

KfK 2649
Juni 1978

Verfügbarkeit von Verarbeitungssystemen mit paralleler und serieller Struktur und mit Zwischenlagern

F. Schumacher
Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Wiederaufarbeitung und Abfallbehandlung

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE GMBH

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Wiederaufarbeitung und Abfallbehandlung

KfK 2649

PWA 26/78

Verfügbarkeit von Verarbeitungs-
systemen mit paralleler und serieller
Struktur und mit Zwischenlagern

F. Schumacher

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Kurzfassung

Die betriebliche Zuverlässigkeit von parallel-seriellen und durch Zwischenlager verbundenen Verarbeitungseinheiten wird mit analytischen Modellen und mit Simulationsmodellen analysiert. Im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse wird der Einfluß einzelner Eingangsgrößen sowie Modellannahmen auf die Systemverfügbarkeit überprüft. Die Ergebnisse der Studien werden in Form von Diagrammen präsentiert.

Availability of processing units with parallel and series structure and with intermediate storages

Abstract

The availability of parallel-series connected processing units with intermediate storages will be analysed with analytical and simulation models. The influence of particular input parameters and model assumptions on the system availability is investigated within an sensitivity analysis. The results are presented by several diagrams.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung und Problemstellung	1
2. Allgemeine Grundlagen und Modellannahmen	3
3. Anlagen in Serie	6
4. Anlagen mit Reserveeinheiten	9
4.1 Reserve ohne Anlaufzeit	11
4.2 Reserve mit Anlaufzeit	13
5. Parallel-Serielle Anlagen	16
6. Verarbeitungssysteme mit Zwischenlagern	22
7. Schlußbemerkungen	27
8. Literaturverzeichnis	28
<u>Anhang:</u> Zustandsdiagramme der Modelle in Kapitel 4 und 5	29
Bild 3 - 18	38 - 59

1. Einleitung und Problemstellung

Heutzutage gewinnt die Frage nach der Zuverlässigkeit von Systemen eine immer größere Bedeutung. Dies resultiert zum einen daraus, daß die Systeme immer komplexer und damit störanfälliger werden und zum anderen daraus, daß an die Systeme eine immer höhere Zuverlässigkeitsanforderung gestellt wird. Bei der Wiederaufarbeitung und Abfallbehandlung von Kernbrennstoffen werden zum Beispiel hochkomplexe Anlagen der chemischen Verfahrenstechnik eingesetzt, die den Abfall von Kernkraftwerken mit großen Investitionsvolumen verarbeiten. Fällt die Entsorgung für längere Zeit aus, d.h. ist die Zuverlässigkeit ungenügend, so müssen Kernkraftwerke stillgelegt oder teure Zwischenlager gebaut werden.

Zur Erhöhung der Zuverlässigkeit werden häufig Anlagenteile redundant ausgelegt. Weiterhin versucht man, vor allem in der chemischen Verfahrenstechnik, durch Einrichtung von Zwischenpuffern Anlagenteile zu entkoppeln. Beide Vorgehensweisen beruhen meistens auf Erfahrung und groben Abschätzungen.

Ziel dieses Berichts ist es, die Zuverlässigkeit seriell verknüpfter Anlagen mit redundanten Teilkomponenten sowie Zwischenlagern quantitativ zu erfassen und Formeln zur Berechnung von Zuverlässigkeitskenngrößen anzugeben. Eine wichtige Zielgröße ist dabei die Verfügbarkeit eines Systems, von dessen Komponenten angenommen wird, daß sie reparierbar sind.

Die zur Zeit von der Zuverlässigkeitstheorie angebotenen Verfahren /1, 2, 3, 4, 5/ sind hauptsächlich zur Anwendung in der Elektronik oder ähnlichen Bereichen bestimmt. Man geht meistens von nicht reparierbaren Systemen aus und interessiert sich für die Zuverlässigkeit oder den Zeitpunkt des ersten Systemzusammenbruchs. Analytische Verfahren zur Berechnung der Verfügbarkeit von reparierbaren und voneinander abhängigen Systemen existieren nur für einfache serielle oder parallele Strukturen (siehe etwa /1, 2, 4/). Quantitative Auslegungsmethoden für Zwischenlagersysteme sind in der Literatur nur in begrenztem Umfang vorhanden /6/.

Im folgenden werden nach Festlegung und Diskussion einiger Grundlagen und Modellannahmen die in der Literatur vorhandenen Formeln für die Verfügbarkeit rein serieller oder paralleler Anlagen aufgeführt (Kap. 3 und 4.1). Es folgt die Analyse von Systemen mit Umschaltzeiten und mit parallel-serieller Struktur (Kap. 4.2 und 5). In Kapitel 6 wird die Verfügbarkeit von Systemen mit Zwischenlagern untersucht.

2. Allgemeine Grundlagen und Modellannahmen

Die in den nachfolgenden Kapiteln entwickelten Formeln geben die Verfügbarkeit einer Gesamtanlage (= eines Systems) an, die aus mehreren Komponenten (= Anlagen, Komponenten, Teilsystemen) besteht. Unter Gesamtanlage bzw. System wird also im folgenden die Summe mehrerer Anlagen oder Komponenten verstanden.

Eine Anlage soll stets in genau einem von zwei Zuständen sein, nämlich in Betrieb oder im Ausfall. Eine ausgefallene Anlage wird sofort repariert. Beide Zustände wechseln sich gegenseitig ab, d.h. nach einer Betriebsphase folgt eine Reparaturphase und nach dieser wieder eine Betriebsphase, usw. (siehe Bild 1).

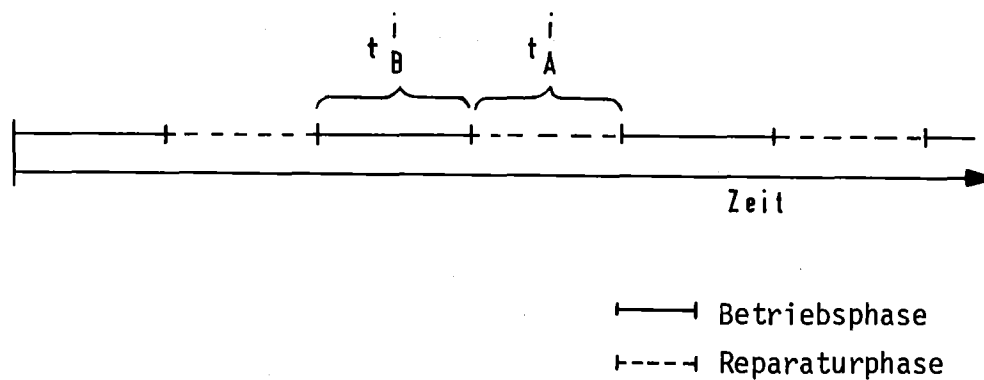


Bild 1: Zustandsfolge einer Anlage

Eine Betriebsphase oder Betriebszeit wird mit t_B^i und eine Ausfallphase oder Ausfallzeit (synonym Reparaturzeit) mit t_A^i bezeichnet. Die mittlere Betriebsphase t_B ist gleich dem Mittelwert aus allen einzelnen Betriebsphasen. In der Literatur wird sie auch mit MTBF (Mean Time Between Failures) bezeichnet.

Die zentrale Zielgröße dieses Berichts ist die Verfügbarkeit V einer Anlage. Sie ist definiert durch

$$V = \frac{t_B}{t_A + t_B} \quad (1)$$

und kann interpretiert werden als derjenige Bruchteil der betrachteten Zeit, für den die Anlage in Betrieb ist. Meistens wird die Verfügbarkeit als Wahrscheinlichkeit, die Anlage zu einem Zeitpunkt t im Betriebszustand vorzufinden, verstanden (siehe DIN 40042). Im nachfolgenden wird die erste, in der Verfahrenstechnik geläufigere Interpretation gewählt und die Verfügbarkeit in Prozent angegeben.

In den Kapiteln 3, 4 und 5 sind Formeln aufgeführt, die unter bestimmten Annahmen gelten. Diese Annahmen sind, soweit sie nicht noch später spezifiziert werden:

- Eine ausgefallene Anlage wird unverzüglich repariert.
- Ist eine Anlage in Betrieb, so ist der Zeitpunkt des nächsten Ausfalls zufällig. Geplante Stillstände, wie z.B. Wartungsperioden, werden somit nicht betrachtet und im folgenden ausgeschlossen.

Diese Annahme stimmt zum Beispiel mit der Praxis kerntechnischer Anlagen, in der Wartungsphasen auftreten, nicht überein. Wie die Erfahrung mit in Betrieb befindlichen kerntechnischen Anlagen jedoch zeigt, wird eine Anlage, die in Betrieb ist, häufig erst dann einer Wartung unterzogen, wenn ein Ausfall vorliegt. Dies trifft vor allem auf Entsorgungsanlagen zu.

- Die Länge einer Reparaturphase ist eine Zufallsgröße.

Auch diese Annahme schließt eine geplante feste Wartungsperiode aus. Wie die Erfahrung jedoch wieder zeigt, ist die Länge einer Wartungsperiode i.a. zu Beginn der Wartung nicht genau bekannt und

schwankt von Wartungsperiode zu Wartungsperiode. Insgesamt kann man somit Wartungsperioden den Reparaturphasen zuschlagen.

- Das Betriebs- und Ausfallverhalten einer Anlage eines Systems ist unabhängig von dem Verhalten der anderen Anlagen, falls nicht explizit anders erwähnt, d.h. ist eine Anlage in Betrieb bzw. Ausfall, so ist der nächste Ausfallzeit- bzw. Inbetriebnahmezeitpunkt nur von dieser Anlage her bestimmt (Ausnahmen siehe unten).

Diese Annahme ist bei der Anwendung der nachfolgenden Formeln genau zu beachten. Dient z.B. ein Auflöser als Reserveeinheit für einen anderen Auflöser und benutzen beide dasselbe Abluftsystem, so besteht eine Abhängigkeit zwischen beiden Einheiten, die in das Zuverlässigkeitsmodell einbezogen werden muß.

- Die Betriebszeit sowie die Reparaturzeit sind exponentialverteilte Zufallsgrößen.

Diese auf den ersten Blick sehr einschneidend aussehende Annahme ist Voraussetzung, um nachfolgende Modelle überhaupt analytisch behandeln zu können. Das entscheidende Merkmal einer exponentialverteilten Betriebs- bzw. Ausfallzeit ist eine konstante mittlere Betriebs- bzw. Ausfallzeit. Diese Annahme trifft z.B. nicht bei Systemen zu, die altern. Sie ist jedoch näherungsweise erfüllt bei Systemen, die sich aus mehreren Komponenten, die altern, zusammensetzen /3/. Die nachfolgenden Formeln sind also auf Systeme, die sich auf dem Niveau von Filtern, Airlifts usw. befinden, mit Vorsicht anzuwenden. Bei größeren Systemen wie Headend und Extraktion in der Entsorgung ist obige Annahme jedoch i.a. erfüllt.

Schließlich sei noch angemerkt, daß sämtliche nachfolgende Formeln für den stationären Zustand gelten. Es wird also von einem eingeschwungenen, vom Anfangszustand unabhängigen System ausgegangen.

3. Anlagen in Serie

Ein System, welches aus einer seriellen Verknüpfung von Anlagen besteht, zeichnet sich dadurch aus, daß der Ausfall einer Anlage zum Ausfall aller Anlagen führt. Das System ist somit nur dann in Betrieb, wenn alle Anlagen des Systems in Betrieb sind.

Nach dieser Definition stimmt eine serielle Verknüpfung nicht immer mit einer seriellen Fließbildstruktur überein. In der Entsorgung zum Beispiel liegt die wässrige MAW-Konditionierung parallel zur organischen MAW-Konditionierung. Betrachtet man das Gesamtsystem MAW-Verarbeitung in Bezug auf seine Zuverlässigkeit, so liegt eine im obigen Sinne serielle Struktur vor, denn ein längerer Ausfall der wässrigen oder der organischen MAW-Verarbeitung führt zum Ausfall der MAW-Konditionierung.

Ein System aus n seriellen Anlagen läßt sich durch folgendes Blockdiagramm veranschaulichen:



Das System ist in Betrieb, wenn alle Anlagen in Betrieb sind. Fällt eine Anlage aus, so werden alle anderen Anlagen stillgelegt und wieder in Betrieb genommen, wenn die ausgefallene Anlage repariert ist.

Nach /1/ erhält man für die Verfügbarkeit V_{ges} und die mittlere Betriebszeit $t_{B_{\text{ges}}}$ des Gesamtsystems

$$V_{\text{ges}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{t_{A_i}}{t_{B_i}}} \quad (2)$$

$$V_{\text{ges}} = \frac{1}{1 - n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{V_i}} \quad (3)$$

$$t_{B_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_{B_i}}} \quad (4)$$

Sind alle V_i bzw. t_{B_i} gleich, so ergibt sich V_{ges} bzw. $t_{B_{\text{ges}}}$ zu

$$V_{\text{ges}} = \frac{V}{V + n(1 - V)} \quad (5)$$

$$t_{B_{\text{ges}}} = \frac{t_B}{n} \quad (6)$$

In Bild 3 ist (3) für zwei Anlagen aufgetragen. Man sieht sofort, daß die Gesamtverfügbarkeit immer kleiner der geringsten Einzelverfügbarkeit ist. Das schwächste Glied bestimmt somit die Gesamtverfügbarkeit.

Bild 4 zeigt für verschiedene n V_{ges} in Abhängigkeit von der Einzelverfügbarkeit V nach Formel (5). Man sieht, daß die Verminderung der Verfügbarkeit durch die serielle Verknüpfung bei kleinem V am größten ist und mit wachsendem V gegen Null geht.

Obige Formeln wurden mit einem Simulationsmodell validiert (siehe /7/). Darüber hinaus wurde die Annahme der Exponentialverteilung mit dem Simulationsmodell überprüft. Dabei ergab sich, daß die Exponentialverteilung pessimistische Werte liefert gegenüber allen Verteilungen, bei denen die Standardabweichung der Betriebs- bzw. Reparaturzeit kleiner oder gleich dem Mittelwert ist, d.h. bei diesen Verteilungen ergaben sich günstigere Werte für die Gesamtverfügbarkeit als bei der Exponentialverteilung. Bei der logarithmischen Normalverteilung und bei der Weibullverteilung traten, wenn die Standardabweichung größer als der Mittelwert war, ungünstigere Werte auf als bei der Exponentialverteilung. Die Unterschiede zwischen den Verteilungen waren bei kleinen Systemverfügbarkeiten am größten und verschwanden bei hohen Verfügbarkeiten. Insgesamt zeigte sich, daß nach dem Mittelwert die Standardabweichung der Betriebs- und Reparaturzeit auf die Verfügbarkeit V_{ges} den stärksten Einfluß ausübt, während die Verteilungsart gegenüber diesen beiden Größen in den Hintergrund tritt.

4. Anlagen mit Reserveeinheiten

Zur Erhöhung der Zuverlässigkeit von Verarbeitungsanlagen werden neben anderem auch häufig Reservekomponenten eingerichtet. Im weiteren wollen wir zweckmäßigerweise von der Reservierung einer Einheit sprechen, wobei das Wort "Einheit" sowohl eine Teilkomponente als unzerlegbaren Teil einer Anlage als auch einen Block oder die Anlage als Ganzes bezeichnen soll. Die von der Grundeinheit und ihren Reserveeinheiten gebildete Gesamtheit soll System heißen.

In der Zuverlässigkeitstheorie werden verschiedene Arten der Reservierung behandelt /2/:

belastete Reserve: Die Reserveeinheiten unterliegen den gleichen Bedingungen wie die Grundeinheit, d.h. bei Inbetriebnahme der Grundeinheit werden alle Reserveeinheiten mit in Betrieb genommen;

unbelastete Reserve: Die Reserveeinheiten sind nicht in Betrieb, wenn die Grundeinheit läuft, und können daher bis zum Zeitpunkt, in dem sie an die Stelle des Grundelementes treten, nicht ausfallen;

erleichterte Reserve: Mischung aus belasteter und unbelasteter Reserve, d.h. die Reserveeinheiten unterliegen im Reservezustand geringerer Belastung als im Betrieb, können jedoch ausfallen.

Bei der geplanten Wiederaufarbeitungsanlage sollen zum Beispiel zwei parallele Headeneinheiten in erleichterter Reserve betrieben werden. Ansonsten liegt wie bei den meisten Anlagen der chemischen Verfahrenstechnik die unbelastete Reserve vor, da man die Anlagen selten mit Halb- oder Dreiviertellast fahren kann. Im folgenden wird daher, wenn nicht anders erwähnt, nur die unbelastete Reserve betrachtet.

Die Reservierung läuft im allgemeinen in der Verfahrenstechnik so ab, daß im Falle eines Ausfalls der Grundeinheit eine Reserveeinheit in

Betrieb genommen wird und die Grundeinheit repariert wird. Fällt auch die Reserveeinheit aus und ist die Grundeinheit noch in Reparatur, so wird, falls vorhanden, eine weitere Reserveeinheit in Betrieb genommen, usw. Ist die Grundeinheit repariert, so wird nicht der Betrieb der Reserveeinheit abgebrochen und die Grundeinheit wieder in Betrieb genommen, sondern diese erst nach Ausfall der Reserveeinheit wieder angefahren.

Der Übergang von einer Einheit auf eine andere kann einige Zeit erfordern wie z.B. in der Extraktion, Dieser Aspekt wird im nächsten Kapitel behandelt.

Im weiteren wird angenommen, daß durch das Umschalten kein Ausfall erfolgt, d.h. immer ein absolut zuverlässiger Umschalter vorliegt. Diese Annahme ist in der Verfahrenstechnik meistens nicht erfüllt, wird hier aber eingeführt, weil zum einen sonst die nachfolgenden Modelle sehr unhandlich werden und zum anderen wenig Datenmaterial über durch Umschalten bedingte Ausfälle vorliegt. Um in die nachfolgenden Aussagen keine Verfälschung einzubeziehen, werden durch Umschalten bedingte Ausfälle den Ausfällen der Verarbeitungseinheiten zugeschlagen.

Im folgenden wird angenommen, daß die Reserveeinheiten identisch sind mit der Grundeinheit und insbesondere die gleiche Verfügbarkeit V haben.

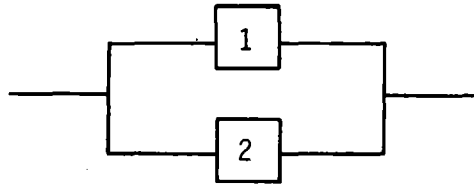
Abschließend soll noch eine weitere Vermessungsgröße, die relative Verbesserung RV , eingeführt werden. RV sei definiert durch

$$RV = \frac{V_{\text{ges}} - V}{V} \quad (7)$$

und kennzeichne die relative Verbesserung der Verfügbarkeit eines aus Reserveeinheiten bestehenden Gesamtsystems V_{ges} gegenüber der Verfügbarkeit einer Einzeleinheit.

4.1 Reserve ohne Anlaufzeit

Reservierung läßt sich durch folgendes Blockdiagramm veranschaulichen:



Zu einer Grundeinheit ist eine Reserveeinheit parallel geschaltet. Die Reservierung erfolge nach unbelasteter Reserve. Der Umschalter sei absolut zuverlässig und benötige keine Zeit (s. o.).

Die Verfügbarkeit des Gesamtsystems V_{ges} und die relative Verbesserung RV ergibt sich nach /1/ zu:

$$V_{\text{ges}} = \frac{2V}{1 + V^2} \quad (8)$$

$$RV = \frac{1 - V}{1 + V^2} \quad (9)$$

Bei belasteter Reserve erhält man

$$V_{\text{ges}_{\text{bel}}} = 2V - V^2 \quad (10)$$

Es ist offensichtlich, daß das Gesamtsystem bei unbelasteter Reserve eine höhere Zuverlässigkeit besitzt als bei der belasteten. Bild 5 zeigt diesen nicht sehr großen Unterschied für verschiedene Einzelverfügbarkeiten sowie die relative Verbesserung bei unbelasteter Reserve, die umso größer wird, je kleiner V ist.

Die Formel für V_{ges} im Fall von $n-1$ Reserveeinheiten lautet nach /1/:

$$V_{\text{ges}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i)! \left(\frac{1}{V} - 1\right)^i}} \quad (11)$$

Werte für V_{ges} und verschiedene n sind in Bild 6 und für die relative Verbesserung in Bild 7 gezeigt. Aus den beiden Bildern ersieht man die schnelle Abnahme der Verbesserung der Zuverlässigkeit mit wachsender Anzahl an Reserveeinheiten. Vor allem bei Verfügbarkeiten einer Einheit von größer 50 % bringt die Reservierung mit größer als zwei Reserveeinheiten keine wesentliche Verbesserung.

Bei belasteter Reservierung ergibt sich die Systemverfügbarkeit von n parallelen Einheiten zu /1/:

$$V_{\text{ges}_{\text{bel}}} = 1 - (1-V)^n \quad (12)$$

Insgesamt treffen auf obige Formeln und Annahmen die gleichen Bemerkungen zu wie am Ende von Kapitel 3. Jedoch sind bei parallelen Systemen die durch verschiedene Standardabweichungen bedingten Unterschiede in der Gesamtverfügbarkeit geringer als bei seriellen Systemen und gehen mit wachsender Anzahl an parallelen Einheiten gegen Null.

4.2 Reserve mit Anlaufzeit

Diesem Abschnitt liegt dasselbe Modell zugrunde wie im ersten Teil von Abschnitt 4.1, jedoch mit einer Ausnahme: Fällt eine Einheit aus, so vergeht bis zur Inbetriebnahme der anderen Einheit eine gewisse Umschaltzeit, auch Umrüstzeit oder Anlaufzeit genannt. Ein Beispiel ist die Extraktion, bei der Umschaltzeiten von mehreren Tagen auftreten können.

Bezüglich der Anlaufzeit sollen dieselben Annahmen wie zur Betriebs- bzw. Reparaturzeit gelten. Die Anlaufzeit ist also eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Die mittlere Umschaltzeit sei t_U . Die Auswirkung dieser Annahme wird weiter unten diskutiert.

Mit Einführung der Umschaltzeit ist die Definition der Verfügbarkeit einer Anlage V (s. Formel (1)) zu modifizieren:

$$V = \frac{t_B}{t_B + t_A + t_U} \quad (13)$$

Nach der Theorie homogener Markoff'scher Ketten /3/ erhält man dann für ein Reservesystem mit einer Reserveeinheit und unbelasteter Reserve (s. Anhang):

$$V_{\text{ges}} = \frac{C + V}{1 + C + \frac{C \cdot (1-V)^2}{2V} \cdot \frac{1}{(1+C)^2} + 1} \quad (14)$$

mit

$$C = \frac{t_A}{t_U} \quad (15)$$

Bild 8 zeigt V_{ges} für verschiedene Werte von C und V . Geht C gegen Null, d.h. die mittlere Umschaltzeit ist bedeutend größer als die mittlere Ausfallzeit, so nähert sich V_{ges} der Einzelverfügbarkeit V . Im Falle von $C \rightarrow \infty$, d.h. die mittlere Umschaltzeit geht gegen Null, erhält man das im vorigen Kapitel behandelte System zweier paral-

leler Einheiten ohne Umschaltzeit. Wie man aus Bild 8 ersieht, liegen die Werte für V_{ges} zwischen V und V_{ges} für $n = 2$ in Bild 6 .

Formel (14) wurde mit Hilfe eines Simulationsmodells bestätigt. Es treffen wieder die gleichen Bemerkungen zu wie am Ende von Kapitel 3 und 4.1 . An dieser Stelle ist die Auswirkung der Exponentialverteilung auf die Umschaltzeit von besonderem Interesse, da sie in der Realität selten erfüllt ist. Im Rahmen einer Parameterstudie wurde sie näher untersucht.

Es zeigte sich wieder, daß die Verteilung selbst keinen großen Einfluß ausübt und die Standardabweichung neben dem Mittelwert die einzige auf die Gesamtverfügbarkeit einwirkende Größe ist. Die durch verschiedene Standardabweichungen bedingten Unterschiede sind jedoch klein und bewegen sich im Bereich von $\pm 5 \%$ der Gesamtverfügbarkeit. Ist die mittlere Umschaltzeit klein gegenüber der mittleren Betriebszeit und Reparaturzeit, so ist auch die Standardabweichung vernachlässigbar.

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse von Simulationsläufen für mehrere Parametersätze. Jedes Modell wurde für einen Parametersatz über 40000 Zeiteinheiten (ZE) simuliert, so daß Werteschwankungen, bedingt durch die Simulation, relativ klein sind ($\approx 1 - 2 \%$).

	n=2 $t_U=5$ ZE			n=2 $t_U=8$ ZE			n=4 $t_U=5$ ZE		
	σ_{t_U} [ZE]	V_{ges} [%]	beide in Reparatur [ZE]	σ_{t_U} [ZE]	V_{ges} [%]	beide in Reparatur [ZE]	σ_{t_U} [ZE]	V_{ges} [%]	alle in Reparatur [ZE]
Weibullverteilung	11,4	40,3	2,42	18,1	32,2	2,28	11,4	49,9	0,13
logarithm. Normalverteilung	10	40,6	2,24	16	32,5	2,01	10	49,9	0,08
Exponentialverteilung	5	41,6	2,13	8	33,6	1,86	5	50,2	0,06
logarithm. Normalverteilung	5	41,8	2,05	8	33,9	1,72	5	50,5	0,05
Erlangverteilung mit Parameter 3	2,89	42,3	2,02	4,62	34,6	1,65	2,89	50,7	0,03
Gleichverteilung im Bereich 0 - 10 ZE	2,89	42,3	2,01				2,89	50,9	0,03
Weibullverteilung	2,6	42,2	2,00	4,23	34,4	1,62	2,6	50,5	0,03
logarithm. Normalverteilung	2,5	42,3	1,96	4	34,2	1,53	2,5	50,6	0,03
Gleichverteilung im Bereich 2 - 8 ZE	1,73	42,5	1,95				2,3	50,7	0,02
Weibullverteilung	1,39	42,5	1,97	2,27	34,6	1,51	1,39	50,6	0,02
Gleichverteilung im Bereich 4 - 6 ZE	0,58	42,5	1,94				0,58	50,7	0,02

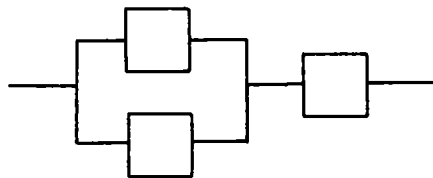
[ZE] = Zeiteinheit

Tabelle 1: Gesamtverfügbarkeit V_{ges} von n parallelen Anlagen mit der mittleren Umschaltzeit t_U in Abhängigkeit von verschiedenen Verteilungen mit der Standardabweichung σ_{t_U} .

(Die Werte wurden mit Simulationsmodellen berechnet. Die mittlere Betriebszeit betrug 5 ZE und die mittlere Reparaturzeit 10 ZE. Beide Zeiten waren exponentialverteilt. Die Spalte "beide in Reparatur" zeigt Werte der mittleren Zeit, in der beide bzw. alle Anlagen ausfielen).

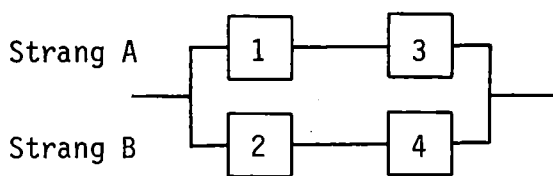
5. Parallel-Serielle Anlagen

Nachdem in den beiden vorhergehenden Kapiteln serielle und parallele Verknüpfungsstrukturen untersucht wurden, sollen nun Modelle von parallel-seriell verbundenen Anlagen entwickelt und analysiert werden. Die einfachste parallel-serielle Verbindungsstruktur besteht aus zwei parallelen und einer dazu seriellen Anlage:

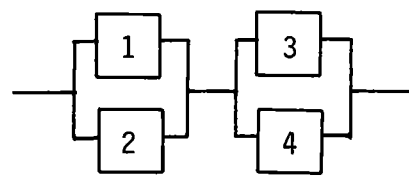


und soll im folgenden mit PS-21 bezeichnet werden.

Bei der Einrichtung redundanter Anlagenkomponenten werden manchmal ganze Anlagenstränge mehrfach ausgelegt. Hierbei entsteht häufig die Frage nach der bezüglich der Verfügbarkeit optimalen Verbindungsstruktur. Bild 2a zeigt ein System, welches aus zwei parallelen Strängen A und B mit jeweils zwei Anlagen besteht. Fällt ein Strang aus, so dient der andere als Reserve. In Bild 2b ist zwischen den beiden Li-



a) unverbundene Reserve
(PS-22_{unverb})



b) verbundene Reserve
(PS-22_{verb})

Bild 2: Parallel-serielle Verbindungsstrukturen

nien noch eine zusätzliche Verbindung eingefügt. Wir wollen das System im Bild 2a bzw. 2b mit $PS-22_{unverb}$ bzw. $PS-22_{verb}$ bezeichnen.

Unter der Voraussetzung absolut zuverlässiger Umschalter zwischen den Anlagen 1 bis 4 hat offensichtlich $PS-22_{verb}$ eine höhere Verfügbarkeit als $PS-22_{unverb}$, denn im Falle des Ausfalls der Anlagen 1 und 4 bzw. 2 und 3 fällt auch das Gesamtsystem $PS-22_{unverb}$, jedoch nicht $PS-22_{verb}$ aus. Im folgenden soll zu beiden Systemen die Gesamtverfügbarkeit abgeleitet werden, um den durch die zusätzliche Verbindung erzielten Verfügbarkeitsgewinn quantitativ bestimmen zu können.

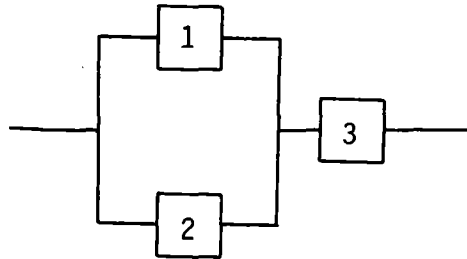
Bei den drei Systemen sollen folgende, im Kapitel 3 und 4 schon ausführlich diskutierte Voraussetzungen gelten:

- jede Anlage wechselt zwischen Betriebs- und Reparaturphasen,
- absolut zuverlässige Umschalter,
- Reparatur- und Betriebszeit sind exponentialverteilte Zufallsgrößen,
- unbelastete Reserve,
- keine Umschaltzeiten.

Bezüglich der Betriebsweise von parallelen und seriellen Verarbeitungsanlagen sei auf die vorhergehenden Kapitel verwiesen.

Die Formeln in den nachfolgenden Abschnitten wurden mit Hilfe der Theorie homogener Markoff'scher Prozesse /3/ abgeleitet. Die entsprechenden Differentialgleichungssysteme sind dem Anhang beigegeben.

a) Das PS-21-System:



Sind die Verfügbarkeiten der drei Anlagen gleich V , dann erhält man für die Gesamtverfügbarkeit

$$V_{\text{ges}} = \frac{V(3-V)}{4-3 \cdot V+V^2} \quad (16)$$

Bild 9 zeigt V_{ges} in Abhängigkeit von V . Der Kurve wird im Bild 9 die Verfügbarkeit eines entsprechenden seriellen Systems mit zwei Einheiten ohne Reserve (Formel (5)) gegenübergestellt. Man erkennt deutlich die durch die Einrichtung der redundanten Anlage erzielte Verbesserung in der Gesamtverfügbarkeit.

Ist die Verfügbarkeit der Anlage 1 gleich der der Anlage 2 und wird diese mit V_A bezeichnet, dann ergibt sich die Gesamtverfügbarkeit V_{ges} gemäß den Gleichungen des Anhangs zu

$$V_{\text{ges}} = \frac{X_A + 1 + D \cdot (X_A + X_3 + 1)}{(X_A + 1)(X_3 + 1) + D(X_3 + 1)(X_A + X_B + 1) + (1 + D) \frac{X_A^2}{2}} \quad (17)$$

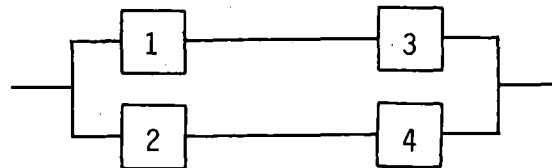
$$\text{mit } D = \frac{t_A}{t_B} ; \quad X_A = \frac{1-V_A}{V_A} ; \quad X_3 = \frac{1-V_3}{V_3} \quad .$$

D ist das Verhältnis aus mittlerer Ausfallzeit und mittlerer Betriebszeit. Für $D=1$ ist V_{ges} in Bild 10 dargestellt. Ist $V_A=1$, so erhält

man den Grenzfall $V_{\text{ges}} = V_3$ und im Falle von $V_3 = 1$ ist V_{ges} gleich der unbelasteten Reserve ohne Anlaufzeit (Formel (8)).

Der Faktor D in Gleichung (17) hat keinen großen Einfluß auf die Gesamtverfügbarkeit. Bei $D=0$ ist die Abweichung gegenüber $D=1$ bei hohen Werten von V_A und V_3 vernachlässigbar und nimmt zu mit $V_A, V_3 \rightarrow 0$. Die Abweichung beträgt zum Beispiel bei $V_A = V_3 = 50\%$ 2,4% und bei $V_A = V_3 = 10\%$ 9%. Bei $D \rightarrow \infty$ ergibt sich ein ähnlicher Sachverhalt, nur sind hier die Differenzen noch kleiner, z.B. bei $V_A = V_3 = 50\%$ 1,3% und bei $V_A = V_3 = 10\%$ 5,1%.

b) Das PS-22_{unverb}-System:



Die Gesamtverfügbarkeit V_{ges} dieses Systems ist, wenn alle V_i für $i=1$ bis 4 gleich V sind,

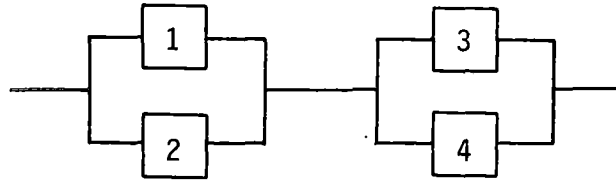
$$V_{\text{ges}} = \frac{V(2-V)}{2-2V+V^2} \quad (18)$$

Mit $V_A = V_1 = V_2$ und $V_B = V_3 = V_4$ ergibt sich V_{ges} zu

$$V_{\text{ges}} = \frac{2V_A V_B (V_A + V_B - V_A V_B)}{(V_A + V_B - V_A V_B)^2 + (V_A V_B)^2} \quad (19)$$

In Bild 11 sind in Abhängigkeit von V_A und V_B verschiedene Werte für V_{ges} aufgetragen.

c) Das PS-22_{verb}-System:



In Analogie zu Abschnitt b) erhält man für die Gesamtverfügbarkeit V_{ges} , wenn alle V_i für $i=1$ bis 4 gleich V sind,

$$V_{\text{ges}} = \frac{V(5-3V+V^2)}{3V^2-4V+4} \quad (20)$$

und im Falle von $V_A=V_1=V_2$ und $V_B=V_3=V_4$:

$$V_{\text{ges}} = \frac{3e^2+5f^2+7ef}{3e^2+8f^2+7ef+\frac{4f^3}{e}} \quad (21)$$

mit $D = \frac{t_A}{t_B}$; $e = 1+D$; $f = \frac{1-V_A}{V_A} + D \frac{1-V_B}{V_B}$.

Bild 12 zeigt Gleichung (21) für $D=1$. Im Gegensatz zum PS-21-System hat der Faktor D hier einen großen Einfluß auf die Gesamtverfügbarkeit V_{ges} .

Vergleicht man die beiden Systeme PS-22_{verb} und PS-22_{unverb}, welches wegen des Faktors D nur bei gleicher Einzelverfügbarkeit möglich ist, so sieht man, daß die zusätzliche Verbindung zwischen den beiden Linien bei niedrigen Verfügbarkeiten eine Verbesserung bis zu 20% bringt (s. Bild 13).

Obige Formeln wurden mit Simulationsmodellen überprüft. Bezüglich des Einflusses der Exponentialverteilung ergab sich dabei ein ähnliches Bild wie bei den Modellen in Kapitel 3 und 4.

Abschließend sei noch auf Näherungsformeln für die Systeme PS-21 und PS-22 hingewiesen. Benutzt man die für serielle und parallele Systeme angegebenen Formeln in Kapitel 3 und 4 in der Art, daß man z.B. für das PS-22_{verb}-System die Gleichung für unbelastete Reserve zweier Anlagen (Formel (8)) in die Gleichung (3) für zwei serielle Anlagen einsetzt, so erhält man die Näherungsformel

$$V_{\text{ges}} = \frac{2V}{2+2V^2-2V} \quad (22)$$

Werte dieser Gleichung weichen bei Verfügbarkeiten von größer 50% nur um 2% von den exakten Werten ab. Je größer die Einzelverfügbarkeit ist, desto kleiner wird die Abweichung.

Beim PS-22_{unverb}-System ist die entsprechende Näherungsformel sogar gleich dem exakten Ausdruck (18). Dies kommt daher, daß in diesem System bei der Anwendung der Näherungsformel alle möglichen Systemzustände und -zustandsübergänge korrekt berücksichtigt werden, während beim PS-22_{verb}-System der Systemzustand "alle Anlagen ausgefallen" in die Näherungsformel mehrfach eingeht. Eine Erweiterung des PS-22_{unverb}-Systems auf n Anlagen pro Linie ist damit einfach durchführbar, wohingegen eine entsprechende Erweiterung der Näherungsformel des PS-22_{verb}-Systems immer ungenauere Werte liefert.

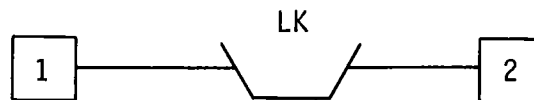
6. Verfügbarkeit von Verarbeitungssystemen mit Zwischenlagern

Neben redundanten Anlagen werden zur Erhöhung der Zuverlässigkeit in der chemischen Verfahrenstechnik auch häufig Zwischenlager eingerichtet mit dem Ziel, Anlagenteile zu entkoppeln.

Die Analyse von Zuverlässigkeitssystemen mit Zwischenlagern wird in der Literatur kaum behandelt. In /6/ wird ein Überblick über den Stand der Technik gegeben und ein analytisches Modell für 1- bzw. 2-Zwischenlagersysteme entwickelt. Das Modell ist ein erster Ansatz zur Analyse der Zuverlässigkeit von Zwischenlagersystemen. Es liefert wegen einschränkender Annahmen sowie numerischer Probleme bei der Berechnung der Zielgrößen nur Näherungswerte und ist daher nur begrenzt anwendbar.

Die unten angegebenen Werte der Verfügbarkeit von Zwischenlagersystemen wurden mit Simulationsmodellen berechnet. Mit den Modellen wurden auch Aspekte wie Einfluß der Exponentialverteilung analysiert.

Ausgangspunkt dieses Kapitels soll das 1-Lagermodell sein:



Zwischen den Verarbeitungseinheiten 1 und 2 befindet sich ein Zwischenlager mit der Lagerkapazität LK. Läuft das Lager, bedingt durch den Ausfall von Anlage 2 über, so muß Anlage 1 stillgelegt werden, solange bis Anlage 2 wieder in Betrieb geht. Fällt dagegen Anlage 1 aus und wird das Lager leer, so muß Anlage 2 stillgelegt werden, bis Anlage 1 wieder anläuft.

Folgende Annahmen werden dem 1-Lagermodell zugrunde gelegt:

- jede Anlage wechselt zwischen Betriebs- und Ausfallphasen,

- die Betriebs- und Ausfallzeiten sind exponentialverteilt,
- das Zwischenlager ist absolut zuverlässig,
- die Ausgangsintensität der Anlage 1 ist gleich der Eingangsintensität der Anlage 2,
- das Zwischenlager ist zu Beginn der Systemzeit leer,
- das Zwischenlager dient nicht als Betriebspuffer oder Vorlagebehälter, sondern nur als Lager für Ausfälle der Anlagen 1 und 2.

Das 1-Lagermodell besitzt folgende Eingabeparameter:

Anfangslagerbestand LB_{anf}

maximale Lagerkapazität LK

mittlere Betriebszeit der Anlage 1 bzw. 2 t_{B_1} bzw. t_{B_2}

mittlere Ausfallzeit der Anlage 1 bzw. 2 t_{A_1} bzw. t_{A_2}

Ausgangsintensität der Anlage 1 AUS_1

Ausgangsintensität der Anlage 2 IN_2

Die Zielgrößen des 1-Lagermodells sind vielfältig, wie z.B. Zuverlässigkeit, mittlere Zeit bis zum ersten Lagerüberlauf bzw. Lagerleerlauf, mittlerer Lagerbestand, Anzahl Lagerüberläufe bzw. Lagerleerläufe in einem bestimmten Zeitraum, usw. Wir wollen uns wieder auf die Verfügbarkeit konzentrieren. Die vorgegebene Verfügbarkeit der Anlage 1 bzw. 2 sei wieder V_1 und V_2 mit

$$V_i = \frac{t_{B_i}}{t_{B_i} + t_{A_i}} \quad i = 1, 2$$

Durch das Zusammenspiel der beiden Anlagen über das Zwischenlager ergeben sich dann beim 1-Lagermodell andere Verfügbarkeiten als die vorgegebenen Verfügbarkeiten V_1 und V_2 . Die resultierenden Verfügbar-

keiten sollen mit V_1^* und V_2^* bezeichnet werden. Es ist offensichtlich, daß $V_1^* \leq V_1$ und $V_2^* \leq V_2$. Mit den Ergebnissen von Kapitel 3 folgt weiterhin

$$V_i^* \leq \min(V_1, V_2) \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

Die Verfügbarkeit des Gesamtsystems V_{ges} ist offensichtlich gleich V_1^* . Somit soll V_1^* unsere zentrale Zielgröße sein.

In der nachfolgenden Parameterstudie wollen wir uns nach Möglichkeit auf die Verfügbarkeiten als Ein/Ausgabegrößen beschränken. Dies ist jedoch wegen der Abhängigkeiten zwischen den Intensitäten, der Lagerkapazität und den mittleren Betriebs- und Reparaturzeiten nur begrenzt möglich. Die Intensitäten werden im folgenden generell auf eine Mengeneinheit pro Zeiteinheit (ME/ZE) festgelegt, um die Parametervielzahl zu reduzieren. Die Auswirkungen dieser und obiger Vereinbarungen - Anfangslagerbestand Null, exponentialverteilte Betriebs- und Ausfallzeiten - werden unten untersucht.

Bevor die mit dem Simulationsmodell erzielten Ergebnisse diskutiert werden, soll noch auf einige Simulationsdaten eingegangen werden. Das Modell ist in der Programmiersprache SIMULA implementiert worden. Die Ausführung und Auswertung wurde auf einer IBM 370/158 bzw. 168 durchgeführt.

Die Auswertung erfolgte nach der Methode der Wiederholungsläufe. Ein Lauf mit einer Simulationszeit von 1000 ZE wurde dabei 50 Mal wiederholt. Damit ergaben sich bei z.B. einer mittleren Reparaturzeit von 5 ZE und Verfügbarkeiten zwischen 10% und 90% für die Zielgröße V_1^* Stichprobenumfänge zwischen ca. 1000 ($V_i=90\%$) und 10000 ($V_i=10\%$). Diese Stichprobenumfänge wurden gewählt, um einerseits möglichst geringe Vertrauensbereiche zu erzielen und andererseits die Rechenzeit nicht zu lang werden zu lassen. Die Abweichungen der Werte bewegten sich im Bereich von $\pm 1-2\%$. Die Rechenzeit für einen Lauf betrug ca. 10 sec. Wegen dieser langen Rechenzeit wurden nur Verfügbarkeitswerte von $V_i = 10, 30, 50, 70$ und 90% für $i = 1, 2$ genommen. Damit ergaben sich 25 Läufe für einen Datensatz.

Bild 14 zeigt die resultierende Verfügbarkeit der ersten Einheit V_1^* in Abhängigkeit der Verfügbarkeiten der beiden Anlagen bei einer mittleren Reparaturzeit von $t_{A1} = t_{A2} = 5$ ZE für verschiedene Lagerkapazitäten LK. Bei der Lagerkapazität $LK = 2$ ME liegen die Werte noch nahe den Werten eines seriellen Systems mit zwei Einheiten (s. Bild 3), und zwar bei hohen Werten der V_i näher als bei niedrigen Werten. Die höchste Verbesserung ergibt sich in dem Bild bei $V_1 = V_2 = 10\%$ mit $V_1^* \approx 8\%$ ($V_{\text{seriell}} = 5\%$).

Ist die Lagerkapazität gleich 40 ME (Bild 14 h), so sind die Werte von V_1^* fast gleich den maximal möglichen nach Ungleichung (23), außer bei $V_1 = V_2 = 70\%$ bzw. 90% , d.h. die beiden Anlagen sind durch das Zwischenlager nahezu entkoppelt. Diese Entkopplung läßt sich schon etwa ab $LK = 10$ ME beobachten.

In Bild 15 ist mit den Werten von Bild 14 die Gesamtverfügbarkeit V_1^* für einige Wertepaare von V_1 und V_2 in Abhängigkeit der Lagerkapazität aufgetragen. Man erkennt, daß die Zunahme der Verfügbarkeit bei den Werten von LK kleiner 10 ME stärker ist als bei Werten größer 10 ME.

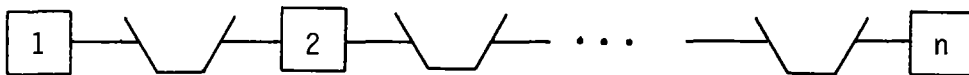
Bild 16 zeigt die Auswirkung der Zeitstruktur der mittleren Reparaturzeit und Betriebszeit bei fester Lagerkapazität auf die Gesamtverfügbarkeit V_1^* . Die Kurven in Bild 16 haben einen ähnlichen Verlauf wie die entsprechenden Kurven in Bild 14. Ist die mittlere Reparaturzeit klein gegenüber der Lagerkapazität, so werden die beiden Anlagen durch das Lager entkoppelt, im umgekehrten Fall verschwindet der Einfluß des Zwischenlagers.

Wie weitere Parameterstudien zeigten, ist V_1^* bei festem Faktor $\frac{t_A}{LK}$ gegenüber Änderungen von LK und t_A invariant, wenn $AUS_1 = IN_2 = 1$ ME. V_1^* ist z.B. bei $t_A = 5$ ZE und $LK = 2$ ME genauso groß wie bei den Werten von $t_A = 10$ ZE und $LK = 4$ ME. Damit kann man also mit den Wertepaaren der Bilder 14 und 16 auch für andere Lagerkapazitäten und Reparaturzeiten die Gesamtverfügbarkeit V_1^* bestimmen.

Weiterhin wurde der Einfluß der Annahme eines leeren Zwischenlagers zu Beginn der Systemzeit untersucht. Dazu wurde für bestimmte Datensätze zu Beginn der Simulation der Zwischenlagerbestand auf den maximalen Wert LK gesetzt. Es zeigten sich, ausgehend von einer Simulationszeit von 1000 ZE, bei einem Verhältnis von $\frac{LK}{t_A} < 4$ und $t_A = 2$ bis 10 ZE keine Unterschiede. Bei größeren Verhältniszahlen sind die beiden Anlagen durch das Zwischenlager entkoppelt, so daß bei Werten von $V_1 \neq V_2$ keine Unterschiede auftreten können. Bei Werten von $V_1 = V_2 = 70\%$ bzw. 90% traten bei größeren Verhältniszahlen Abweichungen bei V_1^* von ca. 1-5% mit $t_A \approx 2-10$ ZE auf.

Die Annahme der exponentialverteilten Betriebs- und Ausfallzeit wirkt sich auf die Zielgröße V_1^* relativ stark aus im Vergleich zu den Modellen in den Kapiteln 3 bis 5. In Bild 17 ist die resultierende Verfügbarkeit V_1^* bei Werten von $V_1 = V_2$ für verschiedene Verteilungen und Standardabweichungen aufgetragen. Es zeigte sich wieder der große Einfluß der Standardabweichung auf die Zielgröße. Als Repräsentant für Verteilungen mit Standardabweichung kleiner Mittelwert wurde die Erlangverteilung und für Standardabweichung größer Mittelwert die logarithmische Normalverteilung gewählt. In weiteren Simulationsläufen mit anderen Verteilungen, aber gleicher Standardabweichung ergaben sich keine Unterschiede. Insgesamt ist somit die Standardabweichung bei praktischen Anwendungen zu berücksichtigen, während die Verteilungsart in den Hintergrund tritt.

Abschließend soll noch auf das n-Lagermodell:



eingegangen werden. Bei diesem Modell sind n Verarbeitungseinheiten in Serie geschaltet, wobei zwischen je zwei Einheiten ein Zwischenlager liegt. Bild 18 zeigt für Werte von $V_1 = V_2 = \dots = V_n$ und LK die resultierende Verfügbarkeit V_1^* bei verschiedenen n. Wie man sieht ist bei LK = 2 ME und $t_A = 5$ ZE der Einfluß von n am größten und bei LK = 10 ME am kleinsten. Dies folgt unmittelbar aus den Bemerkungen zu Bild 16. Bei LK = 10 ME ist nämlich die Entkopplung größer als bei LK = 2 ME.

Wegen des in Abhängigkeit von n exponentiell anwachsenden Rechenzeitaufwands sind die Möglichkeiten einer Parameterstudie mit dem n -Lagermodell begrenzt. Für einen Datensatz und fünf verschiedene Werte von V benötigte die Simulation des 11-Lagermodells 66 min auf einer IBM 370/158.

7. Schlußbemerkungen

In dem Bericht wurden Verfügbarkeitswerte von seriellen und parallelen Verarbeitungssystemen mit und ohne Zwischenlager mit Hilfe von analytischen Modellen aus der Theorie der Markoff'schen Prozesse berechnet. Die Modelle sowie die den Modellen zugrundeliegenden Annahmen wurden mit Simulationsmodellen überprüft.

Es zeigte sich, daß die bei Markoff'schen Modellen bestehende Annahme der Exponentialverteilung einen großen Einfluß auf die Zielgrößen ausübt; denn die Standardabweichung der Modelleingangsgrößen, die bei der Exponentialverteilung gleich dem Mittelwert und damit fest ist, geht als wichtige Eingangsgröße in die Verfügbarkeit ein.

Wegen der langen Rechenzeiten der Simulationsmodelle sind Sensitivitätsanalysen nur in begrenztem Umfang durchführbar. Dies gilt vor allem für Systeme mit mehreren Zwischenlagern und Verarbeitungseinheiten, die wegen ihrer Komplexität analytisch nicht mehr zugänglich sind.

Der Bericht ist eine erste Analyse von Verarbeitungssystemen mit Zwischenlagern und reparierbaren Komponenten. Es wurden nur die wichtigsten Eingangsgrößen untersucht. In Zukunft gilt es, weitere Parameter, wie Schichtbetrieb, Überkapazitäten der Verarbeitungseinheiten, Wartung, usw., in die Analyse miteinzubeziehen. Auch andere Verknüpfungsstrukturen, wie z.B. parallel-serielle Verarbeitungssysteme mit Zwischenlagern und Anlaufzeiten, sind noch zu untersuchen.

8. Literaturverzeichnis

- /1/ B.A. Kozlov, I.A. Ushakov:
Reliability Handbook.
Holt, Rinehart and Winston, London, 1970

- /2/ B.W. Gnedenko, u.a.:
Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie I.
Akademie-Verlag, Berlin, 1968

- //3/ K. Reinschke:
Zuverlässigkeit von Systemen, Band 1.
VEB Verlag Technik, Berlin, 1973

- /4/ R.E. Barlow, F. Proschan:
Statistical Theory of Reliability and Life Testing.
Holt, Rinehart and Winston, London, 1975

- /5/ K.-W. Gaede:
Zuverlässigkeit: Mathematische Modelle.
Hanser Verlag, München, 1977

- /6/ A. Kallweit, F. Schumacher:
An Analytical Model for Computation of Reliability of Waste
Management Facilities with Intermediate Storages.
KFK 2384, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1977

- /7/ F. Schumacher:
Beschreibung und Auswertung diskreter dynamischer Systeme.
KFK 2635, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1978

A n h a n g

Zustandsdiagramme der Modelle im Kapitel 4 und 5

In der Anwendung der Theorie homogener Markoff'scher Prozesse bei der Zuverlässigkeitsanalyse von Systemen geht man gewöhnlich von Zustandsdiagrammen aus. Mit diesen lassen sich einfach die Modellzustandsgleichungen bestimmen, aus denen man dann die Formel für die Verfügbarkeit ableiten kann.

Bei Markoff'schen Zuverlässigkeitsmodellen wird ein System in seinen möglichen Zuständen $z_1, z_2, \dots, z_n$ mit der endlichen Anzahl n betrachtet. Der Zustand $Z(t)$ des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt $t \geq 0$ ist dabei eine Zufallsgröße mit

$$\text{Prob}(Z(t) = z_i) = p_i(t), \quad \sum_{i=1}^n p_i(t) = 1 \quad .$$

Die sogenannte Markoff-Eigenschaft ist dann definiert durch

$$\text{Prob}(Z(t) = z_i \mid Z(t_1) = z_1, \dots, Z(t_n) = z_n) =$$

$$\text{Prob}(Z(t) = z_i \mid Z(t_n) = z_n) \quad ,$$

für alle $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ und für alle möglichen Werte der Zufallsgröße Z , d.h. ist der "gegenwärtige" Zustand $Z(t_n)$ gegeben, dann ist der zukünftige Zustand $Z(t)$ nur von diesem Zustand und nicht den weiter zurückliegenden Zuständen beeinflusst.

Die Übergangsrate $a_{ji}(t)$ vom Zustand z_i in den Zustand z_j zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $i \neq j$ ist definiert durch

$$a_{ji}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}(Z(t+\Delta t) = z_j \mid Z(t) = z_i)}{\Delta t}$$

und für

$$a_{ii}(t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji}(t) \quad .$$

Existieren diese Übergangsraten, so kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Systems für alle $t > 0$ aus den Anfangswerten

$$p_j(0) = \text{Prob}(Z(+0) = z_j) \quad , \quad \sum_{j=1}^n p_j(0) = 1$$

und dem Differentialgleichungssystem

$$(A1) \quad \dot{p}_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ji}(t) p_i(t) \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

berechnen.

Die Anwendung des Konzepts soll anhand der unbelasteten Reserve ohne Umschaltzeit (Kapitel 4.1) gezeigt werden. Das System besitzt folgende drei Zustände:

z_1 : eine Anlage in Betrieb, eine Anlage bereit

z_2 : eine Anlage in Betrieb, eine Anlage ausgefallen

z_3 : beide Anlagen ausgefallen .

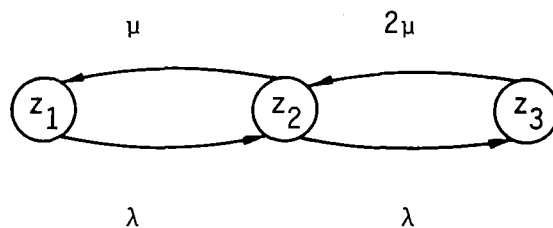
Bei exponentialverteilten Betriebs- bzw. Ausfallzeiten existieren die Übergangsraten und sind konstant (s. Kapitel 2). Man nennt die Übergangsrate vom Betrieb einer Anlage zum Ausfall derselben bzw. vom Ausfall zum Betrieb im allgemeinen:

λ bzw. μ , d.h. z.B. in unserem Anwendungsbeispiel

$a_{21} = \lambda$ und $a_{12} = \mu$. Weiterhin gilt

$a_{23} = \lambda$ und $a_{32} = 2\mu$.

Ein Zustandsdiagramm ist ein gerichteter Graph, dessen n Knoten die n verschiedenen Zustände des Systems darstellen. Die gerichteten Kanten repräsentieren die Übergangsraten. Das Zustandsdiagramm der unbelasteten Reserve sieht dann so aus



Mit Hilfe dieses Zustandsdiagramms kann man sehr einfach das Differentialgleichungssystem (A1) angeben. Zu unserem Beispiel:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu \\ 0 & \lambda & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit diesem Gleichungssystem lassen sich alle Zuverlässigkeitskenngrößen des Systems berechnen (s. /3/). Wir interessieren uns jedoch nur für die Verfügbarkeit des Systems im Gleichgewichtszustand. Mit

$$\frac{d p_i}{dt} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

und der Bedingung

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1$$

erhält man dann

$$p_1 = \frac{2\mu^2}{2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2}$$

$$p_2 = \frac{2\mu\lambda}{2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2}$$

$$p_3 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2} \quad .$$

Die Verfügbarkeit des Systems ist

$$V_{\text{ges}} = p_1 + p_2 = \frac{2\mu^2 + 2\mu\lambda}{2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2} \quad .$$

Die Verfügbarkeit einer einzelnen Anlage ist definiert durch

$$V = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

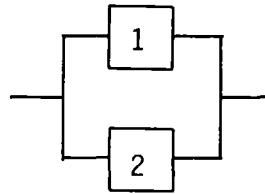
und man erhält schließlich

$$V_{\text{ges}} = \frac{2V}{1+V^2}$$

und damit Formel (8).

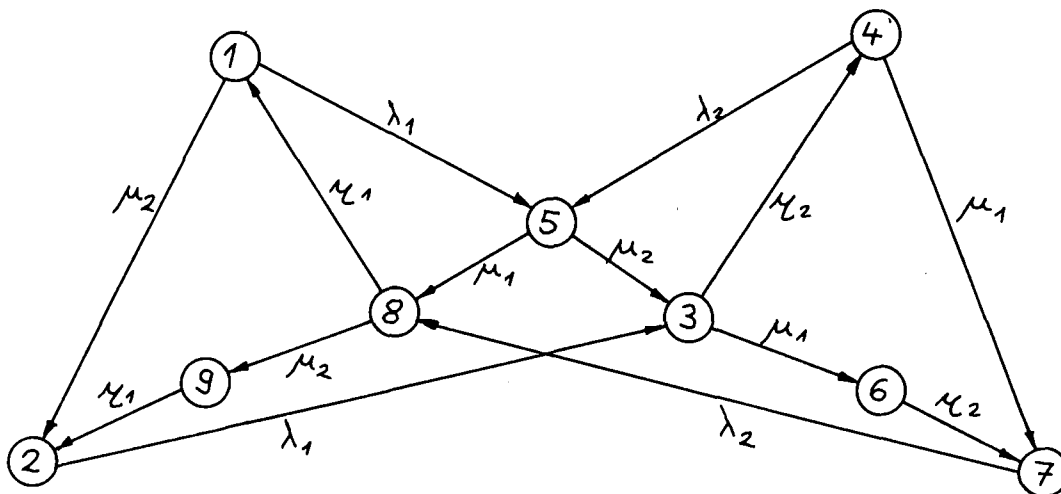
In völlig analoger Weise lassen sich ausgehend von den Zustandsdiagrammen der einzelnen Modelle die entsprechenden Verfügbarkeitsausdrücke berechnen. Deshalb werden im folgenden nur die Zustandsdiagramme angegeben.

Reserve mit Anlaufzeit:

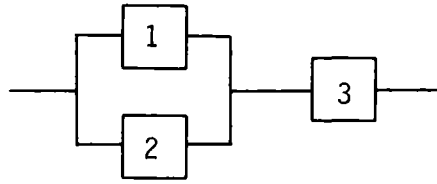


Zustände:

	Anlage 1	Anlage 2
z_1	Betrieb	Ausfall
z_2	Betrieb	Warten
z_3	Ausfall	Umschalten
z_4	Ausfall	Betrieb
z_5	Ausfall	Ausfall
z_6	Warten	Umschalten
z_7	Warten	Betrieb
z_8	Umschalten	Ausfall
z_9	Umschalten	Warten

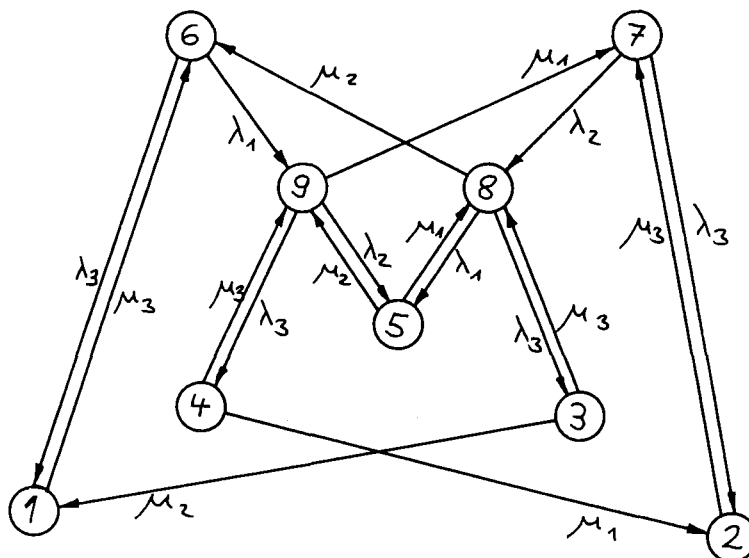


PS-21-System:

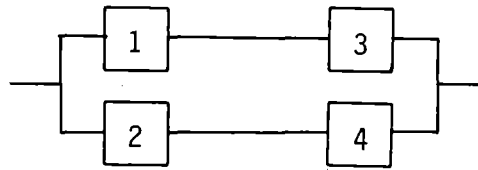


Zustände:

	Anlage 1	Anlage 2	Anlage 3
z_1	Betrieb	Warten	Ausfall
z_2	Warten	Betrieb	Ausfall
z_3	Betrieb	Ausfall	Ausfall
z_4	Ausfall	Betrieb	Ausfall
z_5	Ausfall	Ausfall	Betrieb
z_6	Betrieb	Warten	Betrieb
z_7	Warten	Betrieb	Betrieb
z_8	Betrieb	Ausfall	Betrieb
z_9	Ausfall	Betrieb	Betrieb

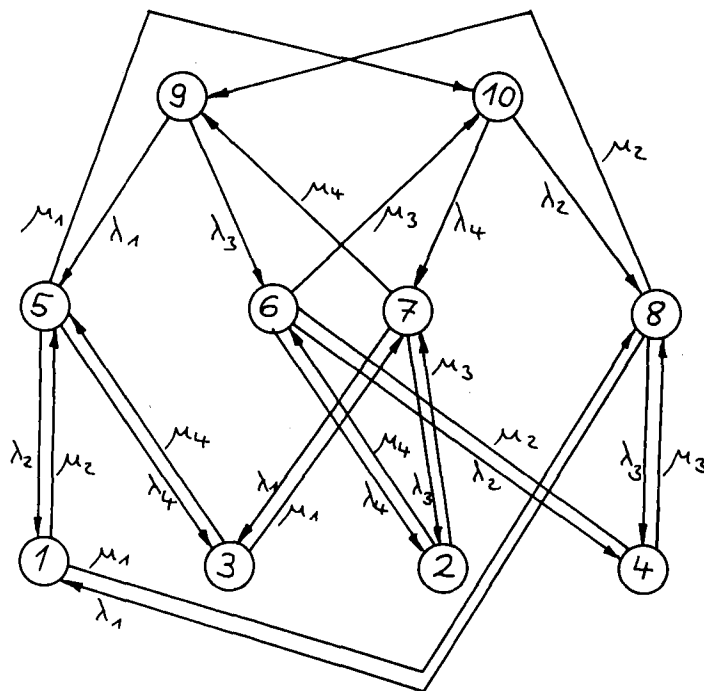


PS-22_{unverb}-System:

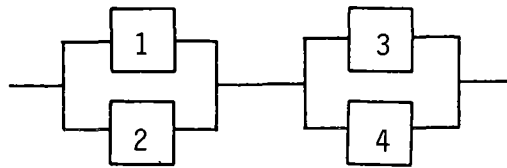


Zustände:

	Anlage 1	Anlage 2	Anlage 3	Anlage 4
z_1	Ausfall		Ausfall	
z_2		Ausfall		Ausfall
z_3	Ausfall			Ausfall
z_4		Ausfall	Ausfall	
z_5	Ausfall		Betrieb	Betrieb
z_6		Ausfall	Betrieb	Betrieb
z_7	Betrieb	Betrieb		Ausfall
z_8	Betrieb	Betrieb	Ausfall	
z_9	Betrieb	Betrieb	Warten	Warten
z_{10}	Warten	Warten	Betrieb	Betrieb

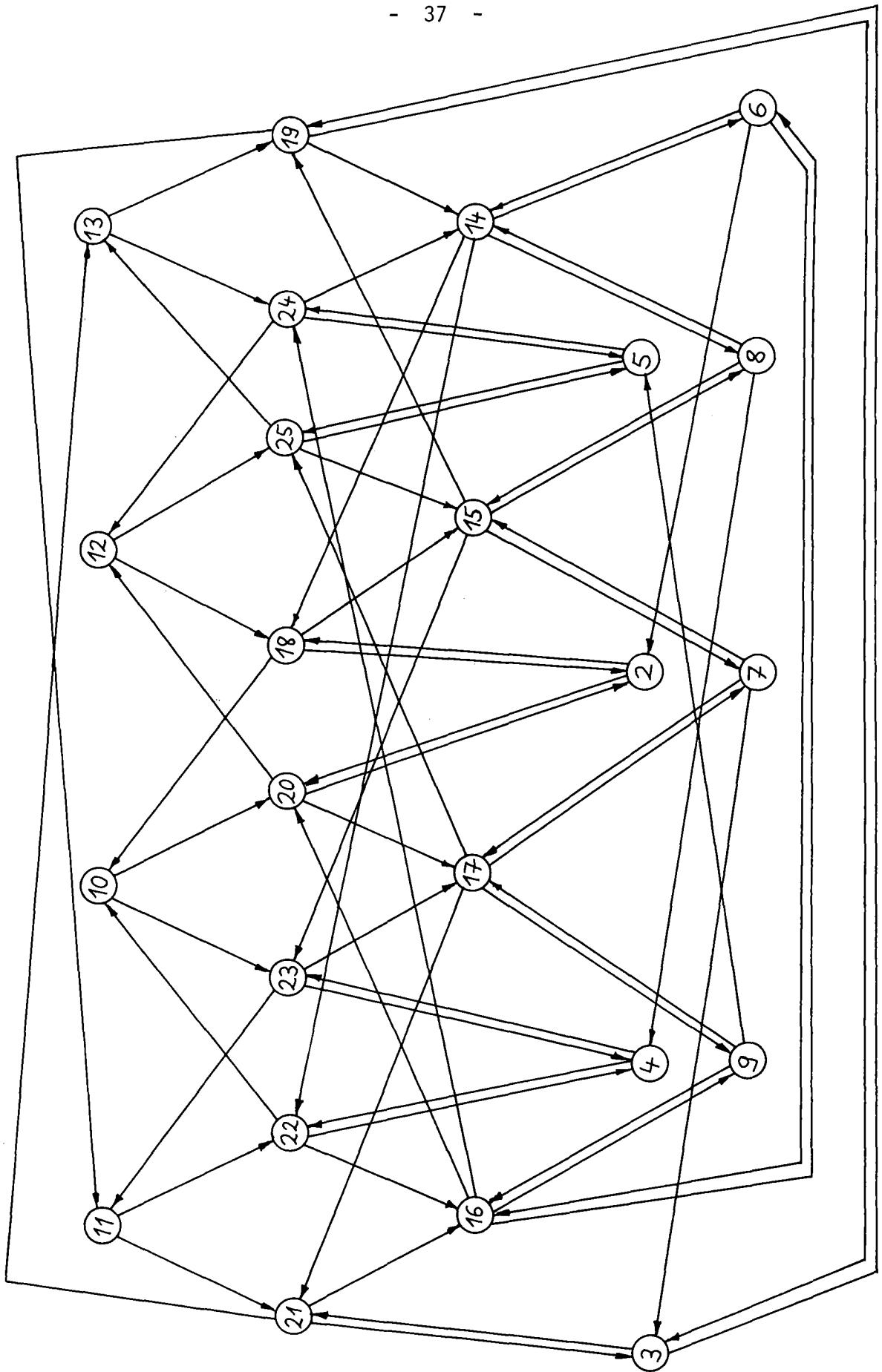


PS-22_{verb}-System



Zustände:

	Anlage 1	Anlage 2	Anlage 3	Anlage 4
z ₁	Ausfall	Ausfall	Ausfall	Ausfall
z ₂	Ausfall	Ausfall	Betrieb	Warten
z ₃	Ausfall	Ausfall	Warten	Betrieb
z ₄	Ausfall	Ausfall	Betrieb	Ausfall
z ₅	Ausfall	Ausfall	Ausfall	Betrieb
z ₆	Betrieb	Warten	Ausfall	Ausfall
z ₇	Warten	Betrieb	Ausfall	Ausfall
z ₈	Betrieb	Ausfall	Ausfall	Ausfall
z ₉	Ausfall	Betrieb	Ausfall	Ausfall
z ₁₀	Betrieb	Warten	Betrieb	Warten
z ₁₁	Betrieb	Warten	Warten	Betrieb
z ₁₂	Warten	Betrieb	Betrieb	Warten
z ₁₃	Warten	Betrieb	Warten	Betrieb
z ₁₄	Betrieb	Ausfall	Betrieb	Ausfall
z ₁₅	Betrieb	Ausfall	Ausfall	Betrieb
z ₁₆	Ausfall	Betrieb	Betrieb	Ausfall
z ₁₇	Ausfall	Betrieb	Ausfall	Betrieb
z ₁₈	Betrieb	Ausfall	Betrieb	Warten
z ₁₉	Betrieb	Ausfall	Warten	Betrieb
z ₂₀	Ausfall	Betrieb	Betrieb	Warten
z ₂₁	Ausfall	Betrieb	Warten	Betrieb
z ₂₂	Betrieb	Warten	Betrieb	Ausfall
z ₂₃	Betrieb	Warten	Ausfall	Betrieb
z ₂₄	Warten	Betrieb	Betrieb	Ausfall
z ₂₅	Warten	Betrieb	Ausfall	Betrieb



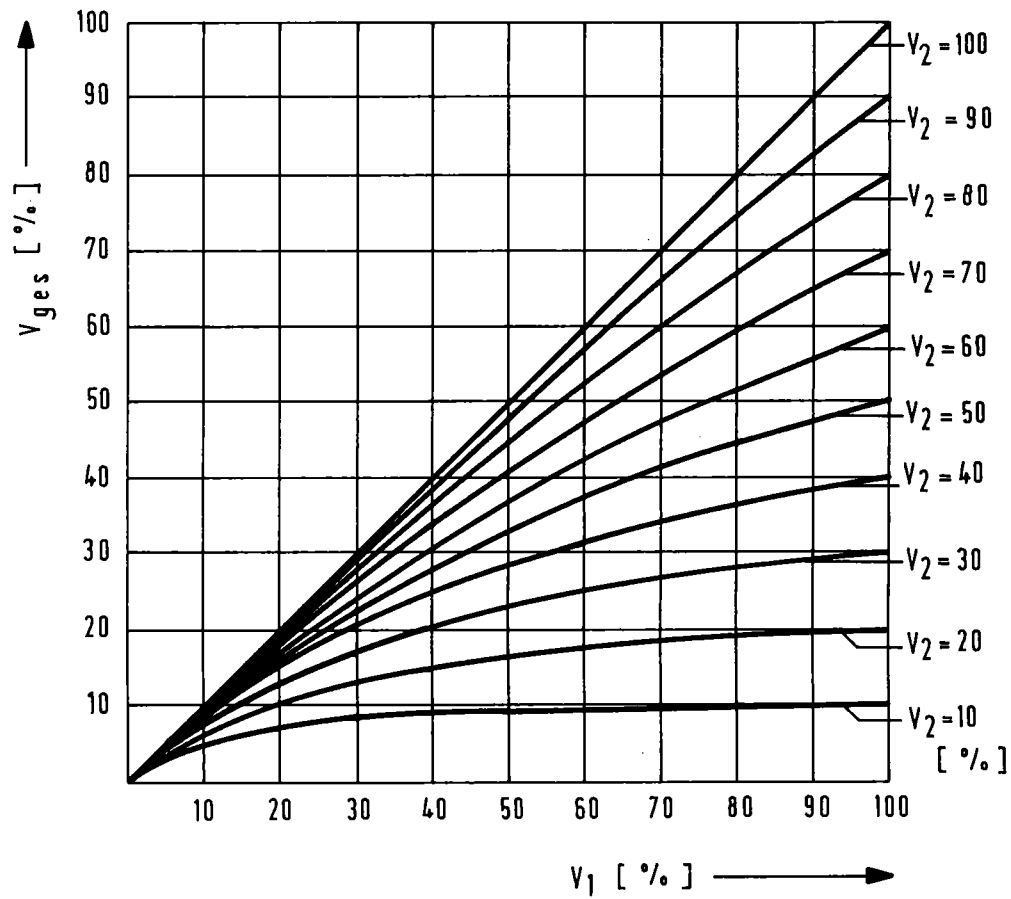


Bild 3: Verfügbarkeit V_{ges} zweier serieller Anlagen mit den Einzelverfügbarkeiten V_1 und V_2 (Formel (3))

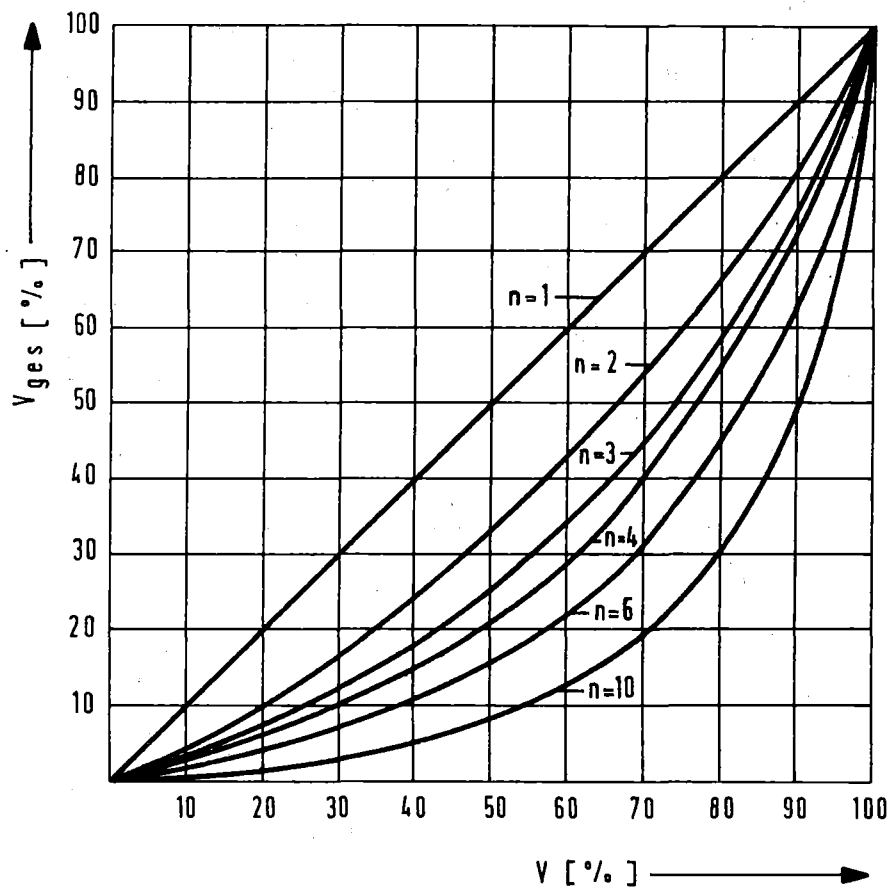


Bild 4: Verfügbarkeit V_{ges} von n seriellen Anlagen. Die Verfügbarkeit einer Anlage ist V und für alle Anlagen gleich (Formel (3))

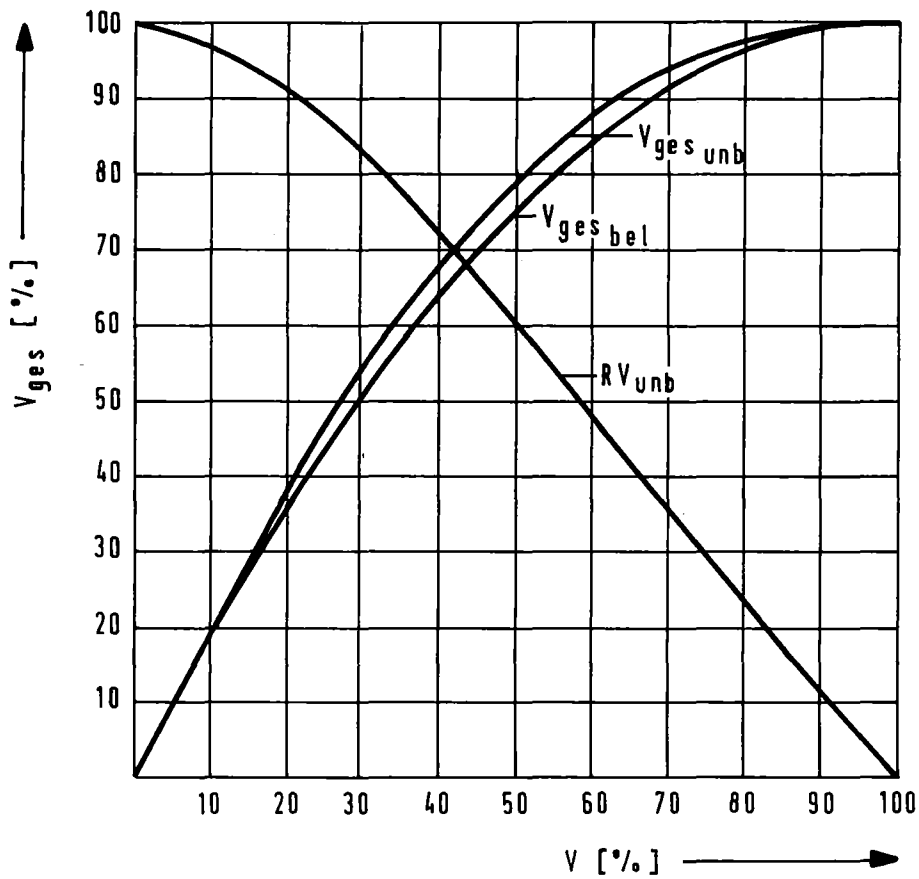


Bild 5: Verfügbarkeit V_{ges_bel} (V_{ges_unb}) zweier paralleler Anlagen mit gleicher Verfügbarkeit V in belasteter (unbelasteter) Reserve und relative Verbesserung RV_{unb} bei unbelasteter Reserve (Formeln (8) und (10))

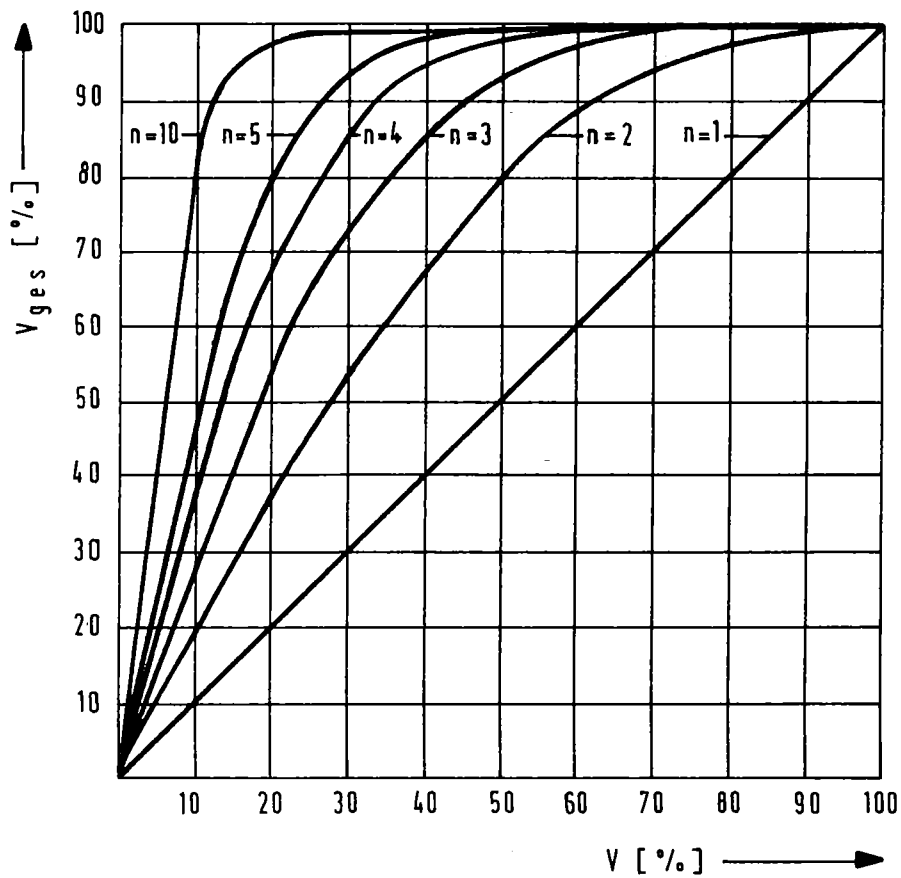


Bild 6: Verfügbarkeit V_{ges} von n parallelen Anlagen in unbelasteter Reserve. Die Verfügbarkeit einer Anlage ist V und für alle Anlagen gleich (Formel (11))

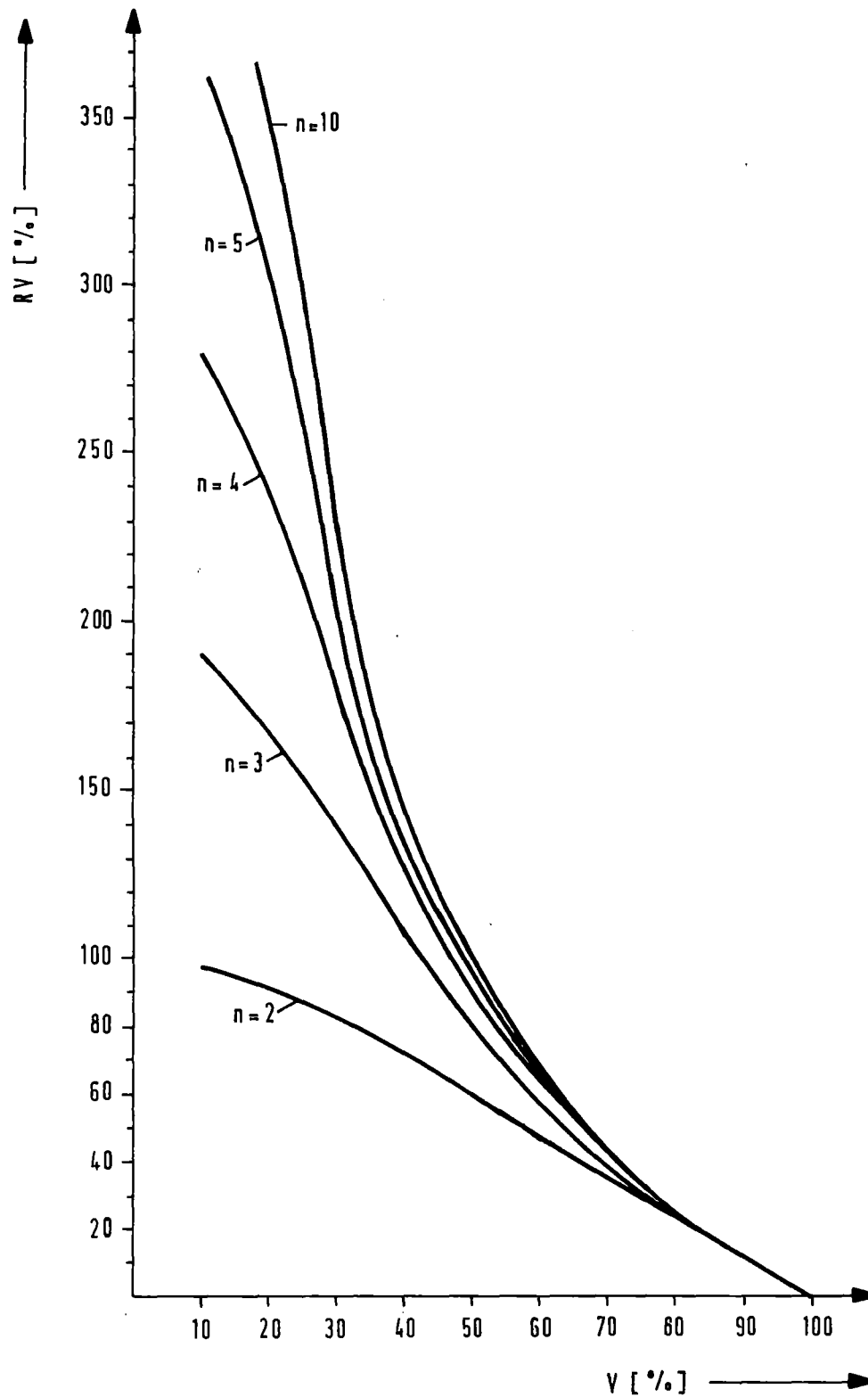


Bild 7: Relative Verbesserung der Verfügbarkeit bei n parallelen Anlagen in unbelasteter Reserve und der Verfügbarkeit einer Anlage V

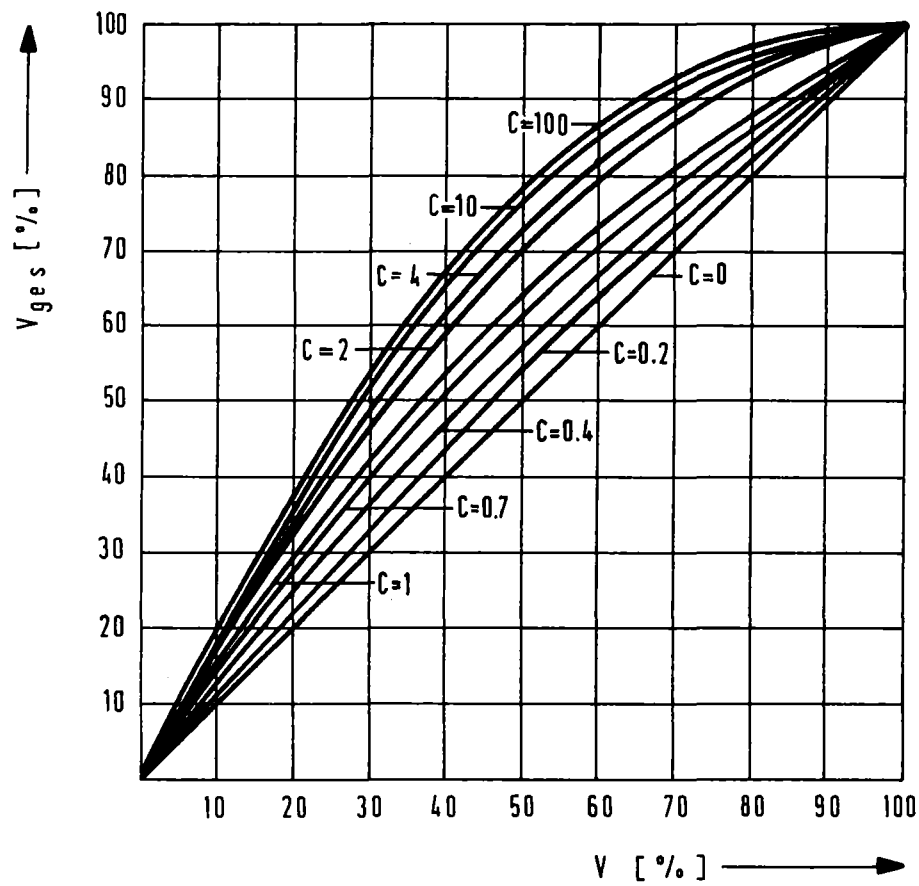


Bild 8: Verfügbarkeit V_{ges} zweier paralleler Anlagen mit Umschaltzeiten (Formel (14))

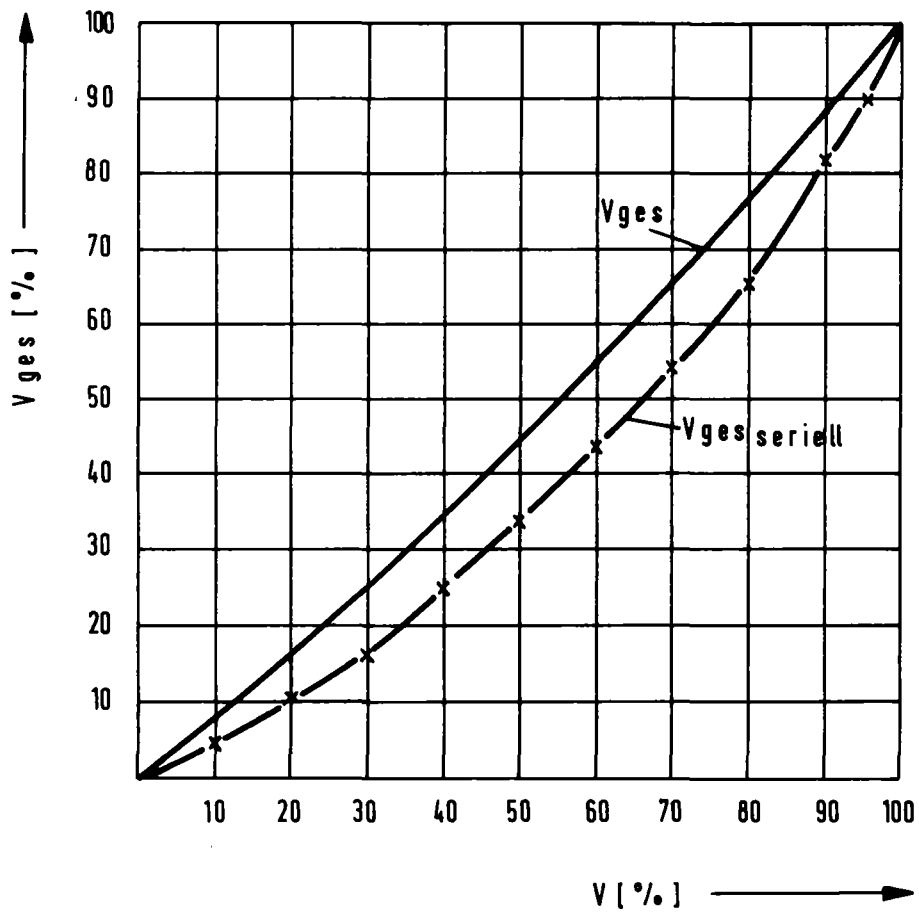


Bild 9: Verfügbarkeit V_{ges} des PS-21-Systems (Formel (16)) und Verfügbarkeit $V_{ges\,seriell}$ eines Systems mit zwei seriellen Einheiten

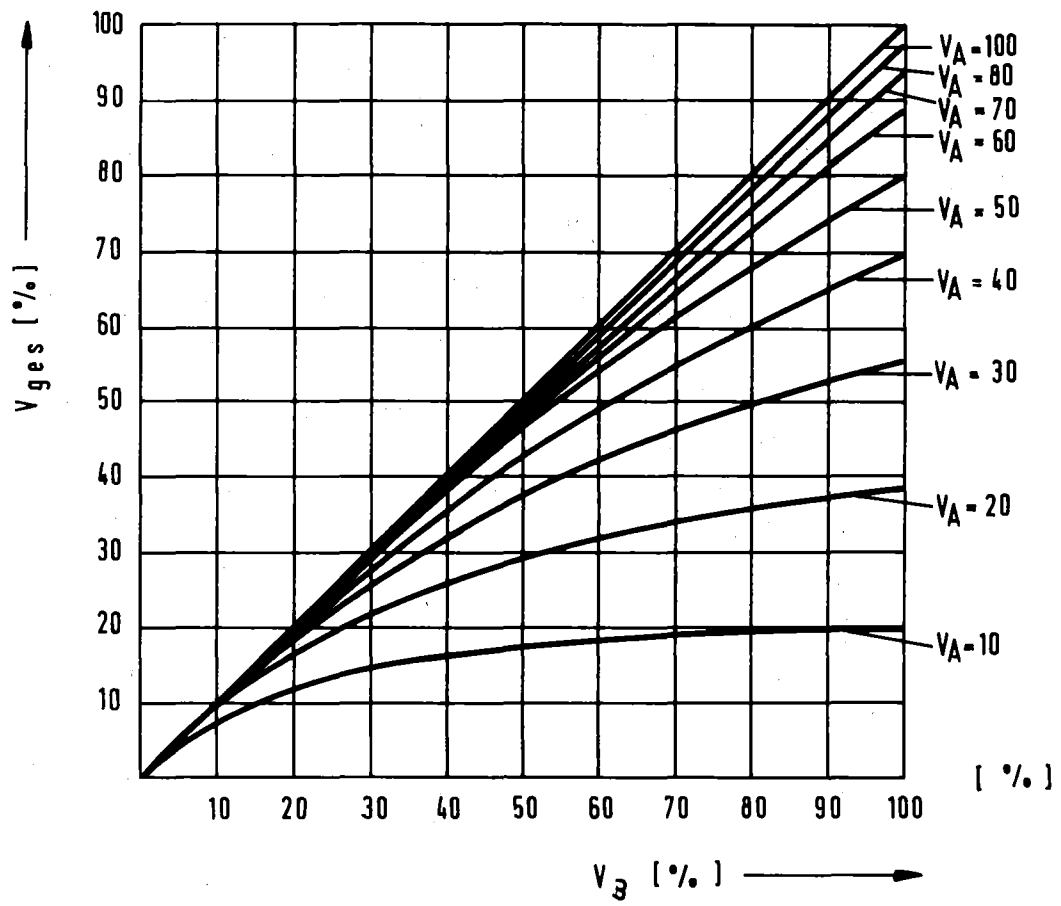


Bild 10: Gesamtverfügbarkeit V_{ges} des PS-21-Systems in Abhängigkeit der Einzelverfügbarkeiten V_A und V_3 mit $D=1$ (Formel (17))

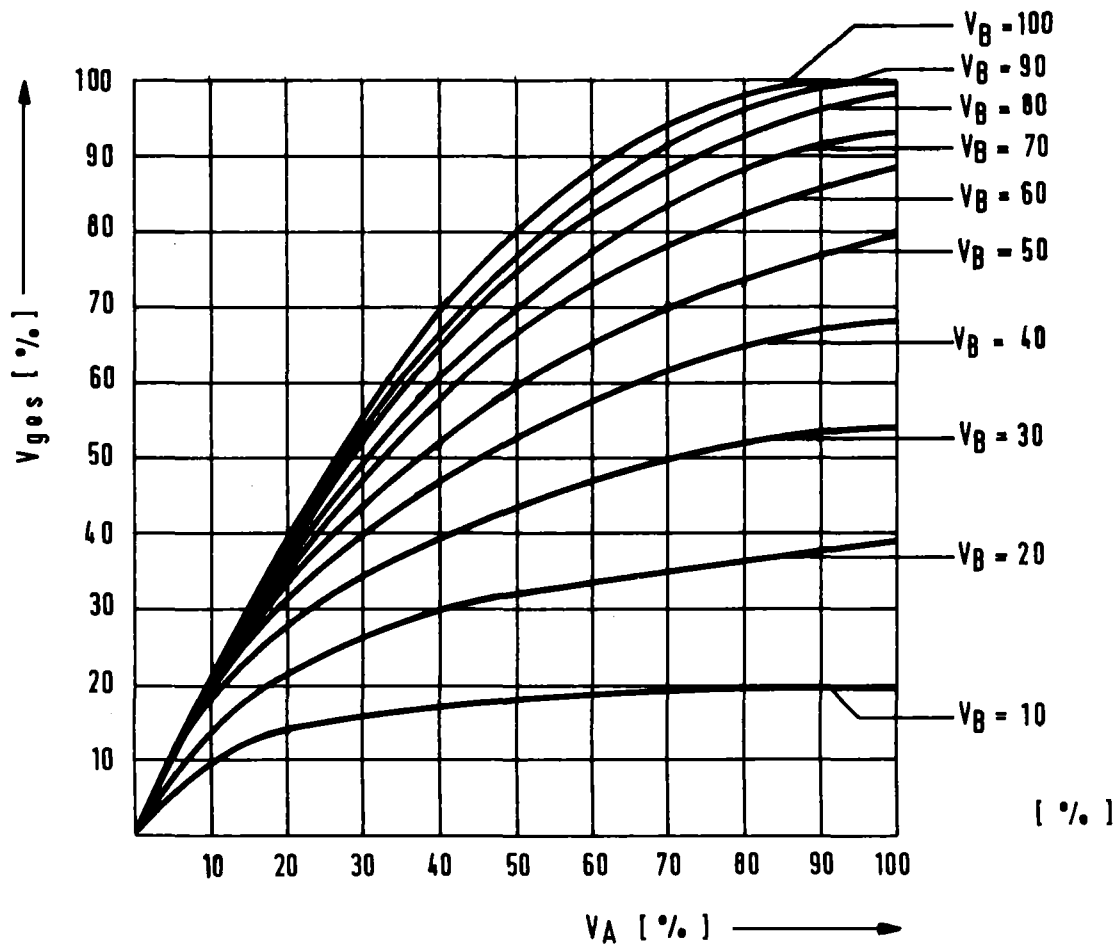


Bild 11: Gesamtverfügbarkeit V_{ges} des PS-22_{unverb}-Systems (Formel (19))

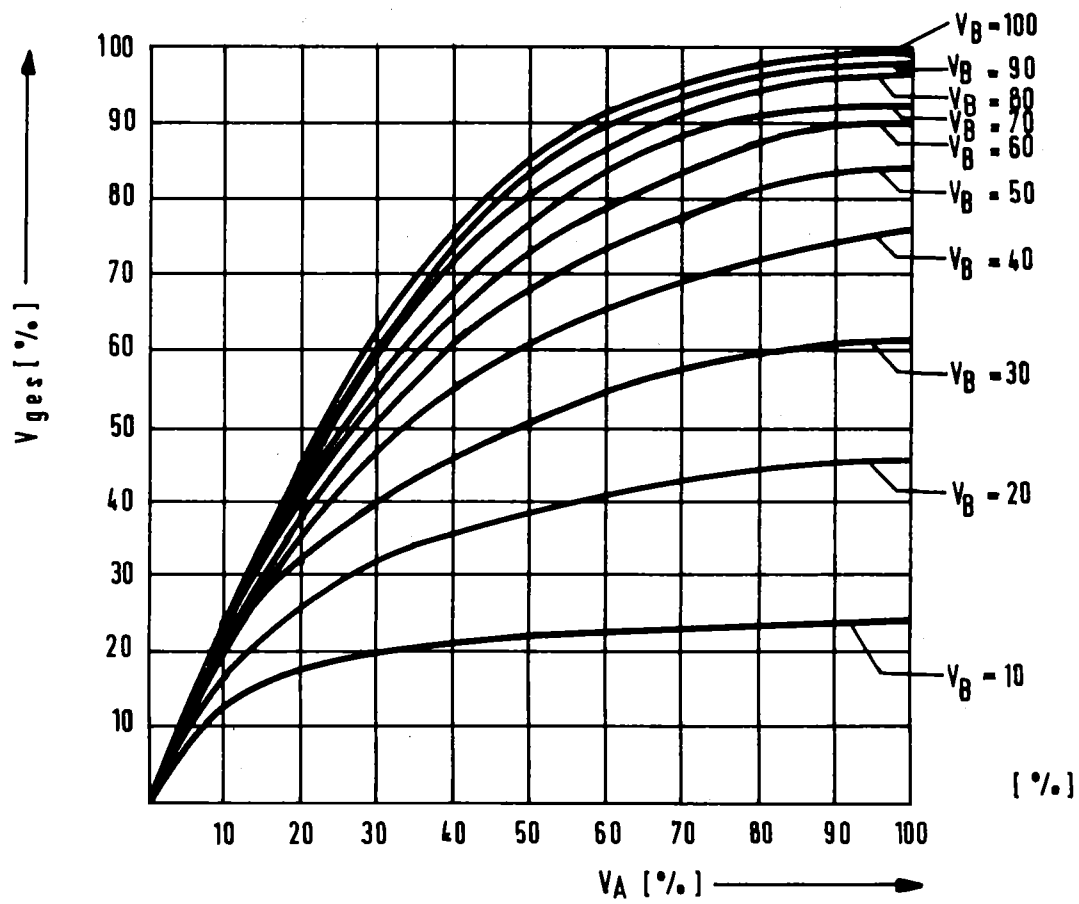


Bild 12: Gesamtverfügbarkeit des PS-22_{verb}-Systems mit D=1 (Formel (21))

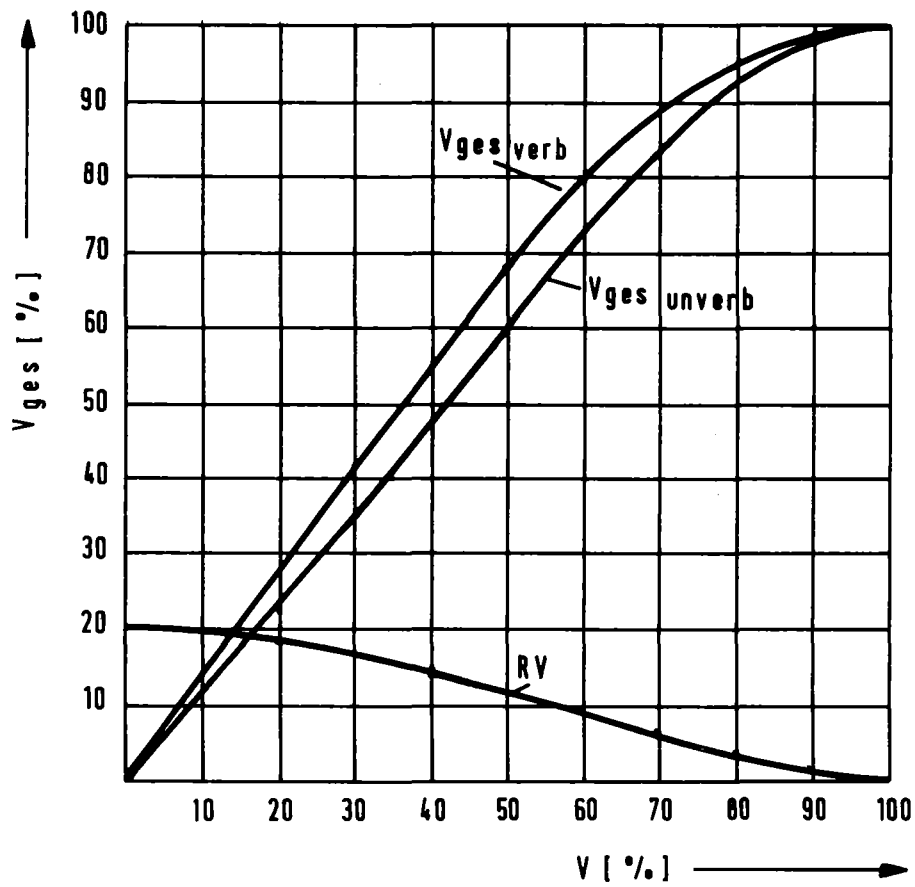
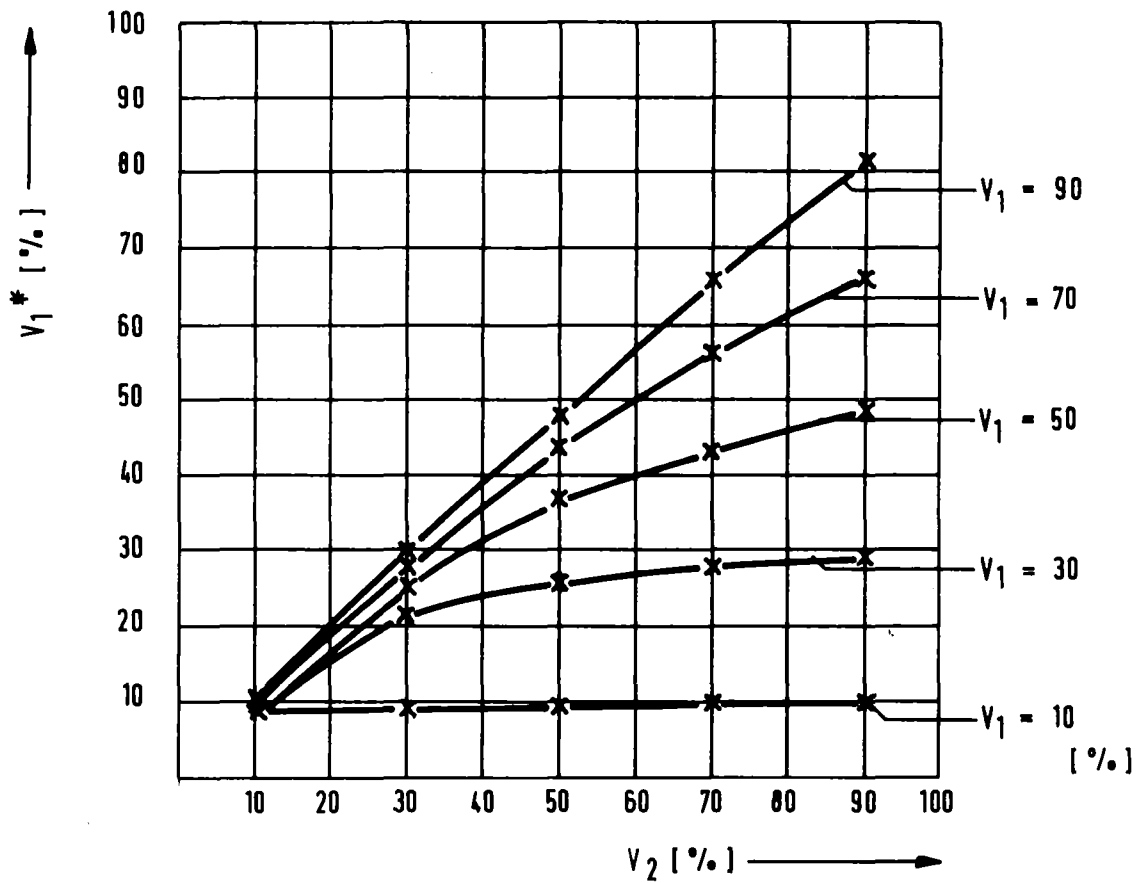
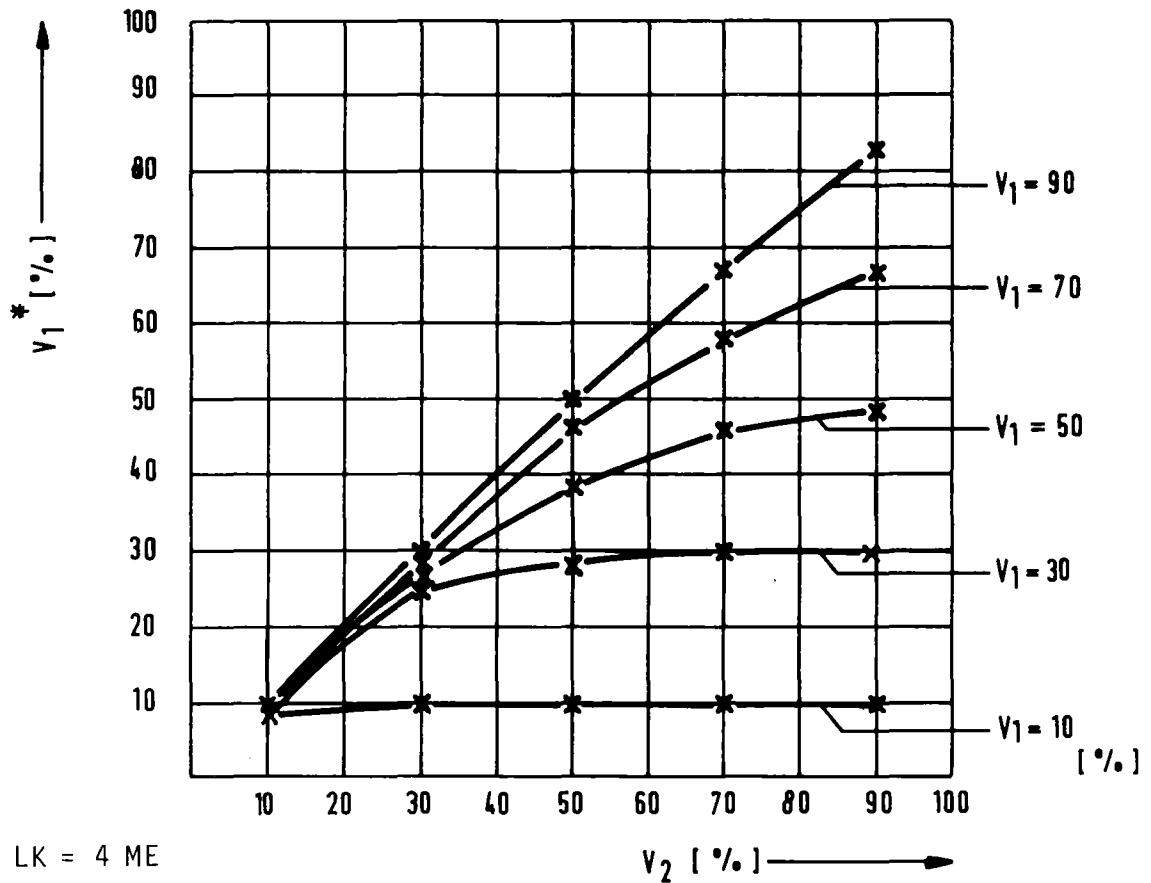


Bild 13: Gesamtverfügbarkeit des PS-22_{verb}(PS-22_{unverb})-Systems
 $V_{gesverb}(V_{gesunverb})$ und relative Verbesserung
 $RV = (V_{gesverb} - V_{gesunverb}) / V_{gesverb}$ (Formeln (18) und (20))

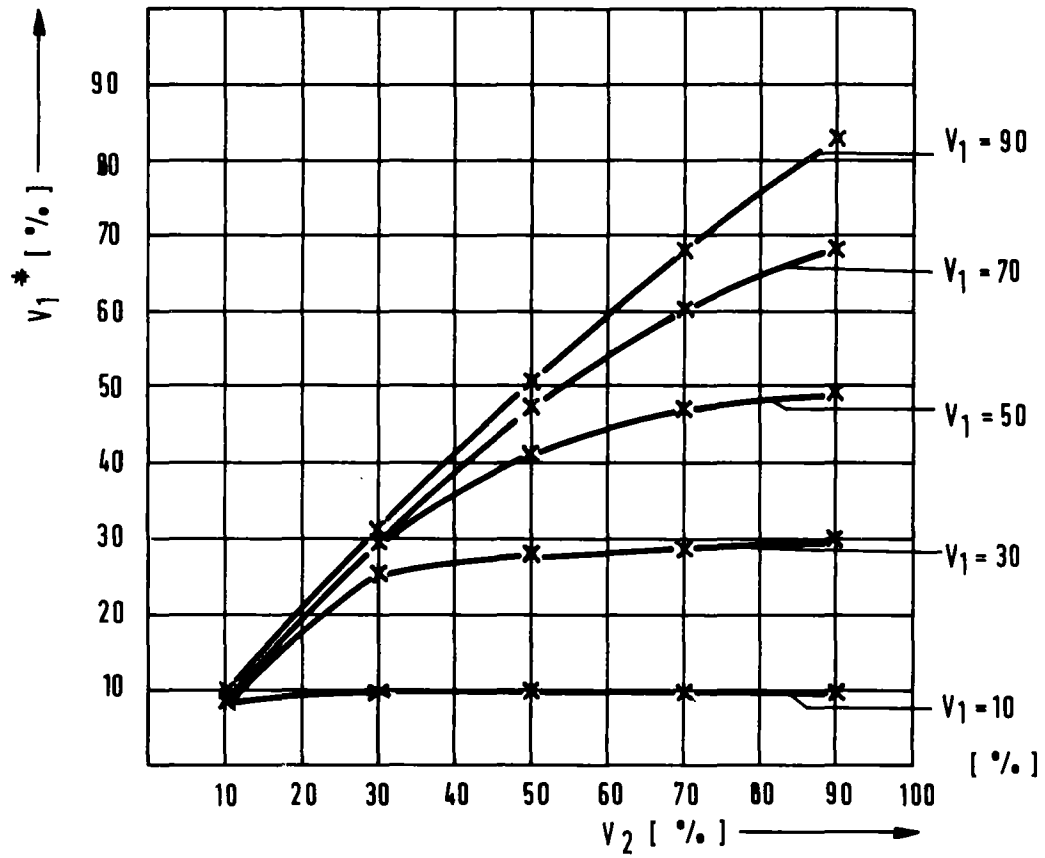


a) $LK = 2$ ME

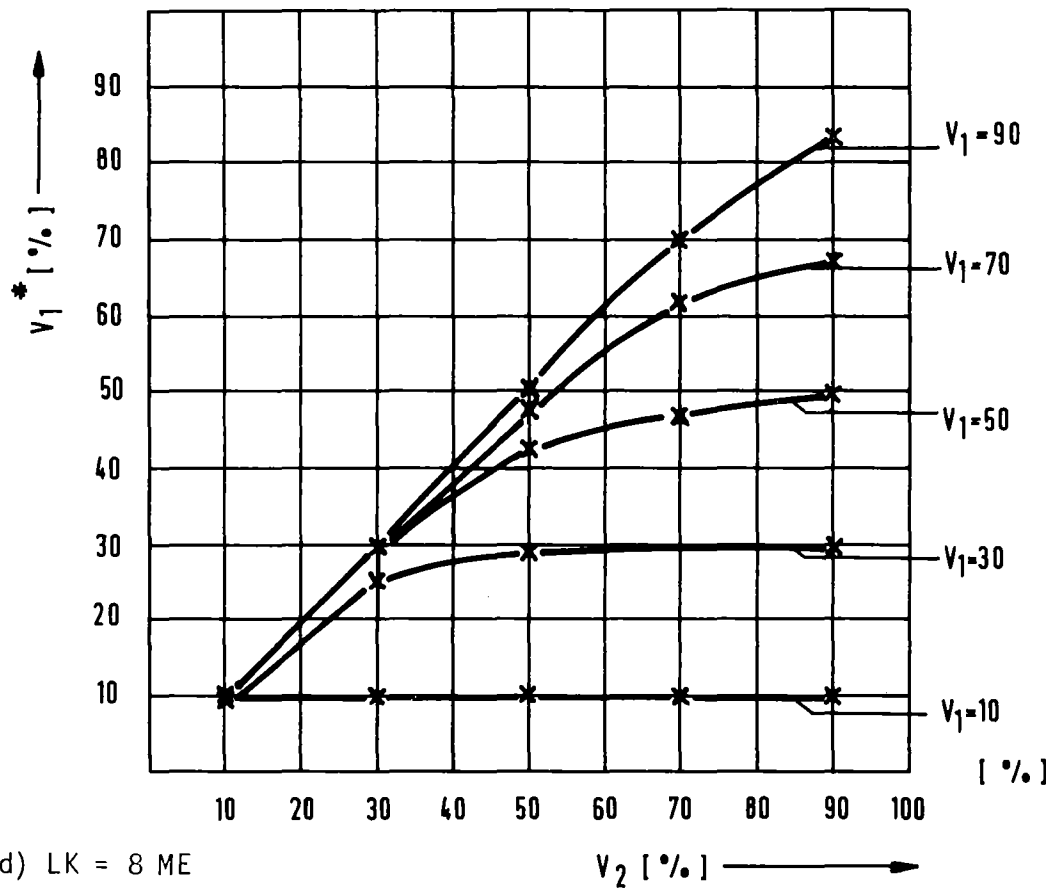


b) $LK = 4$ ME

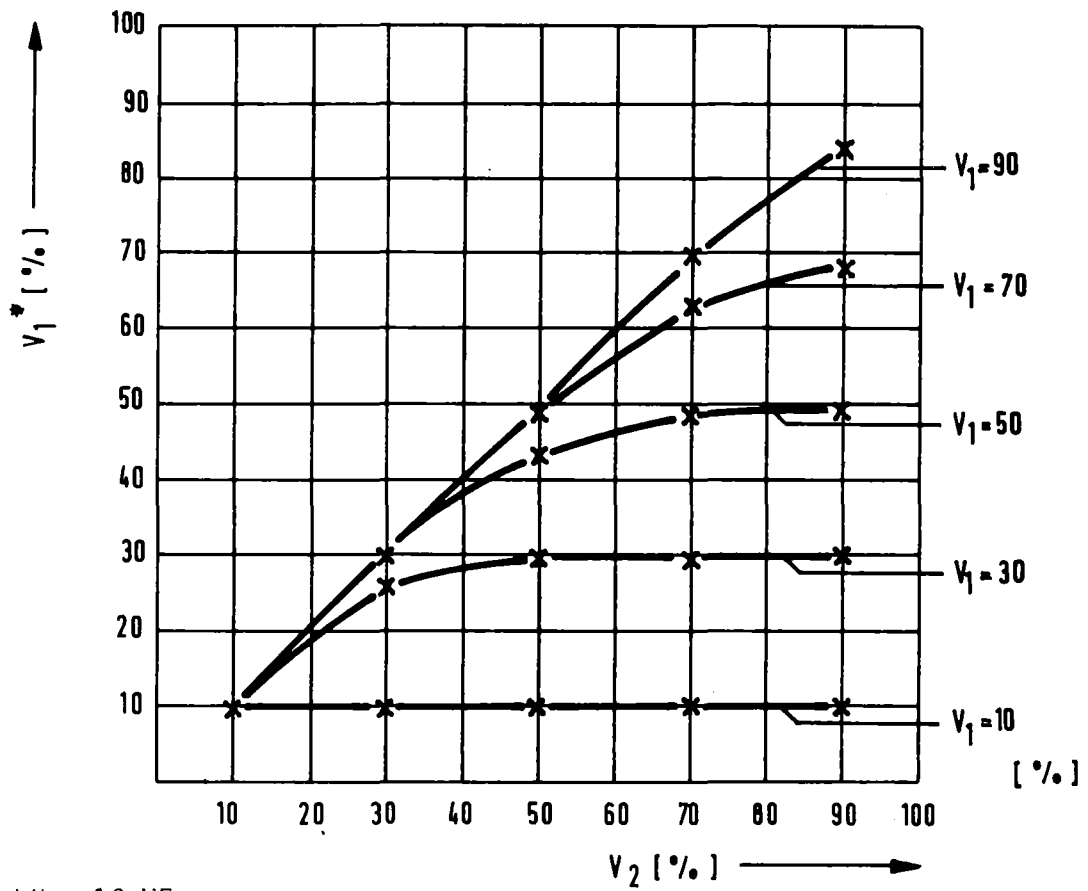
Bild 14: Verfügbarkeit V_1^* mit der mittleren Reparaturzeit von V_1 und V_2 gleich 5 ZE und der Lagerkapazität LK (Kapitel 6)



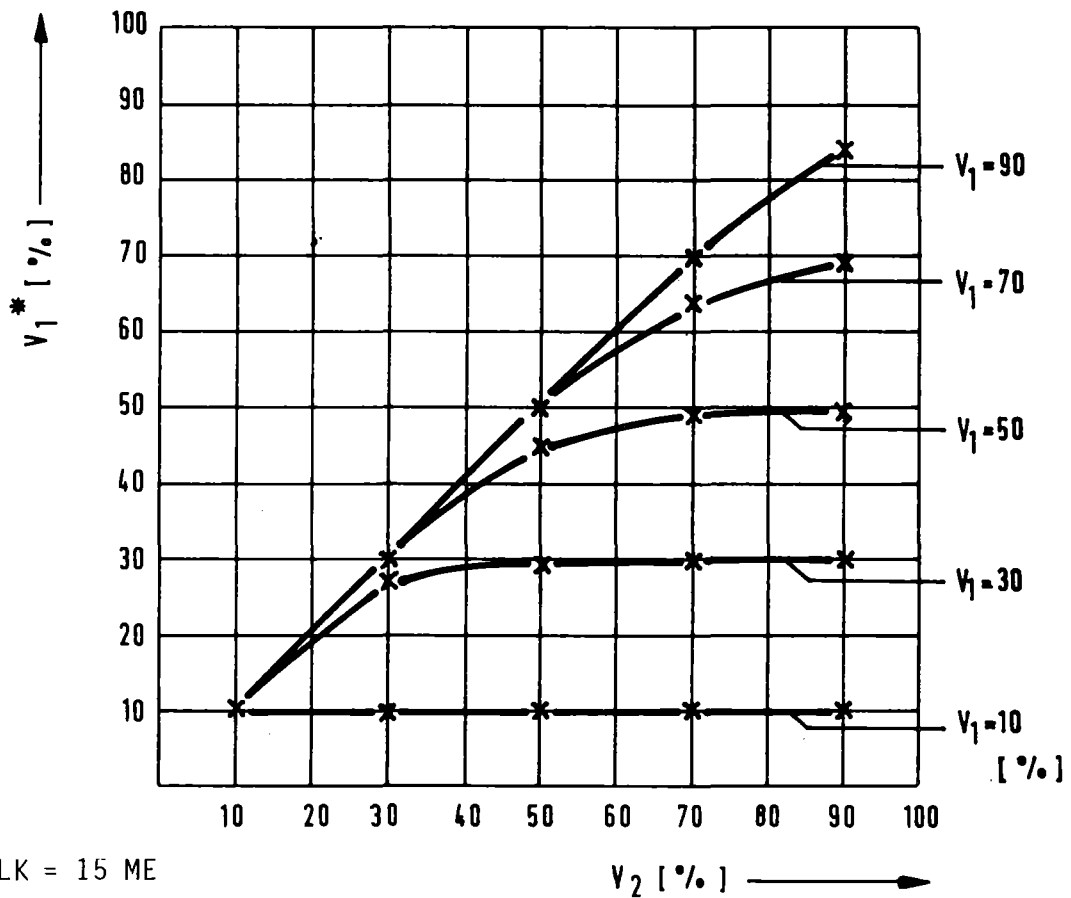
c) $LK = 6$ ME



d) $LK = 8$ ME



e) $LK = 10$ ME



f) $LK = 15$ ME

Bild 14

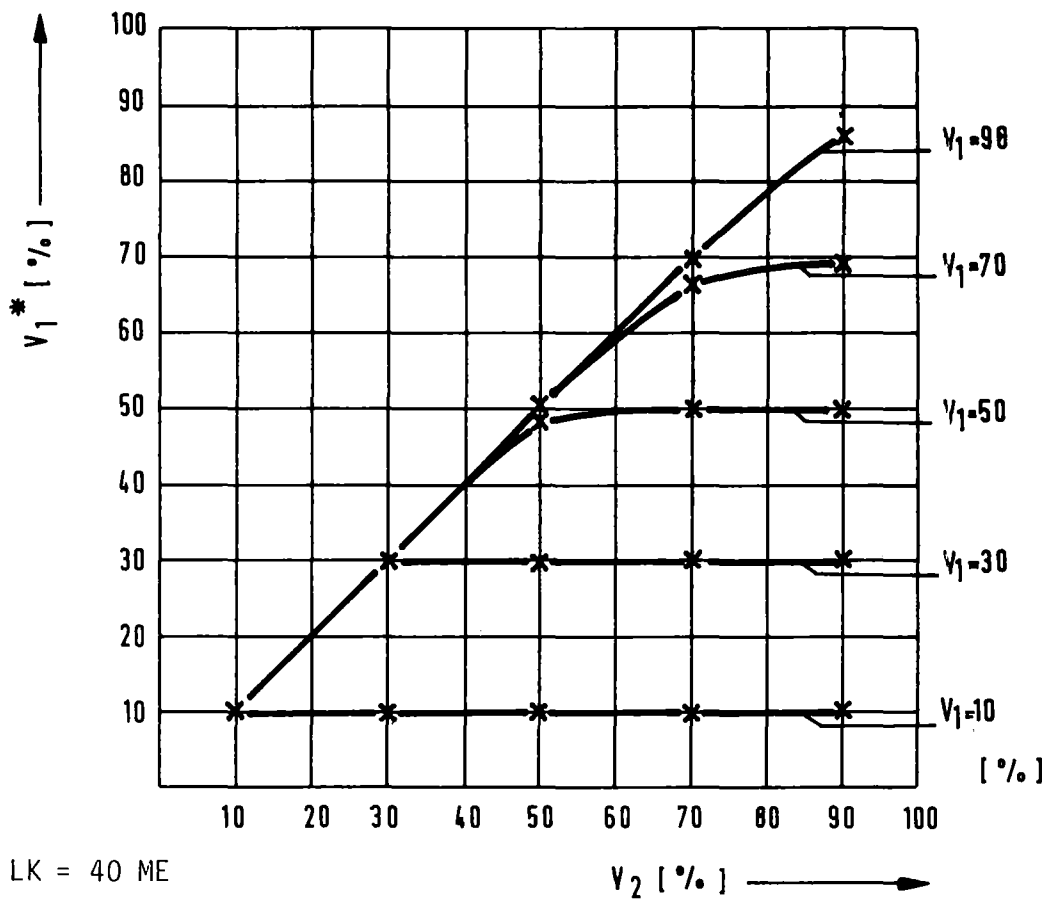
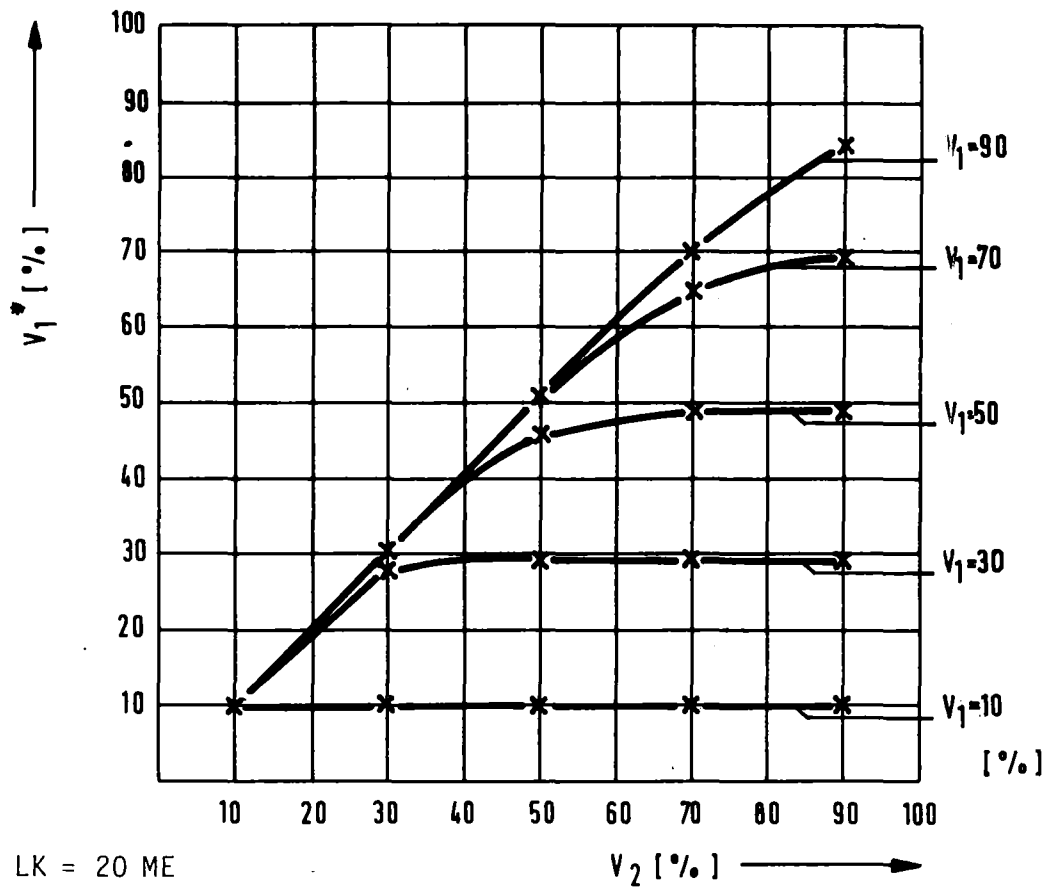


Bild 14

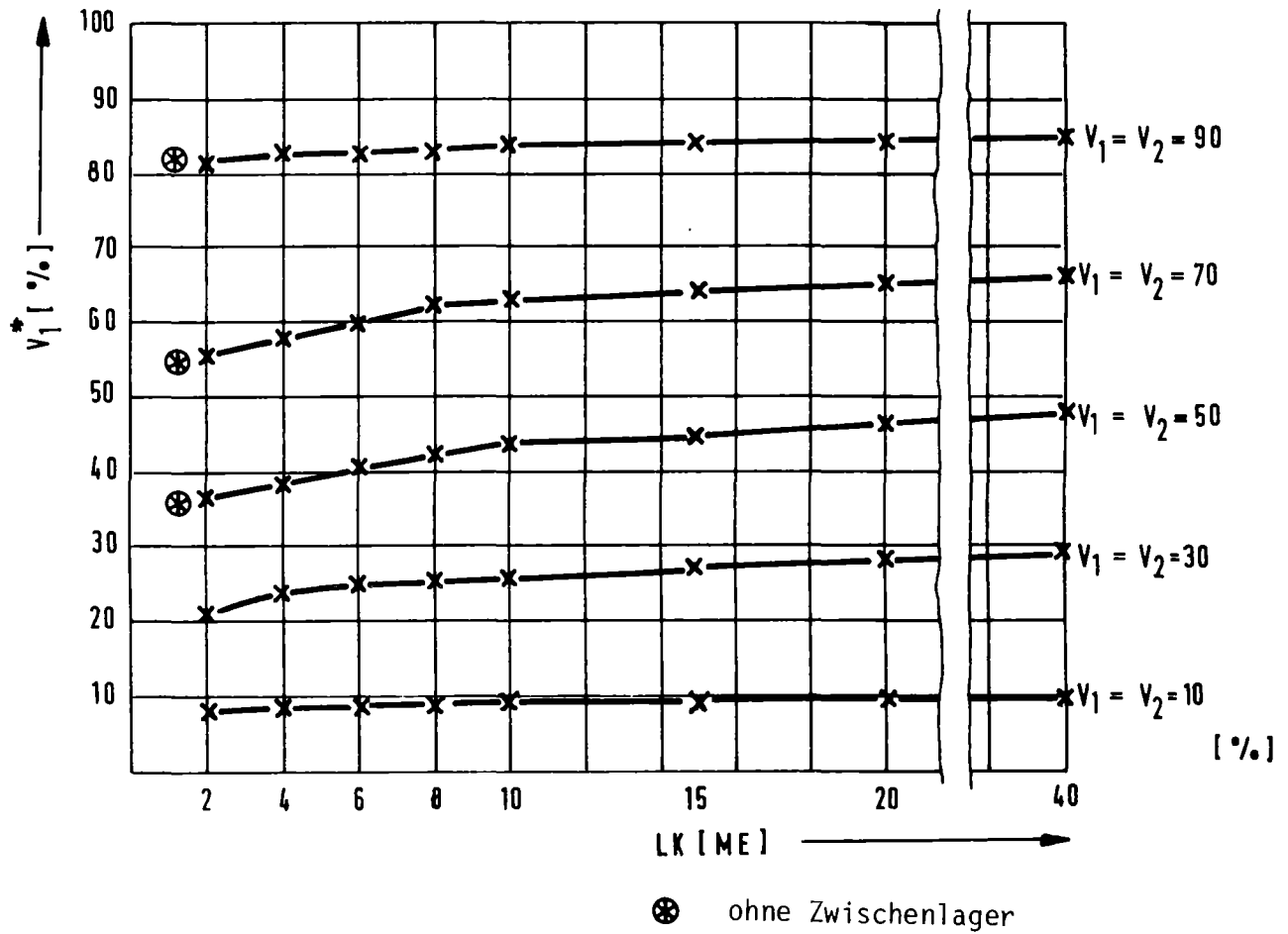
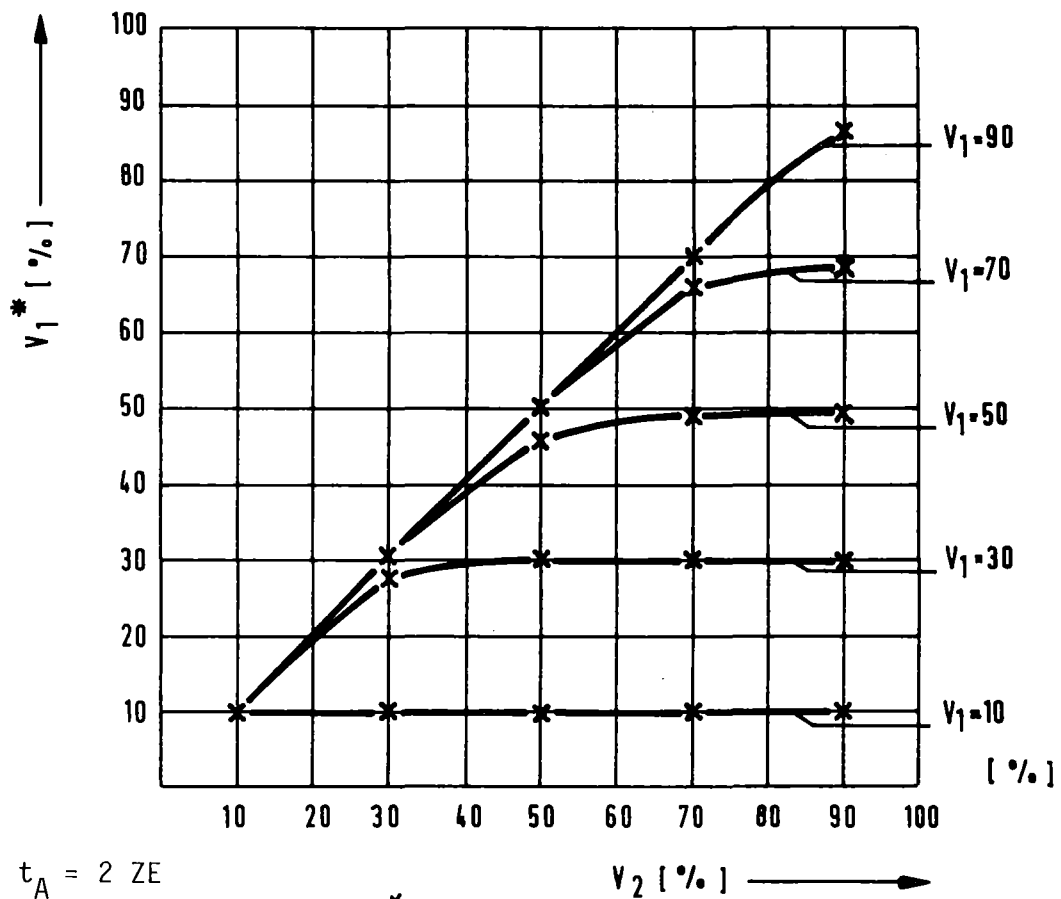
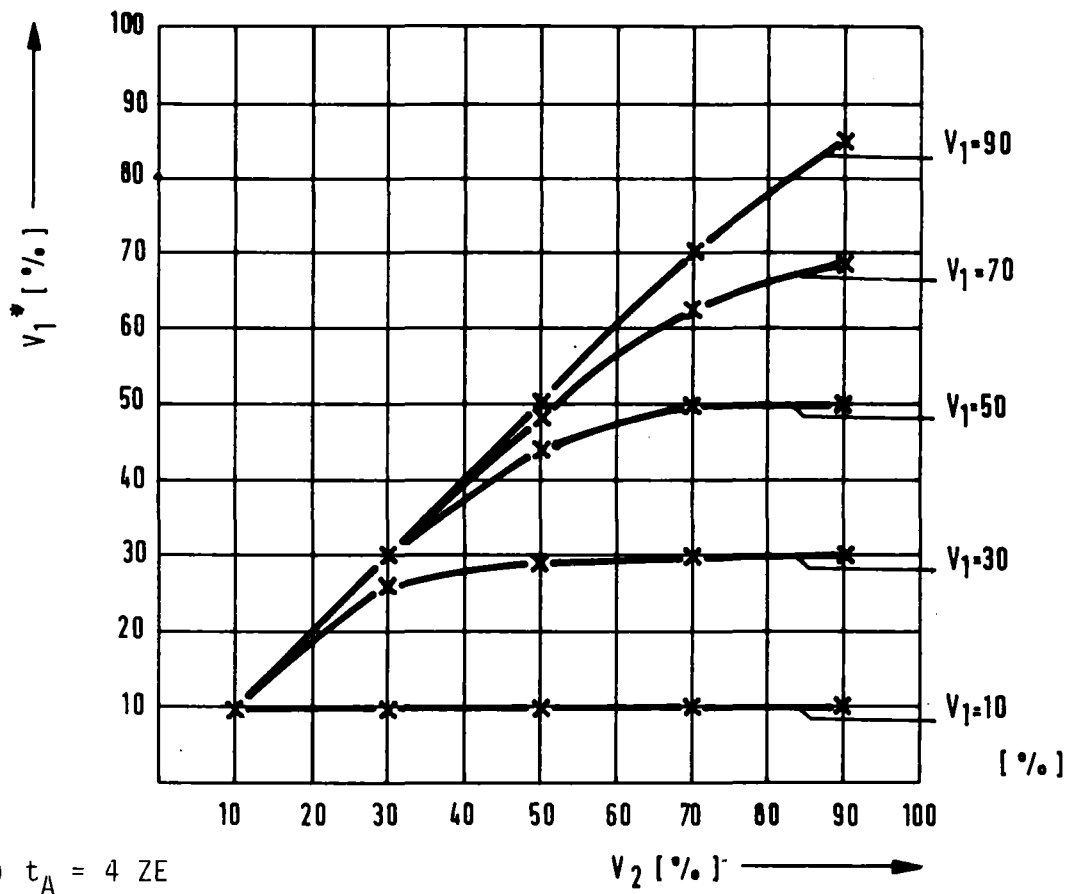
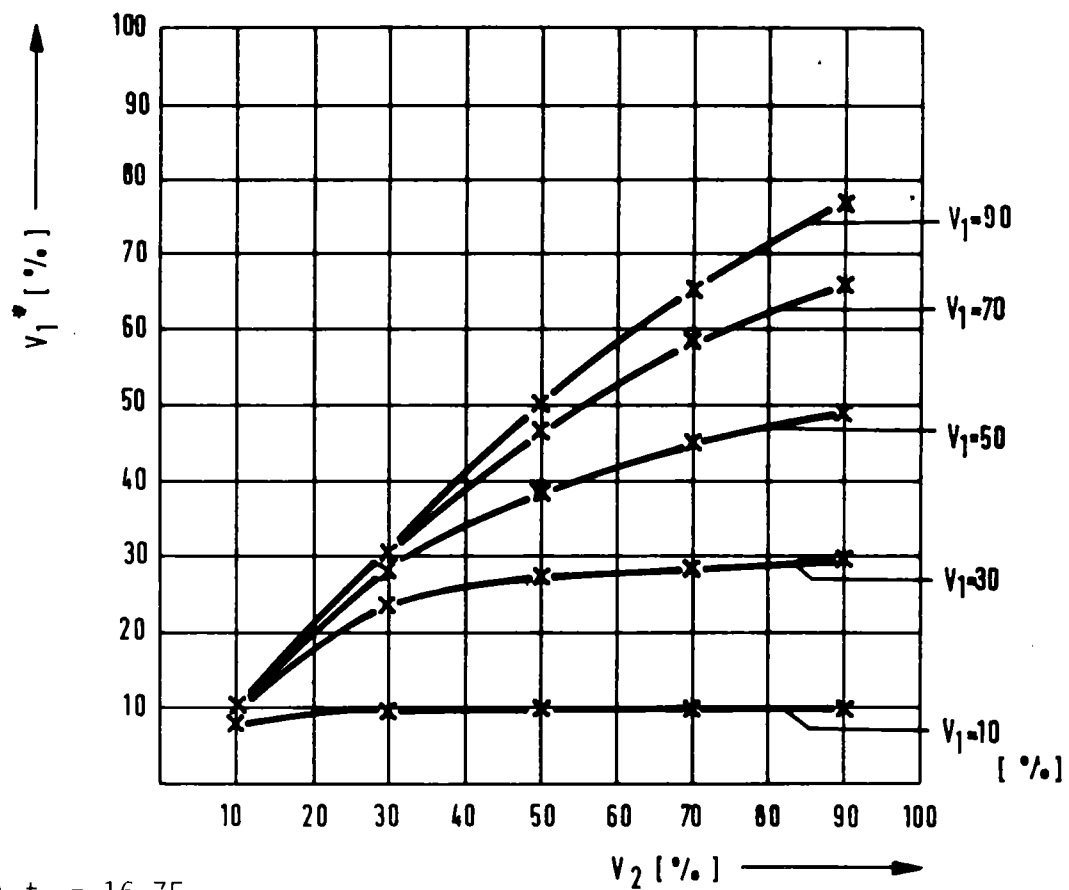


Bild 15: Verfügbarkeit V_1^* in Abhängigkeit der Lagerkapazität LK bei den Einzelverfügbarkeiten $V_1 = V_2$ und $t_{A1} = t_{A2} = 5$ ZE (Kapitel 6)

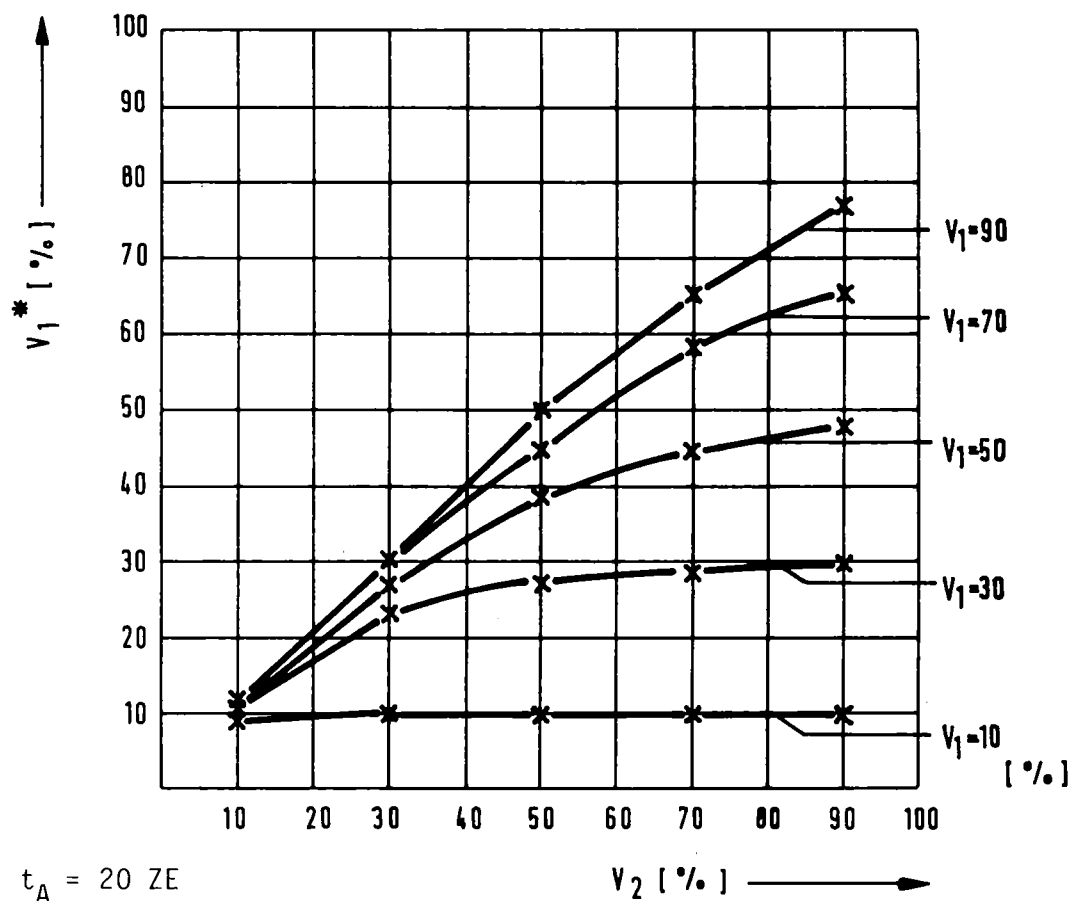


b) $t_A = 2 \text{ ZE}$

Bild 16: Verfügbarkeit V_1^* mit der Lagerkapazität $LK = 10 \text{ ME}$ für verschiedene Reparaturzeiten t_A (Kapitel 6)

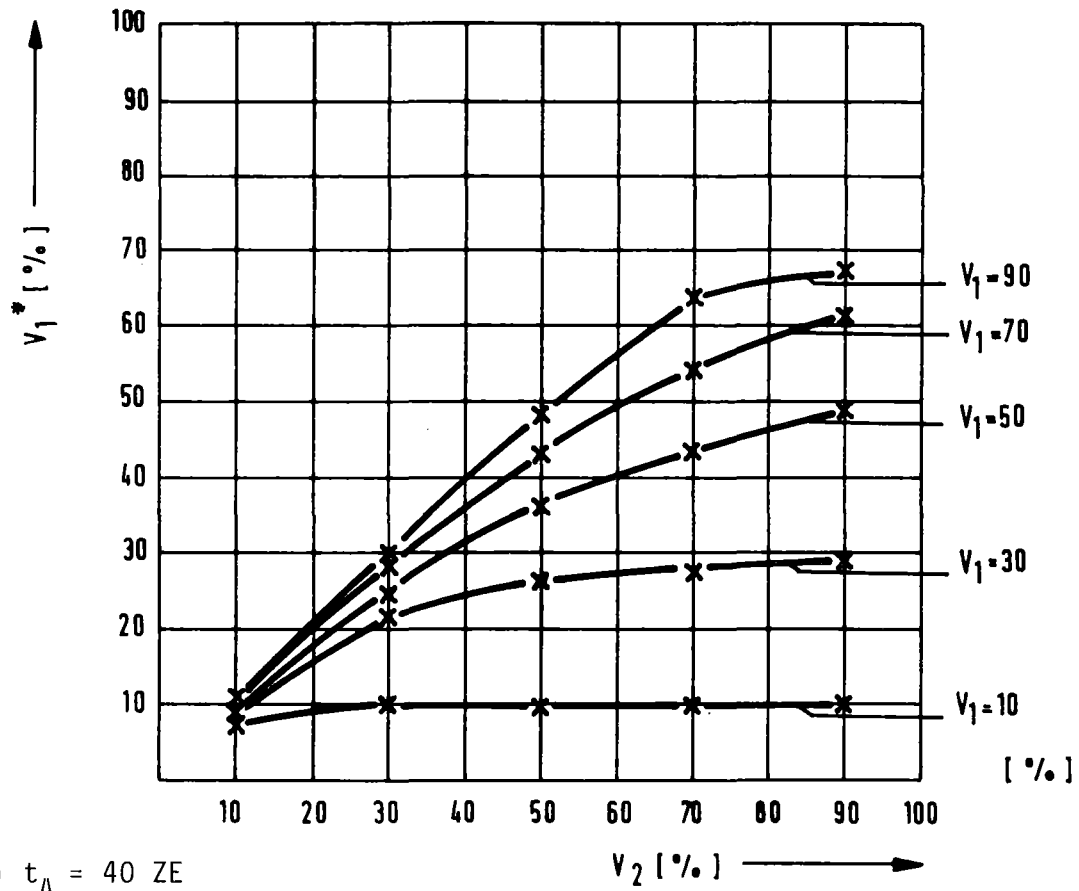


c) $t_A = 16$ ZE

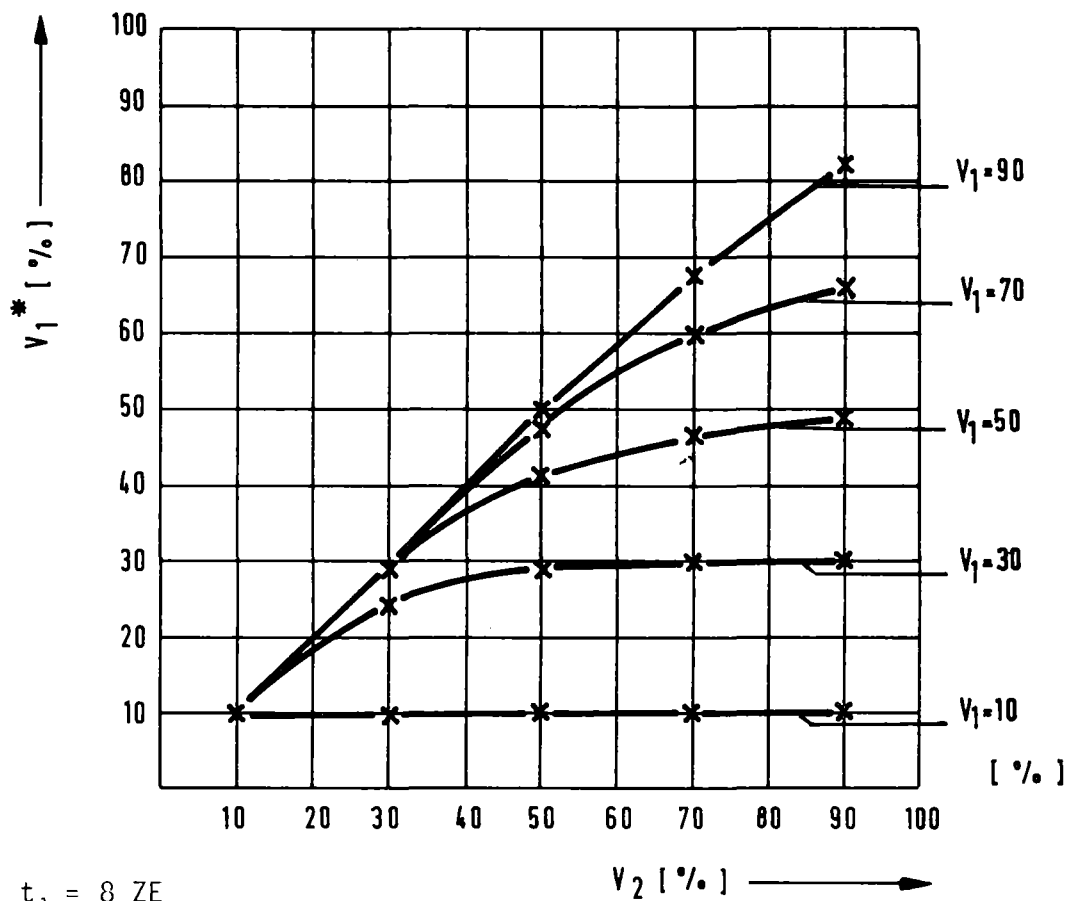


d) $t_A = 20$ ZE

Bild 16



e) $t_A = 40$ ZE



f) $t_A = 8$ ZE

Bild 16

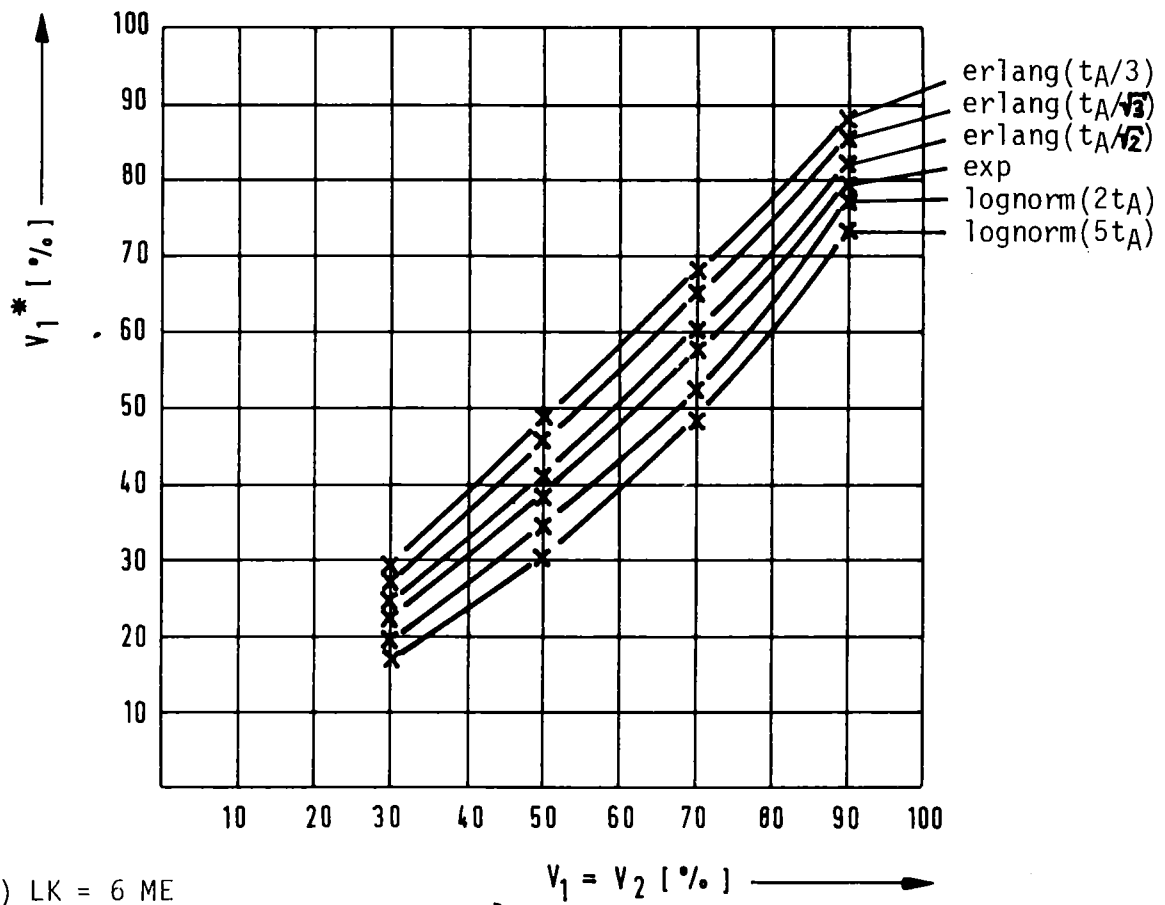
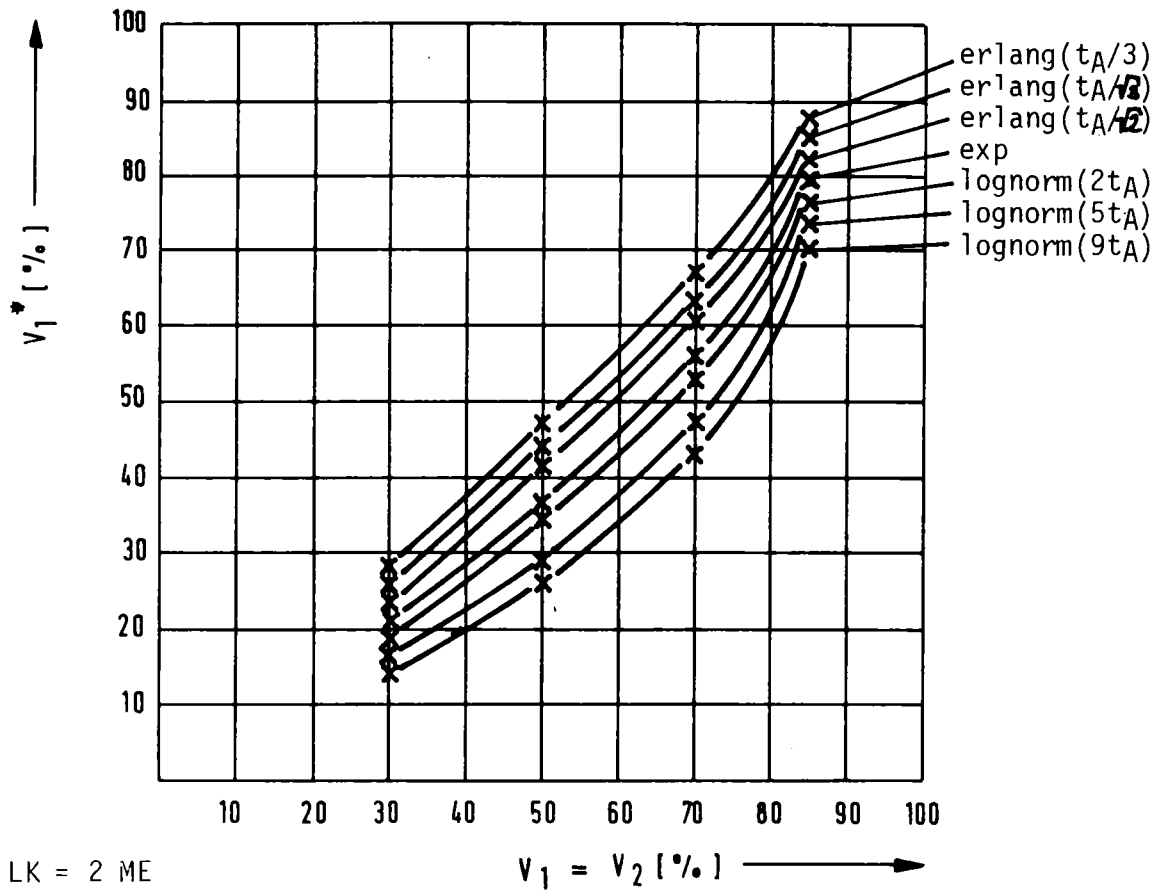


Bild 17: Verfügbarkeit V_1^* bei verschiedenen Standardabweichungen

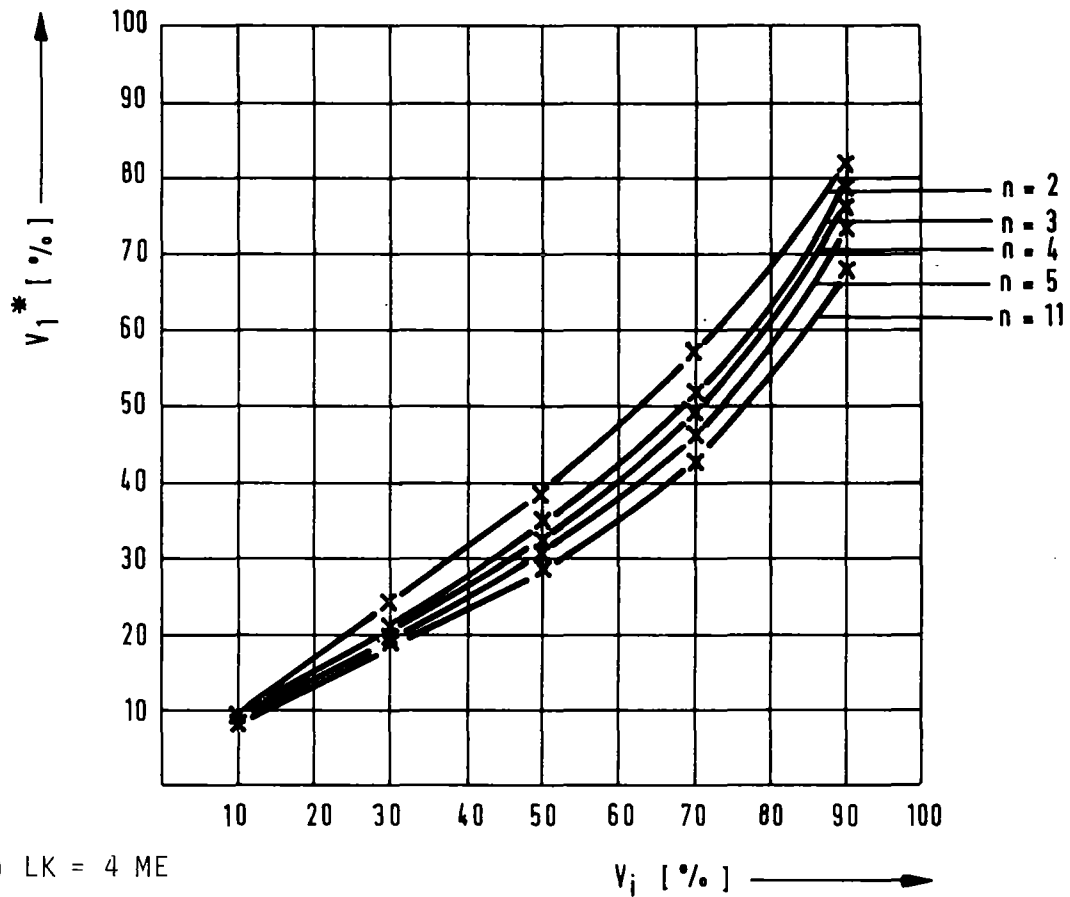
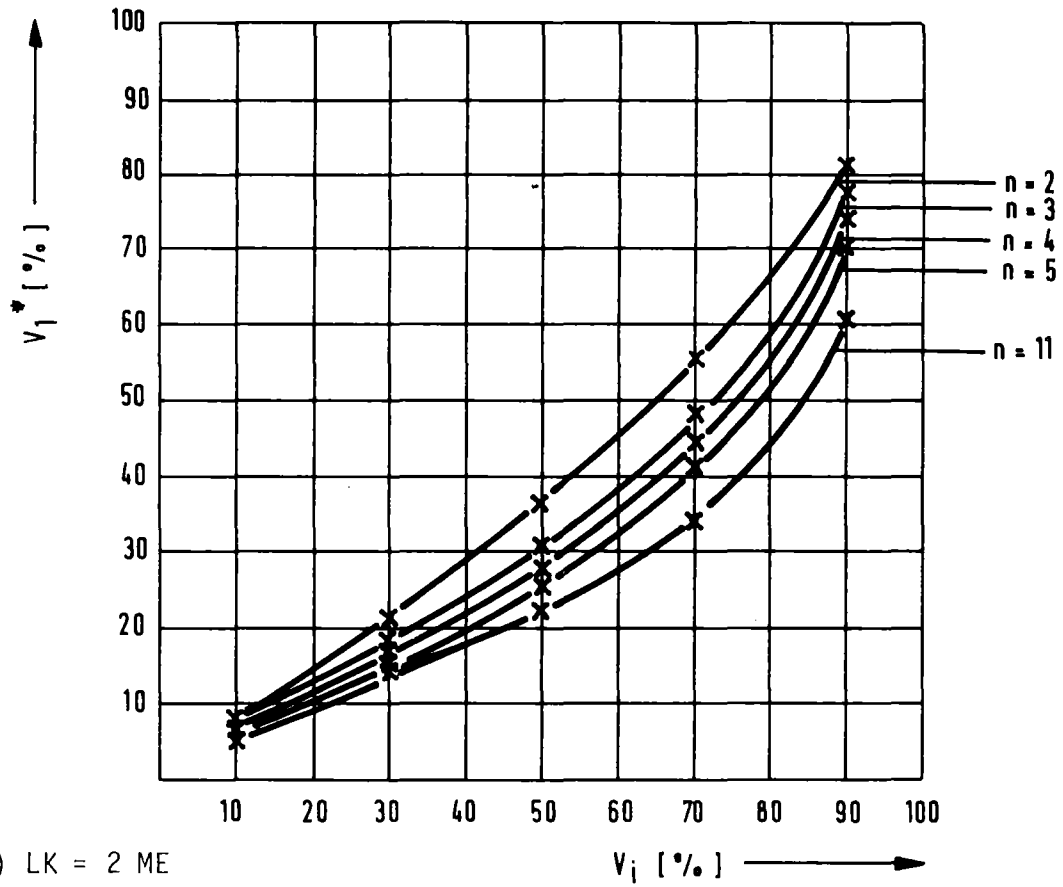
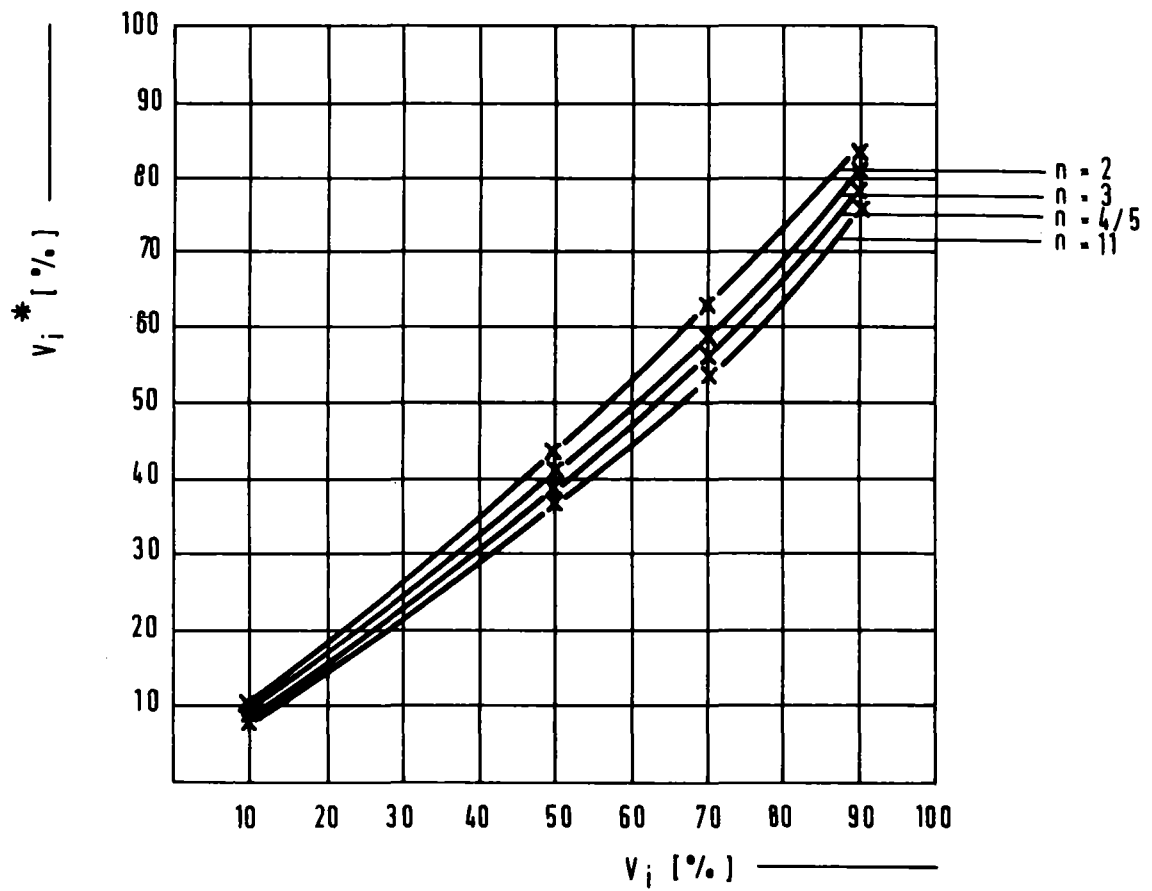


Bild 18: Verfügbarkeit V_1^* des n-Lagermodells bei verschiedenen Lagerkapazitäten LK (Kapitel 6)



c) LK = 10 ME

Bild 18