erfüllt und numerisch nur noch die Lösung $(\psi - \varphi_a)$ bestimmt wird. Eine brauchbare Näherungslösung wurde durch Überlagerung der Potentialströmungen infolge zwölf verschiedener Punkt-Quellen und -Senken konstruiert, die außerhalb des betrachteten Bereichs gemäß Abb.20 angeordnet werden:

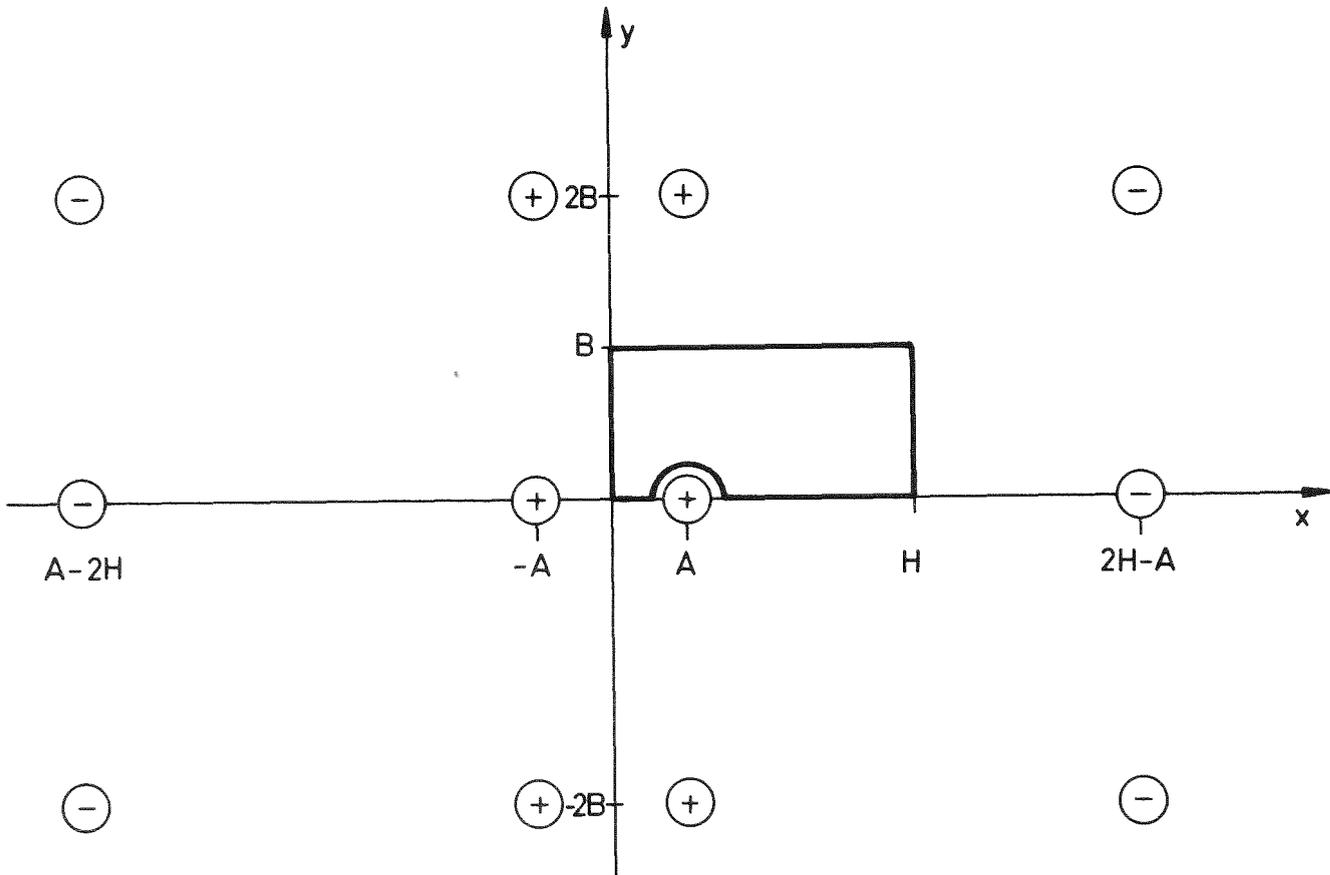


Abb.20: Quellen- und Senken-Anordnung der analytischen Näherungslösung

Diese Anordnung entsteht durch Spiegelung einer Quelle bzw. Senke in der Stutzenposition $(A,0)$ an den verschiedenen Rändern des betrachteten Bereichs. Wird dieses Grundmuster in x- und y-Richtung unendlich oft periodisch wiederholt, so erhält man hierdurch die exakte Lösung des gesuchten Problems[4] (mit der Ausnahme, daß anstelle des Kreises mit Radius R um $(A,0)$ eine etwas anders geformte Kurve, z.B. mehr eine Ellipse, entstehen wird). Bei Beschränkung auf endlich viele derartige Quellen und Senken können wir daher eine brauchbare Näherungslösung erwarten. Dieses Vorgehen ist in seiner Grundidee das Singularitäten-Verfahren.

Wenn r_i der Abstand von einem Ort (x,y) innerhalb des Gebietes S zur i -ten Quelle bzw. Senke ist, dann lautet das resultierende Potential

$$\varphi_a = \left(\sum_i Q_i \log \frac{r_i}{R} \right) + \varphi_0 \quad (4-39)$$

wobei der Radius R willkürlich zu $R=R_1$ gewählt wird. Entsprechend lautet die Stromfunktion

$$\psi_a = \left(\sum_i T_i \vartheta_i \right) + \psi_0 \quad (4-40)$$

wobei ϑ_i der Winkel zwischen der x -Achse und dem Radius vom i -ten Quellpunkt zum betrachteten Punkt (x,y) ist. Der Winkel wird mittels $\vartheta_i = \vartheta_i' + \vartheta_i'' \cdot \cos 2\left(\frac{x-x_i'}{r_i}\right)$ berechnet, wobei ϑ_i' und ϑ_i'' Konstanten sind, die die Transformation auf die Hauptwerte der inversen trigonometrischen Funktion erlauben. Die Quellstärken Q_i bzw. T_i sind dem Betrage nach alle gleich Q bzw. T mit Vorzeichen entsprechend der obigen Skizze. Die Parameter Q, φ_0 und T, ψ_0 werden so bestimmt, daß

$$\varphi_a (A, R) = 0$$

und

$$\varphi_a (H, B/2) = 1$$

(4-41)

bzw.

$$\psi_a (A+R, 0) = 0$$

und

$$\psi_a (A-R, 0) = 1$$

ist. Diese Bedingungen sind Spezialfälle der Forderungen $\varphi, \psi = \text{const}$ auf den Rändern.

Diese analytische Näherung approximiert die tatsächliche Lösung bereits soweit, daß die verbleibenden Randwerte für $(\varphi - \varphi_a)$ nur noch maximal 2.3% der ursprünglichen Werte und bei $(\psi - \psi_a)$ noch 22% der ursprünglichen Werte ausmachen. Die Linien $\varphi_a = \text{const}$ und $\psi_a = \text{const}$ sind in Abb.21 dargestellt. Das schließlich berechnete Gesamtergebnis für φ und ψ (mit analytischem Anteil und numerisch bestimmtem Rest) zeigt Abb.22. Ein gewisser Restfehler ist hier in den Ecken bei $x=0$ erkennbar. Die Randintegrale gemäß Gl.(4-38) betragen jetzt aber nur noch

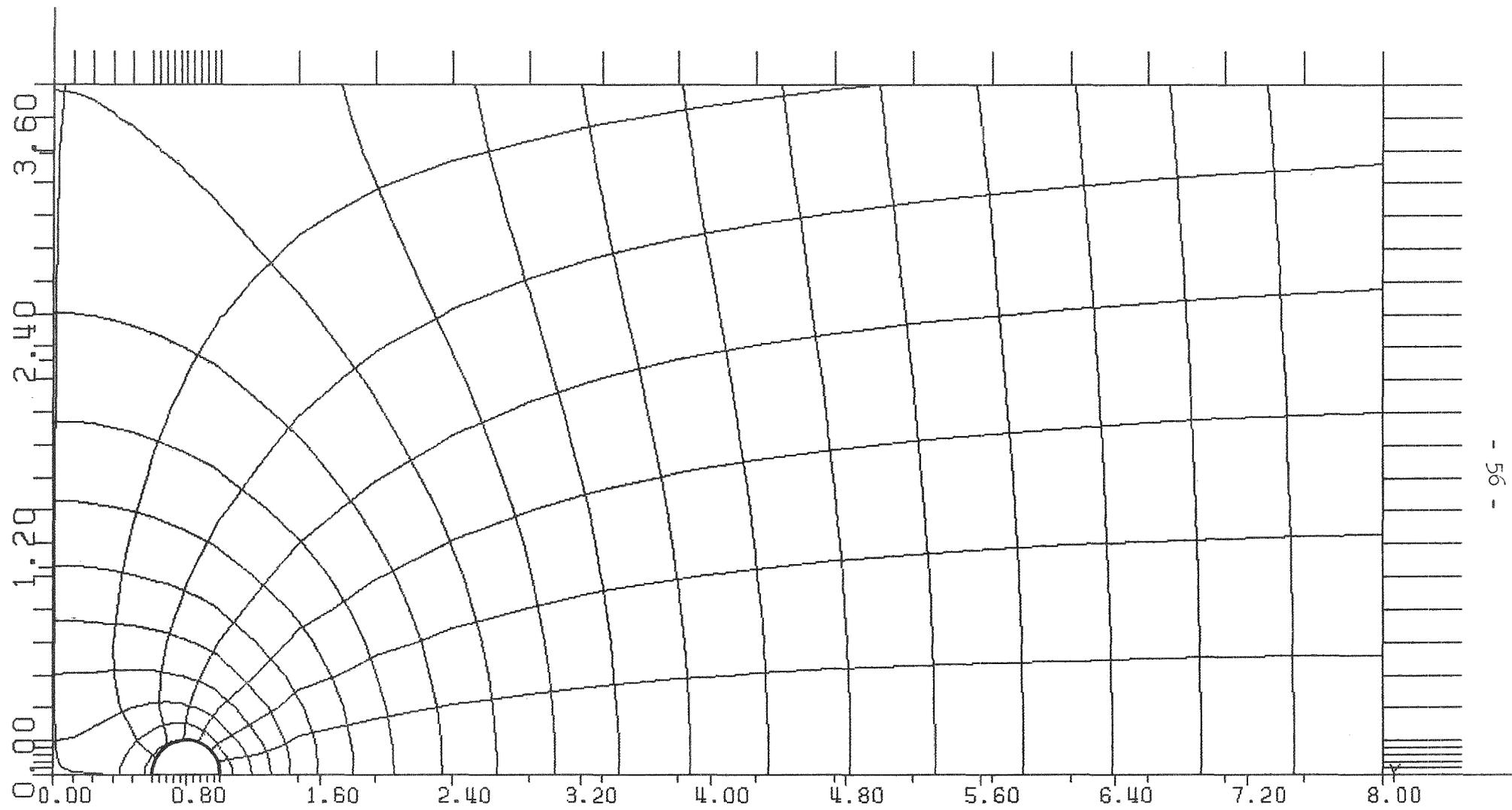


Abb.21 Potential- und Stromlinien im Ringraum aufgrund allein der analytischen Näherung.

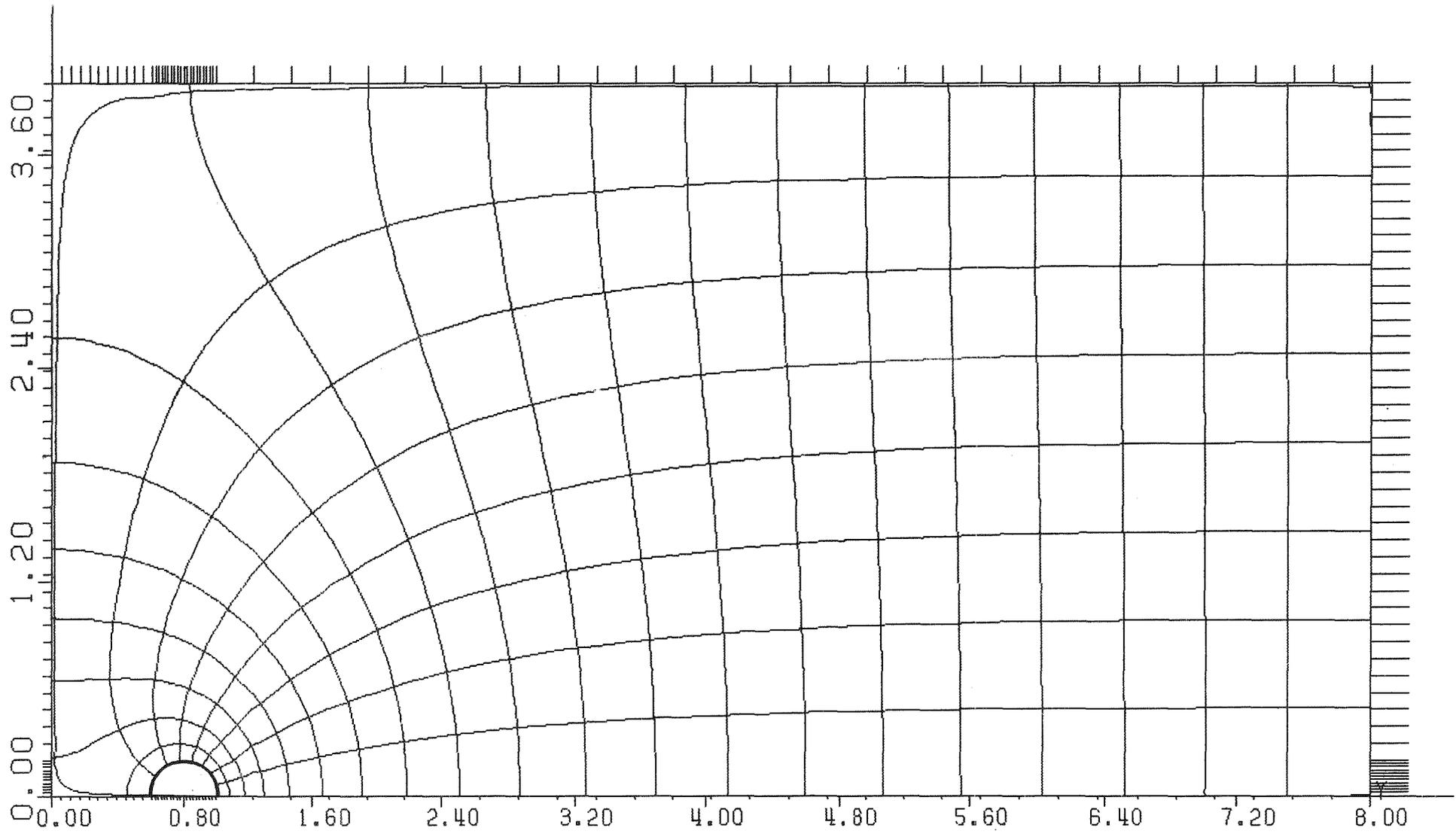


Abb. 22 Potential- und Stromlinien im Ringraum gemäß Integral-Methoden-
Lösung plus analytischer Näherung.

i	N	I_{φ}	I_{ψ}
1	52	$0.33 \cdot 10^{-3}$	$-0.39 \cdot 10^{-3}$
2	104	$0.10 \cdot 10^{-3}$	$-0.02 \cdot 10^{-3}$

Sie liegen bezüglich I_{φ} damit um den Faktor fünf unter den Werten ohne analytische Teillösung. Abb.22 wäre damit eine brauchbare Darstellung der Potential-Strömungs-Rechnung. Insbesondere entsprechen die Linien $\varphi = \text{const}$ den Isobaren zur Zeit $t = 0$ und die Linien $\psi = \text{const}$ sind für alle Zeiten $t > 0$ die Stromlinien.

Für die Auswertung (beispielsweise bei Integrationen der Drücke zur Berechnung der resultierenden Kräfte) ist jedoch die punktweise Angabe der Werte φ und ψ auf dem rechtwinkligen Maschennetz unpraktisch, da der interessierende Bereich in Stützennähe nur ungenau - oder aber Bereiche an anderen Stellen zu aufwendig erfaßt werden. Hierzu ist die explizite Berechnung des von $\varphi = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$ gebildeten krummlinigen Maschennetzes, d.h. die explizite Bestimmung der Koordinaten (x_i, y_j) der Gitter-Punkte wünschenswert. Dieses sogenannte inverse Problem wird im folgenden Kapitel behandelt.

4.4 Zweidimensionaler abgewickelter Ringraum, inverses Problem,
Lösung mittels Integral-Methode und Differenzen-Verfahren.

4.4.1 Grundlagen und Randbedingungen

Von Thom u. Apelt [10] wurde gezeigt, daß zu dem komplexen Potential

$$w(z) = \varphi + i\psi \quad (4-42)$$

mit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4-43)$$

außer in singulären Punkten auch die Umkehrung

$$z(w) = x + iy \quad (4-44)$$

existiert, mit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0. \quad (4-45)$$

D.h. anstelle von φ und ψ als Funktion von x und y können wir auch x und y als Funktion von φ und ψ berechnen. Während der x - y -Bereich unregelmäßig umrandet war, ist der φ - ψ -Bereich für das inverse Problem ein Rechteck, da φ und ψ im x - y -Bereich jeweils zwischen $\varphi_A=1$ und $\varphi_B=0$ bzw. $\psi_A=0$ und ψ_B variieren. Die Randbedingungen für das inverse Problem werden anhand von Abb.23 diskutiert.

Außer für Bereich ① sind die Randbedingungen die offensichtliche Umkehrung der Randbedingungen des ursprünglichen Problems (s. Abb.18). Die Bedingungen für Bereich ① ergeben sich aus folgendem:

Die Randkurve ① läßt sich darstellen als

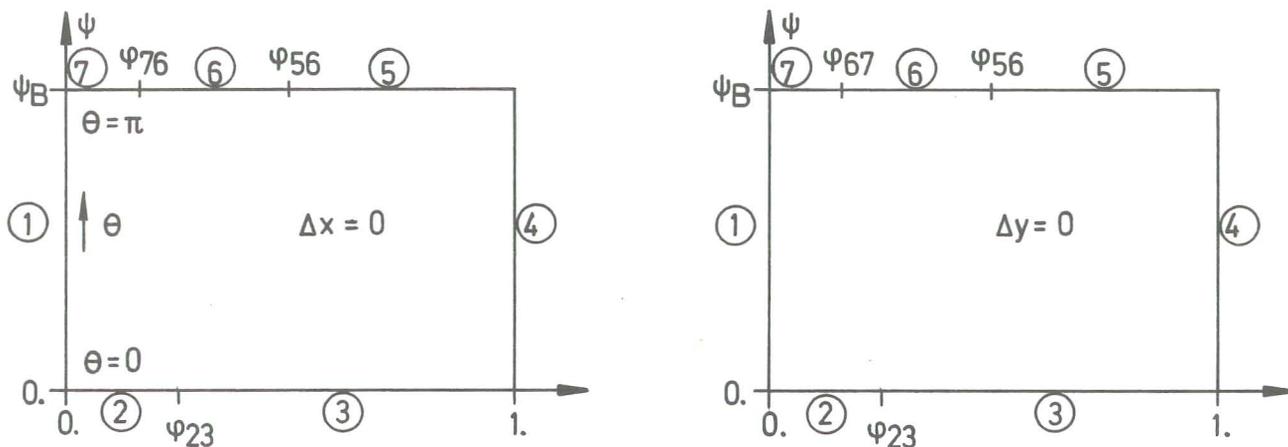
$$\begin{aligned} x &= A + R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \end{aligned} \quad (4-46)$$

mit dem Winkel θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) als Parameter. Multiplikation der ersten mit $\cos \theta$ und der zweiten mit $\sin \theta$ und Addition liefert die erste Bedingung

$$(x-A) \cos \theta + y \sin \theta = R \quad (4-47)$$

Desweiteren folgt aus $\varphi = \text{const}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = R \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \theta \right] = 0$$



Bereich	Randbedingung	
①	a) $x = x(\psi)$	$y = y(\psi)$
	b) $\frac{\partial x}{\partial \varphi} \sin \theta + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cos \theta = 0$	oder $-\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos \theta + \frac{\partial y}{\partial \psi} \sin \theta = 0$
	$(x - A) \cos \theta + y \sin \theta = R$	
②	$\partial x / \partial \psi = 0$	$y = 0$
③	$\partial x / \partial \psi = 0$	$y = 0$
④	$x = H$	$\partial y / \partial \varphi = 0$
⑤	$\partial x / \partial \psi = 0$	$y = B$
⑥	$x = 0$	$\partial y / \partial \varphi = 0$
⑦	$\partial x / \partial \psi = 0$	$y = 0$

Abb. 23 Randbedingungen des inversen Ringraum-Problems

Mit den bekannten Differentiationsformeln für die Umkehrfunktionen [25,S.124-125] folgt hieraus:

$$\sin \theta \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \cos \theta \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 \quad (4-48)$$

Mit den Cauchy-Riemannschen Bedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = - \frac{\partial x}{\partial \psi} \quad (4-49)$$

folgt weiter

$$\sin \theta \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \cos \theta \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0 \quad , \quad - \cos \theta \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \sin \theta \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0 \quad (4-50)$$

Das gleiche Ergebnis erhält man aus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (4-51)$$

$$\rightarrow - \cos \theta \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \sin \theta \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0.$$

Wir sehen damit, daß das inverse Problem für x mit dem für y verkoppelt ist. Die Randbedingungen sind von kompliziertem Typ; insbesondere enthalten sie den Winkel θ als Unbekannte, wodurch die Randbedingungen nichtlinear werden. Wir haben damit zumindest für dieses Beispiel das interessante Ergebnis:

Die Transformation eines linearen Problems mit nichtlinearer Geometrie auf eine lineare Geometrie ergibt ein nichtlineares Problem.

Selbst wenn sich das nichtlineare Problem lösen ließe, blieben noch folgende Schwierigkeiten: Die Werte von φ_{56} und φ_{57} , also den Koordinaten des Wechsels im Randbedingungstyp sind im inversen Problem nicht berechenbar. Zudem ist der Wert φ_8 nicht bekannt. Er kann erst aus der Lösung gemäß Gl.(4-37) berechnet werden. Es scheint damit so, als ob die inverse Technik, die andernorts [10,7, 13,14] als so sehr hilfreich angepriesen wird und die aufgrund dieser Berichte hier verfolgt wurde, bei Problemen wie dem vorliegenden nicht anwendbar ist.

Genauer muß gesagt werden, die inverse Technik kann nicht unmittelbar angewendet werden. Denn in der vorliegenden Situation, in der wir das ursprüngliche Problem bereits gelöst haben, lassen sich die Randbedingungsschwierigkeiten umgehen. Wir kennen ja bereits die Werte für φ_{56} , φ_{57} und φ_{B1} , sowie die Funktion $\psi(\theta)$ auf dem gekrümmten Rand (1). Aus letzterem lassen sich mit Gl.(4-46) die Umkehrfunktionen

$$x = x(\psi) \quad \text{und} \quad y = y(\psi) \quad \text{auf } 1$$

berechnen.

Damit ist dann die Lösung $x(\varphi, \psi)$ und $y(\varphi, \psi)$ determiniert und wir können die Schnittpunkte $(x_{i,j}=x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j}=y(\varphi_i, \psi_j))$ des gewünschten Maschennetzes berechnen. Zuvor jedoch wollen wir aus der bereits bekannten Lösung $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ die Linien $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ im φ - ψ -Diagramm aufzeichnen, indem wir das aus

$$\left(\varphi_{i,j} = \varphi(x_i, y_j) \quad ; \quad \psi_{i,j} = \psi(x_i, y_j) \right)$$

gebildete Maschennetz zeichnen. Dies ist in Abb.24. geschehen. Wir erkennen hierbei die Stellen bei φ_{56} und φ_{67} als Singularitäten. In der Nähe dieser Kanten hat das komplexe Potential des ursprünglichen Problems

$$\begin{aligned} w &= \varphi + i\psi = w(z), \quad z = x + iy \quad \text{den Verlauf} \\ w &\sim z^2 \end{aligned} \tag{4-52}$$

mit dem Resultat, daß hier sowohl w als auch die ersten Ableitungen im Eckpunkt verschwinden. Das inverse Problem liefert jedoch

$$z \sim w^{1/2} \tag{4-53}$$

was bedeutet, daß hier die Ableitungen nicht stetig variieren.

4.4.2 Lösung mit der Integral-Methode

Diese Singularitäten erweisen sich nun als zusätzliche Barriere bei der Lösung des inversen Problems - zumindest mit der Integral-Gleichungs-Methode IAPL. Die Annahme stückweise konstanter Ableitungen \underline{n} -grad x und \underline{n} -grad y ist in der Nähe der Singularitäten unbrauchbar. Die Auswirkung zeigt Abb.25 in dem das mit IAPL berechnete Maschennetz dargestellt ist. Im Prinzip ließe sich vielleicht auch dieses Problem lösen, wenn wie bei dem ursprünglichen Problem analytische Näherungslösungen $x_a(\varphi, \psi)$ und $y_a(\varphi, \psi)$ gefunden werden könnten, die zumindest diese Singularitäten explizit wiedergeben, so daß das verbleibende Problem für $(x-x_a)$ keine Singularitäten aufweist. Dieser Weg wurde versucht unter Verwendung von Beziehungen der Art

$$z = \left[\frac{1}{A_1} (w - w_1) \right]^{1/2} + \left[\frac{1}{A_2} (w - w_2) \right]^{1/2}$$

mit

$$w_1 = \varphi_{56} + i\psi_B$$

$$w_2 = \varphi_{67} + i\psi_B$$

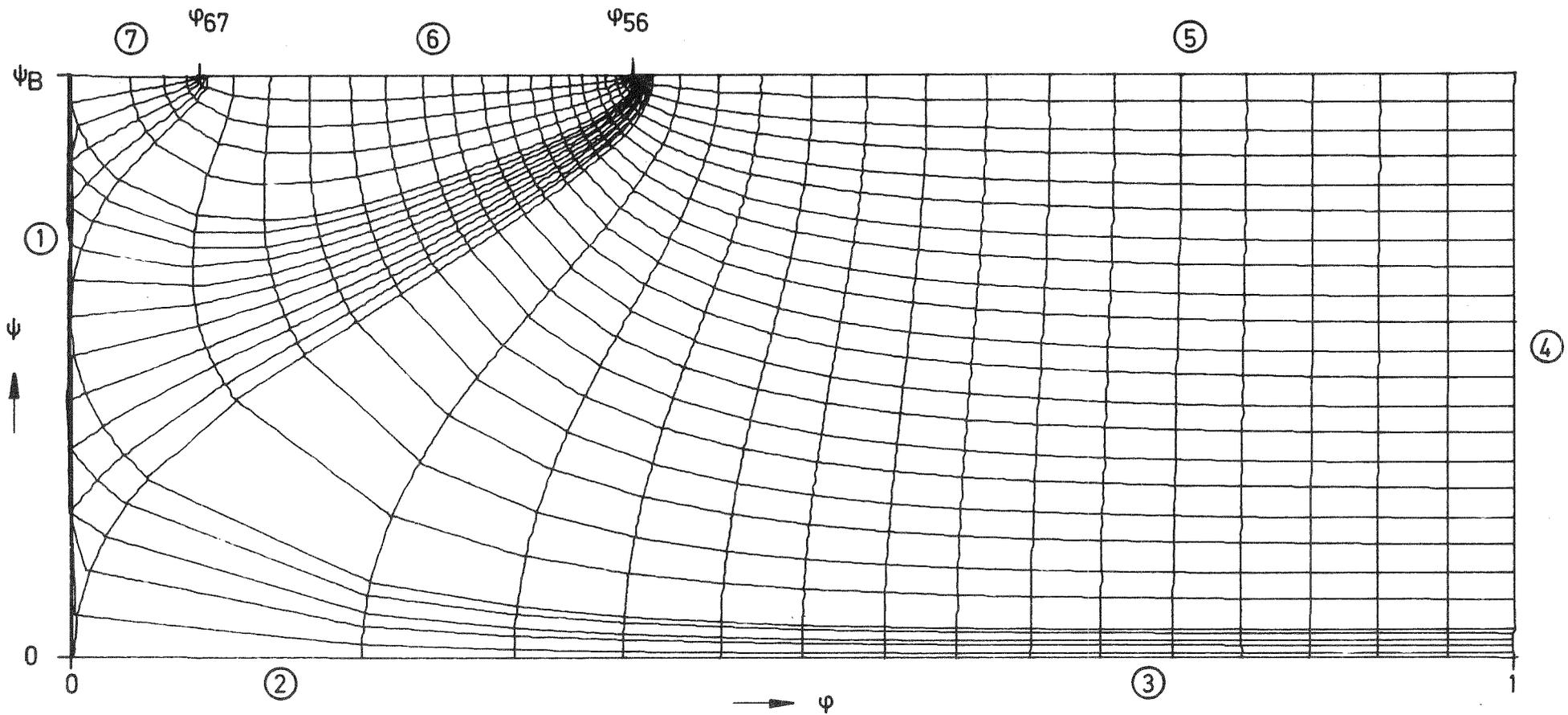


Abb. 24 Linien $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ in φ - ψ -Koordinaten. Die Höhenlinien entsprechen den x - bzw. y -Werten wie sie für das in Abb. 19a gezeigte Maschennetz verwendet wurden.

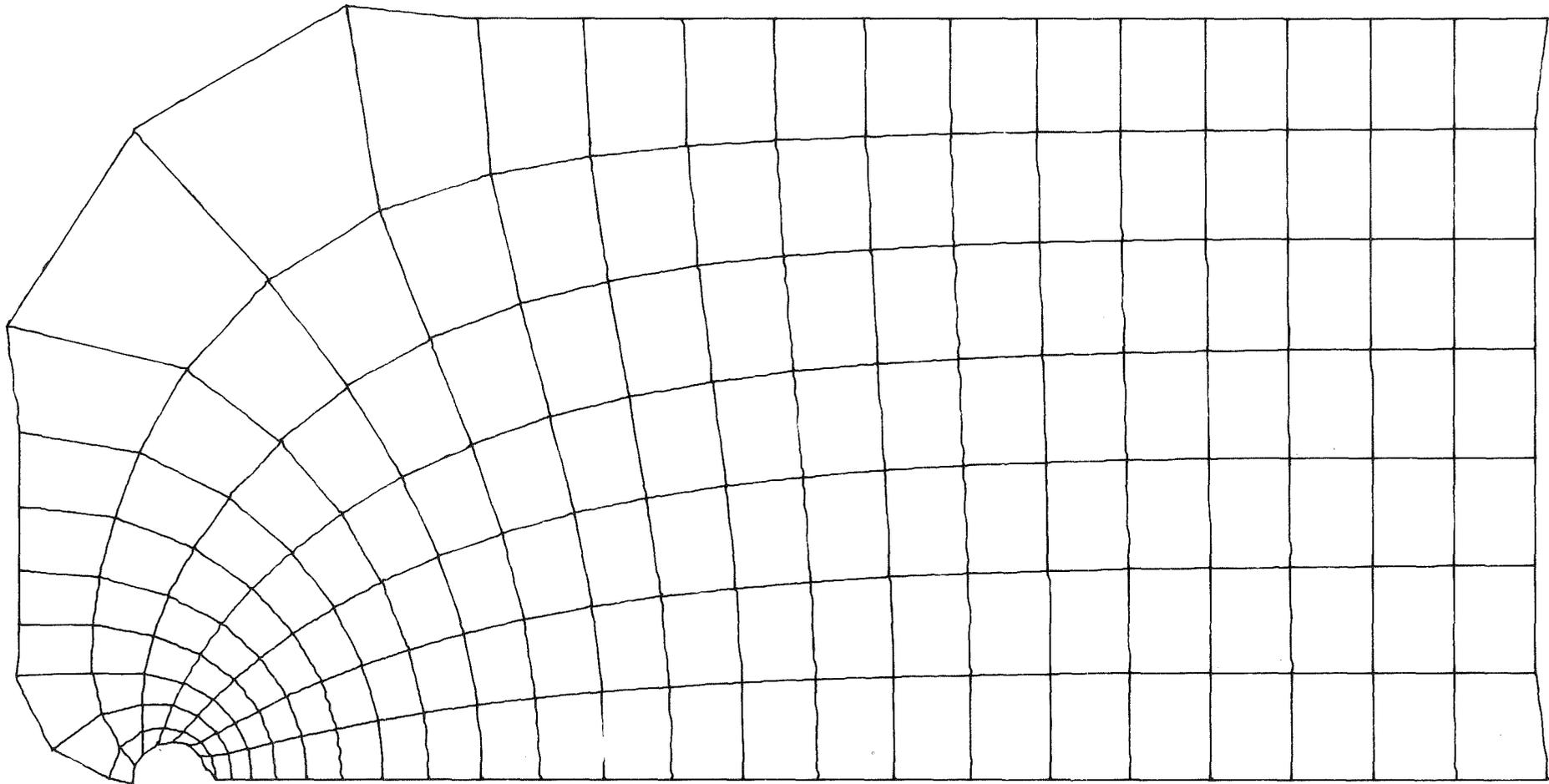


Abb. 25a Das mit der Integral-Methode aus der inversen Formulierung berechnete Maschennetz. $N = 52$.

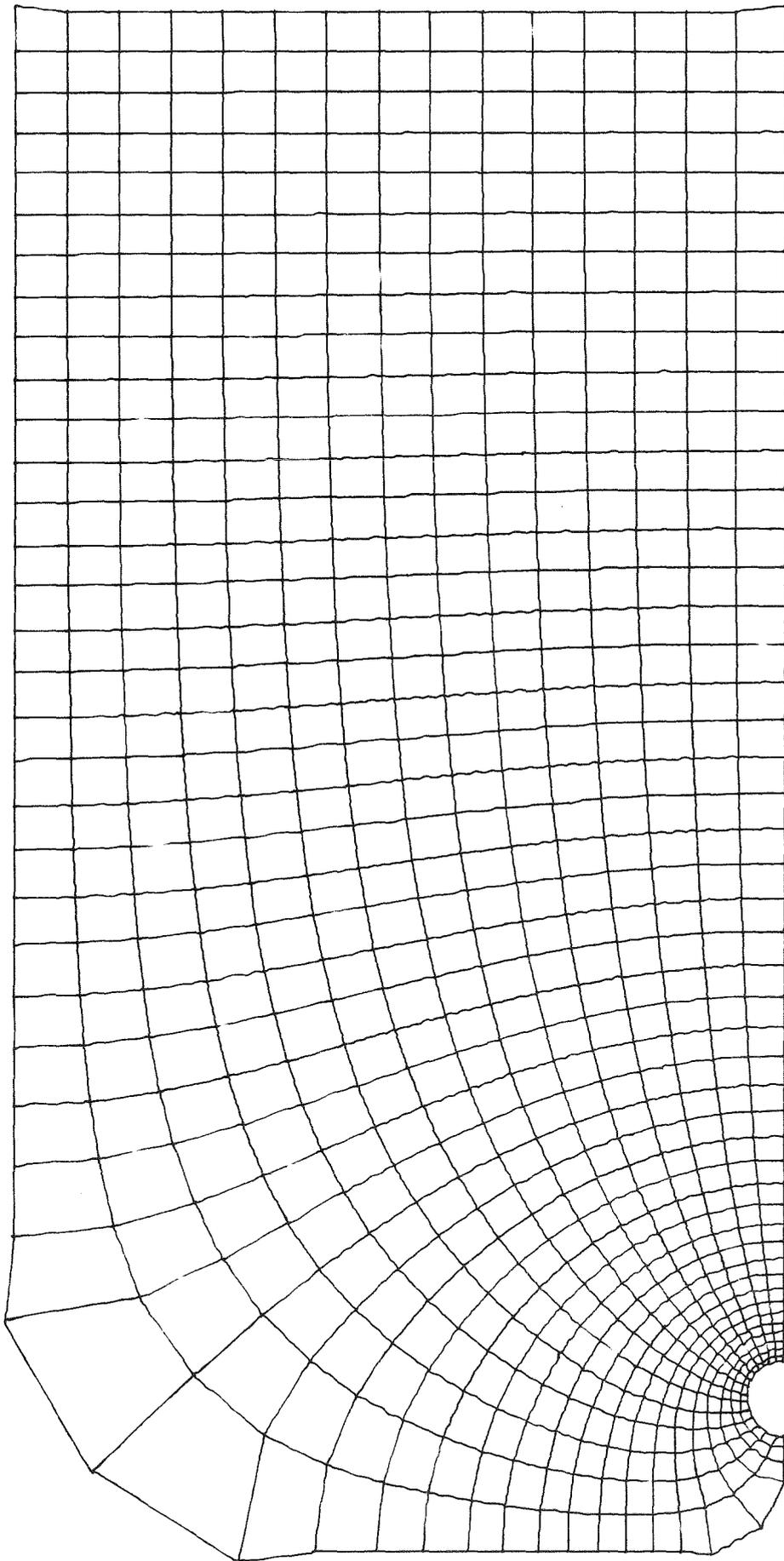


Abb. 25b dito für $N = 104$.

und Faktoren A_1 und A_2 die anhand der ursprünglichen Lösung in der Nähe der Eckpunkte so bestimmt werden können, daß dort etwa gilt $w = A_1 z^2 + w_1$ bzw. $w = A_2 \bar{z}^2 + w_2$. Damit wurde zwar - wie Abb.26 zeigt - das Ergebnis im Bereich der Ecken besser, dafür aber um so ungenauer für die eigentlich interessierenden Bereiche ① und ④.

Das Integralverfahren erwies sich damit für das inverse Problem wegen der darin auftretenden Singularitäten als unbrauchbar.

Das letztlich befriedigende Ergebnis gemäß Abb.27 wurde schließlich durch Kombination der direkten und inversen Methode gewonnen. Hier wird das Ergebnis der inversen Rechnung mit einem Ergebnis gemäß Abb.25 als Ausgangswert für eine iterative Bestimmung der $x_{i,j}$ und $y_{i,j}$ benutzt. Die Iteration hat das Ziel, die Lösungen $x_{i,j}$ und $y_{i,j}$ der beiden nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= \varphi(x_{i,j}, y_{i,j}) - \varphi_i \stackrel{!}{=} 0 \\ g &= \psi(x_{i,j}, y_{i,j}) - \psi_j \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (4-54)$$

zu bestimmen, wobei die Funktionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ aus der Lösung des ursprünglichen Problems hervorgehen. Die Iteration benutzt das Newton-Schema

$$\begin{pmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \end{pmatrix}^n - T^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4-55)$$

mit der Frechet-Matrix

$$T = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{bmatrix} = T(x_{i,j}^n, y_{i,j}^n). \quad (4-56)$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Beziehungen gilt:

$$T = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ -\partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial x \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

mit

$$\det(T) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = [\text{grad}\varphi]^2 \geq 0 \quad (4-58)$$

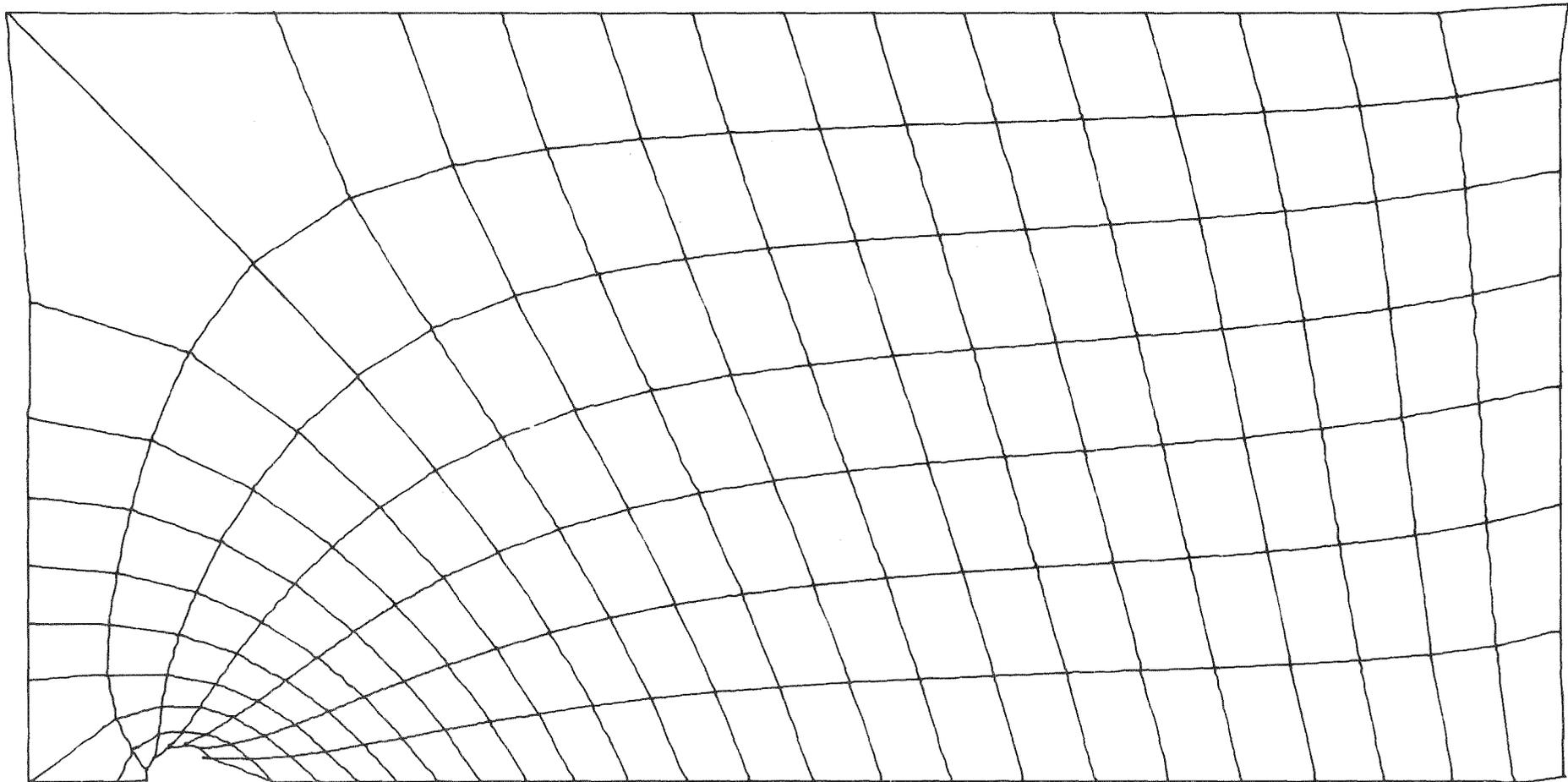


Abb. 26a Das mit der Integral-Methode aus der inversen Formulierung
berechnete Maschennetz bei Erfassung der Eck-Singularitäten.

$N = 52$.

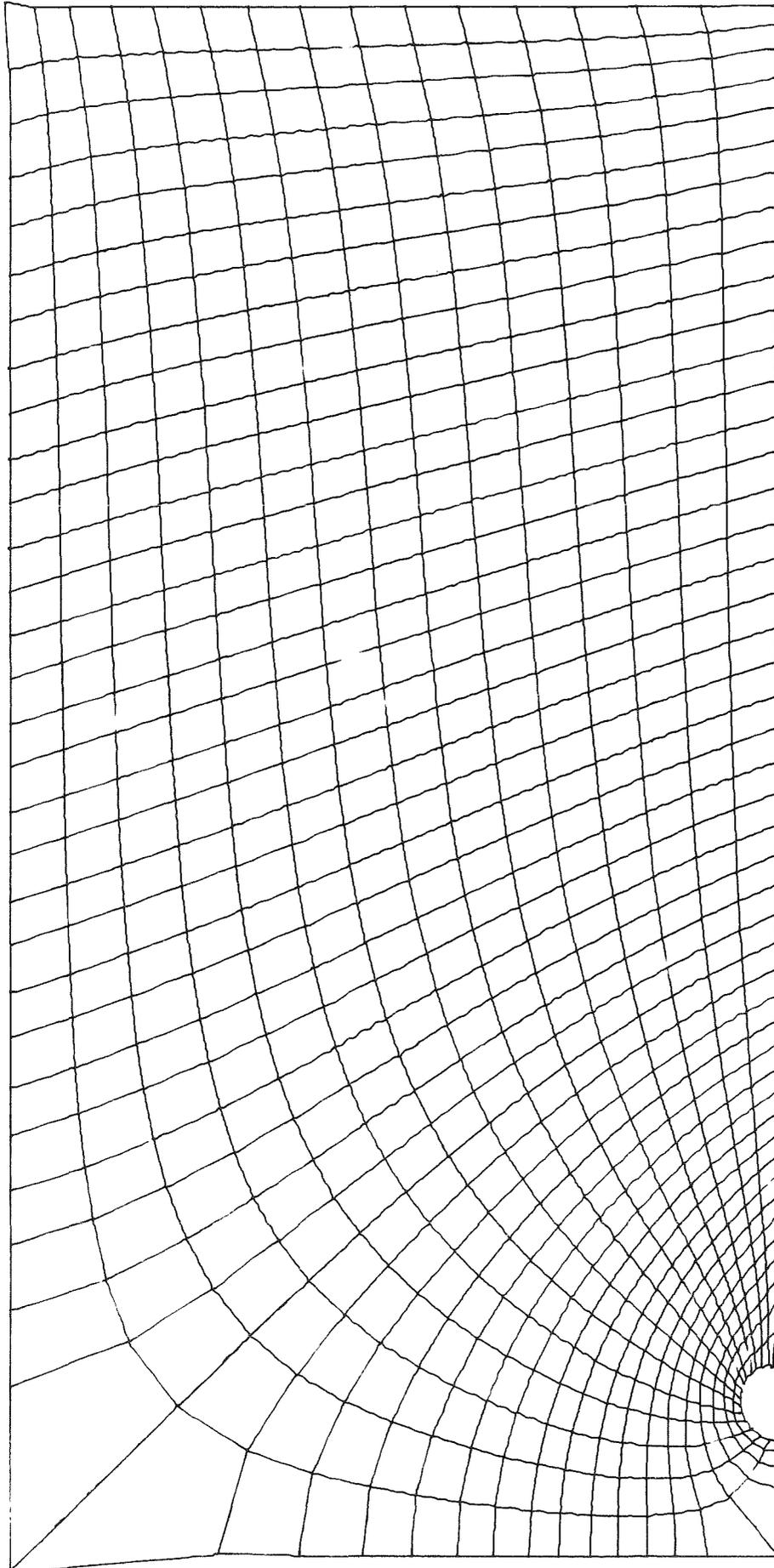


Abb. 26b Dito für $N = 104$.

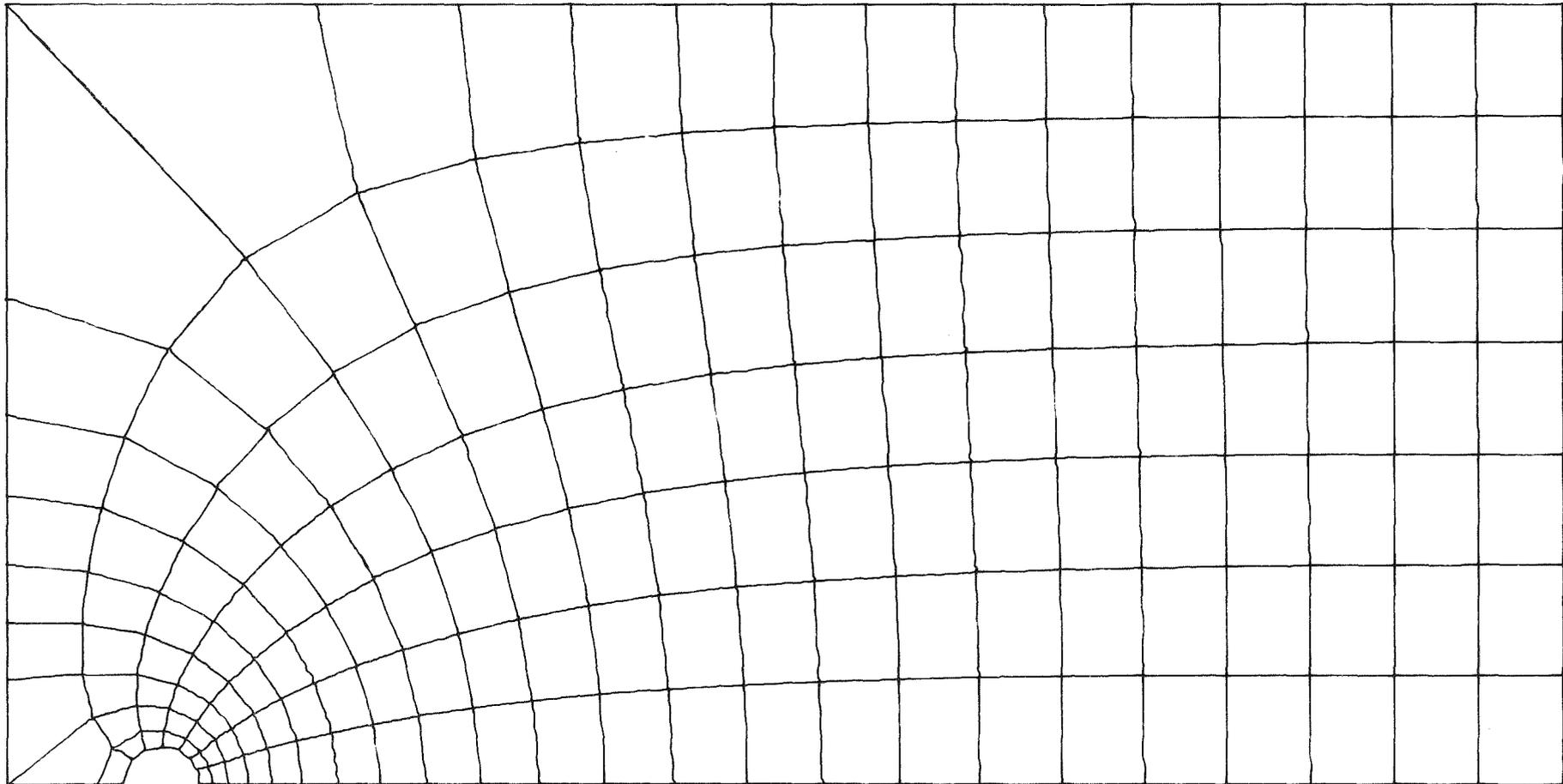


Abb. 27a Das mit der Integral-Methode iterativ bestimmte Maschennetz.

$N = 52$.

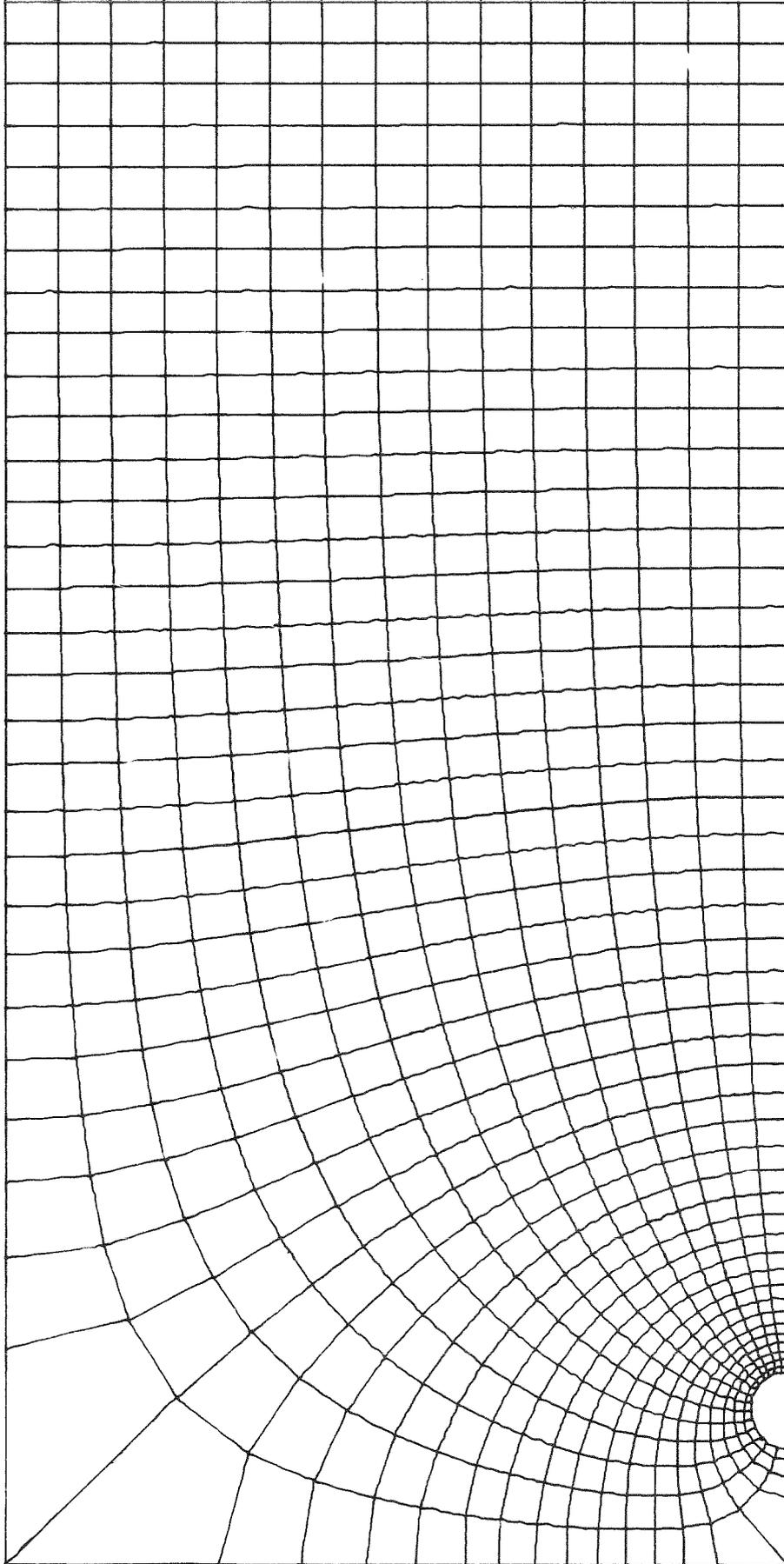


Abb. 27b Dito für N= 104.

Die Determinante verschwindet lediglich in den sigulären Punkten, für die wir aber die x- und y-Koordinaten schon kennen. Ansonsten gilt

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x & -\partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial x \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

Diese Iteration führt nach ca. 10 Iterationsschritten zu dem in Abb.27 gezeigten Ergebnis.

4.4.3 Lösung mittels finiter Differenzen und zyklischer Reduktion

Ausgehend von den Randwerten $\varphi_{56}, \varphi_{67}, \varphi_B$ und $x(\varphi), y(\varphi)$ für Bereich (1), kann das inverse Problem besonders einfach mittels finiter Differenzen gelöst werden. Hierzu unterteilen wir das Rechteck $(0,1) \times (0, \varphi_B)$ im $\varphi-\psi$ -Raum in finite Maschen, wobei wir in ψ -Richtung konstante Maschenweiten $\Delta\psi = \varphi_B/N$ und in φ -Richtung konstante oder variable Maschenweiten wählen können (hier wurden konstante gewählt, $\Delta\varphi = 1/M$). Wir erhalten dann aus $\Delta x=0$ bzw. $\Delta y=0$ ein lineares Gleichungssystem für die $x_{i,j}$ und $y_{i,j}$. Wenn nicht der Typ der Randbedingung am Rand bei $\varphi=\varphi_B$ zwischen Neumann- und Dirichlet-Typ wechseln würde, ließe sich das entstehende lineare Gleichungssystem unmittelbar mittels zyklischer Reduktion lösen. Da es nur die relativ wenigen Gleichungen für diese Randstücke sind, die Schwierigkeiten machen, können wir auch hier wieder die Kapazitäts-Matrix-Technik anwenden und das Problem unter mehrfacher Benutzung der zyklischen Reduktions-Routine POIS[23]direkt (also nicht iterativ) lösen. Das Ergebnis zeigt Abb.28. Es weicht insofern von Abb.27 ab, als hier mit konstantem $\Delta\varphi$ und nicht wie bei der Integral-Methode mit variabler Diskretisierungsweite gearbeitet wird. Der Verlauf der Linie $\varphi=\text{const}$ und $\psi=\text{const}$ stimmt jedoch im wesentlichen bei beiden Rechenergebnissen gut überein.

Wir können damit feststellen, daß das Verfahren der finiten Differenzen gegenüber Singularitäten in der Randbedingung weitgehend unempfindlich ist, was es vorteilhaft von der Integral-Methode unterscheidet.

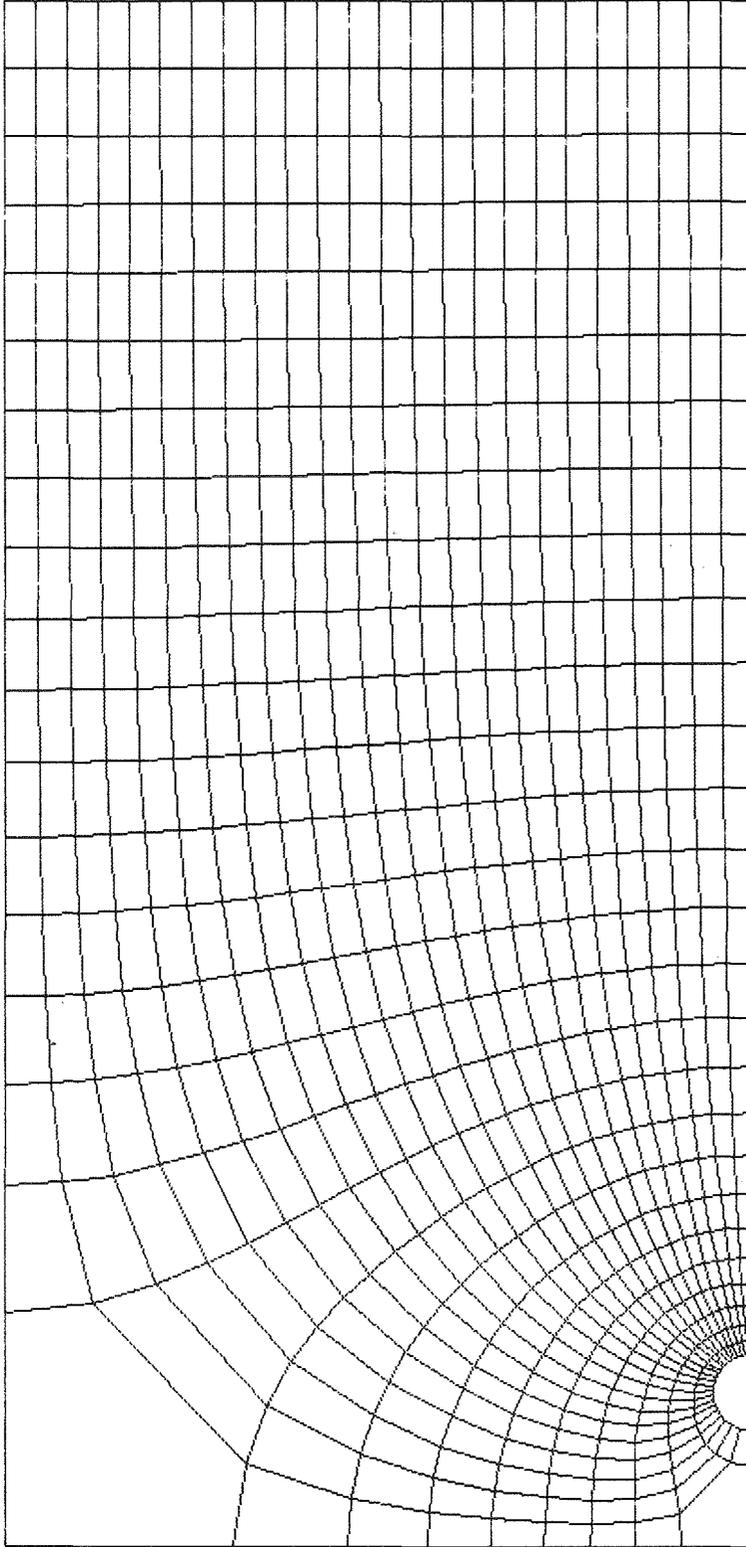


Abb. 28 Das mit dem Differenzen-Verfahren direkt berechnete Maschennetz.

4.4.4 Zeitkonstante des Ringraumes

Die Zeitkonstante τ für den Ringraum alleine ist nur von theoretischem Interesse, da wir bereits in Kap.4.1 gesehen haben, daß das transiente Verhalten vorwiegend von der Stützen-Länge abhängt. Dennoch wurde τ berechnet für

$$H = 8\text{m}, B = 4\text{m}, R = 0.2\text{m}, (p_A - p_B)/\rho = 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Das Ergebnis ist

$$\tau = 10.5 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

Dieser Wert ist relativ hoch, da hier eine große Wassermasse in der Umgebung des Stützens auf die maximale Geschwindigkeit (141 m/s) beschleunigt werden muß. Aus der Analyse des Ringraumes alleine kann daher nicht auf das transiente Verhalten des gesamten Problems geschlossen werden.

4.5 Dreidimensionale Analyse durch Kopplung der zweidimensionalen Ringraum- und Stutzen-Modelle.

4.5.1 Geometrie und Randbedingungen

In diesem Abschnitt benutzen wir die Verfahren zur Berechnung der Potentialströmung im Stutzen einerseits und im Ringraum andererseits unter Verwendung der Kopplungstheorie gemäß Kap.2.6 zur Berechnung des prinzipiell dreidimensionalen Ringraums plus Stutzen. Hierzu berechnen wir die Stutzenströmung wie beschrieben in r-z-Koordinaten. Der betrachtete Außenradius wird zu $R_2 = 2 R_1$ angesetzt, da wir zuvor in Kap. 4.2.4 festgestellt haben, daß für größere Radien die Variation über die Ringraum-Breite vernachlässigbar ist. Für $r > R = R_2$ berechnen wir die Potentialströmung des abgewickelten Ringraumes in x-y-Koordinaten gemäß Kap.4.3 bzw. 4.4. Bei gleicher Ringraumbreite s ist damit die Flächengleichheit an den Kopplungsflächen gegeben. Problematisch erscheint lediglich die Randbedingung am Übergang Ringraum (Fläche C_1) - Stutzen (C_2). Bei C_1 ist der Geschwindigkeitsvektor zwar ebenso wie bei C_2 in r-Richtung ausgerichtet. Der Betrag der Geschwindigkeit ist in C_1 jedoch winkelabhängig, während er bei C_2 geringfügig abhängig von der z-Richtung ist. Bei der Koppelung müssen wir uns also mit einer integralen Kopplungsbedingung in dem Sinne begnügen, daß der über C_1 fließende mittlere Volumenstrom gleich dem mittleren Volumenstrom bei C_2 ist und analog, daß die über C_1 und C_2 gemittelten Drücke gleich sind. Eine genauere Betrachtungsweise ist nur bei dreidimensionaler Auflösung - insbesondere des Stutzens - möglich. Wir müssen zwar damit rechnen, daß wir mit der zweidimensionalen Methode einige interessante Strömungsdetails nicht erfassen. Die Erfahrungen mit der sicher noch größeren eindimensionalen Erfassung des Übergangs Ringraum-Stutzen lehrt jedoch, daß die damit in Kauf genommenen Fehler für das integrale Verhalten sicher klein sind; klein zumindest gegenüber den sonstigen Fehlern bei Simulation der Strömungen als inkompressible Potentialströmung.

4.5.2 Transientes Verhalten

Das transiente Verhalten der Potentialströmung in den beiden gekoppelten Bereichen wird gemäß Kap.2.6.3 berechnet. Hierbei wurde folgender Fall berechnet:

$$H = 8\text{m}, A = 0.8\text{m}, B = 4\text{m}, R = 0.2\text{m}, R_1 = 0.1\text{m}, s = 0.15\text{m}, L = \text{variabel.}$$
$$(p_A - p_B) = 100 \text{ bar.}$$

Hierfür erhalten wir eine Zeitkonstante wie in Abb.29 dargestellt.

Für $L = 1\text{m}$ und $(p_A - p_B) = 100 \text{ bar}$ ist τ demnach $\tau \approx 8 \text{ msec}$. Für $(p_A - p_B) = 60 \text{ bar}$ ist $\tau \approx 13 \text{ m sec}$.

Die Maximalgeschwindigkeit am Stutzen-Austritts-Querschnitt ergibt sich rechnerisch für $(p_A - p_B) = 100 \text{ bar}$ auch hier zu $u_{\text{max}} = 141.4\text{m/s}$, was dem Ergebnis einer Rechnung nach Bernoulli entspricht.

4.5.3 Druckverteilung und resultierende Kräfte bzw. Biegemomente

Für die in 4.5.2 definierten Bedingungen ist die mittlere Druckdifferenz zwischen Ringraum und Innenraum beim Radius $r = 0.2\text{m} = R$ und für $L = 0.9 \text{ m}$ zur Zeit

$$t \geq 0 \quad p_A - p(r=R) = 25 \text{ bar}$$

$$t \rightarrow \infty \quad p_A - p(r=R) = 2.8 \text{ bar}$$

Für große Zeiten, in der Praxis also für $t \geq 20 \text{ msec}$, ist die Druckdifferenz über den Kernmantel also nahezu vernachlässigbar klein - in Übereinstimmung mit den Ergebnissen gemäß Kap.4.2.4, Abb.16. Aus der berechneten Druckverteilung können nun die am Kernmantel wirkenden Kräfte und Biegemomente bestimmt werden. Wir erhalten

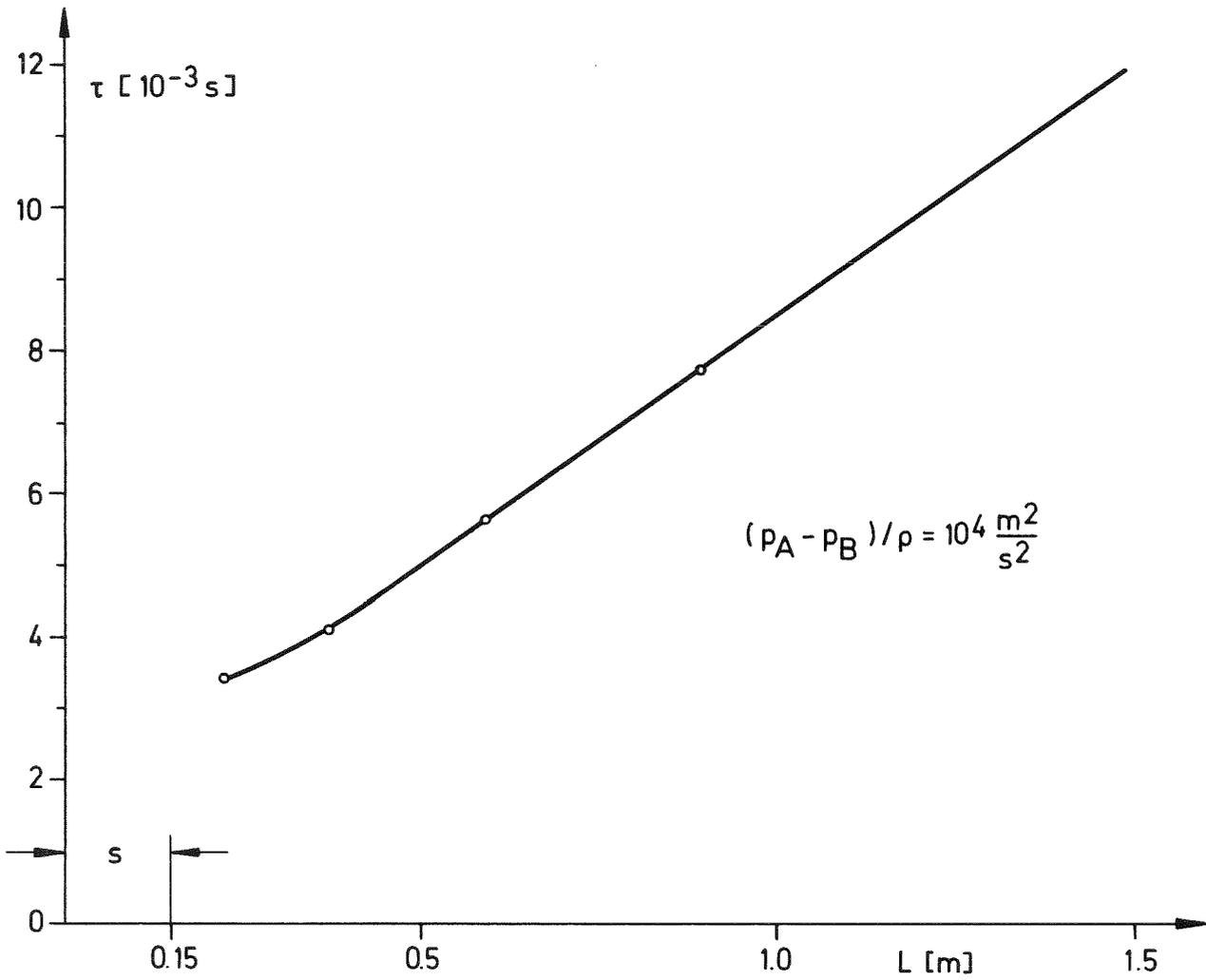


Abb. 29 Zeitkonstante τ der gekoppelten Ringraum-Stutzen - Strömung als Funktion der Stutzen-Länge L .

$$K_p = 2 \int_{x=0}^H \int_{y=0}^B \Delta p(x,y) dx dy \quad (4-60)$$

$$K = 2 \int_0^H \int_0^B \Delta p(x,y) \cos\left(\frac{y \cdot \pi}{B}\right) dx dy \quad (4-61)$$

$$M_p = 2 \int_0^H \int_0^B \Delta p(x,y) x dx dy \quad (4-62)$$

$$M = 2 \int_0^H \int_0^B \Delta p(x,y) \cos\left(\frac{y \cdot \pi}{B}\right) x dx dy \quad (4-63)$$

Hierbei ist

K_p die resultierende Druckkraft in Richtung der Kernmantel-Normalen

K die resultierende Querkraft entgegen der Stutzenrichtung

M_p ein Platten-Biegemoment

M das am Kernmantel um $x = 0$ herum wirkende Biegemoment

Die berechneten Werte schließen die Integration über den Stutzenbereich mit ein.

Die numerischen Ergebnisse für $t \geq 0$ lauten

für $(p_A - p_B) = 100$ bar:

L [m]	K_p [10^3 Mp]	K [10^3 Mp]	M_p [10^3 Mpm]	M [10^3 Mpm]
0.221	17.1	1.420	45.2	1.64
0.371	12.4	1.035	32.9	1.196
0.596	8.85	0.746	23.4	0.794
0.896	6.39	0.538	16.9	0.573

In normierter Form sind die realistischeren Werte K und M als Funktion von L in Abb.30 aufgetragen. Für $L = 1$ m und $(p_A - p_B) = 60$ bar ergibt sich daraus beispielsweise

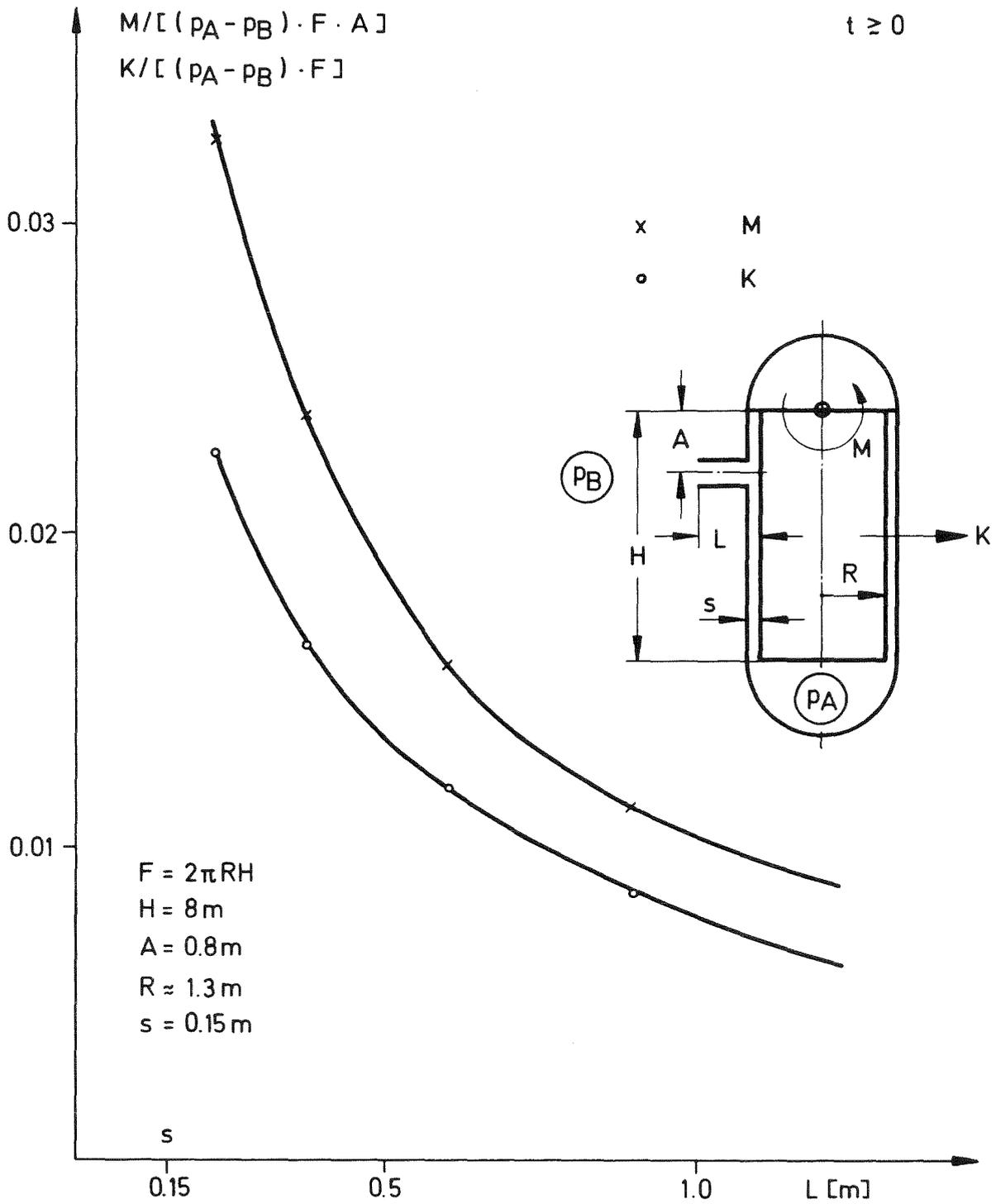


Abb. 30 Normierte maximale Kraft K und Biegemoment M am Ringmantel als Funktion der Stützen-Länge L.

$$K = 300 \text{ Mp}$$

$$M = 320 \text{ Mpm}$$

Man kann wohl vermuten, daß diese für inkompressible Strömung errechneten Werte zumindest für kleine Zeiten ($t \lesssim \tau$) obere Schranken für die tatsächlichen Belastungen darstellen, da im inkompressiblen Fluid die "Entlastungswelle" sich mit unendlicher Schallgeschwindigkeit ausbreitet und also die Belastungen schlagartig auftreten, während im kompressiblen Fluid diese Vorgänge langsamer und "weicher" ablaufen. Ein Beweis für diese Vermutung sowie eine Aussage über die Belastungen zu späteren Zeiten, wenn im realen Zustand Reflektionen der Entlastungswellen zu erwarten sind, kann hier jedoch nicht erbracht werden. Diese Fragen werden in einer folgenden Arbeit, in der kompressible und inkompressible Rechnungen verglichen werden, zu entscheiden sein.

5. Zusammenfassung

Dieser Bericht besteht aus vier Teilen.

Der erste Teil beschreibt ein aktuelles Reaktorsicherheits-Problem - das HDR-Blowdown-Experiment - und motiviert die vorliegende Potentialströmungsuntersuchung.

Der zweite Teil beschreibt die Theorie zur Berechnung des instationären Geschwindigkeits- und Druckfeldes in beliebig geformten Strömungskanälen mit starren Wänden. Es wird gezeigt, daß alle diese Felder mittels dreier Laplace-Gleichungen mit unterschiedlichen Randbedingungen beschrieben werden. Bei konstanten Druck-Randbedingungen entwickelt sich das Geschwindigkeitsfeld an jeder Stelle wie

$$\tanh \left(\frac{1}{2} t/\tau \right)$$

wobei die Zeitkonstante τ allein aufgrund der Randbedingungen und dem resultierenden Potential und dessen Gradienten an den Rändern des betrachteten Bereiches bestimmt werden kann.

Danach wird gezeigt, wie aus der Kenntnis der Potentialströmung für zwei oder mehr einzelne Strömungskanäle auf die Potentialströmung geschlossen werden kann, die sich bei Aneinanderreihung der Kanäle einstellt. Dies betrifft insbesondere wieder das transiente Verhalten.

Der dritte Teil gibt eine kurze Übersicht über Verfahren zur numerischen Lösung der auftretenden Laplace-Gleichungen. Insbesondere erwähnt und gegenübergestellt werden das finite Differenzenverfahren mit dem zugehörigen direkten Lösungsverfahren der zyklischen Reduktion sowie ein auf der Integral-Methode basierendes Verfahren IAPL. Für letzteres werden in einem Anhang zu diesem Bericht geeignete PL/1-Unterprogramme angegeben. Die genannten Verfahren werden nur für zweidimensionale Probleme beschrieben.

Im vierten Teil behandeln wir beispielhaft einige transiente Potentialströmungsprobleme in für die HDR-Blowdown-Experimente typischen Geometrien. Hierbei sind wir uns über die erheblichen physikalischen Vereinfachungen, die hierzu erforderlich sind, im Klaren. Insbesondere wird die Ausbreitung von Druckentlastungswellen hier nicht erfaßt. Wohl aber werden die durch die Trägheit des Fluids auftretenden Beschleunigungseffekte erfaßt. Ein wesentliches Ergebnis besteht darin, daß die Zeit zur Erreichung einer quasi-stationären Strömung hoher

Geschwindigkeit für HDR-Bedingungen in der Größenordnung von 10 msec liegt. Diese Zeit hängt im wesentlichen von der Länge des Stutzens ab. Die Kürze dieser Zeit ist einerseits durch die großen Druckdifferenzen bestimmt; andererseits ist sie aber eine Folge der Tatsache, daß aufgrund der starken Strömungsquerschnittsänderung beim Übergang Ringraum-Stutzen die Trägheit des gesamten Fluids nahezu alleine von der im Stutzen-Rohr befindlichen Fluidmasse bestimmt wird. Diese ist aber bei kurzen Rohrlängen so klein, daß die Beschleunigung auf maximale Geschwindigkeit in so kurzer Zeit erfolgen kann. Die Beschleunigungszeit von 10 msec ist von etwa gleicher Größenordnung wie die Zeit in der eine Druckentlastungswelle einmal durch den gesamten Druckbehälter wandert. Wir können hier also die dynamischen Vorgänge nicht in eine akustische Phase und eine später ablaufende Beschleunigungsphase aufteilen. Beide Effekte laufen gleichzeitig ab.

Die Berechnungen im vierten Teil erfassen zunächst ein einfaches Modell, mit dem der Ringraum und Stutzenbereich eindimensional und - unter Verwendung der Koppelungstheorie - analytisch beschrieben werden kann. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse erweisen sich später bezüglich Geschwindigkeits- und Druckverteilung sowie Zeitkonstante trotz der stark vereinfachten Geometrie im Vergleich zu mehrdimensionalen Rechnungen als sehr genau.

Nicht erfaßt werden dabei die Vorgänge in unmittelbarer Nähe des Überganges. Eine zweidimensionale Rechnung mit dem Verfahren der finiten Differenzen zeigt hier negative Drücke, die in der Realität zu Kavitation führen. Obwohl die Kavitation hier nicht erfaßt wird, kann angenommen werden, daß diese die vorliegenden Ergebnisse nicht in ihrer Größenordnung ändern, da offenbar Strömungsvorgänge in geometrisch kleinen Bereichen keinen großen Effekt haben. Die am Kernmantel wirksame Druckdifferenz wird von eindimensionalen Rechnungen überschätzt. Sodann befassen wir uns mit dem Ringraum als zweidimensionales ebenes Problem. Wegen des kreisförmigen Stutzenübergangs ist der Strömungskanal in diesem Fall nicht rechteckig. In dieser Geometrie ist die Integral-Methode gut anwendbar. Allerdings ist die Verwendung einer analytischen Näherungslösung notwendig, um die Approximations-Fehler, die nur linear mit der Anzahl der gewählten Randintervalle kleiner werden, in Grenzen zu halten. Zur Bestimmung der Schnittpunkte x , y des aus Potential- und Stromlinien gebildeten orthogonalen krummlinigen Maschennetzes versuchen wir, das inverse Problem zu lösen. Wir finden, daß dies wegen der auftretenden Rand-Singularitäten nur bei Kenntnis der Lösung des Original-Problems möglich ist. Insbesondere wurde aus dem linearen Original-Problem mit nichtlinearen

Rändern ein nichtlineares inverses Problem mit linearen Rändern. Die Integral-Methode erweist sich zudem als äußerst empfindlich gegenüber den Rand-Singularitäten. Das Finit-Differenzenverfahren ist demgegenüber unempfindlich. Die für Ringraum und Stützen zweidimensional gewonnenen Ergebnisse werden schließlich - wieder unter Verwendung der Koppelungstheorie - zur Analyse des gesamten dreidimensionalen Problems herangezogen. Hieraus werden die am Kernmantel wirkenden Kräfte und Drehmomente als Funktion der Bruchstützen-Länge berechnet. Maximale Kräfte von 300 Mp und Momente von 320 Mpm sind typisch für das HDR-Problem.

Insgesamt erweist sich die Theorie inkompressibler Potentialströmungen als sehr hilfreich beim Studium der grundlegenden transienten Strömungsformen in einer komplexen Geometrie.

L i t e r a t u r

- [1] H. Lamb: Hydrodynamics
Cambridge, University Press (1932)
- [2] L. M. Milne-Thomson:
Theoretical Hydrodynamics. London, Macmillan (1962)
- [3] O.D.Kellog:
Foundations of Potential Theory. Berlin, Springer V.(1967)
- [4] H. Buchholz:
Elektrische und magnetische Potentialfelder.
Berlin, Springer V.(1957)
- [5] H.-C. Yeh:
Method of Solving the Potential Field in Complicated Geometries
and the Potential Flow in the Lower Plenum of a Pressurized
Water Reactor. Nucl.Eng.Des.32(1975)85-104
- [6] H.-C. Yeh, L.S.Tong:
Potential Flow Theory of a Pressurized Water Reactor. Proc.1973 ANS
Conf. on Mathematical Models and Computational Techniques for Analysis
of Nuclear Systems, Ann Arbor, Mich.,CONF-730414-P1(1973),III-35 - 51
- [7] A.L.Davis, R.W.Jeppson:
Solving Three-Dimensional Potential Flow Problems by Means of an
inverse Formulation and finite Differences.
AD-760347(1973)

- [8] P.Pana:
Eine modifizierte Bernoulli-Gleichung für die Berechnung der Strömungsvorgänge im unterkühlten Wassergebiet.
Wiss.Bericht IRS-W-18 des Institutes für Reaktorsicherheit (Dez.1975)
- [9] Projekt Nukleare Sicherheit, Kernforschungszentrum Karlsruhe:
HDR-Sicherheitsprogramm, EV3000 - Blowdown-Untersuchungen, Detailspezifikation (1975) unveröffentlicht
- [10] A. Thom, C.J.Apelt:
Field Computations in Engineering and Physics.
London, D.van Nostrand (1961)
- [11] R. Meyder:
Solving the Conservation Equations in Fuel Rod Bundles Exposed to Parallel Flow by Means of Curvilinear-Orthogonal Coordinates.
J.Comp.Phys.17 (1975) 53 - 67
- [12] J.F. Thompson, F.C.Thames, C.W.Mastin:
Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies.
J.Comp.Phys.15 (1974) 299-319
- [13] R.H.Nilson, Y.G.Tsuei:
Free Boundary Problem of ECM by Alternating-Field Technique on Inverted Plane. Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng. 6 (1975) 265-282

- [14] R.H.Nilson, Y.G.Tsuei:
Inverted Cauchy Problem for the Laplace Equation in
Engineering Design.
J.of Engineering Mathematics 8(1974) 329-337
- [15] B. Baule:
Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Band IV,
S. Hirzel Verlag, Leipzig (1966), S.41
- [16] J.L.Hess, A.M.O.Smith:
Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies.
In D.Küchemann (ed.) Progress in Aeronautical Sciences 8
(1967) 1-138
- [17] J.L.Hess:
Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-
Flow Problems with Emphasis on the Surface-Source Method.
Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng. 5 (1975) 145-196
- [18] R. Krieg:
Nonsymmetric Transient Pressure Load on Reactor Vessel Caused
by Point Sources Simulating Fuel Sodium Interaction.
ANS-Topical Meeting on Fast Reactor Safety, Beverly Hills, Calif.,
USA, April 2-4, 1974
- [19] N. Papamichael, G.T.Symm:
Numerical Techniques for Two-Dimensional Laplacian Problems.
Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng. 6 (1975) 175-194

- [20] U. Schumann, R.A.Sweet:
Direct Poisson Equation Solver for Potential and Pressure Fields
on a Staggered Grid with Obstacles.
5th Int.Conf.on Numerical Methods on Fluid Dynamics, Enschede,
The Netherlands, June 28 to July 3, 1976, Springer Verlag
Lecture Notes in Physics, im Druck (1976)
- [21] U. Schumann:
Über die direkte Lösung der diskretisierten Poisson-Gleichung
mittels zyklischer Reduktion.
KFK-Ext. 8/75-6 (1976)
- [22] U.Schumann, R.A.Sweet:
A Direct Method for the Solution of Poisson's Equation with Neumann
Boundary Conditions on a Staggered Grid of Arbitrary Size.
J. Comp. Phys.20(1976) 171-182
- [23] P. Swarztrauber, R. Sweet:
Efficient Fortran Subprograms for the Solution of Elliptic Partial
Differential Equations.
NCAR-TN/IA-109(1975)
- [24] G. Class:
LINSYS, FORTRAN IV und PL/1-Unterprogramme zur Lösung linearer
Gleichungssysteme mit optimaler Genauigkeit.
(1974) unveröffentlicht.
- [25] R. Courant:
Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2.Band,
Berlin, Springer Verlag, 3.Aufl.(1963)
- [26] K.W.Mangler, J.C.Murray:
System of Coordinate Suitable for the Numerical Calculation
of Three-Dimensional Flow Fields.
Aeronautical Research Council Current Papers.
C.P.No.1325(1975)
- [27] R. Krieg:
Zur Geschwindigkeitsmessung von Anlaufströmungen mit Hilfe
von Widerstandskörpern.
Brennst.-Wärme-Kraft 27 (1975) 465-468

A n h a n g

LAPL, PL/1-Unterprogramme zur Berechnung zweidimensionaler Potentialströmungen nach der Integral-Methode.

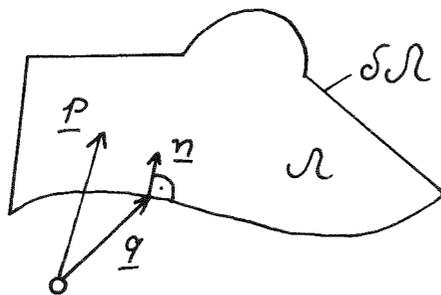
A 1. Grundlage

Das Unterprogramm LAPL1 berechnet näherungsweise die Lösung $u(x,y)$ der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in \mathcal{R} \quad (\text{A-1})$$

auf dem Rand $\delta\mathcal{R}$ eines einfach zusammenhängenden Bereiches \mathcal{R} nach der "Basic integral equation method" von Papamichael und Symm [1]. Die Unterprogramme LAPL2, LAPL3 und LAPL4 benutzen die Ergebnisse von LAPL1 und bestimmen die Lösung $u(x,y)$ sowie die Ableitungen $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y(x,y)$ an einem beliebigen Punkt (x,y) im Bereich \mathcal{R} oder auf dessen Rand $\delta\mathcal{R}$.

Das Verfahren beruht auf der Annahme, daß der Rand $\delta\mathcal{R}$ stückweise glatt ist und auf dem Rand sowohl die Lösungsfunktion u als auch ihre Ableitung u' in Richtung der inneren Normalen \underline{n} zu $\delta\mathcal{R}$ stetig sind. Der Rand sei zudem in endlich viele Intervalle unterteilbar, wobei in jedem Intervall entweder u (Dirichlet-Randbedingung) oder die Ableitung u' (Neumann-Randbedingung) vorgegeben ist.



Die Lösung $u(x,y)=u(\underline{p})$, wobei \underline{p} ein beliebiger Punkt der x-y-Ebene ist, erfüllt gemäß [19] folgende Integralgleichung:

$$\int_{\delta\mathcal{R}} u'(\underline{q}) \log|\underline{q}-\underline{p}| d\underline{q} - \int_{\delta\mathcal{R}} u(\underline{q}) \log'|\underline{q}-\underline{p}| d\underline{q} - \eta(\underline{p}) u(\underline{p}) = 0 \quad (\text{A-2})$$

Hierbei ist \underline{q} ein Punkt auf $\delta\mathcal{N}$ und $d\underline{q}$ das differentielle Inkrement von $\delta\mathcal{N}$ bei \underline{q} ; $\gamma(\underline{p})$ ist der Winkel durch den der Vektor $\underline{q}-\underline{p}$ rotiert, wenn \underline{q} einmal vollständig $\delta\mathcal{N}$ gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. D.h.: für $\underline{p} \in \mathcal{N}$ ist $\gamma(\underline{p})=2\pi$; für $\underline{p} \in \delta\mathcal{N}$ ist $\gamma(\underline{p})$ der Winkel in \mathcal{N} zwischen den Tangenten an $\delta\mathcal{N}$ beiderseits von \underline{p} ; falls $\delta\mathcal{N}$ bei \underline{p} glatt ist, ist $\gamma(\underline{p})=\pi$.

Die numerische Methode basiert auf folgendem Vorgehen:

Wir unterteilen den Rand $\delta\mathcal{N}$ in N glatte Intervalle I_i , $i=1,2,\dots,N$, und zwar so, daß Ecken oder Wechsel in der Art der Randbedingung an den Unterteilungspunkten liegen. Wir approximieren die Werte u und u' durch Konstante u_i und u'_i in jedem Intervall; die Hälfte dieser Werte ist durch die Randbedingung gegeben. Aus (2) folgt dann:

$$\sum_{j=1}^N u'_j F_j(\underline{q}_i) + \sum_{j=1}^N u_j D_j(\underline{q}_i) - \gamma(\underline{q}_i) u_i = 0 \quad (\text{A-3})$$

$i = 1, 2, \dots, N$

mit

\underline{q}_i den Mittelpunkten der als gerade Strecken approximierten Intervalle I_i und [19]

$$F_j(\underline{q}_i) = \int_{I_j} \log |\underline{q} - \underline{q}_i| d\underline{q} \quad (\text{A-4})$$

$$D_j(\underline{q}_i) = - \int_{I_j} \log' |\underline{q} - \underline{q}_i| d\underline{q}$$

Diese Integrale sind analytisch auswertbar [19]. Zusammen mit den Randbedingungen stellt Gl.(3) ein lineares Gleichungssystem dar für die N Unbekannten

$$u_j \quad \text{bzw.} \quad u'_j ; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

(je nach Randbedingung im j -ten Intervall).

Dieses Gleichungssystem wird in LAPL1 aufgestellt und gelöst.

Die (Näherungs-)Lösung $u(\underline{p})$ an einem beliebigen Punkt \underline{p} folgt dann aus

$$u(\underline{p}) = \frac{1}{\gamma(\underline{p})} \sum_{j=1}^N \{ u'_j F_j(\underline{p}) + u_j D_j(\underline{p}) \} \quad (\text{A-5})$$

Gl.(5) wird in LAPL2 und LAPL3 ausgewertet. LAPL4 berechnet gleichzeitig mit $u(\underline{p})$ auch die Ableitungen von $u(\underline{p})$ nach x und y .

A 2.Aufruf, Ein- und Ausgaben, Beschränkungen

2.1 LAPL1

Zweck: Aufstellung und Lösung des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung aller Randwerte.

Aufruf:

```
DCL LAPL1 ENTRY (BIN FIXED(15),
                (*,*) BIN FLOAT (53),
                (*)  BIN FIXED (15),
                (*)  BIN FLOAT (53),
                (*)  BIN FLOAT (53))

        EXTERNAL;

DCL(U(N,2),X (N),Y(N)) BIN FLOAT(53); (N,ID(N)) BIN FIXED(15);
CALL LAPL1(N,U,ID,X,Y);
```

Eingabe:

N Anzahl der Intervalle auf dem Rand.

X(I) x-Koordinate des Beginns des i-ten Intervalls.

Y(I) y-Koordinate des Beginns des i-ten Intervalls.

ID(I) Indikator für Typ der Randbedingung im i-ten Intervall:

ID(I) = 1 → Dirichlet.

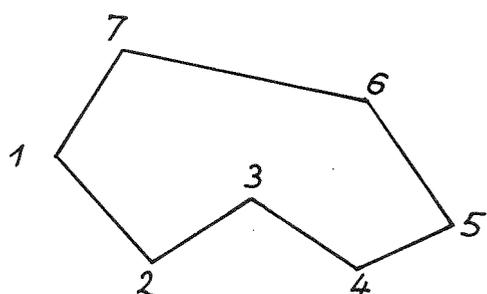
ID(I) = 2 → Neumann.

U(I,1) falls ID(I) = 1: Wert der Dirichlet-Randbedingung,
sonst ohne Bedeutung.

U(I,2) falls ID(I) = 2: Wert der Neumann-Randbedingung,
sonst ohne Bedeutung.

I=1,2,...,N.

z.B.



N = 7

Das i-te Intervall ist die Strecke von

$$[X(I), Y(I)] \text{ bis } [X(IP1) \ Y(IP1)]$$

wobei

$$IP1 = \begin{cases} I+1 & \text{für } I < N, \\ 1 & \text{für } I = N. \end{cases}$$

Die Intervall-Numerierung ist so zu wählen, daß der Rand mit steigendem Index entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Ausgabe:

Bei der Ausgabe enthält

U(I,1) den Wert u im Intervall

(von LAPL1 berechnet, falls ID(I)=2),

U(I,2) die Normalen-Ableitungen u' im Intervall

(von LAPL1 berechnet, falls ID(I)=1).

Alle anderen Eingabe-Parameter sind unverändert.

2.2 LAPL2

Zweck: Berechnung der Lösung u(p) im Inneren für gegebene Randwerte.

Aufruf:

```
DCL LAPL2 ENTRY ( BIN FLOAT (53),  
                BIN FLOAT (53),  
                (*,*) BIN FLOAT (53),  
                (*) BIN FLOAT (53)  
                (*) BIN FLOAT (53)  
                BIN FIXED (15),  
                BIN FLOAT (53))
```

EXTERNAL;

```
DCL(XO, YO, U(N,2), X(N), UP, X(N), Y(N)) BIN FLOAT(53), N BIN FIXED(15)
```

```
CALL LAPL2 (XO, YO, U, X, Y, N, UP)
```

Eingabe:

XO, YO Koordinaten des Punktes p für den die
Lösung gesucht ist.

U Dirichlet und Neumann-Werte; wie von LAPL1
berechnet.

X, Y, N Wie bei Eingabe zu LAPL1.

UP ohne Bedeutung.

Ausgabe:

UP Lösungswert $u(p)$;
alle anderen Parameter sind unverändert.

2.3 LAPL 3

Zweck: Gleichzeitige Berechnung der Funktionswerte $u(p)$ und $v(p)$ im Innern
für zwei Sätze von Randwerten U und V.

Aufruf:

```
DCL LAPL3 ENTRY (BIN FLOAT(53),
                 BIN FLOAT(53),
                 (*,*)BIN FLOAT(53),
                 (*,*)BIN FLOAT(53),
                 (*)BIN FLOAT(53),
                 (*)BIN FLOAT(53),
                 BIN FIXED(15),
                 BIN FLOAT(53),
                 BIN FLOAT(53))
      EXTERNAL;
DCL (XO,YO,U(N,2),V(N,2),X(N),Y(N),UP,VP)
      BIN FLOAT(53),
      N BIN FIXED(15);
CALL LAPL3 (XO,YO,U,V,X,Y,N,UP,VP);
```

Eingabe:

X0,Y0,U,X,Y,N,UP wie bei LAPL2
V Randwerte analog zu U für ein zweites Problem
VP ohne Bedeutung

Ausgabe:

UP Lösungswert $u(p)$ zu U
VP Lösungswerte $v(p)$ zu V

Bemerkung: Durch gleichzeitige Berechnung von UP und VP kann erheblich Rechenzeit eingespart werden, da viele Operationen unabhängig von den Randwerten sind.

2.4 LAPL4

Zweck: Berechnung zweier Lösungswerte $u(p)$ und $v(p)$ für zwei verschiedene orthogonale Randwertsätze U und V sowie Berechnung der Ableitungen $\partial u/\partial x$ und $\partial u/\partial y$ ($\partial v/\partial x$ und $\partial v/\partial y$ können aus den Cauchy-Riemann-Beziehungen ermittelt werden).

Aufruf:

```
DCL LAPL4 ENTRY (
    BIN FLOAT(53), BIN FLOAT(53),
    (*,*)BIN FLOAT(53),(*,*) BIN FLOAT(53),
    (*)BIN FLOAT(53), (*)BIN FLOAT(53),
    BIN FLOAT(15),
    BIN FLOAT(53), BIN FLOAT(53),
    BIN FLOAT(53), BIN FLOAT(53) )
EXTERNAL;
DCL
(X0,Y0,U(N,2),V(N,2),X(N),Y(N),
UP,VP,UDX,UDY) BIN FLOAT(53),
N BIN FIXED(15);
CALL LAPL4(X0,Y0,U,V,X,Y,N,UP,VP,UDX,UDY);
```

Eingabe:

wie bei LAPL3,
UDX, UDY ohne Bedeutung.

Ausgabe:

wie bei LAPL3, zusätzlich

UDX Ableitung: $\partial u(\underline{p})/\partial x$

UDY Ableitung: $\partial u(\underline{p})/\partial y$

2.5 Achtung:

Die Feldlängen (N) werden abgefragt. Bei abweichenden Längen wird eine Fehlermeldung gedruckt und die Programm-Ausführung beendet. In LAPL2, LAPL3, LAPL4 wird geprüft, ob $\underline{p} \in (\Omega \cup \delta\Omega)$ ist. Falls \underline{p} außerhalb des Bereiches und nicht auf dem Rand liegt, wird die Programm-Ausführung nach einer Fehlermeldung abgebrochen.

2.6 Beschränkungen, Speicherbedarf, Rechenzeit, Genauigkeit, Unterprogramme

Die Routine LAPL1 benutzt intern eine $N*(N+1)$ Matrix doppelter Genauigkeit (BIN FLOAT(53)) zur Aufstellung des linearen Gleichungssystems. Die Lösung des Gleichungssystems wird mit LINSYSP[24] bestimmt. Die Größe dieser Matrix determiniert im wesentlichen den erforderlichen Speicherplatz; der Hauptanteil der Rechenzeit wird in LINSYSP benötigt. Das Unterprogramm LINSYSP erwartet im Wesentlichen eine Matrix $A(N,N+1)$ mit den Koeffizienten des linearen Gleichungssystems und in der letzten Spalte die Werte der rechten Seite. An dieser Stelle wird die Lösung zurückgegeben. Die Werte der Matrix A werden in LINSYSP verändert. Weiterhin werden die Unterprogramme FJDJ und FJDJS verwendet, die zu diesem Paket dazugehören und im folgenden gelistet werden. Für $N=120$ beträgt die Rechenzeit etwa 15 Sekunden. Die Approximationsfehler variieren wie N^{-1} .

A 3. PL/1 Programm-Listen von LAPL1-LAPL4 und deren Unterprogramme
FJDJ und FJDJS.

```
LAPL1:
  PROC(N,U, ID,X,Y);
  DCL
    HBOUND BUILTIN;
  DCL
    LBOUND BUILTIN;
  DCL
    FJ)J ENTRY (BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53)
    ),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53))
    EXTERNAL;
  DCL
    LINSYSP ENTRY ((*,*) BIN FLOAT(53),BIN FIXED,BIN FIXED,BIN FIXED,
    BIN FLOAT(53), BIN FIXED,BIN FIXED) EXTERNAL;

/* A- Koeffizientenmatrix,R-Rechte Seite */

  DCL
    (LOG,ACOS,ATAN) BUILTIN;
  DCL
    (X0,X1,X2,Y0,Y1,Y2,FJ,DJ,PI,A(N,N+1),R(N),DET,U(*,*),X(*),Y(*))
    BIN FLOAT(53);
  DCL
    (I,J,IP1,JP1,N, ID(*),L,IR,IV) BIN FIXED(15);
    IF (HBOUND(X,1)≠N|HBOUND(Y,1)≠N|HBOUND(U,1)≠N|HBOUND(U,2)≠2
    |HBOUND(ID,1)≠N) THEN
      DO;
        PUT SKIP LIST('FEHLERHAFTES HBOUND IN LAPL1');
        STOP;
      END;
    IF (LBOUND(X,1)≠1|LBOUND(Y,1)≠1|LBOUND(U,1)≠1|LBOUND(U,2)≠1
    |LBOUND(ID,1)≠1) THEN
      DO;
        PUT SKIP LIST('FEHLERHAFTES LBOUND IN LAPL1');
        STOP;
      END;
  R=0.;
  DO I=1 TO N;
  PI=0.;
  IF I=N THEN
    IP1=1;
  ELSE
    IP1=I+1;
  IF(X(I)=X(IP1) & Y(I)=Y(IP1)) THEN DO;
  PUT SKIP LIST('ZWEI BENACHBARTE PUNKTE SIND IDENTISCH IN LAPL1');
  STOP;
  END;
```

```
X0=(X(I)+X(IP1))/2.;
Y0=(Y(I)+Y(IP1))/2.;
DO J=1 TO N;
  IF J=N THEN
    JP1=1;
  ELSE
    JP1=J+1;
    X1=X(J);
    Y1=Y(J);
    X2=X(JP1);
    Y2=Y(JP1);
    CALL FJDJ(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ);
    IF ID(J)=1 THEN
      DO;
        R(I)=R(I)-DJ*U(J,1);
        A(I,J)=FJ;
      END;
    ELSE
      DO;
        R(I)=R(I)-FJ*U(J,2);
        A(I,J)=DJ;
      END;
    PI=PI+DJ;
  END;
  IF ID(I)=1 THEN
    R(I)=R(I)+U(I,1)*PI;
  ELSE DO;
    IF ID(I)=2 THEN DO;
      A(I,I)=A(I,I)-PI;
    END;
    ELSE DO;
      PUT SKIP LIST('ID WEDER 1 NOCH 2 IN LAPL1');
      STOP;
    END;
  END;
END;
DO I=1 TO N;
  A(I,N+1)=R(I);
END;
IR=0; DET=-1.;
CALL LINSYSP(A,N,N+1,L,DET,IV,IR);
IF L<1 THEN DO;
  PUT SKIP LIST('SINGULAERES GLEICHUNGSSYSTEM IN LAPL1');
  STOP;
END;
DO I=1 TO N;
  R(I)=A(I,N+1);
END;
DO I=1 TO N;
  IF ID(I)=1 THEN
    U(I,2)=R(I);
  ELSE
    U(I,1)=R(I);
END;
END LAPL1;
```

```
LAPL2:
  PROC(X0,Y0,U,X,Y,N,UP);

  DCL
    HBOUND BUILTIN;
  DCL
    LBOUND BUILTIN;
  DCL
    FJDJ ENTRY (BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53)
    ),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53),BIN FLOAT(53))
    EXTERNAL;
  DCL
    (U(*,*),X(*),Y(*)) BIN FLOAT(53);
  DCL
    (X0,X1,X2,Y0,Y1,Y2,FJ,DJ,S,UP,E) BIN FLOAT(53);
  DCL
    (J,JP1) BIN FIXED(15);

  IF (HBOUND(X,1)↔=N|HBOUND(Y,1)↔=N|HBOUND(U,1)↔=N|HBOUND(U,2)↔=2
    ) THEN
    DO;
      PUT SKIP LIST('FEHLERHAFTES HBOUND IN LAPL2');
      STOP;
    END;
  IF (LBOUND(X,1)↔=1|LBOUND(Y,1)↔=1|LBOUND(U,1)↔=1|LBOUND(U,2)↔=1
    ) THEN
    DO;
      PUT SKIP LIST('FEHLERHAFTES LBOUND IN LAPL2');
      STOP;
    END;

  S=0;
  E=0.;
  DO J=1 TO N;
    IF J=N THEN JP1=1;
      ELSE JP1=J+1;
    X1=X(J); Y1=Y(J);
    X2=X(JP1); Y2=Y(JP1);
    CALL FJDJ(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ);
    S=S+(U(J,2)*FJ+U(J,1)*DJ);
    E=E+DJ;
  END;
  IF E < 1.E-5 THEN DO;
    PUT SKIP LIST('IN LAPL2: X0,Y0 LIEGT AUSSERHALB, X0,Y0=',
      X0,Y0);
    STOP;
  END;
  S=S/E;
  UP=S;

  END LAPL2;
```

```
LAPL3:PRDC(X0,Y0,U,V,X,Y,N,UP,VP);
DCL (X0,Y0,U(*,*),V(*,*),X(*),Y(*),E,UP,VP
     ,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ,SU,SV) BIN FLOAT(53)
     ,(N,J,JP1) BIN FIXED(15);
DCL FJDJ ENTRY EXTERNAL;
SU,SV,E=0.;
DO J = 1 TO N;
  IF J=N THEN JP1=1; ELSE JP1= J+1;
  X1=X(J); Y1=Y(J);
  X2=X(JP1); Y2=Y(JP1);
  CALL FJDJ(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ);
  SU=SU+(U(J,1)*DJ+U(J,2)*FJ);
  SV=SV+(V(J,1)*DJ+V(J,2)*FJ);
  E=E+DJ;
END;
IF E < 1.E-5 THEN DO;
  PUT SKIP LIST('IN LAPL3: X0,Y0 LIEGT AUSSERHALB, X0,Y0=',
                X0,Y0);
  STOP;
END;
SU=SU/E; SV=SV/E;
UP=SU; VP=SV;
END LAPL3;
```

```
LAPL4:PROC(X0,Y0,U,V,X,Y,N,UP,VP,UDX,UDY);
DECL (X0,Y0,U(*,*),V(*,*),X(*),Y(*),E,UP,VP
      ,UDX,UDY,FJX,FJY,DJX,DJY
      ,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ,SU,SV) BIN FLOAT(53)
      ,(N,J,JP1,IND) BIN FIXED(15), RAND BIT(1);
DECL FJ,DJS ENTRY EXTERNAL;
SU,SV,E,UDX,UDY=0.;
RAND='0'B;
DO J = 1 TO N;
  IF J=N THEN JP1=1; ELSE JP1=J+1;
  X1=X(J); Y1=Y(J);
  X2=X(JP1); Y2=Y(JP1);
  CALL FJ,DJS(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ,FJX,FJY,DJX,DJY,IND);
  SU=SU+(U(J,1)*DJ+U(J,2)*FJ);
  SV=SV+(V(J,1)*DJ+V(J,2)*FJ);
  IF IND = 1 THEN DO;
    RAND='1'B;
    DJX=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2);
    DJY=(Y2-Y1)/DJX;
    DJX=(X2-X1)/DJX;
    UDX=V(J,2)*DJX-U(J,2)*DJY;
    UDY=V(J,2)*DJY+U(J,2)*DJX;
  END;
  IF ~ RAND THEN DO;
    UDX=UDX+U(J,1)*DJX+U(J,2)*FJX;
    UDY=UDY+U(J,1)*DJY+U(J,2)*FJY;
  END;
  E=F+DJ;
  END;
  IF E < 1.E-5 THEN DO;
    PUT SKIP LIST('IN LAPL4: X0,Y0 LIEGT AUSSERHALB, X0,Y0=',
                  X0,Y0);
    STOP;
  END;
SU=SU/E; SV=SV/E;
IF ~ RAND THEN DO;
  UDX=UDX/E; UDY=UDY/E;
END;
UP=SU; VP=SV;
END LAPL4;
```

```
FJDJ:
  PROC(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ);

/* BERECHNET FJ UND DJ */

  DCL
    (X0,X1,X2,Y0,Y1,Y2) BIN FLUAT(53);

  DCL (A,B,C,D,DJ,E,EPS,F,FJ,G,CS) BIN FLOAT(53);
  DCL (ABS,ACOS,MAX,MIN,LOG,SQRT) BUILTIN;
  EPS=1.E-5;
  A=(X0-X1)**2+(Y0-Y1)**2;
  B=(X0-X1)*(X2-X1)+(Y0-Y1)*(Y2-Y1);
  C=(X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2;
  CS=SQRT(C);
  D=(Y0-Y1)*(X2-X1)-(X0-X1)*(Y2-Y1);
  E=(X2-X1)*(X2-X0)+(Y2-Y1)*(Y2-Y0);
  F=(X0-X1)*(X0-X2)+(Y0-Y1)*(Y0-Y2);
  G=(X0-X2)**2+(Y0-Y2)**2;

  IF ABS(D)>=EPS*C THEN
    DO;
      DJ=((G+A)-C)/(2.*SQRT(A*G));
      DJ=MAX(-1.,MIN(1.,DJ));
      DJ=ACOS(DJ);
      IF D < 0. THEN DJ=-DJ;
      FJ=((LOG(G)-2.)+(B/C)*LOG(A/G)+2.*D*DJ/C))*CS*0.5;
    END;
  ELSE
    DO;
      DJ=0.;
    IF(ABS(B*E)< EPS*C*C) THEN
      FJ=(0.5*LOG(C)-1.)*CS;
      ELSE
      FJ=(LOG(E*E/C)-2.+(B/C)*LOG((B/E)**2))*CS*0.5;
    END;
  END FJDJ;
```

FJDJS:

PROC(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,FJ,DJ,FJX,FJY,DJX,DJY,IND);

/* BERECHNET FJ UND DJ SOWIE DEREN ABLEITUNGEN NACH X UND Y */

DCL
(X0,X1,X2,Y0,Y1,Y2,FJX,FJY,DJX,DJY) BIN FLOAT(53);

DCL IND BIN FIXED(15);
DCL (A,B,C,D,DJ,E,EPS,F,FJ,G
,CS,AX,BX,DX,EX,FX,GX,AY,BY,DY,EY,FY,GY) BIN FLOAT(53);
DCL (ABS,ACOS,MAX,MIN,LOG,SQRT) BUILTIN;

IND=0;
EPS=1.E-5;
A=(X0-X1)**2+(Y0-Y1)**2;
B=(X0-X1)*(X2-X1)+(Y0-Y1)*(Y2-Y1);
C=(X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2;
D=(Y0-Y1)*(X2-X1)-(X0-X1)*(Y2-Y1);
E=(X2-X1)*(X2-X0)+(Y2-Y1)*(Y2-Y0);
F=(X0-X1)*(X0-X2)+(Y0-Y1)*(Y0-Y2);
G=(X0-X2)**2+(Y0-Y2)**2;
AX=2.*(X0-X1); AY=2.*(Y0-Y1);
BX=X2-X1; BY=Y2-Y1;
DX=Y1-Y2; DY=X2-X1;
EX=X1-X2; EY=Y1-Y2;
FX=2.*X0-X1-X2; FY=2.*Y0-Y1-Y2;
GX=2.*(X0-X2); GY=2.*(Y0-Y2);
CS=SQRT(C);

IF ABS(D)>=EPS*C THEN

DO;

DJ=((G+A)-C)/(2.*SQRT(A*G));
DJ=MAX(-1.,MIN(1.,DJ));
DJ=ACOS(DJ);

IF D < 0. THEN DJ=-DJ;

FJ=((LOG(G)-2.)+(B/C)*LOG(A/G)+2.*D*DJ/C))*CS*0.5;
DJY=SQRT(G*(2.*A-G)+C*(2.*G-C)+A*(2.*C-A))*2.*A*G;
DJX=(AX*G*(G-C-A)+GX*A*(A-G-C))/DJY;
DJY=(AY*G*(G-C-A)+GY*A*(A-G-C))/DJY;
FJX=(GX/G+(B*(AX/A-GX/G)+LOG(A/G)*BX
+2.*(DX*DJ+DJX*D))/C)*CS*.5;
FJY=(GY/G+(B*(AY/A-GY/G)+LOG(A/G)*BY
+2.*(DY*DJ+DJY*D))/C)*CS*.5;

END;

ELSE

DO;

DJ=0.;

IF A*G > C*C*(1.+EPS) THEN DO;

DJX=DX*CS/(A*G); DJY=DY*CS/(A*G);
FJX=CS*((EX/E)+(BX-B*EX/E)/C
+BX*LOG((B/E)**2)/(2.*C));
FJY=CS*((EY/E)+(BY-B*EY/E)/C
+BY*LOG((B/E)**2)/(2.*C));

END;

ELSE DO;

IND=1;

FJX,FJY,DJX,DJY=0.;

END;

IF(ABS(B*E) < EPS*C*C) THEN

FJ=(0.5*LOG(C)-1.)*CS;

ELSE

FJ=(LOG(E*E/C)-2.+(B/C)*LOG((B/E)**2))*CS*0.5;

END;

END FJDJS;