KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

Dezember 1977 KFK 2564

Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Spaltstoffflußkontrolle

Spieltheoretische Behandlung von Materialbilanzierungsproblemen

H. Frick

GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2564

Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Spaltstofflußkontrolle

Spieltheoretische Behandlung von Materialbilanzierungsproblemen

H. Frick

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

Zusammenfassung

Der vorliegende KFK-Bericht besteht aus zwei Teilen. Diese sind in der Darstellung unabhängig, vom Problem her jedoch verbunden. Im ersten Teil werden Materialbilanzierungsprobleme ausführlich behandelt unter der Annahme, daß die zugehörigen Messungen, aufgefaßt als normalverteilte Zufallsvariable, stochastisch unabhängig sind. Im zweiten Teil wird diese Annahme aufgegeben und auf die dadurch auftretenden mathematischen Schwierigkeiten eingegangen.

Abstract

Game Theoretical Treatment of Material Accountability Problems

This KFK report breaks down into two parts. They are independent in presentation although related to each other as regards the problem treated. The first part extensively deals with material balancing problems and the assumption is made that the corresponding measurements, taken as random variables with normal distribution, are stochastically independent. This assumption is abandoned in the second part and the resulting mathematical difficulties are discussed.

I n h a l t

Seite

Teil I

Spieltheoretische Behandlung mehrfacher Inventurprobleme

Inhalt Seite

1. Einleitung

Die in dieser Arbeit angestellten Überlegungen entstanden im Zusammenhang mit Problemen der Kernmaterialsicherung. Ausgangspunkt war die Frage, wie mit Hilfe von Buchführungs- und Bilanzierungsmaßnahmen Verlust oder Entwendung von wertvollem Material entdeckt werden kann.
Die dazu entwickelte Methode der 'einfachen Inventur' (siehe z.B [1]), welche eine einmalige Kontrolle vorsieht, wird hier aufgegriffen und auf mehrfache Kontrollen erweitert. Dadurch soll eine fortlaufende Überwachung des Materials ermöglicht und die Zeitspanne zwischen Verlust bzw. Entwendung und Entdeckung verkürzt werden.

In der vorliegenden Arbeit werden Inventurprobleme in materialverarbeitenden Anlagen betrachtet, wobei Materialverluste bzw. -entwendungen nicht ausgeschlossen werden können, und wobei variable Überwachungsstrategien einerseits und variable Verlust- bzw. Entwendungsstrategien andererseits zu berücksichtigen sind.

Bei einer einfachen Inventur läßt sich das in dieser Arbeit behandelte Problem wie folgt darstellen ([1]):
Zu Beginn einer Referenzzeit wird das reale oder physikalische Inventar der Anlage gemessen. Während der Referenzzeit werden sämtliche Materialzu- und abgänge, deren Summe wir mit Durchfluß bezeichnen, gemessen. Am Ende der Referenzzeit wird wieder das physikalische Inventar gemessen.
Falls im Referenzzeitraum kein Material verlorengeht bzw. entwendet wird, muß am Ende der Referenzzeit das Buchinventar, d.h. die Summe von Startinventar und Durchfluß, mit dem Endinventar übereinstimmen. Da die Messungen im allgemeinen jedoch mit zufälligen Fehlern behaftet sind, können auch dann Differenzen auftreten, wenn kein Material fehlt. Umgekehrt können durch fehlendes Material gegebene Differenzen durch zufällige Meßfehler zumindest teilweise aufgehoben werden.

Zum Druck eingereicht am 12. Dezember 1977

Es soll nun am Ende der Referenzzeit entschieden werden,ob eine zwischen Buch- und Endinventar aufgetretene Differenz auf die unvermeidbaren zufälligen Meßfehler zurückzuführen ist oder ob tatsächlich Material fehlt.Zu diesem Zweck wird man sich eine Schranke,die sogenannte Signifikanzschranke, vorgeben.Überschreitet die Differenz diese Schranke,so wird Verlust bzw. Entwendung von Material konstatiert.Andernfalls wird angenommen,daß die mangelnde Übereinstimmung zwischen Buch- und Endinventar durch Meßfehler zu erklären ist.
Durch Vorgabe der Signifikanzschranke wird im bisher betrachteten einfachen Fall die Wahrscheinlichkeit festgelegt,Verlust bzw. Entwendung zu konstatieren,wenn in Wirklichkeit nichts dergleichen vorliegt,d.h. es wird die Fehlalarmwahrscheinlichkeit festgelegt.Da die Aufklärung eines Fehlalarms mit Kosten verbunden sein wird-wenn z.B. die Anlage wegen der Maßnahmen zur Aufklärung des Fehlalarms stillgelegt werden muß-wird man umgekehrt einen Wert der Fehlalarmwahrscheinlichkeit vorgeben,der mit den wirtschaftlichen Interessen des Betreibers verträglich ist und dadurch die Signifikanzschranke festlegen.
Durch die Vorgabe des Wertes der Fehlalarmwahrscheinlichkeit ist auch die Wahrscheinlichkeit festgelegt,einen Verlust bzw. eine Entwendung zu konstatieren,wenn wirklich Material fehlt.Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit Entdeckungswahrscheinlichkeit;sie stellt-als Funktion der fehlenden Materialmenge aufgefaßt-ein Maß für die Effizienz des Materialüberwachungssystems auf der Basis einer einfachen Inventur dar.

Bei einer Folge von Inventuren werden zusätzlich zum Start- und Endinventar noch die physikalischen Inventare an verschiedenen Zeitpunkten innerhalb des Referenzzeitraums gemessen.An jedem diese Zeitpunkte wird analog zum Fall einer einfachen Inventur entschieden,ob das Buchinventar signifikant verschieden vom physikalischen Inventar ist,d.h. ob Material verloren bzw. entwendet wurde oder nicht.Dabei ist das Buchinventar jetzt eine geeignete Linearkombination der vorangegangenen Durchfluß- und Inventarmessungen ([2]).

Der Wert der Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit,d.h. der Wahrscheinlichkeit,daß mindestens ein Fehlalarm auftritt, wird aus denselben Gründen wie bei der einfachen Inventur vorgegeben.Die Signifikanzschranken für die einzelnen Inventaraufnahmezeitpunkte müssen daher so gewählt werden, daß sie mit diesem Wert verträglich sind.
Die Menge aller bezüglich der vorgegebenen Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit zulässigen Schranken wird im folgenden als die Menge der Kontrollstrategien bezeichnet.

Geht im Referenzzeitraum Material verloren oder wird es entwendet,so setzt sich der Gesamtbetrag zusammen aus den Teilbeträgen,die in den Zeitspannen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Inventaraufnahmen verschwinden.Die Menge aller bezüglich eines vorgegebenen Gesamtfehlbetrages möglichen Aufteilungen auf Fehlbeträge für die Intervalle zwischen zwei Inventaraufnahmen wird im folgenden als die Menge der Verlust- bzw. Entwendungsstrategien bezeichnet.

Mit Entdeckungswahrscheinlichkeit wird jetzt die Wahrscheinlichkeit bezeichnet,daß -unter der Voraussetzung,daß tatsächlich Material fehlt- mindestens einmal Materialverlust bzw. -entwendung konstatiert wird.Diese Entdeckungswahrscheinlichkeit hängt ab von der jeweils gewählten Kontrollstrategie und von der Verlust- bzw. Entwendungsstrategie.Der analytische Ausdruck für die Entdeckungswahrscheinlichkeit wird von den speziellen Gestalten der Buchinventare zu den einzelnen Zeitpunkten der Inventaraufnahme bestimmt.Wegen der stochastischen Abhängigkeiten dieser Buchinventare kann dieser Ausdruck im allgemeinen nicht in expliziter Form angegeben werden.

Für den Fall,daß Verluste unvermeidbar sind,kann man nun fragen,welche Kontrollstrategie bei ungünstigster Verluststrategie die größte Entdeckungswahrscheinlichkeit liefert.Diese Entdeckungswahrscheinlichkeit wollen wir als die optimale garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit bezeichnen.

Im Falle einer Entwendung von Material kann man davon ausgehen,daß bei nichtentdeckter Entwendung die entwendende Partei einen irgendwie gearteten (finanziellen oder ideellen) Gewinn erzielt -sonst würde sie ja nicht entwenden-,daß sie bei entdeckter Entwendung einen Nachteil in Form einer Sanktion oder Strafe erleidet.Weiter wird angenommen,daß die kontrollierende Partei sich so verhält,als ob der Gewinn bzw. Verlust der kontrollierten Partei ihr eigener Verlust bzw. Gewinn ist.Wir können somit die beschriebene Konfliktsituation als ein Zweipersonen-Nullsummenspiel auffassen,dessen Auszahlungsfunktion (für die entwendende Partei) der Gewinnerwartungswert (der entwendenden Partei) ist.

Es zeigt sich,daß das eben beschriebene Spiel demjenigen Spiel strategisch äquivalent ist,für das die Auszahlung (an die entwendende Partei) gerade die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit ist.Damit haben wir aber die gleiche Situation wie im Falle,daß Materialverluste unvermeidbar sind.Im folgenden soll daher nur noch der Entwendungsfall betrachtet werden,und die zu lösende Aufgabe läßt sich wie folgt formulieren:
Gesucht wird ein Paar ausgezeichneter Strategien mit der Eigenschaft: spielt der eine Spieler seine ausgezeichnete Strategie,so ist es für den anderen Spieler am günstigsten,ebenfalls seine ausgezeichnete Strategie zu spielen und umgekehrt.
Derartige Strategien werden im folgenden als Paare optimaler Strategien bezeichnet.Der Wert,den die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit für ein Paar optimaler Strategien annimmt,wird Spielwert genannt.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit,Aussagen über Existenz und Eigenschaften optimaler Strategien sowie über das Verhalten des Spielwerts im soeben skizzierten Spiel bei festgehaltener Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit und vorgegebener zu entwendender Materialmenge zu machen.Dabei gehen wir davon aus,daß alle für die Erstellung der Buch- und physikalischen Inventare notwendigen Messungen normalverteilte Zufallsvariable sind ([1], [3]).

Die Struktur der vorliegenden Arbeit läßt sich wie folgt charakterisieren:
In Kap.2 wird gezeigt,daß es beim Problem der mehrfachen Inventuren unter den zugelassenen Typen von Buchinventaren genau eine Form gibt,die einen expliziten Ausdruck für die Entdeckungswahrscheinlichkeit erlaubt.Außerdem wird nachgewiesen,daß gerade diese Form die Varianzen der Zufallsvariablen 'Buchinventar minus physikalisches Inventar' minimiert.Zusätzliche Besonderheiten dieser Gestalt des Buchinventars werden im Anhang diskutiert.
Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das auf obiger Wahl des Buchinventars beruhende Spiel betrachtet.
Kap.3 der Arbeit behandelt das Problem der optimalen Strategien.Zunächst wird das Spiel in einer Form dargestellt,die den Vorteil konvexer Strategienmengen bietet.Danach werden Existenz und Eindeutigkeit eines Paares optimaler Strategien gezeigt,zusätzlich wird eine einfache Berechnungsmöglichkeit angegeben.Es stellt sich heraus,daß die optimale Strategie der kontrollierenden Partei nicht von der Größe der zu entwendenden Gesamtmaterialmenge abhängt.Für die optimale Entwendungsstrategie gilt das Analogon nicht,sie ist im allgemeinen nicht unabhängig vom Wert der Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit.
In Kap.4 wird gezeigt,daß der Spielwert eine differenzierbare Funktion der Varianzen der Durchfluß- und Inventarmessungen ist.Die Eigenschaften der Ableitungen erlauben es,durch Abändern dieser Varianzen einen einfacheren analytischen Ausdruck für den Spielwert zu erhalten.
In Kap.5 wird diese neue Gestalt benutzt,um einfach zu berechnende obere und untere Schranken für den Spielwert herzuleiten.Diese Schranken sind scharf in dem Sinne,daß es keine echt kleineren bzw. größeren Schranken für den Spielwert gibt.

In Kap.6 wird der Einfluß der Anzahl der Inventaraufnahmen auf die Entdeckungswahrscheinlichkeit diskutiert. Es stellt sich heraus,daß,unabhängig von allen anderen Parametern,die optimale garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Inventaraufnahmen maximal wird.Unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Varianzen der Messungen wird anschließend das Verhalten der optimalen garantierten Entdeckungswahrscheinlichkeit bei großer Anzahl von Inventaraufnahmen beschrieben. Kap.7 greift noch einmal die Problematik der Vorgabe des Wertes der Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit auf.Bei der Festlegung dieses Wertes sind die Interessen der beiden Parteien entgegengesetzt,so daß es mühevoll sein könnte, hier einen Kompromiß zu finden.Auf der Basis eines Zweipersonennichtkonstantsummenspiels wird in diesem Kapitel der Wert der Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit auf eine Weise bestimmt,die beiden Seiten gerecht wird.

2. Aufstellung des Modells

2.1 Einfache Inventur

Bevor wir das Modell für mehrfache Inventuren aufstellen, wollen wir den Sachverhalt am Beispiel einer einfachen Inventur erläutern.

Wir betrachten dazu eine Materialbilanzzone (Mbz) im Zeitintervall $J := [t_0, t_1]$. Das physikalische Inventar der Mbz zum Zeitpunkt t_i, $i = 0,1$ bezeichnen wir mit I_i, den Durchfluß (= eingegangenes Material minus abgegebenes Material) im Zeitintervall J kennzeichnen wir mit D_1.

Die Messungen von I_i, D_1 sind im allgemeinen mit Meßfehlern behaftet. Wir fassen daher jetzt und im folgenden D_1, I_0, I_1 als unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen* (Zf var.) mit bekannten Varianzen $\sigma^2_{D_1} > 0$, $\sigma^2_{I_0} \geqq 0$, $\sigma^2_{I_1} \geqq 0$ auf.

Die Summe $I_0 + D_1$ nennen wir Buchinventar und bezeichnen sie mit B_1; die Differenz zwischen Buchinventar und Endinventar I_1 nennen wir

$$MUF_1^{**} := B_1 - I_1 \quad . \tag{2-1}$$

Mittels eines Hypothesentests wollen wir entscheiden, ob B_1 im Rahmen der Meßgenauigkeit mit I_1 übereinstimmt (Nullhypothese H_0) oder ob die Materialmenge M_1 in $[t_0, t_1]$ aus der Mbz entwendet wurde (Alternativhypothese). Die Nullhypothese des Tests ist somit gegeben durch

---

*Falls I_i, $i = 0$ oder 1 eine bekannte Zahl ist - etwa $I_0 = 0$, weil die Mbz zum Zeitpunkt t_0 leer ist, - so bleiben die folgenden Überlegungen richtig, wenn wir in diesem Fall $\sigma^2_{I_i} = 0$ setzen.

**Der Ausdruck MUF: "Material Unaccounted For" ist ungenau, da eine Differenz zwischen B_1 und I_1 auch durch Meßfehler zustande kommen kann und nicht nur durch fehlendes Material. Die Bezeichnung MUF hat sich dennoch durchgesetzt, wir benutzen sie daher ebenfalls.

$$E(MUF_1 | H_O) = O \quad ,^* \tag{2-2}$$

die Alternativhypothese H_1 durch

$$E(MUF_1 | H_1) = M_1 \quad . \tag{2-3}$$

Wir entscheiden für H_O, falls der realisierte MUF-Wert eine Signifikanzschranke s_1 nicht überschreitet, andernfalls für H_1. Den Wert von s_1 bestimmen wir durch Vorgabe der Wahrscheinlichkeit α_1 des Fehlers 1. Art, d.h. der Wahrscheinlichkeit einer Entscheidung für H_1, obwohl H_O richtig ist:

$$\alpha_1 = \text{prob}\,\{MUF_1 > s_1 | H_O\} \quad . \tag{2-4}$$

Die Güte des Tests wird beschrieben durch die Wahrscheinlichkeit β_1 des Fehlers 2. Art, die definiert ist durch

$$\beta_1 = \text{prob}\,\{MUF_1 \leqq s_1 | H_1\} \quad . \tag{2-5}$$

Aus der Annahme, daß die Messungen unabhängig normalverteilt sind, folgt dann

$$\alpha_1 = 1 - \phi\left(\frac{s_1}{\sigma_1}\right) \quad , \tag{2-6}$$

$$\beta_1 = \phi\left(\frac{s_1 - M_1}{\sigma_1}\right) \quad , \tag{2-7}$$

wobei ϕ die Verteilung der Gauß'schen Einheitsvariablen bezeichnet und σ_1^2 die Varianz von MUF_1 ist:

$$\phi(x) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \tag{2-8}$$

$$\sigma_1^2 := \text{var}\,(MUF_1) = \sigma_{I_O}^2 + \sigma_{D_1}^2 + \sigma_{I_1}^2 \quad . \tag{2-9}$$

---

*E bedeutet Erwartungswert.

Bezeichnet U die Umkehrfunktion von ϕ, so ist

$$s_1 = \sigma_1 \cdot U(1-\alpha_1) \quad , \tag{2-10}$$

$$\beta_1 = \phi\left(U(1-\alpha_1) - \frac{M_1}{\sigma_1}\right) \quad . \tag{2-11}$$

Die Wahrscheinlichkeit, für H_1 zu entscheiden, wenn H_1 richtig ist, ist $1 - \beta_1$. Im folgenden nennen wir diese Wahrscheinlichkeit aus naheliegenden Gründen Entdeckungswahrscheinlichkeit.

2.2 Mehrfache Inventuren

Wir betrachten ein Zeitintervall $J := [t_A, t_E]$ und eine Zerlegung von J in n Teilintervalle J_i:

$$J_i := [t_{i-1}, t_i], \quad t_{i-1} < t_i, \quad i = 1,\dots,n, \quad t_0 = t_A, \quad t_n = t_E \quad . \tag{2-12}$$

Das physikalische Inventar der Mbz zum Zeitpunkt t_i bezeichnen wir mit I_i, $i = 0,\dots,n$. Den Durchfluß im Zeitintervall J_j nennen wir D_j, $j = 1,\dots,n$. Wir nehmen wieder an, die I_i, D_j seien unabhängige normalverteilte Zf var. mit bekannten Varianzen $\sigma^{2*}_{I_i} \geqq 0$, $\sigma^2_{D_j} > 0$, $0 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$.

Ein zu 2.1 analoges Vorgehen hieße, die Zf var. MUF für J_i wie folgt zu definieren:

$$MUF^0_i := I_{i-1} + D_i - I_i \quad . \tag{2-13}$$

Wir wollen stattdessen bei der MUF-Bildung für J_i die MUF^0_j der vorangegangenen J_j miteinbeziehen und setzen daher

$$MUF'_1 := MUF^0_1 \quad , \tag{2-14a}$$

---

* "$\sigma^2_{I_i} = 0$" ist wie in der Fußnote auf Seite 7 zu interpretieren.

$$MUF_i' : = MUF_i^O + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}' \, MUF_j^O \quad , \qquad 1 < i \leqq n \quad , \tag{2-14b}$$

mit noch unbestimmten $a_{ij}' \varepsilon \mathbb{R}$.

Sei nun

$$z_i' : = MUF_i' \quad , \qquad z_i^O : = MUF_i^O \quad , \tag{2-15}$$

$$z' : = (z_1', \ldots, z_n') \quad , \qquad z^O : = (z_1^O, \ldots, z_n^O) \quad , \tag{2-16}$$

$$A' : = (a_{ij}')_{i,j} = 1, \ldots, n \quad , \quad a_{ii}' = 1 \forall i, \; a_{ij}' = 0 \text{ für } j > i \quad . \tag{2-17}$$

A' ist eine untere Dreiecksmatrix mit Hauptdiagonalelementen 1, daher also regulär. Offensichtlich ist

$$z'^t = A' z^{Ot} \quad . \tag{2-18}$$

Da Normalverteilung der Messungen vorausgesetzt wurde, ist die Dichte f(z') des Zufallsvektors (Zf vekt.) z' gegeben durch

$$f(z') = C' \cdot \exp[-(z' - Ez') \cdot \Sigma'^{-1} \cdot (z' - Ez')^t] \quad , \tag{2-19}$$

wobei "t" "transponiert" bedeutet und

$$\Sigma' : = \mathrm{Cov}(z') = E[(z' - Ez')^t (z' - Ez')] \quad , \tag{2-20}$$

$$C' = [(2\pi)^n \det \Sigma']^{-\frac{1}{2}} \quad . \tag{2-21}$$

Die Verteilungsfunktion $F_{z'}$ von z' an der Stelle $x = (x_1, \ldots, x_n) \varepsilon \mathbb{R}^n$ ist daher

$$F_{z'}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(z') \, dz' \quad . \tag{2-22}$$

Unser Ziel ist es nun, durch geeignete Wahl von A' zu erreichen, daß die Verteilungsfunktion von z' die leichter zu behandelnde Gestalt

$$F_{z'}(x) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(z_i')\, dz_i' \tag{2-23}$$

annimmt. Wir wollen also A' so bestimmen, daß die z_i' unabhängig sind. Dazu definieren wir sukzessive +

$$S_O := I_O \quad , \tag{2-24a}$$

$$B_i := S_{i-1} + D_i \quad , \tag{2-24b}$$

$$a_i := \frac{\mathrm{var}(I_i)}{\mathrm{var}(B_i) + \mathrm{var}(I_i)} \quad , \tag{2-24c}$$

$$S_i = a_i B_i + (1 - a_i) I_i \text{ für } 1 \leq i < n \quad . \tag{2-24d}$$

Außerdem setzen wir $a_n = 1$.

Weiterhin sei

$$A := (a_{ij})_{i,j = 1,\dots,n} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 1 & j = i \\ \prod_{h=j}^{i-1} a_h & j < i \end{cases} \tag{2-25}$$

Offensichtlich ist A vom Typ (2-17).

Wir setzen nun

$$z_i := S_{i-1} + D_i - I_i \quad , \tag{2-26}$$

dann gilt

+ Die Idee zu dieser Transformation geht auf den Ansatz von Stewart /2/ zurück

(2-27) Satz. Für $z := (z_1,\ldots,z_n)$, z_i definiert in (2-26),

gilt $z^t = Az^{Ot}$.

Beweis. Zu zeigen ist: $z_i = (Az^{Ot})_i \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$.
Wir zeigen dies durch Induktion nach i. Für i = 1 gilt

$$z_1 = I_O + D_1 - I_1 = z_1^O = (Az^{Ot})_1 \quad . \tag{2-28}$$

Angenommen für i > 1 gelte

$$z_h = (Az^{Ot})_h \qquad \forall\, h < i \quad .$$

Nach Def. von A ist $a_{ij} = a_{i-1} \cdot a_{i-1j} \quad \forall\, j < i$. Daher

$$\begin{aligned}(Az^{Ot})_i &= \sum_{j=1}^{i} a_{ij} z_j^O = z_i^O + a_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i-1j} z_j^O \\ &= z_i^O + a_{i-1} z_{i-1} \\ &= I_{i-1} + D_i - I_i + a_{i-1}(S_{i-2} + D_{i-1}) - a_{i-1} I_{i-1} \\ &= a_{i-1} B_{i-1} + (1 - a_{i-1}) I_{i-1} + D_i - I_i \\ &= S_{i-1} + D_i - I_i \quad . \end{aligned} \tag{2-29}$$

Also $z_i = (Az^{Ot})_i$.
Durch Induktionsschluß folgt die Behauptung. •

Wir können nun zeigen, daß A die einzige Matrix vom Typ (2-17) ist, die eine Verteilungsfunktion vom Typ (2-23) liefert.

(2-30) Satz. Sei A' vom Typ (2-17). Der Zf vekt. $z'^t = A'z^{Ot}$ besitzt eine Verteilungsfunktion vom Typ (2-23) genau dann, wenn A' = A.

Beweis "$\Leftarrow$". Sei $z^t := Az^{Ot}$. Es genügt, zu zeigen, daß $\Sigma^{-1} = [\mathrm{Cov}(z)]^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Das ist der Fall, wenn Σ diagonal ist; das bedeutet

$$\mathrm{cov}(z_\ell, z_m) = 0 \qquad \forall \ell, m = 1, \ldots, n \quad , \quad \ell \neq m \; . \tag{2-31}$$

O.B.d.A. sei $\ell > m$. Nach (2-26) ist

$$z_\ell = S_{\ell-1} + D_\ell - I_\ell \quad .$$

Nach Def. (2-24d) von $S_{\ell-1}$ kann man schreiben

$$S_{\ell-1} = L_{\ell-1} + C_{\ell m} \cdot S_m \quad , \tag{2-32}$$

wobei $C_{\ell m} \in \mathbb{R}$ und $L_{\ell-1}$ eine Linearkombination der Zf var. I_j, D_j, $j > m$ ist. Demnach ist $L_{\ell-1}$ unabhängig von $(S_{m-1} + D_m - I_m)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(z_\ell, z_m) &= \mathrm{cov}(S_{\ell-1} + D_\ell - I_\ell, S_{m-1} + D_m - I_m) \\ &= C_{\ell m} \cdot \mathrm{cov}(S_m, S_{m-1} + D_m - I_m) \\ &= C_{\ell m} \cdot \mathrm{cov}(a_m B_m + (1 - a_m) I_m, B_m - I_m) \\ &= C_{\ell m}[a_m \,\mathrm{var}\,(B_m) - (1 - a_m)\,\mathrm{var}\,(I_m)] = 0 \quad , \end{aligned} \tag{2-33}$$

nach Definition (2-24c) von a_m. Also ist das Gleichungssystem (2-31) erfüllt und ist die Richtung "$\Leftarrow$" der Behauptung gezeigt.

"$\Rightarrow$" Es genügt jetzt, zu zeigen:
Sind A_1, A_2 Matrizen vom Typ (2-17) und haben $z^{1t} := A_1 z^{Ot}$, $z^{2t} := A_2 z^{Ot}$ beide Verteilungsfunktionen vom Typ (2-23), dann ist $A_1 = A_2$.

Seien also A_1, A_2 Matrizen vom Typ (2-17), sodaß F_{z^1}, F_{z^2} vom Typ (2-23) sind. Dann gibt es Diagonalmatrizen Λ_1, Λ_2 mit positiven Hauptdiagonalelementen $\lambda_j^{(1)}$ bzw. $\lambda_j^{(2)}$, $j = 1,\dots,n$, sodaß gilt

$$[\mathrm{Cov}(z^i)]^{-1} = \Lambda_i \quad , \qquad i = 1,2 \quad . \tag{2-34}$$

Bezeichnet Σ^O die Kovarianzmatrix von z^O, so ist

$$[\mathrm{Cov}(z^i)] = [A_i \Sigma^O A_i^t]^{-1} = A_i^{t-1} \Sigma^{O-1} A_i^{-1} \quad \text{für } i = 1,2 \quad . \tag{2-35}$$

Sei $\tilde{\Lambda}_i$ die Diagonalmatrix mit den Hauptdiagonalelementen $\sqrt{\lambda_j^{(i)}}$, $j = 1,\dots,n$, $i = 1,2$. Dann gilt mit (2-34)

$$\begin{aligned} \Sigma^{O-1} &= A_i^t \Lambda_i A_i = (\tilde{\Lambda}_i \; A_i)^t (\tilde{\Lambda}_i A_i) \\ &= :B_i^t B_i \quad , \qquad i = 1,2 \quad . \end{aligned} \tag{2-36}$$

B_i ist untere Dreiecksmatrix mit den Hauptdiagonalelementen $b_{jj}^{(i)} = \sqrt{\lambda_j^{(i)}}$, $j = 1,\dots,n$, $i = 1,2$.

Wir betrachten nun die Permutationsmatrix P,

$$P: = \begin{pmatrix} O & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & O \end{pmatrix} \quad . \tag{2-37}$$

P ist eine Orthogonalmatrix. Mit

$$H_i = PB_iP \quad , \qquad i = 1,2 \tag{2-38}$$

ist offensichtlich

$$\Sigma^{O-1} = (PH_i^tP)(PH_iP) \quad , \qquad i = 1,2 \quad , \tag{2-39}$$

und daher

$$P\Sigma^{O-1}P = P[(PH_i^tP)(PH_iP)]P = H_i^tH_i \quad , \qquad i = 1,2 \quad . \qquad (2\text{-}40)$$

Wie aus der Matrizenrechnung bekannt, ist H_i die an der Nebendiagonale gespiegelte Matrix B_i^t (siehe z.B. Ref. [4], S. 29). D.h., H_i ist eine obere Dreiecksmatrix mit den Hauptdiagonalelementen

$$h_{jj}^{(i)} = \sqrt{\lambda_{n+1-j}^{(i)}} \quad , \qquad j = 1,\ldots,n \quad . \qquad (2\text{-}41)$$

$P\Sigma^{O-1}P$ ist eine positiv definite Matrix; denn Σ^O als Kovarianzmatrix ist positiv definit, da die z_i^O nicht nach Wahrscheinlichkeit linear abhängig sind (vergl. Ref. [5], S. 264).

Wie weiter aus der Matrizentheorie bekannt, erfüllen die $h_{jj}^{(i)}$ die folgenden Gleichungen (siehe z.B. Ref. [6], S. 33 in Verbindung mit Ref. [4], S. 229):

$$h_{jj}^{(i)}h_{jj}^{(i)} = D_j > O \qquad ,j = 1,..,n; \; i = 1,2 \qquad (2\text{-}42)$$

Daher ist $\lambda_{n+1-j}^{(1)} = D_j = \lambda_{n+1-j}^{(2)} \quad , \qquad j = 1,\ldots,n \quad , \qquad (2\text{-}43)$

d.h. es gilt $\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad , \qquad (2\text{-}44)$

die Hauptdiagonalen von H_1 und H_2 stimmen demnach überein.

Nun ist die Darstellung einer positiv definiten Matrix als Produkt $L \cdot U$, wobei L untere, U obere Dreiecksmatrix ist, durch die Diagonalelemente von L oder U eindeutig bestimmt (siehe z.B. Ref. [6], S. 35 mit Ref. [4], S. 229). Aus (2-40), (2-41), (2-44) folgt daher

$$H_1 = H_2 \quad , \qquad (2\text{-}45)$$

daher

$$B_1 = B_2 \tag{2-46}$$

und wegen $\tilde{\Lambda}_1 = \tilde{\Lambda}_2$ nach (2-44) hat man $A_1 = A_2$.
Damit ist die Richtung "$\Rightarrow$" der Behauptung gezeigt. •

Die Matrix A besitzt noch zwei weitere bemerkenswerte Eigenschaften. Eine davon ist, daß unter allen Matrizen A' vom Typ (2-17) gerade die Matrix A die Varianz des MUF minimiert. Dieser Sachverhalt wurde bereits in den Ref. [2], [7], gezeigt, allerdings wurde dort die Minimierung nur bezüglich einer Untermenge der Menge der Matrizen vom Typ (2-17) betrachtet.

<u>(2-47) Satz</u>. Sei A' vom Typ (2-17). Dann ist mit $z^t := Az^{Ot}$, $z'^t := A'z^{Ot}$:

$$\mathrm{var}(z_i) \leqq \mathrm{var}(z_i') \qquad \forall\, i \tag{2-48}$$

und es gilt " = " genau dann, wenn gilt

$$a_{ij} = a'_{ij} \qquad \forall\, j = 1,\ldots,i-1 \quad .$$

<u>Beweis</u>. (durch Induktion) Wegen $z_1 = z_1^O = z_1'$ ist nur der Fall $i \geqq 2$ interessant. Es genügt offensichtlich, zu zeigen: für jedes $i \geqq 2$ gilt für beliebige $C_{ij} \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,i-1$

$$\mathrm{var}\left(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, z_j^O\right) \leqq \mathrm{var}\left(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}\, z_j^O\right) \tag{2-49}$$

mit " = " genau dann, wenn $a_{ij} = C_{ij}$ für $j = 1,\ldots,i-1$.

Wir definieren nun

$$f_i(a) := \mathrm{var}(a(S_{i-1} + D_i) + (1-a)I_i) \quad , \quad 1 \leqq i < n \quad .$$

Man sieht sofort, daß

$$\frac{d^2 f_i}{da^2} > 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \; ,$$

$$\frac{df_i}{da}(a) = 2[a\,\mathrm{var}(S_{i-1} + D_i) - (1-a)\,\mathrm{var}(I_i)] = 0$$

genau dann gilt, wenn $a = a_i$. Daher gilt

$$f_i(a_i) \leqq f_i(a) \tag{2-50}$$

mit " = " genau dann, wenn $a = a_i$.

Sei $i = 2$. Offensichtlich ist

$$\mathrm{var}(I_1 + C_{21} z_1^0) = f_1(C_{21}) \quad ,$$

daher gilt mit (2-50) und wegen $a_{ii-1} = a_{i-1}$

$$\mathrm{var}(I_1 + a_{21} z_1^0) = f_1(a_{21}) \leqq \mathrm{var}(I_1 + C_{21} z_1^0)$$

mit " = " genau dann, wenn $C_{21} = a_{21}$.

Sei $i > 2$. Angenommen, (2-49) ist richtig für jedes $j < i$. Sei C_{ij}, $j = 1,\dots,i-1$ beliebig aus $\mathbb{R}$.

(1.) Sei $C_{ii-1} \neq 0$. Man hat mit $C'_{ij} := \frac{C_{ij}}{C_{ii-1}}$:

$$\mathrm{var}\left(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}\, z_j^0\right) = \mathrm{var}([1 - C_{ii-1}] I_{i-1})$$
$$+ \mathrm{var}\left(C_{ii-1}\left[D_{i-1} + I_{i-2} + \sum_{j=1}^{i-2} C'_{ij}\, z_j^0\right]\right) \quad .$$

Nach Induktionsvorraussetzung und unter Beachtung, daß wegen Satz (2-27) gilt

$$S_{m-1} = I_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj}\, z_j^0 \quad , \tag{2-51}$$

hat man dann

$$\mathrm{var}\left(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}\, z_j^O\right) \geqq \mathrm{var}([1 - C_{ii-1}]\, I_{i-1})$$

$$+ \mathrm{var}\left(C_{ii-1}\left[D_{i-1} + I_{i-2} + \sum_{j=1}^{i-2} a_{i-1j}\, z_j^O\right]\right)$$

$$= \mathrm{var}([1 - C_{ii-1}]\, I_{i-1}) + \mathrm{var}(C_{ii-1}[D_{i-1} + S_{i-2}])$$

$$= f_{i-1}(C_{ii-1}) \tag{2-52}$$

wobei " = " genau dann gilt, wenn

$$C'_{ij} = a_{i-1j} \qquad \forall\, j = 1,\dots,i-2 \quad .$$

Nun ist nach (2-50)

$$f_{i-1}(C_{ii-1}) \geqq f_{i-1}(a_{i-1}) \quad , \tag{2-53}$$

wobei " = " genau dann gilt, wenn $C_{ii-1} = a_{i-1}$.

(2-52), (2-53) ergeben

$$\mathrm{var}\left(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, z_j^O\right) = \mathrm{var}(S_{i-1}) = f_{i-1}(a_{i-1}) \leqq$$

$$\leqq \mathrm{var}\left(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} z_j^O\right)$$

mit "=" genau dann, wenn

$$\frac{C_{ij}}{C_{ii-1}} = a_{i-1\,j} , \qquad \forall\, j = 1,\dots,i-2 \tag{2-54}$$

$$C_{ii-1} = a_{i-1} \quad . \tag{2-55}$$

(2-54), (2-55) sind gemäß (2-25) äquivalent zu

$$C_{ij} = a_{ij} \quad \forall j = 1,\ldots,i-1 \quad .$$

Für $C_{ii-1} \neq 0$ ist (2-49) daher nachgewiesen.

(2.) Sei $C_{ii-1} = 0$. Dann ist

$$\mathrm{var}(I_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}z_j^0) = \mathrm{var}(I_{i-1}) + \mathrm{var}(\sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}z_j^0) \geqq$$

$$\geqq \mathrm{var}(I_{i-1}) \geqq \mathrm{var}(I_{i-1})\cdot\mathrm{var}(B_{i-1})\left[\mathrm{var}(I_{i-1}) + \mathrm{var}(B_{i-1})\right]^{-1} =$$

$$= \mathrm{var}(S_{i-1}) \quad . \tag{2-56}$$

Steht überall "=",so folgt

$$C_{ij} = 0 \quad \forall j = 1,..,i-1 \; , \tag{2-57}$$

denn die z_j^0 sind nicht nach Wahrscheinlichkeit linear abhängig; weiterhin folgt

$$\mathrm{var}(I_{i-1}) = 0 \; .$$

Das bedeutet

$$a_{ij} = a_{i-1}a_{i-1j} = 0 \quad \forall j = 1,..,i-1.$$

Also gilt (2-49) auch im Fall $C_{ii-1} = 0$.

Durch Induktionsschluß folgt die Behauptung. ●

Nach dieser Vorbereitung formulieren wir nun den Hypothesentest:

Nullhypothese H_0: keine Entwendung von Material im Zeitintervall J_i, $i = 1,\ldots,n$.

Alternativhypothese H_1: Entwendung der Materialmenge M_i im Zeitintervall J_i, $i = 1,\ldots,n$.

Mit Satz (2-27) hat man daher

$$E(MUF_i \mid H_0) = 0 \quad , \tag{2-58}$$

$$E(MUF_i \mid H_1) = M_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} M_j \quad \text{für } i = 1,\ldots,n \quad . \tag{2-59}$$

Die Signifikanzschranken s_i für das i-te Teilintervall sind mit der Gesamtwahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art (auch Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit genannt) verknüpft durch

$$1-\alpha = \text{prob}\{MUF_1 \leqq s_1 \wedge,\ldots,\wedge MUF_n \leqq s_n \mid H_0\} \quad . \tag{2-60}$$

Die Entdeckungswahrscheinlichkeit $P := 1-\beta$ ist gegeben durch

$$P = 1-\text{prob}\{MUF_1 \leqq s_1 \wedge,\ldots,\wedge MUF_n \leqq s_n \mid H_1\} \quad . \tag{2-61}$$

Nach Satz (2-30) kann man (2-60), (2-61) in der Form

$$1-\alpha = \prod_{i=1}^{n} \text{prob}\{MUF_i \leqq s_i \mid H_0\} \quad , \tag{2-62}$$

$$P = 1-\prod_{i=1}^{n} \text{prob}\{MUF_i \leqq s_i \mid H_1\} \tag{2-63}$$

schreiben.
Werden für die einzelnen Zeitintervalle J_i die Fehlalarmwahrscheinlichkeiten α_i vorgegeben, so folgt analog zu 2.1

$$s_i = \sigma_i U(1 - \alpha_i) \text{ mit } \sigma_i^2 := \mathrm{var}(MUF_i) \quad . \tag{2-64),(2-65}$$

Ein Vorgehen wie in Abschnitt 2.1 liefert für (2-62) und (2-63):

$$1 - \alpha = \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) \tag{2-66}$$

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n} \phi\left(U(1 - \alpha_i) - \frac{M_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} M_j}{\sigma_i}\right) \quad . \tag{2-67}$$

Wir nehmen für das folgende an, daß die Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit α und die im Fall einer Entwendung zu entnehmende Gesamtmenge M fest gegeben sind, wobei

$$0 < \alpha < 1 \quad , \tag{2-68}$$

$$M := \sum_{i=1}^{n} M_i > 0 \quad . \tag{2-69}$$

Wir fassen nun das Inventurproblem als Zweipersonen-Nullsummenspiel zwischen einem Inspektor und einem Betreiber auf. Der Inspektor wählt seine α_i gemäß (2-66), der Betreiber, falls er entwenden will, seine M_i gemäß (2-69). Die Menge der Inspektorstrategien S_I bzw. die Menge der Entwenderstrategien im Fall einer Entwendung S_E ist dann gegeben durch

$$S_I := \left\{ s_I := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) = 1 - \alpha, \; 0 \leqq \alpha_i \leqq 1 \quad \forall i \right\} \tag{2-70}$$

$$S_E := \left\{ s_E := (M_1, \ldots, M_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} M_i = M \right\} \quad . \tag{2-71}$$

Der Gewinn des Betreibers sei wie folgt definiert:

0	im Falle keiner Entwendung und keines Fehlalarms
0	im Falle keiner Entwendung und eines Fehlalarms*
$-c < 0$	im Falle einer entdeckten Entwendung
$d > 0$	im Falle einer nicht entdeckten Entwendung .

Der Gewinn des Inspektors ist entsprechend der Nullsummen-Annahme der negative Gewinn des Betreibers. Dies läßt sich mit der Annahme rechtfertigen, daß sich der Inspektor so verhält, als ob der Gewinn des Betreibers sein Verlust sei (siehe z.B. Ref. [8]).

Der Gewinn-Erwartungswert des Betreibers ist

$$G = \begin{cases} 0 & \text{im Falle keiner Entwendung} \\ -c \cdot (1-\beta) + d \cdot \beta & \text{im Falle einer Entwendung} \end{cases} ,$$

wobei β die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, d.h. die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit ist:

$$\beta := \prod_{i=1}^{n} \phi\left(U(1-\alpha_i) - \frac{M_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} M_j}{\sigma_i}\right) . \tag{2-72}$$

Im folgenden betrachten wir nur das "illegale Spiel" $(S_I, S_E, (c+d)\cdot\beta - c)$, da wir annehmen, daß es das Ziel des Inspektors ist, diejenige Strategie auszuwählen, die den Gewinn-Erwartungswert des Betreibers im Falle einer Entwendung minimiert. Da das Spiel $(S_I, S_E, (c+d)\cdot\beta - c)$ dem Spiel (S_I, S_E, β) strategisch äquivalent ist, beschränken wir unsere Betrachtungen auf das Spiel (S_I, S_E, β).

---

*Es wird angenommen, daß im Falle eines "Alarms" durch eine weitere Untersuchung ('second action level') geklärt wird, ob der Alarm zu Recht gegeben wurde oder nicht. Bezüglich weiterer Details zu diesem Problem siehe Ref. [9].

Im Fall einer Entwendung ist der garantierte Höchstverlusterwartungswert für den Inspektor dann offensichtlich

$$\overline{\beta} := \inf_{S_I} \sup_{S_E} \beta \quad ; \tag{2-73}$$

der garantierte Mindestgewinnerwartungswert für den Betreiber ist

$$\underline{\beta} := \sup_{S_E} \inf_{S_I} \beta \quad . \tag{2-74}$$

Im anschließenden Kapitel zeigen wir, daß $\overline{\beta}$ und $\underline{\beta}$ übereinstimmen und untersuchen Existenz und Eigenschaften optimaler Strategien.

Wir wollen nun noch auf die auf Seite 16 erwähnte zweite bemerkenswerte Eigenschaft der Matrix A eingehen. Wir schildern sie anschaulich. Die exakte Fassung, zu der uns jetzt noch die notwendigen mathematischen Hilfsmittel fehlen, geben wir im Anhang.

Wir nehmen an, dem Inspektor sei bekannt, daß der Betreiber keine Möglichkeit hat, in den Zeitintervallen $J_1,\dots,J_h$, $1 \leq h < n$ Material zu entwenden. Es scheint vernünftig, dann zu verlangen, daß der Inspektor in $J_1,\dots,J_h$ nicht kontrolliert; d.h. daß er die Signifikanzschranken $s_1 = \dots = s_h = \infty$ wählt. Dies bedeutet, daß diejenige Inspektorstrategie s_I, die β minimiert, die Gestalt $(0,\dots,0, \alpha_{h+1},\dots,\alpha_n)$ haben soll.

Für unser Modell, das auf der Matrix A basiert, ist dies auch der Fall.

Für Modelle, die auf einer Matrix A' vom Typ (2-17), $A' \neq A$, beruhen, gilt das nicht allgemein. Wir zeigen im Anhang, daß für $n = 2$ bei geeignetem M für die Komponente α_1 der optimalen Inspektorstrategie gilt :

$$\alpha_1 > 0$$

für jedes A' mit der Eigenschaft

$$\operatorname{cov}\left[(A'z^{Ot})_1, (A'z^{Ot})_2\right] < 0 \ .$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit fassen wir die $\sigma^2_{I_i}$, $\sigma^2_{D_j}$ nicht mehr als Varianzen von Zufallsvariablen auf, sondern als Parameter aus $\mathbb{R}$.

Wir fordern für sie nicht mehr

$$\sigma^2_{I_i} \geqq 0 \;, \quad \sigma^2_{D_j} > 0 \quad \forall\, i,j \;,$$

sondern lediglich, daß für die mit ihnen gebildeten σ^2_i , a_i gilt

$$\sigma^2_i > 0 \quad \forall\, i,$$

$$1-a_i > 0 \quad \forall\, i \;.$$

Dies bietet den Vorteil, daß bei den in Kap.4 folgenden Differenzierbarkeitsbetrachtungen offene Parametermengen zur Verfügung stehen.

3. Sattelpunkte der Auszahlungsfunktion

3.1 Problemstellung

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, wollen wir zeigen, daß für die in (2-73), (2-74) definierten Größen $\underline{\beta}$ und $\overline{\beta}$ gilt:

$$\underline{\beta} = \overline{\beta} \quad . \tag{3-1}$$

Wir benötigen dazu den Begriff des Sattelpunktes.

(3-2). Definition: Sei H eine reelle Funktion, definiert auf der nicht leeren Menge $C \times D$. Der Punkt $(c',d') \varepsilon C \times D$ heißt Sattelpunkt von H auf $C \times D$ genau dann, wenn für jedes $c \varepsilon C$ und jedes $d \varepsilon D$ gilt

$$H(c',d) \leqq H(c',d') \leqq H(c,d') \quad . \tag{3-3}$$

Die Sattelpunkte einer Funktion besitzen folgende Eigenschaften (vergl. [10]):

(3-4) Satz: Sei $H : C \times D \to \mathbb{R}$.

a) Ist (c',d') Sattelpunkt von H auf $C \times D$, dann gilt

$$\min_{c \varepsilon C} \max_{d \varepsilon D} H(c,d) = H(c',d') = \max_{d \varepsilon D} \min_{c \varepsilon C} H(c,d) \quad .$$

b) Sind (c',d'), (c'',d'') Sattelpunkte von H auf $C \times D$, dann sind auch (c',d''), (c'',d') Sattelpunkte von H auf $C \times D$.

Wenn wir zeigen, daß β auf $S_I \times S_E$ einen Sattelpunkt besitzt, so ist nach Satz (3-4) die Gleichung (3-1) offensichtlich richtig.

Die Funktion β hat neben der etwas komplizierten Gestalt noch den weiteren Nachteil, daß ihr Definitionsbereich nicht konvex ist, weil S_I nicht konvex ist. Wir umgehen diese Schwierigkeit, indem wir statt β auf $S_I \times S_E$ eine einfachere Funktion F auf einem konvexen Definitionsbereich betrachten.

(3-5) Definition: Es sei

$$X := \left\{ x := (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \ln(1-\alpha) \,, \right.$$
$$\left. 0 \geqq x_i \quad \forall\, i = 1,\dots,n \right\} . \tag{3-6}$$

$$Y := \left\{ y := (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n \,,\ \sum_{i=1}^{n} (1-a_i) y_i = M \right\} . \tag{3-7}$$

Es sei $F: X \times Y \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \ln \phi\left(U\left(e^{x_i}\right) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right) . \tag{3-8}$$

Zwischen den Sattelpunkten von β auf $S_I \times S_E$ und den Sattelpunkten von F auf $X \times Y$ besteht die folgende Beziehung.

(3-9) Satz: Ist (x^*,y^*) Sattelpunkt von F auf $X \times Y$, dann ist

$$(s_I^*, s_E^*) := \left(\left(1 - e^{x_1^*},\dots,1 - e^{x_n^*}\right), A^{-1} y^{*t}\right)$$

ein Sattelpunkt von β auf $S_I \times S_E$.

Ist (s_I', s_E') ein Sattelpunkt von β auf $S_I \times S_E$, dann ist

$$(x',y') := \left((\ln(1-\alpha_1'),\dots,\ln(1-\alpha_n')), A \cdot s_E'^{\,t}\right)$$

ein Sattelpunkt von F auf $X \times Y$.

Beweis:

(1) Die Abbildung $B_1: S_I \to X$,

$$B_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n) := (\ln(1-\alpha_1),\dots,\ln(1-\alpha_n))$$

ist offensichtlich bijektiv.

(2) Für $w \in \mathbb{R}^n$ sei $B_2(w_1,\ldots,w_n) := A(w_1,\ldots,w_n)^t$.

Wir wollen zeigen, daß B_2 eine Bijektion von S_E auf Y ist.

Da A regulär ist, ist B_2 umkehrbar.

Weiter ist für $(w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{R}^n$ gemäß (2-25)

$$(A(w_1,\ldots,w_n)^t)_1 = w_1 \quad ,$$

$$(A(w_1,\ldots,w_n)^t)_i = w_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} w_j =$$

$$= w_i + a_{i-1}(A(w_1,\ldots,w_n)^t)_{i-1} \quad .$$

Daher ist

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)(A(w_1,\ldots,w_n)^t)_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \quad . \qquad (3\text{-}10)$$

Also $\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)(A\, s_E^t)_i = \sum_{i=1}^{n} M_i = M$,

d.h. B_2 bildet S_E nach Y ab.

B_2 ist auch surjektiv, denn angenommen für $y \in Y$ wäre mit $w_i' := (A^{-1}y^t)_i$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i' \neq M \quad ,$$

dann hätte man mit (3-10)

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)(A(w_1',\ldots,w_n')^t)_i = \sum_{i=1}^{n} w_i' \neq M$$

und damit einen Widerspruch.

Also ist B_2 eine Bijektion von S_E auf Y.

Bezeichnen B_1^{-1}, B_2^{-1} die Umkehrabbildungen von B_1, B_2, so hat man nach Definition von B_1, B_2 mit 1) und 2)

$$\beta(s_I, s_E) = \exp[F(B_1(s_I), B_2(s_E))] \quad \text{auf } S_I \times S_E \quad ,$$

$$\exp[F(x,y)] = \beta(B_1^{-1}(x), B_2^{-1}(y)) \quad \text{auf } X \times Y \quad .$$

Da der Logarithmus eine streng monoton wachsende Funktion ist, folgt die Behauptung. •

Aus dem vorangegangenen Satz sieht man unmittelbar, daß hinsichtlich der Sattelpunkte F auf $X \times Y$ anstatt β auf $S_I \times S_E$ betrachtet werden kann.
Wir beschränken unsere Untersuchung im folgenden daher auf $F: X \times Y \to \mathbb{R}$.
Dazu benötigen wir den anschließenden Hilfssatz über die Ableitung der Funktion $\ell n\,\phi$.

(3-11) Hilfssatz: Sei $Q(x) := \dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}$. Dann gilt

a) $Q(x) > -x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0$,

b) $-1 < Q'(x) = -(x + Q(x))Q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $0 < Q''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $R(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

R, bekannt unter dem Namen "Mills Ratio", hat die folgenden Eigenschaften (vergl. [11],[12]):

a) $R(x) < \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$,

b) $0 < \left(\frac{1}{R(x)}\right)' < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

c) $0 < \left(\frac{1}{R(x)}\right)'' \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Wegen $Q(x) = \frac{1}{R(-x)}$ folgen mit der Definition von Q die Behauptungen. •

3.2 Konvexitätseigenschaften

Für den Nachweis der Existenz eines Sattelpunktes von F auf $X \times Y$ benötigen wir die Tatsache, daß F auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^{2n}$ konvex-konkav ist; mit

$$X_t := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_i \leqq 0 \quad \forall i\} \tag{3-12}$$

$$Y_t := \{(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n,\ y_i \geqq 0 \quad \forall i\} \tag{3-13}$$

gilt nämlich:

für festes $y_0 \in Y_t$ ist $F(\cdot,y_0)$ auf X_t konvex,

für festes $x_0 \in X_t$ ist $F(x_0,\cdot)$ auf Y_t konkav.

<u>(3-14) Satz:</u> Sei $\overset{0}{Y}_t$ der offene Kern von Y_t. Es gilt

a) für $y_0 \in Y_t$ ist $F(\cdot,y_0)$ konvex auf X_t,

b) für $y_0 \in \overset{0}{Y}_t$ ist $F(\cdot,y_0)$ streng konvex auf X_t.

<u>Beweis:</u> Sei $H(x,y_0) := \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j} = 1,\dots,n$.

Um die Behauptung des Satzes zu zeigen, genügt es, nachzuweisen, daß $H(x,y_0)$ auf X_t positiv semidefinit ist bzw. positiv definit ist, falls $y_0 \in \overset{0}{Y}_t$ (vergl. [10]). H ist eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \phi \left(U(e^{x_i}) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i} \right) \quad .$$

Wir müssen also zeigen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \phi \left(U(e^{x_i}) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i} \right) \geqq 0 \qquad \forall x_i < 0 \tag{3-15}$$

mit "$\gtreqless$", falls $y_{0i} > 0$.

Sei $h(z) := \ln \phi\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)$, $z < 0$.

Es ist

$$h'(z) = \sqrt{2\pi}\; e^{z + \frac{1}{2}U^2(e^z)} Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right) = \frac{Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^z))} . \tag{3-16}$$

Daher

$$h''(z) = Q^{-2}(U(e^z))$$

$$\cdot \left[\frac{Q'\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right) Q(U(e^z))}{Q(U(e^z))} - \frac{Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right) Q'(U(e^z))}{Q(U(e^z))}\right] =$$

$$= Q^{-2}(U(e^z)) Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)$$

$$\cdot \left[\frac{Q'\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)}{Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)} - \frac{Q'(U(e^z))}{Q(U(e^z))}\right] =$$

$$= Q^{-2}(U(e^z)) Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)$$

$$\cdot \left[-\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i} + Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)\right) + U(e^z) + Q(U(e^z))\right] , \tag{3-17}$$

wobei die letzte Gleichung aus Hilfssatz (3-11)b) folgt.

Nun ist $(x + Q(x))' = 1 + Q'(x) > 0$

nach Hilfssatz (3-11)b). Daher

$$-\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i} + Q\left(U(e^z) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i}\right)\right) \gtreqless -\left(U(e^z) + Q(U(e^z))\right)$$

mit "$\gneqq$" falls $y_{0i} > 0$.

Also ist $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ell n\, \phi \left(U(e^{x_i}) - \frac{y_{0i}}{\sigma_i} \right) \geqq 0 \qquad \forall x_i < 0$

und es gilt "$\gneqq$" genau dann, wenn $y_{0i} > 0$.

Damit ist (3-15) gezeigt und der Satz bewiesen. •

(3-18) Satz: Sei $\overset{0}{X}_t$ der offene Kern von X_t. Es gilt

a) für $x_0 \varepsilon X_t$ ist $F(x_0,\cdot)$ konkav auf Y_t,

b) für $x_0 \varepsilon \overset{0}{X}_t$ ist $F(x_0,\cdot)$ streng konkav auf Y_t.

Beweis: Sei $G(x_0,y) := -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\right)_{i,j = 1,\dots,n}$.

Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt wird, daß $G(x_0,y)$ auf Y_t positiv semidefinit ist bzw. positiv definit ist, falls $x_0 \varepsilon \overset{0}{X}_t$.

G ist eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} - \ell n\, \phi \left(U(e^{x_{0i}}) - \frac{y_i}{\sigma_i} \right) = \frac{-1}{\sigma_i^2}\, Q'\left(U(e^{x_{0i}}) - \frac{y_i}{\sigma_i} \right) .$$

$-Q'\left(U(e^{x_{0i}}) - \frac{y_i}{\sigma_i} \right)$ ist nach Hilfssatz (3-11)b) für $x_{0i} < 0$ echt positiv.

Für $x_{0i} = 0$ verschwindet $\ell n\, \phi\left(U(e^{x_{0i}}) - \frac{y_i}{\sigma_i} \right)$ für alle y_i.

Damit ist der Satz bewiesen. •

3.3 Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Sattelpunktes

Aus Satz (3-14) und (3-18) kann man sofort folgern, daß

F einen Sattelpunkt auf gewissen Teilmengen von $X \times Y$ besitzt. Ist $X' \subset X$ konvex und kompakt, $Y' \subset Y \cap Y_t$ konvex und kompakt, so besitzt F auf $X' \times Y'$ nach dem Satz von Sion-Kakutani als konvex-konkave Funktion einen Sattelpunkt (vergl. [10]).
Wir wollen die Entwenderstrategien jedoch nicht von vornherein durch die Forderung

$$(As_E^t)_i \geqq 0 \qquad \forall\, i = 1,\dots,n \quad , \tag{3-19}$$

einschränken.

Unter Verwendung eines Satzes über Extrema konvexer Funktionen werden wir im folgenden ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Sattelpunktes von F auf $X \times Y$ angeben.

<u>(3-20) Satz</u> (vergl. [13]): Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ offene und konvexe Menge. Seien weiter

$$G\colon K \to \mathbb{R} \quad , \qquad g\colon K \to \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen, G konvex, g linear auf K.
Gibt es $k_0 \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqq 0$, sodaß gilt

$$\operatorname{grad} G(k_0) + \lambda \operatorname{grad} g(k_0) = 0 \quad , \tag{3-21}$$

$$g(k_0) = 0 \quad , \tag{3-22}$$

dann nimmt G auf $\{k \in K, g(k) = 0\}$ das Minimum bei k_0 an.

Es gilt nun der folgende

<u>(3-23) Satz:</u> Sei $(x^*, y^*) \in \overset{0}{X}_t \times \overset{0}{Y}_t$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$Q(U(e^{x_i})) - \frac{\sigma_i(1-a_i)}{\sigma_{i-1}(1-a_{i-1})}\, Q(U(e^{x_{i-1}})) = 0 \ , \quad i = 2,\dots,n \tag{3-24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \ln(1-\alpha) \quad , \tag{3-25}$$

$$\frac{Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^{x_i}))} - \frac{Q\left(U(e^{x_{i-1}}) - \frac{y_{i-1}}{\sigma_{i-1}}\right)}{Q(U(e^{x_{i-1}}))} = 0 \quad , \quad i = 2,\ldots,n \tag{3-26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (1-a_j)\, y_j = M \quad . \tag{3-27}$$

Dann ist (x^*,y^*) ein Sattelpunkt von F auf $X \times Y$.

Beweis: Ist (x^*,y^*) eine Lösung des Systems (3-24),...,(3-27), dann ist (x^*,y^*) auch eine Lösung des Systems

$$Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right) - \frac{\sigma_i(1-a_i)}{\sigma_{i-1}(1-a_{i-1})}\, Q\left(U(e^{x_{i-1}}) - \frac{y_{i-1}}{\sigma_{i-1}}\right) = 0 \quad ,$$

$$i = 2,\ldots,n \,. \tag{3-28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \ln(1-\alpha) \tag{3-29}$$

$$\frac{Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^{x_i}))} - \frac{Q\left(U(e^{x_{i-1}}) - \frac{y_{i-1}}{\sigma_{i-1}}\right)}{Q(U(e^{x_{i-1}}))} = 0 \quad . \tag{3-30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (1-a_j)\, y_j = M \quad . \tag{3-31}$$

Das bedeutet, (x^*,y^*) ist auch eine Lösung des Systems

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_1(1-a_1)}\, Q\left(U(e^{x_1}) - \frac{y_1}{\sigma_1}\right) \quad , \tag{3-32}$$

$$\frac{1}{\sigma_i}\, Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial y_i}\left(M - \sum_{j=1}^{n}(1-a_j)y_j\right) = 0 \quad ,$$

$$i = 1,\ldots,n \quad . \qquad (3\text{-}33)$$

$$M - \sum_{j=1}^{n}(1 - a_j)y_j = 0 \quad . \qquad (3\text{-}34)$$

$$\rho = \frac{Q\left(U(e^{x_1}) - \frac{y_1}{\sigma_1}\right)}{Q(U(e^{x_1}))} \quad , \qquad (3\text{-}35)$$

$$\frac{Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^{x_i}))} + \rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ell n(1-\alpha) - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = 0 \quad ,$$

$$i = 1,\ldots,n \quad . \qquad (3\text{-}36)$$

$$\ell n(1-\alpha) - \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \quad . \qquad (3\text{-}37)$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(-F) = \frac{1}{\sigma_i}\, Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right) \quad , \qquad (3\text{-}38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F = \frac{Q\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^{x_i}))} \quad \text{für } i = 1,\ldots,n \quad . \qquad (3\text{-}39)$$

Das bedeutet

$$x = x^*, \qquad \rho = \frac{Q\left(U(e^{x_1^*}) - \frac{y_1^*}{\sigma_1}\right)}{Q(U(e^{x_1^*}))}$$

ist eine Lösung des Systems

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F\ (x,y^*)\ + \rho \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ell n(1-\alpha) - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = 0,\ i = 1,\ldots,n\ ,$$

(3-40)

$$\ell n(1-\alpha)\ -\ \sum_{j=1}^{n} x_j\ = 0 \qquad (3\text{-}41)$$

$$\rho \geqq 0\ ; \qquad (3\text{-}42)$$

und

$$y = y^*\ , \qquad \lambda = \frac{1}{\sigma_1(1-a_1)} Q\left(U(e^{x_1^*}) - \frac{y_1^*}{\sigma_1}\right)$$

ist eine Lösung des Systems

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(-F\ (x^*,y)) + \lambda\frac{\partial}{\partial y_i}\left(M - \sum_{j=1}^{n} (1-a_j)y_j\right) = 0,\ i = 1,\ldots,n$$

(3-43)

$$M - \sum_{j=1}^{n} (1-a_j)y_j\ = 0 \qquad (3\text{-}44)$$

$$\lambda \geqq 0\ . \qquad (3\text{-}45)$$

Setzt man

$$G(x) = F(x,y^*)\ , \qquad g(x) = \ell n(1-\alpha) - \sum_{j=1}^{n} x_j\ ,$$

so folgt mit Satz (3-14) aus Satz (3-20) daher

$$F(x^*,y^*) \leqq F(x,y^*) \qquad \forall\, x \in \overset{0}{X}_t \cap X$$

und aus Stetigkeitsgründen hat man

$$F(x^*,y^*) \leqq F(x,y^*) \qquad \forall\, x \in X \quad . \tag{3-46}$$

Setzt man

$$G(y) = -F(x^*,y) \quad , \qquad g(y) = M - \sum_{j=1}^{n} (1 - a_j)y_j \quad ,$$

so folgt mit Satz (3-18) aus Satz (3-20)

$$-F(x^*,y^*) \leqq -F(x^*,y) \qquad \forall\, y \in \overset{0}{Y}_t \cap Y$$

und aus Stetigkeitsgründen hat man

$$F(x^*,y^*) \geqq F(x^*,y) \qquad \forall\, y \in Y \quad . \tag{3-47}$$

(3-46), (3-47) ergeben zusammen, daß (x^*,y^*) ein Sattelpunkt von F auf $X \times Y$ ist. •

3.4 Existenz eines Sattelpunktes

Wir zeigen die Existenz eines Sattelpunktes von F auf $X \times Y$, indem wir nachweisen, daß das Gleichungssystem (3-24),..., (3-27) auf $\overset{0}{X}_t \times \overset{0}{Y}_t$ eine Lösung hat. Dazu verwenden wir den folgenden Hilfssatz.

(3-48) Hilfssatz: Seien $h_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$ stetige, streng monoton wachsende Funktionen mit der Eigenschaft

$$\lim_{x\to\infty} h_i(x) = \infty \qquad \forall\, i = 1,\dots,n \quad . \tag{3-49}$$

Weiterhin sei $(x_1,\dots,x_n) = (0,\dots,0)$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$h_i(x_i) - h_{i-1}(x_{i-1}) = 0 \quad , \qquad i = 2,\dots,n \quad . \tag{3-50}$$

Für $S_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, $C > 0$ gibt es dann eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_1',\dots,x_n')$ des Gleichungssystems

$$h_i(x_i) - h_{i-1}(x_{i-1}) = 0 \quad , \qquad i = 2,\dots,n \quad , \tag{3-51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_j\, x_j = C \quad , \tag{3-52}$$

und es ist $x_i' > 0 \quad \forall\, i = 1,\dots,n$.

Beweis: Mit h_i^{-1} bezeichnen wir die Umkehrfunktion von h_i; die Funktion $h_i \circ h_{i-1}$ erklären wir durch

$$(h_i \circ h_{i-1})(x) := h(h_{i-1}(x)) \quad .$$

Sei $g_i := h_i^{-1} \circ h_{i-1} \quad , \qquad i = 2,\dots,n$.

Aus den Voraussetzungen über die h_i folgt, daß g_i eine auf $[0,\infty)$ definierte stetige, streng monoton wachsende Funktion ist mit den Eigenschaften

$$\lim_{x\to\infty} g_i(x) = \infty \quad \forall\, i = 2,\dots,n \tag{3-53}$$

$$g_i(0) = 0 \quad \forall\, i = 2,\dots,n \; . \tag{3-54}$$

Weiterhin ist $(x_1',\dots,x_n')$ genau dann eine Lösung des Systems (3-51), (3-52), wenn $(x_1',\dots,x_n')$ eine Lösung des Systems

$$g_i(x_{i-1}) = x_i \quad , \qquad i = 2,\dots,n \tag{3-55}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_j\, x_j = C \tag{3-56}$$

ist.

Sei

$$f_i := g_i \circ \ldots \circ g_2 \quad , \qquad i = 2,\ldots,n \quad .$$

Die f_i sind auf $[0,\infty)$ definierte stetige, streng monoton wachsende Funktionen. Wegen (3-53), (3-54) ist

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x) = \infty \quad , \quad f_i(0) = 0 \quad , \quad i = 2,\ldots,n \quad . \tag{3-57}$$

$(x_1',\ldots,x_n')$ ist offensichtlich genau dann Lösung von (3-55), (3-56), wenn $(x_1',\ldots,x_n')$ Lösung des Systems

$$f_i(x_1) = x_i \quad , \qquad i = 2,\ldots,n \tag{3-58}$$

$$S_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} f_j\,(x_1) = C \tag{3-59}$$

ist.

Nun ist $T(x) := S_1 x + \sum_{j=2}^{n} S_j\, f_j\,(x)$ auf $[0,\infty)$ stetig und streng monoton wachsend; weiterhin ist mit (3-57)

$$T(0) = 0 \quad , \qquad \lim_{x\to\infty} T(x) = \infty \ . \tag{3-60}$$

Es gibt daher genau ein $x_1' \in [0,\infty)$ mit $T(x_1') = C$.

Das bedeutet, Gleichungssystem (3-51), (3-52) besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $(x_1', f_2(x_1'),\ldots,f_n(x_1'))$. Wegen $T(0) = 0 < C$ ist $x_1' > 0$, daher auch $f_i(x_1') > 0$ $\forall\, i = 2,\ldots,n$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. •

Nun ist es einfach, die Existenz eines Sattelpunktes von F auf $X \times Y$ nachzuweisen.

(3-61) Satz: F besitzt einen Sattelpunkt (x^*,y^*) auf $X \times Y$ mit den Eigenschaften:

$(x^*,y^*) \in \overset{0}{X}_t \times \overset{0}{Y}_t$

(x^*,y^*) ist Lösung des Gleichungssystems (3-24),...,(3-27).

Beweis: Nach Satz (3-23) genügt es, zu zeigen, daß das System (3-24),...,(3-27) eine Lösung $(x^*,y^*) \in \overset{0}{X}_t \times \overset{0}{Y}_t$ besitzt.

I) Sei

$$h_i(z) := \frac{1}{\sigma_i(1 - a_i)} Q(U(e^{-z})) \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

$$S_i := 1 \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

$$C := -\ell n(1 - \alpha) \quad .$$

Besitzt das System

$$h_i(z_i) - h_{i-1}(z_{i-1}) = 0 \qquad 2 \leqq i \leqq n \tag{3-62}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_j z_j = C \tag{3-63}$$

die Lösung $(z_1^*,\ldots,z_n^*)$, so ist offensichtlich $(x_1^*,\ldots,x_n^*) := (-z_1^*,\ldots,-z_n^*)$ eine Lösung von (3-24), (3-25).

h_i ist auf $[0,\infty)$ stetig; nach Hifssatz (3-11)a)b) ist h_i streng monoton wachsend mit

$$\lim_{z\to\infty} h_i(z) = \infty \quad , \qquad 1 \leqq i \leqq n \quad ,$$

$$h_i(0) = 0 \quad , \qquad 1 \leqq i \leqq n \quad .$$

Also sind die Voraussetzungen von Hilfssatz (3-48) erfüllt.
Es existiert daher eine eindeutig bestimmte Lösung $(z_1^*,\ldots,z_n^*)$ von (3-62), (3-63) mit $z_i^* > 0 \;\forall\, i = 1,\ldots,n$.
Also hat das Gleichungssystem (3-24), (3-25) die eindeutig bestimmte Lösung

$$(x_1^*,\ldots,x_n^*) := (-z_1^*,\ldots,-z_n^*) \in \overset{0}{X}_t \quad .$$

II) Sei nun

$$h_i(y) := \frac{Q\left(U(e^{x_i^*}) - \frac{y}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^{x_i^*}))} \quad , \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

$$S_i := 1 - a_i \qquad\qquad 1 \leqq i \leqq n \quad ,$$

$$C = M \quad .$$

Offensichtlich ist $h_i(y)$ auf $[0,\infty)$ stetig, nach Hilfssatz (3-11)a),b) ist h_i streng monoton wachsend mit

$$\lim_{y\to\infty} h_i(y) = \infty \quad , \qquad 1 \leqq i \leqq n \quad .$$

Wegen $h_i(0) = 1$, $i = 1,\ldots,n$, ist die Voraussetzung (3-50) von Hilfssatz (3-48) erfüllt.
Es existiert daher eine eindeutig bestimmte Lösung $(y_1^*,\ldots,y_n^*)$ des Gleichungssystems

$$h_i(y_i) - h_{i-1}(y_{i-1}) = 0 \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j y_j = C \quad ,$$

mit $y_i^* > 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,n.$

Aus I) und II) folgt: das Gleichungssystem (3-24),..., (3-27) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung

$$(x_1^*,\ldots,x_n^*,y_1^*,\ldots,y_n^*) \in \overset{0}{X}_t \times \overset{0}{Y}_t \quad .$$

Damit ist der Satz bewiesen. •

3.5 Berechnung des Sattelpunktes; Eindeutigkeit

Die Berechnung des durch Satz (3-23) charakterisierten Sattelpunktes von F ist einfach. Man löst dazu das Gleichungssystem (3-24)..(3-27). Wie wir gesehen haben, sind beide Gleichungssysteme vom Typ

$$h_i(x_i) - h_{i-1}(x_{i-1}) = 0 \quad , \tag{3-64}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j = C \quad . \tag{3-65}$$

Bei der Durchrechnung einiger Beispiele erwies sich der von uns benutzte folgende einfache Algorithmus als geeignet:
Setze

$$X_L := 0 \quad , \qquad X_R := \frac{C}{s_1}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(X_L + X_R)$$

Berechne $x_i^{(1)}$, $i = 2,\ldots,n$ sukzessive aus

$$h_i(x_i^{(1)}) = h_{i-1}(x_{i-1}^{(1)}) \quad .$$

Falls $\sum_{j=1}^{n} s_j x_j^{(1)} < C$ setze $X_L = x_1^{(1)}$,

falls $\sum_{j=1}^{n} s_j x_j^{(1)} > C$ setze $X_R := x_1^{(1)}$.

Setze $x_1^{(2)} := \frac{1}{2}(X_L + X_R)$

und berechne sukzessive $x_i^{(2)}$, $i = 2,\ldots,n$ in der angegebenen Weise, u.s.w.
Man sieht sofort, daß die Folge $(x_1^{(i)})$ konvergiert, daher konvergiert die Folge $(x_1^{(i)},\ldots,x_n^{(i)})$.
Der Grenzwert ist offensichtlich die Lösung von System (3-64), (3-65).

Wir wollen nun noch sicherstellen, daß der durch Satz (3-23) charakterisierte Sattelpunkt auch der einzige Sattelpunkt von F auf $X \times Y$ ist.

(3-66) Satz: F besitzt auf $X \times Y$ einen eindeutig bestimmten Sattelpunkt.

Beweis: Nach Satz (3-61) besitzt F auf $X \times Y$ einen Sattelpunkt $(x^*,y^*) \in \overset{0}{X}_t \times \overset{0}{Y}_t$.

Sei (x',y') ein weiterer Sattelpunkt von F auf $X \times Y$. Nach Satz (3-4) sind dann auch (x',y^*), (x^*,y') Sattelpunkte von F auf $X \times Y$. Nach Definition des Sattelpunktes gilt für $0 < \lambda < 1$

$$F(x' + \lambda(x^* - x'),y^*) \geqq \lambda F(x^*,y^*) + (1 - \lambda)F(x',y^*) \quad .$$

Andererseits ist wegen $y^* \in \overset{0}{Y}_t$ nach Satz (3-14) $F(\cdot,y^*)$ auf X streng konvex. Daraus folgt $x' = x^*$.
Weiter folgt aus der Definition des Sattelpunktes für $0 < \lambda < 1$

$$F(x^*,y' + \lambda(y^* - y')) \leqq \lambda F(x^*,y^*) + (1-\lambda)F(x^*,y') \quad .$$

Nach Satz (3-18) ist wegen $x^* \in \overset{0}{X}_t$ $F(x^*,\cdot)$ auf Y streng konkav. Daraus folgt $y' = y^*$.
F besitzt daher auf $X \times Y$ nur den Sattelpunkt (x^*,y^*). •

3.6 Eine bemerkenswerte Eigenschaft der optimalen Inspektorstrategie

Unter "optimaler Inspektorstrategie" s_I^* bzw. "optimaler Entwenderstrategie" s_E^* verstehen wir im folgenden die s_I - Koordinate bzw. die s_E - Koordinate des Sattelpunktes (s_I^*,s_E^*) von β auf $S_I \times S_E$; d.h.

$$s_I^* = (1-e^{x_1^*},\ldots,1-e^{x_n^*}) \quad , \quad s_E^* = A^{-1}y^{*t} \quad , \qquad (3\text{-}67)$$

wobei (x^*,y^*) der Sattelpunkt von F auf $X \times Y$ ist.

Die optimale Inspektorstrategie besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft: sie ist unabhängig von der Größe der zu entwendenden Gesamtmenge M. Genauer heißt das

<u>(3-68) Satz:</u> Sei für $0 < \alpha < 1$, $M > 0$

$$X_\alpha : = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = \ln(1-\alpha),\ 0 \geqq x_i \ \forall\, i = 1,\ldots,n\right\} \quad , \qquad (3\text{-}69)$$

$$Y_M : = \left\{(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n (1-a_i)y_i = M\right\} \quad . \qquad (3\text{-}70)$$

Für $M_i > 0$, $i = 1,2$ sei $(x^{*(i)},y^{*(i)})$ der Sattelpunkt von F auf $X_\alpha \times Y_{M_i}$, $i = 1,2$. Dann gilt

$$x^{*(1)} = x^{*(2)} \quad .$$

Beweis: Sowohl $x^{*(1)}$ als auch $x^{*(2)}$ ist nach Satz (3-61), (3-66) Lösung des Gleichungssystems (3-24), (3-25). Da (3-24), (3-25) nicht von M abhängen, folgt sofort die Behauptung. •

Das Analogon von Satz (3-68) bzgl. α und der optimalen Entwenderstrategie gilt im allgemeinen nicht. Lediglich im Fall

$$\sigma_i(1 - a_i) = \sigma_{i-1}(1 - a_{i-1}) \qquad \forall\, i = 2,\ldots,n \quad (3\text{-}71)$$

ist die optimale Entwenderstrategie unabhängig von der Größe von α; unter der Voraussetzung (3-71) sieht man nämlich aus Gleichungssystem (3-24),...,(3-27) sofort, daß

$$x^* = \left(\frac{1}{n}\ln(1 - \alpha),\ldots,\frac{1}{n}\ln(1 - \alpha)\right)$$

$$y^* = \left(\sigma_1\left[\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\sigma_j\right]^{-1} M,\ldots,\sigma_n\left[\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\sigma_j\right]^{-1} M\right)$$

ist.

Ansonsten gilt

(3-72) Satz: Sei $\sigma_j(1 - a_j) \neq \sigma_{j-1}(1 - a_{j-1})$ für mindestens ein j, $2 \leq j \leq n$.

Dann gibt es $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, sodaß für die Sattelpunkte $(x^{*(i)}, y^{*(i)})$ von F auf $X_{\alpha_i} \times Y_M$, $i = 1,2$ gilt $y^{*(1)} \neq y^{*(2)}$.

Beweis: Wir betrachten die x - Koordinate des Sattelpunktes als Funktion von α, d.h. $x^* := x^*(\alpha)$. Wir notieren zuerst einige Eigenschaften von $x^*(\alpha)$.

a) $$\lim_{\alpha\to 0+} U(e^{x_i^*(\alpha)}) = \infty \qquad \forall\, i = 1,\dots,n \quad . \tag{3-73}$$

Da $x^*(\alpha)$ Lösung von (3-24), (3-25) ist, hat man offensichtlich

$$\lim_{\alpha\to 0+} x_i^*(\alpha) = 0 \qquad \forall\, i = 1,\dots,n$$

und damit (3-73).

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\alpha_0 \in (0,1)$, sodaß $\forall\, \alpha_0 > \alpha > 0$ und alle $i = 2,\dots,n$ gilt

$$\left| U\left(e^{x_i^*(\alpha)}\right) - U\left(e^{x_{i-1}^*(\alpha)}\right) \right| < \varepsilon \quad . \tag{3-74}$$

Dies sieht man folgendermaßen ein.
Angenommen, es gäbe $\varepsilon > 0$, sodaß zu jedem $\alpha_0 \in (0,1)$ ein $\alpha_0 > \alpha > 0$ und ein i, $2 \leqq i \leqq n$ existiert mit

$$\left| U\left(e^{x_i^*(\alpha)}\right) - U\left(e^{x_{i-1}^*(\alpha)}\right) \right| > \varepsilon \quad .$$

Da $x^*(\alpha)$ das System (3-24) löst, folgt zusammen mit a), daß zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ ein $t > t_0$, ein $\varepsilon' > \varepsilon$ und ein i, $2 \leqq i \leqq n$ existiert mit

$$\frac{Q(t+\varepsilon'')}{Q(t)} - \frac{\sigma_i(1-a_i)}{\sigma_{i-1}(1-a_{i-1})} = 0 \tag{3-75}$$

mit $\varepsilon'' = \varepsilon'$ oder $\varepsilon'' = -\varepsilon'$.

Da $\quad Q(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}[\sqrt{2\pi}\,\phi(t)]^{-1}$ ist,

sieht man sofort unter Beachtung von Hilfssatz (3-11)b)

$$\frac{Q(t-\varepsilon')}{Q(t)} > \frac{Q(t-\varepsilon)}{Q(t)} \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \frac{Q(t-\varepsilon)}{Q(t)} = \infty$$

und

$$\frac{Q(t+\varepsilon')}{Q(t)} < \frac{Q(t+\varepsilon)}{Q(t)} \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \frac{Q(t+\varepsilon)}{Q(t)} = 0 \quad .$$

Daher kann (3-75) für hinreichend großes t_0 nicht erfüllt sein.

Weiterhin gilt

c) ist $\sigma_j(1-a_j) \neq \sigma_{j-1}(1-a_{j-1})$,

dann ist

$$\left|\frac{y_j^*}{\sigma_j} - \frac{y_{j-1}^*}{\sigma_{j-1}}\right| > 0 \quad . \tag{3-76}$$

Da nämlich x* das System (3-24) löst, ist wegen

$$\frac{\sigma_j(1-a_j)}{\sigma_{j-1}(1-a_{j-1})} \neq 1 \; : \; x_j^* \neq x_{j-1}^* \quad ;$$

aus (3-26) folgt dann

$$\frac{y_j^*}{\sigma_j} \neq \frac{y_{j-1}^*}{\sigma_{j-1}} \quad . \tag{3-77}$$

Mittels a), b), c) beweisen wir nun Satz (3-72). Angenommen, der Satz sei falsch. Dann gibt es ein $y^* \varepsilon Y$, sodaß $(x^*(\alpha), y^*)$ Sattelpunkt von F auf $X_\alpha \times Y_M$ ist $\forall \alpha \, \varepsilon \, (0,1)$. D.h., $\forall \alpha \, \varepsilon \, (0,1)$ löst $(x^*(\alpha), y^*)$ das System (3-24),...,(3-27). Setzen wir

$$\Delta y_i^* := \frac{y_i^*}{\sigma_i} - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}} \quad ,$$

$$\Delta U_i^*(\alpha) := U\left(e^{x_i^*(\alpha)}\right) - U\left(e^{x_{i-1}^*(\alpha)}\right) \quad ,$$

$$U_i^{(\alpha)}(\theta) := U\left(e^{x_{i-1}^*(\alpha)}\right) + \theta \Delta U_i^*(\alpha) \quad ,$$

$$y_i(\theta) := \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}} + \theta \Delta y_i^*$$

für $i = 2,\ldots,n$ und $\theta \varepsilon [0,1]$,
und wenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Gleichung (3-26) an, so gilt also:
zu jedem $\alpha \varepsilon (0,1)$ gibt es $1 > \theta_i > 0$, $i = 2,\ldots,n$, sodaß $(x^*(\alpha), y^*)$ das folgende Gleichungssystem löst

Gleichungssystem (3-24)
Gleichungssystem (3-25)
Gleichungssystem (3-27)

und die Gleichungen

$$0 = \left[\frac{Q'(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i))}{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i))} - \frac{Q'(U_i^{(\alpha)}(\theta_i))}{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i))}\right]$$

$$\cdot \frac{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i))}{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i))} \Delta U_i^*(\alpha)$$

$$- \frac{Q'(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i))}{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i))} \Delta y_i^* \quad , \quad i = 2,\ldots,n, \qquad (3\text{-}78)$$

erfüllt.
Setzt man in (3-78) den im Hilfssatz (3-11)b) für Q' gegebenen Ausdruck ein und dividiert die Gleichung durch

$$\frac{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i))}{Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i))} \quad ,$$

so folgt : ($x^*(\alpha), y^*$) löst die Gleichungssysteme

Glsyst. (3-24)
Glsyst. (3-25)
Glsyst. (3-27)

und das Gleichungssystem

$$0 = -\left[- y_i(\theta_i) + Q\left(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i)\right) - Q(U_i^{(\alpha)}(\theta_i))\right] \cdot \Delta U_i^*(\alpha)$$

$$+\left[U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i) + Q\left(U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i)\right)\right] \cdot \Delta y_i^* \qquad (3\text{-}79)$$

$$i=2,..,n.$$

Unter Beachtung von b) und von a) in Verbindung mit Hilfssatz (3-11)a) folgt,daß für hinreichend kleines $\alpha > 0$ der erste Summand von (3-79) dem Betrage nach beliebig klein wird. Der zweite Summand in (3-79) ist dem Betrage nach größer als

$$|U_i^{(\alpha)}(\theta_i) - y_i(\theta_i)| \cdot |\Delta y_i^*| \quad . \qquad (3\text{-}80)$$

Ist nun $\sigma_j(1 - a_j) \neq \sigma_{j-1}(1 - a_{j-1})$,

so ist nach c) : $|\Delta y_j^*| > 0$.

Nach a) wird für hinreichend kleines $\alpha > 0$ der Ausdruck (3-80) beliebig groß.D.h. es gibt $\alpha \in (0,1)$,sodaß das Gleichungssystem (3-24),(3-25),(3-27),(3-79) nicht erfüllt werden kann.

Damit haben wir einen Widerspruch konstruiert,und der Satz ist bewiesen. ●

4. Optimale Strategien und Spielwert als Funktionen der Meßvarianzen

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, daß der eindeutig bestimmte Sattelpunkt (x^*,y^*) von F auf $X \times Y$ Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems ist. Die numerische Behandlung dieses Gleichungssystems kann für große n beträchtlichen Rechenaufwand erfordern. Es erscheint daher sinnvoll, zu versuchen, einfach zu berechnende Abschätzungen für den Spielwert zu erhalten. Wir werden im folgenden einfache Schranken L, U mit

$$L \leqq F(x^*,y^*) \leqq U \tag{4-1}$$

konstruieren, die in dem Sinn "scharf" sind, daß unter gewissen Voraussetzungen (4-1) als Gleichung erfüllt ist.

Für festes α und M kann man x^*,y^* als Funktionen betrachten, die nur von $\sigma^2_{I_O}$, $\sigma^2_{I_i}$, $\sigma^2_{D_i}$, $1 \leqq i \leqq n$ abhängen. Störend ist dabei die Tatsache, daß diese Parameter nicht nur in die Funktion F sondern auch in Y und damit in den Definitionsbereich von F eingehen. Wir werden diese Schwierigkeit umgehen, indem wir eine Funktion G konstruieren, definiert auf $X \times Y'$ mit

$$Y' := \left\{ y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = M \right\}$$, mit folgender Eigenschaft:

G besitzt auf $X \times Y'$ einen eindeutig bestimmten Sattelpunkt (x',y') und es ist

$$G(x',y') = F(x^*,y^*) \quad .$$

Wäre $\sigma^2_{I_i} = 0\ \forall\, i = 1,\ldots,n-1$, so hätte man $Y' = Y$ wegen $a_i = 0$ $\forall\, i = 1,\ldots,n$ und daher $F = G$.

Diese Überlegung nutzen wir auch im Fall $\sigma^2_{I_i} > 0$ aus[†]

[†] Bezüglich einer anderen, naheliegenderen Konstruktionsmöglichkeit von G und Y' siehe Seite 78.

Wir werden $F(x^*,y^*)$ als Funktion von $\sigma^2_{I_0}$, $\sigma^2_{I_i}$, $\sigma^2_{D_i}$ auffassen und die $\sigma^2_{I_0}$, $\sigma^2_{I_i}$, $\sigma^2_{D_i}$ unter Konstanthaltung von F so verändern, daß $\sigma^2_{I_i} = 0$, $i = 1,\dots,n-1$ wird. Anders ausgedrückt: wir gelangen auf einer Niveaulinie von F in $\mathbb{R}^{2n+1}$ vom Punkt

$\left(\sigma^2_{I_0},\sigma^2_{I_1},\dots,\sigma^2_{I_{n-1}},\sigma^2_{I_n},\sigma^2_{D_1},\dots,\sigma^2_{D_n}\right)$ zu dem Punkt

$\left(\sigma'^2_{I_0},0,\dots,0,\sigma'^2_{I_n},\sigma'^2_{D_1},\dots,\sigma'^2_{D_n}\right)$.

Für dieses Vorgehen ist es notwendig, das Verhalten von x^*,y^* in Abhängigkeit von den genannten Parametern zu untersuchen.

4.1 Zwei Relationen zwischen benachbarten Komponenten der Sattelpunktskoordinaten

Für den Sattelpunkt (x^*,y^*) von F auf $X \times Y$ bestehen zwischen x^*_{i-1},x^*_i und zwischen y^*_{i-1},y^*_i die folgenden Beziehungen:

(4-2) Satz. Es gilt für $2 \leqq k \leqq n$

a) $\sigma_{k-1}(1-a_{k-1}) = \sigma_k(1-a_k)$

$$\Rightarrow x^*_{k-1} = x^*_k \quad , \quad \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} = \frac{y^*_k}{\sigma_k}$$

b) $\sigma_{k-1}(1-a_{k-1}) < \sigma_k(1-a_k)$

$$\Rightarrow x^*_{k-1} > x^*_k \quad , \quad \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} < \frac{y^*_k}{\sigma_k}$$

c) $\sigma_{k-1}(1-a_{k-1}) > \sigma_k(1-a_k)$

$$\Rightarrow x^*_{k-1} < x^*_k \quad , \quad \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} > \frac{y^*_k}{\sigma_k} \quad .$$

Beweis.

a) Für $\sigma_{k-1}(1 - a_{k-1}) = \sigma_k(1 - a_k)$ folgt aus (3-24)

$x^*_{k-1} = x^*_k$ und damit aus (3-26) $\dfrac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} = \dfrac{y^*_k}{\sigma_k}$.

b) Wegen $\dfrac{\sigma_k(1 - a_k)}{\sigma_{k-1}(1 - a_{k-1})} > 1$ folgt aus (3-24)

$Q(U(e^{x^*_{k-1}})) < Q(U(e^{x^*_k}))$.

Mit Hilfssatz (3-11)b) ergibt das $x^*_{k-1} > x^*_k$. Wie in Gleichungen (3-16), (3-17) gezeigt wurde, wächst für $\frac{y}{\sigma} > 0$ die Funktion

$$\frac{Q(U(e^x) - \frac{y}{\sigma})}{Q(U(e^x))} \text{ in } x \in (-\infty, 0] \text{ streng monoton.}$$

Angenommen, $\dfrac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} \geqq \dfrac{y^*_k}{\sigma_k}$.

Man hat dann mit Hilfssatz (3-11)b)

$$\frac{Q\left(U(e^{x^*_{k-1}}) - \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right)}{Q(U(e^{x^*_{k-1}}))} > \frac{Q\left(U(e^{x^*_k}) - \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right)}{Q(U(e^{x^*_k}))} \geqq \frac{Q\left(U(e^{x^*_k}) - \frac{y^*_k}{\sigma_k}\right)}{Q(U(e^{x^*_k}))}$$

und damit einen Widerspruch zu Gleichungssystem (3-26).

c) Der Beweis von Behauptung c) ist völlig analog dem Beweis von Behauptung b). •

(4-3) Satz. Es gilt für $2 \leqq k \leqq n$

a) $\sigma_{k-1}(1 - a_{k-1}) = \sigma_k(1 - a_k)$

$$\Rightarrow \frac{y^*_{k-1}}{\sigma^2_{k-1}(1 - a_{k-1})} = \frac{y^*_k}{\sigma^2_k(1 - a_k)}$$

b) $\sigma_{k-1}(1 - a_{k-1}) < \sigma_k(1 - a_k)$

$$\Rightarrow \frac{y_{k-1}^*}{\sigma_{k-1}^2(1 - a_{k-1})} > \frac{y_k^*}{\sigma_k^2(1 - a_k)}$$

c) $\sigma_{k-1}(1 - a_{k-1}) > \sigma_k(1 - a_k)$

$$\Rightarrow \frac{y_{k-1}^*}{\sigma_{k-1}^2(1 - a_{k-1})} < \frac{y_k^*}{\sigma_k^2(1 - a_k)} \quad .$$

Beweis.

a) folgt sofort aus Satz (4-2)a)

b) Sei $\tau := (1 - a_{k-1})\sigma_{k-1}^2 + (1 - a_k)\sigma_k^2$.

Aus $x_{k-1}^* > x_k^*$ nach Satz (4-2)b) folgt mit

$$g_{k-1}(t) := U(e^{x_{k-1}^*}) - \frac{(1 - a_{k-1})\sigma_{k-1}}{\tau} t \quad ,$$

$$g_k(t) := U(e^{x_k^*}) - \frac{(1 - a_k)\sigma_k}{\tau} t \quad ,$$

$$g_{k-1}(t) > g_k(t) \qquad \forall\, t \geqq 0 \quad . \tag{4-4}$$

Sei nun

$$g(t) := - \frac{Q(g_{k-1}(t))}{\sigma_{k-1}(1 - a_{k-1})} + \frac{Q(g_k(t))}{\sigma_k(1 - a_k)}$$

Man hat

$$g'(t) = \frac{Q'(g_{k-1}(t))}{\tau} - \frac{Q'(g_k(t))}{\tau} \quad .$$

Mit (4-4) und Hilfssatz (3-11)c) hat man daher
$g'(t) > 0 \ \forall t \geqq 0$.
Da x^* das Gleichungssystem (3-24) erfüllt, hat man
$g(0) = 0$; also gilt

$$g(t) > 0 \quad \forall t > 0 \ . \tag{4-5}$$

Sei $m := y^*_{k-1} + y^*_k$.

Man sieht aus der Definition von τ sofort, daß genau eine der folgenden drei Aussagen richtig ist.

$$1) \quad \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} < \frac{(1-a_{k-1})\sigma_{k-1}}{\tau} m \ , \quad \frac{y^*_k}{\sigma_k} > \frac{(1-a_k)\sigma_k}{\tau} m$$

$$2) \quad \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} > \frac{(1-a_{k-1})\sigma_{k-1}}{\tau} m \ , \quad \frac{y^*_k}{\sigma_k} < \frac{(1-a_k)\sigma_k}{\tau} m$$

$$3) \quad \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}} = \frac{(1-a_{k-1})\sigma_{k-1}}{\tau} m \ , \quad \frac{y^*_k}{\sigma_k} = \frac{(1-a_k)\sigma_k}{\tau} m \ .$$

Angenommen, (1) oder (3) wäre richtig. Man hätte dann

$$Q\left(U(e^{x^*_{k-1}}) - \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right) \leqq Q(g_{k-1}(m))$$

$$Q\left(U(e^{x^*_k}) - \frac{y^*_k}{\sigma_k}\right) \geqq Q(g_k(m)) \ .$$

Daher

$$-\frac{Q\left(U(e^{x^*_{k-1}}) - \frac{y^*_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right)}{\sigma_{k-1}(1-a_{k-1})} + \frac{Q\left(U(e^{x^*_k}) - \frac{y^*_k}{\sigma_k}\right)}{\sigma_k(1-a_k)} \geqq g(m) > 0 \ ,$$

denn $m > 0$, da $y^* \in \overset{0}{Y}_t$.

Da x* Gleichungssystem (3-24) löst, heißt das

$$\frac{Q\left(U(e^{x_k^*}) - \frac{y_k^*}{\sigma_k}\right)}{Q(U(e^{x_k^*}))} > \frac{Q\left(U(e^{x_{k-1}^*}) - \frac{y_{k-1}^*}{\sigma_{k-1}}\right)}{Q(U(e^{x_{k-1}^*}))}$$

Damit hat man einen Widerspruch zu der Tatsache, daß (x^*,y^*) das Gleichungssystem (3-26) löst.
Also ist Aussage (2) richtig, d.h.

$$\frac{y_{k-1}^*}{\sigma_{k-1}^2(1-a_{k-1})} > \frac{m}{\tau} > \frac{y_k^*}{\sigma_k^2(1-a_k)} \quad . \qquad (4\text{-}6)$$

Damit ist b) gezeigt.

c) Der Beweis von Behauptung c) verläuft analog zum Beweis von Behauptung b). ●

Bemerkung: **Betrachten wir die Menge der eingeschränkten** Entwenderstrategien $\hat{S}_E := \{s_E \in S_E, M_i \geqq 0 \ \forall i = 1,\dots,n\}$ und setzen $\hat{Y} := \{y = A s_E^t, s_E \in \hat{S}_E\}$, so besitzt nach den Ausführungen von p. 32 F auf $X \times \hat{Y}$ einen Sattelpunkt. Ist $(x^*,y^*) \in X \times \hat{Y}$, so ist (x^*,y^*) offensichtlich Sattelpunkt von F auf $X \times \hat{Y}$; dies ist jedoch nicht notwendig der Fall. Unter Verwendung von Satz (4-2) kann man leicht zeigen, daß der folgende Sachverhalt gilt.

(4-7) Satz.

a) Ist $\sigma_i(1-a_i) \geqq \sigma_{i-1}(1-a_{i-1})$, $\sigma_i \geqq \sigma_{i-1} a_{i-1}$

für $i = 2,\dots,n$, dann liegt (x^*,y^*) in $X \times \hat{Y}$.

b) Ist $\sigma_i(1-a_i) < \sigma_{i-1}(1-a_{i-1})$, $\sigma_i < \sigma_{i-1} a_{i-1}$

für mindestens ein i, $2 \leqq i \leqq n$, dann liegt (x^*,y^*) nicht in $X \times \hat{Y}$.

<u>Beweis</u>.

a) Zu zeigen ist $(x^*,y^*) \in X \times \hat{Y}$.

Mit $(M_1^*,\ldots,M_n^*) := A^{-1}y^{*t}$ müssen wir daher nachweisen

$M_i^* \geqq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n$.

Nach Satz (3-61) ist $M_1^* = Y_1^* > 0$.

Für $i \geqq 2$ hat man $y_i^* = M_i^* + a_{i-1}y_{i-1}^*$.

Daher

$$\frac{y_i^*}{\sigma_i} = \frac{M_i^*}{\sigma_i} + \frac{a_{i-1}y_{i-1}^*}{\sigma_i} \leqq \frac{M_i^*}{\sigma_i} + \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}$$

wegen $y_{i-1}^* > 0$ und der Voraussetzung.

Nach Satz (4-2)a)b) ist $\dfrac{y_i^*}{\sigma_i} \geqq \dfrac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}$.

Also gilt $M_i^* > 0$.

b) Sei $\sigma_j(1-a_j) < \sigma_{j-1}(1-a_{j-1})$, $\quad \sigma_j < \sigma_{j-1}\,a_{j-1}$.

Man hat nach Voraussetzung wegen $y_{j-1}^* > 0$

$$\frac{y_j^*}{\sigma_j} = \frac{M_j^*}{\sigma_j} + \frac{a_{j-1}y_{j-1}^*}{\sigma_j} > \frac{M_j^*}{\sigma_j} + \frac{y_{j-1}^*}{\sigma_{j-1}} \quad .$$

Nach Satz (4-2)c) ist $\dfrac{y_j^*}{\sigma_j} < \dfrac{y_{j-1}^*}{\sigma_{j-1}}$.

Also ist $M_j^* < 0$; daher $y^* \notin \hat{Y}$. ●

4.2 Differenzierbarkeitseigenschaften der optimalen Strategien und des Spielwertes

Mit $\underline{\sigma}$ bezeichnen wir jetzt den Parametervektor $(\sigma_{I_O}^2, \ldots, \sigma_{I_n}^2, \sigma_{D_1}^2, \ldots, \sigma_{D_n}^2) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Es sei

$$\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} := \{(\sigma_{I_O}^2, \ldots, \sigma_{I_n}^2, \sigma_{D_1}^2, \ldots, \sigma_{D_n}^2) \in \mathbb{R}^{2n+1},\ 1 - a_i > 0,\ \sigma_i > 0\ \forall i\} \quad . \tag{4-8}$$

Offensichtlich ist $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2n+1}$. Wir fassen die Komponenten x_i^*, y_i^* des Sattelpunktes (x^*, y^*) von F auf $X \times Y$ auf als Funktionen von $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$, d.h.

$x_i^* = x_i^*(\underline{\sigma})$, $y_i^* = y_i^*(\underline{\sigma})$ $\forall i$.

Wir werden zeigen, daß die x_i^*, y_i^* auf der offenen Menge $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ stetige partielle Ableitungen nach allen Komponenten von $\underline{\sigma}$ besitzen und damit auch der Spielwert $F(x^*, y^*)$.

Dazu verwenden wir einen Satz aus der Theorie der impliziten Funktionen. Es wird dabei eine Funktionalmatrix des folgenden Typs auftreten:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & & & \\ & \ddots & \ddots & & O \\ & O & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4-9}$$

mit
$$a_{1i} > 0 \qquad 1 \leqq i \leqq n$$
$$a_{ii} > 0 \qquad 1 \leqq i \leqq n$$
$$a_{ii-1} > 0 \qquad 2 \leqq i \leqq n \quad .$$

Es gilt

<u>(4-10) Hilfssatz</u>. Die in (4-9) angegebene Matrix H ist regulär.

<u>Beweis</u>. Man sieht sofort, daß, ausgehend von der letzten Spalte, durch sukzessives Addieren der mit einem geeigneten positiven Faktor multiplizierten i-ten Spalte zur (i-1)ten Spalte, eine obere Dreiecksmatrix mit echt positiven Hauptdiagonalelementen entsteht.●

Wir behandeln die x_i^*, y_i^* jetzt als implizite Funktionen von $\underline{\sigma}$, definiert durch das Gleichungssystem (3-24),...,(3-27) und zeigen so, daß sie auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ nach allen Komponenten des Vektors $\underline{\sigma}$ stetig partiell differenzierbar sind.

<u>(4-11) Satz</u>. Die Funktionen $x_i^*(\underline{\sigma})$, $y_i^*(\underline{\sigma})$, $1 \leqq i \leqq n$ sind auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ stetig nach $\sigma_{I_k}^2$, $\sigma_{D_\ell}^2$, $0 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq \ell \leqq n$ partiell differenzierbar.

<u>Beweis</u>: I) Seien die G_i, $1 \leqq i \leqq n$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \times \overset{0}{X}_t$ definiert gemäß

$$G_1(\underline{\sigma},x) := \sum_{j=1}^{n} x_j - \ln(1-\alpha)$$

$$G_i(\underline{\sigma},x) := -Q(U(e^{x_i})) + Q(U(e^{x_{i-1}})) \frac{\sigma_i(1-a_i)}{\sigma_{i-1}(1-a_{i-1})} ,$$

$i = 2,\ldots,n$.

Offensichtlich sind die G_i auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \times \overset{0}{X}_t$ nach allen Komponenten von $\underline{\sigma}$ und nach $x_1,\ldots,x_n$ stetig partiell differenzierbar.

Zu jedem $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ gibt es $x \in \overset{0}{X}_t$ mit

$$G_i(\underline{\sigma},x) = 0 \qquad 1 \leqq i \leqq n .$$

Falls nun noch die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial G_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \times \overset{0}{X}_t$ regulär ist, so folgt nach einem Satz aus der Theorie der impliziten Funktionen (vergl. z.B. [14] p. 427), daß die $x_i^*(\underline{\sigma})$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ stetig partiell differenzierbar sind nach allen Komponenten von $\underline{\sigma}$.

Nun ist

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_i} = 1 \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_{i-1}} = \frac{\sigma_i(1-a_i)}{\sigma_{i-1}(1-a_{i-1})} \cdot \frac{Q'(U(e^{x_{i-1}}))}{Q(U(e^{x_{i-1}}))} < 0, \quad 2 \leqq i \leqq n$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i} = -\frac{Q'(U(e^{x_i}))}{Q(U(e^{x_i}))} > 0 \quad , \qquad 2 \leqq i \leqq n$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für } k > 1,\ i \neq k-1, k$$

Die Matrix $\left(\frac{\partial G_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ ist also vom Typ (4-9) und nach Hilfssatz (4-10) regulär.

II) Seien die H_i, $1 \leqq i \leqq n$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \times \overset{0}{Y}_t$ definiert gemäß

$$H_1(\underline{\sigma},y) = \sum_{j=1}^{n} (1-a_j)\, y_j - M$$

$$H_i(\underline{\sigma},y) = \frac{Q\left(U(e^{x_i^*(\underline{\sigma})}) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right)}{Q(U(e^{x_i^*(\underline{\sigma})}))} - \frac{Q\left(U(e^{x_{i-1}^*(\underline{\sigma})}) - \frac{y_{i-1}}{\sigma_{i-1}}\right)}{Q(U(e^{x_{i-1}^*(\underline{\sigma})}))}$$

$i = 2,\ldots,n$.

Offensichtlich sind die H_i, $1 \leqq i \leqq n$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \times \overset{0}{Y}_t$ stetig nach allen Komponenten von $\underline{\sigma}$ und nach $y_1,\ldots,y_n$ partiell differenzierbar; weiterhin existiert zu jedem $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ ein $y \in \overset{0}{Y}_t$ mit

$$H_i(\underline{\sigma},y) = 0 \quad , \qquad 1 \leqq i \leqq n \quad .$$

Um nachzuweisen, daß die $y_i^*(\underline{\sigma})$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ stetig nach allen Komponenten partiell differenzierbar sind, genügt es wiederum, zu zeigen, daß die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial H_j}{\partial y_i}\right)_{i,j = 1,\ldots,n}$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \times \overset{0}{Y}_t$ regulär ist.

Nun ist

$$\frac{\partial H_1}{\partial y_i} = 1 - a_i > 0 \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial y_{i-1}} = \frac{Q'\left(U\left(e^{x_{i-1}^*(\underline{\sigma})}\right) - \frac{y_{i-1}}{\sigma_{i-1}}\right)}{\sigma_{i-1} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*(\underline{\sigma})}\right)\right)} < 0 \qquad 2 \leqq i \leqq n$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial y_i} = - \frac{Q'\left(U\left(e^{x_i^*(\underline{\sigma})}\right) - \frac{y_i}{\sigma_i}\right)}{\sigma_i Q\left(U\left(e^{x_i^*(\underline{\sigma})}\right)\right)} > 0 \qquad 2 \leqq i \leqq n$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial y_i} = 0 \quad , \qquad k \geqq 2 \quad , \qquad i \neq k-1,k \quad .$$

$\left(\frac{\partial H_j}{\partial y_i}\right)_{i,j = 1,\ldots,n}$ ist also vom Typ (4-9) und daher regulär.

Damit ist der Satz bewiesen. ●

(4-12) Korollar. Setzt man

$$\hat{F}(\underline{\sigma}) := F(x^*(\underline{\sigma}), y^*(\underline{\sigma})) \quad , \tag{4-13}$$

dann ist $\hat{F}$ auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion.

Beweis. F ist auf $\overset{\circ}{X}_t \times \overset{\circ}{Y}_t$ stetig nach x_i, y_i partiell differenzierbar. Mit Satz (4-11) folgt dann die Behauptung. ●

Man kann die partiellen Ableitungen des Spielwerts nach den Komponenten von $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ sogar explizit angeben.

(4-14) Satz. Sei t eine Komponente von $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{F}(\underline{\sigma}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^*(\underline{\sigma})}{\sigma_i} Q\left(U\left(e^{x_i^*(\underline{\sigma})}\right) - \frac{y_i^*(\underline{\sigma})}{\sigma_i}\right)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial}{\partial t}\sigma_i + \frac{1}{1-a_i}\frac{\partial}{\partial t}(1-a_i)\right] \quad . \tag{4-15}$$

Beweis. Lassen wir zur Abkürzung die Argumente weg, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{F} = F_t + \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i}\frac{\partial y_i^*}{\partial t} \quad .$$

Offensichtlich ist

$$F_t = \sum_{i=1}^{n} Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right)\frac{y_i^*}{\sigma_i^2}\frac{\partial}{\partial t}\sigma_i \quad . \tag{4-16}$$

Es ist

$$F_{x_i} = \frac{Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right)}{Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right)\right)} \quad , \qquad 1 \leqq i \leqq n \quad .$$

Da (x^*,y^*) das Gleichungssystem (3-26) löst, hat man daher

$$F_{x_1} = F_{x_i} \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n \quad .$$

D.h.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial t} = F_{x_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i^*}{\partial t} = F_{x_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) = 0 \quad , \tag{4-17}$$

denn $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \ell n(1-\alpha)$.

Es ist

$$F_{y_i} = -\frac{1}{\sigma_i}Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right) = \frac{-1}{\sigma_i(1-a_i)}\,Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right)(1-a_i) \quad .$$

Da (x^*, y^*) das Gleichungssystem (3-24),...,(3-27) löst und damit auch das Gleichungssystem (3-28), hat man

$$(1-a_1)^{-1} \cdot F_{y_1} = (1-a_i)^{-1} \cdot F_{y_i} \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n \quad .$$

Daher ist

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} \frac{\partial y_i^*}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} (1-a_i)^{-1} F_{y_i} (1-a_i) \frac{\partial y_i^*}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (1-a_i)^{-1} F_{y_i} \left[\frac{\partial}{\partial t}(1-a_i) y_i^* - y_i^* \frac{\partial}{\partial t}(1-a_i)\right] =$$

$$= (1-a_1)^{-1} F_{y_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}(1-a_i) y_i^* - \sum_{i=1}^{n} (1-a_i)^{-1} F_{y_i} y_i^* \frac{\partial}{\partial t}(1-a_i) \quad .$$

Wegen $\sum_{i=1}^{n} (1-a_i) y_i^* = M$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}(1-a_i) y_i^* = 0 \quad .$$

Das ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} \frac{\partial y_i^*}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^*}{\sigma_i (1-a_i)} Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right) \frac{\partial}{\partial t}(1-a_i) \quad . \qquad (4\text{-}18)$$

Aus (4-16), (4-17), (4-18) folgt nun die Behauptung. ●

Für eine Komponente t des Vektors $\underline{\sigma}$ setzen wir $\hat{F}_t := \frac{\partial}{\partial t}\hat{F}$. $\hat{F}_t$ ist auf $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ stetig. Es gelten die beiden folgenden Hilfssätze.

(4-19) Hilfssatz. Sei $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$, $2 \leqq i \leqq n$. Falls $i < n$, so sei $\sigma^2_{I_i} = 0$. Dann ist für $t = \sigma^2_{I_{i-1}}$

$$\hat{F}_t(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2\sigma_{i-1}} Q\left(U\left(e^{x^*_{i-1}(\underline{\sigma})}\right) - \frac{y^*_{i-1}(\underline{\sigma})}{\sigma_{i-1}}\right)$$

$$\cdot \left[- \frac{y^*_{i-1}(\underline{\sigma})}{\sigma^2_{i-1}} + (1 - a_{i-1}) \frac{y^*_i(\underline{\sigma})}{\sigma^2_i}\right] . \qquad (4\text{-}20)$$

Beweis. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_j = 0 \qquad \forall j \neq i-1,i \quad . \qquad (4\text{-}21)$$

Für $j < i-1$ ist (4-21) trivialerweise richtig, für $j > i$ folgt (4-21) aus $\mathrm{var}(S_i) = 0$, denn $\sigma^2_{I_i} = 0$ nach Voraussetzung, falls $i < n$.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - a_j) = 0 \qquad \forall j \neq i-1 \qquad (4\text{-}22)$$

Für $j < i-1$ ist (4-22) trivialerweise richtig, ebenso für $i = n$; für $n > j > i-1$ folgt (4-22) aus $a_i = 0 = \mathrm{var}(S_i)$, denn $\sigma^2_{I_i} = 0$, falls $i < n$.

Da (x^*,y^*) das Gleichungssystem (3-28) löst, ist mit

$a_i = 0$

$$\frac{Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right)}{\sigma_i} = \frac{Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*}\right) - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}\right)}{\sigma_{i-1}(1 - a_{i-1})} \quad . \tag{4-23}$$

Mit (4-21), (4-22), (4-23) ist gemäß (4-15)

$$\begin{aligned} \hat{F}_t(\underline{\sigma}) = {} & Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*(\underline{\sigma})}\right) - \frac{y_{i-1}^*(\underline{\sigma})}{\sigma_{i-1}}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_{i-1}} \\ & \cdot \left\{ y_{i-1}^*(\underline{\sigma}) \left[\frac{1}{\sigma_{i-1}} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{i-1} + \frac{1}{1 - a_{i-1}} \frac{\partial}{\partial t} (1 - a_{i-1})\right] \right. \\ & \left. + \frac{y_i^*(\underline{\sigma})}{1 - a_{i-1}} \left[\frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_i\right] \right\} \quad . \end{aligned} \tag{4-24}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{i-1} = \frac{1}{2\sigma_{i-1}} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - a_{i-1}) = - \frac{1 - a_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_i = \frac{1}{2\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{var}(S_{i-1}) = \frac{(1 - a_{i-1})^2}{2\sigma_i} \quad ,$$

daher

$$\left[\frac{1}{\sigma_{i-1}} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{i-1} + \frac{1}{1 - a_{i-1}} \frac{\partial}{\partial t} (1 - a_{i-1})\right] = \frac{-1}{2\sigma_{i-1}^2} \quad , \tag{4-25}$$

$$\frac{1}{1 - a_{i-1}} \left[\frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_i\right] = \frac{1 - a_{i-1}}{2\sigma_i^2} \quad . \tag{4-26}$$

Setzt man (4-25), (4-26) in (4-24) ein, so folgt die Behauptung. •

(4-27) Hilfssatz. Sei $2 \leqq i \leqq n$ und

$$\underline{\hat{\sigma}} := \left(\hat{\sigma}^2_{I_0}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{D_n}\right) \varepsilon\ \hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \text{ mit } \hat{\sigma}^2_{I_i} = 0,$$

falls $i < n$. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, sodaß mit

$$\underline{\sigma}(\lambda) := \Big(\hat{\sigma}^2_{I_0}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{D_{i-2}}, \hat{\sigma}^2_{D_{i-1}} - \lambda, \hat{\sigma}^2_{D_i} + \lambda,$$
$$\hat{\sigma}^2_{D_{i+1}}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{D_n}\Big),$$

gilt $\underline{\sigma}(\lambda)\ \varepsilon\ \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ $\forall\ \lambda \varepsilon U$. Dann gilt mit

$$x_j^{*(\lambda)} := x_j^*(\underline{\sigma}(\lambda)),\ y_j^{*(\lambda)} := y_j^*(\underline{\sigma}(\lambda)),\ \sigma_j^{(\lambda)2} := \sigma_j^2(\underline{\sigma}(\lambda)),$$

$$a_j^{(\lambda)} : a_j(\underline{\sigma}(\lambda)) \quad , \qquad 1 \leqq j \leqq n \quad \text{für } \lambda \varepsilon U$$

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\underline{\sigma}(\lambda)) = \frac{1}{2\sigma_{i-1}^{(\lambda)}} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^{*(\lambda)}}\right) - \frac{y_{i-1}^{*(\lambda)}}{\sigma_{i-1}^{(\lambda)}}\right)$$

$$\cdot \frac{1 + a_{i-1}^{(\lambda)}}{1 - a_{i-1}^{(\lambda)}}\left[-\frac{y_{i-1}^{*(\lambda)}}{\sigma_{i-1}^{(\lambda)2}} + (1 - a_{i-1}^{(\lambda)})\frac{y_i^{*(\lambda)}}{\sigma_i^{(\lambda)2}}\right] . \qquad (4\text{-}28)$$

Beweis. U ist nicht leer, denn $\underline{\sigma}(\lambda)$ ist in λ stetig, $\hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ ist offen und $\underline{\sigma}(0)\ \varepsilon\ \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$.

Mit der Abkürzung $t_1 = \sigma^2_{D_{i-1}}$, $t_2 = \sigma^2_{D_i}$ hat man

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\underline{\sigma}(\lambda)) = -\hat{F}_{t_1}(\underline{\sigma}(\lambda)) + \hat{F}_{t_2}(\underline{\sigma}(\lambda)) \quad .$$

Wir berechnen jetzt $\hat{F}_{t_1}$, $\hat{F}_{t_2}$ mittels Gleichung (4-15).

Wegen $a_i^{(\lambda)} = 0$ ist $\frac{\partial}{\partial t_1}(1 - a_i^{(\lambda)}) = 0$.

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_j^{(\lambda)} = \frac{\partial}{\partial t_1}(1 - a_j^{(\lambda)}) = 0 \qquad \forall j \neq i-1, i \quad . \tag{4-29}$$

Für $j < i-1$ ist (4-29) trivial, für $j > i$ folgt (4-29) wegen $\mathrm{var}(S_i^{(\lambda)}) = 0$, da $\hat{\sigma}_{I_i}^2 = 0$.

Weiterhin gilt wieder Gleichung (4-23).

Lassen wir zur Abkürzung den Index λ weg, so erhalten wir gemäß Gleichung (4-15)

$$\hat{F}_{t_1}(\underline{\sigma}(\lambda)) = \frac{1}{\sigma_{i-1}} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*}\right) - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}\right)$$

$$\cdot \left\{ y_{i-1}^*\left[\frac{1}{\sigma_{i-1}}\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_{i-1} + \frac{1}{1-a_{i-1}}\frac{\partial}{\partial t_1}(1 - a_{i-1})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{y_i^*}{1-a_{i-1}}\left[\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_i\right]\right\} \quad . \tag{4-30}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_{i-1} = \frac{1}{2\sigma_{i-1}} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(1 - a_{i-1}) = \frac{a_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_i = \frac{1}{2\sigma_i}\frac{\partial}{\partial t_1}\operatorname{var}(S_{i-1}) = \frac{a_{i-1}^2}{2\sigma_i} .$$

Daher

$$\left[\frac{1}{\sigma_{i-1}}\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_{i-1} + \frac{1}{1 - a_{i-1}}\frac{\partial}{\partial t_1}(1 - a_{i-1})\right] = \frac{1}{2\sigma_{i-1}^2} + \frac{a_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2(1 - a_{i-1})}$$

$$\frac{1}{1 - a_{i-1}}\left[\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial}{\partial t_1}\sigma_i\right] = \frac{a_{i-1}^2}{2\sigma_i^2(1 - a_{i-1})} .$$

Also

$$\hat{F}_{t_1}(\underline{\sigma}(\lambda)) = \frac{1}{2\sigma_{i-1}} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*}\right) - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2} + 2\frac{a_{i-1}y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2(1 - a_{i-1})} + \frac{a_{i-1}^2 y_i^*}{\sigma_i^2(1 - a_{i-1})}\right] . \tag{4-31}$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial t_2}(1 - a_i) = 0$ wegen $a_i = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\sigma_j = \frac{\partial}{\partial t_2}(1 - a_j) = 0 \qquad \forall j \neq i . \tag{4-32}$$

Für $j < i$ ist (4-32) trivial, für $n \geqq j > i$ folgt (4-32) wegen $\operatorname{var}(S_i) = 0$, da $\sigma_{I_i}^2 = 0$.

Nach (4-15) ist daher unter Beachtung von Gleichung (4-23)

$$\hat{F}_{t_2}(\underline{\sigma}(\lambda)) = \frac{1}{\sigma_i} Q\left(U\left(e^{x_i^*}\right) - \frac{y_i^*}{\sigma_i}\right) \frac{y_i^*}{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t_2} \sigma_i =$$

$$= \frac{1}{\sigma_{i-1}(1 - a_{i-1})} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*}\right) - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}\right) \frac{y_i^*}{2\sigma_i^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma_{i-1}} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*}\right) - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}\right) \frac{y_i^*}{\sigma_i^2(1 - a_{i-1})} \quad . \qquad (4\text{-}33)$$

Nun ist

$$- \left[\frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2} + \frac{2a_{i-1}y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2(1 - a_{i-1})} + \frac{a_{i-1}^2 y_i^*}{\sigma_i^2(1 - a_{i-1})}\right] + \frac{y_i^*}{\sigma_i^2(1 - a_{i-1})} =$$

$$= \frac{1}{1 - a_{i-1}} \left(- \frac{y_{i-1}^* + a_{i-1}y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2} + \frac{(1 - a_{i-1}^2)y_i^*}{\sigma_i^2}\right) =$$

$$= \frac{1 + a_{i-1}}{1 - a_{i-1}} \left(- \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2} + \frac{(1 - a_{i-1})y_i^*}{\sigma_i^2}\right) \quad . \qquad (4\text{-}34)$$

Daher

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{F}(\underline{\sigma}(\lambda)) = - \hat{F}_{t_1}(\underline{\sigma}(\lambda)) + \hat{F}_{t_2}(\underline{\sigma}(\lambda)) =$$

$$= \frac{1}{2\sigma_{i-1}} Q\left(U\left(e^{x_{i-1}^*}\right) - \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}}\right) \frac{1 + a_{i-1}}{1 - a_{i-1}}$$

$$\cdot \left[- \frac{y_{i-1}^*}{\sigma_{i-1}^2} + \frac{(1 - a_{i-1})y_i^*}{\sigma_i^2}\right] \quad . \quad \bullet$$

4.3 Transformation des Spiels unter Erhaltung des Spielwertes

Vergleicht man die Ausdrücke (4-20) und (4-28), so sieht man, daß sie sich lediglich durch den Faktor $\frac{1+a_{i-1}}{1-a_{i-1}}$ unterscheiden. Diese Tatsache werden wir wesentlich ausnutzen für die Konstruktion der auf Seite 49 beschriebenen Funktion G auf $X \times Y'$. Dafür benötigen wir eine Funktion $\sigma^2_{I_{i-1}}(\lambda)$, die für vorgegebenes $\hat{\sigma}^2_{I_{i-1}}$ liefert:

$$\sigma^2_{I_{i-1}}(0) = \hat{\sigma}^2_{I_{i-1}} \quad , \quad \sigma^2_{I_{i-1}}(\lambda') = 0 \quad \text{für ein } \lambda' \in \mathbb{R}$$

und

$$\frac{d}{d\lambda}\,\sigma^2_{I_{i-1}}(\lambda) = -\,\frac{1+a_{i-1}}{1-a_{i-1}} \quad .$$

Wir verwenden dazu den folgenden Hilfssatz.

<u>(4-35) Hilfssatz.</u> Die Differentialgleichung

$$y' = -\,\frac{c-x+2y}{c-x} \quad , \qquad c \neq 0 \tag{4-36}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = A$$

hat für $x \neq c$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$y = \frac{A+c}{c^2}\,(c-x)^2 - (c-x) \quad .$$

Für $A + c \neq 0$ hat y die eindeutig bestimmte Nullstelle bei $x' = \frac{A \cdot c}{A + c}$.

<u>Beweis.</u> Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Es ist

$$\frac{c - x + 2y}{c - x} = -1 + 2\,\frac{A + c}{c^2}\,(c - x) = -y' \quad .$$

Die übrigen Behauptungen verifiziert man unmittelbar. ●

Zu einem vorgegebenen $\underline{\hat{\sigma}} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ mit gewissen Eigenschaften wollen wir nun ein $\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)$ konstruieren, sodaß für ein $\lambda' \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma_{I_{i-1}}^{(i)(\lambda')2} = 0 \quad ,$$

$$\hat{F}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda')) = \hat{F}(\underline{\hat{\sigma}}) \quad .$$

<u>(4-37) Definition.</u> Es sei $2 \leq i \leq n$ und

$$\underline{\hat{\sigma}} := \left(\hat{\sigma}_{I_0}^2, \ldots, \hat{\sigma}_{I_n}^2, \hat{\sigma}_{D_1}^2, \ldots, \hat{\sigma}_{D_n}^2\right) \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$$

mit den Eigenschaften

$$\hat{\sigma}_{I_i}^2 = 0 \ , \quad \text{falls } i < n \tag{4-38a}$$

$$\hat{\sigma}_{I_{i-1}}^2 \geq 0 \ , \tag{4-38b}$$

$$\hat{\sigma}_{S_{i-2}}^2 + \hat{\sigma}_{D_{i-1}}^2 > 0 \ , \tag{4-38c}$$

wobei $\hat{\sigma}^2_{S_{i-2}} := \mathrm{var}\,(\hat{S}_{i-2})$.

Es sei

$$\lambda \in \Delta_i := \left(-\infty, \hat{\sigma}^2_{S_{i-2}} + \hat{\sigma}^2_{D_{i-1}}\right) \quad , \tag{4-39a}$$

$$\sigma^{(i)(\lambda)2}_{D_{i-1}} := \hat{\sigma}^2_{D_{i-1}} - \lambda \quad , \tag{4-39b}$$

$$\sigma^{(i)(\lambda)2}_{D_i} := \hat{\sigma}^2_{D_i} + \lambda \quad , \tag{4-39c}$$

$$\sigma^{(i)(\lambda)2}_{I_{i-1}} := \frac{\hat{\sigma}^2_{i-1}}{\left(\hat{\sigma}^2_{S_{i-2}} + \hat{\sigma}^2_{D_{i-1}}\right)^2}\left(\hat{\sigma}^2_{S_{i-2}} + \sigma^{(i)(\lambda)2}_{D_{i-1}}\right)^2 - \left(\hat{\sigma}^2_{S_{i-2}} + \sigma^{(i)(\lambda)2}_{D_{i-1}}\right) . \tag{4-39d}$$

Es sei jetzt

$$\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda) :=$$

$$\left(\hat{\sigma}^2_{I_0}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{I_{i-2}}, \sigma^{(i)(\lambda)2}_{I_{i-1}}, \hat{\sigma}^2_{I_i}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{D_{i-2}}, \sigma^{(i)(\lambda)2}_{D_{i-1}}, \sigma^{(i)(\lambda)2}_{D_i}, \hat{\sigma}^2_{D_{i+1}}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{D_n}\right) . \tag{4-40}$$

Mit den vorangegangenen Definitionen und Bezeichnungen gilt der folgende Satz.

(4-41) <u>Satz</u>. Es sei $2 \leqq i \leqq n$. $\underline{\hat{\sigma}} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ besitze die Eigenschaften (4-38). Für das zugehörige $\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)$, definiert gemäß (4-40), gilt dann

a) es ist $\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda) \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \quad \forall \lambda \in \Delta_i$

b) es ist $\sigma_{I_{i-1}}^{(i)}(\lambda)2 = 0$

genau dann, wenn $\lambda = \lambda_i' := \hat{\sigma}^2_{S_{i-1}}$

c) es ist $\hat{F}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda_i')) = \hat{F}(\underline{\hat{\sigma}})$.

<u>Beweis</u>. Es sei jetzt

$$A := \hat{\sigma}^2_{I_{i-1}}$$

$$c := \hat{\sigma}^2_{S_{i-2}} + \hat{\sigma}^2_{D_{i-1}} \quad .$$

Dann ist offensichtlich $c \neq 0$, $A + c \neq 0$ und

$$\sigma_{I_{i-1}}^{(i)}(\lambda)2 = \frac{A+c}{c^2}(c-\lambda)^2 - (c-\lambda) \quad . \tag{4-42}$$

Weiter hat man

$$\sigma_{i-1}^{(i)}(\lambda)2 = \frac{A+c}{c^2}(c-\lambda)^2 > 0 \qquad \forall \lambda \in \Delta_i \quad , \tag{4-43}$$

$$1 - a_{i-1}^{(i)}(\lambda) = \frac{(c-\lambda)}{\sigma_{i-1}^{(i)}(\lambda)2} = \frac{c^2}{A+c}(c-\lambda)^{-1} > 0 \quad \forall \lambda \in \Delta_i \tag{4-44}$$

$$\sigma_{S_{i-1}}^{(i)}(\lambda)2 = \frac{c-\lambda}{\sigma_{i-1}^{(i)}(\lambda)2} \cdot \left[\frac{A+c}{c^2}(c-\lambda)^2 - (c-\lambda)\right]$$

$$= c - \lambda - \frac{c^2}{A+c} = \frac{Ac}{A+c} - \lambda = \hat{\sigma}^2_{S_{i-1}} - \lambda \quad ,$$

daher

$$\sigma_i^{(i)(\lambda)2} = \sigma_{S_{i-1}}^{(i)(\lambda)2} + \sigma_{D_i}^{(i)(\lambda)2} + \hat{\sigma}_{I_i}^2 = \hat{\sigma}_{S_{i-1}}^2 + \hat{\sigma}_{D_i}^2 + \hat{\sigma}_{I_i}^2 = \hat{\sigma}_i^2 \quad . \qquad (4-45)$$

Wegen $\sigma_j^{(i)(\lambda)2} = \hat{\sigma}_j^2, \; a_j^{(i)(\lambda)} = \hat{a}_j \quad \forall\, j \neq i-1$

folgt mit (4-43), (4-44) die Behauptung a).

Aus Hilfssatz (4-35) folgt mit (4-42) unter Beachtung von

$$\frac{Ac}{A+c} = \hat{\sigma}_{S_{i-1}}^2$$

$$\sigma_{I_{i-1}}^{(i)(\lambda)2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \lambda = \lambda_i^! \quad ,$$

und damit die Behauptung b);

außerdem erhält man

$$\sigma_{I_{i-1}}^{(i)(0)2} = \hat{\sigma}_{I_{i-1}}^2 \quad . \qquad (4-46)$$

Weiter folgt aus Hilfssatz (4-35)

$$\frac{d}{d\lambda}\,\sigma_{I_{i-1}}^{(i)(\lambda)2} = -\frac{c-\lambda+2\sigma_{I_{i-1}}^{(i)(\lambda)2}}{c-\lambda} = \frac{\sigma_{i-1}^{(i)(\lambda)2} + \sigma_{I_{i-1}}^{(i)(\lambda)2}}{\hat{\sigma}_{S_{i-2}}^2 + \sigma_{D_{i-1}}^{(i)(\lambda)2}}$$

$$= -\frac{1+a_{i-1}^{(i)(\lambda)}}{1-a_{i-1}^{(i)(\lambda)}} \quad . \qquad (4-47)$$

Nun ist für $\lambda \in \Delta_i$

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)) = -\hat{F}_{\sigma^2_{D_{i-1}}}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)) + \hat{F}_{\sigma^2_{D_i}}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda))$$

$$+\hat{F}_{\sigma^2_{I_{i-1}}}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda))\frac{d}{d\lambda}\sigma^{(i)}_{I_{i-1}}(\lambda)^2 \quad .$$

Nach Hilfssatz (4-19) und (4-27) ist

$$-\hat{F}_{\sigma^2_{D_{i-1}}}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)) + \hat{F}_{\sigma^2_{D_i}}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)) = \frac{1+a^{(i)}_{i-1}(\lambda)}{1-a^{(i)}_{i-1}(\lambda)}\hat{F}_{\sigma^2_{I_{i-1}}}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)) \quad .$$

Mit (4-47) folgt daraus

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda)) = 0 \qquad \forall\ \lambda \in \Delta_i \quad ;$$

insbesondere ist also

$$\hat{F}(\underline{\sigma}^{(i)}(0)) = \hat{F}(\underline{\sigma}^{(i)}(\lambda_i^!)) \quad . \tag{4-48}$$

Wegen $\underline{\sigma}^{(i)}(0) = \hat{\underline{\sigma}}$ unter Beachtung von (4-46) ist damit die Behauptung c) gezeigt. ●

Durch mehrfache Anwendung von Satz (4-41) wollen wir jetzt zeigen, daß zu jedem $\hat{\underline{\sigma}} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ mit $\hat{\sigma}^2_{I_i} \geqq 0$, $0 \leqq i \leqq n$, $\hat{\sigma}^2_{D_j} > 0$, $1 \leqq j \leqq n$, ein $\underline{\sigma}' \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ mit $\sigma'^2_{I_i} = 0$, $1 \leqq i < n$ existiert, sodaß gilt

$$\hat{F}(\hat{\underline{\sigma}}) = \hat{F}(\underline{\sigma}') \quad .$$

(4-49) Satz. Sei

$$\underline{\hat{\sigma}} := \left(\hat{\sigma}^2_{I_0}, \dots, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1}, \dots, \hat{\sigma}^2_{D_n}\right) \varepsilon\ \hat{\mathbb{R}}^{2n+1} ,$$

und es sei

$$\hat{\sigma}^2_{I_i} \geqq 0 \qquad \forall\ i = 0, \dots, n ,$$

$$\hat{\sigma}^2_{D_j} > 0 \qquad \forall\ j = 1, \dots, n .$$

Mit

$$\underline{\sigma}' := \Big(\hat{\sigma}^2_{I_0}, 0, \dots, 0, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1} - \hat{\sigma}^2_{S_1}, \hat{\sigma}^2_{D_2} + \hat{\sigma}^2_{S_1} - \hat{\sigma}^2_{S_2}, \dots, \hat{\sigma}^2_{D_i} + \hat{\sigma}^2_{S_{i-1}} - \hat{\sigma}^2_{S_i}, \dots, \hat{\sigma}^2_{D_{n-1}} + \hat{\sigma}^2_{S_{n-2}} - \hat{\sigma}^2_{S_{n-1}}, \hat{\sigma}^2_{D_n} + \hat{\sigma}^2_{S_{n-1}}\Big) , \tag{4-50}$$

gilt dann

$$\hat{F}(\underline{\hat{\sigma}}) = \hat{F}(\underline{\sigma}') .$$

Beweis. Sei

$$\underline{\sigma}^{(n)} := \left(\hat{\sigma}^2_{I_0}, \dots, \hat{\sigma}^2_{I_{n-2}}, 0, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1}, \dots, \hat{\sigma}^2_{D_{n-2}}, \hat{\sigma}^2_{D_{n-1}} - \hat{\sigma}^2_{S_{n-1}}, \hat{\sigma}^2_{D_n} + \hat{\sigma}^2_{S_{n-1}}\right)$$

$$\underline{\sigma}^{(i)} := \Big(\hat{\sigma}^2_{I_0}, \dots, \hat{\sigma}^2_{I_{i-2}}, 0, \dots, 0, \hat{\sigma}^2_{I_n}, \hat{\sigma}^2_{D_1}, \dots, \hat{\sigma}^2_{D_{i-2}}, \hat{\sigma}^2_{D_{i-1}} - \hat{\sigma}^2_{S_{i-1}}, \hat{\sigma}^2_{D_i} + \hat{\sigma}^2_{S_{i-1}} - \hat{\sigma}^2_{S_i}, \dots, \hat{\sigma}^2_{D_{n-1}} + \hat{\sigma}^2_{S_{n-2}} - \hat{\sigma}^2_{S_{n-1}}, \hat{\sigma}^2_{D_n} + \hat{\sigma}^2_{S_{n-1}}\Big) .$$

für $2 \leqq i < n$.

Es ist $\underline{\sigma}^{(i)} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1} \ \forall \ i = 2,\ldots,n$;
denn für $2 \leqq i \leqq n$ ist

$$a_j^{(i)} = \hat{a}_j \quad \forall \ j < i-1 \quad , \qquad a_j^{(i)} = 0 \quad \forall \ j \geqq i-1 \quad ,$$

$$\sigma_j^{(i)2} = \hat{\sigma}_j^2 \quad \forall \ j < i-1 \quad ,$$

$$\sigma_j^{(i)2} = \hat{\sigma}_{D_j}^2 + \hat{\sigma}_{S_{j-1}}^2 - \hat{\sigma}_{S_j}^2 = \left(\hat{\sigma}_{D_j}^2 + \hat{\sigma}_{S_{j-1}}^2\right)(1 - \hat{a}_j) > 0 \quad \forall \ j,n > j \geqq i-1 \ ,$$

$$\sigma_n^{(i)2} = \hat{\sigma}_{D_n}^2 + \hat{\sigma}_{S_{n-1}}^2 + \hat{\sigma}_{I_n}^2 = \hat{\sigma}_n^2 \quad .$$

Wegen $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma}^{(2)}$ ist insbesondere $\underline{\sigma}' \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$.

Wir zeigen jetzt durch Induktion $\hat{F}(\hat{\underline{\sigma}}) = \hat{F}(\underline{\sigma}^{(2)})$.
$\hat{\underline{\sigma}}$ erfüllt für $i = n$ die Voraussetzungen (4-38) in
Definition (4-37).
Für das in (4-40) definierte $\underline{\sigma}^{(n)}(\lambda)$ ist mit
$\lambda_n' := \hat{\sigma}_{S_{n-1}}^2$ offensichtlich

$$\underline{\sigma}^{(n)} = \underline{\sigma}^{(n)}(\lambda_n') \quad .$$

Daher ist nach Satz (4-41)

$$\hat{F}(\hat{\underline{\sigma}}) = \hat{F}(\underline{\sigma}^{(n)}) \quad .$$

Angenommen, es sei für $n > j \geqq 2$

$$\hat{F}(\hat{\underline{\sigma}}) = \hat{F}(\underline{\sigma}^{(j+1)}) \quad .$$

Setzen wir in Definition (4-37) für das dortige $\hat{\underline{\sigma}}$ den

Vektor $\underline{\sigma}^{(j+1)}$ ein, so sind für $i = j$ die Voraussetzungen (4-38) erfüllt.

Für das dann gemäß (4-40) definierte $\underline{\sigma}^{(j)}(\lambda)$ ist mit

$\lambda_j^! := \hat{\sigma}^2_{S_{j-1}}$ nach Satz (4-41)b)

$\underline{\sigma}^{(j)} = \underline{\sigma}^{(j)}(\lambda_j^!)$.

Mit Satz (4-41)c) hat man

$\hat{F}(\underline{\sigma}^{(j+1)}) = \hat{F}(\underline{\sigma}^{(j)})$.

Durch Induktionsschluß folgt

$\hat{F}(\hat{\underline{\sigma}}) = \hat{F}(\underline{\sigma}^{(2)})$. ●

Mittels Satz (4-49) sind wir nun in der Lage, die auf Seite 49 beschriebene Funktion G anzugeben.

<u>(4-51) Satz</u>. Sei $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$ mit

$$\sigma^2_{I_i} \geqq 0 \quad , \quad 0 \leqq i \leqq n \quad ,$$

$$\sigma^2_{D_j} > 0 \quad , \quad 1 \leqq j \leqq n \quad .$$

Seien F, X, Y definiert gemäß (3-6), (3-7), (3-8);

sei (x^*,y^*) der Sattelpunkt von F auf $X \times Y$.

Sei weiter

$$Y' := \left\{ y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n \; , \; \sum_{i=1}^{n} y_i = M \right\} \quad ,$$

und $G: X \times Y' \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$G(x,y) := \sum_{i=1}^{n-1} \ell n\phi\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\left[\sigma_{D_i}^2 + \sigma_{S_{i-1}}^2 - \sigma_{S_i}^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right) + \ell n\phi\left(\ddot{U}(e^{x_n}) - \frac{y_n}{\left[\sigma_{D_n}^2 + \sigma_{S_{n-1}}^2 + \sigma_{I_n}^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Für den Sattelpunkt (x',y') von G auf $X \times Y'$ gilt dann

$$G(x',y') = F(x^*,y^*) \quad .$$

Beweis. Setzt man im Satz (4-49) $\hat{\underline{\sigma}} := \underline{\sigma}$, so ist für $\hat{\underline{\sigma}}$ und für das in (4-50) angegebene $\underline{\sigma}'$

$$F(x^*,y^*) = \hat{F}(\hat{\underline{\sigma}}) \quad ,$$

$$G(x',y') = \hat{F}(\underline{\sigma}') \quad .$$

Satz (4-49) liefert jetzt die Behauptung. ●

Man kann Satz (4-51) selbstverständlich auf wesentlich einfachere Weise erhalten.Man braucht dazu nur die y_i in F und Y durch $y_i(1-a_i)^{-1}$ zu substituieren und erhält G und Y'.
Da wir aber ohnehin die Differenzierbarkeitseigenschaften der optimalen Strategien und des Spielwerts studieren wollten und davon ja auch später (Satz (5-11)) explizit Gebrauch machen,haben wir,um Satz (4-51) zu erhalten,den umständlicheren Weg über die Ableitungen des Spielwerts eingeschlagen.
Hilfssatz (4-19) können wir außerdem benutzen,um die etwas überraschende Tatsache zu zeigen,daß eine Erhöhung der Meßgenauigkeit,d.h. Verminderung der Meßvarianz,durchaus nicht immer eine Erhöhung der Entdeckungswahrscheinlichkeit nach sich zieht,sondern sogar das Gegenteil bewirken kann (Anhang B).

5. Schranken für den Spielwert

Wir kehren jetzt zu den Voraussetzungen von Seite 9 zurück, d.h., wir betrachten im weiteren Verlauf der Arbeit nur noch solche $\underline{\sigma} \in \hat{\mathbb{R}}^{2n+1}$, für die gilt

$$\sigma^2_{I_i} \geqq 0 \quad , \quad 0 \leqq i \leqq n \quad , \qquad \sigma^2_{D_j} > 0 \quad , \quad 1 \leqq j \leqq n \quad .$$

Die Menge dieser $\underline{\sigma}$ nennen wir $\overline{\mathbb{R}}^{2n+1}$.
Das zu $\underline{\sigma}$ zugehörige $\underline{\sigma}'$ definieren wir wie in (4-50) durch

$$\begin{aligned} \sigma'^2_{I_0} &:= \sigma^2_{I_0} \\ \sigma'^2_{I_i} &:= 0 \quad , \qquad 1 \leqq i < n \\ \sigma'^2_{I_n} &:= \sigma^2_{I_n} \quad . \\ \sigma'^2_{D_1} &:= \sigma^2_{D_1} - \sigma^2_{S_1} \\ \sigma'^2_{D_i} &:= \sigma^2_{D_i} + \sigma^2_{S_{i-1}} - \sigma^2_{S_i} \quad , \qquad 2 \leqq i < n \\ \sigma'^2_{D_n} &:= \sigma^2_{D_n} + \sigma^2_{S_{n-1}} \quad . \end{aligned} \tag{5-1}$$

Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} \tau^2_i &:= \sigma^2_{D_i} + \sigma^2_{S_{i-1}} - \sigma^2_{S_i} \quad , \qquad 1 \leqq i < n \\ \tau^2_n &:= \sigma^2_{D_n} + \sigma^2_{S_{n-1}} + \sigma^2_{I_n} \quad . \end{aligned} \tag{5-2}$$

Mit Y' bezeichnen wir die Menge

$$Y' := \left\{ y = (y_1,\ldots,y_n) \varepsilon \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} y_i = M \right\} , \tag{5-3}$$

unter G verstehen wir die Funktion

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \ell n\phi \left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\tau_i} \right) , \tag{5-4}$$

definiert auf $X \times Y'$.
Den Sattelpunkt von G auf $X \times Y$ bezeichnen wir mit (x',y').
Weiter seien $\overline{x} \varepsilon X$, $\overline{y} \varepsilon Y$ bestimmt durch

$$\overline{x} := \left(\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha),\ldots,\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha) \right) , \tag{5-5}$$

$$\overline{y} := \left(\frac{1}{n}M,\ldots,\frac{1}{n}M \right) . \tag{5-6}$$

Offensichtlich gilt

(5-7) Bemerkung. Es ist $(x',y') = (\overline{x},\overline{y})$ genau dann, wenn $\tau_i = \tau_j \ \forall \ i,j$.

Dies folgt nämlich unmittelbar aus Hilfssatz (4-2).

Nach Satz (4-51) genügt es, wenn wir statt für F Schranken für G betrachten. Eine untere Schranke für G erhält man leicht.

(5-8) Hilfssatz. Mit $\tau := \min\limits_{1 \leq i \leq n} (\tau_i)$ ist

$$n\ell n\phi \left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)} \right) - \frac{M}{n\tau} \right) \leq G(x',y') , \tag{5-9}$$

und es gilt "=" genau dann, wenn $\tau_i = \tau_j \;\forall\; i,j$.

<u>Beweis</u>. Ist $\tau_i = \tau_j \;\forall\; i,j$, dann ist $G(x',y') = G(\overline{x},\overline{y})$ nach (5-7); der Ausdruck auf der linken Seite von (5-9) ist aber $G(\overline{x},\overline{y})$.

Sei nun $\tau_i > \tau$ für mindestens ein i. Man hat

$$G(x',y') \geqq G(x',\overline{y}) > \sum_{i=1}^{n} \ell n\, \phi\left(U(e^{x_i'}) - \frac{M}{n\tau}\right) =: G_\tau(x',\overline{y})$$

mit

$$G_\tau(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \ell n \phi\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\tau}\right) \quad .$$

Daher

$$G_\tau(x',\overline{y}) \geqq G_\tau(\overline{x},\overline{y}) \quad .$$

nach (5-7). Der Ausdruck links in (5-9) ist $G_\tau(\overline{x},\overline{y})$. •

Analog kann man nun zeigen, daß mit $\tau' = \max(\tau_i)$ gilt

$$n\,\ell n \phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n\,(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{n\tau'}\right) \geqq G(x',y') \quad . \qquad (5\text{-}10)$$

Wir werden jedoch mittels des folgenden Satzes eine schärfere obere Schranke angeben können.

<u>(5-11) Satz</u>. Gegeben sei $\underline{\sigma} \in \overline{\mathbb{R}}^{2n+1}$ und $\sigma_{I_0}^2 + \sigma_{I_n}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{D_i}^2 =: \Sigma^2$.

Auf der Menge $T := \left\{ t = (t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n,\; t_j \geqq \min\limits_{\underline{\underline{1\leq i\leq n}}} (\tau_i) \;\forall j,\; \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \Sigma^2 \right\}$

nimmt die Funktion

$$g(t) := \max_{y \varepsilon Y'} \min_{x \varepsilon X} \sum_{i=1}^{n} \ln \phi\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{t_i}\right)$$

das Maximum genau bei $t' := \left(n^{-\frac{1}{2}}\Sigma, \ldots, n^{-\frac{1}{2}}\Sigma\right)$ an.

Beweis. Es ist $\sum_{i=1}^{n} \tau_i^2 = \Sigma^2$, daher ist T nicht leer.

Ist $\tau_i = \tau_j \ \forall\, i,j$ so besteht T nur aus dem Punkt t' und der Satz ist daher richtig.

Wir nehmen jetzt an $\tau_i \neq \tau_j$ für mindestens ein Paar (i,j); der offene Kern T^O von T ist dann nicht leer.

Mit $\underline{\sigma}_t := (0,\ldots,0,t_1,\ldots,t_n) \, \varepsilon \, \overline{\mathbb{R}}^{2n+1}$ ist offensichtlich

$$g(t) = \hat{F}(\underline{\sigma}_t) \quad .$$

$\hat{F}(\underline{\sigma}_t)$ ist auf $(0,\ldots,0) \times T$ stetig und nimmt dort das Maximum in einem Punkt

$$\underline{\sigma}_{t'} := (0,\ldots,0,t_1',\ldots,t_n')$$

an. Angenommen, es gäbe t_i', t_j' mit $t_i' \neq t_j'$. O. B. d. A. sei $t_i' < t_j'$.

Wir definieren jetzt $t'(\lambda)$ durch

$$t_k'(\lambda) := t_k' \qquad \forall\, k \neq i,j$$

$$t_i'(\lambda) := \left[t_i'^2 + \lambda(t_j'^2 - t_i'^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$t_j'(\lambda) := \left[t_j'^2 + \lambda(t_i'^2 - t_j'^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

für $\lambda \varepsilon \left(\frac{-t_i'^2}{t_j'^2 - t_i'^2}, \frac{t_j'^2}{t_j'^2 - t_i'^2} \right)$.

Zumindest für $\lambda \varepsilon [0,1]$ ist

$$\underline{\sigma}_{t'}(\lambda) := (0,\ldots,0,t'(\lambda)) \; \varepsilon \; (0,\ldots,0) \times T \quad .$$

Mit Satz (4-14) erhält man

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{F}(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))(t_j'^2 - t_i'^2)}{\left[t_i'^2 + \lambda(t_j'^2 - t_i'^2)\right]^{\frac{3}{2}}} Q\left(U\left(e^{x_i^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))}\right) - \frac{y_i^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))}{\left[t_i'^2 + \lambda(t_j'^2 - t_i'^2)\right]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{y_j^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))(t_i'^2 - t_j'^2)}{\left[t_j'^2 + \lambda(t_i'^2 - t_j'^2)\right]^{\frac{3}{2}}} Q\left(U\left(e^{x_j^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))}\right) - \frac{y_j^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))}{\left[t_j'^2 + \lambda(t_i'^2 - t_j'^2)\right]^{\frac{1}{2}}}\right) .$$

Da $x^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))$, $y^*(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))$ das Gleichungssystem (3-28) löst, hat man mit der Abkürzung $x^* := x^*(\underline{\sigma}_{t'}(0))$, $y^* := y^*(\underline{\sigma}_{t'}(0))$

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{F}(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} Q\left(U(e^{x_i^*}) - \frac{y_i^*}{t_i'}\right) \cdot \frac{t_j'^2 - t_i'^2}{t_i'} \cdot \left[\frac{y_i^*}{t_i'^2} - \frac{y_j^*}{t_j'^2}\right]$$

woraus mit Satz (4-3)b) wegen $t_i' < t_j'$ folgt

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))\Big|_{\lambda=0} > 0 \quad .$$

Da nach Annahme $\underline{\sigma}_{t'}(0)$ eine Maximumsstelle von $\hat{F}$ auf $(0,\ldots,0)\times T$ ist, müßte gelten

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\underline{\sigma}_{t'}(\lambda))\Big|_{\lambda=0} \leqq 0 \quad .$$

Damit hat man einen Widerspruch. Also muß $t_i' = t_j'$ $\forall\, i,j$ sein.

Das bedeutet

$$t_i' = n^{-\frac{1}{2}}\Sigma \quad \forall\, i = 1,\ldots,n \quad .$$

Damit ist der Satz bewiesen. •

Der vorangegangene Satz liefert nun eine obere Schranke für G und damit für F.

<u>(5-12) Satz.</u> Sei $\underline{\sigma} \in \bar{\mathbb{R}}^{2n+1}$, $\Sigma^2 := \sigma_{I_0}^2 + \sigma_{I_n}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{D_i}^2$.

Dann gilt

$$F(x^*,y^*) \leqq n\ell n\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{\sqrt{n}\Sigma}\right) \qquad (5\text{-}13)$$

und es steht "=" genau dann, wenn

$$\tau_i = \tau_j \qquad \forall\, i,j \quad .$$

<u>Beweis.</u> Mit Satz (5-11) ist

$$G(x',y') = g(\tau_1,\ldots,\tau_n) \leqq g(n^{-\frac{1}{2}}\Sigma,\ldots,n^{-\frac{1}{2}}\Sigma)$$

mit "=" genau dann, wenn $\tau_i = n^{-\frac{1}{2}}\Sigma$ $\forall\, i$.

Wegen

$$g\left(n^{-\frac{1}{2}}\Sigma,\ldots,n^{-\frac{1}{2}}\Sigma\right) = n\ln\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{nn^{-\frac{1}{2}}\Sigma}\right)$$

nach (5-7), ist (5-13) gezeigt. •

Die Abschätzung (5-13) ist schärfer als die Abschätzung (5-10). Außer im Fall $\tau_i = \tau_j \;\forall\, i,j$, für den in beiden Abschätzungen Gleichheit eintritt, hat man nämlich

$$n \max_{1\leq i\leq n} (\tau_i) > n^{\frac{1}{2}}\Sigma \quad .$$

Auch die Abschätzung (5-9) kann noch verschärft werden. Außer im Fall $\tau_i = \tau_j \;\forall\, i,j$ ist nämlich

$$n \min_{1\leq i\leq n} (\tau_i) < \sum_{i=1}^{n} \tau_i$$

und es gilt

(5-14) Satz. Es ist

$$n\ln\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i}\right) \leq F(x^*,y^*)$$

und es steht "=" genau dann, wenn $\tau_i = \tau_j \;\forall\, i,j$.

Beweis. Offensichtlich ist

$$\tilde{y} := \left(\frac{\tau_1}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i} M,\ldots,\frac{\tau_n}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i} M\right) \varepsilon\, Y' \quad ,$$

daher

$$G(x',y') \geqq G(x',\tilde{y}) \quad .$$

Gilt "=", so folgt $y' = \tilde{y}$ aufgrund der Eindeutigkeit des Sattelpunktes.

Da $(x',\tilde{y})$ dann das Gleichungssystem (3-24),...,(3-27) löst, folgt aus (3-26)

$$x' = \left(\frac{1}{n}\,\ell n(1-\alpha),\ldots,\frac{1}{n}\,\ell n(1-\alpha)\right) \quad ,$$

was nach Satz (4-2) genau bei $\tau_i = \tau_j \;\forall\; i,j$ der Fall ist.

Setzen wir

$$\tilde{G}(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \ell n\phi\left(U(e^{x_i}) - \frac{y_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i}\right) \quad ,$$

so ist mit (5-7)

$$G(x',\tilde{y}) = \tilde{G}(x',\overline{y}) \geqq \tilde{G}(\overline{x},\overline{y}) = n\ell n\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i}\right) .$$

Damit ist der Satz (5-14) gezeigt. ●

Satz (5-12) und (5-14) ergeben zusammen

<u>(5-15) Satz.</u> Es gilt

$$n\ell n\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i}\right) \leqq F(x^*,y^*) \leqq n\ell n\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{n^{\frac{1}{2}}\sum}\right) . \tag{5-16}$$

Ist $\tau_i = \tau_j \; \forall \; i,j$, so steht überall "=",

andernfalls überall "<".

Beweis folgt aus Satz (5-12) und Satz (5-14). •

6. Spielwertverhalten bei veränderlicher Inventurzahl

Wir sind bis jetzt von einer festen Zerlegung $\{t_A = t_0 < t_1 <,\ldots,< t_{n-1} < t_n = t_E\}$ des Zeitintervalls $J = [t_A, t_E]$ ausgegangen.

Erfolgt im Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ eine Entwendung, so kann der Inspektor dies frühestens zum Zeitpunkt t_i feststellen, im ungünstigsten Fall verstreicht also zwischen Entwendung und Entdeckung die Zeit $(t_i - t_{i-1})$. Definieren wir die Entdeckungszeit T als die größte mögliche Zeitspanne zwischen erfolgter Entwendung und möglicher Entdeckung, so ist also

$$T := \max_{1 \leqq i \leqq n} (t_i - t_{i-1}) \quad .$$

Für den Inspektor kann es nun wünschenswert sein, daß T möglichst klein ist, z. B. dann, wenn seine Gegenmaßnahmen umso wirkungsvoller sind, je früher sie nach erfolgter Entwendung ergriffen werden. Bei hinreichend großer Anzahl von Teilungspunkten kann er T natürlich beliebig klein machen. Die Frage ist, ob dann nicht die Entdeckungswahrscheinlichkeit unzulässig klein wird.

Umgekehrt kann man fragen, gibt es eine ausgezeichnete Zerlegung von J, sodaß die Entdeckungswahrscheinlichkeit maximal wird?

Wir wollen nun die möglichen Zerlegungen des Zeitintervalles J charakterisieren. Offensichtlich werden Startinventar I_A und Endinventar I_E durch die Aufteilungen von J nicht verändert. Ebenso ist auch der Gesamtdurchfluß D im Zeitintervall J fest.

Einem Zeitpunkt $t_i \in (t_A, t_E)$ weisen wir die Inventarvarianz

$\sigma^2_{I_{t_i}} \geqq 0$ zu, dem Durchfluß zwischen zwei $t_{j-1}, t_j \varepsilon J$, $t_{j-1} < t_j$ die Durchflußvarianz $\sigma^2_{D_{t_{j-1},t_j}} > 0$.

Die Summe aller Durchflußvarianzen muß dabei die Varianz des Gesamtdurchflusses D ergeben.

Da es auf die spezielle Lage der Teilungspunkte von (t_A, t_E) nicht ankommt, sondern nur auf die Varianzen der Messungen, erfassen wir die Menge aller Zerlegungen von J mit allen zulässigen Varianzen durch die Menge

$$Z: = \left\{ \underline{\sigma}: = (\sigma^2_{I_0}, \ldots, \sigma^2_{I_n}, \sigma^2_{D_1}, \ldots, \sigma^2_{D_n}) \varepsilon \mathbb{R}^{2n+1}, \sigma^2_{I_0} = \sigma^2_{I_A}, \sigma^2_{I_n} = \sigma^2_{I_E}, \right.$$

$$\left. \sigma^2_{I_i} \geqq 0, 0 < i < n, \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_{D_j} = \Sigma^2_D, \sigma^2_{D_j} > 0, 1 \leqq j \leqq n, n \varepsilon N \right\} \qquad (6\text{-}1)$$

mit festem $\sigma^2_{I_A} \geqq 0$, $\sigma^2_{I_E} \geqq 0$, $\Sigma^2_D > 0$.

Als erstes wollen wir jetzt die Existenz eines Elementes von Z nachweisen, für das die Entdeckungswahrscheinlichkeit maximal wird.

6.1 Eine Zerlegung des Zeitintervalles, die den Spielwert minimiert

Wir werden zeigen, daß $\underline{\sigma}^0: = (\sigma^2_{I_0}, \sigma^2_{I_E}, \Sigma^2_D)$ die Entdeckungswahrscheinlichkeit maximiert. Dabei nützen wir eine weitere Eigenschaft der Funktion Q aus.

(6-2) Hilfssatz. a) $Q^2(U(e^x))$ ist streng konvex auf $(-\infty, 0]$.

b) Sei X_t definiert wie in (3-12) und $S: X_t \to \mathbb{R}$ gemäß

$$S(x) := \sum_{i=1}^{n} Q^2(U(e^{x_i})) \tag{6-3}$$

Hat $x \varepsilon X$ nicht die Gestalt eines $x^{(j)}$, $1 \leq j \leq n$

$$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \quad , \quad x_i^{(j)} = 0 \text{ für } i \neq j,\ x_j^{(j)} = \ln(1-\alpha) \quad ,$$

dann ist

$$S(x) < Q^2(U(e^{\ln(1-\alpha)})) \quad .$$

<u>Beweis</u>. a) $Q^2(U(e^x))$ ist streng konvex auf $(-\infty,0]$, denn

$$\frac{d}{dx}\, Q^2(U(e^x)) = \frac{2}{Q(U(e^x))}\, Q'(U(e^x))Q(U(e^x)) = 2Q'(U(e^x))$$

wächst streng monoton auf $(-\infty,0]$ nach Hilfssatz (3-11)c).

b) Ist daher $x_i \varepsilon (-\infty,0]$, $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar (i,j), $\lambda_i < 1$ für mindestens ein i, dann ist

$$Q^2\left(U\left(e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}\right)\right) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q^2(U(e^{x_i})) \quad . \tag{6-4}$$

Sei $x \varepsilon X$, $x \neq x^{(j)}$ $\forall\, j = 1,\ldots,n$.

Dann gibt es $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $\lambda_j < 1$ für mindestens ein j, mit

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^{(j)} \quad .$$

Man hat mit (6-4)

$$Q^2(U(e^{\ln(1-\alpha)})) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q^2\left(U\left(e^{x_i^{(j)}}\right)\right)\right] >$$

$$> \sum_{i=1}^{n} Q^2(U(e^{x_i})) = S(x) \quad . \bullet$$

Für $\underline{\sigma} \varepsilon Z$ sei $\underline{\sigma}'$ der in (5-1) definierte zu $\underline{\sigma}$ gehörige Vektor. Mit $F_{\underline{\sigma}}$ bzw. $G_{\underline{\sigma}'}$ bezeichnen wir die mit $\underline{\sigma}$ bzw. $\underline{\sigma}'$ definierten Funktionen F,G.

$(x^*(\underline{\sigma}),y^*(\underline{\sigma}))$ bzw. $(x'(\underline{\sigma}'),y'(\underline{\sigma}'))$ sei der Sattelpunkt von $F_{\underline{\sigma}}$ auf $X \times Y$ bzw. von $G_{\underline{\sigma}'}$ auf $X \times Y'$.

Wir wollen nun zeigen, daß für

$$\underline{\sigma}^O := \left(\sigma^2_{I_A}, \sigma^2_{I_E}, \Sigma^2_D\right) \quad , \tag{6-5}$$

gilt

$$F_{\underline{\sigma}^O}(x^*(\underline{\sigma}^O), y^*(\underline{\sigma}^O)) < F_{\underline{\sigma}}(x^*(\underline{\sigma}), y^*(\underline{\sigma})) \tag{6-6}$$

$\forall\ \underline{\sigma} \varepsilon Z$ mit $\underline{\sigma} \neq \underline{\sigma}^O$.

(6-6) ist nach Satz (4-51) äquivalent mit

$$G_{\underline{\sigma}^{O'}}(x'(\underline{\sigma}^{O'}), y'(\underline{\sigma}^{O'})) < G_{\underline{\sigma}'}(x'(\underline{\sigma}'), y'(\underline{\sigma}')) \quad \forall\ \underline{\sigma} \neq \underline{\sigma}^O \quad . \tag{6-7}$$ +

Sei nun $\underline{\sigma} := \left(\sigma^2_{I_O}, \ldots, \sigma^2_{I_n}, \sigma^2_{D_1}, \ldots, \sigma^2_{D_n}\right) \varepsilon Z \quad , \quad \underline{\sigma} \neq \underline{\sigma}^O.$

Offensichtlich ist $n > 1$.

+Man kann (6-6) auch direkt ohne den Umweg über (6-7) zeigen, vergl.[16]; der Beweis ist dann allerdings aufwendiger als der hier gegebene.

Wir setzen

$$x' := x'(\underline{\sigma}') \quad ,$$

$$\Sigma^2 := \sigma_{I_A}^2 + \sigma_{I_E}^2 + \Sigma_D^2$$

$$\lambda_i := \tau_i^2 \cdot \Sigma^{-2} \quad ,$$

wobei τ_i wie in (5-2) definiert sei.

Wegen $\sum_{i=1}^{n} \tau_i^2 = \Sigma^2$ hat man

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad . \tag{6-8}$$

Wir betrachten nun die Differenz

$$\Delta(M) := \ell n\phi\left(U(e^{\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{\Sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n} \ell n\phi\left(U(e^{x_i'}) - \frac{\tau_i M}{\Sigma^2}\right) \quad . \tag{6-9}$$

Es gilt

<u>(6-9) Hilfssatz.</u> Für Δ, definiert in (6-9), gilt

$$\Delta(M) < 0 \qquad \forall\, M > 0 \quad .$$

<u>Beweis.</u> Wir werden zeigen

a) $\Delta(0) = 0$,

b) $\left.\frac{d}{dM}\Delta(M)\right|_{M=0} < 0$.

c) $\frac{d^2}{dM^2}\Delta(M) < 0 \qquad \forall\, M > 0$.

Aus b)c) folgt dann

$$\frac{d}{dM}\,\Delta(M) < 0 \qquad \forall\ M > 0 \quad ,$$

daraus folgt mit a) die Behauptung.

a) $\Delta(0) = \ln(1-\alpha) - \sum_{i=1}^{n} x_i' = 0 \quad ,$

denn $x' \in X$.

b) $$\frac{d}{dM}\,\Delta(M)\Big|_{M=0} = -\frac{1}{\Sigma}\,Q(U(e^{\ln(1-\alpha)})) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{\Sigma^2}\,Q(U(e^{x_i'})) \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq -\frac{1}{\Sigma}\;Q\Big(U(e^{\ln(1-\alpha)})\Big) + \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\Sigma^4}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}Q^2(U(e^{x_i'}))\right]^{\frac{1}{2}} \overset{(**)}{=}$$

$$= \frac{-1}{\Sigma}\left(Q(U(e^{\ln(1-\alpha)})) - \left[\sum_{i=1}^{n}Q^2(U(e^{x_i'}))\right]^{\frac{1}{2}}\right) \overset{(***)}{<} \quad 0 \;.$$

Hierbei gilt Ungl. (*) aufgrund der Schwarz'schen Ungleichung, Gleichung (**) folgt aus (6-8), und Ungl. (***) ergibt sich aus Hilfssatz (6-2) unter Beachtung von $x' \neq x^{(j)}$ wegen $x_i' < 0\ \forall\ i$ nach Satz (3-61), (3-66).

c) für i_0 gelte $$Q'\left(U\left(e^{x_{i_0}'}\right) - \frac{\tau_{i_0}M}{\Sigma^2}\right) = \min_{1\leq i\leq n} Q'\left(U(e^{x_i'}) - \frac{\tau_i M}{\Sigma^2}\right) \;.$$

Man hat für $M > 0$

$$\frac{d^2}{dM^2}\,\Delta(M) = \frac{1}{\Sigma^2}\,Q'\left(U(e^{\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{\Sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i^2}{\Sigma^4}\,Q'\left(U(e^{x_i'}) - \frac{\tau_i M}{\Sigma^2}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\Sigma^2}\,Q'\left(U(e^{\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{\Sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i^2}{\Sigma^4}\,Q'\left(U\left(e^{x_{i_0}'}\right) - \frac{\tau_{i_0} M}{\Sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Sigma^2}\left[Q'\left(U(e^{\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{\Sigma}\right) - Q'\left(U\left(e^{x_{i_0}'}\right) - \frac{\tau_{i_0} M}{\Sigma^2}\right)\right] \overset{(+)}{<} 0 \quad .$$

Die Ungl. (+) folgt aus Hilfssatz (3-11) c) unter Beachtung von

$$\frac{1}{\Sigma} > \frac{\tau_{i_0}}{\Sigma^2} \quad , \quad \text{denn } \tau_{i_0} < \Sigma \quad ,$$

$$x_i' > \ell n(1-\alpha) \quad , \quad \text{denn } x_i' < 0 \quad \forall i \text{ und } \sum_{i=1}^{n} x_i' = \ell n(1-\alpha) \quad . \bullet$$

Mit Hilfssatz (6-9) können wir die Ungl. (6-6) beweisen.

<u>(6-10) Satz</u>. Sei $\underline{\sigma} \in Z$, $\underline{\sigma} \neq \underline{\sigma}^0$. Dann ist

$$F_{\underline{\sigma}^0}(x^*(\underline{\sigma}^0), y^*(\underline{\sigma}^0)) < F_{\underline{\sigma}}(x^*(\underline{\sigma}), y^*(\underline{\sigma})) \quad .$$

<u>Beweis</u>. Es genügt $G_{\underline{\sigma}^{0'}}(x'(\underline{\sigma}^{0'}), y'(\underline{\sigma}^{0'})) < G_{\underline{\sigma}'}(x'(\underline{\sigma}'), y'(\underline{\sigma}'))$

zu zeigen.

Sei $\tilde{y} := (\lambda_1 M, \ldots, \lambda_n M)$.

Mit (6-8) ist $\tilde{y} \in Y'$.

Offensichtlich ist für festes M

$$\Delta(M) = G_{\underline{\sigma}^{O'}}(x'(\underline{\sigma}^{O'}), y'(\underline{\sigma}^{O'})) - G_{\underline{\sigma}'}(x'(\underline{\sigma}'), \tilde{y}) \quad .$$

Mit Hilfssatz (6-9) folgt wegen

$$G_{\underline{\sigma}'}(x'(\underline{\sigma}'), \tilde{y}) \leqq G_{\underline{\sigma}'}(x'(\underline{\sigma}'), y'(\underline{\sigma}'))$$

die Behauptung. ●

Mit Satz (6-10) ist die zweite der beiden zu Beginn von Kapitel 6 gestellten Fragen vollständig beantwortet.
Die erste Frage können wir nicht in voller Allgemeinheit beantworten, sondern nur unter zusätzlichen Voraussetzungen.

6.2 Spielwertverhalten für große Inventurzahlen

Bevor wir mit der Behandlung des Problems beginnen, beweisen wir einen Hilfssatz, den wir später benötigen.

(6-11) Hilfssatz. Sei $k > 0$ und

$$K_n(M) := n \ln \phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n} \ln(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{\sqrt{n}k}\right) \quad .$$

Für jedes $M > 0$ ist dann

a) $K_n(M) < K_{n+1}(M) \quad \forall\, n \in N$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} K_n(M) = \ln(1-\alpha) \quad$ für jedes $M \geqq 0$.

<u>Beweis.</u> a) Sei für $n \in N$ und $M \geqq 0$

$$D_n(M) := K_{n+1}(M) - K_n(M) \quad .$$

Wir zeigen $D_n(M) > 0 \quad \forall\, M > 0$,

indem wir nachweisen, daß

$$D_n(0) = 0, \quad \frac{d}{dM} D_n(M)\Big|_{M=0} > 0, \quad \frac{d^2}{dM^2} D_n(M) > 0 \qquad \forall\, M \geqq 0$$

ist.

1) $D_n(0) = \ln(1-\alpha) - \ln(1-\alpha) = 0$.

2) $$\frac{d}{dM} D_n(M)\Big|_{M=0} = \frac{-1}{k}\left[\sqrt{n+1}\; Q\left(U\left(e^{\frac{1}{n+1}\ln(1-\alpha)}\right)\right) - \sqrt{n}\; Q\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}\right)\right)\right] \quad .$$

Offensichtlich ist $\frac{d}{dM} D_n(M)\Big|_{M=0} > 0$

genau dann, wenn gilt

$$\frac{n}{n+1}\, Q^2\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}\right)\right) > Q^2\left(U\left(e^{\frac{1}{n+1}\ln(1-\alpha)}\right)\right) \quad . \qquad (6\text{-}12)$$

Nun ist $Q^2(U(e^x))$ nach Hilfssatz (6-2) auf $(-\infty,0]$ streng konvex; weiter ist

$$Q^2(U(e^0)) = 0 \quad .$$

Daher

$$\frac{n}{n+1} Q^2(U(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)})) = \frac{1}{n+1} Q^2(U(e^{0})) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} Q^2(U(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}))$$

$$> Q^2(U(e^{\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)})) \quad .$$

Also gilt (6-12); daher

$$\frac{d}{dM} D_n(M)\Big|_{M=0} > 0 \quad .$$

3) $$\frac{d^2}{dM^2} D_n(M) = \frac{1}{k^2}\left[Q'\left(U(e^{\frac{1}{n+1}\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{\sqrt{n+1}k}\right) - Q'\left(U(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{\sqrt{n}k}\right)\right].$$

Da Q' nach Hilfssatz (3-11)c) streng monoton wächst, folgt $\forall\ M \geqq 0$,

$$\frac{d^2}{dM^2} D_n(M) > 0 \quad .$$

Mit 1), 2), 3) ist die Behauptung gezeigt.

b) Wegen a) und weil gilt

$$K_n(M) \leqq \ell n(1-\alpha) \quad \forall\ M \geqq 0 \quad ,$$

konvergiert $K_n(M)$ gegen einen endlichen Wert.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert mit

$$\ell n(1-\alpha) = n\ell n\phi(U(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}))$$

$$\left| \ln(1-\alpha) - n \ln \phi \left(U(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}) - \frac{M}{\sqrt{n}k} \right) \right| =$$

$$= n\, Q \left(U(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}) - \frac{M_n}{\sqrt{n}k} \right) \cdot \frac{M}{\sqrt{n}k} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{n}\, Q \left(U(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}) - \frac{M}{\sqrt{n}k} \right) \frac{M}{k} \quad ,$$

wobei $0 \leqq M_n \leqq M$.

Mit den Abkürzungen

$$S := \ln(1-\alpha), \qquad m: = \frac{M}{k}$$

genügt es nun, zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\; Q(U(e^{\frac{S}{n}}) - \frac{m}{\sqrt{n}}) = 0 \quad . \tag{6-13}$$

Für hinreichend großes n ist nach Definition von Q

$$(\sqrt{n}\, Q\, (U(e^{\frac{S}{n}}) - \frac{m}{\sqrt{n}}))^2 < n\; e^{-(U(e^{\frac{S}{n}}) - \frac{m}{\sqrt{n}})^2} <$$

$$< n\; e^{-\frac{3}{4}\, U^2(e^{\frac{S}{n}})} = S\, \frac{e^{-\frac{3}{4}\, U^2(e^t)}}{t}$$

mit $t: = \frac{S}{n}$.

Nach l'Hospital hat man

$$\lim_{t\to 0-} S\,\frac{e^{-\frac{3}{4}U^2(e^t)}}{t} = \lim_{t\to 0-}\left[-S\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}\,e^t\,U(e^t)\,e^{\frac{1}{2}U^2(e^t)}\;e^{-\frac{3}{4}U^2(e^t)}\right] \leqq$$

$$\leqq -S\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}\lim_{t\to 0-}\left[U(e^t)\,e^{-\frac{1}{4}U^2(e^t)}\right] = 0 \quad .$$

Damit ist (6-13) gezeigt und die Behauptung b) bewiesen. •

Die Frage nach dem Verhalten der Entdeckungswahrscheinlichkeit, wenn die Entdeckungszeit T gegen 0 geht, können wir nur für eine spezielle Klasse von Zerlegungen aus Z beantworten. Die Entdeckungswahrscheinlichkeit wird ja bestimmt durch die $\sigma^2_{I_i}, \sigma^2_{D_i}, \sigma^2_{S_{i-1}}$. Während $\sigma^2_{I_i}, \sigma^2_{D_i}$ direkt aus dem Vektor $\underline{\sigma}$ zu entnehmen sind, ist $\sigma^2_{S_{i-1}}$ im allgemeinen eine nichtlineare Funktion aller $\sigma^2_{D_k}, \sigma^2_{I_j}$, $k = 1,\ldots,i-1$, $j = 0,\ldots,i-1$. In der von uns betrachteten speziellen Klasse von Zerlegungen besitzen die $\sigma^2_{S_{i-1}}$ Eigenschaften, die es uns ermöglichen, das quantitative Verhalten der Entdeckungswahrscheinlichkeit für $T \to 0$ anzugeben. Für beliebige Zerlegungen aus Z besitzen die $\sigma^2_{S_{i-1}}$ diese Eigenschaften im allgemeinen nicht.

Wir betrachten von vornherein nur diejenigen Zerlegungen mit der Eigenschaft+

+Diese Einschränkung ist nicht völlig unrealistisch. Bei vorgegebener Anzahl n-1 der Teilungspunkte von (t_A, t_E) wird T minimiert wenn $t_i - t_{i-1} = \frac{t_E - t_A}{n}\ \forall\ 1 \leqq i \leqq n$. Ist die Durchflußvarianz proportional der Zeitspanne, während der Durchfluß gemessen wird, so ist dann $\sigma^2_{D_i} = \frac{1}{n}\Sigma^2_D\ \forall\ i = 1,\ldots,n$.

$$\sigma^2_{D_i} = \frac{1}{n} \Sigma^2_D \quad \forall\ i = 1,..,n.$$

Zusätzlich nehmen wir an [+]: die Folge $\sigma^2_{I_i}$,$i = 0,1,..$ ist monoton nicht wachsend.

Unter den obigen Annahmen können wir zeigen ,daß die Entdeckungswahrscheinlichkeit für $T \to 0$ gegen die Fehlalarmwahrscheinlichkeit konvergiert.

<u>(6-14) Satz</u>. Sei $0 \leqq \sigma^2_{I_{i+1}} \leqq \sigma^2_{I_i} \quad \forall\ i = 0,1,2,...$

Sei

$$\underline{\sigma}^{(n)} := (\sigma^2_{I_0}, \sigma^2_{I_1}, ..., \sigma^2_{I_{n-1}}, \sigma^2_{I_E}, \frac{1}{n} \Sigma^2_D, ..., \frac{1}{n} \Sigma^2_D) \in Z.$$

Dann gilt,wenn $F_{\underline{\sigma}^{(n)}}$ die mit $\underline{\sigma}^{(n)}$ definierte Funktion F bezeichnet :

$$\lim_{n\to\infty} F_{\underline{\sigma}^{(n)}} (x^*(\underline{\sigma}^{(n)}), y^*(\underline{\sigma}^{(n)})) = \ln(1-\alpha) \quad .$$

<u>Beweis</u>. 1) Ist $\sigma^2_{I_0} = 0$,dann ist $\sigma^2_{I_i} = 0 \ \forall\ i$ nach Voraussetzung,daher

$$\sigma^{(n)2}_{S_i} = 0 \quad \forall\ i = 1,..,n-1.$$

Also ist

$$\tau^{(n)}_i \geqq (\frac{1}{n} \Sigma^2_D)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ i,n \in N,\ i \leqq n \quad .$$

Das bedeutet

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i^{(n)} \geqq n^{\frac{1}{2}} \Sigma_D \quad .$$

Die obige Ungleichung ergibt mit Ungl. (5-16)

[+] Wir erfassen damit den in der Anwendung häufig auftretenden Fall,daß die Varianzen der Messungen des physikalischen Inventars alle denselben Wert haben.

$$n\ell n\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{n^{\frac{1}{2}}\sum_D}\right) \leqq F_{\underline{\sigma}^{(n)}}\left(x^*(\underline{\sigma}^{(n)}),y^*(\underline{\sigma}^{(n)})\right) \leqq$$

$$\leqq n\ell n\phi\left(U\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}\right) - \frac{M}{n^{\frac{1}{2}}\left(\sigma^2_{I_A} + \sigma^2_{I_E} + \sum^2_D\right)^{\frac{1}{2}}}\right) ,$$

woraus mit Hilfssatz (6-11) b) die Behauptung folgt.

2) Sei $\sigma^2_{I_O} > 0$.
Es ist

$$\sigma^{(n)2}_{S_i} = \left(\sigma^{(n)2}_{S_{i-1}} + \frac{1}{n}\sum^2_D\right)\frac{\sigma^2_{I_i}}{\sigma^{(n)2}_{S_{i-1}} + \frac{1}{n}\sum^2_D + \sigma^2_{I_i}} .$$

Wegen $\sigma^{(n)2}_{S_O} = \sigma^2_{I_O} > 0$ gibt es daher ein n_O, so daß gilt

$$\sigma^{(n)2}_{S_O} \geqq \sigma^{(n)2}_{S_1} \quad \forall\ n \geqq n_O . \tag{6-15}$$

Wir zeigen nun : $\sigma^{(n)2}_{S_j} \geqq \sigma^{(n)2}_{S_{j+1}} \quad \forall\ n \geqq n_O,\ j < n-1$. (6-16)

Angenommen nämlich, es gäbe $n' \geqq n_O$, so daß (6-16) nicht für alle $j < n'-1$ richtig wäre. Sei j_O das kleinste aller derartigen j.

Wegen (6-15) ist $j_O > 0$. Man hat

$$0 < \sigma^{(n')2}_{S_{j_O+1}} - \sigma^{(n')2}_{S_{j_O}} = \left(\sigma^{(n')2}_{S_{j_O}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D\right)\frac{\sigma^2_{I_{j_O+1}}}{\sigma^{(n')2}_{S_{j_O}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D + \sigma^2_{I_{j_O+1}}}$$

$$- \left(\sigma^{(n')2}_{S_{j_O-1}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D\right)\frac{\sigma^2_{I_{j_O}}}{\sigma^{(n')2}_{S_{j_O-1}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D + \sigma^2_{I_{j_O}}} \quad \overset{(*)}{\leqq}$$

$$\leqq \sigma^2_{I_{j_O}}\left[\frac{\sigma^{(n')2}_{S_{j_O}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D}{\sigma^{(n')2}_{j_O} + \frac{1}{n'}\sum^2_D + \sigma^2_{I_{j_O}}} - \frac{\sigma^{(n')2}_{S_{j_O-1}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D}{\sigma^{(n')2}_{S_{j_O-1}} + \frac{1}{n'}\sum^2_D + \sigma^2_{I_{j_O}}}\right] . \tag{6-17}$$

Bei Ungleichung (*) wurde die Voraussetzung $\sigma^2_{I_{j_O}} \geqq \sigma^2_{I_{j_O+1}}$

zusammen mit dem folgenden, leicht einzusehenden Sachverhalt ausgenutzt:

$$\frac{x+a}{x+b} \text{ wächst streng monoton in } x \neq -b \iff a < b\,. \qquad (6\text{-}18)$$

Aus (6-17) folgt nun wegen (6-18) : $\sigma^{(n')2}_{S_{j_0-1}} < \sigma^{(n')2}_{S_{j_0}}$ und damit ein Widerspruch zur Definition von j_0.

Also gilt (6-16). Daraus folgt

$$\tau^{(n)}_{i+1} = \left(\sigma^{(n)2}_{S_i} - \sigma^{(n)2}_{S_{i+1}} + \frac{1}{n}\Sigma^2_D\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \left(\frac{1}{n}\Sigma^2_D\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\ n-1 > i,\ n \geqq n_0.$$

Wegen

$$\tau^{(n)}_n = \left(\sigma^{(n)2}_{S_{n-1}} + \frac{1}{n}\Sigma^2_D + \sigma^2_{I_E}\right) \geqq \left(\frac{1}{n}\Sigma^2_D\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\ n\,,$$

heißt das

$$\sum_{i=1}^{n} \tau^{(n)}_i \geqq n^{\frac{1}{2}}\Sigma_D \qquad \forall\ n \geqq n_0\,.$$

Aus Satz (5-15) folgt mit Hilfssatz (6-11)b) nun die Behauptung. •

<u>(6-19) Korollar.</u> Sei $\underline{\sigma}^{(n)}$ definiert wie in Satz (6-14) und gelte zusätzlich

$$\sigma^2_{I_i} = 0 \ \forall\ i\,, \qquad \sigma^2_{I_E} = 0\,.$$

Dann gilt für jedes $n \in N$

$$F_{\underline{\sigma}^{(n+1)}}\left(x^*(\underline{\sigma}^{(n+1)}), y^*(\underline{\sigma}^{(n+1)})\right) > F_{\underline{\sigma}^{(n)}}\left(x^*(\underline{\sigma}^{(n)}), y^*(\underline{\sigma}^{(n)})\right)\,.$$

Beweis. Nach Konstruktion von $\underline{\sigma}^{(n)}$ ist $\tau_i^{(n)} = \tau_j^{(n)}$ $\forall$ $i,j \leqq n$.

Mit Satz (5-15) hat man

$$F_{\underline{\sigma}^{(n)}}(x^*(\underline{\sigma}^{(n)}), y^*(\underline{\sigma}^{(n)})) = n \ell n \phi \left(U(e^{\frac{1}{n}\ell n(1-\alpha)}) - \frac{M}{n^{\frac{1}{2}} \sum_D} \right)$$

für jedes $n \in N$.

Aus Hilfssatz (6-11) a) folgt die Behauptung. •

Bei gegebenem $\underline{\sigma}$ ist die Entdeckungswahrscheinlichkeit P_n gegeben durch

$$P_n = 1 - \exp\left[F_{\underline{\sigma}}(x^*(\underline{\sigma}), y^*(\underline{\sigma}))\right] \quad .$$

Unter den Voraussetzungen von Satz (6-14) konvergiert P_n also gegen die Fehlalarmwahrscheinlichkeit α. Unter der Voraussetzung von Korollar (6-19) gilt zusätzlich sogar

$$P_n > P_{n+1} \qquad \forall \; n \in N.$$

7. Bestimmung des Wertes der Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit durch Lösung eines nichtkooperativen Zweipersonennichtkonstantsummenspiels

Im vorangegangenen Teil der Arbeit ging die Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit α als fest vorgegebener Wert in das Spiel ein. Damit wurde unterstellt, daß kontrollierende und kontrollierte Partei sich vor Beginn des Spiels auf einen gemeinsamen Wert von α einigen. Da eine höhere Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit eine größere Entdeckungswahrscheinlichkeit zur Folge hat, würde die kontrollierende Partei ein großes α wählen. Ein Fehlalarm verursacht für die kontrollierte Partei im allgemeinen Kosten, sie würde daher ein kleines α vorziehen.
Diese Konfliktsituation wollen wir jetzt mittels eines nichtkooperativen Nichtkonstantsummenspiels lösen.

7.1 Konstruktion des Nichtkonstantsummenspiels

Wir gehen von folgender Situation aus.
Der Betreiber entscheidet sich mit Wahrscheinlichkeit p, die Materialmenge M zu entwenden und mit Wahrscheinlichkeit 1-p für 'legales Verhalten', d.h. keine Entwendung von Material.
Entwendet er Material, so steht ihm die in (2-71) definierte Menge S_E von Entwendungsstrategien zur Verfügung.
Dem Inspektor stehen die Kontrollstrategien aus der Menge

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\alpha \in [0,1]} S_I^{(\alpha)}$$ zur Verfügung, wobei sei

$$S_I^{(\alpha)} := \{ s_I := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i) = 1 - \alpha, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \ \forall\, i \}.$$

Die Menge der Kontrollstrategien des Inspektors ist also gegeben durch

$$\mathscr{A} = \{s_I := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \forall\, i\} \qquad . \qquad (7\text{-}1)$$

Wir nehmen an, daß im Falle legalen Verhaltens des Betreibers bei einem Fehlalarm die Auszahlung an Inspektor bzw. Betreiber gegeben sei durch '$-e$' bzw. '$-f$'.
Also ist

$-e(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))$ der Erwartungswert der Inspektorauszahlung

$-f(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))$ der Erwartungswert der Betreiberauszahlung

für den Fall, daß der Betreiber kein Material entwendet und der Inspektor die Strategie $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathscr{A}$ spielt.

Wir nehmen $e > 0$ an, da die Aufklärung eines Fehlalarms dem Inspektor Kosten verursachen wird. Das Vorzeichen von f wollen wir nicht festlegen. Dem Betreiber könnten bei einem Fehlalarm Kosten entstehen, d.h. $f \geq 0$; es könnte ihm aber auch eine Entschädigung gezahlt werden, d.h. $f \leq 0$.
Unter Heranziehung der auf Seite 22 der Arbeit definierten Gewinnerwartungswerte bei illegalem Betreiberverhalten ergibt sich: spielt der Inspektor die Strategie $s_I \in \mathscr{A}$ und entscheidet sich der Betreiber mit Wahrscheinlichkeit p für Entwendung, mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ für legales Verhalten, und spielt er im Entwendungsfall die Strategie $s_E \in S_E$, so ist der Gewinnerwartungswert für den Inspektor gegeben durch

$$[c - (c+d)\beta(s_I,s_E)]p - e(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))(1-p)$$

und für den Betreiber durch

$$[-c+(c+d)\beta(s_I,s_E)]p - f(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))(1-p) \quad .$$

Die Funktion β ist dabei wie in (2-72) definiert durch

$$\beta(s_I,s_E)=\prod_{i=1}^{n}\phi\left(U(1-\alpha_i)-\frac{M_i+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}M_j}{\sigma_i}\right) \quad . \tag{7-2}$$

Wir haben somit ein Spiel$(\mathscr{A},[0,1]\times S_E,I,B)$ konstruiert mit den Strategienmengen

$\mathscr{A}$	für den Inspektor
$[0,1]\times S_E$	für den Betreiber

und der Auszahlung

$$I(s_I,p,s_E) := [c+e(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))-(c+d)\beta(s_I,s_E)]p - e(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))$$

für den Inspektor

und der Auszahlung

$$B(s_I,p,s_E) := [-c+f(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))+(c+d)\beta(s_I,s_E)]p - f(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i))$$

für den Betreiber.

Im allgemeinen wird es sich um ein Nichtkonstantsummenspiel handeln;wir schließen jedoch den Fall $I + B \equiv 0$ nicht aus.

Es erscheint nicht sinnvoll,die Möglichkeit von Absprachen oder Vereinbarungen zwischen den beiden Parteien zuzulassen.Daher behandeln wir das Spiel als nichtkooperatives Spiel.Gefragt ist also nach einem Gleichgewichtspunkt (vergl. [18]):

(7-3) Definition Das Tripel $(s_I', p', s_E') \in \mathscr{A} \times [0,1] \times S_E$ heißt Gleichgewichtspunkt des Spiel $(\mathscr{A}, [0,1] \times S_E, I, B)$ genau dann, wenn gilt

$$I(s_I', p', s_E') \geqq I(s_I, p', s_E') \qquad \forall\, s_I \in \mathscr{A} \tag{7-4}$$

$$B(s_I', p', s_E') \geqq B(s_I', p, s_E) \qquad \forall\, (p, s_E) \in [0,1] \times S_E \quad . \bullet \tag{7-5}$$

7.2 Eigenschaften der Gleichgewichtspunkte des Spiels

Der wenig realistische Fall, daß die Kosten bei entdeckter Entwendung für den Betreiber nicht größer sind als seine Kosten bei einem Fehlalarm, läßt sich leicht behandeln.

Wir definieren dazu $\hat{\mathscr{A}} := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathscr{A},\ \alpha_i = 1$ für mindestens ein $i\}$ (7-6)

und beachten, daß für jedes $s_E \in S_E$ gilt

$$\beta(s_I, s_E) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s_I \in \hat{\mathscr{A}} \quad . \tag{7-7}$$

Man erhält nun

(7-8) Satz Sei $c \leqq f$. Für jedes $\hat{s}_E \in S_E$ und jedes $\hat{s}_I \in \hat{\mathscr{A}}$ ist $(\hat{s}_I, 1, \hat{s}_E)$ ein Gleichgewichtspunkt.

Bew. Mit (7-7) hat man

$$I(\hat{s}_I, 1, \hat{s}_E) = c \geqq c - (c+d)\,\beta(s_I, \hat{s}_E) = I(s_I, 1, \hat{s}_E) \qquad \forall\, s_I \in \mathscr{A}$$

und es ist

$$B(\hat{s}_I, 1, \hat{s}_E) = -c \geqq -cp - f(1-p) = B(\hat{s}_I, p, s_E)$$

für jedes $(p, s_E) \in [0,1] \times S_E$. $\bullet$

Ab jetzt betrachten wir ausschließlich den Fall " $c > f$ ". Dannn besitzt das Spiel keine Gleichgewichtspunkte vom in Satz (7-8) angegebenen Typ.

(7-9) <u>Satz</u> Sei (s_I', p', s_E') ein Gleichgewichtspunkt. Dann gilt

a) $0 < p' < 1$

b) $s_I' \neq (o,\ldots,o)$, $s_I' \notin \hat{\mathscr{A}}$.

Bew. a1) Angenommen, $p' = 0$.

Dann ist $I(s_I', 0, s_E') = -e(1 - \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i))$.

Mit $e > o$ folgt aus (7-4) $s_I' = (0,\ldots,0)$.

Daher ist wegen $\beta(s_I', s_E) = 1 \quad \forall\, s_E \in S_E$

$B(s_I', 0, s_E') = 0 < d = B(s_I', 1, s_E)$.

Das ist ein Widerspruch zu (7-5).

a2) Angenommen, $p' = 1$.

Dann ist $I(s_I', 1, s_E') = c - (c+d)\beta(s_I', s_E')$,

woraus mit (7-7) nach (7-4) folgt $s_I' \in \hat{\mathscr{A}}$.

Damit erhält man durch

$B(s_I', 1, s_E') = -c < -f = B(s_I', 0, s_E)$

einen Widerspruch zu (7-5).

b1) Angenommen, $s_I' = (0,\ldots,0)$.

Dann ist $B(s_I', p', s_E') = dp' \leqq d = B(s_I', 1, s_E')$.

Aus (7-5) folgt $p' = 1$,was nach a) nicht möglich ist.

b2) Angenommen, $s_I' \in \hat{\mathscr{A}}$.

Dann ist mit (7-7)

$B(s_I', p', s_E') = -cp' - f(1-p') \leqq -f = B(s_I', 0, s_E')$.

Aus (7-5) folgt $p' = 0$,was nach a) nicht möglich ist. ●

Mit Satz (7-9) erhält man ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Gleichgewichtspunktes.

(7-10) Satz Damit $(s_I', p', s_E') \in \mathscr{A} \times [0,1] \times S_E$ Gleichgewichtspunkt ist, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind :

a) $I(s_I', p', s_E') \geqq I(s_I, p', s_E') \quad \forall\, s_I \in \mathscr{A}$

b) $\Delta := \left[-c+f\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i')\right) + (c+d)\beta(s_I', s_E')\right] = o$

c) $\beta(s_I', s_E') = \max_{s \in S_E} \beta(s_I', s_E)$.

Bew. 1) "notwendig".

Bed. a) ist nach (7-4) notwendig.

Angenommen, $\Delta \neq o$.

Man hat $p' \neq \hat{p}$ für $\hat{p} := \begin{cases} 1, \text{falls } \Delta > 0 \\ o, \text{falls } \Delta < 0 \end{cases}$ nach Satz (7-9a) ,

und daher offensichtlich $B(s_I', \hat{p}, s_E') > B(s_I', p', s_I')$,

was ein Widerspruch zu (7-5) ist. Also gilt $\Delta = o$.

Unter Berücksichtigung von $0<p'<1$ folgt aus (7-5) sofort

$\beta(s_I', s_E') \geqq \beta(s_I' s_E) \quad \forall\, s_E \in S_E$ und damit Bed. c).

2) "hinreichend".

Wegen Bed. a) bleibt nur (7-5) nachzuweisen.

Man hat wegen Bed. b) $B(s_I', p', s_E') = B(s_I', p, s_E') \quad \forall\, p \in [0,1]$,

und aus Bed. c) folgt wegen $o<p'<1$ sofort

$B(s_I', p, s_E') \geqq B(s_I', p, s_E) \quad \forall\, s_E \in S_E$.

Also gilt (7-5). ●

Für $\tilde{s}_I \in \mathscr{A}$ sei definiert $\mathscr{A}_{\tilde{s}_I} := \{s_I \in \mathscr{A}, \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n}(1-\tilde{\alpha}_i)\}$. (7-11)

Es gilt folgendes Korollar:

(7-12) Korollar Ist (s_I', p', s_E') Gleichgewichtspunkt, dann ist (s_I', s_E') Sattelpunkt von β auf $\mathscr{A}_{s_I'} \times S_E$.

Bew. Wegen Satz (7-10) c) bleibt lediglich zu zeigen

$\beta(s_I', s_E') \leq \beta(s_I, s_E') \quad \forall\, s_I \in \mathscr{A}_{s_I'}$.

Unter Beachtung von $0<p'<1$ folgt dies sofort aus Ungl. (7-4). •

7.3 Konstruktion eines Hilfsspiels

Wir werden jetzt zeigen, daß das Spiel $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$ einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtspunkt besitzt.
Dabei gehen wir folgendermaßen vor.
Zuerst definieren wir ein Hilfsspiel. Von diesem weisen wir nach : besitzt das Hilfsspiel einen Gleichgewichtspunkt, so besitzt auch das ursprüngliche Spiel einen Gleichgewichtspunkt und umgekehrt. Danach geben wir ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß das Hilfsspiel genau einen Gleichgewichtspunkt besitzt. Wir zeigen anschließend, die in (7-2) definierte Funktion β erfüllt dieses Kriterium. Somit ist dann Existenz und Eindeutigkeit eines Gleichgewichtspunktes (s_I', p', s_E') des Spiels $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$ gewährleistet; als Nebenergebnis erhalten wir ein Verfahren zur Berechnung des Gleichgewichtspunktes. Mit $\alpha' := 1- \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i')$ haben wir dann einen für beide Parteien akzeptablen Wert der Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit ermittelt.

Für jedes $s_I \in \mathscr{A}$, $s_I \neq (0,\ldots,0)$, $s_I \notin \hat{\mathscr{A}}$ gibt es nach Kap.3 einen eindeutig bestimmten Sattelpunkt auf $\mathscr{A}_{s_I} \times S_E$. Wir setzen $\alpha := 1- \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i)$ für $s_I = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathscr{A}$ und bezeichnen den erwähnten Sattelpunkt mit $(s_I(\alpha), s_E(\alpha))$.
Weiter sei auf $(0,1)$ definiert

$$h(\alpha) := \beta(s_I(\alpha), s_E(\alpha)) \quad . \tag{7-13}$$

Wegen (7-7) und der Tatsache, daß für $\tilde{s}_I = (0,\ldots,0)$ gilt $\beta(\tilde{s}_I, s_E) = 1 \quad \forall\, s_E \in S_E$, erklären wir

$$h(0) = 1 \;,\; h(1) = 0 \quad . \tag{7-14}$$

Wir definieren ein Hilfsspiel $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$ durch

$\Sigma_1 := \{\alpha \in [0,1]\}$ Strategienmenge des Inspektors

$\Sigma_2 := \{p \in [0,1]\}$ Strategienmenge des Betreibers

und den Auszahlungen

$H_1(\alpha,p) := [c + e\alpha - (c+d)h(\alpha)]p - e\alpha$ für den Inspektor

$H_2(\alpha,p) := [-c + f\alpha + (c+d)h(\alpha)]p - f\alpha$ für den Betreiber.

Wir behandeln dieses Spiel als nichtkooperatives Spiel; (α',p') aus $\Sigma_1\times\Sigma_2$ ist also genau dann Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$, wenn gilt :

$$H_1(\alpha',p') \geqq H_1(\alpha,p') \quad \forall\ \alpha \in \Sigma_1 \tag{7-15}$$

$$H_2(\alpha',p') \geqq H_2(\alpha',p) \quad \forall\ p \in \Sigma_2 \quad . \tag{7-16}$$

Es gilt nun

(7-17) Satz Ist (s_I',p',s_E') ein Gleichgewichtspunkt des Spiels $(\mathscr{A},[0,1]\times S_E,I,B)$, so ist mit $\alpha' := 1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i')$ das Paar (α',p') ein Gleichgewichtspunkt des Hilfsspiels $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$.

Bew. Nach Satz (7-9) ist $s_I' \neq (0,\dots,0)$, $s_I' \notin \hat{\mathscr{A}}$,daher nach Korollar (7-12) $(s_I',s_E') = (s_I(\alpha'),s_E(\alpha'))$.

Also ist $h(\alpha') = \beta(s_I(\alpha'),s_E(\alpha'))$ .Mit Satz (7-10)b) ist $-c + f\alpha' + (c+d)h(\alpha') = 0$;also

$H_2(\alpha',p') = H_2(\alpha',p) \quad \forall\ p \in \Sigma_2$,

womit (7-16) erfüllt ist.

Angenommen, (7-15) wäre nicht erfüllt;es gäbe also ein $\hat{\alpha} \in \Sigma_1$ mit $H_1(\hat{\alpha},p') > H_1(\alpha',p')$.

Für $0<\hat{\alpha}<1$ ist $(s_I(\hat{\alpha}),s_E(\hat{\alpha}))$ definiert.Falls $\hat{\alpha} = 0$ ist,so sei $s_I(\hat{\alpha}) := (0,\dots,0)$,falls $\hat{\alpha} = 1$ ist,so sei $s_I(\hat{\alpha})$ ein beliebiges Element aus $\hat{\mathscr{A}}$;in beiden Fällen sei $s_E(\hat{\alpha})$ irgendein Element aus S_E.Wir beachten dabei die Gl. (7-7) und die Tatsache,daß $\beta(s_I(0),s_E) = 1 \quad \forall\ s_E \in S_E$ ist.

Nach Korollar(7-12) und unter Berücksichtigung der im Fall $\hat{\alpha} \notin (0,1)$ angestellten Überlegungen hat man mit (7-4) :

$$H_1(\hat{\alpha},p') = [c + e\hat{\alpha} - (c+d)\beta(s_I(\hat{\alpha}),s_E(\hat{\alpha}))]p' - e\hat{\alpha} \leqq$$
$$\leqq [c + e\hat{\alpha} - (c+d)\beta(s_I(\hat{\alpha}),s_E(\alpha'))]p' - e\hat{\alpha} =$$
$$= I(s_I(\hat{\alpha}),p',s_E(\alpha')) \leqq I(s_I(\alpha'),p',s_E(\alpha')) = H_1(\alpha',p').$$

Damit hat man einen Widerspruch,und der Satz ist bewiesen. •

7.4 Äquivalenz von ursprünglichem Spiel und Hilfsspiel

Wir wollen nun die Umkehrung von Satz(7-17) zeigen,d.h. wir wollen zeigen : ist (α',p') Gleichgewichtspunkt des Hilfsspiels $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$,so ist $(s_I(\alpha'),p',s_E(\alpha'))$ Gleichgewichtspunkt des ursprünglichen Spiels $(\mathscr{A},[0,1]\times S_E,I,B)$.
Wir beweisen diesen Sachverhalt in mehreren Schritten.
Zuerst zeigen wir : ist (α',p') Gleichgewichtspunkt des Hilfsspiels und innerer Punkt von $\Sigma_1\times\Sigma_2$,dann ist $s_I(\alpha')$ der einzige stationäre Punkt von $I(s_I,p',s_E(\alpha'))$ im Innern von $\mathscr{A}$. Danach stellen wir fest,daß $I(s_I,p',s_E(\alpha'))$ das Maximum nicht auf dem Rand von $\mathscr{A}$ annimmt.Beide Tatsachen zusammen liefern die Ungl.(7-4).Anschließend weisen wir Ungl.(7-5) nach.
Mit der Feststellung,daß das Hilfsspiel keine Gleichgewichtspunkte besitzen kann,die nicht im Innern von $\Sigma_1\times\Sigma_2$ liegen,ist die Umkehrung von Satz(7-17) dann bewiesen.

Für $\alpha \in (0,1)$ schreiben wir jetzt

$$s_I(\alpha) := (1-\exp(x_1(\alpha)),\ldots,1-\exp(x_n(\alpha))),$$
$$x(\alpha) := (x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha)) ,$$
$$y(\alpha) := As_E(\alpha)^t,$$

wobei A die in (2-25) definierte reguläre untere Dreiecksmatrix ist.Somit erhalten wir für $0<\alpha<1$ mit der in (3-8) definierten Funktion F

$h(\alpha) = \exp\{F(x(\alpha),y(\alpha))\}$.

Es gilt nun

(7-18) <u>Satz</u> a) $x_i(\alpha), y_i(\alpha), i=1,..,n$ und $h(\alpha)$ sind auf $(0,1)$ stetig differenzierbar ,

b) für jedes $j, 1 \leq j \leq n$ gilt

$$h'(\alpha) = -[Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}))]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}) - \frac{y_j(\alpha)}{\sigma_j}) \cdot \frac{h(\alpha)}{1-\alpha} \quad .$$

Bew. a) Der Beweis, daß die $x_i(\alpha), y_i(\alpha)$ auf $(0,1)$ stetig differenzierbar sind, ist völlig analog dem Beweis von Satz (4-11). Die Tatsache, daß $h(\alpha)$ auf $(0,1)$ stetig differenzierbar ist folgt dann unmittelbar.

b) Man hat $h'(\alpha) =$

$$= h(\alpha) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[[Q(U(\exp\{x_i(\alpha)\}))]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_i(\alpha)\}) - \frac{y_i(\alpha)}{\sigma_i}) \cdot x_i'(\alpha) \right] - \sum_{i=1}^{n} Q(U(\exp\{x_i(\alpha)\}) - \frac{y_i(\alpha)}{\sigma_i}) \cdot \frac{y_i'(\alpha)}{\sigma_i} \right\} \quad .$$

$(x(\alpha),y(\alpha))$ löst das Gleichungssystem (3-24)...(3-27). Man kann daher schreiben $h'(\alpha) \overset{(\ddagger)}{=}$

$$= h(\alpha) \cdot \left\{ [Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}))]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}) - \frac{y_j(\alpha)}{\sigma_j}) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i'(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} \left[[(1-a_i)\sigma_i]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_i(\alpha)\}) - \frac{y_i(\alpha)}{\sigma_i}) \cdot (1-a_i) y_i'(\alpha) \right] \right\} \overset{(\dagger\dagger)}{=}$$

$$= [Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}))]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}) - \frac{y_j(\alpha)}{\sigma_j}) \cdot \frac{-h(\alpha)}{1-\alpha}$$

$$- [(1-a_j)\sigma_j]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}) - \frac{y_j(\alpha)}{\sigma_j}) \cdot \sum_{i=1}^{n} (1-a_i) y_i'(\alpha) =$$

$$\overset{(\dagger\ddagger\dagger)}{=} -[Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}))]^{-1} \cdot Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}) - \frac{y_j(\alpha)}{\sigma_j}) \cdot \frac{h(\alpha)}{1-\alpha} \quad .$$

In Gl. (†) wurde das Glsyst. (3-26) ausgenutzt.

In Gl.(††) wurde das Glsyst.(3-28) ausgenutzt und die Tatsache

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'(\alpha) = (\ln(1-\alpha))' = -(1-\alpha)^{-1} .$$

In Gl.(†††) wurde benutzt, daß gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (1-a_i)y_i'(\alpha) = (M)' = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen. ●

(7-19) Satz Sei $(\alpha',p') \in (0,1)\times(0,1)$ Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$. Dann ist $s_I(\alpha')$ der einzige stationäre Punkt von $I(s_I,p',s_E(\alpha'))$ im Innern von $\mathscr{A}$.

Bew. 1) Zuerst müssen wir für $s_I(\alpha') := (\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$ zeigen, daß für die im Innern von $\mathscr{A}$ definierten

$$D_j(s_I) := \frac{\partial}{\partial\alpha_j} I(s_I,p',s_E(\alpha')) \quad , 1\leq j\leq n \text{ , gilt}$$

$$D_j(s_I(\alpha')) = 0 \quad \forall\ j=1,..,n .$$

Man hat für s_I aus dem Innern von $\mathscr{A}$

$$D_j(s_I) = \Big[e\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\alpha_i) - (c+d)\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\beta(s_I,s_E(\alpha'))\Big]p' - e\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\alpha_i) .$$

Die Forderung "$D_j(s_I)=0$" ist unter Beachtung von $0<p'<1$ äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\beta(s_I,s_E(\alpha')) = \Big[-\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\alpha_i)\Big]\cdot\Big[(1-p')ep'^{-1}(c+d)^{-1}\Big] \qquad (+)$$

und wegen

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\beta(s_I,s_E(\alpha')) = -(1-\alpha_j)^{-1}\cdot\big[Q(U(1-\alpha_j))\big]^{-1}\cdot Q\Big(U(1-\alpha_j) - \frac{y_j(\alpha')}{\sigma_j}\Big)$$
$$\cdot\beta(s_I,s_E(\alpha'))$$

hat Gl.(+) unter Beachtung von $0<\alpha_j<1$ die Form

$$\big[Q(U(1-\alpha_j))\big]^{-1}\cdot Q\Big(U(1-\alpha_j) - \frac{y_j(\alpha')}{\sigma_j}\Big)\cdot\beta(s_I,s_E(\alpha')) =$$
$$= \Big[\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)\Big]\cdot(1-p')ep'^{-1}(c+d)^{-1} . \qquad (++)$$

$s_I(\alpha')$ liegt nach Satz(7-9) im Innern von $\mathscr{A}$; es ist daher

$$\beta(s_I(\alpha'),s_E(\alpha')) = h(\alpha') .$$

Unter Beachtung von Satz(7-18)b) hat daher für $s_I := s_I(\alpha')$ die Gl.(++) die folgende Gestalt:

$$-h'(\alpha')\cdot(1-\alpha') = (1-\alpha')\cdot(1-p')ep'^{-1}(c+d)^{-1} \quad .$$

Diese Gleichung ist erfüllt, denn $0<\alpha'<1$ und Ungl.(7-15) liefern $[e-(c+d)h'(\alpha')]p' - e = 0$.

Also gilt $D_j(s_I(\alpha')) = 0 \quad \forall\ j=1,..,n$; mithin ist $s_I(\alpha')$ stationärer Punkt von $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$ im Innern von $\mathscr{A}$.

2) Angenommen, $s_I^{(k)} := (\alpha_1^{(k)},...,\alpha_n^{(k)})$, $k=1,2$, aus dem Innern von $\mathscr{A}$ wären stationäre Punkte von $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$.

Beide erfüllen dann die Gl.(++) $\forall\ j=1,..,n$. Unter Beachtung von $\beta(s_I^{(k)}, s_E(\alpha')) > 0$ für $k=1,2$ folgt mit

$y := As_E(\alpha')^t$, A definiert gemäß (2-25),

$x^{(k)} := (\ln(1-\alpha_1^{(k)}),..,\ln(1-\alpha_n^{(k)}))$, $k=1,2$,

daß $(x^{(1)},y)$, $(x^{(2)},y)$ beide das Gleichungssystem (3-26) lösen.

Da die Funktion $[Q(z)]^{-1}\cdot Q(z-c)$ für $c>0$ wie in Satz (3-14) gezeigt wurde in z streng monoton wächst, ergibt sich

$$x_i^{(1)} > x_i^{(2)} \quad \forall\ i=1,..,n \ , \text{ falls } \ x_1^{(1)} > x_1^{(2)} \quad ,$$
$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \quad \forall\ i=1,..,n \ , \text{ falls } \ x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \quad ,$$
$$x_i^{(1)} < x_i^{(2)} \quad \forall\ i=1,..,n \ , \text{ falls } \ x_1^{(1)} < x_1^{(2)} \quad .$$

Mit $\delta_i := x_i^{(1)} - x_i^{(2)}$, $i=1,..,n$, bedeutet das

$$\operatorname{sgn}\delta_r = \operatorname{sgn}\delta_s \quad \forall\ r,s=1,..,n. \tag{7-20}$$

Die linke Seite von Gl.(++) kann mit $x_i := \ln(1-\alpha_i)$, $c_i := y_i(\alpha')\sigma_i^{-1}$ $\forall\ i=1,..,n$ in der Form

$$\exp[x_j + c_jU(\exp\{x_j\}) - \tfrac{1}{2}c_j^2] \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \phi(U(\exp\{x_i\}) - c_i)$$

dargestellt werden.

Durch Logarithmieren der beiden Seiten von Gl.(++) erhält man mit $\rho := \ln\{(1-p')ep'^{-1}(c+d)^{-1}\}$ die Gleichung

$$x_j + c_jU(\exp\{x_j\}) - \frac{1}{2}c_j^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \ln\phi(U(\exp\{x_i\}) - c_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \rho. \quad (\dagger)$$

Da $s_I^{(1)}, s_I^{(2)}$ beide die Gl.(++) erfüllen, so erfüllen $x^{(1)}, x^{(2)}$ beide die Gl.($\dagger$). Subtraktion liefert

$$\delta_j + c_j\left[U(\exp\{x_j^{(1)}\}) - U(\exp\{x_j^{(2)}\})\right] + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\Big\{\ln\phi(U(\exp\{x_i^{(1)}\})-c_i) - \ln\phi(U(\exp\{x_i^{(2)}\})-c_i)\Big\} = \sum_{i=1}^{n}\delta_i .$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert nun die Existenz von $\hat{x}_i$, $-\infty < \hat{x}_i \leqq \max(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}) < 0 \;\forall\; i=1,..,n$ mit

$$\delta_j + c_j\left[Q(U(\exp\{\hat{x}_j\}))\right]^{-1}\delta_j + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\left[Q(U(\exp\{\hat{x}_i\}))\right]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{\hat{x}_i\})-c_i)\,\delta_i = \sum_{i=1}^{n}\delta_i \quad .$$

Unter Beachtung von (7-20), von $c_i>0 \;\forall\; i$ und von der Tatsache, daß nach Hilfssatz(3-11) $Q(z) < Q(z-c) \;\forall\; c>0$ für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist, folgt sofort $\delta_i = 0 \;\;\forall\; i=1,..,n.$

Das bedeutet $x^{(1)} = x^{(2)}$; also ist $s_I^{(1)} = s_I^{(2)}$.

Damit ist der Satz bewiesen. ●

Wir zeigen nun:

(7-21) <u>Satz</u> Sei $(\alpha',p') \in (0,1)\times(0,1)$. Dann nimmt die Funktion $I(s_I,p',s_E(\alpha'))$ auf dem Rand von $\mathcal{A}$ kein globales Maximum an.

Bew. Sei $c_i := y_i(\alpha')\sigma_i^{-1} \;\forall i=1,..,n$. Für jedes $\tilde{s}_I \in \mathcal{A}$ mit $\tilde{\alpha}_k \in (0,1)$ ist

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_k}I(s_I,p',s_E(\alpha'))\Big|_{s_I=\tilde{s}_I} =$$

$$= - e(1-p')\cdot\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(1-\tilde{\alpha}_i) + \exp\left[c_kU(1-\tilde{\alpha}_k) - \frac{1}{2}c_k^2\right]\cdot\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\phi(U(1-\tilde{\alpha}_i)-c_i)\cdot(c+d)p' \quad (+)$$

1) Angenommen, $I(s_I,p',s_E(\alpha'))$ würde in einem Punkt $\bar{s}_I \in \mathcal{A}$ mit $\bar{\alpha}_k = 1$ ein globales Maximum annehmen.

Unter Beachtung von (7-7) nimmt dann $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$ ein globales Maximum auch bei $s''_I := (\alpha''_1, \ldots, \alpha''_n)$, $0<\alpha''_i<1 \ \forall \ i \neq k$, $\alpha''_k = 1$ an. Unter Berücksichtigung von $0<p'<1$, von $c_k>0$ und von der Tatsache, daß $U(z) \to -\infty$ für $z \to 0$, folgt aus Gl. (+):

zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es $\hat{\alpha}_k$, $1-\varepsilon<\hat{\alpha}_k<1$, so daß mit $\hat{s}_I := (\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$, $\hat{\alpha}_i = \alpha''_i \ \forall \ i \neq k$, gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} I(s_I, p', s_E(\alpha'))\Big|_{s_I = \hat{s}_I} < 0 .$$

Aus Stetigkeitsgründen kann dann $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$ bei s''_I kein globales Maximum annehmen.

2) Angenommen, $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$ würde in einem Punkt $\bar{s}_I \in \mathscr{A}$ mit $\bar{\alpha}_k = 0$ ein globales Maximum annehmen. Nach 1) ist $\bar{\alpha}_i<1 \ \forall i$. Wegen $0<p'<1$, $c_k>0$ und $U(z) \to \infty$ für $z \to 1$, folgt aus Gl. (+):

zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es $\hat{\alpha}_k$, $0<\hat{\alpha}_k<\varepsilon$, so daß mit $\hat{s}_I := (\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$, $\hat{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i \ \forall \ i \neq k$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} I(s_I, p', s_E(\alpha'))\Big|_{s_I = \hat{s}_I} > 0 .$$

Aus Stetigkeitsgründen kann dann $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$ bei $\bar{s}_I$ kein globales Maximum annehmen.

Da $\mathscr{A}$ keine anderen als die in 1) und 2) beschriebenen Randpunkte besitzt, ist der Satz bewiesen. •

Aus Satz (7-19) und Satz (7-21) folgt

(7-21') <u>Korollar</u> Sei $(\alpha', p') \in (0,1) \times (0,1)$ Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1, \Sigma_2, H_1, H_2)$. Dann gilt

$$I(s_I(\alpha'), p', s_E(\alpha')) > I(s_I, p', s_E(\alpha')) \quad \forall \ s_I \in \mathscr{A}, s_I \neq s_I(\alpha') .$$

Bew. Aus Stetigkeitsgründen nimmt $I(s_I, p', s_E(\alpha'))$ auf der kompakten Menge $\mathscr{A}$ ein globales Maximum an. Nach Satz (7-21) kann eine Maximumsstelle s'_I nur im Innern von $\mathscr{A}$ liegen.

Die Differenzierbarkeit von $I(s_I,p',s_E(\alpha'))$ nach den Komponenten von s_I im Innern von $\mathscr{A}$ erfordert, daß s_I' stationärer Punkt ist. Satz(7-19) liefert nun die Behauptung. ●

Wir sind nun in der Lage, zu zeigen:

(7-22) <u>Satz</u> Sei $(\alpha',p') \in (0,1)\times(0,1)$ Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$. Dann ist $(s_I(\alpha'),p',s_E(\alpha'))$ Gleichgewichtspunkt von $(\mathscr{A},[0,1]\times S_E,I,B)$.

Bew. Wir benutzen Satz(7-10). Die Bed.a) ist nach Korollar(7-21') erfüllt. Die Bed.c) folgt aus der Definition von $s_E(\alpha')$.

Zu zeigen bleibt Bed.b). Man hat mit $s_I(\alpha') := (\alpha_1(\alpha'),..,\alpha_n(\alpha'))$

$$\Delta := \left\{ -c + f\left[1-\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i(\alpha'))\right] + (c+d)\beta(s_I(\alpha'),s_E(\alpha'))\right\} =$$

$$= \ -c + f\alpha' + (c+d)h(\alpha') \quad .$$

Wegen $0<p'<1$ kann die Ungl.(7-16) nur im Fall $-c + f\alpha' + (c+d)h(\alpha') = 0$ erfüllt sein. Also ist Bed.b) von Satz(7-10) erfüllt. ●

Wir stellen jetzt sicher, daß jeder Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$ innerer Punkt von $\Sigma_1\times\Sigma_2$ ist.

(7-23) <u>Satz</u> Sei (α',p') Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,H_2)$.

Dann gilt :

a) $0 < \alpha' < 1$

b) $0 < p' < 1$.

Bew. a1) Angenommen, $\alpha' = 0$. Wegen (7-14) ist

$H_2(0,p) = dp < d = H_2(0,1) \quad \forall\ p < 1$.

Ungl.(7-16) liefert also $p' = 1$. Daraus folgt mit (7-14)

$H_1(0,1) = -d < c = H_1(1,1)$.

Das ist ein Widerspruch zu (7-15).

a2) Angenommen, $\alpha' = 1$ .Wegen $c>f$ nach Voraussetzung ist

$H_2(1,p) = -cp - f(1-p) < -f = H_2(1,0) \quad \forall\ p > 0.$

Ungl.(7-16) liefert also $p' = 0$.Daraus folgt mit

$H_1(1,0) = -e < 0 = H_1(0,0)$

ein Widerspruch zu (7-15).

b1) Angenommen, $p' = 0$ .Wegen

$H_1(\alpha,0) = -e\alpha < 0 = H_1(0,0) \quad \forall\ \alpha > 0$

folgt aus Ungl(7-15) $\alpha' = 0$,was nach a) nicht möglich ist.

b2) Angenommen, $p' = 1$ .Wegen (7-7) und (7-14) ist

$H_1(\alpha,1) = c - (c+d)h(\alpha) < c = H_1(1,1) \quad \forall\ \alpha < 1,$

woraus mit Ungl.(7-15) folgt $\alpha' = 1$,was nach a) nicht möglich ist.

Damit ist der Satz bewiesen. •

Wir haben nun

(7-24) <u>Satz</u> Sei (s_I', p', s_E') Gleichgewichtspunkt von $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$. Dann ist mit $\alpha' := 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i')$ das Paar (α', p') Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1, \Sigma_2, H_1, H_2)$.

Ist (α', p') Gleichgewichtspunkt von $(\Sigma_1, \Sigma_2, H_1, H_2)$,dann ist $(s_I(\alpha'), p', s_E(\alpha'))$ Gleichgewichtspunkt von $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$.

Bew. Die erste Behauptung liefert Satz(7-17).Die zweite Behauptung ergibt sich mit Satz(7-23) aus Satz (7-22). •

7.5 <u>Lösung des Spiels</u>

Nach dem vorangegangenen Satz genügt die Kenntnis der Gleichgewichtspunkte des Hilfsspiels $(\Sigma_1, \Sigma_2, H_1, H_2)$,um Aussagen über die Gleichgewichtspunkte des ursprünglichen Spiels $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$ zu erhalten.

Das Hilfsspiel hat die folgenden Eigenschaften:

(7-25) <u>Satz</u> Ist $h(\alpha)$ konvex auf $[0,1]$,dann gilt

a) $(\Sigma_1, \Sigma_2, H_1, H_2)$ besitzt genau einen Gleichgewichtspunkt

b) dieser Gleichgewichtspunkt (α',p') ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$-c + f\alpha + (c+d)h(\alpha) = 0 \qquad (7\text{-}26a)$$

$$p[e-(c+d)h'(\alpha)] - e = 0 \qquad (7\text{-}26b)$$

Bew. Zuerst zeigen wir die Existenz eines Gleichgewichtspunktes. Nach Voraussetzung über $h(\alpha)$ ist $H_1(\alpha,p)$ bei festgehaltenem p in $\alpha \in [0,1]$ konkav. $H_2(\alpha,p)$ ist bei festgehaltenem α in $p \in [0,1]$ konkav. Die Existenz eines Gleichgewichtspunktes (α',p') folgt jetzt sofort aus einem bekannten Satz der Spieltheorie (siehe z.B. [18], p35, Satz2).

Nun zeigen wir, daß jeder Gleichgewichtspunkt (α',p') das Gleichungssystem (7-26) löst.

Wegen $0 < p' < 1$ nach Satz (7-23) b) folgt aus Ungl. (7-16) sofort, daß α' die Gleichung (7-26a) löst.

Wegen $0 < \alpha' < 1$ nach Satz (7-23) a) folgt aus Ungl. (7-15) und der Differenzierbarkeit von $h(\alpha)$ sofort, daß (α',p') die Gleichung (7-26b) löst.

Wenn wir jetzt zeigen, daß das Glsyst. (7-26) genau eine Lösung besitzt, so ist der Satz bewiesen.

Sei $g(\alpha) := -c + f\alpha + (c+d)h(\alpha)$.

Wegen $g(0) = d > 0 > -c+f = g(1)$ liegen alle Nullstellen von $g(\alpha)$ in $(0,1)$.

Angenommen, es gäbe $\alpha^{(i)} \in (0,1)$, $g(\alpha^{(i)}) = 0$, $i=1,2$, $\alpha^{(1)} < \alpha^{(2)}$. Mit $\lambda := (1-\alpha^{(2)})\cdot(1-\alpha^{(1)})^{-1}$ hat man unter Beachtung der Konvexität von $h(\alpha)$ und $0<\lambda<1$

$$h(\alpha^{(2)}) = h(\lambda\alpha^{(1)}+(1-\lambda)) \leqq \lambda h(\alpha^{(1)}) + (1-\lambda)h(1) = \lambda h(\alpha^{(1)}).$$

Daher ist

$(c+d)h(\alpha^{(2)}) \leqq (c+d)\lambda h(\alpha^{(1)}) = \lambda(c-f\alpha^{(1)}) < \lambda(c-f\alpha^{(1)}) + (1-\lambda)(c-f) =$
$= c-f\alpha^{(2)}$.

Das bedeutet $g(\alpha^{(2)}) < 0$,was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Also besitzt die Gleichung (7-26a) genau eine Lösung α' .

Daraus folgt sofort,daß das Glsyst.(7-26) genau eine Lösung (α',p') besitzt.Damit ist der Satz bewiesen. •

Um Satz(7-25) anwenden zu können,müssen wir nachweisen,daß $h(\alpha)$ auf $[0,1]$ konvex ist.

(7-27) <u>Satz</u> Die Funktion $h(\alpha)$ ist auf $[0,1]$ streng konvex.

Bew. Man entnimmt Satz(7-18),daß $h''(\alpha)$ auf $(0,1)$ existiert.

Die obige Behauptung ist demnach bewiesen,wenn gezeigt ist

$h''(\alpha) > 0 \quad \forall\ \alpha \in (0,1)$.

Sei $\hat{\alpha} \in (0,1)$ beliebig,aber fest gewählt.

Wegen $\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)y_i(\alpha) = M \quad \forall\ \alpha$,gibt es ein $j, 1\leqq j\leqq n$ mit

$$y_j'(\hat{\alpha}) \leqq 0 \ . \qquad (7\text{-}28)$$

Da $x(\alpha)$ das Glsyst.(3-24),(3-25) löst,fällt $x_i(\alpha)$ streng monoton in α für jedes i,d.h.

$$x_i'(\hat{\alpha}) \leqq 0 \quad \forall\ i=1,..,n \ . \qquad (7\text{-}29)$$

Wie in Satz(3-14) bewiesen wurde,gilt für jedes $c > 0$

$$\frac{\partial}{\partial z}\{[Q(U(\exp\{z\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{z\}) - c\ )\} > 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{R}. \qquad (7\text{-}30)$$

Man hat $h''(\hat{\alpha}) =$

$$= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{-[Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{x_j(\alpha)\}) - \frac{y_j(\alpha)}{\sigma_j})\cdot\frac{h(\alpha)}{1-\alpha}\right\}\Big|_{\alpha=\hat{\alpha}} =$$

$$= -x_j'(\hat{\alpha})\cdot\frac{h(\hat{\alpha})}{1-\hat{\alpha}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\{[Q(U(\exp\{z\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{z\}) - \frac{y_j(\hat{\alpha})}{\sigma_j})\}\Big|_{z=x_j(\hat{\alpha})}$$

$$+ \frac{y_j'(\hat{\alpha})}{\sigma_j}\cdot\frac{h(\hat{\alpha})}{1-\hat{\alpha}}\cdot[Q(U(\exp\{x_j(\hat{\alpha})\}))]^{-1}\cdot Q'(U(\exp\{x_j(\hat{\alpha})\}) - \frac{y_j(\hat{\alpha})}{\sigma_j}) +$$

$$+ \frac{h(\hat\alpha)}{(1-\hat\alpha)^2}\left\{[Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}) - \frac{y_j(\hat\alpha)}{\sigma_j})\right\}^2$$

$$- \frac{h(\hat\alpha)}{(1-\hat\alpha)^2}\left\{[Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}) - \frac{y_j(\hat\alpha)}{\sigma_j})\right\} . \qquad (7\text{-}31)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von Gl.(7-31) ist wegen (7-29),(7-30) nichtnegativ,ebenso der zweite wegen (7-28). Das ergibt $h''(\hat\alpha) \geqq$

$$\geqq \frac{h(\hat\alpha)}{(1-\hat\alpha)^2}\cdot[Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}) - \frac{y_j(\hat\alpha)}{\sigma_j})$$

$$\cdot\left\{[Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}))]^{-1}\cdot Q(U(\exp\{x_j(\hat\alpha)\}) - \frac{y_j(\hat\alpha)}{\sigma_j}) - 1\right\} .$$

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern ist echt positiv,da $Q(z)$ in z streng monoton fällt und $y_j(\hat\alpha) > 0$ ist.
Da $\hat\alpha$ beliebig aus $(0,1)$ gewählt war,folgt $h''(\alpha) > 0 \quad \forall\, \alpha \in (0,1)$, und der Satz ist bewiesen. ●

Als Endergebnis unserer Überlegungen erhalten wir nun

(7-32) <u>Satz</u> Das Spiel $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$ besitzt genau den Gleichgewichtspunkt $(s_I(\alpha'), p', s_E(\alpha'))$.
Die Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit α' und die Entwendungswahrscheinlichkeit p' sind dabei eindeutig bestimmt durch das Gleichungssystem (7-26).

Bew. Aus den Sätzen (7-24),(7-25),(7-27) folgt unmittelbar,daß $(s_I(\alpha'), p', s_E(\alpha'))$ Gleichgewichtspunkt von $(\mathscr{A}, [0,1]\times S_E, I, B)$ ist.Wäre (s_I'', p'', s_E'') ein weiterer Gleichgewichtspunkt,so folgt aus den drei genannten Sätzen

$$p'' = p' \text{ und } \alpha'' := 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i'') = \alpha' .$$

Aus $\alpha'' = \alpha'$ folgt(vergl.Def.(7-11)): $\mathscr{A}_{s_I(\alpha')} = \mathscr{A}_{s_I''}$.
Korollar(7-12) liefert dann $s_I'' = s_I(\alpha')$, $s_E'' = s_E(\alpha')$.
Damit ist der Satz bewiesen. ●

Anhang

A

Am Ende von Kapitel 2 haben wir behauptet, daß bei gegebener Entwenderstrategie

$$\hat{s}_E: = (0,\ldots,0,\hat{M}_{k+1},\ldots,\hat{M}_n) \in S_E \quad , \qquad n > k \geqq 1 \quad ,$$

eine dazu optimale Gegenstrategie $\hat{s}_I \in S_I$ des Inspektors bei unserem Modell die Gestalt

$$\hat{s}_I = (0,\ldots,0,\hat{\alpha}_{k+1},\ldots,\hat{\alpha}_n)$$

hat. Dies wollen wir jetzt beweisen.

Satz I. Sei $\hat{s}_E: = (0,\ldots,0,\hat{M}_{k+1},\ldots,\hat{M}_n) \in S_E$, $n > k \geqq 1$.

Gilt $\beta(\hat{s}_I,\hat{s}_E) = \min\limits_{s_I \in S_I} \beta(s_I,\hat{s}_E)$,

so hat $\hat{s}_I$ die Gestalt

$$\hat{s}_I = (0,\ldots,0,\hat{\alpha}_{k+1},\ldots,\hat{\alpha}_n) \quad .$$

Beweis. S_I ist kompakt, $\beta(s_I,\hat{s}_E)$ ist stetig auf S_I, daher nimmt $\beta(s_I,\hat{s}_E)$ das Minimum in einem Punkt $\hat{s}_I \in S_I$ an.

Man hat dann mit

$$\hat{x}: = (\ell n(1-\hat{\alpha}_1),\ldots,\ell n(1-\hat{\alpha}_n)) \quad , \qquad \hat{y} := A\,\hat{s}_E^t \quad ;$$

$$F(\hat{x},\hat{y}) = \min_{x \in X} F(x,\hat{y}) \quad . \tag{1}$$

Offensichtlich ist

$$\hat{y}_i = (A\,\hat{s}_E^t)_i = 0 \qquad \forall\ 1 \leqq i \leqq k \quad .$$

Sei $\hat{y}_j > 0$, $j > k$.

Wegen (1) muß für jedes $i \leq k$ gelten

$$\ell n\phi(U(e^{\hat{x}_i})) + \ell n\phi\left(U(e^{\hat{x}_j}) - \frac{\hat{y}_j}{\sigma_j}\right) \leq \ell n\phi(U(e^{x_i})) + \ell n\phi\left(U(e^{x_j}) - \frac{\hat{y}_j}{\sigma_j}\right) \quad (2)$$

$\forall\ (x_i, x_j)$ mit $x_i + x_j = \hat{x}_i + \hat{x}_j = :\hat{z}$.

Ungl. (2) ist offenbar genau dann erfüllt, wenn die Funktion

$$g(z) := \hat{z} - z + \ell n\phi\left(U(e^{z}) - \frac{\hat{y}_j}{\sigma_j}\right)$$

auf $[\hat{z}, 0]$ bei $z = \hat{x}_j$ ein globales Minimum hat.

Es ist mit Hilfssatz (3-11) b)

$$\frac{d}{dz}\, g(z) = -1 + Q\left(U(e^{z}) - \frac{\hat{y}_j}{\sigma_j}\right) \cdot \frac{1}{Q(U(e^{z}))} > -1 + Q(U(e^{z})) \cdot \frac{1}{Q(U(e^{z}))} = 0 \quad .$$

Also hat g auf $[\hat{z}, 0]$ das einzige Minimum bei $z = \hat{z}$.

Das bedeutet $\hat{x}_j = \hat{z}$, daher $\hat{x}_i = 0$.

Daraus folgt $\hat{\alpha}_i = 0$. ●

Wir wollen jetzt die zweite der beiden am Ende von Kap. 2 aufgestellten Behauptungen beweisen, nämlich, daß im Falle von zwei Inventuren der oben beschriebene Sachverhalt für hinreichend großes M nicht mehr zutrifft, wenn das Modell auf einer Matrix A' vom Typ (2-17) beruht, für die gilt

$$\mathrm{cov}\ [(A'z^{Ot})_1, (A'z^{Ot})_2] < 0 \quad . \qquad (*)$$

Wir zeigen also jetzt: für jede 2×2 Matrix A' vom Typ (2-17), die der Bedingung (*) genügt, hat für geeignetes M eine zur

Entwenderstrategie (O,M) optimale Gegenstrategie des Inspektors die Gestalt $(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)$ mit $\hat{\alpha}_1 > 0$.

Sei also A' vom Typ (2-17), sodaß für

$$z'^t := A' z^{Ot}$$

gilt

$$\text{cov}\ (z_1', z_2') < 0 \quad .$$

Sei

$$\sigma_i^2 := \text{var}\ (z_i') \quad , \qquad i = 1,2$$

und

$$\rho := \frac{\text{cov}\ (z_1', z_2')}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Offensichtlich ist $\rho < 0$.

Außerdem ist

$$\rho > -1 \quad ,$$

andernfalls wären nämlich z_1', z_2' nach Wahrscheinlichkeit linear abhängig (vergl. [5]), was nicht der Fall ist.

Unter der Nullhypothese

$$H_O:\ E(z_1') = E(z_2') = 0$$

ist die Verteilungsfunktion von z' (vergl. [17])

$$F_{H_O}(x_1,x_2) = [2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right] dy_1\, dy_2 \quad .$$

Mit

$$F(x_1,x_2) = [2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2)\right] dy_1\, dy_2$$

ist also

$$F_{H_0}(x_1,x_2) = F(\frac{x_1}{\sigma_1}, \frac{x_2}{\sigma_2}) \quad .$$

Unter der Gegenhypothese

$$H_1: E(z_1') = M_1 \quad , \qquad E(z_2') = M_2$$

erhält man als Verteilungsfunktion von z'

$$F_{H_1}(x_1,x_2) = F\left(\frac{x_1 - M_1}{\sigma_1} \;, \; \frac{x_2 - M_2}{\sigma_2}\right) \quad .$$

Zwischen Signifikanzschranken s_1, s_2 für z_1', z_2' und den Fehlalarmwahrscheinlichkeiten α_1, α_2 gilt wieder

$$1 - \alpha_i = \text{prob } (z_i' \leqq s_i | H_0) \qquad i = 1,2 \quad ,$$

woraus wieder

$$s_i = \sigma_i U(1-\alpha_i) \qquad i = 1,2$$

folgt.

Damit die Gesamtfehlalarmwahrscheinlichkeit den Wert α hat, muß gelten

$$1-\alpha = F_{H_0}(\sigma_1 U(1-\alpha_1), \sigma_2 U(1-\alpha_2)) \quad ,$$

d.h.

$$1 - \alpha = F(U(1-\alpha_1)\ ,\ U(1-\alpha_2)) \quad .$$

Die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit ist

$$\beta = F_{H_1}(\sigma_1 U(1-\alpha_1) - M_1\ ,\ \sigma_2 U(1-\alpha_2) - M_2) = F\left(U(1-\alpha_1) - \frac{M_1}{\sigma_1},\ U(1-\alpha_2) - \frac{M_2}{\sigma_2}\right) \quad .$$

Wir beweisen jetzt unsere obige Behauptung, indem wir zeigen

Satz II. Sei $0 < \alpha < 1$ gegeben und $M > 2\sigma_2 U(1-\alpha)$.

$(0,\alpha)$ erfüllt die Bedingung

$$1 - \alpha = F(U(1-\alpha_1)\ ,\ U(1-\alpha_2)) \quad . \tag{3}$$

Es gibt $(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)$, $\hat{\alpha}_1 > 0$, welches die Bedingung (3) erfüllt mit der Eigenschaft

$$F\left(U(1-\hat{\alpha}_1)\ ,\ U_2(1-\hat{\alpha}_2) - \frac{M}{\sigma_2}\right) < F\left(U(1)\ ,\ U(1-\alpha) - \frac{M}{\sigma_2}\right) \quad . \tag{4}$$

Beweis. Integriert man im Ausdruck für F nach y_1, so erhält man

$$F(x_1,x_2) = H(x_1,x_2)$$

mit

$$H(x_1,x_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}y_2^2}\ \phi\left(\frac{x_1 - \rho y_2}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) dy_2 \quad .$$

Man sieht, daß

$$H(U(1),U(1-\alpha)) = 1 - \alpha$$

ist, d.h., $(0,\alpha)$ erfüllt die Bedingung (3).

Wir betrachten jetzt eine Variable U_1, $U_1 \geqq U(1-\alpha)$, und fassen U_2 als eine durch

$$1 - \alpha - H(U_1,U_2) = 0 \tag{5}$$

implizit gegebene Funktion von U_1 auf.

Wir wollen zeigen, daß für hinreichend großes U_1 die Ableitung nach U_1 von $H\left(U_1 , U_2 - \frac{M}{\sigma_2}\right)$ echt positiv ist.

Nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dU_1} H = \frac{\partial}{\partial U_1} H + \frac{\partial}{\partial U_2} H \cdot \frac{dU_2}{dU_1} \quad .$$

Mit den Abkürzungen

$$m: = \frac{M}{\sigma_2} \quad , \qquad \gamma: = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$$

hat man

$$\frac{\partial}{\partial U_1} H(U_1,U_2-m) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}U_1^2} \phi\left(\frac{U_2 - m - \rho U_1}{\gamma}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial U_2} H(U_1,U_2-m) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(U_2 - m)^2} \phi\left(\frac{U_1 - \rho(U_2-m)}{\gamma}\right)$$

$$\frac{dU_2}{dU_1} = - \frac{\frac{\partial}{\partial U_1} H(U_1,U_2)}{\frac{\partial}{\partial U_2} H(U_1,U_2)} = - \frac{e^{-\frac{1}{2}U_1^2} \phi\left(\frac{U_2 - \rho U_1}{\gamma}\right)}{e^{-\frac{1}{2}U_2^2} \phi\left(\frac{U_1 - \rho U_2}{\gamma}\right)}$$

Daher

$$\frac{d}{dU_1} H(U_1,U_2-m) = \left[\frac{e^{-\frac{1}{2}U_2^2}\,\phi\left(\frac{U_2 - m - \rho U_1}{\gamma}\right)}{\phi\left(\frac{U_2 - \rho U_1}{\gamma}\right)} - \frac{e^{-\frac{1}{2}(U_2-m)^2}\,\phi\left(\frac{U_1 - \rho(U_2-m)}{\gamma}\right)}{\phi\left(\frac{U_1 - \rho U_2}{\gamma}\right)} \right]$$

$$\cdot\ e^{-\frac{1}{2}U_1^2}\ e^{\frac{1}{2}U_2^2}\ \phi\left(\frac{U_2 - \rho U_1}{\gamma}\right)\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

Aus Gleichung (5) folgt

$$\lim_{U_1\to\infty} U_2 = U(1-\alpha)$$

Für $U_1 \to \infty$ konvergiert der erste Bruch in [ ] unter Beachtung von $\rho > 0$ gegen $e^{-\frac{1}{2}U^2(1-\alpha)}$;

der zweite Bruch konvergiert gegen $e^{-\frac{1}{2}(U(1-\alpha)-m)^2}$. Wegen

$$(U(1-\alpha) - m)^2 > U^2(1-\alpha)$$

nach Voraussetzung, folgt

$$\frac{d}{dU_1} H(U_1,U_2-m) > 0$$

für hinreichend großes U_1.

Also gibt es $\hat{U}_1 < \infty$ und $\hat{U}_2 := U_2(\hat{U}_1)$,

sodaß gilt

$$H(\hat{U}_1,\hat{U}_2 - m) < H(\infty,U(1-\alpha) - m) \quad .$$

Mit

$$\hat{\alpha}_1 = 1 - \phi(\hat{U}_1) > 0 \quad ,$$

$$\hat{\alpha}_2 = 1 - \phi(\hat{U}_2)$$

folgt

$$F\left(U(1-\hat{\alpha}_1)\;,\;U(1-\hat{\alpha}_2) - \frac{M}{\sigma_2}\right) < F\left(U(1)\;,\;U(1-\alpha) - \frac{M}{\sigma_2}\right) \quad .$$

Damit ist der Satz gezeigt. ●

B Es liegt nahe, zu vermuten, daß eine Erhöhung der Meßgenauigkeit, d.h. Verminderung der Meßvarianz, eine Erhöhung der Entdeckungswahrscheinlichkeit nach sich zieht. Was die Durchflußvarianzen anbelangt, so ist diese Vermutung richtig. Dies sieht man sofort daraus, daß die $\sigma_i^2, 1-a_i$ monoton wachsende Funktionen der $\sigma_{D_j}^2$ sind. Es kann aber durchaus vorkommen, daß die Verminderung der Varianzen der Messungen des physkalischen Inventars ebenso eine Verminderung der Entdeckungswahrscheinlichkeit zur Folge hat. Wir zeigen dies durch folgenden Satz.

<u>Satz.</u> Sei $2 \leqq i \leqq n$ und sei

$\sigma_{D_j}^2 > 0 \quad \forall\, j = 1,..,n, \quad \sigma_{I_k}^2 \geqq 0 \quad \forall\, k = 0,..,n,\ k \neq i-1$

und sei $\sigma_{I_i}^2 = 0$ falls $i<n$.

Mit den Bezeichnungen von Kap.4 hat man dann:

mit $\underline{\sigma}'' := (\sigma_{I_0}^2,..,\sigma_{I_{i-2}}^2, 0, \sigma_{I_i}^2,...,\sigma_{I_n}^2, \sigma_{D_1}^2,...,\sigma_{D_n}^2)$

gilt $\hat{F}(\underline{\sigma}') < \hat{F}(\underline{\sigma}'')$ (1)

für jedes

$\sigma' := (\sigma_{I_0}^2,...,\sigma_{I_n}^2, \sigma_{D_1}^2,...,\sigma_{D_n}^2)\ ,\ \sigma_{I_{i-1}}^2 > 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma_{B_{i-1}}^2 \leqq \sigma_{D_i}^2 + \sigma_{I_i}^2 \ . \qquad (2)$$

<u>Beweis</u>. Sei $q(\sigma_{I_{i-1}}^2) := \sigma_i^2 \cdot \sigma_{i-1}^{-2} \cdot (1-a_{i-1})^{-2}$.

Mit Satz (4-3c) und Hilfssatz (4-19) hat man

$$\hat{F}_{\sigma_{I_{i-1}}^2}(\underline{\sigma}) \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(\sigma_{I_{i-1}}^2) \leqq 1 \ . \qquad (3)$$

Ungl. (2) ist gleichbedeutend mit $q(0) \geqq 1$.
Gilt also (2) nicht, so gibt es ein σ' mit
$\hat{F}(\underline{\sigma}'') < \hat{F}(\underline{\sigma}')$.

Gilt (2), so folgt auf Grund der strengen Monotonie von q : $q(\sigma_{I_{i-1}}^2) > 1 \quad \forall\ \sigma_{I_{i-1}}^2 > 0$
und daher $\hat{F}_{\sigma^2_{I_{i-1}}}(\underline{\sigma}) < 0 \quad \forall\ \sigma_{I_{i-1}}^2 > 0$.

Daraus folgt $\hat{F}(\underline{\sigma}') < \hat{F}(\underline{\sigma}'')$.

Damit ist der Satz gezeigt. ●

Literatur

[1] J.Jaech
Statistical Methods in Nuclear Material Control
Technical Information Center,Office of Information Services
United States Atomic Energy Commission,TID-26298 (1973)

[2] K.Stewart
A New Weighted Average
Technometrics 12, p.247-258 (1970)

[3] C.Bennet,N.Franklin
Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry
J.Wiley and Sons, New York (1954)

[4] W.Gröbner
Matrizenrechnung
Bibliographisches Institut, Mannheim (1966)

[5] H.Richter
Wahrscheinlichkeitstheorie
Springer-Verlag, Berlin (1966)

[6] F.Gantmacher
Matrizenrechnung I
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1970)

[7] R.Avenhaus,W.Gmelin,D.Gupta,H.Winter
Relations between Relevant Parameters for Inspection Procedures
KFK 908 (März 1970)

[8] D.Bierlein
Direkte Überwachungssysteme
Op.Res.Verfahren VI , p.57-68 (1968)

[9] R.Avenhaus
Entscheidungstheoretische Analyse von Überwachungsproblemen in kerntechnischen Anlagen
Habilitationsschrift,Universität Mannheim, (Dezember 1974)

[10] J.Stoer,C.Witzgall
Convexity and Optimization in Finite Dimensions I
Springer-Verlag, Berlin (1970)

[11] D.Mitrinovic
Analytic Inequalities
Springer-Verlag, Berlin (1970)

[12] M.Sampford
Some Inequalities on Mill's Ratio and Related Functions
Ann.Math.Stat. 24,p.130-132 (1953)

[13] O.Mangasarian
Pseudo-Convex Functions
J.Siam Control 3,p.281-289 (1965)

[14] G.Fichtenholz
Differential- und Integralrechnung I
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1964)

[15] R.Avenhaus,H.Frick
Game Theoretical Treatment of Material Accountability Problems
Report No. RR-74-2. International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria (January 1974)

[16] R.Avenhaus,H.Frick
Game Theoretical Treatment of Material Accountability Problems,Part II
Report No. RR-74-21. International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria (November 1974)

[17] K.Brownlee
Statistical Theory and Methodology
J.Wiley and Sons, New York (1967)

[18] E.Burger
Einführung in die Theorie der Spiele
Walter de Gruyter Verlag Berlin 1959

Teil II

Materialbilanzierung bei stochastisch abhängigen Messungen

Gewisse Materialbilanzierungsprobleme - z.B. Materialbilanzierung mittels mehrfacher Inventuren oder Materialbilanzierung in einer unterteilten Materialbilanzzone - lassen sich durch folgende mathematische Fragestellung beschreiben.

Es seien $z_1, \ldots, z_n$, $n > 1$ normalverteilte Zufallsvariable mit den Erwartungswerten

$$E(z_i) = 0 \qquad 1 \leqq i \leqq n .$$

Es seien

$$M > 0 , \quad 1 > \alpha > 0$$

und

$$\mathcal{M} := \{\underline{m} := (M_1, \ldots, M_n) \in R^n , \sum_{i=1}^{n} M_i = M\}$$

$$S := \{\underline{s} := (s_1, \ldots, s_n) \in R^n , \text{prob}\{z_1 \leqq s_1 \wedge \ldots \wedge z_n \leqq s_n\} = 1-\alpha\} .$$

Gesucht ist ein Paar $(\underline{s}^*, \underline{m}^*)$ mit der Eigenschaft

$$\text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1^* \wedge \ldots \wedge z_n + M_n \leqq s_n^*\}$$

$$\leqq \text{prob}\{z_1 + M_1^* \leqq s_1^* \wedge \ldots \wedge z_n + M_n^* \leqq s_n^*\}$$

$$\leqq \text{prob}\{z_1 + M_1^* \leqq s_1 \wedge \ldots \wedge z_n + M_n^* \leqq s_n\}$$

für jedes $\underline{s} \in S$ und jedes $\underline{m} \in \mathcal{M}$.

Wir wollen ganz kurz auf die Bedeutung der einzelnen Größen eingehen.

Es entspricht z_i einer Differenz von Meßungen im i-ten Zeitintervall des Referenzzeitraums oder im i-ten Teil der Materialbilanzzone. Die

Größe M ist die im Referenzzeitraum oder in der gesamten Materialbilanzzone zu entwendende Gesamtmenge. Die Zahl α ist die für den Referenzzeitraum oder die gesamte Materialbilanzzone resultierende Fehlalarmwahrscheinlichkeit. Ein Element $\underline{m} \varepsilon \mathcal{M}$ entspricht einer Aufteilung von M auf die verschiedenen Zeitintervalle des Referenzzeitraumes oder auf die verschiedenen Teile der Materialbilanzzone. Die Größen s_i stellen Signifikanzschranken für das i-te Zeitintervalles des Referenzzeitraumes oder für den i-ten Teils der Materialbilanzzone dar, anhand derer entschieden wird, ob Material entwendet wurde oder nicht. Ein Element $\underline{s} \varepsilon S$ ist eine Anordnung zulässiger Signifikanzschranken; zulässig heißt dabei, daß die aus den $s_1, \ldots, s_n$ resultierende Fehlalarmwahrscheinlichkeit gerade den Wert α hat. Falls ein oben charakterisiertes Paar $(\underline{s}^*, \underline{m}^*)$ existiert, so ist der Wert

$$P^* := 1 - \text{prob}\{z_1 + M_1^* \leqq s_1^* \wedge \ldots \wedge z_n + M_n^* \leqq s_n^*\}$$

die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit bei gegebener Fehlalarmwahrscheinlichkeit α und zu entwendender Gesamtmenge M.

Die anschließende Frage, ob Materialbilanzierung mittels einfacher Inventur bzw. in einer nicht unterteilten Materialbilanzzone hinsichtlich der garantierten Entdeckungswahrscheinlichkeit *) der Bilanzierung mittels mehrfacher Inventuren bzw. bei unterteilter Materialbilanzzone überlegen ist, läßt sich folgendermaßen formulieren:

gilt die Ungleichung

$$\sup_{\underline{m} \varepsilon \mathcal{M}} \inf_{\underline{s} \varepsilon S} \text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1 \wedge \ldots \wedge z_n + M_n \leqq s_n\}$$

$$> \text{prob}\{\sum_{i=1}^{n} (z_i + M_i) \leqq s\}$$

---

*) Die Entdeckungswahrscheinlichkeit ist nur e i n mögliches Kriterium für die Wirksamkeit von Überwachungsmaßnahmen.

unter den Bedingungen

$$\text{prob}\{\sum_{i=1}^{n} z_i \leqq s\} = 1 - \alpha \quad ,$$

$$1 > \alpha > 0 \; , \; \sum_{i=1}^{n} M_i = M \quad ?$$

Falls die $z_1, \ldots, z_n$ stochastisch unabhängig sind, so ist bekannt, daß sowohl ein (und zwar genau ein) oben charakterisiertes Paar $(\underline{s}^*, \underline{m}^*)$ existiert und daß auch die obige Ungleichung erfüllt ist (/1/, /2/). Für abhängige $z_1, \ldots, z_n$ sind beide Fragen noch offen. Die Behandlung abhängiger $z_1, \ldots, z_n$ ist ungleich schwieriger als die unabhängiger $z_1, \ldots, z_n$. Das liegt in der Hauptsache daran, daß die gemeinsame Verteilung der $z_1, \ldots, z_n$ nun nicht mehr das Produkt der Einzelverteilungen der z_i ist.

Wir wollen nun obige Fragen für den Spezialfall $n = 2$ untersuchen.

Den uninteressanten Fall, daß z_1 und z_2 nach Wahrscheinlichkeit linear abhängig sind, schließen wir aus. D.h. mit

$$\rho := \frac{\text{cov}(z_1, z_2)}{\sqrt{\text{var}(z_1) \cdot \text{var}(z_2)}}$$

haben wir nur den Fall

$$-1 < \rho < 1$$

zu betrachten.

Zur Abkürzung setzen wir

$$\sigma_1^2 := \text{var}(z_1) \quad , \quad \sigma_2^2 := \text{var}(z_2) \; .$$

Bekanntlich gilt für $x_1, x_2 \in R$

$$\mathrm{prob}\{z_1 \leqq x_1 \wedge z_2 \leqq x_2\} = [2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\sigma_1 \sigma_2]^{-1}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\cdot\frac{y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right] dy_1\, dy_2$$

Das Doppelintegral läßt sich nicht explizit angeben; Integration nach y_1 bzw. nach y_2 liefert jedoch die folgende Identität

$$\mathrm{prob}\{z_1 \leqq x_1 \wedge z_2 \leqq x_2\} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_2}{\sigma_2}} e^{-\frac{1}{2}y_2^2}\, \Phi\left(\frac{\frac{x_1}{\sigma_1} - \rho\, y_2}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) dy_2 =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{\sigma_1}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2}\, \Phi\left(\frac{\frac{x_2}{\sigma_2} - \rho\, y_1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) dy_1 \quad ,$$

wobei Φ definiert ist durch

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy \quad .$$

Wir setzen nun

$$U_1 := \frac{s_1}{\sigma_1} \quad , \quad U_2 := \frac{s_2}{\sigma_2}$$

und definieren auf R^2

$$F(c_1, c_2) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{c_2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \Phi\left(\frac{c_1-\rho y}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) dy \quad .$$

Dann ist offenbar das Problem

a) existiert ein Paar $(\underline{s}^*, \underline{m}^*) \varepsilon S \times \mathcal{M}$ mit

$$\text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1^* \wedge z_2 + M_2 \leqq s_2^*\} \leqq$$

$$\leqq \text{prob}\{z_1 + M_1^* \leqq s_1^* \wedge z_2 + M_2^* \leqq s_2^*\} \leqq$$

$$\leqq \text{prob}\{z_1 + M_1^* \leqq s_1 \wedge z_2 + M_2^* \leqq s_2\} \qquad \forall(\underline{s}, \underline{m}) \varepsilon S \times \mathcal{M}$$

äquivalent dem Problem

b) existieren (U_1^*, U_2^*) , (M_1^*, M_2^*) mit

$$F(U_1^*, U_2^*) = 1 - \alpha \quad , \quad M_1^* + M_2^* = M$$

und der Eigenschaft, daß gilt

$$F(U_1^* - \frac{M_1}{\sigma_1}, \quad U_2^* - \frac{M_2}{\sigma_2}) \leqq F(U_1^* - \frac{M_1^*}{\sigma_1}, \quad U_2^* - \frac{M_2^*}{\sigma_2}) \leqq$$

$$\leqq F(U_1 - \frac{M_1^*}{\sigma_1}, \quad U_2 - \frac{M_2^*}{\sigma_2})$$

für alle (U_1, U_2) und alle (M_1, M_2) mit

$$F(U_1, U_2) = 1 - \alpha \quad , \quad M_1 + M_2 = M \; .$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

werden wir nachweisen, daß tatsächlich ein (und zwar genau ein) derartiges Paar

$((U_1^*, U_2^*), (M_1^*, M_2^*))$ existiert .

Wir geben zunächst zwei Hilfssätze an, die wir im folgenden benötigen.

<u>Hilfssatz 1:</u> Sei $Q(x) := \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}$. Dann gilt

a) $Q(x) + x > 0 \quad \forall\, x \in R$

b) $-1 < Q'(x) = -\, Q(x)\cdot(x + Q(x)) < 0 \quad \forall\, x \in R$

c) $Q''(x) > 0 \quad \forall\, x \in R$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} Q(-x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+Q(x)) = 0$

Bew. a), b), c) sind bekannt, (vergl. /1/); den ersten Grenzwert von d) erhält man trivial, der zweite folgt aus a) und liefert zusammen mit b) den dritten Grenzwert. □

<u>Hilfssatz 2:</u> Sei U die Umkehrfunktion von Φ und die Funktion U_2 implizit definiert durch

$F(U_1, U_2) = 1 - \alpha$, $U_1 \in [U(1-\alpha) , \infty]$.

Dann gilt

a) $U_2\ (U_1)$ fällt streng monoton

b) $U_2\ (\infty) = U(1-\alpha)$

c) $U_2\ (U(1-\alpha)) = \infty$

d) Es existiert genau ein $\bar{U}_1 \in [U(1-\alpha) , \infty]$ mit $\bar{U}_1 = U_2(\bar{U}_1)$

e) $U_1 < \bar{U}_1 \iff U_1 < U_2(U_1)$

f) U_2 ist in $(U(1-\alpha), \infty)$ differenzierbar und zwar ist

$$\frac{d\, U_2(U_1)}{d\, U_1} = \frac{e^{-\frac{1}{2} U_1^2}\, \Phi\left(\frac{U_2(U_1) - \rho\, U_1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{e^{-\frac{1}{2} U_2^2(U_1)}\, \Phi\left(\frac{U_1 - \rho\, U_2(U_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} .$$

Bew. a) folgt trivial aus der Definition von F

b) ebenso

c) wegen $F(c_1, c_2) = F(c_2, c_1)$

d) folgt aus a), b), c)

e) folgt aus a), d)

f) folgt aus der Theorie der impliziten Funktion .

□

Wir zeigen nun

<u>Hilfssatz 3:</u> Sei $0 < \alpha < 1$, $c > 0$. Dann nimmt $F(U_1 - c\ ,\ U_2(U_1) - c)$ auf $[U(1-\alpha)\ ,\ \infty]$ das Minimum genau bei $U_1 = \bar{U}_1$, def. in Hs 2. d, an.

Bew. Wir zeigen

$$\frac{\partial}{\partial U_1} F(U_1 - c,\ U_2(U_1) - c) \begin{cases} < 0 & \text{für } U_1 < \bar{U}_1 \\ = 0 & \text{für } U_1 = \bar{U}_1 \\ > 0 & \text{für } U_1 > \bar{U}_1 \end{cases}$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Man hat mit der Abkürzung $U_2 := U_2(U_1)$

$$\frac{\partial}{\partial U_1} F(U_1 - c,\ U_2 - c) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$e^{-\frac{1}{2}(U_1 - c)^2} \Phi\left(\frac{U_2 - c - \rho(U_1 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\left[- e^{-\frac{1}{2}(U_2 - c)^2} \Phi\left(\frac{U_1 - c - \rho(U_2 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} U_1^2}}{e^{-\frac{1}{2} U_2^2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\Phi\left(\frac{U_2 - \rho\, U_1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\Phi\left(\frac{U_1 - \rho\, U_2}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} \right] .$$

Dies folgt unter Beachtung von Hs. 2. f).

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial U_1} F(U_1 - c,\ U_2 - c) \quad \lesseqgtr \quad 0$$

$$<=> \left[e^{cU_1} \quad \Phi\left(\frac{U_2 - c - \rho(U_1 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \right.$$

$$- \; e^{c\,U_2} \; \Phi\left(\frac{U_1 - c - \rho(U_2 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{\Phi\left(\frac{U_2 - \rho\,U_1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\Phi\left(\frac{U_1 - \rho\,U_2}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} \Bigg] \lesseqgtr 0$$

$$<=> H(c,\, U_1,\, U_2) := \Bigg[c[U_1 - U_2] \; +$$

$$\ell n \; \Phi\left(\frac{U_2 - c - \rho(U_1 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) - \ell n \; \Phi\left(\frac{U_1 - c - \rho(U_2 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$+ \quad \ell n \; \Phi\left(\frac{U_1 - \rho\,U_2}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) - \ell n \; \Phi\left(\frac{U_2 - \rho\,U_1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \Bigg] \lesseqgtr 0$$

Offenbar ist

$H(c,\, \bar{U}_1,\, U_2(\bar{U}_1)) = 0$.

Außerdem ist

$H(0,\, U_1,\, U_2) = 0$.

Wenn wir also zeigen

$$\frac{\partial}{\partial c} H(c, U_1, U_2) \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad U_1 < \bar{U}_1 \\ > 0 & \text{für} \quad U_2 > \bar{U}_1 \end{cases}$$

folgt

$$H(c, U_1, U_2) \quad \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad U_1 < \bar{U}_1 \\ > 0 & \text{für} \quad U_1 > \bar{U}_1 \end{cases}$$

und der Satz ist bewiesen.

Man hat

$$\frac{\partial}{\partial c} H(c, U_1, U_2) = U_1 - U_2 + \frac{1 - \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \cdot$$

$$\left[- Q\left(\frac{U_2 - c - \rho(U_1 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + Q\left(\frac{U_1 - c - \rho(U_2 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \right] \quad ,$$

was wir wegen

$$U_1 - U_2 = (U_1 - c) - (U_2 - c) =$$

$$= [1 + \rho)(U_1 - c) - (1 + \rho)(U_2 - c)] \; \frac{1 - \rho}{1 - \rho^2} =$$

$$= \left[\frac{U_1 - c - \rho(U_2 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{U_2 - c - \rho(U_1 - c)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right] \; \frac{1 - \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=: [t_1 - t_2] \; \frac{1 - \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

in der Form

$$\frac{\partial}{\partial c} H(c, U_1, U_2) = [t_1 + Q(t_1) - (t_2 + Q(t_2))] \frac{1 - \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

schreiben können.

Aus Hs.1 folgt

$$1 + Q'(x) > 0 \quad \forall x ,$$

d.h. $(x + Q(x))$ wächst streng monoton.

Daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial c} H \begin{cases} < 0 & \text{für } t_1 < t_2 \\ > 0 & \text{für } t_1 > t_2 \end{cases} .$$

Nun gilt

$$t_1 \lesseqgtr t_2$$

$$\Leftrightarrow U_1 - \rho U_2 \lesseqgtr U_2 - \rho U_1$$

$$\Leftrightarrow (1 + \rho)U_1 \lesseqgtr (1 + \rho)U_2$$

$$\Leftrightarrow \quad U_1 \lesseqgtr U_2$$

was nach Hs 2 e) äquivalent ist zu

$$U_1 \lesseqgtr \bar{U}_1 .$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Analog zu Satz 3 gilt

Satz 4: Für jedes $t \varepsilon R$ nimmt

$F(t - M_1, \; t - (M - M_1))$ in R das Maximum genau bei

$M_1 = \frac{1}{2} M$ an.

Bew. Man hat $\frac{\partial}{\partial M_1} F(t - M_1, \; t - M + M_1) =$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[- e^{-\frac{1}{2}(t - M_1)^2} \Phi\left(\frac{t - M + M_1 - \rho(t - M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{2}(t - M + M_1)^2} \Phi\left(\frac{t - M_1 - \rho(t - M + M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \right] .$$

Offenbar gilt

$$\frac{\partial}{\partial M_1} F(t - M_1, \; t - M + M_1) \lesseqgtr 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$T(M_1) := - \frac{1}{2}(t - M + M_1)^2 + \ln \Phi\left(\frac{t - M_1 - \rho(t - M + M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}(t - M_1)^2 \quad - \ln \Phi\left(\frac{t - M + M_1 - \rho(t - M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\lesseqgtr 0 .$$

Offensichtlich ist

$$T(\tfrac{1}{2} M) = 0 .$$

Wir zeigen nun

$$T'(M_1) < 0 \quad \forall \quad M_1 \in R \; ;$$

daraus folgt

$$T(M_1) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad M_1 < \frac{1}{2} M \\ < 0 & \text{für} \quad M_1 > \frac{1}{2} M \end{cases} ,$$

also gilt

$$\frac{\partial}{\partial M_1} F(t - M_1, \quad t - M + M_1) \begin{cases} > \; 0 & \text{für} \quad M_1 < \frac{1}{2} M \\ = \; 0 & \text{für} \quad M_1 = \frac{1}{2} M \\ < \; 0 & \text{für} \quad M_1 > \frac{1}{2} M \end{cases} ,$$

woraus folgt, daß $F(t - M_1, \; t - M + M_1)$ genau bei $M_1 = \frac{1}{2} M$ das Maximum annimmt.

Es ist

$$T'(M_1) = [-(t - M_1) - (t - M + M_1)] + \frac{1 + \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\left[- Q\left(\frac{t - M + M_1 - \rho(t - M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) - Q\left(\frac{t - M_1 - \rho(t - M + M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \right] .$$

Nun ist

$$-(t - M_1) - (t - M + M_1) = \frac{1}{1-\rho} [-(1 - \rho)(t - M_1) - (1 - \rho)(t - M + M_1)]$$

$$= \frac{1 + \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \left[- \frac{(t - M + M_1) - \rho(t - M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{t - M_1 - \rho(t - M + M_1)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$=: \frac{1+\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} [- a \quad - b] \quad .$$

Also hat $T'(M_1)$ die Form

$$T'(M_1) = \frac{1+\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} [-(a + Q(a)) - (b + Q(b))] \quad .$$

Wegen Hs 1 a) folgt

$T'(M_1) < 0$.

Damit ist der Satz gezeigt. □

Aus den beiden vorangegangenen Sätzen folgt nun unmittelbar die Existenz einer Lösung von Problem b), definiert auf Seite 5, für $\sigma_1 = \sigma = \sigma_2$.

<u>Satz 5:</u> Für $(U_1^*, U_2^*) := (\bar{U}_1, \bar{U}_1)$, $(M_1^*, M_2^*) := (\frac{1}{2} M, \frac{1}{2} M)$

gilt

$$F(U_1^* - \frac{M_1}{\sigma} \quad , \quad U_2^* - \frac{M_2}{\sigma}) \leqq F(U_1^* - \frac{M_1^*}{\sigma} \quad , \quad U_2^* - \frac{M_2^*}{\sigma})$$

$$\leqq F(U_1 - \frac{M_1^*}{\sigma} \quad , \quad U_2 - \frac{M_2^*}{\sigma})$$

für alle (M_1, M_2) mit $M_1 + M_2 = M$

und alle (U_1, U_2) mit $F(U_1, U_2) = 1 - \alpha$.

Bew. Nach Satz 3 gilt

$$F(\bar{U}_1 - \frac{1}{2}\frac{M}{\sigma}, \bar{U}_1 - \frac{1}{2}\frac{M}{\sigma}) \leq F(U_1 - \frac{1}{2}\frac{M}{\sigma}, U_2 - \frac{1}{2}\frac{M}{\sigma})$$

für jedes Paar $(U_1, U_2(U_1))$, d.h. $\forall (U_1, U_2)$ mit $F(U_1, U_2) = 1 - \alpha$.

Nach Satz 4 gilt

$$F(\bar{U}_1 - \frac{1}{2}\frac{M}{\sigma}, \bar{U}_1 - \frac{1}{2}\frac{M}{\sigma}) \geqq F(\bar{U}_1 - \frac{M_1}{\sigma}, \bar{U}_1 - \frac{M_2}{\sigma})$$

$\forall (M_1, M_2)$ mit $M_1 + M_2 = M$.

□

Wir haben also gezeigt, daß

$F(U_1 - \frac{M_1}{\sigma}, U_2 - \frac{M_2}{\sigma})$ auf der Menge

$$\{(U_1, U_2), F(U_1, U_2) = 1 - \alpha\} \times \{(M_1, M_2), M_1 + M_2 = M\}$$

einen Sattelpunkt $((\bar{U}_1, \bar{U}_1), (\frac{1}{2}M, \frac{1}{2}M))$ besitzt. Wäre $((U_1', U_2'), (M_1', M_2'))$ ein weiterer Sattelpunkt, so wären bekanntlich auch

$((U_1', U_2'), (\frac{1}{2}M, \frac{1}{2}M))$ und $((\bar{U}_1, \bar{U}_1), (M_1', M_2'))$ Sattelpunkte.

Da wir in den Sätzen 3 und 4 jeweils die Eindeutigkeit des Extremums gezeigt haben, folgt sofort

$(U_1', U_2') = (\bar{U}_1, \bar{U}_2)$, $(M_1', M_2') = (\frac{1}{2}M, \frac{1}{2}M)$.

Das ergibt

<u>Korollar 6:</u> Die Lösung des Problems b) von Seite 7 ist eindeutig bestimmt.

Die eingangs gestellte erste Frage ist damit für den Fall $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vollständig beantwortet.

Bevor wir die zweite Frage behandeln, beweisen wir noch zwei Hilfssätze.

Im folgenden sei zugelassen:

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Wir kürzen ab

$$\sigma^2 := (\sigma_1 + \sigma_2)^2, \quad \textstyle\sum^2 := \mathrm{var}(z_1 + z_2) \ , \quad \Theta := \frac{1 - \rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad .$$

<u>Hilfssatz 7:</u> Sei $0 < \alpha < 1$. Dann gilt mit $\bar{U}_1$ definiert gemäß Hs. 2 d)

$$\sigma \, \bar{U}_1 > \textstyle\sum U(1 - \alpha) \ .$$

Bew. Für $U(1 - \alpha) \geqq 0$ ist die Behauptung richtig, denn $\bar{U}_1 > U(1 - \alpha)$ und $\sigma > \sum$.

Sei also

$U(1 - \alpha) < 0$.

Für $- \infty < s < 0$ und $s' \in R$ gelte nun

$\mathrm{prob}\{z_1 + z_2 \leqq s\} = \mathrm{prob}\{z_1 \leqq s' \wedge z_2 \leqq s'\}$

Trivialerweise gilt dann wegen $s < 0$

$s < s'$.

Aus $\text{prob}\{z_1 + z_2 \leqq s\} = 1 - \alpha$

folgt

$$1 - \alpha = \Phi(\frac{s}{\Sigma}) \ ,$$

daher

$$s = \sum \cdot U(1 - \alpha) \ .$$

Weiter folgt aus

$$\text{prob}\{z_1 \leqq s' \wedge z_2 \leqq s'\} = 1 - \alpha :$$

$$F(\frac{s'}{\sigma} \ , \ \frac{s'}{\sigma}) = 1 - \alpha \ , \ \text{daraus}$$

$$\frac{s'}{\sigma} = \bar{U}_1 \ ,$$

also

$$s' = \sigma \cdot \bar{U}_1$$

und damit die Behauptung . □

<u>Folgerung 8:</u> Es gilt mit $U := U(1 - \alpha)$

$$\lim_{c\to\infty} \{ - \bar{U}_1 \frac{1}{\sigma} (1 + \Theta^2) + U \frac{1}{\Sigma} + c \, [\frac{1}{\sigma^2}(1 + \Theta^2) - \frac{1}{\Sigma^2}]\} < 0$$

$$<=> \frac{1}{\sigma^2} (1 + \Theta^2) \leqq \frac{1}{\Sigma^2} \ .$$

Bew. Interessant ist nur der Fall

$$\frac{1}{\sigma^2}(1+\Theta^2) = \frac{1}{\Sigma^2}$$

Man hat nach Hs. 8

$$\sigma\,\bar{U}_1 > \sum U \quad ,$$

daher

$$\sigma\,\bar{U}_1 \frac{1}{\sigma^2}(1+\Theta^2) > \sum U \frac{1}{\Sigma^2} \quad ,$$

d.h.

$$-\bar{U}_1 \frac{1}{\sigma}(1+\Theta^2) + U\frac{1}{\Sigma} < 0 \quad .$$

$\square$

Weiter nutzen wir aus

<u>Hilfssatz 9:</u> Sei mit $0 < \alpha < 1$, $U := U(1-\alpha)$

$$h(c) := Q([\bar{U}_1 - \frac{c}{\sigma}]\,\Theta)\,\frac{\Theta}{\sigma} - (\bar{U}_1 - \frac{c}{\sigma})\,\frac{1}{\sigma}$$

$$+ (U - \frac{c}{\Sigma})\,\frac{1}{\Sigma} \quad .$$

Dann gilt

a) h hat höchstens zwei Nullstellen in R

b) es ist $\lim\limits_{c\to-\infty} h(c) > 0$

c) es gilt $\lim\limits_{c\to\infty} h(c) < 0 \iff \frac{1}{\sigma^2}(1+\Theta^2) \leqq \frac{1}{\Sigma^2}$

Bew.

a) Angenommen, h hätte mindestens drei Nullstellen.

Dann hat h'' mindestens eine Nullstelle. Nun ist

$$h''(c) = Q''([\bar{U}_1 - \frac{c}{\sigma}]\,\Theta)\,\frac{\Theta^3}{\sigma^3} > 0$$

nach Hs. 1 c) . Damit hat man einen Widerspruch.

b) Wegen $\lim_{c \to -\infty} Q([\bar{U}_1 - \frac{c}{\sigma}]\,\Theta) = 0$

nach Hs. 1 d) und $\sigma^2 > \sum^2$ folgt die Behauptung.

c) Wir schreiben h in der Form

$$h(c) = \left[(\bar{U}_1 - \frac{c}{\sigma})\,\Theta + Q([\bar{U}_1 - \frac{c}{\sigma}]\,\Theta)]\,\frac{\Theta}{\sigma}\right]$$

$$- \bar{U}_1\,\frac{1}{\sigma}\,(1 + \Theta^2) + U\,\frac{1}{\Sigma} + c \cdot [\frac{1}{\sigma^2}\,(1 + \Theta^2) - \frac{1}{\Sigma^2}] \quad .$$

Nach Hs. 1 d) geht der erste Summand gegen 0 für c gegen ∞ . Die Behauptung ergibt sich dann aus Folgerung 8 .

□

Wir wollen nun die zweite, eingangs gestellte Frage behandeln.

Dazu schätzen wir $\sup_{\underline{m} \varepsilon M} \inf_{\underline{s} \varepsilon S} \text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1 \wedge z_2 + M_2 \leqq s_2\}$

nach unten ab.

<u>Hilfssatz 10:</u> Es gilt mit $\bar{U}_1$, def. gemäß Hs 2 d),

$$\sup_{\underline{m}\, \varepsilon M}\ \inf_{\underline{s}\, \varepsilon\, S} \text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1 \wedge z_2 + M_2 \leqq s_2\}$$

$$\geqq F(\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2}\ ,\ \bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2}) \quad .$$

Bew. Nach Satz 3 ist

$$F(\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2} , \bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2}) =$$

$$= \min\{F(U_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2} , U_2 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2}) , F(U_1, U_2) = 1 - \alpha\} ,$$

woraus wegen

$$F(\frac{s_1 - M_1}{\sigma_1} , \frac{s_2 - M_2}{\sigma_2}) = \text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1 \wedge z_2 + M_2 \leqq s_1\}$$

und $\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} M_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} M_2 = M$ die Behauptung folgt.

□

Offensichtlich gilt unter der Bedingung

$\text{prob}\{z_1 + z_2 \leqq s\} = 1 - \alpha$:

$$\Phi(U(1 - \alpha) - \frac{M}{\Sigma}) = \text{prob}\{z_1 + M_1 + z_2 + M_2 \leqq s\} .$$

Unter der Bedingung

$$\text{prob}\{z_1 \leqq s_1 \wedge z_2 \leqq s_2\} = 1 - \alpha = \text{prob}\{z_1 + z_2 \leqq s\}$$

gilt nach Hilfssatz 10 also

$$\Delta(M) := F(\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2} , \bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma_1+\sigma_2}) - \Phi(U(1 - \alpha) - \frac{M}{\Sigma}) \leqq$$

$$\leqq \sup_{\underline{m} \, \varepsilon \mathcal{M}} \inf_{\underline{s} \, \varepsilon \, S} \text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1 \wedge z_2 + M_2 \leqq s_2\}$$

$$- \text{prob}\{z_1 + M_1 + z_2 + M_2 \leqq s\} .$$

Wir werden nun zeigen, daß im Falle

$$\frac{1}{\Sigma^2} \geqq \frac{1}{\sigma^2}(1 + \Theta^2) \qquad (*)$$

für jedes $M > 0$ gilt

$$\Delta(M) > 0 \quad ,$$

d.h. mit Ungl $(*)$ gilt auch die Ungleichung auf Seite 2, und damit ist für den Fall $(*)$ die zweite eingangs gestellte Frage beantwortet. (Man kann zeigen, daß, falls $(*)$ nicht erfüllt ist, stets ein M existiert mit $\Delta(M) < 0$; das impliziert aber nicht, daß dann die Ungleichung auf S. 2 nicht gilt).

<u>Hilfssatz 11:</u> Für das oben definierte Δ gilt

$$\Delta(M) > 0 \qquad \forall\, M > 0 \quad ,$$

falls $\frac{1}{\Sigma^2} \geqq \frac{1}{\sigma^2}(1 + \Theta^2)$.

Bew. Angenommen, es gäbe $\hat{M} > 0$ mit $\Delta(\hat{M}) < 0$.

Wegen

$$\Delta(0) = 0 = \lim_{M\to\infty} \Delta(M) = \lim_{M\to-\infty} \Delta(M)$$

existieren $(-\infty, \infty) \ni M^1 < M^2 \in (0, \infty)$ mit den Eigenschaften

Δ hat ein Maximum bei M^1 (nicht notw. global) ,

Δ hat ein Minimum bei M^2 (nicht notw. global) .

Das bedeutet

$$\Delta'(M^i) = 0 \qquad \text{für} \quad i=1, 2 .$$

Es ist mit $U := U(1 - \alpha)$

$$\Delta'(M) = \left[- e^{-\frac{1}{2}(\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma})^2} \Phi\left(\frac{[\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma}](1 - \rho)}{(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{2}{\sigma}\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{2}(U - \frac{M}{\Sigma})^2} \frac{1}{\Sigma}\right] (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

Wegen $\Delta'(M^i) = 0$, $i=1, 2$ gilt für

$$H(M) := [- \ell n2 + \frac{1}{2}(\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma})^2 - \ell n \, \Phi\left(\frac{[\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma}](1 - \rho)}{(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + \ell n\sigma$$

$$- \frac{1}{2}(U - \frac{M}{\Sigma})^2 - \ell n\Sigma] :$$

$$H(M^i) = 0 \, , \qquad i=1, 2 \quad .$$

Berücksichtigt man, daß für $f(x), g(x) > 0$ mit $f(x') = g(x')$ gilt

$$\operatorname{sign}[(\ell n \, f(x) - \ell n \, g(x))']_{x = x'} = \operatorname{sign}[(f(x) - g(x))']_{x = x'}$$

und weiter, daß nach Definition von M^1, M^2

$\Delta''(M^1) \leqq 0$, $\Delta''(M^2) \geqq 0$

richtig sein muß, so folgt sofort

$H'(M^1) \leqq 0$, $H'(M^2) \geqq 0$.

Es ist mit $\Theta = \dfrac{1 - \rho}{(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$H'(M) = Q([\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma}]\ \Theta)\ \frac{\Theta}{\sigma} - (\bar{U}_1 - \frac{M}{\sigma})\ \frac{1}{\sigma} + (U - \frac{M}{\Sigma})\ \frac{1}{\Sigma}\ .$$

Wegen

$\lim_{M \to -\infty} H'(M) > 0\ ,\quad \lim_{M \to \infty} H'(M) < 0$

nach Hs. 9 b), c) und wegen

$H'(M_1) \leqq 0\ ,\qquad H'(M^2) \geqq 0$ und $\qquad M^1 < M^2$

hätte H' mindestens drei Nullstellen .

Das ist aber ein Widerspruch zu Hs. 9 a) .

Also kann nicht gelten

$\Delta(M) < 0$ für irgendein $M > 0$. □

Wir haben also gezeigt

Für den Fall

$\frac{1}{\Sigma^2} \geqq \frac{1}{\sigma^2}\ (\ 1 + \Theta^2)$

gilt

$$\sup_{\underline{m}\,\varepsilon M}\ \inf_{\underline{s}\,\varepsilon S}\ \text{prob}\{z_1 + M_1 \leqq s_1 \wedge z_2 + M_2 \leqq s_2\}$$

$$> \text{prob}\{z_1 + M_1 + z_2 + M_2 \leqq s\}$$

unter der Bedingung

$$\text{prob}\{z_1 \leqq s_1 \wedge z_2 \leqq s_2\} = 1 - \alpha = \text{prob}\{z_1 + z_2 \leqq s\} .$$

Damit ist die eingangs gestellte zweite Frage insbesondere für den Spezialfall

$$z_1 := z_1' - z$$

$$z_2 := z_2' + z$$

mit unabhängigen z_1' , z_2' , z und

$$\sigma_0^2 := \text{var}(z_1') = \text{var}(z_2')$$

beantwortet .

Man hat nämlich

$$\Sigma^{-2} = (2\,\sigma_0^2)^{-1}$$

und

$$\sigma^{-2}(1 + \Theta^2) = \sigma^{-2}\,\frac{2}{1 + \rho} = 2\,\sigma^{-2} \cdot \frac{\sigma_0^2 + \text{var}(z)}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\sigma_0^{-2} .$$

Literatur

/1/ H. Frick
Spieltheoretische Behandlung mehrfacher Inventurprobleme
Dieser Bericht, Teil I

/2/ R. Avenhaus, H. Frick
Eine Ungleichung für normalverteilte Zufallsvariable und ihre Anwendung bei Materialbilanzierungsproblemen
Erscheint in den Proceedings des II. Symposiums über Operations Research, 31.8. - 2.9.1977, Aachen