

KfK 2505
März 1978

SING 1
Ein Computercode zur
Berechnung transienter,
dreidimensionaler,
inkompressibler
Potentialströmungen nach
einem
Singularitätenverfahren

R. Krieg, G. Hailfinger
Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE GMBH

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

KfK 2505

SING1 - ein Computercode zur Berechnung transienter,
dreidimensionaler, inkompressibler Potentialströmungen
nach einem Singularitätenverfahren

R. Krieg
G. Hailfinger

Kernforschungszentrum Karlsruhe G.m.b.H., Karlsruhe

SING1 - ein Computercode zur Berechnung transienter, dreidimensionaler, inkompressibler Potentialströmungen nach einem Singularitätenverfahren

Zusammenfassung:

Der Einsatz von Singularitätenverfahren für transiente, dreidimensionale Strömungen, wie sie insbesondere bei Störfallanalysen in der Kerntechnik auftreten, wird diskutiert. Vergleiche mit Singularitätenverfahren aus dem aerodynamischen Anwendungsbereich, sowie Vergleiche mit anderen numerischen Verfahren werden angeführt. Aufbauend auf einer geschlossenen fluiddynamischen Lösung für ein ebenes Rechteckelement mit konstanter Dipolverteilung wird ein Singularitätenverfahren entwickelt, das sich speziell für Probleme folgenden Typs eignet: Fluidviskosität und Kompressibilität sind vernachlässigbar; an den weitgehend beliebig geformten Rändern ist teilweise der Druck (freie Oberfläche) und teilweise die Normalbeschleunigung (starre Wand) vorgeschrieben; dünne Wände, allseitig umgeben von Fluid, sind zugelassen. Da bei diesem Verfahren das dreidimensionale fluiddynamische Problem auf ein zweidimensionales mathematisches Problem in den Fluidrandflächen (Boundary Integral Equation Method) reduziert wird und diese Fluidrandflächen mit den umgebenden Wänden weitgehend identisch sind, eignet es sich insbesondere bei der Behandlung gekoppelter fluid-strukturdynamischer Probleme. Außerdem erlaubt die Verwendung von Dipolbelegungen im Vergleich zur üblichen Quell-Senken-Belegung eine recht genaue Erfüllung der Randbedingungen an Randflächen mit Kanten. Eine detaillierte Beschreibung des Lösungsverfahrens wird gegeben. Sie dient als Basis für den Computercode SING1. Zwei Rechenbeispiele (Wasserpool eines Druckunterdrückungssystems und T-Stück) demonstrieren die Anwendung des Verfahrens.

SING 1 - a Computer Code, Based on a Singularity Method, for Analysis of Transient, Three-dimensional, Incompressible Potential Flows.

Application of singularity methods to transient, three-dimensional flows which especially occur in nuclear safety analysis is discussed. Comparisons with singularity methods appropriate to the classic aerodynamics as well as comparisons with other numerical solution procedures are included. Based on an analytical solution for a rectangular plane with a uniform dipole distribution a singularity method has been developed, applicable to problems of the following type: Fluid viscosity and compressibility are negligible; at almost arbitrary boundaries either pressures (free fluid surface) or accelerations (rigid wall) are prescribed; thin walls wetted at both sides are allowed. With this method the three-dimensional fluid dynamics is reduced to a two-dimensional problem in the fluid boundaries. Since these fluid boundaries are almost identical with the surrounding (shell) structure, the presented method is especially suitable for problems in coupled fluid-structural dynamics. Furthermore, the application of dipole distributions rather than the well known source distributions allows for an improved satisfaction of the boundary conditions close to boundary edges. A detailed description of the procedure is given. It represents the basis of the computer code SING1. Two examples (water pool of a pressure suppression system and T-joint) demonstrate the application of the method.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung
2. Mathematische Formulierung des Problems
3. Grundzüge des SING1-Lösungsverfahrens im Vergleich zu anderen Methoden
4. Detaillierte Beschreibung der Daten, die zur Durchführung der SING1-Rechnungen notwendig sind
 - 4.1 Globales Koordinatensystem
 - 4.2 Spezifikation von Zeitfunktionen als Hilfsmittel zur Problembeschreibung
 - 4.3 Spezifizierung von Quellen und Senken mit vorgegebener Intensität
 - 4.4 Gemeinsame Spezifizierung der Randbedingungen, der Aufpunkte, in denen Druck und Geschwindigkeit berechnet werden sollen und der Singularitäten, die als Hilfsmittel bei der Lösung eingesetzt werden sollen.
5. Aufbereitung der Daten für die Durchführung der SING1-Rechnungen
 - 5.1 Bestimmung der Normalen zu den von den Vektoren \vec{r}_{ij}^{ξ} und \vec{r}_{ij}^{ζ} aufgespannten Ebenen sowie Durchführung einiger weiterer Umformungen
 - 5.2 Separate Auflistung der zu den Rand- und Aufpunkten gehörenden Daten
 - 5.3 Separate Auflistung der zu den Singularitäten gehörenden Daten und Bestimmung einiger Hilfsgrößen
6. Berechnung des Druckes P und des Beschleunigungsvektors \vec{a} im Punkt ℓ , herrührend von der vorgegebenen Quelle i sowie der zugehörigen spiegelsymmetrischen Quelle i'
7. Berechnung des Druckes P und des Beschleunigungsvektors \vec{a} im Punkt ℓ , herrührend vom rechtwinkligen Dipolelement m und dem zugehörigen spiegelsymmetrischen Element m'

- 7.1 Berechnung der lokalen Koordinaten
- 7.2 Berechnung der Druck- und Beschleunigungsanteile
- 7.3 Umformung der Gleichungen zur Bestimmung der Druck- und Beschleunigungsanteile

8. Berechnung des Druckes P und des Beschleunigungsvektors \bar{a} im Punkt ℓ , herrührend von der Quelle n , sowie der zugehörigen spiegelsymmetrischen Quelle n'
9. Superposition der Druckanteile P und Beschleunigungsanteile \bar{a} herrührend von den Quellen i und n , den rechteckigen Dipolelementen m , sowie den hierzu spiegelsymmetrischen Quellen bzw. Elementen i', n' und m'
10. Bestimmung der unbekanntenen Stützwerte X_{R} durch näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen
11. Bestimmung der Druck-, Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsfelder als Funktion der Zeit
12. Einige Anmerkungen zur Programmieretechnik und zum Rechenaufwand von SING1.
13. Anwendungsbeispiele für SING1
 - 13.1 Fluidodynamisches Verhalten des Wasserpools eines Druckunterdrückungssystems für Siedewasserreaktoren
 - 13.2 Fluidodynamik in einem T-Stück mit unterschiedlichen Rechteckquerschnitten

Literatur

1. Einführung

Sehr umfangreiche Anstrengungen zum praktischen Einsatz von Singularitätenverfahren¹⁾ bei der Berechnung von Strömungsfeldern wurden von Hess und Smith unternommen [1, 2, 3]. Sie führten zu Rechenverfahren und Codes für zweidimensionale, rotationsymmetrische und dreidimensionale Strömungsprobleme. Fluidviskosität und Kompressibilität wurden hierbei vernachlässigt. Im Mittelpunkt standen bei Hess und Smith klassische, aerodynamische Probleme aus dem Bereich des Flugzeugbaues, wie z.B. die verschiedenen Anströmungsfälle von Tragflügeln, sowie die Umströmung der Triebwerke, des Flugzeugrumpfes oder gelegentlich auch ganzer Flugzeuge und Raketen. Dies bedeutet, daß es in den Codes in erster Linie darauf ankam, den Fall unendlich ausgedehnter, stationärer Strömungen um weitgehend beliebig geformte, jedoch dickwandige Körper mit vorgeschriebener Geschwindigkeit normal zur Körperoberfläche²⁾ zu untersuchen. Die erzielten Ergebnisse stimmen in vielen Fällen sowohl mit analytischen Lösungen - soweit solche zur Verfügung standen -, als auch mit den Messungen entsprechender Experimente sehr gut überein.

Auch zahlreiche andere Autoren wie z.B. Argyris und Scharpf [4], Landweber [5], Albring und Schindler [6] oder Renken [7] diskutieren das Singularitätenverfahren oder wenden es für verschiedene Probleme an. Eine Einführung in das Verfahren mit einer Reihe einfacher Anwendungsbeispiele für stationäre Strömungsprobleme geben Keune und Burg [8].

Bei dem Anwendungsspektrum für den Code SING1 sollen dagegen stark transiente Strömungen, wie z.B. Anlaufströmungen, teilweise mit freier Oberfläche, teilweise umgeben von beliebig geformten Behältern - gegebenenfalls mit dünnwandigen Einbauten -, im Vordergrund stehen. Auslösendes Moment solcher Strömungen sollen Ereignisse sein, wie das schnelle Öffnen von Schiebern, der Bruch eines strömungsführenden Teiles, aufgeprägte Bewegungen einer fluid-beaufschlagten Wand z.B. bei Erdbeben oder das plötzliche Entstehen oder Kollabieren von Gasblasen im Fluid. Solche Aufgabenstellungen kommen insbesondere bei den

1) Gebräuchlich sind auch die Begriffe "Boundary Integral Equation Method" oder "Panel-Verfahren". Die letztere Bezeichnung hebt bereits auf die Diskretisierung der Randflächen ab.

2) Im Normalfalle einer undurchlässigen Körperoberfläche verschwindet die vorgeschriebene Geschwindigkeit normal zur Körperoberfläche.

verschiedenen Störfallanalysen in der Reaktortechnik vor.

Für die Code-Entwicklung bedeutet dies, daß - im Gegensatz zu den Anwendungen in der Aerodynamik - weniger die Strömungsgeschwindigkeit als vielmehr die Strömungsbeschleunigung interessiert, daß an den Oberflächen alternativ entweder die Normalbeschleunigung oder ein Druck vorgebar sein muß und daß auch die Umströmung sehr dünner (theoretisch unendlich dünner) Schalenstrukturen simulierbar sein muß. Der Einfluß der Wandnachgiebigkeiten bei sich änderndem Druck soll bei dem Code SING1 dagegen noch nicht berücksichtigt werden. Dies bleibt vielmehr einer erweiterten Version von SING1 vorbehalten, die auf die Behandlung gekoppelter, fluid-strukturdynamischer Probleme zugeschnitten sein wird [9, 10]. Wie bereits Hess und Smith andeuten, ist zu erwarten, daß die numerische Behandlung von Strömungsfeldern, die weitgehend von festen Wänden umgeben sind, eher zu Schwierigkeiten führt, als Probleme mit unendlich ausgedehnten Strömungsfeldern.

Ebenso wie bei den vorerwähnten klassischen Anwendungen in der Aerodynamik werden auch in SING1 Fluidviskosität und Kompressibilität vernachlässigt.

Was die Fluidviskosität angeht, so ist eine Vernachlässigung bei stark transienten Strömungen - für deren Analyse SING1 eingesetzt werden soll - eher zu rechtfertigen als im Falle der klassischen stationären Strömungen. Bei der in jedem Punkt des Strömungsfeldes durchzuführenden Kräftebilanz ist nämlich die zu vernachlässigende Reibungskraft nicht nur wie im stationären Falle mit einer konvektiven Beschleunigungskraft zu vergleichen. Es kommt vielmehr noch ein lokaler Anteil hinzu, der proportional ist zur ortsfesten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Außerdem sind bei sehr vielen stark transienten Strömungen (z.B. Anlaufströmungen) die auftretenden Geschwindigkeiten und damit die Viskositätseinflüsse erheblich kleiner als im Falle vergleichbarer stationärer Strömungen. Phänomenologisch wirkt sich dies dahingehend aus, daß bei transienten Strömungen die Grenzschichtdicken im allgemeinen kleiner sind als bei den entsprechenden stationären Strömungen. Soll der Fehler, verursacht durch das Außerachtlassen der Viskosität eine gewisse Schranke nicht überschreiten, so müssen die Grenzschichtdicken bezogen auf charakteristische Abmessungen des Strömungsfeldes ausreichend klein sein.

Etwas problematischer ist bei transienten Strömungen die Unterdrückung der Fluidkompressibilität. War bei stationären Strömungen diese Approximation bereits dann gerechtfertigt, wenn das Verhältnis maximale Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit, d.h. die Mach-Zahl genügend klein ist (in [1] wurde eine Mach-Zahl kleiner 0.5 verlangt), so muß bei transienten Problemen auch der Verfälschung der Wellenausbreitungsvorgänge Beachtung geschenkt werden. Soweit es sich um Kompressionswellen in der Flüssigkeit handelt, so wird bei Vernachlässigung der Fluidkompressibilität die Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich groß. Soweit bei den Wellenausbreitungsvorgängen Bewegungen von Flüssigkeitsoberflächen eine Rolle spielen (Oberflächenwellen), treten dagegen keine Verfälschungen auf. Allerdings kann der Code SING1 diese Effekte nicht erfassen, da - wie bereits erwähnt - Nachgiebigkeiten der Flüssigkeitsrandflächen erst in einer erweiterten Version von SING1 berücksichtigt werden sollen. Unendlich große Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten, hervorgerufen durch unterdrückte Fluidkompressibilität, führen zu verschwindenden Wellenlaufzeiten. Sie sind dann akzeptabel, d.h. die Vernachlässigung der Fluidkompressibilität führt dann nur zu kleinen Fehlern, wenn auch die tatsächlichen Wellenlaufzeiten (für charakteristische Abmessungen des Strömungsfeldes) schon als klein anzusehen waren gegenüber den Zeiten, innerhalb derer die transienten Zustandsänderungen erfolgen. Ein Beispiel mag dies verdeutlichen: Gegeben sei ein Strömungsfeld mit einer charakteristischen Länge von 1 m. Die Schallgeschwindigkeit sei 1000 m/sec, d.h. die Wellenlaufzeit ist 1 msec. Wird nun das Fluid beispielsweise bei einer Explosion innerhalb 1 msec auf die maximalen Geschwindigkeiten beschleunigt, so ist die Vernachlässigung der Fluidkompressibilität nicht zulässig. Wird dagegen der transiente Vorgang beispielsweise durch Bewegen träger Massen ausgelöst, die eine Fluidbeschleunigungszeit von mehr als 10 msec bedingen, so darf man die Fluidkompressibilität außer Acht lassen, vorausgesetzt, lokale Fehler der Größenordnung 10 % werden akzeptiert. Das Zeitintegral über diese Fehler geht gegen Null.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, daß auch kompressible Strömungsprobleme durch Singularitätenverfahren beschrieben werden können. Dazu hat Prandtl Hinweise gegeben [11]. In dieser Arbeit wird darauf jedoch nicht weiter eingegangen.

Es bleibt noch anzumerken, daß der Code SING1 speziell für Probleme mit einer Spiegelsymmetrie-Ebene formuliert wurde. Außerdem wurde angenommen, daß am Anfang der transienten Vorgänge das Fluid sich im Ruhezustand befindet. Es versteht sich von selbst, daß bei dreidimensionalen Problemen mit zunehmender Feinauflösung der Randbedingungen sehr bald ein Punkt erreicht wird, bei dem Kapazität und Rechenzeit, die an Computern derzeit zur Verfügung stehen, überschritten werden. Dies bedeutet, daß bei komplexeren Aufgabenstellungen die gewünschte Feinauflösung nicht immer erreicht werden kann und deshalb mitunter Abstriche bei den Genauigkeitsanforderungen hingenommen werden müssen.

2. Mathematische Formulierung des Problems

Die Feldgleichungen für eine reibungsfreie, inkompressible und quellfreie Strömung ohne Volumenkräfte lauten

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (\text{Kontinuität})$$

und

(2.1)

$$d\bar{v}/d\tau = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (\text{Impuls})$$

Hierin sind

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \text{Geschwindigkeitsvektor;} & v^n &= \text{Geschwindigkeitskomp.} \\ \tau &= \text{Zeit} & & \text{normal zur Randfläche} \\ \rho &= \text{Dichte} \\ p &= \text{(statischer) Druck} \end{aligned}$$

Die Ableitung $d\bar{v}/d\tau$ in der zweiten Gleichung von 2.1 bezieht sich auf einen in der Strömung mitbewegten Punkt. Es ist

$$d\bar{v}/d\tau = \partial\bar{v}/\partial\tau + (\bar{v}\nabla)\bar{v},$$

wobei $\partial\bar{v}/\partial\tau$ jetzt die Ableitung nach der Zeit in einem ortsfesten Punkt darstellt.

Die Aufgabe besteht darin, die Gleichungen 2.1 zu lösen, d.h. \bar{v} und p innerhalb des Fluidbereichs und für $\tau > 0$ als Funktion der Ortskoordinaten und der Zeit zu bestimmen. Zum Zeitpunkt $\tau = 0$ möge das Geschwindigkeitsfeld \bar{v} im Fluidbereich gegeben sein (Anfangsbedingung). In SING1 wird angenommen, daß dieses Anfangsfeld verschwindet. Für Zeiten $\tau \geq 0$ möge an den Rändern des Fluidbereichs entweder die Beschleunigung $\partial v^n / \partial \tau$ ¹⁾ oder der Druck gegeben sein (Randbedingungen). Wie einfache physikalische Überlegungen später bei der numerischen Behandlung des Problems ergeben, muß mindestens in einem Randbereich der Druck p vorgegeben sein.

Nach Helmholtz ändert sich die Rotation in einem reibungsfreien Fluid nicht. Befand sich das Strömungsfeld anfänglich im Ruhezustand, was hier angenommen werden soll, so gilt:

¹⁾ Da bei den hier zur Analyse anstehenden Problemen starke Transienten auftreten, wird die Fluidbewegung primär mit Hilfe der Beschleunigung beschrieben. Man beachte, daß nicht der sonst üblichen Definition der Normalbeschleunigung entspricht.

$$\text{rot } \vec{v} = 0$$

Bei der Lösung des Problems wird von dieser Rotationsfreiheit Gebrauch gemacht. Unter Verwendung der Identität

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } \vec{v}^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$$

und nach Definition des Gesamtdrucks P als neuer Unbekannter

$$P = p + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \quad (2.2)$$

lassen sich damit die das Problem beschreibenden Feldgleichungen 2.1 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \partial \vec{v} / \partial t + \frac{1}{\rho} \text{grad } P &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Gleichungssystem 2.3 ist linear in den Unbekannten $\partial \vec{v} / \partial t$ und P . Daraus folgt, daß Additionen (Superpositionen) beliebiger, voneinander unabhängiger Lösungen des Systems 2.3 ebenfalls Lösungen der Feldgleichungen 2.3 sind. Diese Eigenschaft ist eine wesentliche Voraussetzung bei den weiteren Überlegungen. Im Gegensatz hierzu ist das Gleichungssystem 2.1 nicht linear in $\partial \vec{v} / \partial t$ und P . Die Superposition zweier Lösungen von 2.1 ergibt nämlich keinen physikalischen Sinn, da die Ableitungen der Geschwindigkeiten auf mitgewegte Koordinaten bezogen sind, deren Bewegungsgeschwindigkeiten verschieden sind.

Um das Superpositionsprinzip bei der Lösung des gesamten Problems anwenden zu können, müssen neben den Feldgleichungen 2.3 auch die Randbedingungen linear in $\partial \vec{v} / \partial t$ und P sein. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn an Teilen der Randflächen - wie zu Beginn dieses Abschnittes postuliert - der statische Druck p vorgegeben ist. Um diese Schwierigkeit zu beheben, wird die Annahme gemacht, daß

an den Randflächen, an denen der statische Druck vorgegeben ist, die folgende Bedingung erfüllt sein soll:

$$\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \ll p^0$$

Hierin ist p^0 eine für das Problem charakteristische Druckdifferenz.

Diese Annahme ist bei sehr vielen transienten Problemen recht gut erfüllt. Da wegen der Vernachlässigung der Reibung Einschränkungen ähnlicher Art existieren, wird der Umfang der in dieser Arbeit erfaßten Problemklasse kaum reduziert. Unter Beachtung der Gleichung 2.2 bedeutet obige Annahme, daß bei den Randbedingungen nicht zwischen statischem Druck p und Gesamtdruck P unterschieden werden muß, d.h., ist an gewissen Randteilen der (statische) Druck p vorgegeben, so darf so verfahren werden, als wäre dies der Gesamtdruck P .

Wie im nächsten Abschnitt ausgeführt, wird in SING1 das Gleichungssystem 2.3 mit den zugehörigen Randbedingungen für eine Reihe diskreter, nacheinander folgender Zeitpunkte gelöst. Die Geschwindigkeiten erhält man hierbei durch schrittweise Zeitintegration der berechneten Beschleunigungsfelder. Hierbei ist es ohne großen Zusatzaufwand möglich, den in gewissen Randbereichen vorzugebenden Gesamtdruck P näherungsweise gleich der Summe aus dem vorgegebenen statischen Druck und dem Glied $\frac{1}{2} \rho (\bar{v}^*)^2$ zu setzen, wobei \bar{v}^* die Strömungsgeschwindigkeit an dem entsprechenden Randpunkt für den vorangegangenen Zeitschritt darstellt. Nunmehr lautet die Forderung an den Randflächen mit vorzugebendem statischem Druck:

$$\frac{1}{2} \rho (\bar{v}^2 - \bar{v}^{*2}) \ll p^0$$

Durch Vorgabe ausreichend kleiner Zeitschritte kann diese Forderung stets erfüllt werden.

An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, daß der hier beschrittene Lösungsweg speziell auf transiente Probleme zugeschnitten ist. Ferner ist hervorzuheben, daß die Annahmen $\text{rot } \bar{v} = 0$ im gesamten Fluidbereich und $\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \ll p^0$ bzw. $\frac{1}{2} \rho (\bar{v}^2 - \bar{v}^{*2}) \ll p^0$ an jenen Rändern, an denen der statische Druck vorgegeben ist, keineswegs gleichbedeutend sind mit einer generellen Vernachlässigung der "nichtlinearen Glieder".

3. Grundzüge des SING1-Lösungsverfahrens im Vergleich zu anderen Methoden

Sieht man von den wenigen Sonderfällen ab, die in einfacher Weise mathematisch geschlossen behandelt werden können, so dürften die naheliegendsten Lösungsverfahren für das zuvor formulierte Problem die Finite-Differenzen-Verfahren sein. Für sie ist charakteristisch, daß der gesamte Fluidbereich durch Einführung geeigneter Gitterebenen in ein dreidimensionales Maschensystem eingeteilt wird. Die zu berechnenden Feldgrößen \bar{v} und p werden durch diskrete Werte in den Maschenmittel- oder Eckpunkten approximiert und die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen werden in entsprechende Differenzengleichungen für diese diskreten Werte verwandelt. Unter den zahlreichen Veröffentlichungen auf diesem Gebiet seien speziell die Arbeiten [12, 13] erwähnt. Der Spezialfall der (nahezu) inkompressiblen Strömungen stellt nicht wie beim Singularitätenverfahren eine Vereinfachung dar, sondern erfordert je nach Art der Integrationsverfahren mitunter spezielle Vorkehrungen bei der Lösung. Beschränkt man sich von Anfang an auf inkompressible Fluide, so läßt sich das Problem, wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, auf die Lösung der Poisson- bzw. Laplace-Differentialgleichung zurückzuführen. Numerische Verfahren zur schnellen Lösung dieser Gleichungen unter verschiedenen Randbedingungen werden in [14, 15] angegeben.

Ein wesentlicher Nachteil der Finite-Differenzen-Verfahren ist, daß der Aufwand zur Diskretisierung bei dreidimensionalen Problemen mit der dritten Potenz der Maschenzahl pro Länge ansteigt. Bei transienten Problemen kommt die zeitliche Diskretisierung hinzu. Dies führt sehr schnell zu einem Problemumfang, dem die gegenwärtig zur Verfügung stehenden Rechenmaschinen nicht mehr gewachsen sind. Auf der anderen Seite ist selbst bei mäßigen Genauigkeitsanforderungen ein das Übliche bereits erheblich überschreitender Diskretisierungsaufwand erforderlich, da beispielsweise bei der Lösung der Laplace-Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$, an den Rändern meist nicht φ (Dirichlet-Randbedingung), sondern die Ableitung von φ normal zum Rand (Neumann-Randbedingung) vorgegeben ist. Bei dem Ergebnis wiederum interessieren neben der Funktion φ vor allem die örtlichen Ableitungen von φ , die den Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsvektor darstellen. Es ist aber bekannt, daß Ableitungen von Funktionen, die nur in gewissen Stütz-

werten bekannt sind, einen wesentlich größeren Unschärfebereich besitzen als die Funktion selbst. Vergleiche hierzu auch die entsprechenden Bemerkungen in [1]. Um die Schwierigkeiten an den Rändern zu mildern, werden in einigen Arbeiten (krummlinige) Mascheneinteilungen verwendet, bei denen die Randflächen gerade mit gewissen Gitterebenen zusammenfallen [16].

Beim Singularitätenverfahren, das in dieser Arbeit als Lösungsmethode eingesetzt wird, werden viele der oben angedeuteten Schwierigkeiten umgangen. Charakteristisch für das Singularitätenverfahren ist, daß das dreidimensionale Problem für den Fluidbereich auf ein zweidimensionales Problem für die Randflächen reduziert wird. Vom mathematischen Standpunkt aus bedeutet dies, daß die Differentialgleichungen 2.3 mit den zugehörigen Randbedingungen in eine Integralgleichung übergehen, die sich im Normalfall nur auf die Randflächen des Fluidbereichs bezieht (Boundary Integral Equation Method). In vielen Fällen ist dies die Fredholm'sche Integralgleichung zweiter Art. Näheres hierzu ist in [1] und [5] zu finden.

Für die Formulierung des Singularitätenverfahrens ist es jedoch nicht notwendig und mit Rücksicht auf den anwendungsorientierten Charakter dieser Arbeit auch wenig empfehlenswert, zuerst auf den abstrakten Begriff der Integralgleichung zurückzugreifen und dann ein Näherungsverfahren zur Lösung dieser Integralgleichung zu entwickeln. Stattdessen werden einige relativ einfache und durchsichtige physikalische Überlegungen direkt zu diesem Näherungsverfahren führen.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde festgestellt, daß beliebige Superpositionen von Lösungen der Differentialgleichungen 2.3, selbst wieder Lösungen dieser Differentialgleichungen darstellen. Es liegt deswegen auf der Hand, "geeignete Lösungen" derart zu überlagern, daß an jenen Flächen, die beim Problem die Fluidrandflächen darstellen, die in den Randbedingungen vorgegebenen Beschleunigungs- und Druckverteilungen gerade erreicht werden. Die sich ergebenden Beschleunigungs- und Druckfelder in dem Bereich, der bei der Aufgabenstellung als Fluidbereich definiert wurde, stellen dann die Lösung des Problems dar. Beschleunigungen und Drücke in anderen Bereichen haben keine Bedeutung.

An die "geeigneten Lösungen" oder Elementarlösungen - wie diese in Zukunft genannt werden sollen - sind zwei generelle Anforderungen zu stellen: Sie müssen innerhalb des bei der Aufgabenstellung definierten Fluidbereichs in jedem Punkt die Differentialgleichungen 2.3 erfüllen, d.h. singuläre Punkte dürfen dort beispielsweise nicht vorhanden sein und die Lösungen müssen durch einfache mathematische Beziehungen möglichst exakt und geschlossen darstellbar sein.

In einer früheren Arbeit einer der Autoren [17] wurden Geschwindigkeit und Druckfeld, hervorgerufen von diskreten Quellen und Senken in einem gewissen Abstand von der vorgegebenen Fluidberandung, als Elementarlösungen benutzt. Die Positionen der Quellen und Senken waren im übrigen nach freiem Ermessen vorzugeben. Der Vorteil lag hier in dem sehr einfachen Aufbau der Elementarlösungen. Nachteilig war, daß wegen des Punkt-Charakters der Quellen und Senken mit kleiner werdendem Abstand vom Fluidbereich die Anzahl der Quellen und Senken sehr hoch sein mußte, wenn eine befriedigende Erfüllung der Randbedingungen erreicht werden sollte. Auf der anderen Seite erfordert aber die Behandlung von Problemen mit komplizierten Rändern gerade einen kleinen Abstand zwischen Quellen bzw. Senken und Randfläche. Schließlich kann der Fall, daß eine Randfläche beidseitig vom Fluid umgeben ist, überhaupt nicht behandelt werden.

Hess und Smith benutzten in ihren Codes als Elementarlösungen die Geschwindigkeits- und Druckfelder von Quellen und Senken, die gleichmäßig über ebenen Vierecken verteilt sind. Die ebenen Vierecke stellen hierbei näherungsweise den Rand dar [1, 2]. Zwar sind diese Elementarlösungen bereits wesentlich komplizierter als im Falle diskreter Quellen und Senken. Die Anzahl der verwendeten Vierecke darf dafür aber bei gleichen Genauigkeitsanforderungen auch wesentlich niedriger sein als die Anzahl von diskreten Quellen und Senken. Der hier besonders interessierende Fall, daß eine Randfläche beidseitig vom Fluid umgeben ist, kann wieder nicht vernünftig behandelt werden. Schließlich weist Renken [7] darauf hin, daß an Randflächen mit Kanten Randbedingungen für Geschwindigkeiten senkrecht zum Rand nur relativ schlecht erfüllt werden können.

In der hier vorliegenden Arbeit werden als Elementarlösungen die Beschleunigungs- und Druckfelder von gleichmäßigen Dipolverteilungen über ebenen Rechtecken verwendet. Ein Dipol entsteht, wenn der Ab-

stand eines Quell-Senkenpaares gegen Null und der Betrag der Quell- bzw. Senkenstärke gegen Unendlich geht. Die Linie der Quell-Senken-Annäherung ist die Dipolachse und steht senkrecht auf dem Rechteckelement. Die analytische Lösung für eine gleichmäßige Dipolverteilung über einem Rechteck wurde in einer separaten Studie hergeleitet [18]. (Wünschenswert wäre der Einsatz von linearen Dipolverteilungen über beliebigen Vierecken gewesen. Brauchbare, möglichst geschlossene Lösungen konnten aber für diesen Typ der Singularitätenverteilung bisher nicht gefunden werden). Die rechteckigen Dipolelemente werden in der Regel so plaziert, daß sie die vorgegebenen Randflächen möglichst ohne freie Flächenteile oder Überlappungen zwischen den Dipolelementen darstellen. Wenn dies aus anderen Gründen geboten erscheint, können die Dipolelemente jedoch auch in einer gewissen Entfernung vom Rand angeordnet werden. Gegenüber den von Hess und Smith verwendeten gleichmäßigen Quell- und Senkenverteilung hat dieser Elementarlösungstyp drei Vorteile. Er erzeugt senkrecht zum Rechteckelement einen Drucksprung, der zur Simulation der Druckdifferenzen verwendet werden kann, die bei einer beidseitig mit Fluid beaufschlagten Wand entstehen. Auch bei Randflächen mit Kanten werden Randbedingungen für Geschwindigkeiten senkrecht zum Rand recht gut erfüllt. Außerdem darf man bei der numerischen Behandlung des Problems gewisse Vorteile erwarten, auf die später - im Zusammenhang mit der Lösung des sich ergebenden linearen Gleichungssystems - eingegangen werden sollen.

Allen drei hier diskutierten Elementarlösungstypen ist gemeinsam, daß sie in jedem Raumpunkt gelten (unendlich ausgedehntes Fluid), ausgenommen gewisse singuläre Gebiete. Beim ersten Elementarlösungstyp bestanden diese Singularitäten aus dem diskreten Quell bzw. Senkpunkt, beim zweiten bestanden sie aus dem ebenen Viereck mit gleichmäßiger Quell- bzw. Senkenverteilung und beim dritten bestanden sie aus dem ebenen Rechteck mit gleichmäßiger Dipolverteilung. Die Elementarlösungen selbst, d.h. die Beschleunigungs- und Druckverteilungen, sind - wegen der Linearität der Beziehungen 2.3 - proportional zu den Intensitäten der zu den Lösungen gehörenden Singularitäten.

Um die geeignete Superposition der Elementarlösungen zu finden, bei der die Randbedingungen in befriedigendem Umfang erfüllt werden, wird in der vorliegenden Arbeit der folgende Ansatz gemacht. Es werden $k = 1, 2, \dots, K$ geeignete Punkte auf dem Fluidrand ausgewählt. Diesen Punk-

ten werden die noch unbekannt Stützwerte X_R zur Beschreibung der Intensitätsverteilung der auf dem Fluidrand zu verteilenden Singularitäten zugeordnet. Die (konstante) Intensität eines Elementes ergibt sich durch lineare Interpolation aus maximal vier Stützwerten. Die Nummern dieser vier Stützwerte sowie die zugeordneten Gewichtungsfaktoren, mit denen die Stützwerte zur Bestimmung der Intensität eines Elementes beitragen, werden für jedes Element vorgegeben. Im allgemeinen wählt man die Gewichte umgekehrt, proportional dem Abstand zwischen Elementmittelpunkt und Stützpunkt. Die Superposition der Elementarlösungen liefert dann Beziehungen des folgenden Typs zur Berechnung des Beschleunigungsvektors \bar{a} (Komponenten a^x, a^y, a^z) und des Druckes P für einen beliebigen Punkt ℓ :

$$\begin{aligned} P &= B_\ell^P + \sum_{R=1}^K C_{\ell R}^P X_R & a^y &= B_\ell^y + \sum_{R=1}^K C_{\ell R}^y X_R \\ a^x &= B_\ell^x + \sum_{R=1}^K C_{\ell R}^x X_R & a^z &= B_\ell^z + \sum_{R=1}^K C_{\ell R}^z X_R \end{aligned} \quad (3.1)$$

Man beachte, daß die Komponenten von \bar{a} wie folgt definiert sind:

$$a^x = \partial v^x / \partial t, \quad a^y = \partial v^y / \partial t, \quad a^z = \partial v^z / \partial t$$

wobei v^x, v^y, v^z die Komponenten der Geschwindigkeit \bar{v} sind. Ferner sind $C_{\ell R}^P, C_{\ell R}^x, \dots$ Faktoren, die ausschließlich von der geometrischen Lage des in Rede stehenden Raumpunktes ℓ und den Positionen der Singularitäten abhängen. In den Gliedern $B_\ell^P, B_\ell^x, \dots$ mögen eventuelle Beiträge von Quellen zusammengefaßt sein, deren Intensitäten bei der Aufgabenstellung vorgegeben wurden.

An den bei der Aufgabenstellung vorgegebenen Rändern ist entweder die Normalkomponente der Beschleunigung \bar{a} oder der Druck P vorgeschrieben. Dies bedeutet, daß für jeden der unendlich vielen Randpunkte aus den Beziehungen 3.1 eine lineare Gleichung mit den Unbekannten X_R hervorgeht. Da die zu verschiedenen Randpunkten gehörenden linearen Gleichungen im allgemeinen voneinander linear unabhängig sind, folgt sofort, daß die Randbedingungen nicht in allen Punkten exakt erfüllt werden können. Es müssen deswegen geeignete Näherungsverfahren zur Erfüllung der Randbedingungen eingesetzt werden.

Das gebräuchlichste Verfahren besteht darin, die exakte Erfüllung der Randbedingungen nicht in allen unendlich vielen Randpunkten, sondern nur in genau $j=1, 2, \dots, K$ ausgewählten, repräsentativen Randpunkten zu verlangen. Diese Methode wird auch in der vorliegenden Arbeit angewandt und führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^K C_{jk} X_k = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad (3.2)$$

bestehend aus K Gleichungen für K Unbekannte. Die Konstanten B_j ergeben sich aus den am Rand vorgegebenen Beschleunigungen oder Drücken und den eventuellen Beiträgen von Quellen mit vorgegebenen Intensitäten. Die Matrix C_{jk} ist voll besetzt und nicht symmetrisch. Das Gleichungssystem 3.2 ist im allgemeinen eindeutig nach den X_k auflösbar. Eine Ausnahme sind Fluidbereiche, die allseitig von festen Wänden umgeben sind. Bei ihnen wird die Matrix C_{jk} singulär. Bei Fluidbereichen, die fast allseitig von festen Wänden umgeben sind, kann die Matrix - je nach der benutzten Rechengenauigkeit - quasisingulär werden. In beiden Fällen kann eine Lösung für das lineare Gleichungssystem nicht angegeben werden. Aufgrund des stärkeren räumlichen Abklingverhaltens von Dipolen, verglichen mit Quellen und Senken, darf man vermuten, daß die Tendenz zu quasisingulären Matrizen C_{jk} bei den in dieser Arbeit verwendeten Dipolelementen geringer ist als bei Elementen mit Quell- und Senkenverteilung.

Sind die X_k bekannt, so lassen sich mit Hilfe der Beziehungen 3.1 Beschleunigung und Druck in jedem beliebigen Fluidpunkt berechnen. Aus dem Beschleunigungsfeld ergibt sich schließlich durch einfache zeitliche Integration das Geschwindigkeitsfeld. Das Problem darf damit als gelöst angesehen werden.

Das obige Vorgehen bei der Erfüllung der Randbedingungen stellt eine gewisse Verallgemeinerung des bisher üblichen Verfahrens dar. Hess und Smith [1, 2] führen beispielsweise für jede einzelne Singularität eine Unbekannte X_k zur Beschreibung der Intensität ein. Da aber insbesondere bei dreidimensionalen Problemen sehr viele Singularitäten (verschmiert auf Rechtecken oder Vierecken) notwendig sind, um ausreichend glatte Beschleunigungs- und Druckverteilungen in Randnähe zu erhalten, führt dies zu sehr großen linearen Gleichungssystemen mit sehr vielen Unbekannten. Der Aufwand zur Lösung dieser Gleichungssysteme ist dann mitunter nicht mehr tragbar. Bei dem hier gewählten Verfahren ist es dagegen möglich, die Anzahl K der Unbekannten X_k wesentlich geringer anzusetzen als die Anzahl der verwendeten Singularitäten.

Häufig entfallen auf diese Weise im Mittel 3-4 Singularitäten auf eine Unbekannte. Unterstellt man, daß der Aufwand bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit der dritten Potenz der Anzahl der Unbekannten ansteigt, so reduziert das hier verwendete Verfahren im Vergleich mit dem üblichen Vorgehen diesen Aufwand auf etwa 1/50. Selbstverständlich muß die Anzahl der verwendeten Unbekannten X_R noch so groß sein, daß die Intensitäten der Singularitäten - was die Grobstruktur angeht - noch ausreichend genau als Funktion über den Randflächen dargestellt werden können.

Es sollte noch erwähnt werden, daß unabhängig von dieser Verallgemeinerung bei der näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen weitere Modifikationen denkbar sind. So wird beispielsweise in [17] neben der in einigen repräsentativen Randpunkten exakten Erfüllung der Randbedingungen noch verlangt, daß das Integral über die Fehlerquadrate aller Randpunkte ein Minimum wird. Obgleich diese Modifikation zu einer nicht unerheblichen Verkomplizierung des Lösungsverfahrens führt, kann sie in gewissen Fällen mit Rücksicht auf die Konvergenz des Verfahrens eine gewisse Rolle spielen.

Zusammenfassend sind bei Singularitätenverfahren - etwa im Vergleich zu dem eingangs erwähnten Finite-Differenzen-Verfahren - die folgenden Punkte hervorzuheben:

- Da das dreidimensionale Problem für den Fluidbereich auf ein zweidimensionales Problem für die Randflächen des Fluidbereichs reduziert wird, steigt der Diskretisierungsaufwand nur mit der zweiten Potenz der Anzahl der Maschen bzw. Flächenelemente pro Länge.
- Da außerdem bei vielen Problemen ohnehin nur der Fluidzustand am Rande interessiert, tritt das Innere des Fluidbereichs bei der ganzen Analyse explizit nicht in Erscheinung. Zwar kann auf Wunsch für jeden beliebigen Punkt im Fluidinnern der Fluidzustand - ohne Interpolation - angegeben werden. Soll dies jedoch für viele Punkte geschehen, so ist ein erheblicher zusätzlicher Rechenaufwand notwendig. Bei Finite-Differenzen-Verfahren dagegen wird diese Information ohne Zusatzaufwand geliefert.

- Die Randbedingungen lassen sich besser formulieren, da die Diskretisierung gerade auf eine optimale Approximation der Ränder mit Hilfe von Flächenelementen zugeschnitten ist. Weitgehend beliebige Randkonfigurationen sind zugelassen.
- Das dynamische Verhalten des Fluids wird durch die Matrix C_{jk} in geschlossener Weise beschrieben. Diese Matrix ist bei einem transienten Problem in der Regel für alle Zeitschritte dieselbe. Die relativ aufwendige Matrizeninversion braucht deswegen bei jedem Problem normalerweise nur einmal durchgeführt zu werden.
- Abgesehen von der Annahme der Reibungsfreiheit und Inkompressibilität werden nur bei den Randbedingungen Näherungen von der folgenden Art eingeführt: Das Problem einer reibungsfreien, inkompressiblen Strömung wird exakt gelöst für Randbedingungen, die von den vorgegebenen Randbedingungen etwas abweichen. Diese Abweichungen sind im Nachhinein genau bekannt und heben sich; wenn man über einen gewissen Randflächenbereich mittelt. Dadurch läßt sich der durch die Näherung gemachte Fehler physikalisch sehr gut interpretieren. Liegen die Abweichungen zum Beispiel innerhalb des Unschärfebereichs, der bei jedem physikalischen Problem unvermeidlich ist, so verursachen sie keinerlei Reduktion der Aussagekraft der Ergebnisse.
- Aus dem zweiten und vierten Punkt ergibt sich, daß das Singularitätenverfahren besonders geeignet ist zur Beschreibung der Fluid-dynamik bei dynamisch gekoppelten Systemen, bestehend aus Fluid-bereichen, umgeben von nachgiebigen Wänden (Schalen).

Die Wandflächen (Schalenflächen) sind weitgehend identisch mit den Fluidrandflächen auf die das Fluid-dynamik-Problem beim Singularitätenverfahren reduziert wird. Damit beziehen sich die mathematischen Operationen weitgehend auf dieselben geometrischen Bereiche.

Das dynamische Verhalten des Fluids wird in ähnlicher Weise durch Matrizen beschrieben, wie dies bei der Struktur-dynamik üblich ist. Das dynamische Verhalten des gekoppelten Systems läßt sich dann ebenfalls durch Matrizen beschreiben, die sich nach einfachen Operationen aus den ersteren Matrizen ergeben. Vergl. hierzu [9, 10].

- Der wesentlichste Nachteil der Singularitätenverfahren besteht darin, daß eine Erweiterung zwecks Berücksichtigung nichtlinearer Effekte wie z.B. der Fluidviskosität kaum möglich ist (vergl. hierzu Kap. 1). Ein weiterer Nachteil ist, daß die Fluiddichte im gesamten Fluidbereich konstant sein muß. Dagegen wird die Fluidkompressibilität, die bei SING1 noch vernachlässigt ist, bei der geplanten Erweiterung zur Behandlung gekoppelter fluid-strukturdynamischer Probleme in grober Näherung mit erfaßt werden können.

Zum Schluß sollte angemerkt werden, daß der Entwicklungsstand der Singularitätenverfahren bzw. Boundary Integral Equation Methods noch nicht das Niveau etwa der Finite-Differenzen-Verfahren erreicht hat. Dies bedeutet, daß bei der Anwendung von Singularitätenverfahren noch eine ganze Reihe von Fragen zur eingehenden Klärung anstehen. Dies bedeutet aber auch, daß diese Verfahren noch ein gewisses, nicht voll ausgelotetes Entwicklungspotential besitzen, das nutzbar gemacht werden kann.

4. Detaillierte Beschreibung der Daten, die zur Durchführung der SING1-Rechnungen notwendig sind

4.1 Globales Koordinatensystem

Als Basis für die Datenvorgabe wird das in Abb. 1 dargestellte globale, kartesische Koordinatensystem x, y, z eingeführt. Es wird vorausgesetzt, daß das zu behandelnde Problem (Fluid-Randflächen mit den Randbedingungen) spiegelsymmetrisch ist zur Ebene $z=0$. Die in den folgenden Abschnitten durchgeführten Spezifikationen gelten nur für eine Symmetrie-Hälfte des Problems. Das Vorhandensein einer dazu spiegelsymmetrischen Hälfte wird bei den späteren Rechnungen automatisch berücksichtigt.

4.2 Spezifikation von Zeitfunktionen als Hilfsmittel zur Problem- beschreibung

Als Hilfsmittel für die Vorgabe zeitlich veränderlicher Parameter wird ein Vorrat von

$$\mu = 1, 2, \dots, M$$

Zeitfunktionen $f^\mu(\tau)$ angelegt. Die Darstellung dieser Funktionen erfolgt einheitlich mit Hilfe von Stützwerten in zeitlich äquidistanten Abständen. Die Stützstellen werden durchnummeriert mit

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, N$$

Es ist

Δ = Zeitlicher Abstand zwischen zwei benachbarten Stützstellen

und

$$f_\nu^\mu = \text{Stützwert von } f^\mu(\tau) \text{ für } \tau = \nu\Delta$$

Mit der Vorgabe dieser Stützwerte sind die Funktionen $f^\mu(\tau)$ im Zeitintervall $0 \leq \tau \leq N\Delta$ definiert.

Bei der zeitlichen Integration der berechneten Beschleunigungsfelder wird Δ als Integrationsschrittweite verwendet. Der Integrationsbereich erstreckt sich über den Definitionsbereich von $f^\mu(\tau)$.

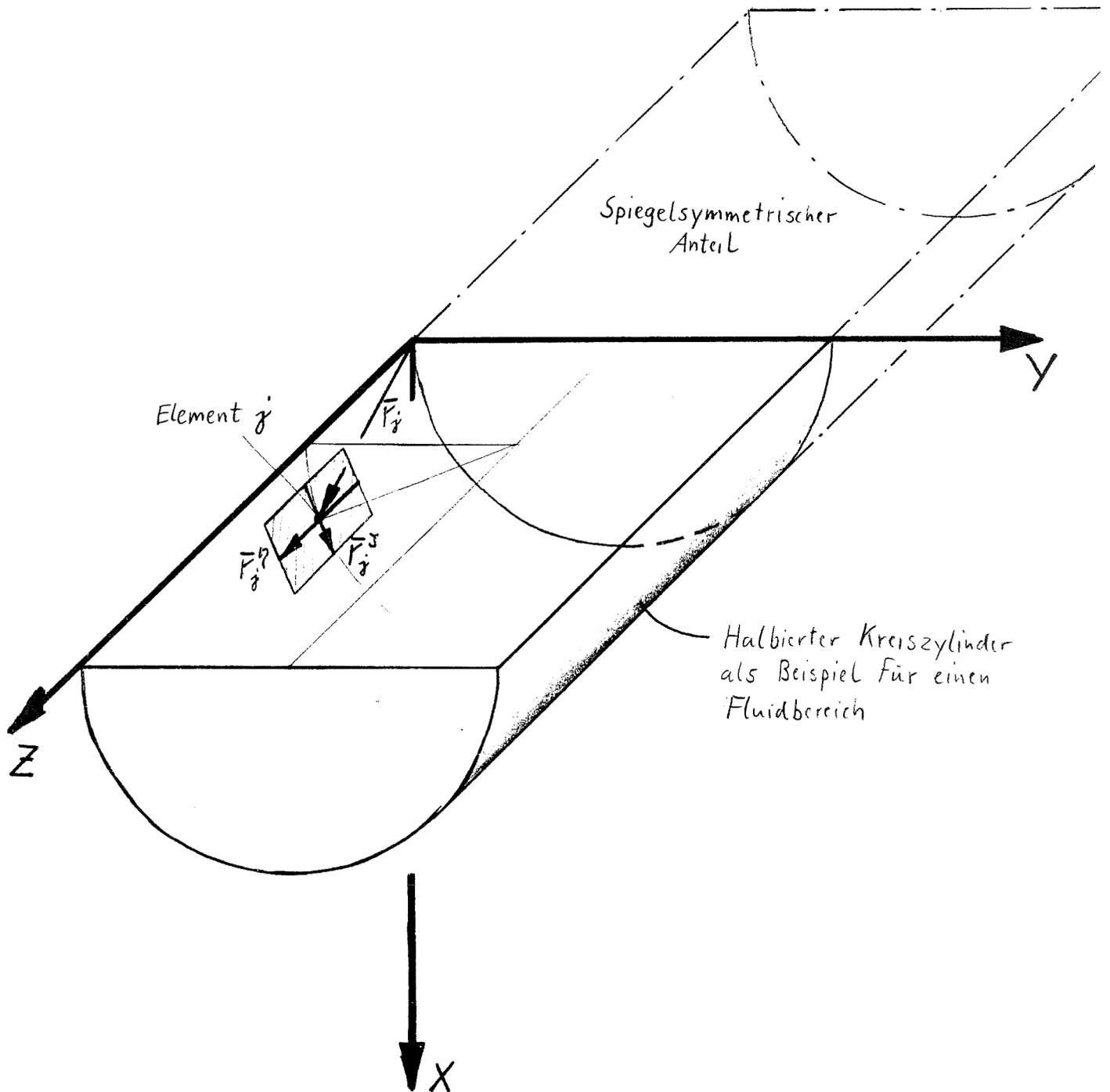


Abb. 1 Globales Koordinatensystem X, Y, Z mit Ortsvektor \vec{r}_j und Tangentenvektoren bzw. Längen- und Breitenvektor \vec{r}_j^l, \vec{r}_j^b für einen Randpunkt bzw. ein rechteckiges Dipolelement.

4.3 Spezifizierung von Quellen und Senken mit vorgegebener Intensität

Die Quellen und Senken mit Intensitäten, die fest vorgegebenen Zeitfunktionen gehorchen, werden durchnummeriert mit

$$i = 1, 2, \dots, I$$

Die Lagen der Quellen werden vorgegeben durch

$$\vec{r}_i^{\circ} = \begin{pmatrix} x_i^{\circ} \\ y_i^{\circ} \\ z_i^{\circ} \end{pmatrix} \quad \text{Ortskoordinaten der Quelle bzw. Senke}$$

Die Intensitäten der Quellen werden vorgegeben durch

$$IND\sigma_i = \begin{cases} \sigma & \text{Die Ableitung der Intensität } S_i(\tau) \text{ nach der Zeit } \tau \\ & \text{ist konstant } \partial S_i(\tau)/\partial \tau = S_i^{\circ b} \\ \mu > \sigma & \text{Die Ableitung der Intensität } S_i(\tau) \text{ nach der Zeit } \tau \\ & \text{ist eine Funktion der Zeit } \partial S_i(\tau)/\partial \tau = S_i^{\circ b} f^{\mu}(\tau) \end{cases}$$

$$S_i^{\circ b} = \quad \text{Hilfsgröße zur Angabe der Intensität der Quelle}$$

Zur Vorbereitung auf die spätere Auswertung wird gesetzt:

$$S_i^{\circ}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \partial S_i(\tau)/\partial \tau$$

Wegen der Spiegelsymmetrie des Problems wird bei der späteren Rechnung davon ausgegangen, daß neben der oben spezifizierten Quell- und Senkenanordnung i , auch eine hierzu spiegelsymmetrische Anordnung i' existiert. Sie ergibt sich aus der obigen, durch Vorzeichenwechsel der Koordinate z_i° . Es ist zu beachten, daß aus diesem Grunde eine in der Ebene $z=0$ spezifizierte Quelle der Intensität $S_i(\tau)$, tatsächlich mit der doppelten Intensität wirkt.

4.4 Gemeinsame Spezifizierung der Randbedingungen, der Aufpunkte, in denen Druck und Geschwindigkeit berechnet werden sollen und der Singularitäten, die als Hilfsmittel bei der Lösung eingesetzt werden sollen.

Randpunkte, die die Randflächen des Fluidbereiches beschreiben sollen, Aufpunkte, in denen Druck und Geschwindigkeiten berechnet werden sollen und Singularitäten, die als Hilfsgrößen zur Lösung des Strömungsproblems vorgesehen sind, werden durchnummeriert mit

$$j = 1, 2, \dots, J$$

Dadurch ist es möglich, in dem häufig vorkommenden Fall, daß Randpunkte gleichzeitig Aufpunkte und/oder Mittelpunkte von Rechtecken mit Dipolverteilungen sind, einem Randpunkt, einem Aufpunkt und/oder einer Singularität dieselbe Nummer zuzuordnen und Kenngrößen - soweit angebracht - gemeinsam zu verwenden. Im einzelnen wird dies angegeben mit Hilfe des Indikators

$$IND1_j = \begin{cases} 0 & \text{Die Nummer } j \text{ bezeichnet sowohl einen Rand- und/oder Aufpunkt als auch ein Rechteck mit konstanter Dipolverteilung, wobei der Mittelpunkt des Rechtecks mit dem Rand- bzw. Aufpunkt identisch ist} \\ 1 & \text{Die Nummer } j \text{ bezeichnet einen Rand- und/oder Aufpunkt} \\ 2 & \text{Die Nummer } j \text{ bezeichnet ein Rechteck mit konstanter Dipolverteilung} \\ 3 & \text{Die Nummer } j \text{ bezeichnet eine in einem Punkt konzentrierte Quelle} \end{cases}$$

Die geometrischen Informationen zum Rand- oder Aufpunkt bzw. zur Singularität mit der Nummer j werden wie folgt angegeben (vergl. Abb. 1):

$$\bar{r}_j = \begin{cases} x_j \\ y_j \\ z_j \end{cases} \text{ Ortskoordinaten} \quad \begin{array}{l} \text{des Rand- und/oder Aufpunktes } (IND1_j=0,1) \\ \text{des Mittelpunktes des rechteckigen Dipolelementes } (IND1_j=0,2) \\ \text{des Quellpunktes } (IND1_j=3) \end{array}$$

$$\vec{r}_j^? = \begin{cases} X_j^? \\ Y_j^? \\ Z_j^? \end{cases} \begin{array}{l} \text{Tangentenvektor an die Fluidberandung} \\ \text{im Randpunkt } j \text{ und/oder Richtungsvektor} \quad (IND1_j = 0,1) \\ \text{für eine Komponente des zu berechnen-} \\ \text{den Beschleunigungsvektors,} \\ \\ \text{Längenvektor des rechteckigen Dipol-} \\ \text{elements } j \quad (IND1_j = 0,2) \end{array}$$

$$\vec{r}_j^J = \begin{cases} X_j^J \\ Y_j^J \\ Z_j^J \end{cases} \begin{array}{l} \text{Tangentenvektor an die Fluidberandung} \\ \text{im Randpunkt } j \text{ und/oder Richtungsvektor} \quad (IND1_j = 0,1) \\ \text{für eine Komponente des zu berechnenden} \\ \text{Beschleunigungsvektors,} \\ \\ \text{Breitenvektor des rechteckigen Dipol-} \\ \text{elementes } j \quad (IND1_j = 0,2) \end{array}$$

Die beiden Vektoren $\vec{r}_j^?$ und \vec{r}_j^J müssen senkrecht aufeinander stehen, d.h. das Innenprodukt $(\vec{r}_j^? \vec{r}_j^J)$ muß (bis auf einen kleineren, durch die endliche Rechengenauigkeit bedingten Fehler) verschwinden.

Bezeichnet die Nummer j eine im Punkt \vec{r}_j konzentrierte Quelle $(IND1_j = 3)$, so sind $\vec{r}_j^?$ und \vec{r}_j^J nicht definiert. Ihre Angabe kann unterbleiben.

Bezeichnet die Nummer j einen Rand- und/oder Aufpunkt $(IND1_j = 0,1)$, so werden die Einzelheiten hierzu - gegebenenfalls die Randbedingungen - wie folgt angegeben:

$$IND2_j = \begin{cases} 0 & \text{Der Punkt } j \text{ ist ein Aufpunkt} \\ 1 & \text{Der Punkt } j \text{ ist sowohl Aufpunkt als auch Rand-} \\ & \text{punkt mit explizit vorgegebenem Gesamtdruck } P_j(\tau) \\ 2 & \text{Der Punkt } j \text{ ist sowohl Aufpunkt als auch Randpunkt} \\ & \text{mit explizit vorgegebener Beschleunigung } a_j(\tau) \\ & \text{senkrecht zum Fluidrand.} \end{cases}$$

$$\text{IND3}_j = \begin{cases} \sigma & \text{Gesamtdruck } P_j^b \text{ bzw. Fluidbeschleunigung } a_j^b \text{ senkrecht zum Fluidrand sind zeitlich konstant, d.h.} \\ & P_j(\tau) = P_j^b \quad \text{für } \text{IND2}_j = 1 \\ & a_j(\tau) = a_j^b \quad \text{für } \text{IND2}_j = 2 \\ \mu > \sigma & \text{Gesamtdruck } P_j \text{ bzw. Fluidbeschleunigung } a_j \text{ senkrecht zum Fluidrand sind vorgegebene Funktion der Zeit } \tau. \\ & P_j(\tau) = P_j^b f^\mu(\tau) \quad \text{für } \text{IND2}_j = 1 \\ & a_j(\tau) = a_j^b f^\mu(\tau) \quad \text{für } \text{IND2}_j = 2 \end{cases}$$

P_j^b, a_j^b = Hilfsgröße zur Angabe des Gesamtdruckes bzw. der Fluidbeschleunigung senkrecht zur Fluidberandung im Punkt j .

Im Falle $\text{IND2}_j = \sigma$ ist die Vorgabe von P_j^b, a_j^b und IND3_j ohne Bedeutung und kann unterbleiben.

Bezeichnet die Nummer j eine Singularität, nämlich ein rechteckiges Dipolelement ($\text{IND1}_j = 0,2$), oder eine Quelle konzentriert in einem Punkt ($\text{IND1}_j = 3$), so werden Einzelheiten zu der Singularität wie folgt angegeben:

Es werden für

$$R = 1, 2, \dots, K$$

die Unbekannten

X_R = Stützwert zur Bestimmung der Intensitäten der Singularitäten

eingeführt. Durch lineare Interpolation ergeben sich aus diesen Stützwerten die Belegungsdichten $\partial t_j / \partial \tau$ der rechteckigen Dipolelemente sowie die Intensitäten $\partial S_j / \partial \tau$ der in einzelnen Punkten konzentrierte Quellen.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial t_j}{\partial \tau} \\ \frac{\partial S_j}{\partial \tau} \end{array} \right\} = 4\pi \cdot \left(g_j^1 X_{R_j^1} + g_j^2 X_{R_j^2} + g_j^3 X_{R_j^3} + g_j^4 X_{R_j^4} \right)$$

Dadurch treten als Unbekannte bei der näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen nicht die Belegungsdichten und Intensitäten der Singularitäten auf, sondern die Stützwerte X_R . Vergleiche hierzu die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 3. Zur Durchführung der Interpolation müssen vorgegeben werden:

$\left. \begin{array}{l} R_j^1 \\ R_j^2 \\ R_j^3 \\ R_j^4 \end{array} \right\}$ Indizes von vier Stützwerten X_R , die bei der Bestimmung der Belegungsdichte bzw. der Intensität der Singularität j verwendet werden.

$\left. \begin{array}{l} g_j^1 \\ g_j^2 \\ g_j^3 \\ g_j^4 \end{array} \right\}$ Gewichte, die bei der Interpolation den Stützwerten zugewiesen werden.

Damit das lineare Gleichungssystem 3.2, das aus der näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen resultiert, keine singuläre Matrix erhält, müssen die Interpolationen (Vorgabe von $R_j^1, R_j^2, \dots, g_j^1, g_j^2, \dots$) so durchgeführt werden, daß im Falle vorgegebener Belegungsdichten $\partial t_j / \partial \tau$ und Intensitäten $\partial S_j / \partial \tau$ sich die Stützwerte X_R eindeutig ergeben würden. Daraus folgt, daß die Anzahl K der Stützwerte X_R gleich oder kleiner sein muß als die Anzahl der zur Lösung des Problems eingesetzten Singularitäten. Man hat damit also eine Möglichkeit gewonnen, die Größe des aus der Erfüllung der Randbedingungen zu gewinnenden Gleichungssystemes in einem gewissen Umfang zu beschränken, ohne die Anzahl der verwendeten Singularitäten im gleichen Umfang reduzieren zu müssen.

Damit das Problem lösbar ist, muß die Anzahl der Randpunkte mit explizit angegebenen Bedingungen für Druck und Beschleunigung mit der Anzahl der Stützwerte X_R übereinstimmen. Dies bedeutet, daß die Anzahl der Indikatoren $IND2_j$ ($j=1,2,\dots,J$) für die die Ziffern 1 oder 2 vorgegeben wurden, wobei $IND1_j = 0,1$ ist, gleich der Anzahl K der Stützwerte X_R sein muß.

Wegen der Spiegelsymmetrie des Problems wird bei der späteren Rechnung davon ausgegangen, daß neben der oben spezifizierten Anordnung von Randpunkten bzw. Singularitäten j , auch eine hierzu spiegelsymmetrische Anordnung j' existiert. Sie ergibt sich aus der obigen durch Vorzeichenwechsel der Koordinaten Z_j, Z_j^n, Z_j^j .

5. Aufbereitung der Daten für die Durchführung der SING1-Rechnungen

5.1 Bestimmung der Normalen zu den von den Vektoren \vec{r}_j^{η} und \vec{r}_j^{ζ} aufgespannten Ebenen sowie Durchführung einiger weiterer Umformungen

In der späteren Rechnung werden die Einheitsvektoren \vec{r}_j^{ξ} benötigt, die auf den vorgegebenen Vektoren \vec{r}_j^{η} und \vec{r}_j^{ζ} senkrecht stehen. Im Falle $IND1_j = 0,1$ sind \vec{r}_j^{ξ} Normalenvektoren auf der Randfläche bzw. Richtungsvektoren für jeweils eine Komponente des zu berechnenden Beschleunigungsvektors. Im Falle $IND1_j = 0,2$ sind \vec{r}_j^{ξ} die Normalenvektoren der rechteckigen Dipolelemente.

Zu diesem Zweck wird die Liste $j = 1, 2, \dots, J$ durchlaufen und für $IND1_j = 0, 1, 2$ wird gesetzt:

$$\vec{r}_j^{\xi} = \frac{\vec{r}_j^{\eta} \times \vec{r}_j^{\zeta}}{|\vec{r}_j^{\eta} \times \vec{r}_j^{\zeta}|} \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} X_j^{\xi} &= \frac{1}{r_j^{\xi}} (Y_j^{\eta} Z_j^{\zeta} - Z_j^{\eta} Y_j^{\zeta}) \\ Y_j^{\xi} &= \frac{1}{r_j^{\xi}} (Z_j^{\eta} X_j^{\zeta} - X_j^{\eta} Z_j^{\zeta}) \\ Z_j^{\xi} &= \frac{1}{r_j^{\xi}} (X_j^{\eta} Y_j^{\zeta} - Y_j^{\eta} X_j^{\zeta}) \end{aligned}$$

mit

$$r_j^{\xi} = \sqrt{(Y_j^{\eta} Z_j^{\zeta} - Z_j^{\eta} Y_j^{\zeta})^2 + (Z_j^{\eta} X_j^{\zeta} - X_j^{\eta} Z_j^{\zeta})^2 + (X_j^{\eta} Y_j^{\zeta} - Y_j^{\eta} X_j^{\zeta})^2}$$

Außerdem werden von den beiden Vektoren \vec{r}_j^{η} und \vec{r}_j^{ζ} die Beträge r_j^{η} und r_j^{ζ} benötigt.

$$\begin{aligned} r_j^{\eta} &= |\vec{r}_j^{\eta}| & \text{d.h.} & \quad r_j^{\eta} = \sqrt{(X_j^{\eta})^2 + (Y_j^{\eta})^2 + (Z_j^{\eta})^2} \\ r_j^{\zeta} &= |\vec{r}_j^{\zeta}| & \text{d.h.} & \quad r_j^{\zeta} = \sqrt{(X_j^{\zeta})^2 + (Y_j^{\zeta})^2 + (Z_j^{\zeta})^2} \end{aligned}$$

Da im weiteren Verlauf der Rechnungen nur noch die den Vektoren \vec{r}_j^{η} und \vec{r}_j^{ζ} zugeordneten Einheitsvektoren interessieren, wird von diesem Stadium der Untersuchungen an die folgende Umbenennung durchgeführt.¹⁾

¹⁾ Man beachte, daß jetzt $r_j^{\eta} \neq |\vec{r}_j^{\eta}|$ und $r_j^{\zeta} \neq |\vec{r}_j^{\zeta}|$ ist.

$$\bar{r}_j^\eta \rightarrow \bar{r}_j^\eta / r_j^\eta \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} X_j^\eta &\rightarrow X_j^\eta / r_j^\eta \\ Y_j^\eta &\rightarrow Y_j^\eta / r_j^\eta \\ Z_j^\eta &\rightarrow Z_j^\eta / r_j^\eta \end{aligned}$$

$$\bar{r}_j^J \rightarrow \bar{r}_j^J / r_j^J \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} X_j^J &\rightarrow X_j^J / r_j^J \\ Y_j^J &\rightarrow Y_j^J / r_j^J \\ Z_j^J &\rightarrow Z_j^J / r_j^J \end{aligned}$$

5.2 Separate Auflistung der zu den Rand- bzw. Aufpunkten gehörenden Daten

Für die spätere Rechnung ist es vorteilhaft, aus der gemeinsamen Auflistung der Rand- bzw. Aufpunkte und der zur Lösung eingesetzten Singularitäten eine separate Liste der Rand- bzw. Aufpunkte mit den zugehörigen Randbedingungen zu erstellen. Zu diesem Zweck wird die Liste $j=1,2,\dots,\bar{j}$ durchlaufen und für $IND1_j = 0, 1$ wird gesetzt:

$$\bar{r}_\ell^1 = \bar{r}_j \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} x_\ell^1 &= x_j \\ y_\ell^1 &= y_j \\ z_\ell^1 &= z_j \end{aligned}$$

$$\bar{r}_\ell^{\xi 1} = \bar{r}_j^\xi \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} x_\ell^{\xi 1} &= x_j^\xi \\ y_\ell^{\xi 1} &= y_j^\xi \\ z_\ell^{\xi 1} &= z_j^\xi \end{aligned}$$

$$\bar{r}_\ell^{\eta 1} = \bar{r}_j^\eta \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} x_\ell^{\eta 1} &= x_j^\eta \\ y_\ell^{\eta 1} &= y_j^\eta \\ z_\ell^{\eta 1} &= z_j^\eta \end{aligned}$$

$$\bar{r}_\ell^{J 1} = \bar{r}_j^J \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} x_\ell^{J 1} &= x_j^J \\ y_\ell^{J 1} &= y_j^J \\ z_\ell^{J 1} &= z_j^J \end{aligned}$$

$$IND2_l = IND2_j$$

$$P_l^b, a_l^b = P_j^b, a_j^b$$

$$IND3_l = IND3_j$$

Der Index l durchläuft hierbei der Reihe nach die Werte

$$l = 1, 2, \dots, L$$

\vec{r}_l^1 ist der Ortsvektor des Rand- und/oder Aufpunktes l . Die Vektoren $\vec{r}_l^{S^1}, \vec{r}_l^{N^1}, \vec{r}_l^{J^1}$ stellen ein diesem Punkt zugeordnetes Tripel von Basisvektoren dar, wobei im Falle eines Randpunktes $\vec{r}_l^{S^1}$ normal zur Randfläche steht. Vergleiche hierzu Abb. 2. Die Bedeutung der restlichen Größen ist dem Abschnitt 4.4 zu entnehmen.

5.3 Separate Auflistung der zu den Singularitäten gehörenden Daten und Bestimmung einiger Hilfsgrößen

Für die spätere Rechnung ist es ebenfalls vorteilhaft, aus der gemeinsamen Auflistung der Randpunkte und der zur Lösung vorgesehenen Singularitäten eine separate Liste der rechteckigen Dipolelemente, ergänzt durch einige später benötigte Hilfswerte sowie eine Liste der in einem Punkt konzentrierten Quellen zu erstellen. Hierzu wird die Liste $j = 1, 2, \dots, J$ durchlaufen und für $IND1_j = 0, 2$ wird gesetzt:

$$\vec{r}_m^2 = \vec{r}_j \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} x_m^2 &= x_j \\ y_m^2 &= y_j \\ z_m^2 &= z_j \end{aligned}$$

$$r_m^{?2} = r_j^{?}$$

$$r_m^J = r_j^J$$

$$\vec{r}_m^{S^2} = \vec{r}_j^S \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} x_m^{S^2} &= x_j^S \\ y_m^{S^2} &= y_j^S \\ z_m^{S^2} &= z_j^S \end{aligned}$$

$$\bar{r}_m^{-\eta^2} = \bar{r}_j^{-\eta^2} \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} X_m^{\eta^2} &= X_j^{\eta^2} \\ Y_m^{\eta^2} &= Y_j^{\eta^2} \\ Z_m^{\eta^2} &= Z_j^{\eta^2} \end{aligned}$$

$$\bar{r}_m^{-J^2} = \bar{r}_j^{-J^2} \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} X_m^{J^2} &= X_j^{J^2} \\ Y_m^{J^2} &= Y_j^{J^2} \\ Z_m^{J^2} &= Z_j^{J^2} \end{aligned}$$

$$D_m = \begin{vmatrix} X_m^{j^2} & X_m^{\eta^2} & X_m^{J^2} \\ Y_m^{j^2} & Y_m^{\eta^2} & Y_m^{J^2} \\ Z_m^{j^2} & Z_m^{\eta^2} & Z_m^{J^2} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & (X_m^{j^2} Y_m^{\eta^2} Z_m^{J^2} + X_m^{\eta^2} Y_m^{J^2} Z_m^{j^2} + X_m^{J^2} Y_m^{j^2} Z_m^{\eta^2} \\ & - X_m^{J^2} Y_m^{\eta^2} Z_m^{j^2} - X_m^{j^2} Y_m^{J^2} Z_m^{\eta^2} - X_m^{\eta^2} Y_m^{j^2} Z_m^{J^2}) \end{aligned}$$

$$A_m^{xj} = \begin{vmatrix} Y_m^{\eta^2} & Y_m^{J^2} \\ Z_m^{\eta^2} & Z_m^{J^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{yj} = \begin{vmatrix} X_m^{\eta^2} & X_m^{J^2} \\ Z_m^{\eta^2} & Z_m^{J^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{zj} = \begin{vmatrix} X_m^{\eta^2} & X_m^{J^2} \\ Y_m^{\eta^2} & Y_m^{J^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{x\eta} = \begin{vmatrix} Y_m^{j^2} & Y_m^{J^2} \\ Z_m^{j^2} & Z_m^{J^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{y\eta} = \begin{vmatrix} X_m^{j^2} & X_m^{J^2} \\ Z_m^{j^2} & Z_m^{J^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{z\eta} = \begin{vmatrix} X_m^{j^2} & X_m^{J^2} \\ Y_m^{j^2} & Y_m^{J^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{xJ} = \begin{vmatrix} Y_m^{j^2} & Y_m^{\eta^2} \\ Z_m^{j^2} & Z_m^{\eta^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{yJ} = \begin{vmatrix} X_m^{j^2} & X_m^{\eta^2} \\ Z_m^{j^2} & Z_m^{\eta^2} \end{vmatrix}$$

$$A_m^{zJ} = \begin{vmatrix} X_m^{j^2} & X_m^{\eta^2} \\ Y_m^{j^2} & Y_m^{\eta^2} \end{vmatrix}$$

$$k_m^{12} = k_j^1$$

$$k_m^{22} = k_j^2$$

$$k_m^{32} = k_j^3$$

$$k_m^{42} = k_j^4$$

$$g_m^{12} = g_j^1$$

$$g_m^{22} = g_j^2$$

$$g_m^{32} = g_j^3$$

$$g_m^{42} = g_j^4$$

Beim selben Durchlauf durch die Liste $j = 1, 2, \dots, J$ wird für $IND1_j = 3$ gesetzt:

$$\bar{r}_n^3 = \bar{r}_j \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} X_n^3 &= X_j \\ Y_n^3 &= Y_j \\ Z_n^3 &= Z_j \end{aligned}$$

$$k_n^{13} = k_j^1$$

$$k_n^{23} = k_j^2$$

$$k_n^{33} = k_j^3$$

$$k_n^{43} = k_j^4$$

$$g_n^{13} = g_j^1$$

$$g_n^{23} = g_j^2$$

$$g_n^{33} = g_j^3$$

$$g_n^{43} = g_j^4$$

Jeder der Indizes m und n durchlaufen hierbei der Reihe nach die Werte

$$m = 1, 2, \dots, M \quad \text{und} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

\bar{r}_m^2 ist der Ortsvektor des Mittelpunktes des rechteckigen Dipolelementes m , r_m^{x2} und r_m^{y2} sind Länge und Breite des Dipolelementes m und $\bar{r}_m^{x2}, \bar{r}_m^{y2}, \bar{r}_m^{z2}$ ist ein Tripel von Basisvektoren, das dem Dipolelement m zugeordnet ist. Hierbei steht \bar{r}_m^{z2} senkrecht auf dem Dipolelement und \bar{r}_m^{x2} und \bar{r}_m^{y2} zeigen in Längs- bzw. Breitenrichtung. Die Basisvektoren haben die Länge der Einheit. Vergleiche hierzu Abb. 2. Die Determinante D_m und die Adjunkten $A_m^{xj}, \dots, A_m^{zj}$ werden anschließend zur Transformation der globalen Koordinaten auf lokale Koordinaten benötigt. Die Bedeutung der übrigen Größen - einerlei, ob ein oberer Index 2 oder 3 angehängt wurde oder nicht - ist dem Abschnitt 4.4 zu entnehmen.

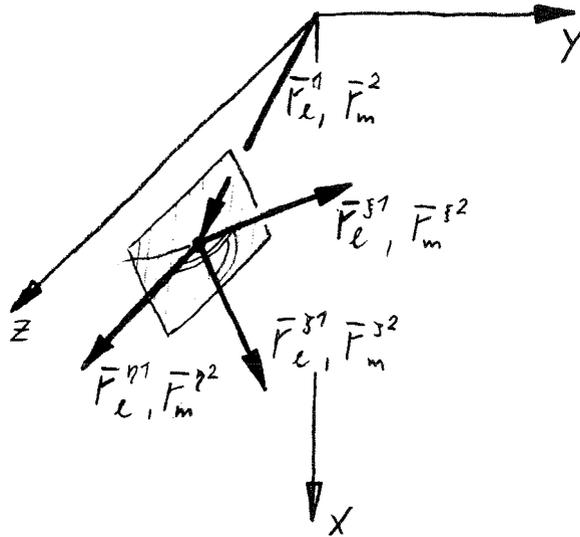


Abb. 2 Randpunkt bzw. rechteckiges Dipolelement mit Tripel rechtwinkliger Basisvektoren.

6. Berechnung des Druckes P und des Beschleunigungsvektors \bar{a} im Punkt ℓ , herrührend von der vorgegebenen Quelle i sowie der zugehörigen spiegelsymmetrischen Quelle i'

Der von der Quelle i und der zugehörigen spiegelsymmetrischen Quelle i' herrührende Druckanteil P im Punkt ℓ ist nach [17]:

$$P = \rho S_i^{\ddot{}}(\tau) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

Der von der Quelle i herrührende Beschleunigungsanteil a im Punkt ℓ ist von i nach ℓ gerichtet und beträgt:

$$a = S_i^{\ddot{}}(\tau) \left(\frac{1}{r} \right)^2$$

Der von der spiegelsymmetrischen Quelle i' herrührende Beschleunigungsanteil a' im Punkt ℓ ist von i' nach ℓ gerichtet und beträgt:

$$a' = S_i^{\ddot{}}(\tau) \left(\frac{1}{r'} \right)^2$$

Hierin ist r der Abstand zwischen Quelle i und Punkt ℓ

$$r = \sqrt{(x_\ell^1 - x_i^{\ddot{}})^2 + (y_\ell^1 - y_i^{\ddot{}})^2 + (z_\ell^1 - z_i^{\ddot{}})^2} \quad (6.1)$$

und r' ist der Abstand zwischen Quelle i' und Punkt ℓ

$$r' = \sqrt{(x_\ell^1 - x_i^{\ddot{}})^2 + (y_\ell^1 - y_i^{\ddot{}})^2 + (z_\ell^1 + z_i^{\ddot{}})^2} \quad (6.2)$$

Weiterhin sind

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{der Richtungsvektor des Abstandes zwischen Quelle } i \text{ und Punkt } \ell$$

und

$$\bar{r}' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad \text{der Richtungsvektoren des Abstandes zwischen Quelle } i' \text{ und Punkt } \ell$$

Die Richtungsvektoren haben die Länge der Einheit.¹⁾ Sie ergeben sich wie folgt:

$$\bar{r} = (\bar{r}_\ell^1 - \bar{r}_i^0)/r \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} x &= (x_\ell^1 - x_i^0)/r \\ y &= (y_\ell^1 - y_i^0)/r \\ z &= (z_\ell^1 - z_i^0)/r \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} x' &= (x_\ell^1 - x_i^0)/r' \\ y' &= (y_\ell^1 - y_i^0)/r' \\ z' &= (z_\ell^1 + z_i^0)/r' \end{aligned} \quad (6.4)$$

Zwecks der später erfolgenden Superposition sind der Beschleunigungsanteil α mit dem Richtungsvektor \bar{r} und der Beschleunigungsanteil α' mit dem Richtungsvektor \bar{r}' auf das globale Koordinatensystem zu beziehen. Bezeichnen

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^x \\ \alpha^y \\ \alpha^z \end{array} \right\} \quad \text{die Komponenten des Beschleunigungsvektors im Punkt } \ell, \text{ herrührend von den Quellen } i \text{ und } i' \text{ und bezogen auf das globale Koordinatensystem,}$$

und will man diese zusammen mit dem von den Quellen i und i' herrührenden Druckanteil P in der folgenden Form darstellen

$$\begin{aligned} P &= B_\ell^P \\ \alpha^x &= B_\ell^x \\ \alpha^y &= B_\ell^y \\ \alpha^z &= B_\ell^z \end{aligned}$$

so erhält man:

¹⁾ Man beachte, daß $r \neq |r|$ und $r' \neq |r'|$ ist.

$$\begin{aligned} B_e^p &= \rho S_i^c(\tau) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \\ B_e^x &= S_i^c(\tau) \left[\left(\frac{1}{r} \right)^2 x + \left(\frac{1}{r'} \right)^2 x' \right] \\ B_e^y &= S_i^c(\tau) \left[\left(\frac{1}{r} \right)^2 y + \left(\frac{1}{r'} \right)^2 y' \right] \\ B_e^z &= S_i^c(\tau) \left[\left(\frac{1}{r} \right)^2 z + \left(\frac{1}{r'} \right)^2 z' \right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

In dem Falle $IND\sigma_i = \sigma$ ist

$$S_i^c(\tau) = S_i^{cb}$$

und in dem Falle $IND\sigma_i = \mu$ ist

$$S_i^c(\tau) = S_i^{cb} f^\mu(\tau)$$

Zur Berechnung der Konstanten $B_e^p, B_e^x, B_e^y, B_e^z$ hat man also die Formeln 6.1, ..., 6.5 auszuwerten.

7. Berechnung des Druckes P und des Beschleunigungsvektors \bar{a} im Punkt ℓ , herrührend vom rechtwinkligen Dipolelement m und dem zugehörigen spiegelsymmetrischen Element m'

7.1 Berechnung der lokalen Koordinaten

Um den vom rechteckigen Dipolelement m herrührenden Druckanteil P und den Beschleunigungsanteil \bar{a} im Punkt \bar{r}_ℓ^1 mit Hilfe der in [18] angegebenen Formeln berechnen zu können, ist es notwendig, die Koordinaten dieses Punktes auf lokale Koordinatensysteme zu transformieren, die von den Basisvektoren $\bar{r}_m^{\xi^2}, \bar{r}_m^{\eta^2}, \bar{r}_m^{\zeta^2}$ aufgespannt werden und deren Ursprünge in den vier Eckpunkten des rechteckigen Dipolelements liegen. Der Einfachheit halber soll der Ursprung zunächst im Mittelpunkt des rechtwinkligen Dipolelements liegen.

Für die Transformation gilt dann folgende Beziehung:

$$\bar{r}_\ell^1 - \bar{r}_m^2 = \bar{M} \bar{s}$$

Hierin ist

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \text{Vektor der lokalen Koordinaten des Punktes } \ell$$

und

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} X_m^{\xi^2} & X_m^{\eta^2} & X_m^{\zeta^2} \\ Y_m^{\xi^2} & Y_m^{\eta^2} & Y_m^{\zeta^2} \\ Z_m^{\xi^2} & Z_m^{\eta^2} & Z_m^{\zeta^2} \end{pmatrix} \quad \text{Transformationsmatrix}$$

Löst man nach den lokalen Koordinaten ξ, η, ζ auf, so ergibt sich unter Verwendung der im Abschnitt 5.3 eingeführten Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \xi_m &= \frac{(x_l^1 - x_m^2) A_m^{x\xi} + (y_l^1 - y_m^2) A_m^{y\xi} + (z_l^1 - z_m^2) A_m^{z\xi}}{D_m} \\
 \eta &= \frac{(x_l^1 - x_m^2) A_m^{x\eta} + (y_l^1 - y_m^2) A_m^{y\eta} + (z_l^1 - z_m^2) A_m^{z\eta}}{D_m} \\
 J &= \frac{(x_l^1 - x_m^2) A_m^{xJ} + (y_l^1 - y_m^2) A_m^{yJ} + (z_l^1 - z_m^2) A_m^{zJ}}{D_m}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Da das Problem spiegelsymmetrisch ist bezüglich der Ebene $z = 0$, gehört zu jedem rechteckigen Dipolelement m ein dazu spiegelsymmetrisches Element m' . Die Elemente m und m' haben die gleiche Dipolbelegung. Da auch der vom Element m' herrührende Druck- und Beschleunigungsanteil im Punkt \vec{r}_l^1 erfaßt werden muß, ist es notwendig, die Koordinaten dieses Punktes auch auf ein lokales Koordinatensystem zu transformieren, das von Vektoren aufgespannt wird, die aus dem Vektortripel $\vec{r}_m^{-\xi^2}, \vec{r}_m^{-\eta^2}, \vec{r}_m^{-J^2}$ durch Spiegelung in der Ebene $z = 0$ hervorgehen.

Durch analoges Vorgehen wie im Falle des Elements m ergeben sich die auf das spiegelsymmetrische Element m' bezogenen lokalen Koordinaten ξ', η', J' wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \xi' &= \frac{(x_l^1 - x_m^2) A_m^{x\xi} + (y_l^1 - y_m^2) A_m^{y\xi} - (z_l^1 + z_m^2) A_m^{z\xi}}{D_m} \\
 \eta' &= \frac{(x_l^1 - x_m^2) A_m^{x\eta} + (y_l^1 - y_m^2) A_m^{y\eta} - (z_l^1 + z_m^2) A_m^{z\eta}}{D_m} \\
 J' &= \frac{(x_l^1 - x_m^2) A_m^{xJ} + (y_l^1 - y_m^2) A_m^{yJ} - (z_l^1 + z_m^2) A_m^{zJ}}{D_m}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Die Koordinaten des Punktes \vec{r}_l^{-1} bezogen auf lokale Koordinatensysteme mit Ursprüngen in den vier Eckpunkten des rechteckigen Dipolelements m und m' ergeben sich durch Addition oder Subtraktion von $r^{\eta^2}/2$ bzw. $r^{J^2}/2$.

Koordinaten bezüglich
Element m , Eckpunkt 1

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \xi \\ \eta^1 &= \eta + r_m^{\eta^2}/2 \\ J^1 &= J + r_m^{J^2}/2\end{aligned}$$

Koordinaten bezüglich
Element m , Eckpunkt 2

$$\begin{aligned}\xi^2 &= \xi \\ \eta^2 &= \eta - r_m^{\eta^2}/2 \\ J^2 &= J + r_m^{J^2}/2\end{aligned}$$

Koordinaten bezüglich
Element m , Eckpunkt 3

$$\begin{aligned}\xi^3 &= \xi \\ \eta^3 &= \eta + r_m^{\eta^2}/2 \\ J^3 &= J - r_m^{J^2}/2\end{aligned}$$

Koordinaten bezüglich
Element m , Eckpunkt 4

$$\begin{aligned}\xi^4 &= \xi \\ \eta^4 &= \eta - r_m^{\eta^2}/2 \\ J^4 &= J - r_m^{J^2}/2\end{aligned}$$

(7.3)

Die Koordinaten $\xi^{1'}, \eta^{1'}, J^{1'}$ bezüglich des Elementes m' , Eckpunkt 1, ferner die Koordinaten $\xi^{2'}, \eta^{2'}, J^{2'}$ bezüglich des Elementes m' , Eckpunkt 2, usw. berechnen sich ganz analog, wenn anstelle von ξ, η, J die Werte ξ', η', J' eingesetzt werden.

7.2 Berechnung der Druck- und Beschleunigungsanteile

Nunmehr lassen sich mit Hilfe der in [18] hergeleiteten Formeln die von den Elementen m und m' herrührenden Druck- und Beschleunigungsanteile im Punkt \bar{r}_e^1 angeben. Zwar liefern diese Formeln so, wie sie angegeben sind, neben dem Druckanteil nur die Geschwindigkeitsanteile. Die Beschleunigungsanteile erhält man aus den letzteren, jedoch sofort durch partiellen Differentiationen nach der Zeit τ .

Bezeichnet

P = Druckanteil im Punkt l , herrührend von den Elementen m und m' ,

so erhält man unter Verwendung des im Abschnitt 4.4 eingeführten Ansatzes für $\partial t_j / \partial \tau$ und der in Abschnitt 5.3 durchgeführten Auflistung:

$$P = [g_m^{12} X_{R_m^{12}} + g_m^{22} X_{R_m^{22}} + g_m^{32} X_{R_m^{32}} + g_m^{42} X_{R_m^{42}}] \cdot P^0$$

Hierin ist

$$P^0 = \varrho \left[\varphi^P(\xi^1, \eta^1, J^1) - \varphi^P(\xi^2, \eta^2, J^2) - \varphi^P(\xi^3, \eta^3, J^3) + \varphi^P(\xi^4, \eta^4, J^4) \right. \\ \left. \varphi^P(\xi^{1'}, \eta^{1'}, J^{1'}) - \varphi^P(\xi^{2'}, \eta^{2'}, J^{2'}) - \varphi^P(\xi^{3'}, \eta^{3'}, J^{3'}) + \varphi^P(\xi^{4'}, \eta^{4'}, J^{4'}) \right]$$

und

$$\varphi^P(\xi, \eta, J) = \arctan \frac{\eta J}{\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + J^2}} \quad (7.4)$$

Bezeichnen

$\begin{Bmatrix} a^\xi \\ a^\eta \\ a^J \end{Bmatrix}$ die Komponenten des Beschleunigungsvektors im Punkt \mathcal{L} , herrührend vom Element m und bezogen auf das zum Element m gehörende, lokale Koordinatensystem,

und

$\begin{Bmatrix} a^{\xi'} \\ a^{\eta'} \\ a^{J'} \end{Bmatrix}$ die Komponenten des Beschleunigungsvektors im Punkt \mathcal{L} , herrührend vom Element m' und bezogen auf das zum Element m' gehörende, lokale Koordinatensystem,

so erhält man ebenfalls unter Verwendung des im Abschnitt 4.4 eingeführten Ansatzes für $\partial t_j / \partial \tau$ und der in Abschnitt 5.3 durchgeführten Auflistung:

$$a^\xi = \left[g_m^{12} X_{R_m^{12}} + g_m^{22} X_{R_m^{22}} + g_m^{32} X_{R_m^{32}} + g_m^{42} X_{R_m^{42}} \right] \cdot a^{\xi^c}$$

$$a^\eta = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \cdot a^{\eta^c}$$

$$a^J = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \cdot a^{J^c}$$

und

$$a^{\xi'} = \left[g_m^{12} X_{R_m^{12}} + g_m^{22} X_{R_m^{22}} + g_m^{32} X_{R_m^{32}} + g_m^{42} X_{R_m^{42}} \right] \cdot a^{\xi^{c'}}$$

$$a^{\eta'} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \cdot a^{\eta^{c'}}$$

$$a^{J'} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \cdot a^{J^{c'}}$$

Hierin ist

$$a^{\xi^0} = f^{\xi}(\xi^1, \eta^1, J^1) - f^{\xi}(\xi^2, \eta^2, J^2) - f^{\xi}(\xi^3, \eta^3, J^3) + f^{\xi}(\xi^4, \eta^4, J^4)$$

$$a^{\eta^0} = f^{\eta}(\xi^1, \eta^1, J^1) - \dots$$

$$a^{J^0} = f^J(\xi^1, \eta^1, J^1) - \dots$$

$$a^{\xi^{0i}} = f^{\xi}(\xi^{1i}, \eta^{1i}, J^{1i}) - f^{\xi}(\xi^{2i}, \eta^{2i}, J^{2i}) - f^{\xi}(\xi^{3i}, \eta^{3i}, J^{3i}) + f^{\xi}(\xi^{4i}, \eta^{4i}, J^{4i})$$

$$a^{\eta^{0i}} = f^{\eta}(\xi^{1i}, \eta^{1i}, J^{1i}) - \dots$$

$$a^{J^{0i}} = f^J(\xi^{1i}, \eta^{1i}, J^{1i}) - \dots$$

mit

(7.5)

$$f^{\xi}(\xi, \eta, J) = \frac{\eta J (2\xi^2 + \eta^2 + J^2)}{(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + J^2) \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + J^2}}$$

$$f^{\eta}(\xi, \eta, J) = -\frac{\xi J}{(\xi^2 + \eta^2) \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + J^2}} \quad f^J(\xi, \eta, J) = -\frac{\xi \eta}{(\xi^2 + J^2) \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + J^2}}$$

Um später die Superposition der von allen Elementen herrührenden Beschleunigungsvektoren durchführen zu können, ist es notwendig, die Vektorkomponenten der Beschleunigung auf ein einheitliches Koordinatensystem zu beziehen. Hierfür bietet sich das globale Koordinatensystem an. Bezeichnen

$$\begin{pmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix} \quad \text{die Komponenten des Beschleunigungsvektors im Punkt } l, \text{ herrührend von den Elementen } m \text{ und } m' \text{ und bezogen auf das globale Koordinatensystem,}$$

so ist:

$$a^x = (a^{\xi} + a^{\xi'}) x_m^{\xi^2} + (a^{\eta} + a^{\eta'}) x_m^{\eta^2} + (a^J + a^{J'}) x_m^{J^2}$$

$$a^y = (a^{\xi} + a^{\xi'}) y_m^{\xi^2} + (a^{\eta} + a^{\eta'}) y_m^{\eta^2} + (a^J + a^{J'}) y_m^{J^2}$$

$$a^z = (a^{\xi} - a^{\xi'}) z_m^{\xi^2} + (a^{\eta} - a^{\eta'}) z_m^{\eta^2} + (a^J - a^{J'}) z_m^{J^2}$$

7.3 Umformung der Gleichungen zur Bestimmung der Druck- und Beschleunigungsanteile

Für die weitere Auswertung der gewonnenen Beziehungen sind noch einige Umformungen notwendig.

Der von den Dipolelementen m und m' herrührende Druckanteil P sowie die von diesen Elementen herrührenden Beschleunigungsanteile a^x, a^y, a^z - alle bezogen auf den Punkt ℓ - sollen in der folgenden Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} P &= \sum C_{\ell k}^P X_k \\ a^x &= \sum C_{\ell k}^x X_k \\ a^y &= \sum C_{\ell k}^y X_k \\ a^z &= \sum C_{\ell k}^z X_k \end{aligned}$$

Die Summation soll sich hierbei über alle $C_{\ell k}^P, C_{\ell k}^x, \dots$ erstrecken, die nicht verschwinden. Diese von Null verschiedenen Koeffizienten ergeben sich unter Beachtung der oben angegebenen Beziehungen:

$$\begin{aligned} C_{\ell k_m}^P &= g_m^{12} P^0 & C_{\ell k_m}^P &= g_m^{22} P^0 \\ C_{\ell k_m}^P &= g_m^{32} P^0 & C_{\ell k_m}^P &= g_m^{42} P^0 \\ C_{\ell k_m}^x &= g_m^{12} a^{x0} & C_{\ell k_m}^x &= g_m^{22} a^{x0} \\ C_{\ell k_m}^x &= g_m^{32} a^{x0} & C_{\ell k_m}^x &= g_m^{42} a^{x0} \\ C_{\ell k_m}^y &= g_m^{12} a^{y0} & C_{\ell k_m}^y &= g_m^{22} a^{y0} \\ C_{\ell k_m}^y &= g_m^{32} a^{y0} & C_{\ell k_m}^y &= g_m^{42} a^{y0} \\ C_{\ell k_m}^z &= g_m^{12} a^{z0} & C_{\ell k_m}^z &= g_m^{22} a^{z0} \\ C_{\ell k_m}^z &= g_m^{32} a^{z0} & C_{\ell k_m}^z &= g_m^{42} a^{z0} \end{aligned} \quad (7.6)$$

mit

$$\begin{aligned} a^{x0} &= (a^{\xi c} + a^{\xi c'}) x_m^{\xi 2} + (a^{\eta c} + a^{\eta c'}) x_m^{\eta 2} + (a^{j c} + a^{j c'}) x_m^{j 2} \\ a^{y0} &= (a^{\xi c} + a^{\xi c'}) y_m^{\xi 2} + (a^{\eta c} + a^{\eta c'}) y_m^{\eta 2} + (a^{j c} + a^{j c'}) y_m^{j 2} \\ a^{z0} &= (a^{\xi c} - a^{\xi c'}) z_m^{\xi 2} + (a^{\eta c} - a^{\eta c'}) z_m^{\eta 2} + (a^{j c} - a^{j c'}) z_m^{j 2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Mit den Formeln 7.1, ..., 7.6 ist damit ein Weg zur Berechnung der Koeffizienten $C_{eR}^P, C_{eR}^X, C_{eR}^Y, C_{eR}^Z$ gefunden, soweit sie den Einfluß der rechteckigen Dipolelemente m und m' beschreiben.

8. Berechnung des Druckes P und des Beschleunigungsvektors $\bar{\alpha}$ im Punkt ℓ , herrührend von der Quelle n , sowie der zugehörigen spiegelsymmetrischen Quellen n'

Der von der Quelle n und der zugehörigen spiegelsymmetrischen Quelle n' herrührende Druckanteil P im Punkt ℓ ist nach [17]:

$$P = \rho \left[g_n^{13} X_{R_n^{13}} + g_n^{23} X_{R_n^{23}} + g_n^{33} X_{R_n^{33}} + g_n^{43} X_{R_n^{43}} \right] \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

Der von der Quelle n herrührende Beschleunigungsanteil a im Punkt ℓ ist von n nach ℓ gerichtet und beträgt:

$$a = \left[g_n^{13} X_{R_n^{13}} + g_n^{23} X_{R_n^{23}} + g_n^{33} X_{R_n^{33}} + g_n^{43} X_{R_n^{43}} \right] \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^2$$

Der von der Quelle n' herrührende Beschleunigungsanteil a im Punkt ℓ ist von n' nach ℓ gerichtet und beträgt:

$$a = \left[g_n^{13} X_{R_n^{13}} + g_n^{23} X_{R_n^{23}} + g_n^{33} X_{R_n^{33}} + g_n^{43} X_{R_n^{43}} \right] \cdot \left(\frac{1}{r'} \right)^2$$

Hierin ist r der Abstand zwischen Quelle n und Punkt ℓ ,

$$r = \sqrt{(x_\ell^1 - x_n^3)^2 + (y_\ell^1 - y_n^3)^2 + (z_\ell^1 - z_n^3)^2} \quad (8.1)$$

und r' ist der Abstand zwischen Quelle n' und Punkt ℓ .

$$r' = \sqrt{(x_\ell^1 - x_n^3)^2 + (y_\ell^1 - y_n^3)^2 + (z_\ell^1 + z_n^3)^2} \quad (8.2)$$

Außerdem wurde der im Abschnitt 4.4 eingeführte Ansatz für $\partial S_j / \partial t$ und die im Abschnitt 5.3 durchgeführte Auflistung benutzt.

Weiterhin sind

$$\bar{F} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad \text{der Richtungsvektor des Abstandes zwischen Quelle } n \text{ und Punkt } \ell$$

und

$$\bar{F}' = \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} \quad \text{der Richtungsvektor des Abstandes zwischen Quelle } n' \text{ und Punkt } \ell$$

Die Richtungsvektoren haben die Länge der Einheit.¹⁾ Sie ergeben sich wie folgt:

$$\bar{r} = (\bar{r}_\ell^1 - \bar{r}^3)/r \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} x &= (x_\ell^1 - x_n^3)/r \\ y &= (y_\ell^1 - y_n^3)/r \\ z &= (z_\ell^1 - z_n^3)/r \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} x' &= (x_\ell^1 - x_n^3)/r' \\ y' &= (y_\ell^1 - y_n^3)/r' \\ z' &= (z_\ell^1 + z_n^3)/r' \end{aligned} \quad (8.4)$$

Zwecks der später erfolgenden Superposition sind der Beschleunigungsanteil α mit dem Richtungsvektor \bar{r} und der Beschleunigungsanteil α' mit dem Richtungsvektor r' auf das globale Koordinatensystem zu beziehen. Bezeichnen

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^x \\ \alpha^y \\ \alpha^z \end{array} \right\} \text{ die Komponenten des Beschleunigungsvektors im Punkt } \ell \text{ herrührend von den Quellen } n \text{ und } n' \text{ und bezogen auf das globale Koordinatensystem,}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \alpha^x &= \alpha x + \alpha' x' \\ \alpha^y &= \alpha y + \alpha' y' \\ \alpha^z &= \alpha z + \alpha' z' \end{aligned}$$

Für die weitere Auswertung ist es erforderlich, den von den Quellen n und n' herrührenden Druckanteil P sowie die von diesen Quellen herrührenden Beschleunigungsanteile $\alpha^x, \alpha^y, \alpha^z$ - alle bezogen auf den Punkt ℓ - in der folgenden Form anzugeben, die auch in Abschn. 7.3 verwendet wurde:

¹⁾ Man beachte, daß $r \neq |\bar{r}|$ und $r' \neq |r'|$ ist.

$$P = \sum C_{\ell R}^P X_R$$

$$a^x = \sum C_{\ell R}^x X_R$$

$$a^y = \sum C_{\ell R}^y X_R$$

$$a^z = \sum C_{\ell R}^z X_R$$

Die Summation soll sich hierbei wieder über alle $C_{\ell R}^P, C_{\ell R}^x, \dots$ erstrecken, die nicht verschwinden. Diese von Null verschiedenen Koeffizienten erhält man zu:

$$C_{\ell R_n}^P = g_n^{13} P^0$$

$$C_{\ell R_n}^P = g_n^{23} P^0$$

$$C_{\ell R_n}^P = g_n^{33} P^0$$

$$C_{\ell R_n}^P = g_n^{43} P^0$$

$$C_{\ell R_n}^x = g_n^{13} a^{x0}$$

$$C_{\ell R_n}^x = g_n^{23} a^{x0}$$

$$C_{\ell R_n}^x = g_n^{33} a^{x0}$$

$$C_{\ell R_n}^x = g_n^{43} a^{x0}$$

$$C_{\ell R_n}^y = g_n^{13} a^{y0}$$

$$C_{\ell R_n}^y = g_n^{23} a^{y0}$$

$$C_{\ell R_n}^y = g_n^{33} a^{y0}$$

$$C_{\ell R_n}^y = g_n^{43} a^{y0}$$

$$C_{\ell R_n}^z = g_n^{13} a^{z0}$$

$$C_{\ell R_n}^z = g_n^{23} a^{z0}$$

$$C_{\ell R_n}^z = g_n^{33} a^{z0}$$

$$C_{\ell R_n}^z = g_n^{43} a^{z0}$$

mit

(8.5)

$$P^0 = g \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

$$a^{x0} = \left(\frac{1}{r} \right)^2 X + \left(\frac{1}{r'} \right)^2 X'$$

$$a^{y0} = \left(\frac{1}{r} \right)^2 Y + \left(\frac{1}{r'} \right)^2 Y'$$

$$a^{z0} = \left(\frac{1}{r} \right)^2 Z + \left(\frac{1}{r'} \right)^2 Z'$$

Mit den Formeln 8.1, ..., 8.5 ist damit ein Weg zur Berechnung der Koeffizienten $C_{zR}^p, C_{zR}^x, C_{zR}^y, C_{zR}^z$ gefunden, soweit sie den Einfluß der punktförmigen Quellen n und n' beschreiben.

9. Superposition der Druckanteile P und Beschleunigungsanteile \bar{a} herrührend von den Quellen i und n , den rechteckigen Dipolelementen m , sowie den hierzu spiegelsymmetrischen Quellen bzw. Elementen i', n' und m' .

Die Superposition der Druckanteile P und Beschleunigungsanteile \bar{a} , die von den in Rede stehenden Quellen und rechteckigen Dipolelementen herrühren, führt zu den in Abschnitt 3 angegebenen Formeln 3.3 zur Bestimmung des Druckes P und der Komponenten a^x, a^y, a^z des Beschleunigungsvektors \bar{a} für den Punkt ℓ . Die in diesen Formeln auftretenden Konstanten $B_\ell^P, B_\ell^x, B_\ell^y, B_\ell^z$ und Koeffizienten $C_{\ell k}^P, C_{\ell k}^x, C_{\ell k}^y, C_{\ell k}^z$ ergeben sich durch Summation der entsprechenden Werte, die für die einzelnen Quellen und Dipolelemente in den Abschnitten 6, 7, 8 hergeleitet wurden. Für die Superposition erhält man damit:

$$\begin{aligned} P &= B_\ell^P + \sum_{k=1}^K C_{\ell k}^P X_k \\ a^x &= B_\ell^x + \sum_{k=1}^K C_{\ell k}^x X_k \\ a^y &= B_\ell^y + \sum_{k=1}^K C_{\ell k}^y X_k \\ a^z &= B_\ell^z + \sum_{k=1}^K C_{\ell k}^z X_k \end{aligned}$$

und

(9.1)

$$\begin{aligned} B_\ell^P &= \sum_{i=1}^I [B_\ell^P]_i & C_{\ell k}^P &= \sum_{m=1}^M [C_{\ell k}^P]_m + \sum_{n=1}^N [C_{\ell k}^P]_n \\ B_\ell^x &= \sum_{i=1}^I [B_\ell^x]_i & C_{\ell k}^x &= \sum_{m=1}^M [C_{\ell k}^x]_m + \sum_{n=1}^N [C_{\ell k}^x]_n \\ B_\ell^y &= \sum_{i=1}^I [B_\ell^y]_i & C_{\ell k}^y &= \sum_{m=1}^M [C_{\ell k}^y]_m + \sum_{n=1}^N [C_{\ell k}^y]_n \\ B_\ell^z &= \sum_{i=1}^I [B_\ell^z]_i & C_{\ell k}^z &= \sum_{m=1}^M [C_{\ell k}^z]_m + \sum_{n=1}^N [C_{\ell k}^z]_n \end{aligned}$$

Die hinter den eckigen Klammern stehenden Indizes i, m oder n sollen anzeigen, daß der jeweilige Koeffizient oder die Konstante jeweils nur entweder auf eine Quelle i bzw. n und die zugehörige spiegelsymmetrische Quelle i' bzw. n' oder auf ein rechteckiges Dipolelement m und das zugehörige spiegelsymmetrische Element m' bezogen ist. Demnach ergeben sich

die Konstanten $[B_\ell^p]_i, [B_\ell^x]_i, \dots$ mit Hilfe der Formeln 6.5

die Koeffizienten $[C_{\ell k}^p]_m, [C_{\ell k}^x]_m, \dots$ mit Hilfe der Formeln 7.6

die Koeffizienten $[C_{\ell k}^p]_n, [C_{\ell k}^x]_n, \dots$ mit Hilfe der Formeln 8.5

Wie in Abschnitt 7 und 8 angegeben, treten von Null verschiedene Koeffizienten nur für die vier Indizes $k = k_m^{12}, k_m^{22}, k_m^{32}, k_m^{*2}$ bzw. $k = k_n^{13}, k_n^{23}, k_n^{33}, k_n^{*3}$ auf. Dies vereinfacht die Summation.

Mit den Gleichungen 9.1 und den früher abgeleiteten Beziehungen wurde damit ein Werkzeug zur Verfügung gestellt, das die Berechnung des Druckes P und der Komponenten a^x, a^y, a^z des Beschleunigungsvektors \bar{a} für jeden Punkt ℓ erlaubt, sobald die Unbekannten X_k bekannt sind.

Bevor im nächsten Abschnitt die Bestimmung dieser Unbekannten mit Hilfe der Randbedingungen erfolgt, ist es zweckmäßig, den für den Punkt ℓ bestimmten Beschleunigungsvektor \bar{a} mit Hilfe der Komponenten

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{\xi} \\ a^{\eta} \\ a^{\zeta} \end{array} \right\} \quad \text{Komponenten des Beschleunigungsvektors } \bar{a} \text{ im Punkt } \ell, \\ \text{bezogen auf die dem Punkt } \ell \text{ zugeordneten Basisvektoren } \bar{F}_\ell^{\xi 1}, \bar{F}_\ell^{\eta 1}, \bar{F}_\ell^{\zeta 1}.$$

auszudrücken. Die aus der Drehung der Basisvektoren folgenden Transformationsformeln lauten:

$$a^{\xi} = a^x X_\ell^{\xi 1} + a^y Y_\ell^{\xi 1} + a^z Z_\ell^{\xi 1}$$

$$a^{\eta} = a^x X_\ell^{\eta 1} + a^y Y_\ell^{\eta 1} + a^z Z_\ell^{\eta 1}$$

$$a^{\zeta} = a^x X_\ell^{\zeta 1} + a^y Y_\ell^{\zeta 1} + a^z Z_\ell^{\zeta 1}$$

Die drei Beziehungen zur Bestimmung von a^x, a^y, a^z in den Gleichungen 9.1 werden deshalb ersetzt durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} a^{\xi} &= B_l^{\xi} + \sum_{k=1}^K C_{lk}^{\xi} X_k \\ a^{\eta} &= B_l^{\eta} + \sum_{k=1}^K C_{lk}^{\eta} X_k \\ a^{\zeta} &= B_l^{\zeta} + \sum_{k=1}^K C_{lk}^{\zeta} X_k \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} B_l^{\xi} &= B_l^x X_l^{\xi'} + B_l^y Y_l^{\xi'} + B_l^z Z_l^{\xi'} \\ B_l^{\eta} &= B_l^x X_l^{\eta'} + B_l^y Y_l^{\eta'} + B_l^z Z_l^{\eta'} \\ B_l^{\zeta} &= B_l^x X_l^{\zeta'} + B_l^y Y_l^{\zeta'} + B_l^z Z_l^{\zeta'} \end{aligned} \tag{9.2}$$

und

$$\begin{aligned} C_{lk}^{\xi} &= C_{lk}^x X_l^{\xi'} + C_{lk}^y Y_l^{\xi'} + C_{lk}^z Z_l^{\xi'} \\ C_{lk}^{\eta} &= C_{lk}^x X_l^{\eta'} + C_{lk}^y Y_l^{\eta'} + C_{lk}^z Z_l^{\eta'} \\ C_{lk}^{\zeta} &= C_{lk}^x X_l^{\zeta'} + C_{lk}^y Y_l^{\zeta'} + C_{lk}^z Z_l^{\zeta'} \end{aligned}$$

Besondere Bedeutung hat die Beschleunigungskomponente a^{ξ} . Sie steht normal zur Randfläche (zugehöriger Richtungsvektor $\vec{r}_l^{\xi'}$) und wird normalerweise für einen Teil der Randpunkte durch die Randbedingungen vorgeschrieben.

10. Bestimmung der unbekanntenen Stützwerte X_R durch näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen

Die näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen erfolgt dadurch, daß nicht an allen unendlich vielen Randpunkten, sondern nur in insgesamt K Randpunkten gemäß den Spezifikationen in Abschnitt 4.4 und der geänderten Auflistung in Abschnitt 5.2 entweder der Randdruck P oder die Normalbeschleunigung des Randes a^f explizit vorge-schrieben wird. Die Zahl K ist identisch mit der Anzahl der zu be-stimmenden Stützwerte X_R .

Dieses Vorgehen führt zu dem im Abschnitt 3 angegebenen linearen Gleichungssystem 3.2 für die Unbekannten X_R

$$\sum_{R=1}^K C_{jR} X_R = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, K)$$

wobei zur Bestimmung von C_{jR} und B_j die Liste $\ell = 1, 2, \dots, L$ zu durchlaufen ist und für $IND2_\ell = 1$

$$C_{jR} = C_{\ell R}^P \quad \text{und} \quad B_j = P_\ell(\tau) - B_\ell^P \quad (10.1)$$

sowie für $IND2_\ell = 2$

$$C_{jR} = C_{\ell R}^f \quad \text{und} \quad B_j = a_\ell(\tau) - B_\ell^f$$

zu setzen ist. Der Index j durchläuft hierbei der Reihe nach die Werte $j = 1, 2, \dots, K$ ¹⁾

In dem Falle $IND3_\ell = \sigma$ ist

$$P_\ell(\tau) = P_\ell^b \quad \text{bzw.} \quad a_\ell(\tau) = a_\ell^b$$

und im Falle $IND3_\ell = \mu$ ist

$$P_\ell(\tau) = P_\ell^b \cdot f^\mu(\tau) \quad \text{bzw.} \quad a_\ell(\tau) = a_\ell^b \cdot f^\mu(\tau)$$

Damit steht ein lineares Gleichungssystem zur Verfügung, das im allge-meinen für jeden Zeitpunkt $\tau > \sigma$ eine eindeutige Lösung für die Unbe-kannten X_R ergibt. Mit Hilfe der Formeln 9.1 bzw. 9.2 lassen sich

1) Die Indizierung mit j ist verschieden von der in Abschnitt 4.4 benutzten Indizierung.

daraus sofort die Drücke P und die Beschleunigungen \bar{a} für die Punkte \mathcal{L} zu dem selben Zeitpunkt $\tau > \sigma$ bestimmen. In anderen Worten: Druck-und Beschleunigungsfeld für jeden Zeitpunkt $\tau > \sigma$ lassen sich bestimmen.

11. Bestimmung der Druck-, Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsfelder als Funktion der Zeit τ .

Es wird hier davon ausgegangen, daß die Druck-, Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsfelder als Funktion der Zeit als bekannt angesehen werden dürfen, wenn die entsprechenden Werte in den Aufpunkten $\ell = 1, 2, \dots, L$ für die Zeitpunkte $\nu = 0, 1, 2, \dots, N$ berechnet worden sind. Die zu den Zeitpunkten gehörenden Zeiten sind $\tau = \nu \Delta$.

Der gesamte hier zu betrachtende Zeitbereich ist $0 \leq \tau \leq N \Delta$.

(Vergleiche auch Abschnitt 4.2)

Um demnach die Druck- und Beschleunigungsfelder als Funktion der Zeit τ zu bestimmen, ist es lediglich notwendig, das im Vorangegangenen angegebene Rechenverfahren für jeden Zeitpunkt $\nu = 0, 1, 2, \dots, N$ einmal zu durchlaufen. Zahlreiche Rechnungen brauchen hierbei jedoch nur einmal ausgeführt zu werden. Unter den Voraussetzungen, die in dieser Arbeit gemacht wurden, sind die Koeffizienten $C_{\ell R}^p, C_{\ell R}^x, \dots$ und damit auch C_{jR} keine Funktionen der Zeit. Diese Koeffizienten brauchen deshalb in jedem Problem nur einmal bestimmt zu werden. Auch das lineare Gleichungssystem 10.1 braucht nicht bei jedem Rechenschritt vollständig neu gelöst zu werden. Es ist vielmehr ausreichend, die Koeffizientenmatrix C_{jR} einmal zu Beginn der Rechnung zu invertieren. Die zu jedem der Zeitpunkte ν gehörenden Unbekannten X_R ergeben sich dann mit Hilfe der folgenden linearen Beziehung:

$$X_R = \sum_{j=1}^K [C_{jR}]^{-1} B_j, \quad (11.1)$$

wobei $[C_{jR}]^{-1}$ die zu C_{jR} inverse Matrix darstellt. Die Werte B_j sind im allgemeinen Funktionen der Zeit, da sie sich aus den vorgegebenen Intensitäten der Singularitäten $i = 1, 2, \dots, I$ und den vorgegebenen Randdrücken und Beschleunigungen berechnen und diese mit der Zeit variieren können. Die Werte B_j müssen also für jeden Zeitpunkt neu bestimmt werden. Variieren die Intensitäten der Singularitäten $i = 1, 2, \dots, I$ nicht mit der Zeit ($INDO_i = 0$), so sind in den Beziehungen 10.1 die Werte B_{ℓ}^p und B_{ℓ}^f keine Funktionen der Zeit. Die Bestimmung von B_j für die Zeitschritte $\nu > 0$ gestaltet sich dann sehr einfach.

In dem Falle schließlich, daß auch die Randbedingungen sich zeitlich nicht ändern, erhält man für jeden Zeitpunkt dasselbe Druck- und Beschleunigungsfeld.

Das Geschwindigkeitsfeld mit

$$\vec{v} = \begin{cases} v^{\xi} \\ v^{\eta} \\ v^{\zeta} \end{cases} \quad \text{Geschwindigkeitskomponenten bezogen auf die Basis-} \\ \text{vektoren } \vec{F}_e^{\xi'}, \vec{F}_e^{\eta'}, \vec{F}_e^{\zeta'}$$

ergibt sich durch zeitliche Integration der entsprechenden Beschleunigungen. Führt man diese Integration mit Hilfe der Trapezformel näherungsweise durch, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} [v^{\xi}]_{\nu} &= ([a^{\xi}]_0 + [a^{\xi}]_{\nu}) \cdot \frac{\Delta}{2} + \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} [a^{\xi}]_{\alpha} \right) \cdot \Delta \\ [v^{\eta}]_{\nu} &= ([a^{\eta}]_0 + [a^{\eta}]_{\nu}) \cdot \frac{\Delta}{2} + \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} [a^{\eta}]_{\alpha} \right) \cdot \Delta \\ [v^{\zeta}]_{\nu} &= ([a^{\zeta}]_0 + [a^{\zeta}]_{\nu}) \cdot \frac{\Delta}{2} + \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} [a^{\zeta}]_{\alpha} \right) \cdot \Delta \end{aligned} \quad (11.2)$$

Die eckigen Klammern mit den angehängten Indizes $\nu, 0, \alpha$ deuten an, daß die jeweiligen Werte sich auf den Zeitpunkt $\nu, 0, \alpha$ beziehen. Damit sind auch die Geschwindigkeitsfelder als Funktion der Zeit bekannt.

12. Einige Anmerkungen zur Programmier- technik und zum Rechenaufwand von SING1

Auf der Basis der in den vorhergegangenen Kapiteln beschriebenen Theorie wurde ein PL/1-Rechenprogramm erstellt. Dabei wurde darauf geachtet, daß die im Programm verwendeten Variablennamen weitestgehend mit den Bezeichnungen übereinstimmen, die in Kap. 4. - 10. verwendet wurden.

Die Größe der zu berechnenden Probleme ist vom Programm SING1 her unbegrenzt und hängt somit nur von der verwendeten Rechanlage ab. Da das Programm in PL/1 geschrieben wurde, können sämtliche Daten formatfrei eingegeben werden.

Die eingegebenen Daten durchlaufen nach dem Einlesen zunächst eine Diagnostik-Routine. Werden hierbei Fehler festgestellt, so druckt das Programm selbsterklärende Fehlermeldungen aus. Je nach Grad der erkannten Fehler wird der Job abgebrochen oder nach Ausgabe einer Warnung weitergerechnet.

Zur schnelleren Überprüfung der eingegebenen und zu berechnenden Strukturen sowie zur Darstellung der Ergebnisse wurden einige Plot-Routinen erstellt (siehe dazu Abb. 3 bis 9).

Als Hinweis für den Rechenaufwand von SING1 mögen die Angaben in Tafel I dienen. Sie gelten für die in Kapitel 13 diskutierten Rechenbeispiele auf einer IBM 370/168.

Tafel I Angaben zum Rechenaufwand von SING 1

	Wasserpool für Druck- unterdrückungssystem (ca. 700 Elemente, ca. 250 Stützstellen)	T - Stück (126 Elemente, 63 Stütz- stellen)
CPU-Zeit	17 min	35 sec
Kernspei- cher	1000 KByte	190 KByte
Kosten	700,-- DM	93,-- DM

13. Anwendungsbeispiele für SING1

13.1 Fluiddynamisches Verhalten des Wasserpools eines Druckunterdrückungssystems für Siedewasserreaktoren

Als Auslegungstörfall von Leichtwasserreaktoren wird angenommen, daß eine Hauptkühlmittelleitung des Primärkreises bricht und das Kühlmittel als Dampf in das Containment austritt. Um bei Siedewasserreaktoren den sich einstellenden Containmentdruck niedrig zu halten, wird der Dampf in einem Druckunterdrückungssystem kondensiert [9,10,19]. Es besteht aus einem ringförmigen Wasserpool (Außendurchmesser ca. 30 m, Wasservolumen 2500 m^3) in den der Dampf mittels vieler Rohre (Durchmesser ca. 0,6 m) eingeblasen wird. Wie Versuche zeigen, erfolgt die Kondensation hierbei stark diskontinuierlich. Dies kann zu erheblichen dynamischen Belastungen der umgebenden Wände führen.

Mit Hilfe des Rechenprogramms SING1 wurde eine fluiddynamische Analyse für den Wasserpool durchgeführt. Um den numerischen Aufwand in Grenzen zu halten, wurde nur ein Drittel der Ringgeometrie berücksichtigt. Da dieses Drittel außerdem spiegelsymmetrisch ist, genügte es, die Diskretisierung auf ein Sechstel des ringförmigen Wasserbereiches zu beschränken. Die Dipolelemente wurden näherungsweise in die Fluid-Oberfläche gelegt. Ihre Anordnung ist aus Abb. 3 zu erkennen. Man bestätigt, daß die Elementüberlappungen und "Lecks", die bei der Darstellung nicht rechteckiger Flächen mit rechteckigen Elementen unvermeidlich sind, relativ klein sind. Die Deckfläche stellt die freie Wasseroberfläche dar. An ihr wurde ein Druck von $p = 0$ vorgeschrieben. Die Veränderung der freien Wasseroberfläche durch die Fluidbewegung wurde vernachlässigt (kleine Verformungen). An den übrigen Fluidoberflächen, die durch die umgebenden Wände gebildet werden, wurde eine Normalbeschleunigung von $a = 0$ vorgeschrieben. In einem realistischen Modell müßte dagegen die Flexibilität der Wände mitberücksichtigt und das Problem als gekoppeltes fluid-strukturdynamisches Problem behandelt werden. Eine Erweiterung des Codes in dieser Richtung ist in Arbeit [9,10]. Die diskontinuierliche Kondensation wird durch eine oszillierende Quelle an den Mündungen der Kondensationsrohre simuliert.

Es wurden insgesamt vier Rechnungen durchgeführt (Tafel II). Nach der ersten Rechnung wurde aufgrund der Ergebnisse (mangelhafte Erfüllung der Randbedingungen in Quellnähe) Anzahl und Zuordnung der Stützstellen geändert. Bei der dritten und vierten Rechnung wurde die Lage der Quelle, entsprechend den verschiedenen Mündungen der Kondensationsrohre, variiert.

Die Ergebnisse der Rechnungen Nr. 1 bis 4 sind aus den Abb. 4 bis 7 zu entnehmen. Die Druckverteilung über den Randflächen wird in den Mittelpunkten der Dipolelemente durch Striche mit Querbalken, die Verteilung der Normalbeschleunigung wird durch Pfeile dargestellt. Man sieht, daß jeweils der Druck (freie Oberfläche) oder die Normalbeschleunigung (übrige Randflächen) näherungsweise - entsprechend den vorgegebenen Randbedingungen - verschwinden. Beschleunigungen, deren Darstellungslängen kleiner als die Länge der Pfeilspitze gewesen wären, wurden nicht gezeichnet.

Bei der ersten Rechnung (Abb. 4) ergaben sich an der Zylinder- und Kegelfläche durch die Nähe der Quelle größere Fehler in den Randbedingungen. An einigen Elementen, in denen die Erfüllung der Randbedingungen (Verschwinden der Normalbeschl.) nicht erzwungen wurde, traten Normalbeschleunigungen auf, die in der Größenordnung der Werte an der freien Oberfläche liegen.

Bei der zweiten Rechnung (Abb. 5) wurde dieser Mangel durch gezieltes Hinzufügen weiterer Stützstellen behoben. Beim Vergleich der Druckverteilungen in Abb. 4 mit denjenigen in Abb. 5 fällt auf, daß die Ergebnisse der Rechnung durch die lokale Verletzung der Randbedingungen nahezu nicht beeinflußt werden.

Bei der dritten Rechnung (Abb. 6) befand sich die Quelle weniger tief unter der Wasseroberfläche. Wie zu erwarten, ergeben sich hierdurch insgesamt geringere Drücke. Der Druckpeak in der Kegelfläche wird überproportional abgebaut. Dagegen wird die Beschleunigungsverteilung über der freien Oberfläche ungleichmäßiger.

Bei der vierten Rechnung (Abb. 7) wurde die Quelle auf einen größeren Ringradius geschoben. Dadurch verschwindet der Druck-

peak an der Kegelfläche nahezu vollständig. Hingegen ist eine lokale Druckerhöhung in der Kugelfläche zu beobachten. An derselben Stelle nehmen auch die Fehler in den Randbedingungen (mangelhaftes Verschwinden der Normalbeschleunigung) zu. Dies ließe sich durch gewisse Änderungen in den Stützstellen leicht beheben. Da der Vergleich zwischen Rechnung 1 und 2 jedoch gezeigt hat, daß solche lokalen Fehler für die Druckverteilungen unerheblich sind, wurde diese Änderung nicht durchgeführt.

Tafel II Rechenmodell-Variationen für den Wasserpool

Rechnung Nr.	Anzahl der Di- polele- mente	Anzahl der Stütz- stellen X_K	Fluid- dichte	Koordinaten der Quelle		Intensität der Quelle
				Tiefe unter der Wasser- oberfläche	Radius be- zogen auf die Ring- achse	
1	696	232	10^{-3} kg/cm^3	380 cm	800 cm	$10^7 \text{ cm}^3/\text{sec}^2$
2	696	247	"	380 cm	800 cm	"
3	696	247	"	280 cm	800 cm	"
4	696	247	"	280 cm	1000 cm	"

13.2 Fluidodynamik in einem T-Stück mit unterschiedlichen Rechteck- querschnitten

Geometrie und Diskretisierung der Fluidoberfläche ist aus Abb. 8 zu ersehen. Um die Grenzen des Verfahrens bei grober Diskretisierung zu studieren, wurden nur 126 Dipolelemente mit 63 Stützstellen verwendet. Am Rohrquerschnitt 2 wurde ein Druck von $P = 3$ bar, am Rohrquerschnitt 1 ein Druck von $P = 0$ bar vorgeschrieben. An den Rohrwänden wurde Normalbeschleunigung $a = 0$ gefordert. Die Ergebnisse sind in Abb. 9 dargestellt.

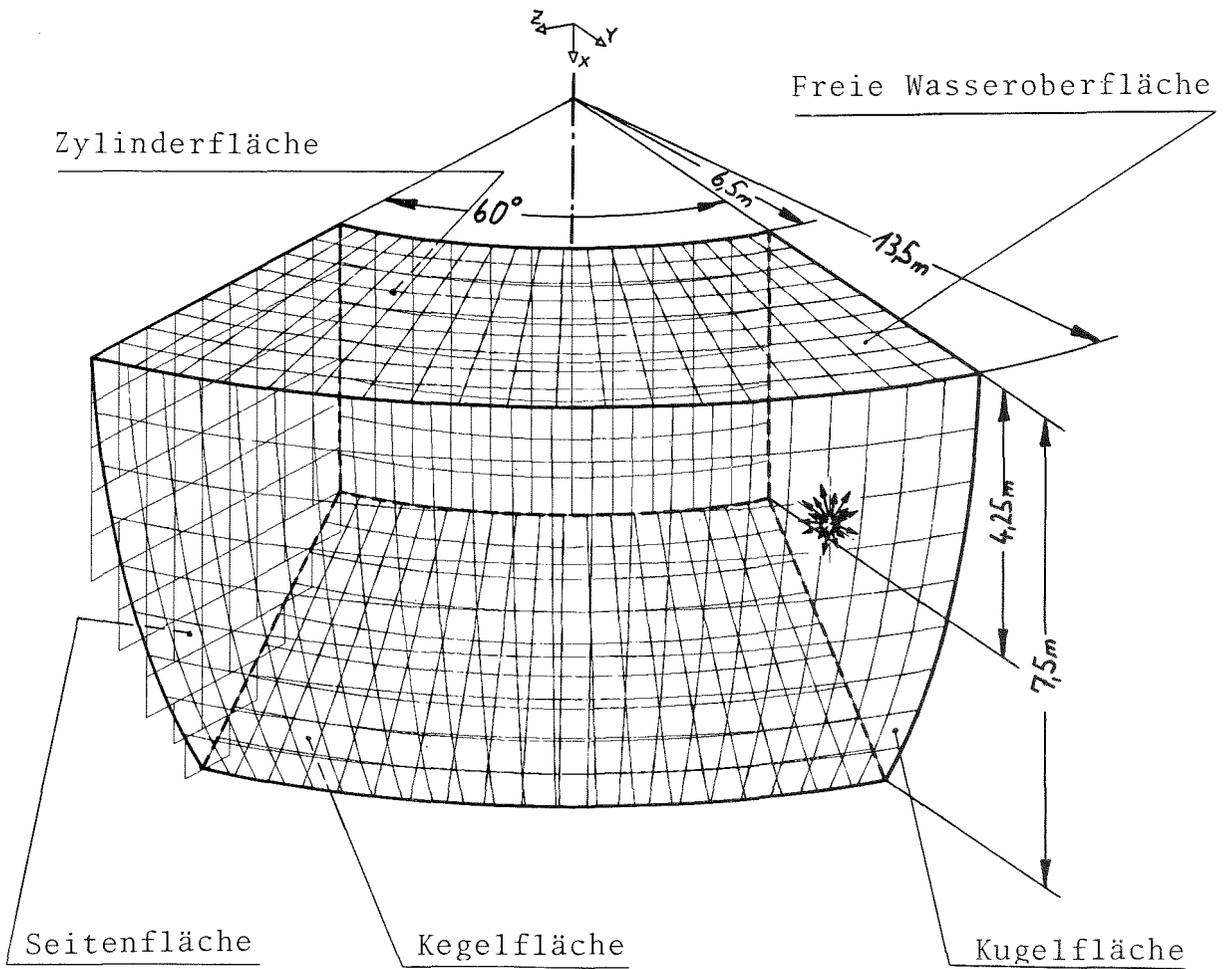
Trotz der schroffen Querschnittsänderungen und der sehr groben Diskretisierung erhält man plausible Ergebnisse. Die Kontrolle des Zu- und Abflusses an dem Ein- und Auslaßquerschnitt zeigt, daß die

Beschleunigungen im richtigen Verhältnis zueinander stehen. Dies ist ein Beweis dafür, daß bei der Verwendung von Dipolelementen die in [7] beobachteten Leckverluste an den Kanten nicht auftreten.

- [⁻1_] J.L. Hess, A.M.O. Smith:
Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies
Progress in Aeronautical Sciences, Vol.8, (1967) 1-138
- [⁻2_] J.L. Hess:
Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-
Flow-Problems with Emphasis on the Surface-Source Method
Computer Methods in Appl. Mechanics and Engineering 5(1975)
145-196
- [⁻3_] J.L. Hess:
Improved Solution for Potential Flow about Arbitrary Axisymmetric
Bodies by the Use of a Higher-Order Surface Source Method.
Computer Methods in Appl. Mechanics and Engineering 5(1975)
297-308
- [⁻4_] J.H. Argyris, D.W. Scharpf:
Two and Three-Dimensional Potential Flow by the Method of
Singularities
The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society,
Vol.73, Nov. 69
- [⁻5_] L. Landweber:
Axisymmetric Potential Flow in a Circular Tube
Journal of Hydronautics. New York, 8, 1974. H.10
- [⁻6_] W. Albring, G. Schindler:
Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung auf Rotationskörpern
und auf Schiffsrümpfen.
Maschinenbautechnik, 23. Jahrg., 1974
- [⁻7_] J. Renken:
Untersuchung der dreidimensionalen Strömung in einem Kanal
mit rechteckigem, variablem Querschnitt mit Hilfe des Panel-
Verfahrens.
Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raum-
fahrt, Köln, Forschungsbericht 75-46 (1975)
- [⁻8_] F. Keune, K. Burg:
Singularitätenverfahren der Strömungslehre.
G. Braun, Karlsruhe

- [9_] R. Krieg, H. Zehlein:
Coupled Problems in Transient Fluid and Structural Dynamics
with Application to Nuclear Engineering,
Int. Symp. on Innovative Num. Analysis in Appl. Eng. Science
Versailles-France, 23-27 Mai 1977
- [10_] R. Krieg:
Coupled Problems in Transient Fluid and Structural Dynamics
with Application to Nuclear Engineering,
Part I: Safety Problems and Related Solution Methods Including
a New Simultaneous Coupling Technique Using Distributed Flow
Singularities
Zur Veröffentlichung eingereicht bei Appl. Math. Modelling
- [11_] L. Prandtl:
Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium
Luftf. Forschung 13 (1936), Nr. 10, Seite 313-319
- [12_] F.H. Harlow, A.A. Amsden:
A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow
Speeds
Journal of Computational Physics 8, 197-213 (1971)
- [13_] A.A. Amsden, C.W. Hirt, J.L. Cook:
YAQUI: An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program
for Fluid Flow at All Speeds
Journal of Computational Physics, 14 (1974), 227
- [14_] U. Schumann:
Über die direkte Lösung der diskretisierten Poisson-Gleichung
mittels zyklischer Reduktion
KFK-Ext. 8/75-6 (Jan. 76)
- [15_] U. Schumann, R.A. Sweet:
A Direct Method for the Solution of Poisson's Equation with
Neumann Boundary Conditions on a Staggered Grid of Arbitrary
Size
Journal of Computational Physics, Vol. 20, No.2, Feb. 76

- [⁻16_] R. Meyder:
Solving the Conservation Equations in Fuel Rod Bundles
Exposed to Parallel Flow by Means of Curvilinear - Orthogonal
Coordinates.
Journal of Computational Physics, Vol. 17 No. 1, Jan. 75
- [⁻17_] R. Krieg:
Nonsymmetric Transient Pressure Load on Reactor Vessel
Caused by Point Sources Simulating Fuel Sodium Interaction
ANS Conf. in Fast Reactor Safety, Beverly Hills, Cal., USA,
Apr. 2-4, 1974
- [⁻18_] R. Krieg:
Three Dimensional Flow Fields Caused by Transient Dipoles
Uniformly Distributed on Rectangular Plane Elements.
KFK-Ext. 8/76-2 (Nov. 1976)
- [⁻19_] G. Class: Theoretische Untersuchungen der Druckpulsentstehung
bei der Dampfkondensation im Druckabbausystem von Siedewasser-
reaktoren - Rechenprogramm KONDAS - .
KFK 2487 (Okt. 1977)



Die Quelle liegt in der Symmetrie-Ebene $Z=0$

Abb. 3 Oberflächendiskretisierung für einen 60° -Ausschnitt des Wasserpoools eines Druckunterdrückungssystems

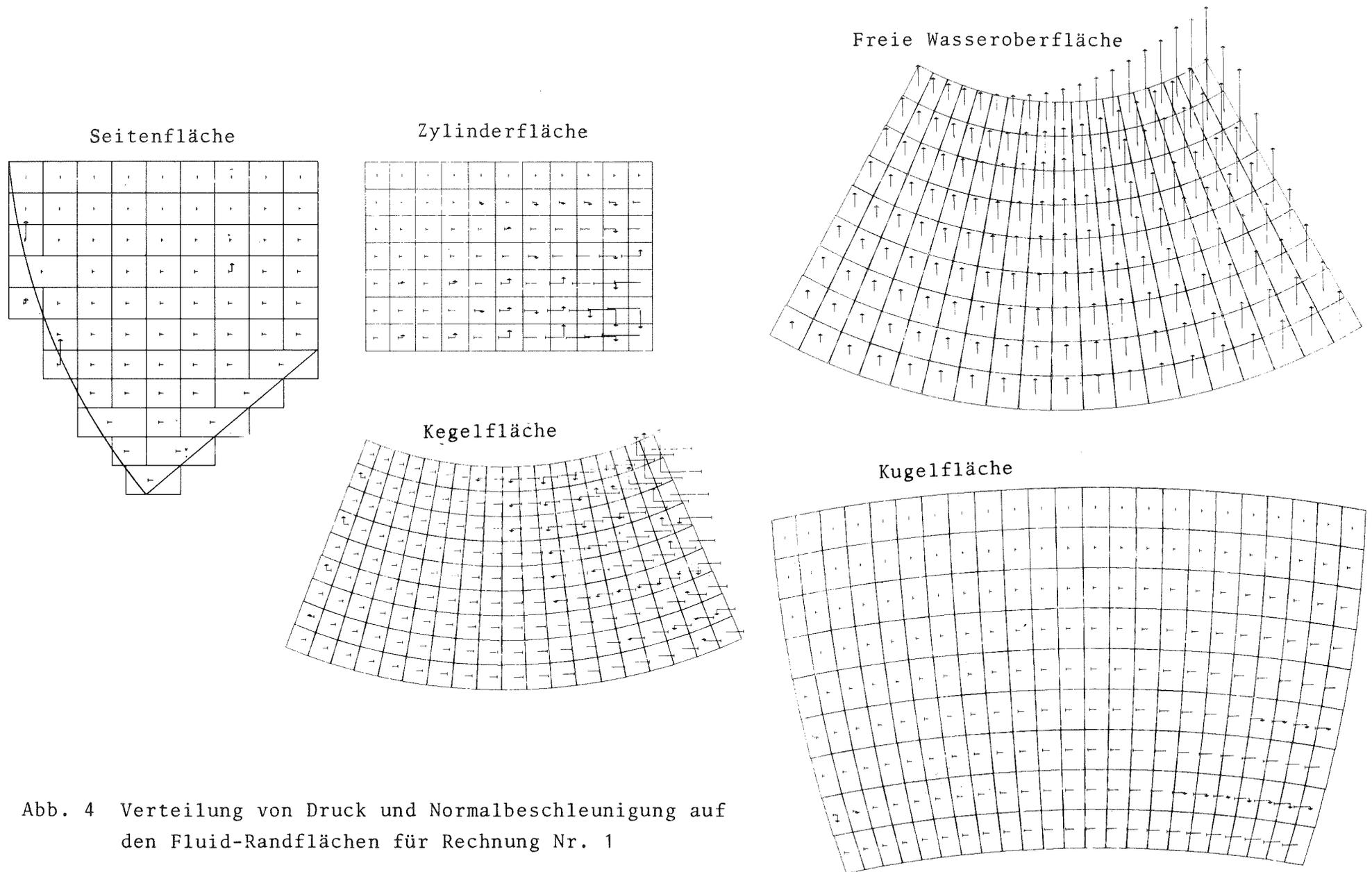


Abb. 4 Verteilung von Druck und Normalbeschleunigung auf den Fluid-Randflächen für Rechnung Nr. 1

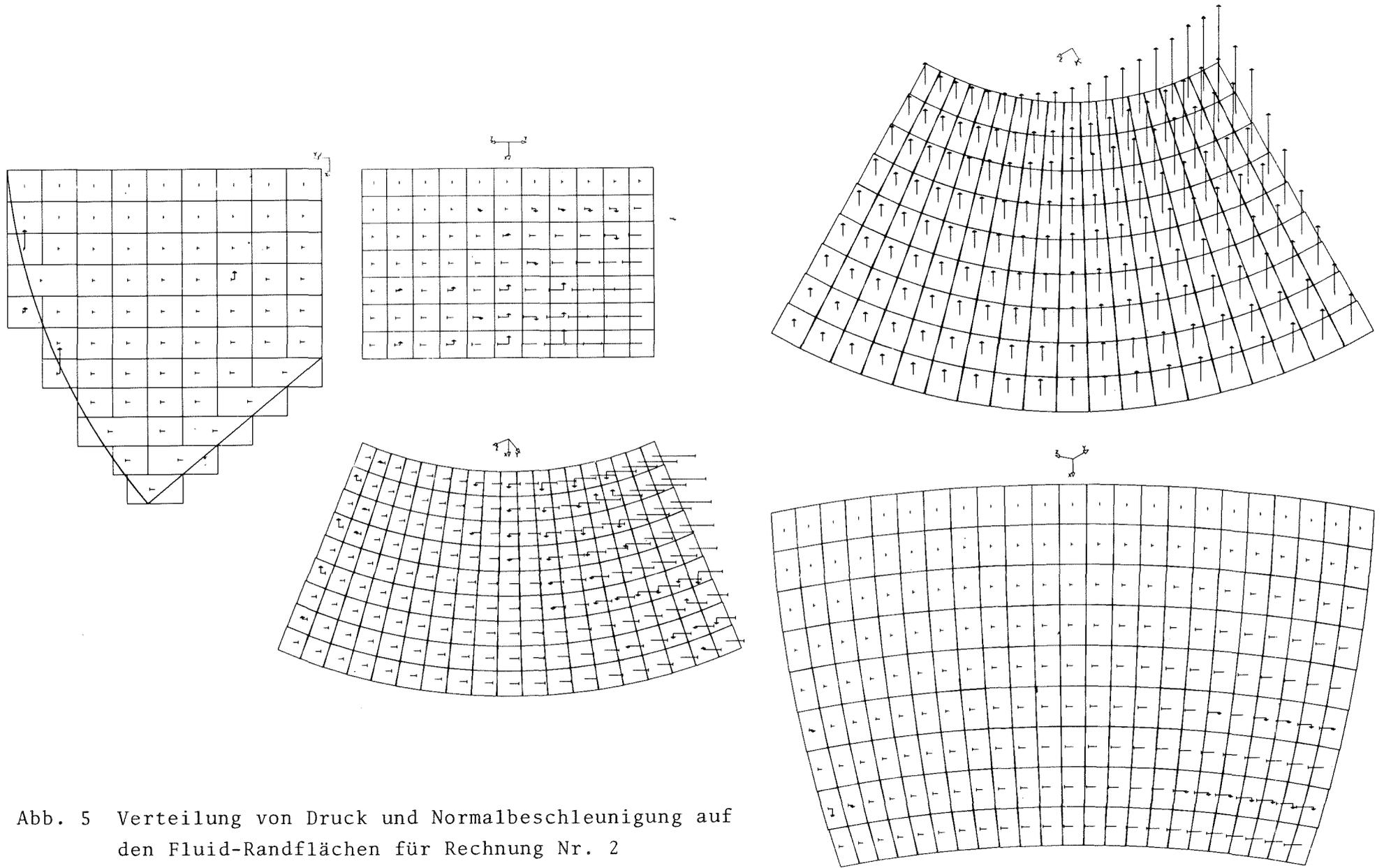


Abb. 5 Verteilung von Druck und Normalbeschleunigung auf den Fluid-Randflächen für Rechnung Nr. 2

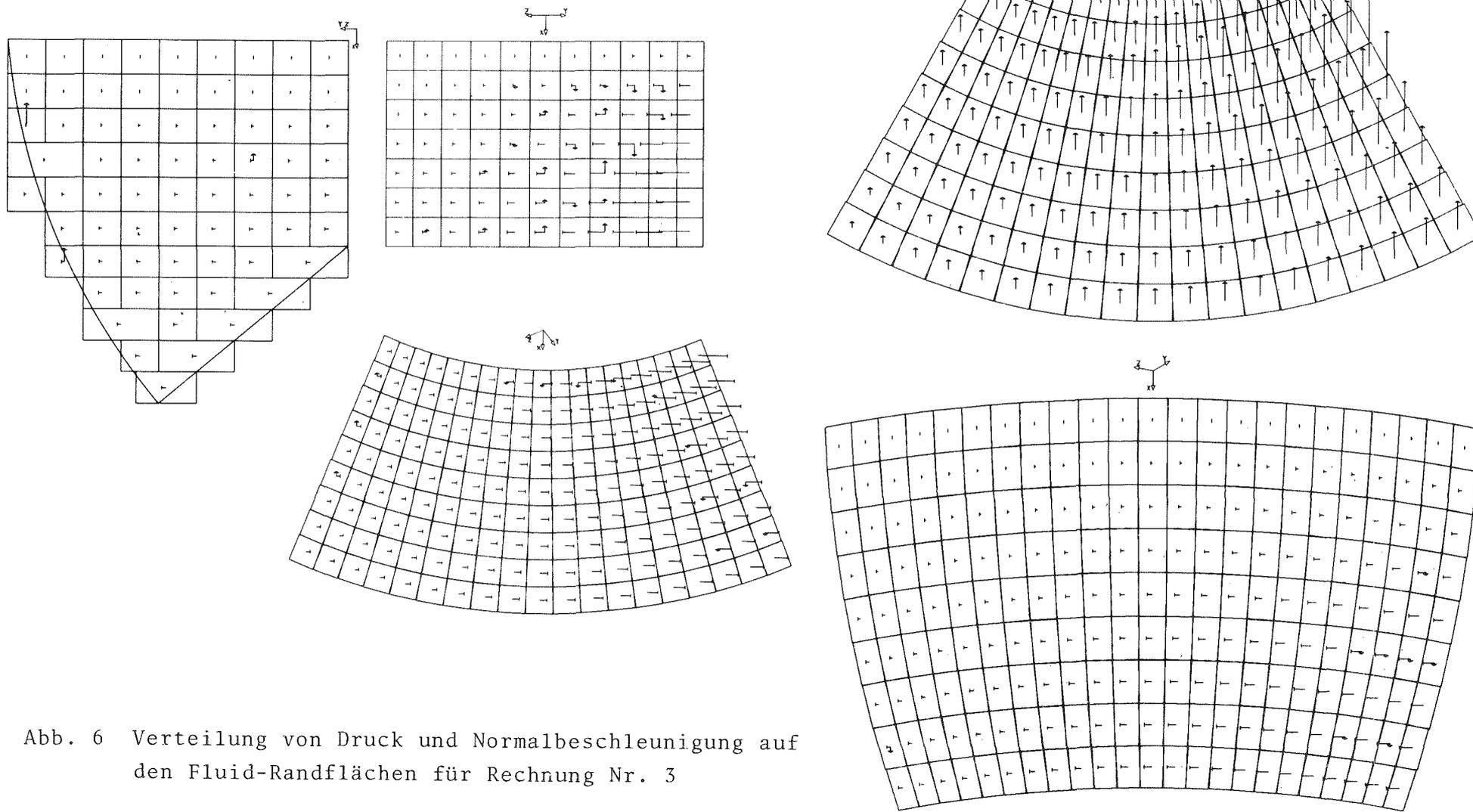


Abb. 6 Verteilung von Druck und Normalbeschleunigung auf den Fluid-Randflächen für Rechnung Nr. 3

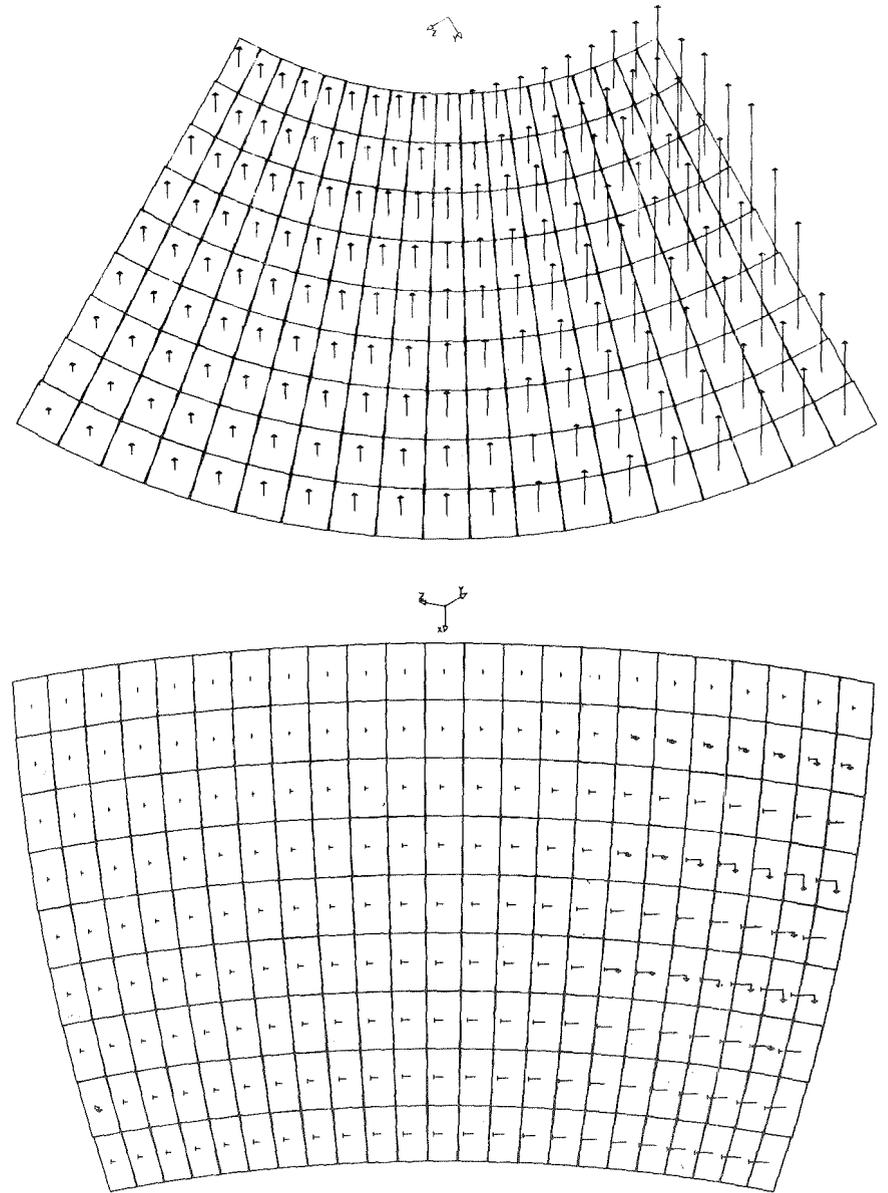
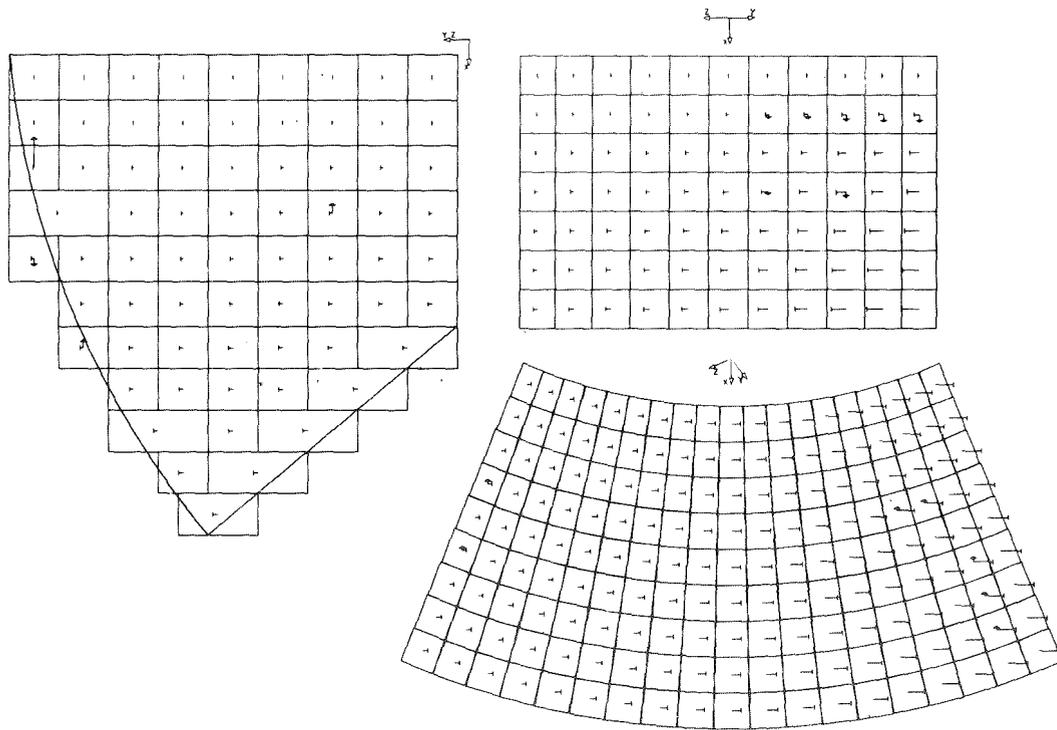


Abb. 7 Verteilung von Druck und Normalbeschleunigung auf den Fluid-Randflächen für Rechnung Nr. 4

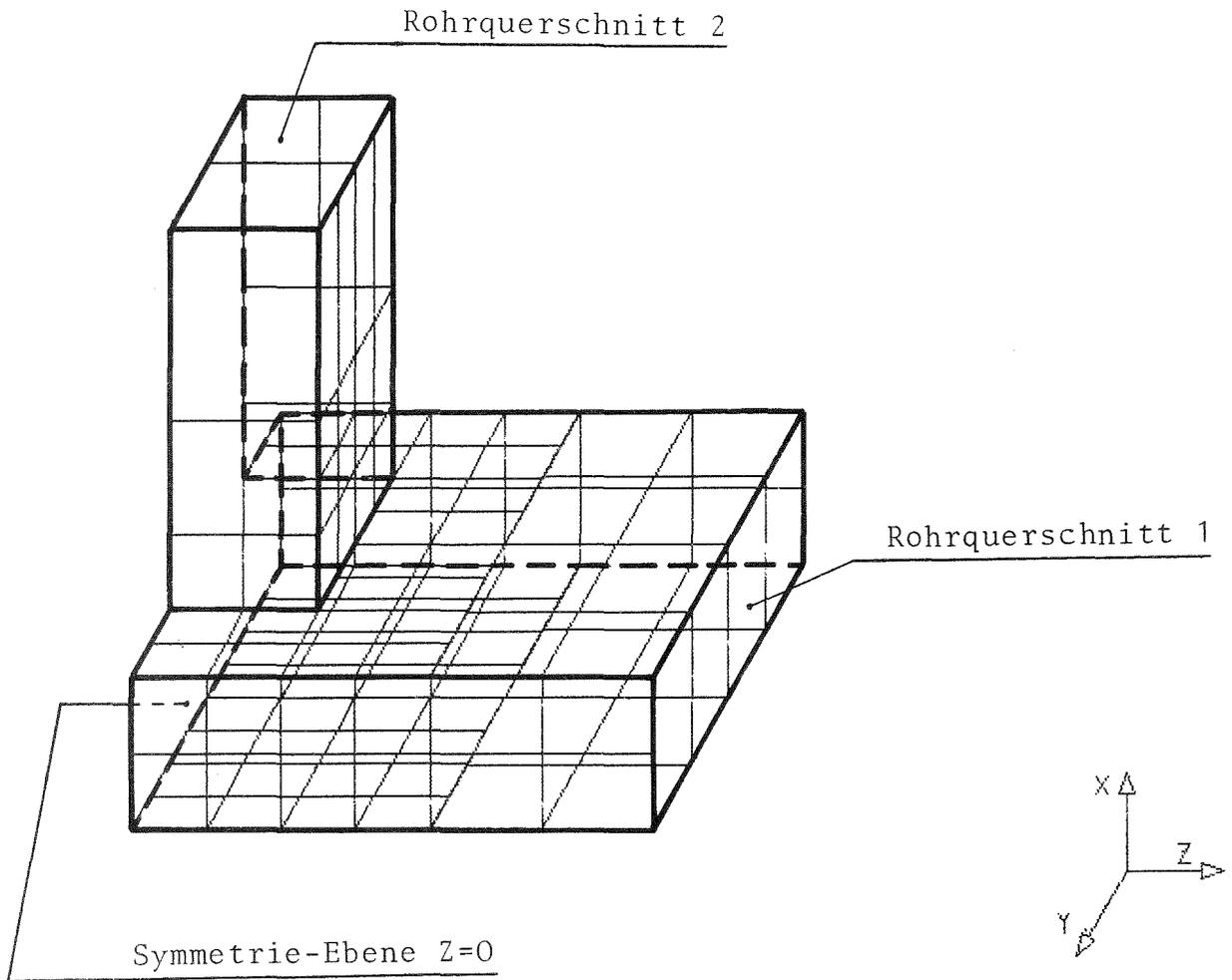
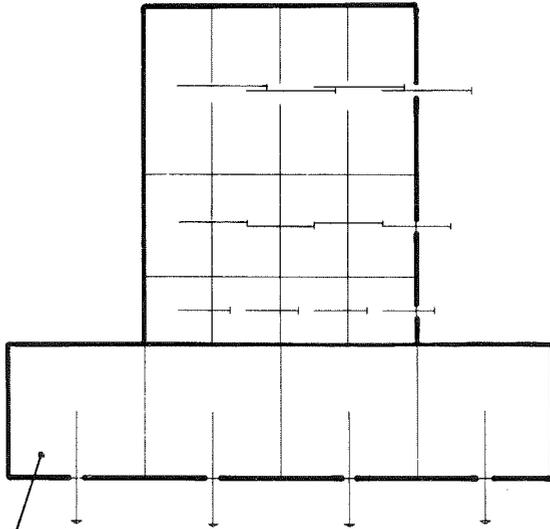
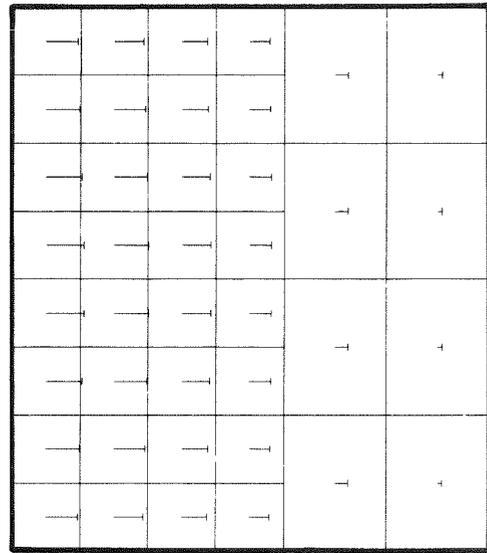
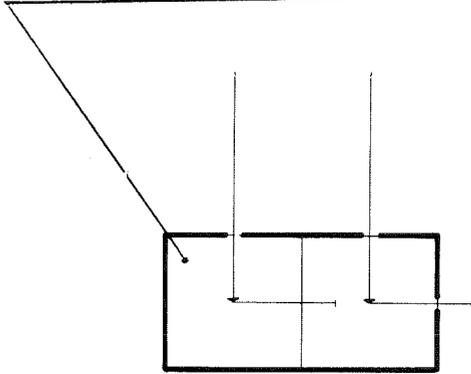


Abb. 8 Oberflächendiskretisierung eines T - Stückes mit unterschiedlichen Rechteckquerschnitten

Rohrquerschnitt 2



Rohrquerschnitt 1

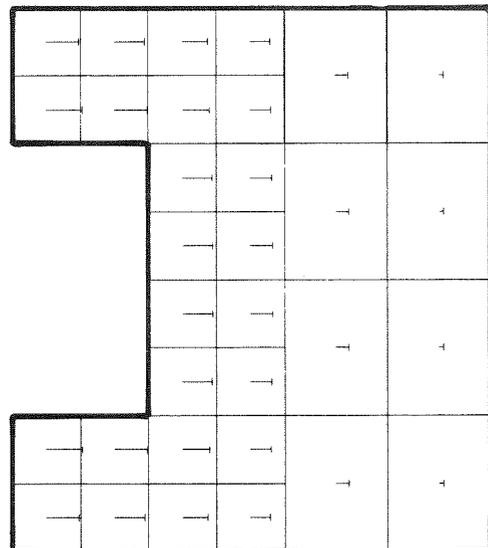
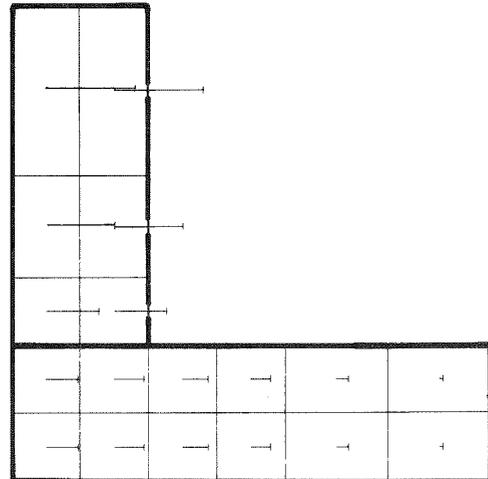


Abb. 9 Verteilung von Druck und Normalbeschleunigung auf den Fluid-Randflächen des T-Stückes