

# KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

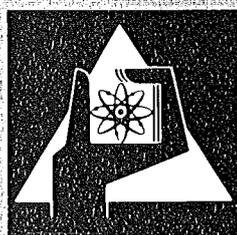
Mai 1977

KFK 2468

Institut für Datenverarbeitung in der Technik  
Projekt Wiederaufarbeitung und Abfallbehandlung

## **Die Zuverlässigkeit eines redundanten Systems zweier Verarbeitungseinheiten**

A. Kallweit



GESELLSCHAFT  
FÜR  
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2468

PWA 4/77

Institut für Datenverarbeitung in der Technik  
Projekt Wiederaufarbeitung und Abfallbehandlung

Die Zuverlässigkeit eines redundanten  
Systems zweier Verarbeitungseinheiten

Achim Kallweit

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe



Die Zuverlässigkeit eines redundanten Systems zweier Verarbeitungseinheiten

### Zusammenfassung

Behandelt wird ein spezielles System von zwei redundanten Verarbeitungseinheiten. Beide Einheiten arbeiten zu Beginn mit den Intensitäten  $d_1$  und  $d_2$ . Fällt eine der Einheiten aus, so wird sie repariert und zwischenzeitlich übernimmt die andere Einheit ihre Ausfallcharge, so daß immer ein Durchfluß von  $d_1+d_2$  gewährleistet ist. Sobald die ausgefallene Verarbeitungseinheit repariert ist, wird wieder mit den Intensitäten  $d_i$  gearbeitet. Das System fällt genau dann aus, wenn es einen Eingangsstrom der Intensität  $d_1+d_2$  nicht mehr verarbeiten kann. Ausgehend von beliebig verteilten Reparatur- und exponentialverteilten Ausfallzeiten wird die Laplace-Stieltjes-Transformierte der Verteilung der Zeit bis zum ersten Systemausfall und deren Mittelwert auch unter Berücksichtigung eines Umschalters, der ausfallen kann, berechnet.

On a Two Unit Redundant System with Imperfect Switch-Over

### Abstract

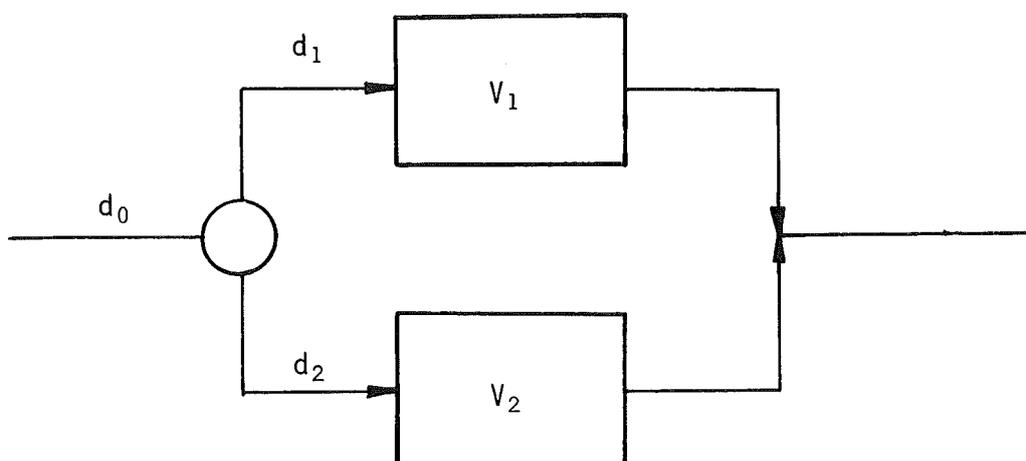
This report deals with the reliability of a two-unit redundant system. Both units are originally working with rates  $d_1$  and  $d_2$ . If one of the units fails repairs are begun on it and the other unit performs its function so that a throughput of  $d_1+d_2$  is guaranteed always. As soon as the failed unit is repaired both units are returned to operation with rates  $d_i$ . The system fails if its throughput is less than  $d_1+d_2$ . Assuming generally distributed repair times and exponentially distributed failure times, the Laplace-Stieltjes transform of the distribution of the time to first system failure (TFSF) and the mean TFSF are derived in the cases of perfect and imperfect switch-over.

## 1. Einleitung

Eine der grundlegenden Methoden zur Erhöhung der Zuverlässigkeit von Komponenten vorgegebener Verfügbarkeit ist die Redundanz. In /1/ findet sich ein Überblick über die zahlreichen hierzu entwickelten Modelle. Sie lassen sich, insbesondere im Fall von nur zwei Verarbeitungseinheiten und einer Reparatereinheit, einteilen in die Gruppen der kalten (engl. standby redundancy), erleichterten und heißen (engl. parallel redundancy) Reserve, in Abhängigkeit von dem Zustand, in dem sich das Reserveelement bis zum Moment der Inbetriebnahme befindet.

Den bisher entwickelten Modellen ist jedoch gemeinsam, daß bei ihnen unterschieden wird zwischen dem Grundelement und dem Reserveelement, was bei den klassischen Anwendungen z.B. im Bereich der Elektrotechnik sinnvoll war. Sollen die Verarbeitungseinheiten jedoch ganze Produktionsanlagen mäßiger Verfügbarkeit darstellen, so ist die Einrichtung einer völlig getrennten Reserveeinheit ökonomisch kaum zu rechtfertigen, so daß in diesem Fall eine andere Betriebsstrategie und damit ein neues Modell entwickelt werden muß.

Grundlage der Überlegungen ist damit hier ein System von zwei parallel geschalteten, gleichartigen, aber nicht notwendig identischen Verarbeitungseinheiten  $V_i$



Dieses System habe einen ständigen Durchfluß von  $d_0$  Mengeneinheiten pro Zeiteinheit zu gewährleisten. Zum Zeitpunkt  $t=0$  seien beide Verarbeitungseinheiten in Takt und sie arbeiten mit den Intensitäten  $d_1$  bzw.  $d_2$ , wobei in der Regel  $d_0=d_1+d_2$  sein wird. Fällt eine der beiden  $V_i$  aus, so werde unverzüglich mit ihrer Reparatur begonnen. Während dieser Zeit übernehme die andere Verarbeitungseinheit deren Aufgabe, sie arbeite dann mit der Intensität  $d_0$ . Es werde dabei angenommen, daß das Umschalten keine Zeit benötigt, der Umschalter kann jedoch (im erweiterten Modell) ausfallen.

Sobald die ausgefallene Verarbeitungseinheit repariert und wieder voll funktionstüchtig ist, werde erneut umgeschaltet, und beide  $V_i$  arbeiten wieder mit den Intensitäten  $d_i$ .

Ein Systemausfall tritt nun genau dann ein, wenn ein Ankunftsstrom der Intensität  $d_0$  nicht mehr bewältigt werden kann.

## 2. Das Modell mit perfektem Umschalter

Das Modell geht von den folgenden Verteilungsannahmen aus:

- i) Die Ausfallverteilungen der Verarbeitungseinheiten  $V_i$ , sofern diese mit den Intensitäten  $d_i$  arbeiten, seien durch

$$F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$$

und, sofern sie mit  $d_0$  arbeiten, durch

$$F_0^i(t) = 1 - \exp(-\lambda_0^i t) \quad (i \in \{1, 2\})$$

gegeben. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da die  $V_i$  wiederum aus vielen einzelnen Komponenten bestehen, die ihrerseits ausfallen können.

- ii) Die Reparaturverteilungen der  $V_i$ , wobei der Reparatur eine Arbeitsperiode mit Intensität  $d_i$  voranging, seien beliebige Verteilungen  $G_i(t)$  ( $i \in \{1,2\}$ ).

Zielgröße des Modelles sei die Verteilung der Zeit bis zum ersten Systemzusammenbruch, wobei davon ausgegangen werde, daß beide Verarbeitungseinheiten  $V_i$  zum Zeitpunkt  $t=0$  mit den Intensitäten  $d_i$  arbeiten. Dieses Problem wird mit Hilfe der Flußgraphenmethode gelöst: Zuerst werden die möglichen Zustände des Systems definiert, um damit den zugehörigen Flußgraphen aufzustellen. Die Laplace-Stieltjes (LS)-Transformierte der Verteilung der Zeit bis zum ersten Übergang von dem Anfangszustand  $S_0$  zum absorbierenden Zustand  $S_a$ , dem Systemzusammenbruch, läßt sich dann einfach mit der Mason-Formel /2/ ermitteln. Hierzu werde jeweils  $q_{ij}$  definiert als LS-Transformierte der Verteilung der Zeit des Überganges vom Zustand  $S_i$  in den Zustand  $S_j$ .

Definiere damit also zuerst die vier Zustände des Systems:

Zustand 0  $V_1$  arbeitet mit Intensität  $d_1$ ,  $V_2$  mit Intensität  $d_2$ .

Zustand 1  $V_1$  arbeitet mit Intensität  $d_0$ ,  $V_2$  wird repariert,  $V_2$  arbeitete vorher mit Intensität  $d_2$ .

Zustand 2  $V_2$  arbeitet mit Intensität  $d_0$ ,  $V_1$  wird repariert,  $V_1$  arbeitete vorher mit Intensität  $d_1$ .

Zustand a Das System fällt aus.

Da nun die Reparaturzeit nicht notwendig exponential verteilt zu sein braucht, muß der Zustand " $V_i$  wird repariert" als Zustand des eingebetteten Markov'schen Erneuerungsprozesses interpretiert werden als " $V_i$  ist gerade ausgefallen und soeben beginnt die Reparatur".

Der absorbierende Zustand  $S_a$  des Systemzusammenbruchs tritt genau dann ein, wenn die eine Verarbeitungseinheit  $V_i$  während einer Arbeitsperiode der Intensität  $d_i$  ausfiel und nun repariert wird, und daraufhin die andere Verarbeitungseinheit, die dann mit der Intensität  $d_0$  arbeitete, ebenfalls ausfällt.

Damit erhält man sofort den zugehörigen Flußgraphen (Bild 1).

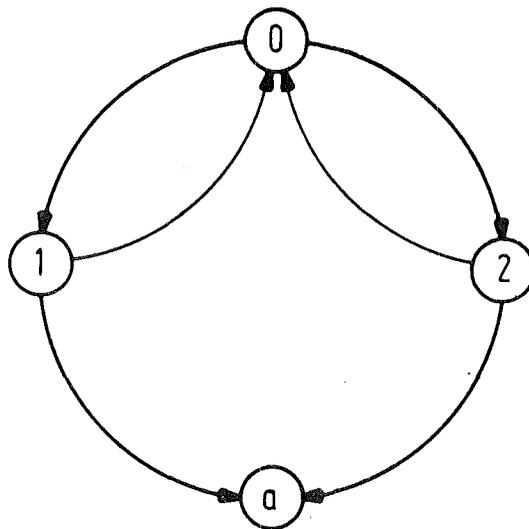


Bild 1 Flußgraph des Systems mit zuverlässigem Umschalter

Vom Ausgangszustand  $S_0$ , beide  $V_1$  arbeiten mit den Intensitäten  $d_i$ , kann der Prozeß durch Ausfall von  $V_2$  oder  $V_1$  nur in die beiden sich ausschließenden Zustände  $S_1$  bzw.  $S_2$  gelangen.

Im ersten Fall ist

$$q_{01}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_1} d F_2 = \frac{\lambda_2}{s+\lambda_1+\lambda_2} ,$$

wobei  $\overline{F_1} := 1-F_1$  bezeichne. Weiter ist

$$q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_2} d F_1 = \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+\lambda_2} .$$

Vom Zustand  $S_1$  gelangt der Prozeß wieder in den Anfangszustand  $S_0$ , wenn die Reparatur von  $V_2$  beendet ist, also

$$q_{10}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_0}^{-1} d G_2 = g_2(s+\lambda_0) ,$$

wobei mit den kleinen Buchstaben  $g_i$  jeweils die LS-Transformierten der zugehörigen Verteilungen  $G_i$  bezeichnet werden. In diese Formel geht wesentlich die Annahme exponentialverteilter Ausfälle, d.h. die "memoryless"-Eigenschaft, ein.

Zum anderen kann  $V_1$  ausfallen, bevor die Reparatur von  $V_2$  beendet ist, womit das ganze System ausfiele:

$$q_{1a}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{G_2} d F_0^1 = \frac{\lambda_0}{s+\lambda_0} [1-g_2(s+\lambda_0)] .$$

Völlig analog ergeben sich dann

$$q_{20}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_0}^{-2} d G_1 = g_1(s+\lambda_0) ,$$

$$q_{2a}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{G_1} d F_0^2 = \frac{\lambda_0^2}{s+\lambda_0} \mathbf{[1-g_1(s+\lambda_0^2)]} ,$$

wobei bei der ersten Formel wieder die "memoryless"-Eigenschaft einfließt.

Bezeichnet dann  $\phi_i$  ( $i \in \{0,1,2\}$ ) die LS-Transformierte der Verteilung der Zeit eines ersten Systemausfalles, falls der Prozeß zum Zeitpunkt  $t=0$  den Zustand  $S_i$  annimmt, so erhält man aus dem Flußgraphen das lineare Gleichungssystem

$$\phi_0(s) = q_{01}(s) \phi_1(s) + q_{02}(s) \phi_2(s)$$

$$\phi_1(s) = q_{10}(s) \phi_0(s) + q_{1a}(s)$$

$$\phi_2(s) = q_{20}(s) \phi_0(s) + q_{2a}(s) .$$

Hieraus oder direkt mit Hilfe der Mason-Formel /2/ erhält man dann

$$\phi_0(s) = \frac{\frac{\lambda_1 \lambda_0^2}{s+\lambda_0} \mathbf{[1-g_1(s+\lambda_0^2)]} + \frac{\lambda_2 \lambda_0^1}{s+\lambda_0} \mathbf{[1-g_2(s+\lambda_0^1)]}}{s+\lambda_1 \mathbf{[1-g_1(s+\lambda_0^2)]} + \lambda_2 \mathbf{[1-g_2(s+\lambda_0^2)]}}$$

Als Probe ergibt sich  $\phi_0(0) = 1$ , sowie

$$q_{01}(0) + q_{02}(0) = 1$$

$$q_{10}(0) + q_{1a}(0) = 1$$

$$q_{20}(0) + q_{2a}(0) = 1 .$$

Schließlich ist die mittlere Zeit bis zum Systemausfall

$$\hat{T} = - \left. \frac{d\phi_0(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

$$1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} [1-g_1(\lambda_0^2)] + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} [1-g_2(\lambda_0^1)]$$

$$= \frac{\lambda_1 [1-g_1(\lambda_0^2)] + \lambda_2 [1-g_2(\lambda_0^1)]}{\lambda_1 [1-g_1(\lambda_0^2)] + \lambda_2 [1-g_2(\lambda_0^1)]}$$

### 3. Spezialfälle

Setzt man nun insbesondere  $\lambda^1 := \lambda_1 = \lambda_0^1$ ,  $\lambda^2 := \lambda_0^2$  und  $\lambda_R := \lambda_2$ , so ergibt sich speziell der Fall der erleichterten Reserve mit Priorität, wobei die Ausfallverteilungen der  $V_i$  durch  $1 - \exp -\lambda^i t$ , die des standby-Elements durch  $1 - \exp -\lambda_R t$  sowie die Reparaturraten der  $V_i$  durch  $G_i$  - unabhängig davon, ob der Ausfall in einer Arbeits- oder standby-Periode erfolgte - gegeben sind.

Man erhält

$$\Phi_0(s) = \frac{\frac{\lambda^1 \lambda^2}{s+\lambda^2} [1-g_1(s+\lambda^2)] + \frac{\lambda_R \lambda^1}{s+\lambda^1} [1-g_2(s+\lambda^1)]}{s+\lambda^1 [1-g_1(s+\lambda^2)] + \lambda_R [1-g_2(s+\lambda^1)]}$$

und

$$\hat{T} = \frac{1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^2} [1-g_1(\lambda^2)] + \frac{\lambda_R}{\lambda^1} [1-g_2(\lambda^1)]}{\lambda^1 [1-g_1(\lambda^2)] + \lambda_R [1-g_2(\lambda^1)]}$$

Sind nun die beiden Verarbeitungseinheiten gleich, d.h.  $\lambda := \lambda^1 = \lambda^2$  und  $G := G_1 = G_2$ , so erhält man das Modell der erleichterten Reserve

ohne Priorität, denn die "memoryless"-Eigenschaft nihiliert jede Priorität. Damit ist

$$\Phi_0(s) = \frac{\lambda (\lambda + \lambda_R) \mathbf{[1-g(\lambda+s)]}}{(\lambda+s) (s+(\lambda+\lambda_R) \mathbf{[1-g(\lambda+s)]})}$$

und

$$\hat{T} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(\lambda + \lambda_R) (1-g(\lambda))}$$

Aus diesem Spezialfall, der in /3,4/ behandelt wird, erkennt man, daß die ursprüngliche Politik gegenüber der erleichterten Reserve bei gleichen Verarbeitungseinheiten genau dann vorteilhafter ist, wenn  $\lambda_1 + \lambda_2 < \lambda + \lambda_R$ .

Sei nun wieder  $V_1 \neq V_2$ . Dann liefert das Grundmodell weiter die beiden Extremfälle der heißen und kalten Reserve.

Mit  $\lambda^1 := \lambda_1 = \lambda_0^1$  und  $\lambda^2 := \lambda_2 = \lambda_0^2$  ergibt sich

$$\Phi_0(s) = \frac{\lambda^1 \lambda^2 \left( \frac{1}{s + \lambda^2} \mathbf{[1-g_1(s + \lambda^2)]} + \frac{1}{s + \lambda^1} \mathbf{[1-g_2(s + \lambda^1)]} \right)}{s + \lambda^1 \mathbf{[1-g_1(s + \lambda^2)]} + \lambda^2 \mathbf{[1-g_2(s + \lambda^1)]}}$$

und

$$\hat{T} = \frac{1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \mathbf{[1-g_1(\lambda^2)]} + \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \mathbf{[1-g_2(\lambda^1)]}}{\lambda^1 \mathbf{[1-g_1(\lambda^2)]} + \lambda^2 \mathbf{[1-g_2(\lambda^1)]}}$$

also der Fall der heißen Reserve, bei dem die Ausfallraten der  $V_i$  durch  $\lambda^i$  gegeben sind. Dieser Modelltyp wird u.a. von /5,6,7/ ausführlich behandelt.

Das andere Extrem ist mit  $\lambda^1 := \lambda_1 = \lambda_0$ ,  $\lambda^2 := \lambda_0$ ,  $\lambda_2 = 0$

$$\Phi_0(s) = \frac{\frac{\lambda^1}{s+\lambda^1} \cdot \frac{\lambda^2}{s+\lambda^2} (1-g_1(s+\lambda^2))}{1 - \frac{\lambda^1}{s+\lambda^1} g_1(s+\lambda^2)}$$

und

$$\hat{T} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^1 (1-g_1(\lambda^2))}$$

der Fall der kalten Reserve mit Priorität, den /7/ behandelt.

#### 4. Das allgemeine Modell

Im folgenden werde nun zusätzlich davon ausgegangen, daß der Umschalter, der nur im Moment des Umschaltens benötigt wird, ebenfalls ausfallen kann. Damit das Modell rechenbar bleibt, sei die Ausfallverteilung des Umschalters durch

$$F_S(t) := 1 - \exp(-\alpha t)$$

gegeben. Genau wie die anderen Verarbeitungseinheiten, sei der Umschalter voll reparierbar und die Reparaturzeitverteilung sei

$$G_S(t) = 1 - \exp(-\beta t) .$$

Zum Umschalten selbst werde wieder keine Zeit benötigt.

Damit lassen sich sofort die möglichen Zustände des Prozesses definieren:

- Zustand 0  $V_1$  arbeitet mit  $d_1$ ,  $V_2$  mit  $d_2$ , der Umschalter ist funktionstüchtig.
- Zustand 1  $V_1$  arbeitet mit  $d_1$ ,  $V_2$  mit  $d_2$ , der Umschalter ist ausgefallen.
- Zustand 2  $V_1$  arbeitet mit  $d_0$ ,  $V_2$  wird gerade repariert und hat zuvor mit  $d_2$  gearbeitet, der Umschalter ist funktionstüchtig.
- Zustand 3  $V_1$  arbeitet mit  $d_0$ ,  $V_2$  ist repariert und in standby, da der Umschalter ausgefallen ist.
- Zustand 4  $V_2$  arbeitet mit  $d_0$ ,  $V_1$  wird gerade repariert und hat zuvor mit  $d_1$  gearbeitet, der Umschalter ist funktionstüchtig.
- Zustand 5  $V_2$  arbeitet mit  $d_0$ ,  $V_1$  ist repariert und in standby, da der Umschalter ausgefallen ist.
- Zustand a Das System ist ausgefallen.

Hierbei bezeichne der "standby"-Zustand der Verarbeitungseinheit  $V_j$ , daß die Reparatur von  $V_j$  beendet wurde, aber auf Grund eines Ausfalles des Umschalters  $V_j$  nicht mit der Intensität  $d_j$  arbeiten kann und

die andere Verarbeitungseinheit deshalb weiter mit der Intensität  $d_0$  arbeiten muß. Während dieser standby-Zeit falle  $V_i$  nicht aus.

Damit ergibt sich wieder der zugehörige Flußgraph (Bild 2).

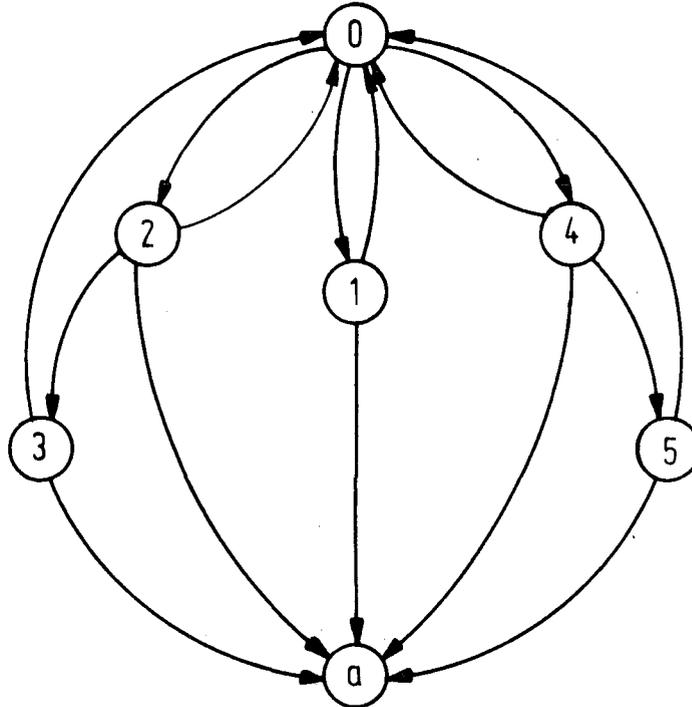


Bild 2 Flußgraph des Modells

Vom Zustand  $S_0$  kann der Prozeß durch Ausfall des Umschalters in den Zustand  $S_1$

$$q_{01}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_1} \overline{F_2} dF_S = \frac{\alpha}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha} ,$$

oder durch Ausfall von  $V_2$  bzw.  $V_1$  in die Zustände  $S_2$  bzw.  $S_4$  gelangen

$$q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_1} \overline{F_S} d F_2 = \frac{\lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha}$$

$$q_{04}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_2} \overline{F_S} d F_1 = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha} .$$

Durch Reparatur des Umschalters geht der Zustand  $S_1$  wieder in den Zustand  $S_0$  über :

$$q_{10}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_1} \overline{F_2} d G_S = \frac{\beta}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \beta} .$$

Zum andern bewirkt ein Ausfall einer Verarbeitungseinheit bei defektem Umschalter notwendig einen Systemausfall:

$$q_{1a}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_2} \overline{G_S} d F_1 + \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_1} \overline{G_S} d F_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \beta} .$$

Sei nun im folgenden  $P(t)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Umschalter zum Zeitpunkt  $t$  verfügbar ist, sofern er zum Zeitpunkt  $t=0$  funktionstüchtig ist. Man erhält dann sofort /8/

$$P(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \exp-(\alpha+\beta)t .$$

Durch Reparatur von  $V_2$  wird damit bei verfügbarem Umschalter der Übergang von  $S_2$  nach  $S_0$  realisiert:

$$q_{20}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_0}^{-1} P d G_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} g_2(s+\lambda_0) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} g_2(s+\lambda_0+\alpha+\beta).$$

Ist jedoch der Umschalter nach Beendigung der Reparatur von  $V_2$  nicht funktionstüchtig, so kann  $V_2$  nicht wieder eingeschaltet werden, also

$$q_{23}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_0}^{-1} \overline{P} d G_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} [g_2(s+\lambda_0) - g_2(s+\lambda_0+\alpha+\beta)].$$

Ein Ausfall von  $V_1$  schließlich bewirkt ausgehend von  $S_2$  einen Systemausfall:

$$q_{2a}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{G_2} d F_0^1 = \frac{\lambda_0}{s+\lambda_0} [1-g_2(s+\lambda_0)].$$

Der Übergang vom Zustand  $S_3$  zum Zustand  $S_0$  wird durch die Reparatur des Umschalters realisiert, wobei zu berücksichtigen ist, daß  $V_2$  während der standby-Zeit nicht ausfallen kann:

$$q_{30}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{F_0^{-1}} d G_S = \frac{\beta}{s + \lambda_0 + \beta}$$

Zum andern führt ein Ausfall von  $V_1$  vor Beendigung der Reparatur des Umschalters zum Systemzusammenbruch  $S_a$ :

$$q_{3a}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{G_S^1} d F_0^1 = \frac{\lambda_0}{s + \lambda_0 + \beta} .$$

Aus Gründen der Symetrie erhält man schließlich die noch verbleibenden LS-Transformierten der Übergangsraten völlig analog:

$$q_{40}(s) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} g_1(s + \lambda_0^2) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} g_1(s + \lambda_0^2 + \alpha + \beta)$$

$$q_{45}(s) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \mathbf{[g_1(s + \lambda_0^2) - g_1(s + \lambda_0^2 + \alpha + \beta)]}$$

$$q_{4a}(s) = \frac{\lambda_0^2}{s + \lambda_0^2} \mathbf{[1 - g_1(s + \lambda_0^2)]}$$

$$q_{50}(s) = \frac{\beta}{s + \lambda_0^2 + \beta}$$

$$q_{5a}(s) = \frac{\lambda_0^2}{s + \lambda_0^2 + \beta}$$

Wird dann wieder  $\phi_i$  als LS-Transformierte der Verteilung der Zeit eines ersten Überganges von  $S_i$  nach  $S_a$  definiert, so muß das lineare

Gleichungssystem

$$\phi_0(s) = q_{01}(s) \phi_1(s) + q_{02}(s) \phi_2(s) + q_{04} \phi_4(s)$$

$$\phi_1(s) = q_{10}(s) \phi_0(s) + q_{1a}(s)$$

$$\phi_2(s) = q_{20}(s) \phi_0(s) + q_{23}(s) \phi_3(s) + q_{2a}(s)$$

$$\phi_3(s) = q_{30}(s) \phi_0(s) + q_{3a}(s)$$

$$\phi_4(s) = q_{40}(s) \phi_0(s) + q_{45}(s) \phi_5(s) + q_{4a}(s)$$

$$\phi_5(s) = q_{50}(s) \phi_0(s) + q_{5a}(s)$$

gelten.

Hieraus erhält man schließlich als Ergebnis die LS-Transformierte der Zeit bis zum ersten Systemausfall

$$\phi_0 = \frac{q_{02} (q_{2a} + q_{23}q_{3a}) + q_{01}q_{1a} + q_{04}(q_{4a} + q_{45}q_{5a})}{1 - q_{02}(q_{20} + q_{23}q_{30}) - q_{01}q_{10} - q_{04}(q_{40} + q_{45}q_{50})}$$

mit dem Erwartungswert

$$\hat{T} = - \left. \frac{d\phi_0}{ds} \right|_{s=0}$$

Wie man sofort sieht, stimmt dieses Ergebnis im Falle  $\frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty$ , d.h. perfekter Umschalter, mit dem des vereinfachten Modells überein.

Geht man nun insbesondere von zwei gleichen Verarbeitungseinheiten aus, womit  $\lambda_0 := \lambda_0^1 = \lambda_0^2$  und  $G := G_1 = G_2$  wäre, so ergibt sich

$$\hat{T} = \frac{\frac{\lambda^* + \alpha + \beta}{\lambda^* + \beta} + \frac{\lambda^*}{\lambda_0} - \frac{\lambda^*}{(\lambda_0 + \beta)(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\beta}{\lambda_0} (\lambda_0 + \alpha + \beta)g(\lambda_0) + \alpha g(\lambda_0 + \alpha + \beta) \right]}{\frac{\lambda^* (\lambda_0 + \alpha + \beta)}{\lambda^* + \beta} - \frac{\lambda^*}{(\lambda_0 + \beta)(\alpha + \beta)} \left[ \beta (\lambda_0 + \alpha + \beta)g(\lambda_0) + \alpha \lambda_0 g(\lambda_0 + \alpha + \beta) \right]}$$

mit  $\lambda^* := \lambda_1 + \lambda_2$ .

Desweiteren erhält man mit  $\lambda := \lambda_1 = \lambda_0^1 = \lambda_0^2$  und  $\lambda_2 = 0$  wieder den Fall der kalten Reserve, der in /9,10/ diskutiert wird.

## 5. Diskussion der Ergebnisse

Betrachtet werde im folgenden der Spezialfall gleicher Verarbeitungseinheiten bei perfektem Umschalter, also

$$G := G_1 = G_2$$

$$\lambda_0 := \lambda_0^1 = \lambda_0^2$$

Dann ergibt sich aus Kap. 2

$$\hat{T} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - g(\lambda_0))}$$

Definiert man weiter

$$M := \hat{T} \cdot \lambda_0 \quad ,$$

so ist  $M$  als Quotient aus der mittleren Zeit bis zum Systemausfall des redundanten Systems und der mittleren Lebensdauer einer einzelnen mit Intensität  $\lambda_0$  arbeitenden Verarbeitungseinheit ein Maß für die Erhöhung der Zuverlässigkeit dieses Systems durch die Einrichtung der oben beschriebenen Redundanz.

Es folgt sofort

$$M = 1 + \delta \frac{1}{1 - g(\lambda_0)} \quad , \quad \text{wobei} \quad \delta := \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad .$$

Sei  $G$  nun eine beliebige Reparaturzeitverteilung, so sei wie üblich

$$\frac{1}{\mu} := \int_0^{\infty} t dG(t)$$

die mittlere Reparaturzeit und

$$v := \frac{\frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda_0 + \mu}$$

die Verfügbarkeit der Verarbeitungseinheit  $V$ .

Betrachtet man damit die drei Spezialfälle exponential-, k-Erlang- und konstanter Reparaturzeitverteilungen, so ergibt sich

1) Exponentialverteilung

$$G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$$

$$g(s) = \frac{\mu}{s + \mu}$$

$$M = 1 + \delta \frac{1}{1-v}$$

2) k-Erlang-Verteilung

$$G(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t k\mu (k\mu t)^{k-1} \exp(-k\mu t) dt$$

$$g(s) = \left(\frac{k\mu}{s+k\mu}\right)^k$$

$$M = 1 + \delta \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{1-v}{kV}\right)^k}}$$

3) konstante Verteilung

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < \frac{1}{\mu} \\ 1 & \text{falls } t > \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

$$g(s) = \exp - \frac{s}{\mu}$$
$$M = 1 + \delta \frac{1}{1 - \exp(1 - \frac{1}{v})}$$

In diesen Fällen ist also M darstellbar als

$$M = 1 + \delta K(v) ,$$

wobei K(v) ein Koeffizient ist, der lediglich abhängt von der Verfügbarkeit v der Verarbeitungseinheit V.

Bild 3 zeigt den Verlauf von K = f(v) im Falle exponentieller und konstanter Reparaturzeitverteilung. Man erkennt hierbei deutlich, daß K bei konstanter Reparaturzeitverteilung kleiner ist als im andern Fall, der Unterschied aber mit zunehmender Verfügbarkeit v immer geringer wird, und im Bereich realistischer Verfügbarkeiten von 70-90% zu vernachlässigen wäre.

Damit wäre es von großem praktischem Wert, wenn sich zeigen ließe, daß für beliebige Reparaturzeitverteilungen G

$$\frac{1}{1 - \exp(1 - \frac{1}{v})} \leq K(v) = \frac{1}{1 - g(\lambda_0)} \leq \frac{1}{1 - v}$$

d.h. die Exponential- bzw. konstante Verteilung analog dem Ergebnis der Warteschlangentheorie eine Ober- bzw. Untergrenze für den Koeffizienten K darstellt.

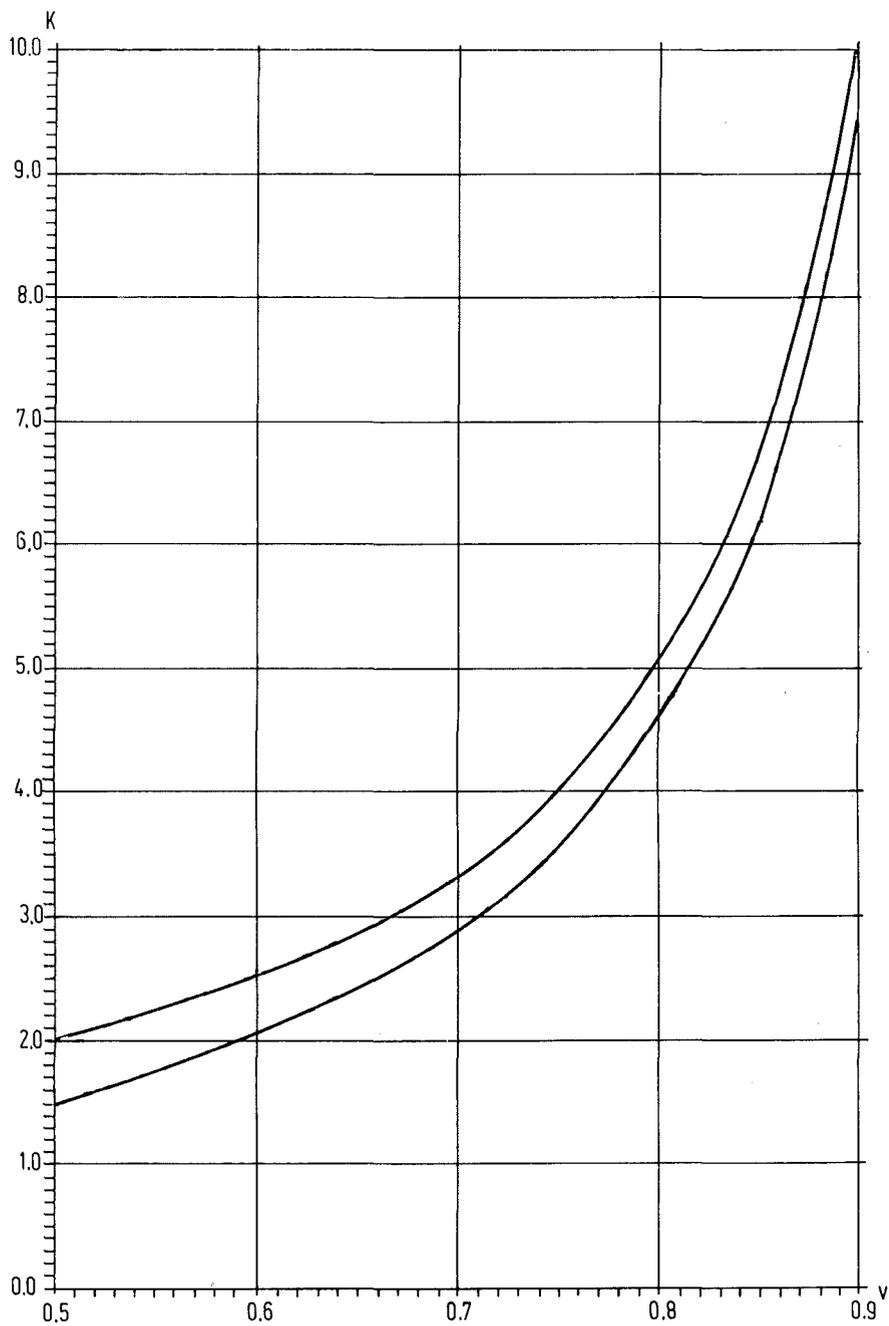


Bild 3  $K(v)$  im Falle exponential- und konstanter Reparaturzeitverteilungen

Diese Abschätzungen liefern unter spezielleren Voraussetzungen jedoch unmittelbar eine Ungleichung, die sich in /11/ findet:

Sind  $F, G$  Verteilungen nichtnegativer Zufallsvariablen und ist

$$(*) \quad \frac{\inf \{t : F(t) > 1-p\}}{\inf \{t : G(t) > 1-p\}}$$

monoton nicht fallend in  $p$ , so ist

$$\sqrt[r]{\frac{\int t^r dG(t)}{\int t^r dF(t)}}$$

monoton nicht fallend in  $r$ .

Setzt man damit speziell

$$F(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{für } t \geq 1 \end{cases},$$

so folgt, daß

$$x_i := \sqrt[i]{\int_0^\infty t^i dG(t)} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

monoton nicht fallend ist und damit

$$\begin{aligned} g(\lambda_0) &= \int_0^\infty \exp(-\lambda_0 t) dG(t) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-\lambda_0)^i}{i!} \int_0^\infty t^i dG(t) \\ &> \sum_{i \geq 0} \frac{(-\lambda_0)^i}{i!} \left( \int_0^\infty t dG(t) \right)^i = \exp - \frac{\lambda_0}{\mu} \end{aligned}$$

also

$$K(v) \geq \frac{1}{1 - \exp(1 - \frac{1}{v})}$$

Wird nun andererseits speziell  $G(t) = 1 - \exp -t$  gesetzt, so ist die Bedingung (\*) äquivalent mit

$$(**) - \frac{1}{t} \ln 1-F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\tilde{f}(t)}{1-F(t)} dt$$

ist monoton nicht fallend in  $t$ , wobei  $\tilde{f}$  die Dichte von  $F$  bezeichne.

Interpretiert man  $F$  als Verteilung der Reparaturzeit einer Verarbeitungseinheit, so bedeutet die Bedingung (\*\*), daß die durchschnittliche Reparaturrate monoton nicht fallend ist. Für derartige Verteilungen, die in /12,13/ ausführlich diskutiert werden, gilt damit insbesondere,

$$x_i := \sqrt[i]{\int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} dG(t)} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

ist monoton nicht steigend.

Dies liefert dann die andere Abschätzung

$$\begin{aligned} g(\lambda_0) &= \sum_{i \geq 0} (-\lambda_0)^i \int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} dG(t) < \sum_{i \geq 0} (-\lambda_0)^i \left( \int_0^{\infty} t dG(t) \right)^i \\ &= \sum_{i \geq 0} \left( \frac{-\lambda_0}{\mu} \right)^i = \frac{\mu}{\lambda_0 + \mu} \quad , \quad \text{sofern} \quad \frac{\lambda_0}{\mu} < 1 \end{aligned}$$

und damit

$$K(v) \leq \frac{1}{1-v} \quad .$$

Zusammengefaßt ergibt sich also:

Der Quotient aus der mittleren Zeit bis zum Systemausfall des redundanten Systems und der mittleren Lebensdauer einer einzelnen Verarbeitungseinheit läßt sich ausdrücken in der Form

$$M = 1 + \delta K(v) \quad ,$$

wobei  $\delta := \lambda_0 / (\lambda_1 + \lambda_2)$  und  $K$  ein von der Verfügbarkeit  $v$  abhängiger Koeffizient ist.

Allgemein gilt

$$K(v) \geq \frac{1}{1 - \exp(1 - \frac{1}{v})} \quad ,$$

und im Falle zunehmender durchschnittlicher Reparaturraten, d.h. mit zunehmender Betriebsdauer Abnahme der Reparaturzeit, erhält man

$$K(v) \leq \frac{1}{1-v} \quad .$$

Damit zeigt Bild 3, daß unter diesen realistischen Annahmen die Verteilung der Reparaturzeit einen fast vernachlässigbaren Einfluß auf die Zielgrößen des Modells hat.

## 6. Schlußbemerkung

In diesem Bericht wurde damit ein Modell entwickelt, daß die Zuverlässigkeit eines redundanten Systems zweier komplexer Verarbeitungseinheiten, bei dem eine starre Trennung zwischen Arbeits- und Reserveeinheit nicht sinnvoll ist, ermittelt. Etliche der bisher bekannten Modelle konnten dabei als Spezialfall abgeleitet werden.

Von praktischer Bedeutung ist weiter, daß die spezielle Form der Reparaturzeitverteilung für die Zuverlässigkeit des Systems nahezu unerheblich ist.

Weiterhin läßt sich mit dem Modell die naheliegende Vermutung von Praktikern, beide Verarbeitungseinheiten jeweils halb zu fahren, quantitativ - unter bestimmten Voraussetzungen - als optimale Strategie bestätigen.

## 7. Referenzen

- /1/ S. Osaki  
System Reliability Analysis by Markov Renewal Processes  
J. of the OR Soc. (Japan), Bd. 12, 1970, S. 127-188.
  
- /2/ Y. Chow, E. Cassagnol  
Linear Signal-Flow Graphs and Applications  
J. Wiley & Sons, New York-London, 1962.
  
- /3/ B.W. Gnedenko  
Some Theorems on Standbys  
Proc. 5th Berkeley Symp. on Mathem. Stat. and Prob.  
Bd. 3, University of California Press, 1967, S. 285-291.
  
- /4/ B.W. Gnedenko, J.K. Beljajew, A.D. Solojew  
Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie  
Akademie Verlag, Berlin, 1968.
  
- /5/ D.P. Gaver  
Time to Failure and Availability of Paralleled Systems with  
Repair  
IEEE Trans. on Reliability, Bd. 12, 1963, S. 30-38.
  
- /6/ B.H. Liebowitz  
Reliability Considerations for Two-Element Redundant  
System with Generalized Repair Time  
Operations Research, Bd. 14, 1966, S. 233-241.
  
- /7/ S. Osaki  
Renewal Theoretic Aspects of Two-Unit Redundant Systems  
IEEE Trans. on Reliability, Bd. 19, 1970, S. 105-110.
  
- /8/ R.E. Barlow, F. Proschan  
Mathematical Theory of Reliability  
J. Wiley & Sons, New York-London, 1965.

- /9/ S. Osaki  
On a Two-Unit Standby-Redundant System with Imperfect  
Switchover  
IEEE Trans. on Reliability, Bd. 21, 1972, S. 20-24 und S. 196.
- /10/ S. Sawhney  
Reliability Prediction of a Standby System with Imperfect  
Switchover  
Revue Belge de Statistique d'Informatique et de Recherche  
Operationelle, Bd. 12, 1973, S. 30-39.
- /11/ A.W. Marshall, I. Olkin, F. Proschan  
Monotonicity of Ratios of Means and Other Applications of  
Majorization  
in: O. Shisha Inequalities  
Academic Press, New York-London, 1967, S. 177-190.
- /12/ R. Barlow, A.W. Marshall, F. Proschan  
Properties of Probability Distributions with Monotone  
Hazard Rate  
Ann. Math. Stat., Bd. 34, 1963, S. 375-389.
- /13/ Z.W. Birnbaum, J.D. Esary, A.W. Marshall  
A Stochastic Characterization of Wear-Out for Components  
and Systems  
Ann. Math. Stat., Bd. 37, 1966, S. 816-825.