

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM**

**KARLSRUHE**

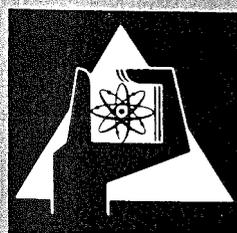
Juni 1977

KFK 2403

Entwicklungsgruppe Kernmaterialsicherung  
Institut für Datenverarbeitung in der Technik  
Projekt Spaltstoffflußkontrolle

**Kernmaterialbilanzierung und Datenverifikation  
in der Brennelementfabrikationsanlage der  
Reaktor-Brennelement Union Hanau**

R. Avenhaus, W. Golly, F. J. Krüger



**GESELLSCHAFT  
FÜR  
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

**KARLSRUHE**

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2403

ENTWICKLUNGSGRUPPE KERNMATERIALSICHERUNG  
INSTITUT FÜR DATENVERARBEITUNG IN DER TECHNIK  
PROJEKT SPALTSTOFFFLUSSKONTROLLE

Kernmaterialbilanzierung und Datenverifikation  
in der Brennelementfabrikationsanlage der  
Reaktor-Brennelement Union Hanau

von

Rudolf Avenhaus<sup>1)</sup> und Werner Golly<sup>2)</sup>  
in Zusammenarbeit mit  
Franz Josef Krüger<sup>3)</sup>

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

- 
- 1) Institut für Datenverarbeitung in der Technik  
2) Entwicklungsgruppe Kernmaterialsicherung  
3) Reaktor-Brennelement Union Hanau



## Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Analyse des Materialbilanzierungssystems einer Fabrik für Leichtwasserreaktor-Brennelemente. Es werden die Eingangs-, Produkt- und Abfallströme sowie das Inventar der Anlage erfaßt, und es werden die Meßmethoden einschließlich der zugehörigen Meßfehler für die einzelnen Materialströme beschrieben. Mit Hilfe dieser Unterlagen wird die Genauigkeit der Materialbilanzierung bestimmt.

In einem zweiten Teil wird ein mögliches Datenverifikationssystem im Sinne des internationalen Überwachungssystems der IAEA analysiert; es werden die zu überwachenden Materialklassen bestimmt, und es wird eine Aufwandsoptimierung sowie Effektivitätsbetrachtung durchgeführt.

In einem letzten Teil wird schließlich die Effektivität des Gesamt-Überwachungssystems: Materialbilanzierung und Datenverifikation bestimmt, d.h., es wird festgestellt, welche Anforderungen an ein Überwachungssystem mit heutigen Mitteln zu realisieren sind.

### Nuclear Material Accountancy and Data Verification in the Fuel Element Fabrication Plant of the Reaktor-Brennelement Union Hanau

## Abstract

In this paper the material accountancy system of a light water reactor fuel fabrication plant is analyzed. The input, product and waste streams, and the physical inventory of the plant are determined; the measurement methods together with their errors are described. On the basis of these data the accuracy of material balance establishment is determined.

In the second part of this paper one possible data verification system in the sense of the IAEA international safeguards system is analyzed: the material classes to be safeguarded are determined, and an inspection effort optimization as well as an efficiency study are performed.

In the last part the efficiency of the total safeguards system is determined: material accountancy and data verification. By this analysis reasonable requirements can be formulated for a safeguards system under present circumstances.

## Inhalt

1. Einführung
2. Anlagenbeschreibung
  - 2.1 Der Fertigungsprozeß
  - 2.2 Schrotte und Abfallmaterial
  - 2.3 Kennzeichnende Daten der Anlage
3. Gegenwärtiger Stand der Kernmaterialbilanzierung
  - 3.1 Messung des Materialflusses
  - 3.2 Messung des Kernmaterialinventars
  - 3.3 Das nicht nachgewiesene Material
4. Datenverifikation
  - 4.1 Qualitative Überlegungen
  - 4.2 Optimierung des Inspektionsaufwandes für die Datenverifikation
5. Diskussion der Ergebnisse und Schlußfolgerungen

Literatur

Tabellen

Figuren

Anhang 1: Das Materialbilanzierungskonzept

Anhang 2: Theorie der Meßfehler

Anhang 3: Stichprobenkontrollen

## 1. Einführung

Wie in jeder anderen materialverarbeitenden, industriellen Anlage werden auch in kerntechnischen Anlagen Materialbilanzen erstellt, die der Prozeßüberwachung, dem Nachweis des Verbleibs des verarbeiteten Materials und anderen Zielen dienen.

Neben diesen Zielen kommt der Materialbilanz in kerntechnischen Anlagen jedoch eine weitere und sehr bedeutsame Rolle zu, die aus dem Kernwaffen-Nichtverbreitungsvertrag herrührt.

Im Kernwaffen-Nichtverbreitungsvertrag, der 1974 von der Bundesrepublik Deutschland ratifiziert worden ist, sind internationale Kontrollen vorgesehen, mit deren Hilfe das spaltbare Material im friedlichen Sektor der Kernindustrien von Staaten überwacht werden soll, die den Nichtverbreitungsvertrag unterzeichnen. Träger dieser internationalen Kontrollen ist die Internationale Atomenergie-Organisation (IAEO) in Wien.

Nach langwierigen Vorbereitungen und Verhandlungen waren 1971 die Details, d.h. die Prinzipien und die organisatorische Form dieser internationalen Kontrollen festgelegt und in einem Modellabkommen der IAEO /1/ niedergelegt worden. Entsprechend diesem Modellabkommen ist das wichtigste Werkzeug der Überwachung das Materialbilanzierungsprinzip (material accountability), wobei die Prinzipien der dichten Umhüllung (containment) und der Beobachtung (surveillance) ergänzende Funktionen haben. Dabei ist die Überwachung so organisiert, daß die Betreiber der kerntechnischen Anlagen die für die Erstellung der Materialbilanz notwendigen Daten (source data) aufnehmen, diese in zusammengefaßter Form an die zuständige nationale bzw. regionale Behörde weiterleiten, die diese dann an die internationale Behörde, die IAEO weitergibt. Diese überprüft die gelieferten Daten mit Hilfe eigener, unabhängiger Messungen; stimmen diese eigenen Messungen innerhalb der Meßgenauigkeit mit denen des Anlage-Betreibers überein, dann akzeptiert die internationale Behörde diese Daten und erstellt die Materialbilanz allein mit Hilfe der Betreiber-Daten.

---

zum Druck eingereicht: 18.5.1977

Im Modellabkommen von 1971 wurden nicht alle Details der Kontrollen festgelegt. So wurde zwar das Ziel verbal mit der "rechtzeitigen Entdeckung der Entwendung signifikanter Mengen Materials" (timely detection of the diversion of significant amounts) beschrieben, jedoch wurden keine quantitativen Aussagen darüber gemacht, was "rechtzeitig" und "signifikant" heißen soll. Ebenso wenig wurde festgelegt, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Entwendung entdeckt werden sollte. Aus diesem Grunde wurden nach 1971 eine Reihe von Analysen für bestehende Anlagen durchgeführt, mit deren Hilfe eine Vorstellung über Zahlenwerte für die genannten Größen erzeugt werden sollte. Solche Analysen wurden auch von deutscher Seite aus durchgeführt (/2/, /3/).

In der vorliegenden Arbeit wird eine solche Analyse für die Reaktorbrennelement-Union (RBU) in Wolfgang bei Hanau, die Brennelemente für Leichtwasser-Reaktoren herstellt, durchgeführt. Ziel dieser Arbeit im engeren Sinn war die Analyse der Anwendung des Überwachungssystems der IAEO auf eine niederangereichertes Uran verarbeitende kerntechnische Anlage, wobei

- die Effizienz des Materialbilanzierungssystems,
- die optimale Verteilung des für die Datenverifikation vorgegebenen Überwachungsaufwandes,
- die Effizienz der Datenverifikation, und
- die Effizienz der Gesamtüberwachung

die wesentlichen Gegenstände der Untersuchung darstellten; dabei wird unter Effizienz die optimale und garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit als Funktion von Überwachungsaufwand und angenommener entwendeter Menge spaltbaren Materials verstanden. Ziel der Arbeit im weiteren Sinne war die Analyse von technisch realisierbaren Forderungen bezüglich der Zahlenwerte der genannten signifikanten Mengen; gerade im letzten Jahr ist diese Diskussion wieder weltweit belebt worden, wobei die Zahlenvorstellungen, die vom Ziel der Kontrolle ausgehend entwickelt wurden, eben nicht immer in Einklang mit den technischen Möglichkeiten standen.

Nicht zuletzt in diesem Sinne ist die vorliegende Arbeit als eine Referenzstudie für niedrigangereichertes Uran verarbeitende Anlagen von der Standing Advisory Group for Safeguards Implementation (SAGSI) der IAEA angeregt worden.

Wie aus der Definition der Effizienz hervorgeht, ist es zur Analyse dieser Größe notwendig, Entwendungsstrategien zu betrachten; eine solche Vorgehensweise impliziert also in keiner Weise, daß dem einzelnen Anlage-Betreiber unterstellt wird, daß er auch wirklich spaltbares Material entwenden will. Mehr noch, es muß unter den denkbaren Entwendungsstrategien die für den (theoretisch illegal handelnden) Betreiber günstigste Entwendungsstrategie bestimmt werden, damit durch eine Optimierung des Inspektionsaufwandes auch wirklich die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit ermittelt wird. Entsprechend der Konstruktion des Überwachungssystems müssen zwei Klassen von Entwendungsstrategien betrachtet werden, nämlich

- die Strategien, bei denen unter Ausnützung der Meßungengenauigkeit Material ohne Datenfälschung entwendet wird in der Hoffnung, daß die (ungenau) Materialbilanz dies nicht feststellen kann, sowie
- die Strategien, bei denen die Materialbilanzdaten so gefälscht werden, daß die Materialbilanz "aufgeht", wobei der Differenzbetrag zwischen berichtetem und wahren Wert dann entwendet werden kann.

Zur Bestimmung der Effizienz des Gesamtsystems müssen schließlich Mischungen aus beiden Strategienklassen betrachtet werden.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich zwangsläufig der Aufbau dieser Arbeit: Nach einer Beschreibung der betrachteten kerntechnischen Anlage sowie einer Angabe der wesentlichsten technischen Parameter wird im dritten Kapitel das Materialbilanzierungssystem der RBU analysiert, so wie es heute existiert. Es werden die Varianz der Materialbilanz und die Entdeckungswahrscheinlichkeit für das Materialbilanzierungssystem als Funktion von Fehlalarmwahrscheinlichkeit und zu entwendender Menge bestimmt. Dabei wird nur eine Uran-Element-Materialbilanz

betrachtet, nicht jedoch eine Uran-235 Materialbilanz, was natürlich auch möglich wäre; die Gründe für die Nicht-Betrachtung der letzteren Bilanz liegen darin, daß das Ziel der Kontrolle bezüglich der "signifikanten Mengen" (siehe Kapitel 5) nicht auf eine bestimmte Menge von U-235, sondern auf eine in effektiven Kilogramm (siehe Kapitel 4) gemessene Spaltmaterialmenge bezogen wird.

An dieser Stelle muß betont werden, daß die verwendeten Meßgenauigkeiten zwar von den zuständigen Mitarbeitern der RBU angegeben wurden, daß aber eine experimentelle Bestätigung dieser Daten in einigen Fällen aussteht. Dies heißt aber, daß die errechneten Varianzen bzw. Entdeckungswahrscheinlichkeiten zwar theoretisch einwandfrei sind, daß sie aber andererseits vor einer praktischen Verwendung erst noch mit Hilfe von "integralen Experimenten" (siehe z.B. /4/) experimentell verifiziert werden müssen.

Im vierten Kapitel wird das Problem der Datenverifikation in der RBU analysiert. Die hier vorliegende Situation unterscheidet sich insofern von der Situation bei der Materialbilanzierung, als es noch keinen verifizierten "Ist-Zustand" gibt, da die eigentlichen internationalen Kontrollen noch nicht begonnen haben. Aus diesem Grunde mußten Plausibilitätsüberlegungen angestellt werden, die in einem denkbaren, nicht jedoch zwingend so zu erwartenden Verifikationsschema resultierten. Daher wurde bei der Niederschrift dieses Kapitels auch besonderer Wert auf die Darstellung gelegt: für den Fall, daß sich beim zukünftigen Verifikationssystem die Zahlenwerte der relevanten Parameter bzw. die Verfahren zur Datenverifikation gegenüber den hier diskutierten Zahlenwerten bzw. Verfahren ändern, sollte es keine größere Mühe bereiten, eine entsprechend abgeänderte Analyse durchzuführen.

Im fünften Kapitel schließlich wird die Effizienz des gesamten, aus Materialbilanzierung und Datenverifikation bestehenden Überwachungssystems bestimmt. Für diese Untersuchung gilt natürlich

aus den genannten Gründen das gleiche, was schon für die Untersuchungen des vierten Kapitels galt.

Ein abschließendes Wort sollte zu den verwendeten mathematischen Methoden gesagt werden. Wegen der notwendigen Behandlung der zufälligen Meßfehler und wegen der zu behandelnden Stichprobenkontrollen kommen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik zur Anwendung. Die bei der hier gegebenen Problematik anzuwendenden Methoden wurden in den vergangenen fünf Jahren entwickelt und sind ausführlich in einer Monographie / 5 / dargestellt; da diese Monographie jedoch erst gegen Ende 1977 allgemein verfügbar sein wird, sind die wesentlichsten verwendeten Methoden in den drei Anhängen dargestellt. Einen Sonderfall stellt die Lösung des in Abschnitt 4.2 auftretenden Optimierungsproblems dar: da diese Lösung im Zuge der vorliegenden Arbeit entwickelt wurde, ist ihre Ableitung im dritten Abschnitt ausführlich dargestellt.



## 2. Anlagenbeschreibung

Im Werk 1 der RBU in Hanau-Wolfgang werden vorwiegend Brennelemente für Druckwasserreaktoren aus Uranoxidpulver hergestellt, dessen U-235-Gehalt auf maximal 3,5 % angereichert ist. Die Betriebsgenehmigung der RBU erstreckt sich auf Anreicherungen  $\leq 20$  %. Mit den Halbfabrikaten Uranoxidpulver und -pellets wird vor allem das Werk 2 in Karlstein sowie die Firma ALKEM beliefert.

### 2.1 Der Fertigungsprozeß

Abb. 1 zeigt einen Überblick über den Fertigungsablauf in einer Fertigungslinie; in bis zu 7 Fertigungslinien wird das Kernmaterial nach Anreicherungsgrad getrennt verarbeitet.

Ausgangsmaterialien sind Uranhexafluorid ( $UF_6$ ), das aus den USA und der Sowjetunion stammt, und Uranylнитratlösung (UNH), die mit einem U-235-Gehalt von 0,71 % (Natururan) vornehmlich aus England bezogen wird, sowie Uranylнитratlösung mit verschiedenen Anreicherungsgraden, die aus der naßchemischen Aufarbeitung von Schrotten stammt.

In Ausdampfstationen wird Uranhexafluorid aus den Transportbehältern sowie Uranylнитratlösung aus Dosiersäulen dem Konversionsprozeß zugeführt, bei dem durch Zusatz von Kohlendioxid und Ammoniak Ammoniumuranylkarbonat (AUC) gebildet wird. Dieses wird vom Fällbehälter durch Pumpen als Suspension auf Drehfilter gefördert. Nach Waschen und Trocknen wird das AUC abgefräst und als Pulver mittels Saugförderung in Wirbelbetten eingespeist. Zu jedem Fällbehälter gehören zwei Drehfilter, wobei auf dem einen das AUC behandelt wird, solange von dem anderen das Wirbelbett beschickt wird.

In den Wirbelbetten wird das AUC durch Zugabe von Wasserdampf und Wasserstoff in Urandioxid umgewandelt und anschließend entweder in Kannen zur Zwischenlagerung abgefüllt oder direkt in Drehmischer gefördert. Jedem Wirbelbett sind zwei Drehmischer

nachgeschaltet, von denen einer gefüllt wird, während aus dem anderen Uranoxidpulver für die Pelletherstellung oder den Vertrieb von Pulver entnommen wird.

Die Drehmischer sorgen für eine Homogenisierung von jeweils 8 Pulverchargen. Dem zur Pelletherstellung bestimmten Uran-dioxidpulver wird im Drehmischer eine solche Menge  $U_3O_8$  beige-mischt, daß sich die spezifische Sinterdichte ergibt. Beim späteren Sintervorgang, bei dem Wasserstoff als Schutzgas verwendet wird, stellt sich ein nur noch schwach überstöchio-metrisches O/U-Verhältnis zwischen 2,001 und 2,01 ein. Das  $U_3O_8$  stammt vorwiegend aus der Aufarbeitung von Pelletschrott, der in Vibrationsöfen pulverisiert und oxidiert wird.

Aus dem zur Weiterverarbeitung freigegebenen Pulver in den Drehmischemen werden die Vorratsbehälter der Pressen über Saug-förderung beschickt. Hieran schließen sich die mechanischen Verarbeitungsschritte zur Pelletherstellung an: Es werden Pelletgrünlinge gepreßt, die auf Molybdänbleche gestellt werden, die ihrerseits zu Sinterbooten zusammengefaßt werden. Die Boote werden zu den Sinteröfen gefahren und durch diese geschleust. Dabei werden die Grünlinge bei ca.  $1700^{\circ}C$  gesintert. Am Ofenausgang werden die Molybdänbleche mit den Pellets von den Sinterbooten genommen und zu den Schleifmaschinen transportiert, wo die Pellets auf Soll Durchmesser geschliffen, auf Paletten gesetzt und mit den Paletten mehrlagig in Pellet-kästen verpackt werden. Die Pelletkästen werden zum Pulver- und Pelletlager transportiert. Von hier werden Pelletkästen für die Brennelementfertigung entnommen. Es werden zunächst Brennstab-säulen gelegt, die mit  $Al_2O_3$ -Abschlußpellets auf die Solllänge abgestimmt werden. Die Stabsäulen werden in Teilsäulen zerlegt und in Trommelmagazine eingeschoben, in denen sie nach einem Trockenvorgang zum Stabfüllplatz gebracht werden. Hier werden die Pelletsäulen aus den Magazinen in bereits einseitig ver-schlossene Hüllrohre aus Zircaloy eingeschoben, die dann eva-kuiert, mit Helium geflutet und durch Aufschiessen des End-stopfens verschlossen werden. Die verschlossenen Brennstäbe

werden in auf Spezialwagen angebrachten Tuchmulden zur Qualitätskontrolle und nach Freigabe zur Elementmontage geschoben. Hier werden sie von den Wagen in liegende Brennelementkästen gezogen.

## 2.2 Schrotte und Abfallmaterial

Sauberer Schrott, das sind Pelletschrotte und Schleifschlamm, wird nach der Oxidation zu  $U_3O_8$  durch Zudosieren in die Drehmischer dem Fertigungsprozeß wieder zugeführt. Verschmutzter Schrott wird nach Überführung in  $U_3O_8$  in Salpetersäure aufgelöst und das entstandene Uranyl nitrat wird durch Flüssig/Flüssig-Extraktion gereinigt, so daß es wieder dem AUC-Prozeß zugeführt werden kann. Eine weitere Variante ist die Fällung des Urans als Ammoniumdiuranat. Bei allen Fällungen entstehen Filtrate, die je nach Herkunft speziellen Aufarbeitungsschritten unterzogen werden müssen.

## 2.3 Kennzeichnende Daten der Anlage

Der Durchsatz betrug im Jahre 1975 etwa 600 t Uran, davon 520 t niedrigangereichertes Uran mit Anreicherungsgraden bis zu 3,5 % und 80 t Natururan. Daneben wird in geringen Mengen Uran mit höherer Anreicherung (< 20 %) verarbeitet. Diese Nebentätigkeit der RBU soll hier unberücksichtigt bleiben, weil das Anliegen der vorliegenden Arbeit das Erarbeiten von typischen Daten der großtechnischen Fertigung von Brennelementen mit niedrigangereichertem Uran ist.



### 3. Gegenwärtiger Stand der Kernmaterialbilanzierung

Bei der RBU wird sowohl im Hinblick auf Uranmengen als auch auf Mengen an Uran-235 bilanziert.

Die folgende Zusammenstellung soll die Genauigkeit verdeutlichen, mit der nach dem derzeitigen Stand der Kernmaterialerfassung bilanziert werden kann. Wir beschränken uns dabei auf die Uranbilanz und stellen die Bestimmung der Genauigkeit einer U-235-Bilanz einer späteren Arbeit anheim.

Als Inventurperiode wurde ein Jahr angenommen.

Alle Messungen bestehen aus:

- a) einer Bestimmung des Materialgewichtes durch Brutto- und Tarawägung oder durch Nettowägung /kg Kernmaterial/
- b) Ziehen einer Probe
- c) und Bestimmung der Uran-Konzentration der Probe
 
$$\frac{\text{kg Uran}}{\text{kg Kernmaterial}}$$

Die dabei gemachten Meßfehler werden je nach der Art ihrer Auswirkung auf das Summenergebnis vieler Messungen als zufällige oder systematische Fehler klassifiziert.

Im folgenden wird in aufwendiger, wenn auch nicht mathematisch komplizierter Form vom sogenannten "Varianzenkalkül" Gebrauch gemacht. Die wichtigsten Formeln dieses Kalküls sind in Annex II zusammengestellt.

Es seien die von den Meßfehlern herrührenden relativen Standardabweichungen  $\delta_W$  der Gewichtsbestimmung,  $\delta_K$  der Konzentrationsbestimmung und  $\delta_P$  der Probenahme einer Charge und  $\sigma_W$ ,  $\sigma_K$  und  $\sigma_P$  die entsprechenden absoluten Standardabweichungen, dann gilt allgemein für die Varianz des mittleren Bestandes einer Inventargruppe oder des Jahresdurchsatzes einer Materialart, wenn Brutto- und Tarawägung durchgeführt werden und der systematische Wägefehler sich bei der Differenzbildung aufhebt und für den zufälligen Wägefehler gilt:

$$\delta_{W \text{ Brutto}} = \delta_{W \text{ Tara}} = \delta_{W Z};$$

es gilt dann allgemein:

$$\sigma^2 = G^2 \left( 2 \frac{\delta_{WZ}^2}{N_W} + \frac{\delta_{KZ}^2}{N_K} + \frac{\delta_{PZ}^2}{N_K} + \delta_{KS}^2 \right) \quad (3-1a)$$

oder:

$$\sigma^2 = 2\sigma_{WZ}^2 \cdot N_W + \sigma_{KZ}^2 \cdot N_K + \sigma_{PZ}^2 \cdot N_K + \sigma_{KS}^2 \cdot N_K^2 \quad (3-1b)$$

und falls nur eine Nettowägung durchgeführt wird, gilt:

$$\sigma^2 = G^2 \left( \delta_{WS}^2 + \frac{\delta_{KZ}^2}{N_K} + \frac{\delta_{PZ}^2}{N_K} + \delta_{KS}^2 \right) \quad (3-2a)$$

oder:

$$\sigma^2 = \sigma_{WS}^2 \cdot N_W + \sigma_{KZ}^2 \cdot N_K + \sigma_{PZ}^2 \cdot N_K + \sigma_{KS}^2 \cdot N_K^2 \quad (3-2b)$$

Dabei bedeuten:

G ... die Materialmenge in Kg Uran und

$N_W$  .. die Zahl der Wägechargen und

$N_K$  .. die Zahl der Konzentrationsbestimmungschargen  
sowie Indices

Z, S.. herrührend von zufälligem oder systematischen  
Fehler.

### 3.1 Messung des Materialflusses

#### 3.1.1 Eingänge

- a) Uranhexafluorid wird bei Eingang gewogen (brutto) und mit dem auf den Lieferpapieren angegebenen Bruttogewicht verglichen. Stimmen die Ergebnisse bei amerikanischen Lieferungen auf  $\pm 2$  lbs und bei russischen Lieferungen um  $\pm 0,5$  kg überein, dann werden die Lieferdaten übernommen.

Die Tarawägung erfolgt nach Entleerung 1-6 Monate nach Eingang; dabei werden die russischen Behälter generell vorher gesäubert, um Restmengen herauszuholen und die amerikanischen nur dann, wenn das festgestellte Gewicht im entleerten Zustand das im Behälterzeugnis angegebene Leergewicht um mindestens 3 kg übersteigt.

Bei amerikanischen Lieferungen wird je 10 t  $UF_6$  eine ca. 10g-Probe mitgeschickt, während bei russischen Lieferungen zu jedem Transportbehälter - also zu je ca. 2,2 t  $UF_6$  - eine Probenflasche mit 300-500 g Uraninhalt eintrifft. Die Proben werden mittels differentieller Gammaskopimetrie (Vergleich mit Standards) auf den Gehalt an Uran-235 analysiert. Eine Analyse auf den U-Gehalt in  $UF_6$  der Proben erfolgt in der Regel nicht. Die Uranmenge wird aus dem Lieferzertifikat übernommen.

- b) Uranyl nitrat wird in Tankwagen angeliefert, die vor und nach der Entleerung auf der öffentlichen Waage in Hanau gewogen werden (Brutto- und Tarawägung). Während des Entleerens wird eine Probe genommen, die titrimetrisch nach der Dichromat-Methode auf Uran analysiert wird.

Anhand der Daten in Tabelle 1 ergeben sich folgende Varianzen und Standardabweichungen für:

$$\begin{aligned} \underline{UF_6} &: \text{ (nach Formel 3-1b)} \\ \sigma^2 &= 2 \cdot 0,3^2 \cdot 362; \quad \sigma = \underline{8 \text{ kg U}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{UNH}: & \quad (3-1a) \\ \sigma^2 &= (80 \cdot 10^3)^2 \left[ \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 + (5 \cdot 10^{-4})^2 + (3 \cdot 10^{-3})^2}{20} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (80 \cdot 10^3)^2 \cdot 3,21 \cdot 10^{-6}; \quad \sigma = \underline{143 \text{ kg U}} \end{aligned}$$

### 3.1.2 Produktausgänge

- a) Brennstäbe werden als Brennstabsäulen beim Legen einer Nettowägung unterzogen. Die Urankonzentration basiert auf der Analyse von Pellets der Homogenisierungscharge. Im zweiten Halbjahr 1977 soll ein rod scanner zur Verfügung stehen, mit dem mittels Gammasspektrometrie die U-235-Anreicherung gemessen wird.
- b) Pellets werden nach dem Schleifen auf Paletten in Pelletkästen verpackt. Diese werden einer Bruttowägung unterzogen, nachdem Kästen mit Paletten und Verschraubung vor dem Füllen tara gewogen wurden. An einer von 6 Schleifmaschinen wird palettenweise eine Nettowägung durchgeführt. Der Einfachheit halber wird jedoch so gerechnet, als ob bei allen 6 Schleifmaschinen eine Brutto- und Tarawägung durchgeführt würde.  
Die Urankonzentration basiert auf der Analyse von Pellets der Homogenisierungscharge.
- c) Pulver wird beim Abfüllen in Eimer bzw. Fässer brutto- und taragewogen. Die Urankonzentration basiert auf der Analyse einer Probe, die aus dem Drehmischer für eine Homogenisierungscharge gezogen wurde.

Mit den in Tabelle 1 eingetragenen Meßgenauigkeiten ergaben sich folgende Standardabweichungen:

Stäbe: (3-2a)

$$\sigma^2 = (245 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{141} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{141} + (4 \cdot 10^{-4})^2 + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] =$$

$$= (245 \cdot 10^3)^2 \cdot 4,2 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{159 \text{ kg U}}$$

Pellets: (3-1a)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (220 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-4})^2}{3550} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{126} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{126} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (220 \cdot 10^3)^2 \cdot 2,6 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{112 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

Pulver: (3-1a)

in Eimern:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (100 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-4})^2}{2270} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{57} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{57} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (100 \cdot 10^3)^2 \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{52 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

in Fässern:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (35 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{220} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{20} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{20} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (35 \cdot 10^3)^2 \cdot 3,95 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{22 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

### 3.1.3 Abfälle

a) Filtrat, das als nicht auf Uran aufarbeitungswürdiger Rest der Filtrataufarbeitung übrigbleibt, wird entweder verkauft oder nach einer Spezialbehandlung ins Abwasser gelassen.

b) Feste Abfälle bestehen im wesentlichen aus Filtermaterial des Abluftsystems.

Die jährlichen Abfallmengen basieren auf Schätzungen mit einer Genauigkeit von 10 %.

### 3.1.4 Restmengen

- a) Aufgearbeitete Restmengen werden als  $U_3O_8$ -Pulver im Pulver- und Pelletlager eingelagert, brutto- und taragewogen; es wird für jede Aufarbeitungscharge eine Probe gezogen, die mit der Dichromatmethode auf Urangehalt und gammaspektroskopisch auf U-235-Anreicherung untersucht wird.
- b) Nicht aufarbeitungswürdige Restmengen werden einzeln brutto- und taragewogen und ihre Urankonzentration mit einer Genauigkeit von 10 % geschätzt, so daß dieser Fehler bestimmend ist. Die einzelnen Ergebnisse der Urankonzentrationsschätzung sind als zufällig verteilt anzusehen.

Es ergeben sich folgende Standardabweichungen:

#### Aufgearbeitete Restmengen (3-1a)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (2,6 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-4})^2}{43} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{43} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{43} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (2,6 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,3 \cdot 10^{-6}; \quad \sigma = \underline{3 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

#### Nicht aufarbeitungswürdige Restmengen (3-1a)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (1,5 \cdot 10^3)^2 \cdot \frac{0,1^2}{34} = \\ \sigma &= 1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} = \underline{26 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

### 3.2 Messung des Kernmaterialinventars

#### 3.2.1 im Eingangslager

- a) Uranhexafluorid wird in der Regel nicht erneut gemessen, die Bestände werden mit den bei der Eingangskontrolle festgestellten Daten übernommen und auf physische Existenz überprüft; es ergeben sich also keine zusätzlichen Varianzen.
- b) Uranylнитрат im Eingangstank wird gleichfalls in der Regel nicht erneut gemessen und die Bestände werden durch Addition der Eingangschargen bestimmt, abzüglich Entnahmen.

#### 3.2.2 im Pulver- und Pelletlager

Pelletkästen und Pulvereimer und -fässer werden mit den in der Fertigung festgestellten Daten übernommen und auf Existenz überprüft; es sind keine zusätzlichen Varianzen zu berücksichtigen. Ebenso verhält es sich mit den aufgearbeiteten und nicht aufarbeitungswürdigen Restmengen.

Die in Tabelle 2 angegebenen Zahlen sind unter der Annahme gerechnet worden, daß zum Zwecke der Bestandsaufnahme eine erneute Messung oder Schätzung vorgenommen würde. Bei den nicht aufarbeitungswürdigen Restmengen ist die für die Varianz bestimmende Größe in dem Probenahmefehler von 10 % zu sehen, der von Inhomogenitäten herrührt. Deshalb können die einzelnen Gefäße ebenso gut mit auf 10 % genauen Schätzwerten übernommen werden.

Die Varianzen und Standardabweichungen betragen für:

die aufgearbeiteten Restmengen: (3-1a)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (12 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-4})^2}{200} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{200} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{200} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] \\ &= (12 \cdot 10^3)^2 \cdot 2,6 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{6 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

nicht aufarbeitungswürdige Restmengen: (3-1a)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (7 \cdot 10^3)^2 \cdot \frac{0,1^2}{159} \\ \sigma &= 7 \cdot 10^3 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} = \underline{56 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

### 3.2.3 im Brennelementlager

werden die Buchbestände auf physische Existenz geprüft; zusätzliche Varianzen treten also nicht auf.

3.2.4 Bei zwischengelagertem Material treten folgende Standardabweichungen auf:

a) Pulver in Kannen. Es wird angenommen, daß im Mittel so viele Kannen aus einer Homogenisierungscharge stammen wie einer halben Drehmischerfüllung entspricht. Die Kannen sind brutto- und taragewogen. Nach Formel (3-1a) beträgt die Varianz für einen mittleren Bestand nach Formel (3-1a):

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (8 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-4})^2}{170} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{10} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{10} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (8 \cdot 10^3)^2 \cdot 3,8 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{5 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

b) nicht homogenisierter Schrott wird auf 10 % genau geschätzt, die Verteilung der Schätzungen ist zufällig.

$$\sigma^2 = (5 \cdot 10^3)^2 \cdot \frac{0,1^2}{114}; \quad \sigma = 5 \cdot 10^3 \cdot 9,3 \cdot 10^{-3} = \underline{47 \text{ kg U}}$$

- c) homogenisierte Schrottchargen liegen in meßbarer Form vor. Es wird eine Brutto- und Tarawägung der Behälter und eine Analyse je Homogenisatorcharge durchgeführt.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (5 \cdot 10^3)^2 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-4})^2}{83} + \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{83} + \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{83} + (5 \cdot 10^{-4})^2 \right] = \\ &= (5 \cdot 10^3)^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-7}; \quad \sigma = \underline{3 \text{ kg U}}\end{aligned}$$

### 3.2.5 in der Fertigung

- a) meßbares Prozeßinventar befindet sich in den Ausdampfstationen und in den Drehmischern, die mit Druckmeßdosen ausgerüstet sind. Bei den Ausdampfstationen erfolgt eine Bruttowägung der UF<sub>6</sub>-Transportbehälter, die gerade entleert werden, bei den Drehmischern eine Nettowägung des Kernmaterialinhalts.

Für beide Anlagenkomponenten wurde die Hälfte des maximal möglichen Bestandes als mittlerer Bestand angenommen, siehe Abb. 2 und Tabelle 2.

- b) Geschätztes Prozeßinventar ist alles übrige nicht meßbare Kernmaterial in der Fertigung, s. Abb. 2. Es ist in Tabelle 3 zusammengestellt. Die angegebene Genauigkeit bzw. Unsicherheit von 10 % ist diejenige, mit der der Anlagenbetreiber bis heute die Kernmaterialmengen bestimmt, ohne zusätzliche Maßnahmen für die genauere Erfassung momentaner Bestände zu treffen. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß ein Inspektor an den Anlagenteilen, bei denen er auf einen Inhalt an Kernmaterial nur aufgrund des kontinuierlichen Fertigungsvorgangs schließen kann, Kernmaterialinhalte nur mit einer geringeren Genauigkeit bestimmt, ist für die Fällsäulen und die Wirbelbetten zum Vergleich die Genauigkeit zu 50 % angenommen worden.

c) verstecktes Inventar

In Anlageteilen, insbesondere Rohrleitungen verstecktes Inventar kann nicht ohne weiteres zur Erstellung der Materialbilanz herangezogen werden. Für diese Mengen wird eine Standardabweichung von ca.  $\pm 50$  kg Uran geschätzt.

## 3.3 Das nicht nachgewiesene Material

(MUF = material unaccounted for)

Wird zum Zeitpunkt  $t_1$  eine Materialbilanz erstellt, indem der reale Bestand (RB) aufgenommen und mit dem Buchbestand (BB) verglichen wird, dann ist

$$\text{MUF}(t_1) = \text{BB}(t_1) - \text{RB}(t_1) \quad (3-3)$$

Wurde bei der Materialbilanz zum früheren Zeitpunkt  $t_0$  der Buchbestand  $\text{BB}(t_0)$  bereinigt, dann gilt, wenn wir die Eingänge (E) und Ausgänge (A) einsetzen

$$\text{BB}(t_1) = \text{BB}(t_0) + E(t_0, t_1) - A(t_0, t_1) \quad (3-4).$$

Die am Ende des Zeitintervalls  $(t_0, t_1)$  festgestellte Größe MUF ist damit

$$\text{MUF}(t_1) = \text{BB}(t_0) + E(t_0, t_1) - A(t_0, t_1) - \text{RB}(t_1) \quad (3-5)$$

und die Varianz von MUF ergibt sich aus der Summe der Varianzen aller Bestände und aller externen Materialbewegungen. Und wenn keine wesentlichen Veränderungen im Fertigungsablauf (mittlere Bestände) und der Meßgenauigkeit eingetreten sind, kann man in erster Näherung die Varianz des Buchbestandes gleich der des realen Bestandes setzen.

### 3.3.1 Varianz und Standardabweichung von MUF

Für die Varianz gilt somit

$$\text{var}(MUF) = \text{var}(E) + \text{var}(A) + 2 \cdot \text{var}(B) \quad (3-6a)$$

$$= \sum_i \sigma_{E,i}^2 + \sum_i \sigma_{A,i}^2 + 2 \cdot \sum_i \sigma_{B,i}^2 \quad (3-6b)$$

und die Standardabweichung ist

$$\sigma_{MUF} = \left( \text{var}(MUF) \right)^{1/2} \quad (3-7)$$

In Tabelle 4 ist diese Standardabweichung mit den in den Tabellen 1 bis 3 angegebenen einzelnen Standardabweichungen errechnet.

Die Standardabweichung ist eine charakteristische Größe zur Beurteilung der Entdeckungswahrscheinlichkeit von eventuellen Fehlmengen. Im 4. Abschnitt wird das Ergebnis ausführlich besprochen.

### 3.3.2 Der Erwartungswert von MUF

Der "natürliche" Erwartungswert von MUF ist Null, d.h. die Ergebnisse von Materialbilanzen müßten sich um den Wert Null häufen und links und rechts von Null "normalverteilt" sein. Abweichungen ergeben sich jedoch dann, wenn die Bestimmung von Kernmaterialmengen systematisch in einer Richtung fehlerhaft ist.

Ein solcher Fall liegt nach den Beobachtungen des Betreibers bei den amerikanischen UF<sub>6</sub>-Lieferungen vor: 70 % dieser Lieferungen enthalten lediglich die Mindestmenge an Uran entsprechend der vom Lieferer garantierten Genauigkeit von  $\pm 2$  lbs je Transportbehälter. Da das Kernmaterial mit den Daten des Lieferers übernommen wird, wenn die Eingangsmessung innerhalb dieses Toleranzbandes liegt, liefern diese Eingänge einen Beitrag zum Erwartungswert von MUF in Höhe von etwa 130 kg Uran.

Außerdem ist ein weiterer Beitrag zum Erwartungswert von MUF dadurch gegeben, daß alle amerikanischen Transportbehälter nur dann ausgewaschen werden, wenn das Gewicht des entleerten Behälters das im Behälterzeugnis angegebene Leergewicht um 3 kg übersteigt. Obendrein verändert sich das tatsächliche Leergewicht jedes Behälters ständig, da diese vor dem Füllen mit Farbe gestrichen werden, die beim Ausdampfen abbrennt, so daß die Bestimmung von echten Restmengen nach dem Entleeren schwierig ist.

### 3.3.3 Entdeckungswahrscheinlichkeit

Nachdem wir die Varianz des "Material Unaccounted For",  $\text{var}(\text{MUF})$ , bestimmt haben, können wir die Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine Materialentwendung während der Inventurperiode entdeckt wird, bestimmen. Diese Entdeckungswahrscheinlichkeit hängt ab von

- der Materialmenge  $M$ , die während der Inventurperiode verwendet wird,
- der Fehlalarmwahrscheinlichkeit  $\alpha$ , d.h. der Wahrscheinlichkeit, daß die Materialbilanz auf eine Entwendung hinweist, während in Wirklichkeit gar keine stattgefunden hat,
- der Varianz der aufaddierten Meßfehler, ausgedrückt durch  $\text{var}(\text{MUF}) = \sigma_{\text{MUF}}^2$ .

Die Entdeckungswahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$1-\beta = \phi\left(\frac{M}{\sigma_{\text{MUF}}} - U_{1-\alpha}\right), \quad (3-8)$$

wobei  $\phi$  die Gauß'sche Verteilung und  $U$  ihre Umkehrfunktion ist.

Die Ableitung dieser Formel ist in Annex I dargestellt; die Ergebnisse numerischer Rechnungen sind in Tabelle 7 angegeben.

#### 4. Datenverifikation

Entsprechend dem in der Einleitung skizzierten internationalen bzw. regionalen Überwachungsverfahren nimmt der Anlage-Betreiber alle Daten auf, die zur Erstellung einer Materialbilanz notwendig sind; diese Daten werden dann von der Überwachungsbehörde mit Hilfe von unabhängigen Messungen verifiziert.

In diesem Kapitel sollen die Möglichkeiten und die Effizienz von Datenverifikationsverfahren diskutiert werden, wobei wieder die - hypothetische - Annahme gemacht wird, daß der Anlage-Betreiber Daten bewußt verfälscht und den entsprechenden Differenzbetrag entwendet.

Im Gegensatz zu den im vorhergehenden Kapitel behandelten Materialbilanzverfahren basiert die nachfolgende Analyse nicht auf einer zur Zeit gegebenen Praxis; vielmehr wird untersucht, wie ein sinnvolles Datenverifikationssystem aussehen könnte, und wie seine Effizienz beschaffen ist. Es sollte jedoch auf der Basis dieser Analyse leicht möglich sein, ein bezüglich der Parameter (Meßgenauigkeiten, Aufwand) oder bezüglich der Vorgehensweise abgeändertes System zu behandeln.

Eine Diskussion des gesamten Materialbilanzierungs- und Datenverifikationssystems wird im letzten Kapitel gegeben.

##### 4.1 Qualitative Überlegungen

Vor der quantitativen Analyse, deren Ziel die Bestimmung des optimalen Inspektionsaufwandes an den verschiedenen Meßstellen sowie die sich daraus ergebende Effizienz der Überwachungsmaßnahmen ist, wird im folgenden eine qualitative Analyse durchgeführt, deren Ziel es ist, die zu verifizierenden Meßstellen zu identifizieren sowie die für die quantitative Analyse notwendigen Parameterwerte festzulegen.

#### 4.1.1 Eingangsströme

Da das Eingangsmaterial ( $UF_6$  bzw. UNH) zum größeren Teil aus Ländern bezogen wird, die nicht der Europäischen Gemeinschaft angehören, und da der Rest aus Großbritannien, d.h. einem Signatarstaat des Nichtverbreitungsvertrages, bezogen wird, nehmen wir an, daß es keine zwischen Lieferant und Empfänger abgesprochene Fälschung der Eingangsdaten geben wird.

Weiter ist klar, daß eine Verfälschung der Eingangsdaten innerhalb der "Shipper-Receiver-Differenzen", d.h. innerhalb der Meßgenauigkeit, nur mit geringer Wahrscheinlichkeit entdeckt werden kann. Wie aus Tabelle 1 hervorgeht, sind diese Mengen jedoch zu klein, um für eine Entwendung interessant zu sein; aus diesem Grunde schließen wir diese Entwendungsstrategie im folgenden aus.

Eine massive Fälschung der Eingangsdaten zum Zwecke der Entwendung, d.h. eine illegale Entnahme von Material aus dem Eingangsstrom und gleichzeitige Angabe eines Materialsgehaltes, der den Lieferangaben entspricht, könnte so geschehen, daß Zylinder aus dem Lager geholt, teilweise geleert und dann wieder in das Lager zurückgebracht werden. Eine solche Fälschung würde nach der Erstellung der Materialbilanz oder aber bei einer groben Lagerbestands-Prüfung entdeckt werden, d.h. eine solche Fälschung wäre kein Grund für die Verifikation der Eingangsdaten.

Aus den genannten Gründen wird der Anlage-Betreiber - wenn überhaupt - nur die Eingangsdaten so fälschen, daß er beim Ausdampfen der Zylinder (bzw. bei der Einführung des UNH in den Prozeß) Material wegnimmt. Dies kann von der Inspektionsbehörde jedoch nur festgestellt werden, wenn ein Inspektor die Ausdampfung überwacht. Da umgekehrt eine solche illegale Entnahme nur dann stattfinden wird, wenn gerade kein Inspektor anwesend ist, und da Daueranwesenheit eines Inspektors auch nicht möglich ist, läßt sich dieser Entwendungsstrategie nur durch geeignete Containment-Maßnahmen, nicht jedoch durch eine Datenverifikation im engeren Sinne begegnen.

Zusammenfassend stellen wir somit fest, daß eine Verifikation der Eingangsdaten durch die Überwachungsbehörde nicht sinnvoll erscheint und daher im folgenden auch nicht betrachtet wird. Dies schließt natürlich nicht aus, daß die Inspektionsbehörde buchmäßig die Shipper-Receiver-Daten überprüft.

#### 4.1.2 Produktströme

Im Gegensatz zur Situation bei den Eingangsströmen ist bei den Produktströmen, die zum größten Teil in das Inland gehen, eine gemeinsame Fälschung der Produktstrom-Daten, die zwischen Lieferant und Empfänger abgesprochen wurde, nicht auszuschließen.

Entsprechend Kapitel 2 sind folgende Produktkategorien zu betrachten:

- Brennstäbe bzw. Brennelemente
- Pelletkästen
- Pulvereimer
- Pulverfässer mit Natururan

#### Brennstäbe bzw. Brennelemente

Im Augenblick besteht keine Möglichkeit, den Spaltmaterialgehalt von fertigen Brennelementen genau zu bestimmen<sup>1)</sup>.

Für Herbst 1977 ist die Installation eines Meßgerätes vorgesehen, mit dessen Hilfe der Spaltmaterialgehalt von Brennstäben mit ca. 1% Genauigkeit bestimmt werden kann (bei diesem "rod scanner" kann ein einzelnes Pellet, dessen Anreicherung um 10-20 % relativ von der Sollanreicherung abweicht, mit 95% Wahrscheinlichkeit nachgewiesen werden.

---

<sup>1)</sup> Von der IAE0 wird ein auf einer Na-Te-Sonde beruhendes Verfahren diskutiert, dessen Genauigkeit 5-10 % betragen soll /6 /. In dieser Arbeit wird dieses Verfahren nicht berücksichtigt.

Für die Datenverifikation hat dieses Gerät aus der Sicht der Überwachungsbehörde nur dann einen Sinn, wenn sichergestellt ist, daß

- i) die gemessenen Stäbe auch wirklich zu Brennelementen assembliert werden,
- ii) keine Stäbe, die nicht das Stabmeßgerät passiert haben (d.h. auch keine Leerstäbe), zu Brennelementen assembliert werden,
- iii) die Fälschung eines Stabes eine solche Vorbereitungszeit benötigt, daß sie nicht rückgängig gemacht werden kann, wenn der Inspektor überraschend kommt, d.h. wenn der Inspektor eine Chance hat, Fälschungen zu entdecken.

Die ersten beiden Voraussetzungen sind zur Zeit nicht sichergestellt; für die weiteren Überlegungen nehmen wir jedoch an, daß sie erfüllt seien. Bezüglich der letzten Voraussetzung nehmen wir an, daß sie erfüllt ist, wenn ein Inspektor jederzeit zu der Anlage Zutritt hat.

Aufgrund der Gegebenheiten wird angenommen, daß, falls gefälscht wird, jeweils um den Maximalbetrag, d.h. den Gesamtgehalt eines Stabes gefälscht wird, da auf diese Weise die kleinstmögliche Zahl von Stäben gefälscht werden muß.

### Pelletkästen

Im Gegensatz zur Situation bei den Stäben existiert ein Grobmeßgerät, mit dessen Hilfe der Spaltmaterialgehalt der Pelletkästen auf 10 % genau bestimmt werden kann; überdies ist die Zahl der pro Jahr auszuliefernden Kästen (3550) sehr viel kleiner als die der Stäbe (106500), so daß alle Pelletkästen mit dieser groben Methode gemessen werden können.

Man wird sich also vorstellen, daß die Pelletkästen z.B. monatlich ausgeliefert werden, und daß die Produktion der letzten 4 Wochen

im Lager zur Verfügung steht, wobei alle Kästen grob gemessen werden und ein Teil der Kästen genau gemessen wird (Wägung und Analyse). Wir nehmen daher an, daß der Betreiber - falls er die Angaben für einen Pelletkasten fälscht - diese nur um 10 % fälscht.

#### Pulvereimer

Bei den Pulvereimern liegen die gleichen Verhältnisse wie bei den Pelletkästen vor; auch hier ist eine grobe Messung aller Eimer (2270) mit ca. 10 %-iger Genauigkeit möglich, d.h. es werden - wenn überhaupt - die betreffenden Daten nur um diesen Betrag gefälscht werden.

#### Pulverfässer mit Natururan

Wegen ihres geringen "strategischen" Wertes werden die Natururan enthaltenden Pulverfässer (insgesamt 220 pro Jahr) bei der Optimierung des Verifikationsaufwandes nicht berücksichtigt, vielmehr wird für den gesamten für die Überwachung dieser Fässer notwendigen Aufwand ein pauschaler Betrag von 5 Manntagen angenommen.

#### 4.1.3 Abfall

Für die Überwachung der festen Abfälle, die jährlich etwa 300 kg Uran enthalten, und die in 500 Fässern in das Endlager (Asse II) transportiert werden, wird ein Aufwand von 5 Manntagen angesetzt. Mit diesem Überwachungsaufwand soll sichergestellt werden, daß nicht etwa abgezweigtes Material die Anlage als Abfall deklariert verlassen kann.

Bezüglich der flüssigen Abfälle (z.Zt. jährlich ca. 600 kg Uran, in Zukunft jedoch wegen verschärfter behördlicher Auflagen weniger

als 50 kg) wird angenommen, daß der Verluststrom durch gelegentliche Probenahmen durch einen Inspektor aus dem Abklingbecken überwacht wird; der dazu erforderliche Aufwand soll in den oben genannten 5 Manntagen enthalten sein.

#### 4.1.4 Aufnahme des realen Bestandes

Bei der einmal im Jahr stattfindenden Aufnahme des realen Bestandes wird angenommen, daß die Kernmaterialmengen in den Lagern schon vorab erfaßt wurden. Eine Übersicht über mittlere Kernmaterialbestände ist in Tabelle 2 angegeben. Die Verifikation der Daten des als realer Bestand vorliegenden Materials beinhaltet somit

- i) die Verifikation der Shipper-Daten der im Eingangslager befindlichen  $UF_6$ - bzw. UNH-Mengen,
- ii) die Verifikation der vom Betreiber gemessenen Schrottdaten und der Daten des in Kannen zwischengelagerten Pulvers,
- iii) die Verifikation der Daten der vom Betreiber geschätzten bzw. gemessenen Materialmengen, die sich in der Fertigung befinden.

Für diese Tätigkeiten läßt sich nur schwer eine formalisierte Vorgehensweise angeben; sie sind daher einer quantitativen Analyse kaum zugänglich. Als Gesamtaufwand für diese Tätigkeiten werden 20 Manntage angesetzt.

## 4.2 Optimierung des Inspektionsaufwandes für die Datenverifikation

Nach der qualitativen Diskussion möglicher Verifikationsmaßnahmen seitens der Überwachungsbehörde soll nun die quantitative Analyse erfolgen. Zu diesem Zweck wird zuerst diskutiert, welcher Überwachungsaufwand insgesamt zur Verfügung steht, und welcher Anteil davon für die eigentliche stichprobenartige Verifikation der Betreiberdaten, d.h. also für eine Optimierung zur Verfügung steht. Im Anschluß daran wird die eigentliche Optimierung durchgeführt, aus der sich dann auch die Effizienz der Verifikationsmaßnahmen ergibt.

### 4.2.1 Verfügbarer Überwachungsaufwand

In Artikel 80 des Übereinkommens vom 5.4.1973 /7/ ist festgelegt, daß der jährliche Aufwand (gemessen in Inspektor-Manntagen) für Routine-Inspektionen für kerntechnische Anlagen, die Uran mit weniger als 5 % Uran-235 verarbeiten, nicht größer sein soll, als

$$\text{ARIE}_{\max} = \frac{1}{3} \cdot 300 + 0.4 \cdot E, \quad (4-1a)$$

wobei ARIE "Accountance routine inspection effort" bedeutet und E der Jahresdurchsatz G bzw. das Inventar G, je nachdem welches von beiden größer ist, die in effektiven Kilogramm gemessen werden; dabei ist nach Artikel 98G des Übereinkommens

$$E = G \cdot \epsilon^2, \quad (4-1b)$$

wobei  $\epsilon$  der Anreicherungsgrad ist.

Nach Tabelle 2 gilt für die RBU

$$G = 600 \text{ t U}$$

(dies ist der Jahresdurchsatz, das mittlere Inventar beträgt ca. 480 t U), wobei die mittlere Anreicherung 2.5 % beträgt. Somit gilt nach (4-1b)

$$E = 600 \cdot 10^3 (2.5 \cdot 10^{-2})^2 = 375 \text{ /kg eff/}$$

und somit nach (4-1a)

$$\text{ARIE}_{\text{max}} = \frac{1}{3} \cdot 300 + 0.4 \cdot 375 = 250 \text{ /Insp.Manntage/}$$

Von diesem Gesamtaufwand wird ein grundlastähnlicher Aufwand für folgende Tätigkeiten angesetzt:

Aufnahme des realen Bestandes	20
Überwachung der Natururan-Fässer	5
Überwachung des Abfalls	5
Buchführungstätigkeiten	10
Grobmessung der Pelletkästen und Pulvereimer (5 Minuten je Einheit)	<u>60</u>
Ingesamt	100

Somit verbleibt für die stichprobenartige Kontrolle des Kernmaterial-Flusses ein Maximalbetrag von 150 Inspektor-Manntagen.

Wie bereits angedeutet, stellt der durch die Relation (4-1) bestimmte Überwachungsaufwand einen Maximal-aufwand dar, der unter bestimmten Voraussetzungen reduziert werden kann; dabei ist klar, daß der grundlastähnliche Aufwand nicht reduziert werden kann, sondern nur der Aufwand für die Stichproben-Kontrollen. Da eine Diskussion der Möglichkeit der Reduktion des Maximalaufwandes den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde, soll dieses Problem parametrisiert werden: Im folgenden betrachten wir die drei Fälle daß für die Stichprobenkontrollen der Aufwand  $C = 50$  bzw.  $100$  bzw.  $150$  /Inspektor-Manntage/ zur Verfügung steht.

#### 4.2.2 Optimierung des für die Stichprobenkontrollen verfügbaren Aufwandes

Entsprechend den Überlegungen im vorhergehenden Abschnitt werden in die Optimierung des Inspektionsaufwandes für die Datenverifikation nur die folgenden Materialklassen einbezogen:

- (1) Brennstäbe
- (2) Pelletkästen
- (3) Pulvereimer.

Eine Übersicht über die für die Optimierung notwendigen Parameter und deren zahlenwerte gibt Tabelle 5 für die drei betrachteten Klassen. Dabei wird angenommen, daß aus organisatorischen Gründen jeweils 20 Brennstäbe hintereinander kontrolliert werden, was eine Stunde dauern soll. Für die genauen Messungen werden die Bearbeitungszeiten angenommen, die in der RBU üblich sind.

Für die Bestimmung der optimalen Verteilung des gegebenen Inspektionsaufwandes ist die Vorgabe eines Optimierungskriteriums notwendig. Es liegt nahe, dafür die Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit zu wählen; in der Tat läßt sich dies auch durch weitergehende theoretische Überlegungen rechtfertigen /5/. Zur Berechnung der Entdeckungswahrscheinlichkeit ist aber wiederum die Vorgabe einer Materialentwendung notwendig. Diese Vorgabe soll auch hier wieder parametrisiert werden: wir betrachten die Materialentwendungen  $M = 0; 0,3; 0,5; 0,7; 1; 2; 3; 4; 5; 10$  /tU/; im übrigen kommen wir auf diesen Punkt noch einmal in der Diskussion zurück.

Es sei  $\mu_i$  die Materialmenge, die der Betreiber durch Fälschung der Daten einer Einheit der  $i$ -ten Klasse ( $i = 1, 2, 3$ ) entwenden kann. Somit ist, wenn  $r_i$  die Zahl der in der  $i$ -ten Klasse gefälschten Einheiten ist, die gesamte entwendete Menge  $M$  gegeben durch

$$M = \sum_i \mu_i \cdot r_i \quad (4-2)$$

Weiter sei  $\epsilon_i$  der Aufwand, der zur Verifikation der Daten einer Einheit der  $i$ -ten Klasse notwendig ist. Somit ist, wenn  $n_i$  die Zahl der in der  $i$ -ten Klasse zu verifizierenden Daten ist, der gesamte verfügbare Aufwand  $C$  gegeben durch

$$C = \sum_i \epsilon_i \cdot n_i \quad (4-3)$$

Bei der Optimierung des verfügbaren Aufwandes, d.h. bei der optimalen Bestimmung der Stichprobenumfänge  $n_i$ ,  $i=1,2,3$ , wird man davon ausgehen müssen, daß der Anlage-Betreiber, falls er entwendet, so geschickt wie möglich vorgeht, d.h. seine Stichprobenumfänge  $r_i$ ,  $i=1,2,3$ , so bestimmt, daß die Entdeckungswahrscheinlichkeit möglichst klein wird. Es ist also die Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit zu minimieren bezüglich der  $r_i$  unter der Randbedingung (4-2) und zu maximieren bezüglich der  $n_i$  unter der Randbedingung (4-3).

Es sei  $N_i$  die Gesamtzahl der zu verifizierenden Einheiten in der  $i$ -ten Klasse. Dann ist für  $r_i \ll N_i$  die Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta_i$  für die Klasse näherungsweise gegeben durch

$$1-\beta_i = 1 - \left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right)^{n_i}, \quad i=1,2,3. \quad (4-4)$$

(siehe Anhang III). Weiter ist, wie man sich leicht überlegt, die Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta$  gegeben durch

$$1-\beta = 1 - \prod_i \beta_i, \quad (4-5)$$

somit haben wir zur Bestimmung der optimalen Stichprobenumfänge das folgende Optimierungsproblem zu lösen:

$$\min_{n_i: \sum_i \epsilon_i n_i = C} \quad \max_{r_i: \sum_i \mu_i r_i = M} \quad \prod_i \left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right)^{n_i} \quad (4-6)$$

Die optimalen Stichprobenumfänge  $r_i^0$  und  $n_i^0$  sind durch die folgenden Formeln gegeben (siehe Anhang III):

$$n_i^0 = \frac{C}{\sum_j \mu_j \cdot \epsilon_j \cdot N_j \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_j)} \cdot \mu_i N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i), \quad (4-7a)$$

$$r_i^0 = N_i \cdot (1 - \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i)), \quad i=1,2,3; \quad (4-7b)$$

dabei ist  $\kappa$  bestimmt durch die folgende Relation:

$$\sum_i \mu_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i) = \sum_i \mu_i N_i - M. \quad (4-7c)$$

Bei der praktischen Anwendung dieser Formeln wird man dabei so vorgehen, daß man aus der Relation (4-7c) zuerst den Zahlenwert von  $\kappa$  als Funktion der Entwendungsmenge  $M$  mit Hilfe einer graphischen Methode bestimmt. Dies ist für die in Tabelle 5 angegebenen Parameterwerte in Figur 3 dargestellt. Anschließend lassen sich die optimalen Stichprobenumfänge  $r_i^0$  und  $n_i^0$  mühelos mit Hilfe der Formeln (4-7a) und (4-7b) bestimmen.

In Tabelle 6 ist das Ergebnis der numerischen Rechnungen für angenommene Werte von  $M$  und  $C$  dargestellt. Wie aus den Formeln (4-7) hervorgeht, und wie in Anhang III näher erläutert, hängen die optimalen Stichprobenumfänge  $r_i^0$  des Betreibers nicht vom Inspektionsaufwand  $C$  ab. Die optimalen Stichprobenumfänge  $n_i^0$  des Inspektors hängen nur geringfügig von der Entwendungsmenge  $M$  ab; dies leuchtet entsprechend Anhang III auch ein, da für die betrachteten Zahlenwerte der Parameter gilt  $\kappa \ll 1$ .

Die - bezüglich der Inspektionsstrategie - optimale und - bezüglich der Entwendungsstrategie - garantierte gesamte Entdeckungswahrscheinlichkeit als Funktion der zu entwendenden Menge  $M$ , mit dem gesamten verfügbaren Inspektionsaufwand  $C$  als Parameter, bezeichnen wir als die Effizienz des Datenverifikationssystems. In Figur 4 ist diese Effizienz für das diskutierte Datenverifikationssystem in der RBU graphisch dargestellt.



## 5. Diskussion der Ergebnisse und Schlußfolgerungen

Im dritten Kapitel hatten wir das derzeitige Materialbilanzierungssystem der RBU, im vierten Kapitel ein unter den gegebenen Voraussetzungen denkbare Datenverifikationssystem analysiert. Da das gesamte Überwachungssystem im Rahmen des Nichtverbreitungsvertrages aus den beiden genannten Komponenten besteht, verbleibt die Aufgabe, dieses Gesamtsystem zu analysieren, d.h. seine Effizienz zu bestimmen.

Die Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta_{\text{tot}}$  des Überwachungssystems läßt sich aus den Einzel-Entdeckungswahrscheinlichkeiten  $1-\beta_1$  (Materialbilanzierung) und  $1-\beta_2$  (Datenverifikation) wie folgt bestimmen:

$$1-\beta_{\text{tot}} = 1-\beta_1 \cdot \beta_2, \quad (5-1)$$

d.h. mit (3-8) und (4-5)

$$1-\beta_{\text{tot}} = 1-\phi \left( U_{1-\alpha} - \frac{M_1}{\sigma} \right) \cdot \prod_{i=1}^3 \left( 1 - \frac{r_i}{N_i} \right)^{n_i} \quad (5-2)$$

Die Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit ist eine Funktion der gesamten zu entwendenden Menge  $M$ , die sich aus der Menge  $M_1$ , die ohne Datenverfälschung "gewonnen" wird und der Menge  $M_2$ , die mit Datenverfälschung gewonnen wird, zusammensetzt, d.h. mit (4-2)

$$M = M_1 + M_2; \quad M_2 = \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot r_i \cdot \quad (5-3)$$

Die Effizienz des Gesamtsystems definieren wir nun durch die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit als Funktion der gesamten zu entwendenden Menge  $M$ , d.h. der Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta^*$ , die sich bei optimaler Entwendungsstrategie einstellt:

$$1-\beta^* = \min_{\substack{M_1, M_2: \\ M_1+M_2=M}} (1-\beta). \quad (5-4)$$

Zur Bestimmung der Effizienz ist also für vorgegebenes  $M$  das Optimierungsproblem (5-4) zu lösen, wobei das Ergebnis natürlich vom gewählten Inspektionsaufwand abhängt. Wegen der Kompliziertheit der Problemstellung läßt sich diese Optimierung nur numerisch durchführen.

In Tabelle 7 ist eine solche Rechnung für  $M = 4 /tU/$  und für die Parameter  $C = 50, 100$  und  $150$  /Inspektor-Manntage/ dargestellt. Das Minimum der Entdeckungswahrscheinlichkeit liegt in diesem Fall für  $C = 50$  bei  $M_1 = 3500, M_2 = 500$ ; für  $C = 100$  bzw.  $150$  bei  $M_1 = 4000, M_2 = 0$ . In Tabelle 8 sind für die Überwachungsaufwendungen  $C = 50, 100$  und  $150$  die garantierten Entdeckungswahrscheinlichkeiten  $1-\beta_{\text{tot}}$  für zwischen  $0$  und  $10 /tU/$  liegende zu entwendende Mengen aufgetragen; in Figur 5 sind die gleichen Ergebnisse graphisch dargestellt. In Tabelle 9 ist die Aufteilung der gesamten zu entwendenden Menge  $M$  entsprechend (5-2) für den gesamten Bereich von  $0 \leq M \leq 10 /tU/$  für den Aufwand  $C = 50$  dargestellt.

Es zeigt sich, daß für  $0 < M < 4 /tU/$  das Minimum der Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit immer bei  $M_1 = M, M_2 = 0$  liegt. Dies hat seinen Grund darin, daß im Verhältnis zur Datenverifikation die Materialbilanzierung relativ "ungenau" ist, d.h. im Falle einer Entwendung, die kleiner ist als  $4 /tU/$ , immer versucht werden wird, keine Daten zu verfälschen, sondern die Ungenauigkeit der Materialbilanzierung auszunützen. Aus diesem Grunde fallen auch hier die verschiedenen Inspektionsaufwendungen zugehörigen Kurven zusammen, da bei der Materialbilanzierung der Inspektionsaufwand gar nicht vorkommt. Erst bei Entwendungen von mehr als  $4 /tU/$  muß die Verfälschung der Daten "zu Hilfe" genommen werden, da andernfalls auch die Materialbilanzierung "ansprechen würde".

Es wäre nun falsch, aus diesen Ergebnissen den Schluß zu ziehen, daß - falls man wüßte, daß eine Entwendung immer weniger als  $4 /tU/$  pro Jahr ausmachen würde - eine Datenverifikation überflüssig wäre. Denn gäbe es gar keine Datenverifikation, dann würde ja eine Entwendung nur auf dem Wege der Datenverfälschung geschehen. Darüber hinaus will man ja in jedem Fall den optimalen Einsatz der verfügbaren Inspektionsmittel bestimmen.

In der Einführung war das Problem der signifikanten Menge angesprochen worden. Aus Tabelle 8 entnehmen wir, daß für  $\alpha = 0.05$  und  $1-\beta_{\text{tot}}^* = 0.95$  die zu entwendende Menge  $M \approx 4 /tU/$  beträgt. Diese Menge ist praktisch unabhängig vom Inspektionsaufwand, daher würde eine Vergrößerung des Inspektionsaufwandes diese Menge auch nicht wesentlich verkleinern. Der Einsatz von mehr als 50 Inspektionsmanntagen für die Stichprobenkontrollen ist also z.Zt. praktisch unwirksam. Da somit insgesamt weniger als ein Inspektormannjahr aufzuwenden ist, d.h. ein Inspektor nicht ständig anwesend ist, muß die Unvorhersehbarkeit seines Erscheinens sichergestellt bleiben (siehe 4.1.2), sonst gelten die angegebenen Entdeckungswahrscheinlichkeiten nicht mehr.

Durch die Angabe der signifikanten Menge für  $\alpha = \beta_{\text{tot}} = 0,05$  wird das gegenwärtige Überwachungssystem am einfachsten charakterisiert. Eine Verbesserung des Systems kann, wie wir gesehen hatten, nur durch eine Verbesserung des Materialbilanzierungssystems erreicht werden, wobei hier vor allem eine Verbesserung der Bestimmung des Prozeßinventars anzustreben wäre.

Die Verbesserung der Genauigkeit zur Bestimmung des Prozeßinventars kann an einigen Anlagenteilen durch organisatorische Maßnahmen erreicht werden, die insbesondere bei Inventuren ergriffen werden können, wie

- Leerfahren je eines Drehfilters und des nachgeschalteten Wirbelbettes in jeder Fertigungslinie (Entleerungszeit ca. 2 Std.); das Material liegt dann in den Drehmischern in meßbarer Form vor
- Kennzeichnen je eines Sinterbootes an jedem Sinterofen und Erfassung allen eingeschleusten Materials bis das gekennzeichnete Boot am Ausgang erscheint
- Wägen der Abblaßkannen
- Leerfahren der Pressenvorratsbehälter und Erfassen des Materials in Form von Grünlingen.

Ferner muß überlegt werden, ob möglicherweise für Wartungszwecke ohnehin notwendige Entleerungen von Teilen der Konversionsanlage für eine Verbesserung der Bestimmung des Kernmaterialinhaltes in den Fällsäulen genutzt werden können.

.-.-.-.-.-

#### Danksagung

Die Verfasser möchten an dieser Stelle Herrn Dr. Gupta für die Anregung dieser Arbeit und für fruchtbare Diskussionen danken. Sie möchten gleichzeitig ihre Wertschätzung für Herrn R.A. Schaus und seine Kollegen von der Reaktor-Brennelement Union zum Ausdruck bringen, die im Verlauf dieser Arbeit wertvolle Hilfen und Anregungen gegeben haben.

References

- /1/ "The Structure and Content of Agreements between the Agency and States Required in Connection with the Treaty on the Non-Proliferation of Nuclear Weapons", International Atomic Energy Agency, Report No. INFCIRC/153, Vienna, May 1971.
- /2/ Avenhaus, R., Frick, H., Gupta, D., Hartmann, G., Nakicenovic, N., "Optimization of Safeguards Effort", Report of the Nuclear Research Center Karlsruhe, Federal Republic of Germany, KFK 1109, August 1974.
- /3/ Bicking, U., Hartmann, G., "Materialbilanzierung und Hypothesentests in der NUKEM", To be published 1977.
- /4/ Kraemer, R., Beyrich, W. (Eds.), Joint Integral Safeguards Experiment at the Eurochemic Reprocessing Plant Mol, Belgien, Report of Euratom and the Nuclear Research Center Karlsruhe, Federal Republic of Germany, EUR 4576e, KFK 1100, July 1971
- /5/ Avenhaus, R., "Material Accountability: Theory, Applications, Verification", Monograph of the State-of-the-Art Series of Applied Systems Analysis of the International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria, To be published by J. Wiley, London, fall 1977
- /6/ Baeckmann, A.von, "Historical Review on International Safeguards", lecture on October 5, 1976, at the Nuclear Research Center, Karlsruhe
- /7/ "Übereinkommen vom 5. April 1973" ... "in Ausführung von Artikel III, Absätze 1 und 4 des Vertrages vom 1. Juli 1968 über die Nichtverbreitung von Kernwaffen", Bundesgesetzblatt, Jahrgang 1974, Teil II, Nr. 32.



Tabelle 1: Durchflußdaten und Standardabweichungen von Meßgenauigkeiten

Durchsatz	Kernmaterial	Kernmaterialinhalt je Einheit		Zahl der Einheiten pro Jahr	Jahresdurchsatz in t Uran			Meßgenauigkeiten					Datenherkunft			Standardabw. kg U	
		kg Material	kg Uran		UE	UN	$\Sigma$	zufällig			systematisch		Lieferung	Messung	Schätzung		
								Wägung	U-Konz. Bestimmung	Probenahme	Wägung	U-Konz. Bestimmung					
Eingang	UF <sub>6</sub> -Beh. russ.	2145	1450	158	229			0,3 kg	-			-	x	x		8	
	Probe-Beh. russ.		0,3	158	-			-					x				
	UF <sub>6</sub> -Beh. amerik.	2145	1450	204	296			0,3 kg	-			-	x	x			
	UNH-Tankwagen	10000	4000	20		80		0,5 %	0,05 %	0,3 %		0,05 %					143
						525	80	605									
Produktausgang	DWR-Stäbe	W: 2,6 K: 2000	W: 2,3 K: 1750	87000 115	200				0,05 %	0,1 %	0,04 %	0,05 %	x x			159	
		W: K:		19500 26		45				0,05 %	0,1 %	0,04 %	0,05 %	x x			
		Pellets in Kästen	W: 71 K: 2000	W: 62 K: 1750	3550 126	220			0,04 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %	x x			112
	Pulver in Eimern	W: 50 K: 2000	W: 44 K: 1750	2270 57	100			0,04 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %	x x		52		
	Pulver in Fässern	W: 180 K: 2000	W: 160 K: 1750	220 20		35		0,3 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %	x x		22		
						520	80	600									
Saldo							5										

W ... Wägung, K ... Konzentrationsbestimmung

Tabelle 1 (Fortsetzung)

Durchsatz	Kernmaterial	Kernmaterial- inhalt je Einheit		Zahl der Einhei- ten pro Jahr	Jahresdurchsatz			Meßgenauigkeiten					Daten- herkunft			Stand- dard- abw.  kg U	
		kg Material	kg Uran		UE	in t Uran		$\Sigma$	zufällig			systematisch		Lieferung	Messung		Schätzung
						Wägung	U-Konz. Bestim- mung		Probe- nahme	Wägung	U-Konz. Bestim- mung						
Saldo							5										
Abfälle	UNH- Filtrat						0,6									x	60
	fester Abf.						0,3									x	30
Restmen- gen, auf- gearbeit.	aus Flüs- sig- Extraktion	71	60	43			2,6	0,04 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %		x			3
Rest- mengen	nicht aufarbei- tungswürd.	50	44	34			1,5	zufällig verteilte Schätzge- nauigkeit von 10 %							x		26
End- saldo							0										

Tabelle 2: Inventardaten und Standardabweichungen von Meßgenauigkeiten

Inventar	Kernmaterial	Kernmaterialinhalt je Einheit		Zahl der Einheiten	Bestand in			Meßgenauigkeiten					Datenherkunft			Standardabw. kg U	
		kg Material	kg Uran		t Uran	UN	$\Sigma$	zufällig			systematisch		Lieferung	Messung	Schätzung		
								Wägung	U-Konz. Bestimmung	Probenahme	Wägung	U-Konz. Bestimmung					
Eingangslager	UF <sub>6</sub> -Beh. russ.	2145	1450	44	64									x	x		-1)
	UF <sub>6</sub> -Beh. amerik.	2145	1450	56	81												
	UNH-Tank	6000	2400	3		7,2								x	x		-1)
Pulver- und Pelletlager	Pellets in Kästen	71	62	968		60									x		-1)
	Pulver in Eimern	50	44	1773	78										x		-1)
	Pulver in Fässern	180	160	75		12									x		-1)
	aufgearb. Restmengen	71	60	200		12	0,04 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %						6
	nicht aufarb.-würd. Restmengen	50	44	159		7	zufällig verteilte Schätzgenauigkeit von 10 %									x	56
BE-Lager	BE's	666	590	205		120								x			-1)
Saldo						441,2											
1) Es erfolgt keine erneute Messung.																	

7-3

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Inventar	Kernmaterial	Kernmaterial- inhalt je Einheit		Zahl der Einhei- ten	Bestand in t Uran			Meßgenauigkeiten					Daten- herkunft			Stan- dard- abw.  kg U
		kg Material	kg Uran		UE	UN	$\Sigma$	zufällig			systematisch		Lieferung	Messung	Schätzung	
								Wägung	U-Konz. Bestim- mung	Probe- nahme	Wägung	U-Konz. Bestim- mung				
Übertrag							441,2									
Zwischen- lager	UO <sub>2</sub> -Pulver in Kannen	W: 53 K: 1000	47 875	170 10			8	0,04 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %	x			5
	Schrott, nicht homogenis.	50	44	114			5	10 %-ige Schätzung, zufällig verteilt						x	47	
	Schrott, homogeni- siert	71	60	83			5	0,04 %	0,05 %	0,1 %		0,05 %	x		3	
Saldo							459,2									
Prozeß- inventar, gemessen	UF <sub>6</sub> -Aus- dampfst.	1070	725	5			3,63				1,4 %		x		50	
	UO <sub>2</sub> in Drähmisch.	1000	875	14			12,25				0,6 %		x		70	
Prozeß- inventar, geschätzt							8,374	siehe Tabelle 3					x		837	
End- saldo							483,4									

7-4

Tabelle 3: Mittleres geschätztes Prozeßinventar sowie Ungenauigkeit des Betreibers und eines Inspektors (s. Figur 2)

Anlagenteil	Berechnung des mittleren Inventars in kg U in Form von	mittleres Inventar kg U	Unsicherheit			
			Betreiber		Inspektor	
			kg U	%	kg U	%
Fällsäulen	AUC: $117 + 2 \cdot 217 + 2 \cdot 249 =$	1049	104,9	10	524,5	50
Drehfilter	AUC: $\frac{1}{2} (60+170) + \frac{2}{2} (80+290) + \frac{2}{2} (100+340) =$	925	92,5	10	92,5	10
Vakuumstation	AUC: $50 + 2 \cdot 50 + 2 \cdot 5 =$	160	16,0	10	16,0	10
Wirbelbetten	UO <sub>2</sub> : $\frac{2}{2} (15+125) + \frac{1}{2} (25+135) + \frac{2}{2} (50+235) + \frac{2}{2} (70+285) =$	860	86,0	10	430,0	50
Ablaßkannen	UO <sub>2</sub> : $\frac{3}{2} (15+125) + \frac{2}{2} (15+225) + \frac{2}{2} (15+265) =$	730	73,0	10	73,0	10
Pressen	UO <sub>2</sub> : $6 \cdot 150 =$	900	90,0	10	90,0	10
Sinteröfen	UO <sub>2</sub> -Pellets: $4 \cdot 300 + 4 \cdot 600 =$	3600	360,0	10	360,0	10
Schleifmaschinen	UO <sub>2</sub> -Pellets: $6 \cdot 25 =$	150	15,0	10	15,0	10
Summe		8374	837,4	10	1601,0	19

7-5

Tabelle 4: Resultierende Standardabweichung  $\sigma_{MUF}$  der Fertigungsanlage auf der Basis der Daten in Tabelle 3

	Material- kategorie	Standard- abweichung $\sigma$ kg U	Varianz var $kg^2 U$	Varianz var $kg^2 U$	Standard- abweichung $\sigma$ kg U	Materialgruppe	Uranmenge t U
Betreiber	Eingänge	143	20 513	64	8	UF <sub>6</sub> -Lieferungen	520
				20 449	143	UNH-Lieferungen	80
	Ausgänge	213	45 513	25 281	159	Brennstäbe	245
				12 544	112	Pellet-Ausgänge	220
				$52^2 + 22^2$	56	Pulver-Ausgänge	135
				$60^2 + 30^2$	67	Abfälle	0,9
				$6^2 + 56^2$	56	Restmengen	19
	Inventar	847	716 984	$5^2 + 47^2 + 3^2$	47	Zwischenlager	18
				2 500	50	verstecktes Inventar	-
				$50^2 + 70^2$	86	gemessenes Prozeß- inventar	15,9
				700 569	837	geschätztes Prozeß- inventar	8,4
MUF				1225	1499 994	$\frac{\sigma_{MUF}}{\text{Durchsatz}} = \frac{1225 \text{ kg}}{600 \cdot 10^3 \text{ kg}} = 0,20 \%$	
Inspek- tor	Inventar	1606	2579 616	2563 201	1601	geschätztes Prozeß- inventar	
	MUF	2286	5225 258	$\frac{\sigma_{MUF}}{\text{Durchsatz}} = \frac{2286 \text{ kg}}{600 \cdot 10^3 \text{ kg}} = 0,38 \%$			

Tabelle 5: Parameter des Stichprobenkontroll-Problems

Material- art	Jahres- durchsatz t Uran	Materialinhalt einer Kontroll- einheit kg Uran	Zahl der Kontroll- einheiten pro Jahr $N_i$	Aufwand je Kontroll- einheit Inspektor- Stunde	Grenzaufwand, wenn alle Einheiten kon- trolliert würden Inspektor-Tage	Verfälschungswert je Einheit $\mu$ kg Uran
Stäbe	245	46 <sup>1)</sup>	5325	1,0	666	46
Pelletkästen	220	62	3550	1,5 <sup>2)</sup>	666	6,2
Pulvereimer	100	44	2270	1,5 <sup>2)</sup>	426	4,4

1) Bei den Stäben erfolgt die Stichprobenprüfung durch Anwesenheit des Inspektors bei dem Stabmeßgerät (rod scanner).  
Eine Kontrolleinheit sind die 20 Stäbe, die während seiner jeweils einstündigen Anwesenheit gemessen werden.

2) Bei den Pulver- und Pelletbehältern sind folgende Bearbeitungszeiten des Inspektors angesetzt worden:  
Wägen 15 Minuten, Probeziehen 15 Minuten und Urananalyse 60 Minuten.

**Tabelle 6:** Optimierung des Inspektionsaufwandes für Stichprobenkontrollen aus den drei Produktklassen;  $\beta_2^0$  Abhängigkeit der Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit  $\beta_2$  (bzw. Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta_2$ ) von den Parametern Stichprobenaufwand  $C$  der Überwachungsbehörde und durch Datenfälschung zu entwendende Uranmenge  $M_2$ ;

$$\beta_2^0 = \left(1 - \frac{r_1^0 n_1}{N_1}\right) \left(1 - \frac{r_2^0 n_2}{N_2}\right) \left(1 - \frac{r_3^0 n_3}{N_3}\right) = \exp(-\kappa \cdot C); \text{ dargestellt in Figur 4}$$

$M_2$ /kg/ =	0		300		500		700	
$r_1^0 =$	0		6		9		13	
$r_2^0 =$	0		6		9		12	
$r_3^0 =$	0		4		6		8	
$C_1 = 50$ MT	$n_1^0 = 335$	$\beta_2^0 = 1$	334	0,636	335	0,507	335	0,379
	$n_2^0 = 30$	$1-\beta_2^0 = 0$	30	0,367	30	0,493	30	0,621
	$n_3^0 = 14$		14		14		14	
$C_2 = 100$ MT	$n_1^0 = 669$	$\beta_2^0 = 1$	669	0,405	669	0,258	669	0,145
	$n_2^0 = 60$	$1-\beta_2^0 = 0$	60	0,595	60	0,742	60	0,855
	$n_3^0 = 27$		27		27		27	
$C_3 = 150$ MT	$n_1^0 = 1003$	$\beta_2^0 = 1$	1003	0,258	1004	0,131	1004	0,055
	$n_2^0 = 90$	$1-\beta_2^0 = 0$	90	0,742	90	0,869	90	0,945
	$n_3^0 = 41$		41		41		41	
$\mu_1 N_1 = 244.950$ $\mu_2 N_2 = 22.010$ $\mu_3 N_3 = 9.988$	$\kappa = 10^{-3}$ $\exp(-\kappa \cdot \epsilon_1) = 0,9999$ $\exp(-\kappa \cdot \epsilon_{2,3}) = 0,9998$ $\sum_i \mu_i \epsilon_i N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i) = 36\ 614$		$8,5 \cdot 10^{-3}$ 0,9989 0,9984		$1,35 \cdot 10^{-2}$ 0,9983 0,9975		$1,85 \cdot 10^{-2}$ 0,9977 0,9965	
			36 575		36 552		36 528	

Tabelle 6: (Fortsetzung)

$M_2$ /kg/ =	1000		2000		3000		4000	
$r_1^0 =$	18		36		55		73	
$r_2^0 =$	18		36		55		72	
$r_3^0 =$	11		23		35		46	
$C_1 = 50$ MT	$n_1^0 = 335$	$\beta_2^0 = 0,258$	335	0,066	335	0,016	335	0,004
	$n_2^0 = 30$	$1-\beta_2^0 = 0,742$	30	0,934	30	0,984	30	0,996
	$n_3^0 = 14$		14		14		14	
$C_2 = 100$ MT	$n_1^0 = 669$	$\beta_2^0 = 0,067$	669	0,004	669	0	670	0
	$n_2^0 = 60$	$1-\beta_2^0 = 0,933$	60	0,996	60	1	60	1
	$n_3^0 = 27$		27		27		27	
$C_3 = 150$ MT	$n_1^0 = 1004$	$\beta_2^0 = 0,017$	1004	0	1004	0	1004	0
	$n_2^0 = 90$	$1-\beta_2^0 = 0,983$	90	1	90	1	90	1
	$n_3^0 = 41$		41		41		41	
$\mu_1 N_1 = 244.950$ $\mu_2 N_2 = 22.010$ $\mu_3 N_3 = 9.988$	$\kappa = 2,65 \cdot 10^{-2}$ $\exp(-\kappa \cdot \epsilon_1) = 0,9967$ $\exp(-\kappa \cdot \epsilon_{2,3}) = 0,9950$ $\sum_i \mu_i \cdot \epsilon_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i) =$ $\quad = 36\ 488$		$5,4 \cdot 10^{-2}$ 0,9933 0,9899 36 353		$8,3 \cdot 10^{-2}$ 0,9897 0,9846 36 211		0,11 0,9863 0,9796 36 077	

7-9

Tabelle 6: (Fortsetzung)

$M_2$ /kg/ =	5000		10 000				
$r_1^0 =$	89		183				
$r_2^0 =$	89		182				
$r_3^0 =$	57		116				
$C_1 = 50$ MT	$n_1^0 = 335$	$\beta_2^0 = 0,001$	335	0			
	$n_2^0 = 30$	$1-\beta_2^0 = 0,999$	30	1			
	$n_3^0 = 14$		13				
$C_2 = 100$ MT	$n_1^0 = 670$	$\beta_2^0 = 0$	671	0			
	$n_2^0 = 60$	$1-\beta_2^0 = 1$	59	1			
	$n_3^0 = 27$		27				
$C_3 = 150$ MT	$n_1^0 = 1005$	$\beta_2^0 = 0$	1006	0			
	$n_2^0 = 90$	$1-\beta_2^0 = 1$	89	1			
	$n_3^0 = 41$		40				
$\mu_1 N_1 = 244.950$ $\mu_2 N_2 = 22.010$ $\mu_3 N_3 = 9.988$	$\kappa = 0,135$ $\exp(-\kappa \cdot \epsilon_1) = 0,9833$ $\exp(-\kappa \cdot \epsilon_{2,3}) = 0,9750$ $\sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot \epsilon_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i) =$ $= 35\ 958$		$0,28$ $0,9656$ $0,9489$  $35\ 259$				

7-10

Tabelle 7: Einzel-Nichtdeckungswahrscheinlichkeiten  $\beta_1$  (Materialbilanz) und  $\beta_2$  (Datenverifikation) und Gesamt-Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit  $\beta_{total}$  für gesamte zu entwendende Menge  $M = 4000$  kg U und Überwachungsaufwände von  $C = 50, 100$  und  $150$  Inspektormanntagen/Jahr

	$M_2$ /kg U/	0	300	500	700	1000	2000	3000	4000
$\beta_2 = \beta_2^0(C) = \prod_i \left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right)^{n_i}$	C = 50 IMd	1	0,636	0,507	0,379	0,258	0,066	0,016	0,004
	C = 100 IMd	1	0,405	0,258	0,145	0,067	0,004	0	0
	C = 150 IMd	1	0,258	0,131	0,055	0,017	0	0	0
$M_1$ /kg U/ =	$4000 - M_2 =$	4000	3700	3500	3300	3000	2000	1000	0
$\beta_1 = \Phi(x)$ $x = U_{1-\alpha} - \frac{M_1}{\sigma}$ $\sigma = 1225$ kg U;	x	-1,62	-1,38	-1,21	-1,05	-0,80	+0,01	0,83	1,65
	$\beta_1$	0,053	0,084	0,113	0,147	0,212	0,504	0,797	0,95
	$\alpha = 0,05$								
$\beta_{total} = \beta_1 \cdot \beta_2$	C = 50 IMd	0,053	0,053	<u>0,057</u>	0,056	0,055	0,033	0,013	0,004
	C = 100 IMd	<u>0,053</u>	0,034	0,029	0,021	0,014	0,002	0	0
	C = 150 IMd	<u>0,053</u>	0,022	0,015	0,008	0,004	0	0	0

Tabelle 8: Gesamt-Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{total}}$  und Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\beta_{\text{total}}$  als Funktion von zu entwendender Menge mit Stichprobenaufwand C als Parameter ( $\beta_{\text{total}}$  dargestellt in Fig. 5)

	M /kg U/	0	500	1000	2000	3000	4000	5000	10 000
C = 50 IMd	$\beta_{\text{total}}$	0,95	0,893	0,797	0,504	0,212	0,057	0,014	0
	$1-\beta_{\text{total}}$	0,05	0,107	0,203	0,496	0,788	0,943	0,988	1
C = 100 IMd	$\beta_{\text{total}}$	0,95	0,893	0,797	0,504	0,212	0,053	0,007	0
	$1-\beta_{\text{total}}$	0,05	0,107	0,203	0,496	0,788	0,947	0,993	1
C = 150 IMd	$\beta_{\text{total}}$	0,95	0,893	0,797	0,504	0,212	0,053	0,007	0
	$1-\beta_{\text{total}}$	0,05	0,107	0,203	0,496	0,788	0,947	0,993	1

Tabelle 9: Optimale Gesamt-Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit  $\beta_{total}$ , zugehörige Einzel-Nichtentdeckungswahrscheinlichkeiten  $\beta_1$  (Materialbilanz) und  $\beta_2$  (Datenverifikation) als Funktion der gesamten zu entwendenden Menge M und der zugehörigen Einzelentwendungen bei einem Stichprobenaufwand von  $C = 50$  Inspektormanntagen /Jahr

M /kg U/	0	500	1000	2000	3000	4000	5000	10 000
$\beta_{total}$	0,95	0,893	0,797	0,504	0,212	0,057	0,014	0
$M_1$ /kg U/	0	500	1000	2000	3000	3500	4000	4000
$\beta_1$	0,95	0,893	0,797	0,504	0,212	0,084	0,053	0,053
$M_2$ /kg U/	0	0	0	0	0	500	1000	6000
$\beta_2^0$	1	1	1	1	1	0,660	0,258	0

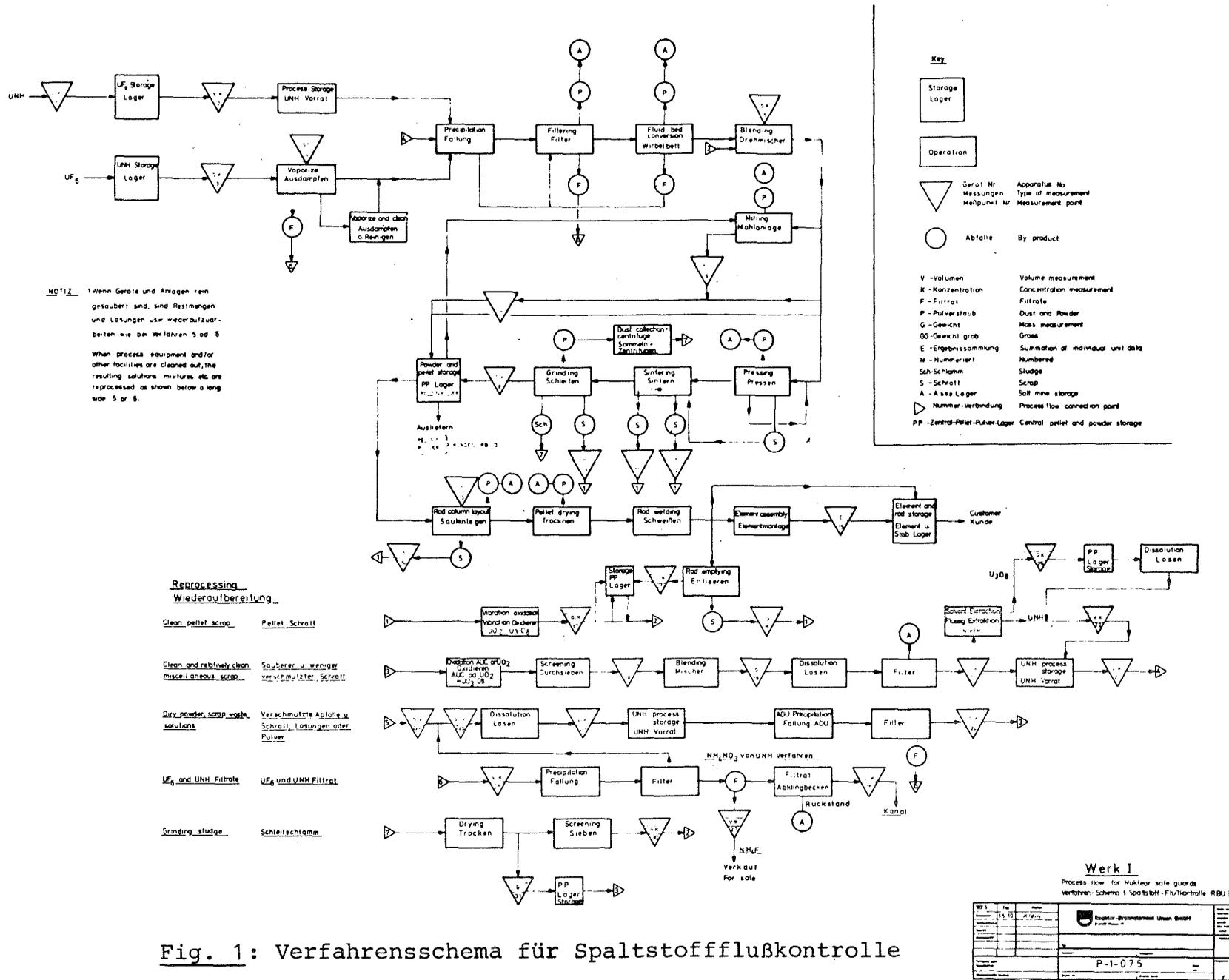
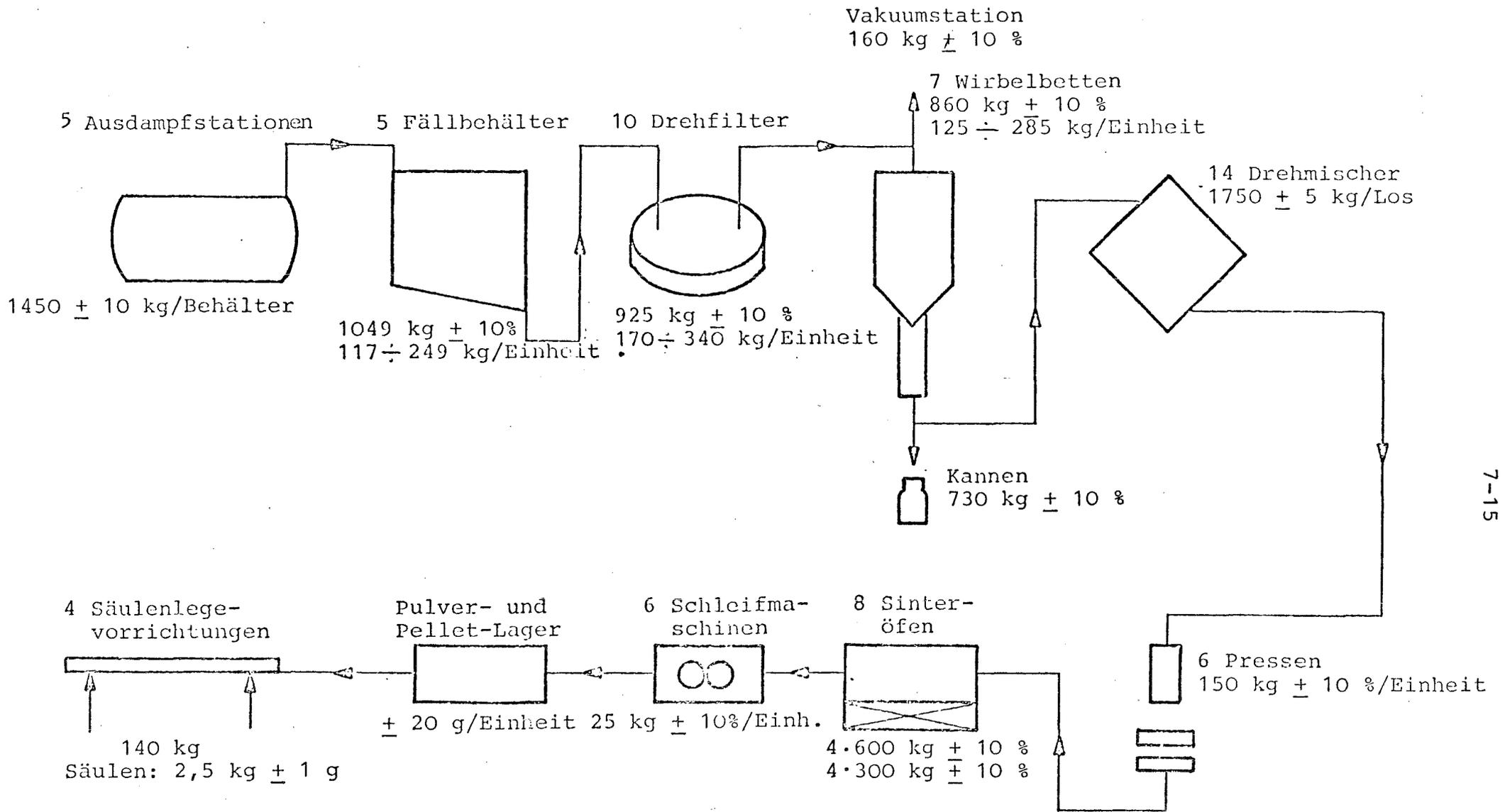


Fig. 1: Verfahrensschema für Spaltstoffflußkontrolle



Figur 2: SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DES FERTIGUNGSPROZESSES UND MITTLERES URANINVENTAR IN DER FERTIGUNGSANLAGE VON RBU

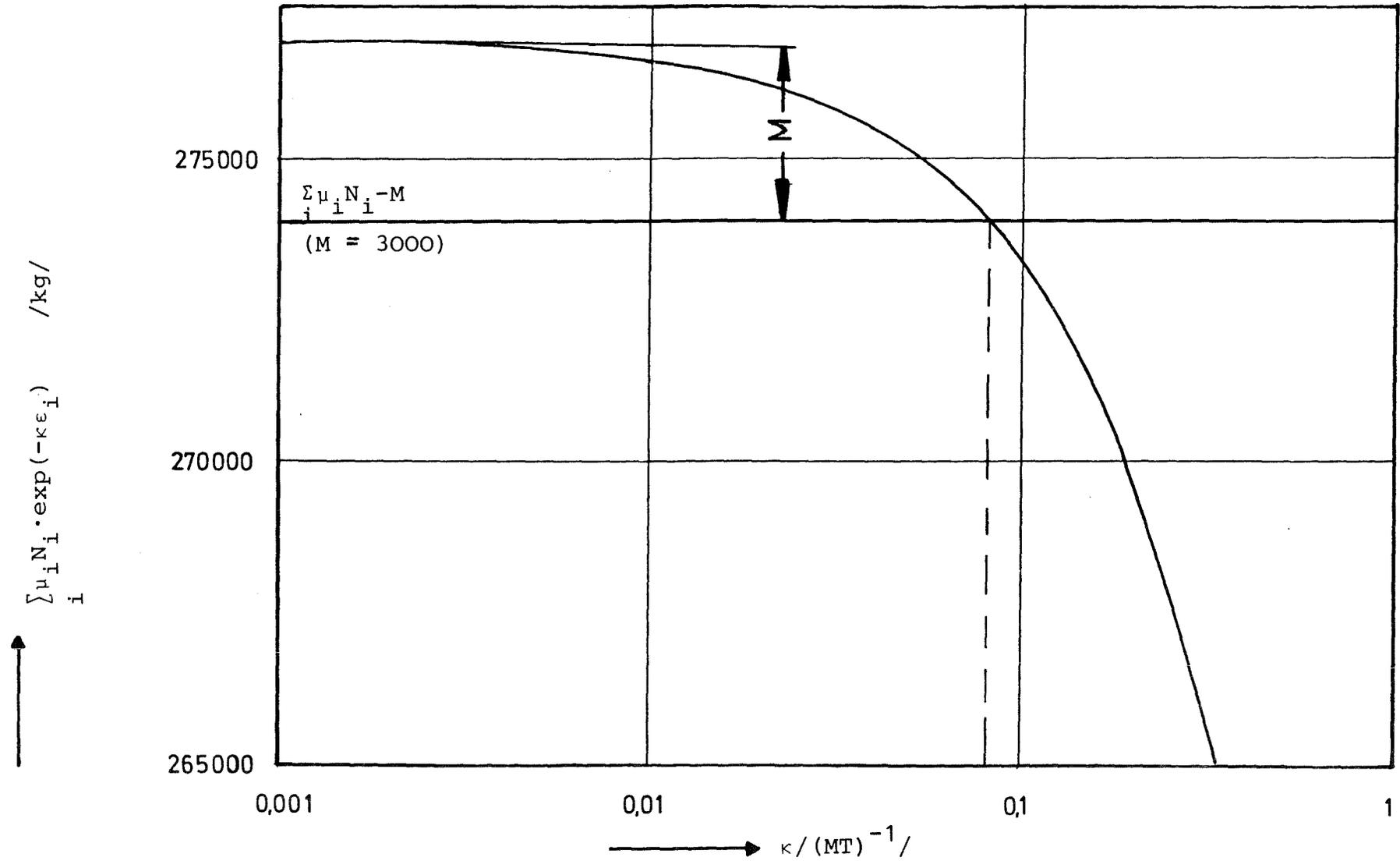


Fig. 3: Abhängigkeit des Parameters  $\kappa$  von der durch Datenfälschung zu entwendenden Uranmenge  $M$ : Die Funktion  $\sum \mu_i N_i \cdot \exp(-\kappa \epsilon_i)$  von  $\kappa$  wird mit der von  $\kappa$  unabhängigen Geraden  $\sum \mu_i N_i - M$  geschnitten. Beispiel:  $M = 3000$  kg U;  $\kappa = 8,3 \cdot 10^{-2}$ .

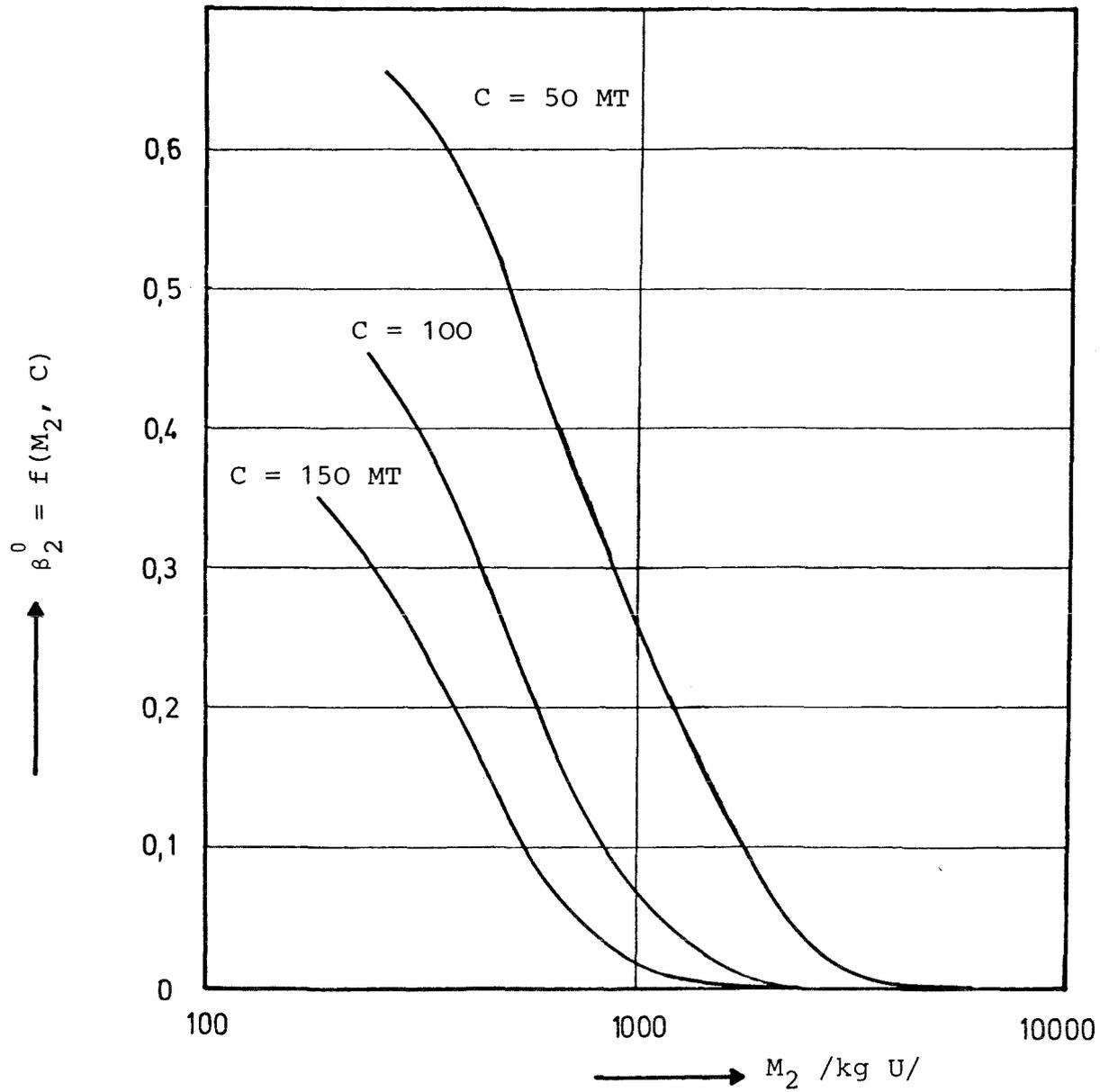


Fig. 4: Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit  $\beta_2^0$  in Abhängigkeit von der durch Datenfälschung zu entwendenden Uranmenge  $M_2$  und dem Stichprobenaufwand  $C$  der Überwachungsbehörde

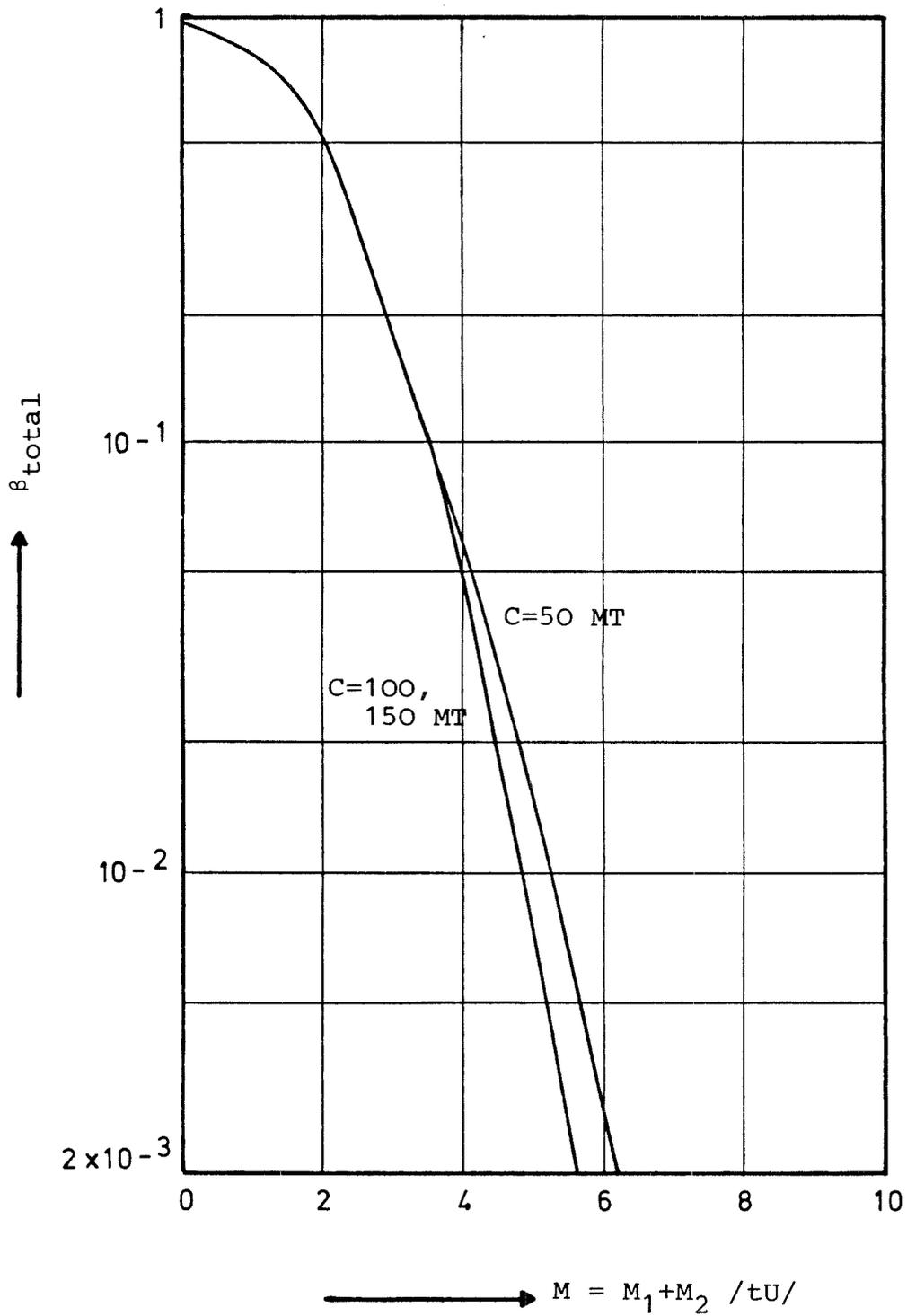


Fig. 5: Gesamt-Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{total}}$  als Funktion von zu entwendender Uranmenge  $M$  mit Stichprobenaufwand  $C$  als Parameter (s. Tabelle 8)

## Annex I

The Material Balance Concept

(After Ref. /AI-1/)

Let us consider a "material balance area" which contains at a given time  $t_0$ , some material into which material enters, and from which material goes out during a given interval of time  $(t_0, t_1)$ .

The material contained in the material balance area at time  $t_0$  is called the physical inventory  $I_0$ . The algebraic sum of the amounts of material which enter and leave the material balance area in the interval of time  $(t_0, t_1)$ , is called the throughput  $D$ . The physical inventory at  $t_0$  plus the throughput in  $(t_0, t_1)$ , give the book inventory  $B$  at  $t_1$ , i.e. the amount of material which should be contained in the material balance area at  $t_1$ :

$$B = I_0 + D. \quad (A-I-1)$$

The amount of material actually contained in the material balance area at  $t_1$  is the physical inventory  $I_1$ .

If all the material contained in and passing through the material balance area is carefully accounted for, and if no material has been diverted, then the difference between the book inventory  $B$  at  $t_1$  and the physical inventory  $I_1$  should be zero. This difference is called "Material Unaccounted For":

$$MUF = B - I_1. \quad (A-I-2)$$

Thus, we have the problem of finding out whether the nonzero difference is caused by measurement errors, or by the diversion of material.

In order to solve this problem, a significance test must be performed where the null hypothesis is given by the statement:

the expectation value of MUF is zero,

$$E(\text{MUF}/H_0) = 0, \quad (\text{A-I-3a})$$

and where the alternative hypothesis is given by the statement:  
the expectation value of MUF is  $M_1 > 0$ ,

$$E(\text{MUF}/H_1) = M_1 > 0. \quad (\text{A-I-3b})$$

The significance test is determined by the significance threshold  $s_1$ : if the realized value of MUF is smaller than or equal to  $s_1$ , then the inspector will state " $H_0$  is correct"; but if MUF is larger than  $s_1$ , he will state " $H_1$  is correct" (which does not immediately mean that a diversion of material is stated):

$$\begin{aligned} \text{MUF} \leq s_1: H_0 \text{ is true,} \\ \text{MUF} > s_1: H_1 \text{ is true.} \end{aligned} \quad (\text{A-I-4})$$

This procedure may cause two kinds of false statements:

- i) the inspector states " $H_1$  is true", when in fact  $H_0$  is true;
- ii) The inspector states " $H_0$  is true", when in fact  $H_1$  is true.

The probabilities of committing these errors are called  $\alpha_1$  and  $\beta_1$ :

$$\alpha_1: = \text{prob} \{ \text{MUF} > s_1 / H_0 \}, \quad (\text{A-I-5a})$$

$$\beta_1: = \text{prob} \{ \text{MUF} \leq s_1 / H_1 \}. \quad (\text{A-I-5b})$$

It is assumed that it will be clarified at a "second action level" whether or not the "alarm" was justified at  $\text{MUF} > s_1$ . Here,  $\alpha_1$  is called false alarm probability, whereas  $1 - \beta_1$  is called probability of detection.

Because of the random measurement errors, the quantities  $I_0$ ,  $D$ ,  $I_1$  and, therefore, MUF are random variables. Let  $\sigma_{I_0}^2$ ,  $\sigma_D^2$ , and  $\sigma_{I_1}^2$  be the variances of these random variables. Then the variance of MUF is given by

$$\text{var}(\text{MUF}) = \sigma_{I_0}^2 + \sigma_D^2 + \sigma_{I_1}^2 =: \sigma^2 \quad (\text{A-I-6})$$

independent of whether or not a diversion M would take place. If the random variables  $I_0$ ,  $D$  and  $I_1$  are normally distributed, then MUF is also normally distributed and one obtains from (A-I-5)

$$1 - \alpha_1 = \phi\left(\frac{s_1}{\sigma_{\text{MUF}}}\right), \quad (\text{A-I-7a})$$

$$\beta_1 = \phi\left(\frac{s_1 - M_1}{\sigma_{\text{MUF}}}\right), \quad (\text{A-I-7b})$$

where  $\phi$  is the Gaussian distribution function:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

If one eliminates the significance threshold  $s_1$  in (A-I-7b), with the help of (A-I-7a), one obtains

$$1 - \beta_1 = \phi\left(\frac{M_1}{\sigma_{\text{MUF}}} - U_{1-\alpha_1}\right), \quad (\text{A-I-8})$$

where  $U$  is the inverse of the Gaussian distribution function.

Up to now we have considered one inventory period. The treatment of a sequence of inventory periods poses special problems because of the question of how to choose the starting inventory: If at the end of an inventory period there are no significant differences between book and ending physical inventories, one can take one of these inventories or a linear combination of both as the starting inventory for the next period (see, e.g.

/A-I-2/, /A-I-3/). However, since we do not consider the case of several inventory periods in this paper, we refer the interested reader to the cited literature.

### References

- /A-I-1/ Avenhaus, R., Nakicenovic, N., "Material Accountability and its Verification: A special Example of Multivariate Statistical Inference", Research Report of the International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, RR-75-25, July 1975
- /A-I-2/ Avenhaus, R., Frick, H., "Game Theoretical Treatment of Material Accountability Problems", Report of the International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), RR-74-2, Laxenburg, Austria, January 1974
- /A-I-3/ Frick, H., "Game Theoretical Treatment of Multiple Inventory Problems" (Spieltheoretische Behandlung mehrfacher Inventurprobleme), Doctoral Thesis, University of Karlsruhe, Federal Republic of Germany, July 1976

## Annex II

Theory of Measurement Errors1. Random Variables, Distribution Functions and Moments

The probability that after the performance of a random experiment a realisation  $x$  of the random variable  $X$  is observed, is called the distribution function  $F(x)$  of that random variable:

$$F(x) = p\{X \leq x\}. \quad (\text{A-II-1})$$

As the probability is a normalized measure, i.e. as we have

$$0 \leq p\{ \cdot \} \leq 1,$$

we get from (A-II-1)

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1. \quad (\text{A-II-2})$$

If the distribution function  $F(x)$  can be written in the form

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad (\text{A-II-3})$$

we say that this distribution function has a density  $f(x)$ . From (A-II-2) we get

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{A-II-4})$$

In the following we always assume that there exists a density  $f(x)$ .

In analogy to mechanics we call

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx \quad (\text{A-II-5})$$

the k-th moment of the random variable X. Furthermore, we call

$$E((X-E(X))^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E(x))^k \cdot f(x) dx \quad (\text{A-II-6})$$

the k-th centralized moment of the random variable X. Especially we call

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{A-II-7})$$

the expectation value, and

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx \quad (\text{A-II-8})$$

the variance of the random variable X. The positive square root of the variance we call the standard deviation.

In analogy to (A-II-1) we define the common distribution (resp. density) of two random variables  $X_1$  and  $X_2$  as follows:

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 f(x_1, x_2), \quad (\text{A-II-9})$$

The common moments are defined in the same way as above. Especially important is the covariance  $\text{cov}(X_1, X_2)$ :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E((X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f(x_1, x_2) \quad (\text{A-II-10})$$

The correlation coefficient  $\rho$  is defined as follows:

$$\rho = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1)} \cdot \sqrt{\text{var}(X_2)}} \quad (\text{A-II-11})$$

As can be seen easily, one has

$$-1 \leq \rho \leq +1. \quad (\text{A-II-12})$$

The following rules are important for handling first and second moments:

Let  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  be real numbers, and  $X_1$  and  $X_2$  random variables. Then one has

$$(1) \quad E(\alpha + \beta \cdot X_1 + \gamma \cdot X_2) = \alpha + \beta \cdot E(X_1) + \gamma \cdot E(X_2) \quad (\text{A-II-13})$$

$$(2) \quad \text{var}(\alpha + \beta \cdot X_1 + \gamma \cdot X_2) = \beta^2 \cdot \text{var}X_1 + \gamma^2 \cdot \text{var}X_2 + 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \text{cov}(X_1, X_2) \quad (\text{A-II-14})$$

We call two random variables  $X_1$  and  $X_2$  with common density  $f(x_1, x_2)$  independent, if

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \quad (\text{A-II-15})$$

where  $f(x_1)$  and  $f(x_2)$  are the densities of  $X_1$  and  $X_2$ . In this case one has

$$\text{cov}(X_1, X_2) = 0. \quad (\text{A-II-16})$$

It should be noted that from (A-II-16) one cannot conclude that  $X_1$  and  $X_2$  are independent.

## 2. Random and Systematic Errors

Let  $X$  be the result of a single measurement of a physical quantity. We write

$$X = W(X) + e + d, \quad (\text{A-II-17})$$

where  $W(X)$  is the true value of the quantity to be measured,

and  $e$  and  $d$  the random and systematic errors for fixed experimental conditions in the following sense: If we repeat the experiment under the same conditions, then the random error changes from experiment to experiment according to its distribution, with

$$E(e) = 0, \text{ var}(e) = \sigma^2 \quad (\text{A-II-18})$$

whereas the systematic error remains always the same. Therefore, we get from (A-II-17) with (A-II-13) and (A-II-18)

$$E(X) = W(X)+d, \text{ var}(X) = \sigma^2 \quad (\text{A-II-19})$$

which means that we can call the systematic errors also the difference between true and expectation value.

It would be wrong now, if we would consider random and systematic errors as logical alternatives. Systematic errors can be of random origin. One example is a measurement with foregoing calibrations, e.g. a weight determination. As long as we measure with fixed calibration, the calibration error is a systematic error. However, from calibration to calibration the calibration error will vary randomly. Therefore, it makes only sense to talk about systematic errors in the framework of well-defined experimental conditions.

The most important difference between random and systematic errors is given by their propagation. In order to illustrate this we consider an experiment, in which in total  $n \cdot m$  measurements of the same physical quantity are performed, and where at the beginning of a series of  $m$  measurements one calibration is performed (i.e., in total  $n$  calibrations). Let  $X_{ij}$ ,  $i=1 \dots n$ ,  $j=1 \dots m$  be the  $j$ -th measurement after the  $i$ -th calibration. Then we write according to (A-II-17)

$$X_{ij} = W(X)+d_i+e_{ij}, \quad (\text{A-II-20})$$

where

$$E(d_i) = E(e_{ij}) = 0, \quad \text{var}(d_i) = \sigma_s^2, \quad \text{var}(e_{ij}) = \sigma_r^2, \quad \text{cov}(d_i, e_{ij}) = 0$$

$$i=1 \dots n, \quad j=1 \dots m \quad (\text{A-II-21})$$

$$\text{cov}(e_{ij}, e_{i'j'}) = 0 \quad \text{für } j \neq j'. \quad (\text{A-II-22})$$

Therefore, the variance of the average  $\bar{X}$  of the  $n \cdot m$  measurements, is given by

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}) &= \text{var}\left(\frac{1}{n \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (W(X) + d_i + e_{ij})\right) = \\ &= \text{var}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n d_i + \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{ij}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \text{var}(d_i) + \frac{1}{(n \cdot m)^2} \cdot n \cdot m \cdot \text{var}(e_{ij}) = \\ &= \frac{\sigma_s^2}{n} + \frac{\sigma_r^2}{n \cdot m} \end{aligned} \quad (\text{A-II-23})$$

As we see, the variance of the random error is  $m$ -times more reduced than that of the systematic error.

### 3. Error Propagation

Let us consider the  $m$  independent measurements  $X_i$ ,  $i=1 \dots m$ . With the help of these we form the function

$$Y = f(X_1, \dots, X_m) \quad (\text{A-II-24})$$

Let us assume that the variances of the errors of the measurements  $X_i$ , which we call  $\text{var}(X_i)$ , are known. Then the question arises, how the variance of the dependent measurement  $Y$ ,  $\text{var}(Y)$ , can be determined with the help of the  $\text{var}(X_i)$ .

Let us assume that the errors  $e_i$  of the measurements  $X_i$  are small compared to the expectation values of the  $X_i$ , i.e.,

$$X_i = E(X_i) + e_i, \quad e_i \ll E(X_i), \quad i = 1 \dots m. \quad (\text{A-II-25})$$

Then  $Y$  can be expanded at  $E(X_i)$  - which we write in the following as  $EX_i$  - according to Taylor's rule:

$$Y = f(EX_1 \dots EX_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\delta f(EX_i)}{\delta X_i} e_i + \dots \quad (\text{A-II-26})$$

Here,  $\delta f(EX_i)/\delta X_i$  means the derivation of  $f(X_1 \dots X_m)$  with respect to  $X_i$  at the point  $(X_1 \dots X_m) = (EX_1 \dots EX_m)$ . As the errors  $e_i$  have been assumed to be independent, the variance  $\text{var}(Y)$  is approximately given by

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\delta f(EX_i)}{\delta X_i} \right)^2 \cdot \text{var}(X_i). \quad (\text{A-II-27})$$

This is the Gaussian error propagation law.

If the errors of the measurements  $Y_i$  are not independent, we get instead of (A-II-27)

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\delta f(EX_i)}{\delta X_i} \right)^2 \cdot \text{var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} \frac{\delta f(EX_i)}{\delta X_i} \frac{\delta f(EX_j)}{\delta X_j} \text{cov}(X_i, X_j). \quad (\text{A-II-28})$$

One application of this formula is the case that systematic errors - which are of random origin - have to be considered. Let us assume, according to (A-II-17)

$$X_i = W(X_i) + d + e_i. \quad (\text{A-II-29})$$

Then we get

$$\text{var}(X_i) = \text{var}(d) + \text{var}(e_i) = \sigma_d^2 + \sigma_e^2 \quad (\text{A-II-30})$$

and furthermore, as  $E(d_i) = E(e_i) = 0$ :

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E[(d+e_i)(d+e_j)] = E(d^2) = \sigma_d^2; \quad (\text{A-II-31})$$

therefore we get from (A-II-28)

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\delta f(\text{EX}_i)}{\delta X_i} \right)^2 \cdot (\sigma_d^2 + \sigma_e^2) + 2 \cdot \sum_{i < j} \frac{\delta f}{\delta X_i} \cdot \frac{\delta f}{\delta X_j} \cdot \sigma_d^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\delta f(\text{EX}_i)}{\delta X_i} \right)^2 \cdot \sigma_e^2 + \left( \sum_{i=1}^m \frac{\delta f(\text{EX}_i)}{\delta X_i} \right)^2 \cdot \sigma_d^2. \end{aligned} \quad (\text{A-II-32})$$

The same expression we get easier, if we use the expansion (A-II-26) directly:

$$Y = f(\text{EX}_1 \dots \text{EX}_m) + \sum_i \frac{\delta f(\text{EX}_i)}{\delta X_i} \cdot e_i + \left( \sum_i \frac{\delta f(\text{EX}_i)}{\delta X_i} \right) \cdot d$$

and take the variance of this expression according to (A-II-4).

Note: If one does not know only the variance of systematic errors which are of random origin, but the systematic errors  $\Delta(X_i)$  of the measurements  $X_i$  themselves, independent of the fact whether or not the errors are of random or systematic origin, then we get instead of (A-II-28) the following single error propagation law for the systematic error  $\Delta(Y)$  of the dependent quantity  $Y$ :

$$\Delta(Y) = \sum_i \frac{\delta f(\text{EX}_i)}{\delta X_i} \Delta(X_i). \quad (\text{A-II-33})$$

This formula is important in cases where the known systematic errors - which in principle could be removed immediately - are removed only for the dependent quality Y, for example for numerical-technical reasons.

## Annex III

Random SamplingA) One class of material

Let us assume that we have  $N$  batches the data of which are reported by the operator, and  $r$  of which are falsified by an amount  $\mu$  of material. The variances of the random ( $r$ ) and systematic ( $s$ ) errors of the operator's ( $O$ ) single measurements are  $\sigma_{Or}^2$  and  $\sigma_{Os}^2$ . Furthermore, let us assume that the inspector ( $I$ ) checks  $n$  of the  $N$  reported data with the help of independent measurements, the variances of his single measurements are  $\sigma_{Ir}^2$  and  $\sigma_{Is}^2$ .

Two statistical procedures have been developed in the past which allow to test the consistency of the operator's and the inspector's data: In the case of the so-called "D-statistics" the two sets of data are added up separately and are then compared. In the case of the so-called P-statistics the corresponding single data are compared. The resulting error of the second kind probabilities (equal to one minus the probability of detection) are given by the following:

Theorem 1

For the D-statistics the error second kind probability  $\beta_D$  is given by

$$\beta_D = \sum_1 \phi \left( U_{1-\alpha} - \frac{\mu \cdot l}{\sqrt{n \cdot \sigma_r^2 + n^2 \cdot \sigma_s^2}} \right) \cdot \frac{\binom{r}{l} \cdot \binom{N-r}{n-l}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{A-III-1})$$

where

$$\sigma_r^2 = \sigma_{Or}^2 + \sigma_{Ir}^2 \quad ; \quad \sigma_s^2 = \sigma_{Os}^2 + \sigma_{Is}^2 \quad ,$$

where  $\alpha$  is the error first kind probability,  $\phi$  of the Gaussian distribution function and  $U$  its inverse.

For the P-statistics, we can determine the error of the second kind probability  $\beta_P$  only if we neglect systematic errors; it is given by

$$\beta_P = \sum_1^r (\phi(U_{1-\alpha'}, -\frac{\mu}{\sigma})) \cdot (1-\alpha')^{n-1} \cdot \frac{\binom{r}{1} \binom{N-r}{n-1}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{A-III-2})$$

where

$$\sigma^2 = \sigma_{Or}^2 + \sigma_{Ir}^2,$$

and

$$\alpha' = 1 - \frac{n}{1 + \sqrt{1-\alpha}},$$

where  $\alpha$  is the resulting error first kind probability.

Proof: see Ref. /A-III-1/.

As these formulae are too complicated for further use, especially for effort optimization in case of several classes, we have to approximate them by simpler formulae. We consider the case  $\sigma \ll \mu \cdot U_{1-\alpha}$ , i.e. the case that the amounts  $\mu$  to be falsified are much larger than the measurement standard deviations:

Theorem 2:

For  $\sigma \ll \mu \cdot U_{1-\alpha}$  we get both for the D- and the P-statistics

$$\beta_D = \beta_P = \prod_{i=0}^{r-1} \left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \quad (\text{A-III-3})$$

Proof:

i) D-statistics:

Under the assumptions given the term  $\phi(U_{1-\alpha} - \frac{\mu}{\sigma})$  is approximately zero, and the only nonvanishing term of the sum is that for  $l = 0$ . Therefore, we get

$$\begin{aligned}\beta_D &= \frac{\binom{r}{0} \binom{N-r}{n-0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-r}{n}}{\binom{N}{n}} = \\ &= \frac{(N-r)! \cdot n! \cdot (N-n)!}{n! \cdot (N-n-r)! \cdot N!} = \\ &= \frac{(N-n-r+1) \cdot (N-n-r+2) \dots (N-n)}{(N-r+1) \cdot (N-r+2) \dots N} = \\ &= \left(1 - \frac{n}{N-r+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{N-r+2}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{N}\right)\end{aligned}$$

which is equivalent to (3).

ii) P-statistics:

Here we have to take into account that  $\alpha = 0$  under the assumptions given. The rest is the same as above.

For the following, we make one further assumption, namely that the number  $r$  of falsified data is much smaller than the total number of batches. This leads to

Theorem 3:

For  $r \ll N$  the error of the second kind probability is given by

$$\beta_D = \beta_P = \left(1 - \frac{n}{N}\right)^r \quad (\text{A-III-4})$$

Proof: Follows immediately from Theorem 2.

Up to now we have considered only cases where one batch, the data of which have already been verified, can not be verified once more ("drawing without replacement"). If we allow for the possibility that the data of one batch can accidentally be verified more than once ("drawing with replacement") then we get a formula very similar, but not identical to (4):

Theorem 4:

If the batches the data of which have to be verified can be selected more than once, then the error of the second kind probability is given by

$$\beta_b = \left(1 - \frac{r}{N}\right)^n \quad (\text{A-III-5})$$

Proof: If one selects one batch of random, then the probability not to find a falsified batch is given by  $1 - \frac{r}{N}$ . If one selects n batches, then the probability not to find a falsified batch, is given by (5).

If the sample sizes  $n$  and  $r$  are much smaller than the total number  $N$  of batches, then both formulae, (4) and (5), tend to the same formula :

$$\beta_D = \beta_P = \beta_b = 1 - \frac{r \cdot n}{N} . \quad (\text{A-III-6})$$

This is due to the well known fact that in this case the hypergeometric distribution tends to the binomial distribution as the difference between drawing with and without replacement does not play a role.

B) R classes of material

As already mentioned, the exact error second kind probabilities (1) and (2) are too complicated for further use. There are several possibilities for approximation which have already been discussed in Ref. /A-III-1/, however, the underlying assumptions are too restrictive for practical purposes. Here, a new approach is presented.

For R classes the resulting error second kind probability (one minus the total probability of detection) is given by

$$\beta = \prod_{i=1}^R \beta_i = \prod_{i=1}^R \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right)^{r_i}, \quad (\text{A-III-7})$$

if one uses Theorem 3 (drawing without replacement), or by

$$\beta = \prod_{i=1}^R \beta_i = \prod_{i=1}^R \left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right)^{n_i} \quad (\text{A-III-8})$$

if one uses Theorem 4 (drawing with replacement).

Therefore, according to the discussion given in section 4 of the main text, the problem of optimizing a given inspection effort C is equivalent to maximizing  $\beta$  with respect to  $r_i$ ,  $i = 1 \dots R$ , under the boundary condition

$$\sum_i \mu_i \cdot r_i = M \quad (\text{A-III-9})$$

and to minimizing  $\beta$  with respect to  $n_i$ ,  $i = 1 \dots R$ , under the boundary condition

$$\sum_i \epsilon_i \cdot n_i = C. \quad (\text{A-III-10})$$

In other words, we have to find a saddlepoint of the function  $\beta$ , given by (7) or (8), in the domain

$$\{\underline{n}=(n_1 \dots n_R) \quad \underline{r}=(r_1 \dots r_R) : \sum_i \epsilon_i \cdot n_i = C, \sum_i r_i \cdot \mu_i = M\} \quad (\text{A-III-11})$$

Now, a difficulty arises. If we analyze the problem in detail, we realize that for both functions, (7) and (8), there exists a saddlepoint in the interior of (11) however, only for (8) it is of the form we would like to have it, namely

$$\min_{\underline{n}} \max_{\underline{r}} \beta(\underline{n}, \underline{r}),$$

whereas for (7) it is just the opposite, namely

$$\max_{\underline{n}} \min_{\underline{r}} \beta(\underline{n}, \underline{r}).$$

Therefore, an analytical solution which can be used for our purposes, can be given only for the drawing with replacement situation:

Theorem 5:

Under the condition

$$\sum_i \mu_i \cdot N_i > M$$

a saddlepoint of the function

$$\beta(\underline{n}, \underline{r}) = \prod_{i=1}^R \left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right)^{n_i} \quad (\text{A-III-8})$$

in the domain

$$\{\underline{n}, \underline{r}: \sum_i \varepsilon_i \cdot n_i = C, \sum_i \mu_i \cdot r_i = M\} \quad (\text{A-III-11})$$

is given by

$$n_i^0 = \frac{C}{\sum_j \varepsilon_j \cdot \mu_j \cdot N_j \cdot \exp(-\kappa \cdot \varepsilon_j)} \cdot \mu_i N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \varepsilon_i) \quad (\text{A-III-12a})$$

$$r_i^0 = N_i \cdot (1 - \exp(-\kappa \cdot \varepsilon_i)), \quad i = 1 \dots R, \quad (\text{A-III-12b})$$

where  $\kappa$  is given by

$$\sum_i \mu_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \varepsilon_i) = \sum_i \mu_i \cdot N_i - M. \quad (\text{A-III-12c})$$

The optimum probability of no detection  $\beta^0 = \beta(\underline{n}^0, \underline{r}^0)$  is given by

$$\beta^0 = \exp(-\kappa \cdot C) \quad (\text{A-III-12d})$$

Furthermore, one has

$$0 \leq r_i^0 \leq N_i, \quad 0 \leq n_i^0 \quad \text{for } i = 1 \dots R. \quad (\text{A-III-13})$$

Proof:

- 1) We will not prove the existence and the uniqueness of the saddlepoint (12) but refer to a forthcoming original paper.
- 2) In the following, we consider instead of the function (8) the function

$$\ln \beta(\underline{n}, \underline{r}) = \sum_i n_i \cdot \ln \left( 1 - \frac{r_i}{N_i} \right) \quad (\text{A-III-14})$$

which is equivalent to (8) in the sense that it has the same saddlepoints as (8).

- 3) The saddlepoint  $(\underline{n}^0, \underline{r}^0)$  is determined with the help of the

saddlepoint criterion (see, e.g. Ref. /A-III-2/):

$$\ln\beta(\underline{n}, \underline{r}) \leq \ln\beta(\underline{n}^0, \underline{r}^0) \leq \ln\beta(\underline{n}, \underline{r}^0). \quad (\text{A-III-15})$$

i) The righthand inequality of (14) is with (10) equivalent to

$$\sum_i \frac{C}{\sum_j \epsilon_j \cdot \mu_j \cdot N_j \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_j)} \cdot \mu_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i) \leq \sum_i n_i \cdot (-\kappa \cdot \epsilon_i)$$

which is equivalent to

$$-\kappa \cdot C \leq -\kappa \cdot \sum_i \epsilon_i \cdot n_i$$

which is true because of (10).

ii) The lefthand inequality of (14) is with (10) equivalent to

$$\sum_i \frac{C \cdot \mu_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i)}{\sum_j \epsilon_j \cdot \mu_j \cdot N_j \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_j)} \cdot \ln\left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right) \leq -\kappa \cdot C$$

which is equivalent to

$$\sum_i s_i \cdot \ln\left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right) \leq \kappa; \quad s_i = \frac{\mu_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_i)}{\sum_j \epsilon_j \cdot \mu_j \cdot N_j \cdot \exp(-\kappa \cdot \epsilon_j)}.$$

Therefore, one has to show that the minimum of the function

$$f(\underline{r}) := \sum_i s_i \cdot \ln\left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right)$$

under the boundary condition (9) is assumed at the point  $\underline{r}^0$  given by (12b), and has the value  $-\kappa$ .

We determine this minimum with the help of the method of Lagrange multipliers: Derivation of the function

$$F(\underline{r}) := \sum_i s_i \cdot \ln\left(1 - \frac{r_i}{N_i}\right) + \lambda \cdot \sum_i \mu_i \cdot r_i$$

gives the following determinant for  $r_i^0$ :

$$r_i^0 = N_i \cdot \left(1 - \frac{s_i}{\lambda \cdot \mu_i \cdot N_i}\right). \quad (\text{A-III-16})$$

Use of the boundary condition (9) gives together with (12c)

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_i \mu_i \cdot \varepsilon_i \cdot N_i \cdot \exp(-\kappa \cdot \varepsilon_i)$$

which gives together with (16) the solution (12b). The minimum of the function  $f(\underline{r})$  is  $-\kappa$  as one sees easily.

- 4) From (11c) one concludes directly that  $\kappa > 0$  therefore,  $\exp(-\kappa \cdot \varepsilon_i) < 1$ , therefore (13) holds.

The solution (12) has some interesting properties which shall be discussed in the following:

- 1) As  $\kappa$  depends only on  $M$ , but not on  $C$ , the optimum sample distribution  $\underline{r}^0$  depends only on the value of  $M$ , but not on that of  $C$ . (Unfortunately the inverse, namely the  $n_i^0$  does not depend on  $M$ , is not true in general.)
- 2) For  $n_i \cdot \varepsilon_i \ll 1$  for all  $i=1 \dots R$  - which is true for  $M \ll \sum_i \mu_i \cdot N_i$  - we get

$$\kappa \approx \frac{M}{\sum_i \varepsilon_i \cdot \mu_i \cdot N_i}$$

Inserting this approximation into (11) we get

$$n_i^0 = \frac{C}{\sum_j \mu_j \cdot \varepsilon_j \cdot N_j} \cdot \mu_i \cdot N_i, \quad (\text{A-III-17a})$$

$$r_i^0 = \frac{M}{\sum_j \mu_j \cdot \varepsilon_j \cdot N_j} \cdot \varepsilon_i \cdot N_i, \quad i=1..R \quad (\text{A-III-17b})$$

These solutions which allow for an intuitive interpretation have been derived already earlier /A-III-1/.

3) For  $\varepsilon_i = \varepsilon$  for  $i = 1..R$  we get

$$r_i^0 = \frac{M}{\sum_j \mu_j \cdot \varepsilon \cdot N_j} \cdot \varepsilon \cdot N_i, \quad (\text{A-III-18a})$$

$$n_i^0 = \frac{C}{\sum_j \mu_j \cdot \varepsilon \cdot N_j} \cdot \mu_i \cdot N_i, \quad i=1..R, \quad (\text{A-III-18b})$$

i.e. we get expressions which are very close to the ones given above. It should be noted that here as well as in (17), i.e. in case of small  $M$ , the optimum sample distribution  $n^0$  does not depend on the value of  $M$ .

4) A necessary condition for  $n_i^0 < N_i$  for  $i=1..R$  is given by

$$\sum_i \varepsilon_i \cdot N_i \geq C$$

It is clear that there does not exist a sufficient condition for  $n_i^0 < N_i$  because our "drawing with replacement" model permits the drawing of more than  $N_i$  batches in the  $i$ -th class.

5) From (12c) we get

$$\kappa(M = 0) = 0, \quad \kappa(M = M_{\max}) = \infty.$$

Therefore, we get from (12d)

$$\beta^0(M = 0) = 1, \beta^0(M = M_{\max}) = 0$$

$$\beta^0(C = 0) = 1, \beta^0(C = \infty) = 0.$$

Again the fact that only for  $C = \infty$  we get a zero probability of no detection, is a consequence of our "drawing with replacement" model.

References:

- /A-III-1/ Avenhaus, R., "Entscheidungstheoretische Analyse von Überwachungsproblemen in kerntechnischen Anlagen", Habilitationsschrift Universität Mannheim, Dezember 1974.
- /A-III-2/ Karlin, S., Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Vol. I., Pergamon Press, London 1959