

KfK 2554  
Juli 1978

# **Die Form von Magneten in toroidalen Anordnungen**

H. Dustmann, J. Erb, H. Krauth, W. Maurer  
Institut für Technische Physik

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE GMBH

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Technische Physik

KfK 2554

Die Form von Magneten in toroidalen Anordnungen<sup>+</sup>)

von

H. Dustmann, J. Erb, H. Krauth, W. Maurer

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

<sup>+</sup>) Diese Arbeit wurde aufgrund der zwischen der Gesellschaft für Kernforschung, Karlsruhe, und dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, vereinbarten Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Supraleitungstechnologie und mit Unterstützung der Europäischen Gemeinschaft (Euratom) durchgeführt.



## Die Form von Magneten in toroidalen Anwendungen

Zusammenfassung

Es wird ein Überblick über die Berechnung der Form von Torusmagneten angegeben, wenn die Spule nur zugbelastet, d.h. biegemomentfrei, sein soll. Für die Berechnung der optimalen Magnetform wurde ein selbstkonsistentes Iterationsverfahren entwickelt, das die Spulenzahl, die endliche Windungsfläche, die Windungszahl, den Betriebsstrom und zwei geometrische, konstruktiv bedingte Größen als Eingabewerte benötigt.

## The shape of magnets in toroidal configurations

Abstract

A review of the calculations of the shape of toroidal magnets is given, when the coil is in pure tension, resp. free of bending moments. To calculate the optimum shape of the magnets a self consistent iteration process was been developed. This process needs as input data the coil number, the finite winding area, the winding number, the operating current and two geometric quantities, which are required according to the design.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Einleitung	1
1. Übersicht über die bisherigen Rechnungen	3
1.1 Problemstellung	3
1.2 Der ideale Torus	5
1.3 Diskrete Linienströme	8
1.4 Konkrete Fälle	13
1.5 Vergleich der Lösungen	16
2. Optimierung der Magnetform bei r- und z-Abhängigkeit des Magnetfeldes aus HEDO 2	16
3. Zusammenfassung	25
Literatur	26

## Einleitung

Beim Entwurf supraleitender Magnete für toroidale Magnetsysteme soll durch besondere Formgebung eine Biegebeanspruchung der Spule vermieden werden. Dann treten nur Tangentialkräfte in der Wicklung auf. Mathematisch bedeutet dies, daß bei konstantem Strom das Produkt aus Torusmagnetfeld und Krümmungsradius konstant sein muß.

Beim idealen Torus (unendlich dünne, strombelegte Schicht) ist das Torusmagnetfeld umgekehrt proportional zum Radius. In diesem Falle läßt sich eine übersichtliche analytische Lösung für die Form der Torusspulen angeben.

Im Falle von diskreten, ausgedehnten Torusspulen ist die Radiusabhängigkeit des Magnetfeldes sehr viel komplizierter. Darüber hinaus muß auch noch berücksichtigt werden, daß dann das Torusfeld nicht nur vom Radius, sondern auch von den übrigen Toruskordinanten abhängt.

In diesem Bericht wird eine Übersicht über die bisherigen Rechnungen zum Problem der Spulenform gegeben und ein Optimierungsprogramm vorgestellt, das einen endlichen Wickelquerschnitt berücksichtigt. Beispiele werden für zwei Torusmagnetprojekte gegeben, und zwar für das "Large Coil Task" (zitiert als LCT) in Oak Ridge, USA, und TESPE in Karlsruhe. In jedem der beiden Projekte sind sechs Spulen vorgesehen, die sich jedoch sehr in der Größe unterscheiden. In Abb. 1 ist die prinzipielle Anordnung der sechs Spulen im Schnitt durch die Torusmittelebene zu sehen. Tabelle 1 enthält die Daten der gerechneten Beispiele für LCT und TESPE.

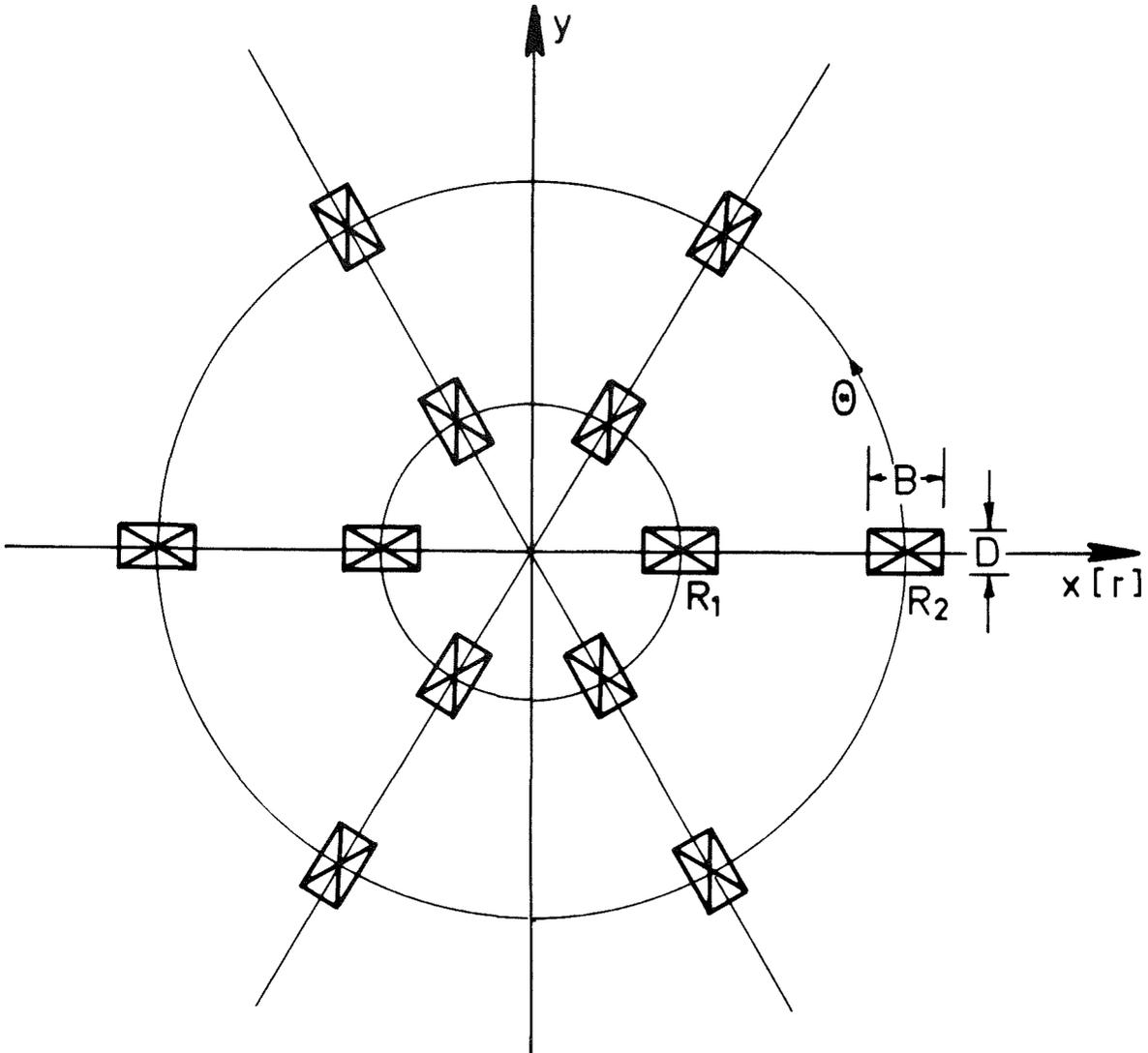


Abb. 1: Prinzipielle Anordnung der Torusspulen bei LCT und TESPE

Tabelle 1: Kenndaten für die gerechneten Beispiele

	Dimension	TESPE	LCT
Spulenzahl		6	6
$R_1$	m	0.290	0.926
$R_2$	m	0.776	3.757
Radiale Breite B	m	0.1166	0.46
Axiale Dicke D	m	0.194	0.56
Windungszahl		240	588
Strom	kA	7	11

## 1. Übersicht über die bisherigen Rechnungen

### 1.1 Problemstellung

Abb. 2 zeigt für einen stromtragenden Leiter ein Längenelement  $ds$ , bei dem die Zugspannung mit dem magnetischen Druck  $f_1$  (gemessen in Kraft pro Längeneinheit) im Gleichgewicht ist. Das bedeutet, daß der Leiter biegemomentfrei ist, oder anders ausgedrückt, es treten mechanische Spannungen  $T$  nur in tangentialer Richtung auf. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$T = f_1 \cdot \rho \quad (1.1)$$

Der magnetische Druck  $f_1$  ist (als Kraft pro Längeneinheit) proportional zum Produkt aus Magnetfeld  $B$  und Strom  $I$ . Daher folgt:

$$\frac{T}{\rho} \sim B \cdot I \quad (1.2)$$

Wenn also ein Leiter nur Zugspannungen  $T$  ausgesetzt ist, dann liegt er auf einer Kurve, deren Krümmungsradius  $\rho$  durch das Magnetfeld am Ort des Leiters bestimmt ist.

Nach Abb. 2 ist der Krümmungsradius  $\rho$  durch den Abstand  $\overline{MC} = \{ [z_c - z(r)]^2 + [r_c - r]^2 \}^{1/2}$  gegeben. Er kann berechnet werden nach

$$\rho = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2z}{dr^2} \quad (1.3)$$

Die Koordinaten  $(r_c, z_c)$  des Krümmungsmittelpunktes  $C$  können errechnet werden nach

$$r_c = r - \frac{dz}{dr} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] / \frac{d^2z}{dr^2} \quad (1.4a)$$

$$z_c = z + \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] / \frac{d^2z}{dr^2} \quad (1.4b)$$

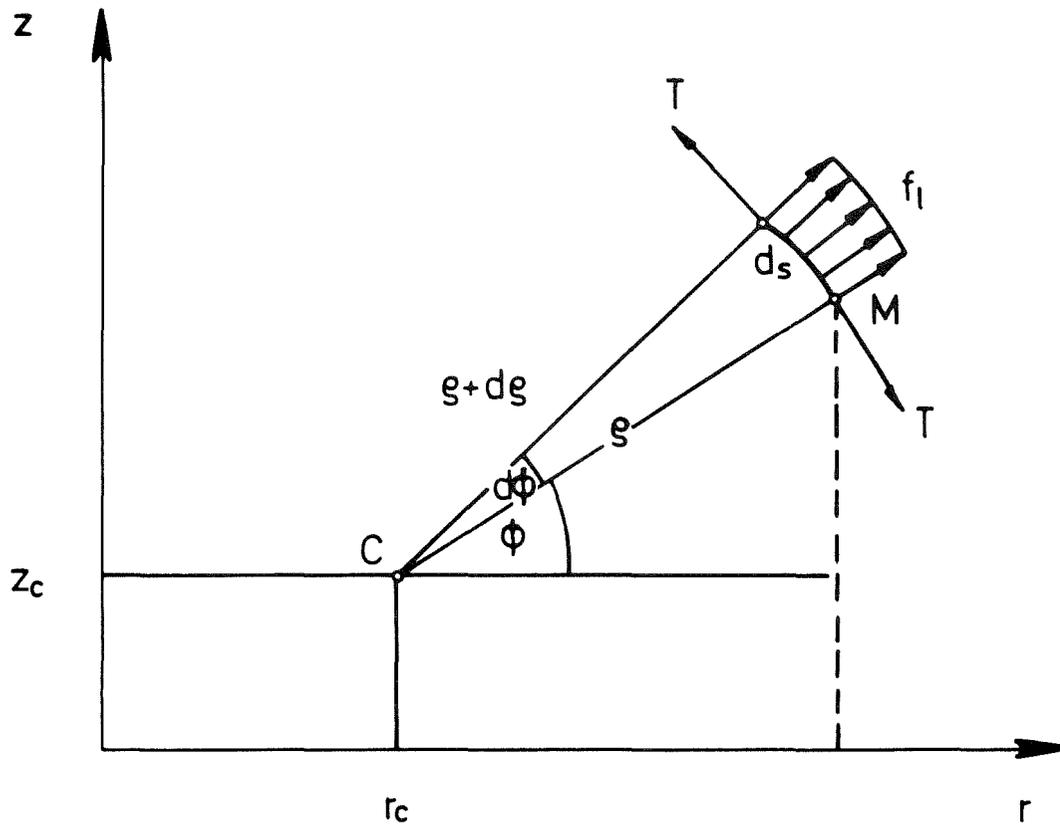


Abb. 2: Stromdurchflossenes Leiterelement ds.

Aus (1.2) erkennt man, daß für konstante Zugkraft die Bedingung

$$B \cdot I \cdot \rho = \text{const} \quad (1.5)$$

einzuhalten ist. Aus (1.3) folgt dann die Form des Leiters  $z(r)$ , wenn er biegemomentfrei ist.

Die Leiterlänge  $s(r)$  ergibt sich allgemein aus

$$s(r) = \int \left| 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right|^{\frac{1}{2}} dr \quad (1.6)$$

## 1.2 Der ideale Torus

Für eine torusförmige, mit einem stromführenden Leiter einlagig gleichmäßig und dicht bewickelte Schale ergibt sich das Magnetfeld innerhalb des Torus aus:

$$B_{\theta} = \mu_0 \frac{N \cdot I}{2\pi r} = \frac{1}{k' \cdot r} \quad (1.7)$$

Dabei ist N die Zahl der Windungen und r der Abstand von der Hauptachse des Torus zum Aufpunkt.

$$(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})$$

Bei Vorhandensein eines Magnetfeldes B gilt allgemein für den magnetischen Felddruck

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (1.8)$$

Die Kraft, die pro Länge auf den Leiter wirkt, ist

$$f_1 = p \cdot \frac{2\pi r}{N} \quad (1.9)$$

Dann folgt aus (1.1, 7, 9)

$$\frac{T}{\rho} = \frac{B_{\theta} \cdot I}{2} \quad (1.10)$$

Für den Fall einer konstanten Zugbeanspruchung des Leiters ist  $B_{\theta} \cdot I \cdot \rho / 2 = \text{const.}$  einzuhalten. Für konstanten Strom I reduziert sich dies auf  $B_{\theta} \cdot \rho = k_0 = \text{const.}$

Für den idealen Torus ist nach (1.7) das Magnetfeld umgekehrt proportional zum Radius. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (1.3) wegen  $\rho = kr = k_0 k' r$  von der Form

$$k \cdot r = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2 z}{dr^2} \quad (1.11)$$

Sie ist von verschiedenen Autoren <sup>1,2,3</sup> untersucht worden. Die Lösungen der Gl. (1.11) können in verschiedener Gestalt angegeben werden. File, Mills and Sheffield <sup>1</sup> geben eine Form an, bei der ein Integral des Typs

$$\pm k \int_0^{\pm u} \frac{e^{ku} u du}{(1-u^2)^{1/2}}$$

numerisch ausgewertet werden muß.

Shafranov <sup>2</sup> berechnet die optimale Form von toroidalen Feldspulen bei gegebener Querschnittsfläche oder gegebenem Perimeter, wobei die Induktivität oder die magnetische Energie maximal werden soll. Mit Hilfe der Variationsrechnung erhält er die Euler-Lagrange-Gleichung, die nach Integration für die Kontur  $z(r)$  eine Differentialgleichung erster Ordnung liefert. Diese wird numerisch gelöst. Shafranov zeigt auch, daß eine Spule, die optimal in der gespeicherten magnetischen Energie (also maximal in der Induktivität) ist, auch optimal bezüglich der mechanischen Beanspruchungen ist (konstante, reine Zugbeanspruchung).

Gralnick und Tenney <sup>3</sup> führen die Lösung von (1.11) auf eine Reihenentwicklung modifizierter Bessel-Funktionen ganzzahliger Ordnung zurück.

Es kann auch eine recht einfache Integraldarstellung der Lösung von (1.11) hergeleitet werden. Durch  $y = dz/dr$  und nach Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{dy}{[1+y^2]^{3/2}} = \frac{dr}{kr} \quad (1.12)$$

Mit den Anfangsbedingungen ( $z_0 = z_{\max}$ )

$$z_0 = z(R_0) \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{dz}{dR} \right|_{R_0} = 0$$

ergibt sich nach elementarer Integration

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\ln r/R_0}{[k^2 - \ln^2 r/R_0]^{1/2}} \quad (1.14)$$

Für  $k^2 = \ln^2 r/R_0$  ist die Steigung unendlich. Dies ist der Fall für

$$R_1 = R_0 e^{-k} \quad (1.15)$$

und

$$R_2 = R_0 e^{+k} \quad (1.16)$$

Aus (1.15, 16) folgen die Beziehungen

$$R_1 R_2 = R_0^2 \quad (1.17)$$

und

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (1.18)$$

Die Beziehungen (1.17, 18) erlauben die Darstellung der Lösung des allgemeinen Integrals von (1.14) in der Form

$$z - z_0 = \pm \int_{R_0}^r \frac{\ln r'/R_0 \cdot dr'}{[\ln \frac{r'}{R_1} \cdot \ln \frac{R_2}{r'}]^{1/2}} \quad (1.19)$$

Die Bogenlänge ist

$$s - s_0 = k \cdot \int_{R_0}^r \frac{dr'}{[\ln \frac{r'}{R_1} \cdot \ln \frac{R_2}{r'}]^{1/2}} \quad (1.20)$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$r_c = r(1 - \ln \frac{r}{R_0}) \quad (1.21)$$

$$z_c = z(r) + r \left[ \ln \frac{r}{R_1} \cdot \ln \frac{R_2}{r} \right]^{1/2} \quad (1.22)$$

Die Spulenform, die aus der aus (1.19) berechneten Leiterkontur  $z(r)$  für  $R_1 \leq r \leq R_2$  - ergänzt durch ein gerades Stück bei  $r = R_1$  - entsteht, wird "ideales D" oder "Princeton-D" genannt. In Abb. 3 ist das "Princeton-D" für LCT bei vorgegebenem  $R_1$  und  $R_0$  gegeben. Abb. 4 zeigt das "Princeton-D" für TESPE. Die charakteristischen Daten sind in den Tabellen 3 und 4 in Abschnitt 3 zusammengestellt. Dort ist das Princeton-D als 0. Iteration angegeben.

### 1.3 Diskrete Linienströme

Es seien  $n$ -Linienströme gleichmäßig bei  $\theta_i = 2\pi \frac{i}{n}$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) auf dem Kreis mit dem Radius  $R_1$  in der  $x$ - $y$ -Ebene angeordnet, wobei die Stromrichtung die positive  $z$ -Richtung ist (vgl. Abb. 1). Auf dem äußeren Kreis mit  $R_2$  sind unter denselben Winkeln  $n$ -Linienströme mit entgegengesetzter Richtung angeordnet. Die Länge der Stromfäden ist mit Unendlich angenommen.

Das magnetische Feld für diese  $n$  Paare von Linienströmen in toroidaler Konfiguration ist für den Winkel  $\theta = 0$  gegeben durch<sup>4</sup>

$$B_{\theta}(r) = \frac{1}{k'r} \cdot \left\{ 1 - \frac{(R_1/r)^n}{(R_1/r)^{n-1}} - \frac{(r/R_2)^n}{(r/R_2)^{n-1}} \right\} \quad (1.23)$$

mit

$$k' = \frac{2\pi}{\mu_0 n I} \quad (1.24)$$

Für den Feldverlauf (1.23) dieser Anordnung lautet die (1.3) entsprechende Dgl.:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = \frac{1}{k'r} \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} \cdot \left\{ 1 - \frac{(R_1/r)^n}{(R_1/r)^{n-1}} - \frac{(r/R_2)^n}{(r/R_2)^{n-1}} \right\} \quad (1.25)$$

Mehrere Autoren<sup>5,6</sup> haben sich mit dieser Anordnung der Ströme beschäftigt. File und Sheffield<sup>5</sup> haben (1.25) mit einem Computercode gelöst, während Moses und Young<sup>6</sup> erst die Singularität des Feldes bei  $R_1$ , bzw.  $R_2$  beseitigt haben.

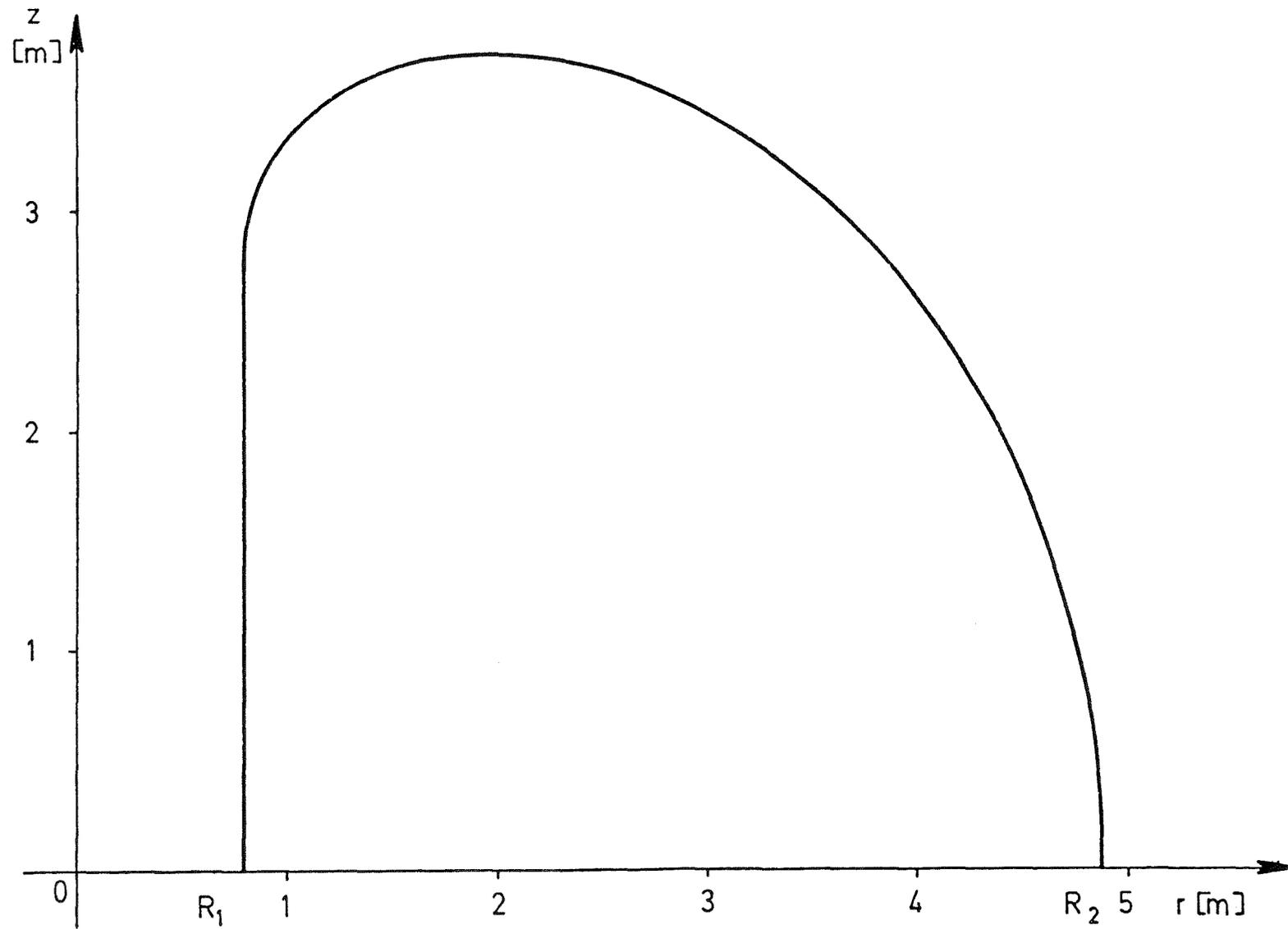


Abb. 3: Princeton-D für LCT bei vorgegebenem  $R_1$  und  $R_0$

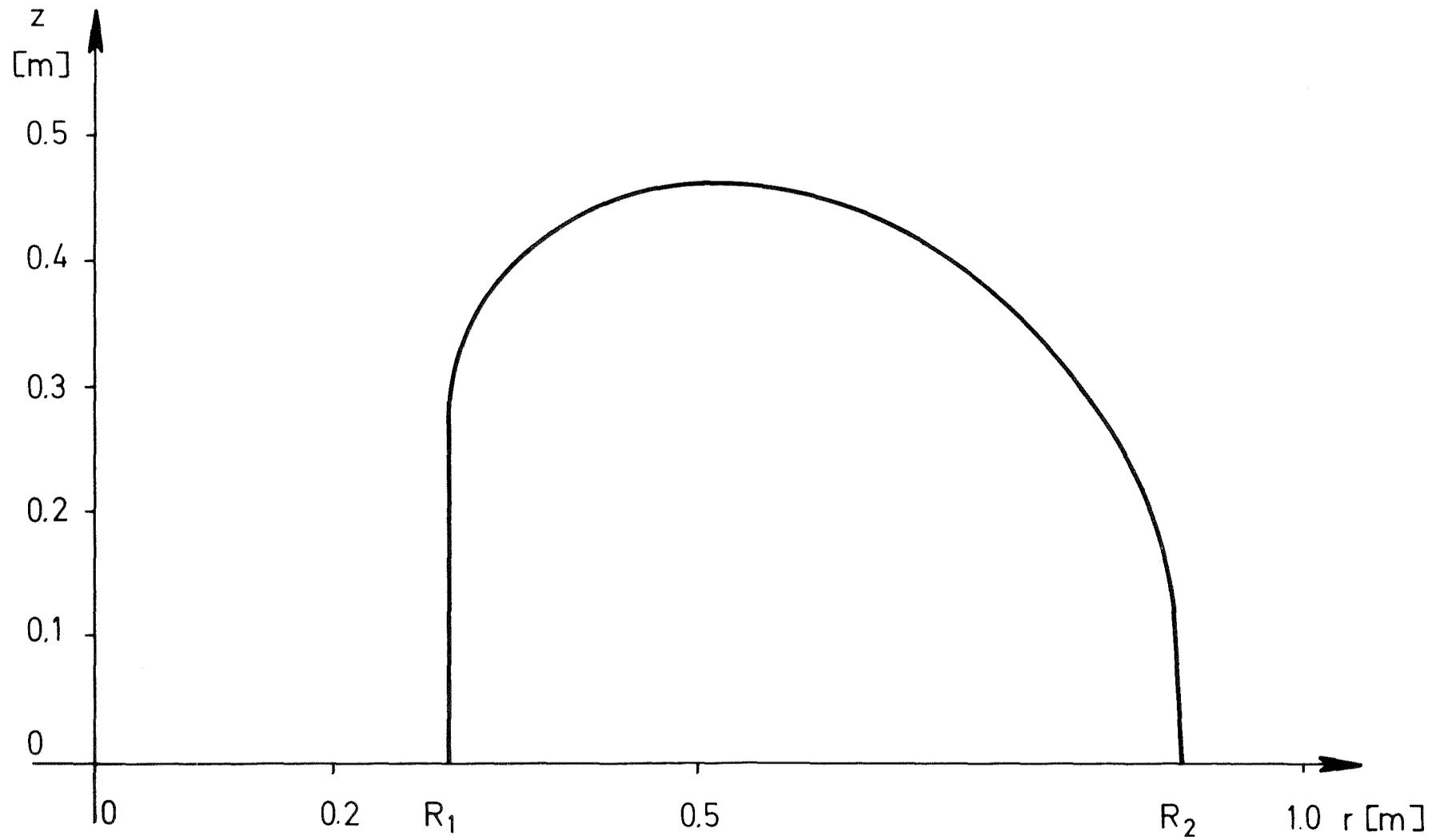


Abb. 4: Princeton-D für TESPE bei vorgegebenem  $R_1$  und  $R_0$

Formal kann (1.25) in der obigen Form genauso behandelt werden, wie (1.11). Es folgt mit den Anfangsbedingungen (1.13) und  $y = dz/dr$

$$\frac{y}{[1+y^2]^{1/2}} = \frac{1}{k'} \cdot \int_{R_0}^r \frac{dr'}{r'} \cdot \left\{ 1 - \frac{(R_1/r')^n}{(R_1/r')^{n-1}} - \frac{(r'/R_2)^n}{(r'/R_2)^{n-1}} \right\} \quad (1.26)$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind elementar lösbar. Es folgt

$$\frac{y}{[1+y^2]^{1/2}} = \frac{1}{k'} \ln A_n(r) \quad (1.27)$$

mit

$$A_n(r) = \frac{r}{R_0} \cdot \left[ \frac{1-(R_0/R_2)^n}{1-(R_1/R_0)^n} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[ \frac{1-(R_1/r)^n}{1-(r/R_2)^n} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (1.28)$$

Die Lösung von (1.27) lautet dann in allgemeiner Form:

$$z-z_0 = \int_{R_0}^r \frac{\ln A_n(r') dr'}{\left[ [k' - \ln A_n(r)] \cdot [k' + \ln A_n(r)] \right]^{1/2}} \quad (1.29)$$

Zur Ermittlung von  $R_1$ , bzw.  $R_2$ , den Stellen, an denen die erste Ableitung unendlich wird, wird der Limes gebildet. Es folgt

$$e^{-k'} = \lim_{r \rightarrow R_1} A_n(r) = 0 \quad (1.30)$$

$$e^{+k'} = \lim_{r \rightarrow R_2} A_n(r) \rightarrow +\infty \quad (1.31)$$

Dies bedeutet, daß  $k'$  gegen Unendlich strebt (oder aber nach (1.24)  $n \cdot I$  gegen Null). Andererseits folgt:

$$e^{+k'} e^{-k'} = 1 = \frac{R_2 R_1}{R_0^2} \cdot \left[ \frac{1-(R_0/R_2)^n}{1-(R_1/R_0)^n} \right]^{1/n} \quad (1.32)$$

Für  $R_2 \cdot R_1 = R_0^2$  ist (1.32) erfüllt. Dann reduziert sich (1.28) zu

$$A_n(r) = \frac{r}{R_0} \cdot \left[ \frac{1 - (R_1/r)^n}{1 - (r/R_2)^n} \right]^{1/n} \quad (1.33)$$

Diese Untersuchung zeigt, daß die Näherung einer toroidalen Spulenanordnung durch die Benutzung des Feldverlaufs von Paaren unendlich langer Linienströme nicht zum Erfolg führt, da die Konstante  $k'$  keinen endlichen Wert annimmt. Mit dieser Methode ist also keine korrekte Magnetform zu erhalten.

Moses und Young<sup>6</sup> haben daher zunächst die Singularitäten im Feldverlauf am Ort des Stromes  $R_1$ , bzw.  $R_2$  eliminiert. Es wird das Feld am Ort eines Leiters aufgrund der  $2n-1$  anderen Leiter gesucht. Dazu wird das Eigenfeld dieses Leiters vom gesamten Feld (1.23) subtrahiert.

$$B_{\theta R_1}(r) = B_{\theta}(r) - \frac{1}{k'n(r-R_1)} \quad (1.34)$$

$$B_{\theta R_2}(r) = B_{\theta}(r) + \frac{1}{k'n(r-R_2)} \quad (1.35)$$

Dann wird die Kraft pro Länge  $f_1$  für gerade Leiter berechnet. Eine Beschreibung der Krümmung des Leiters wird durch Einführung des Winkels  $\phi$  (vgl. Abb. 2) erreicht, so daß die Kraft pro Länge gegeben ist durch

$$f_1 = \frac{I}{2k'r} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \cos \phi\right) \quad (1.36)$$

$f_1$  nach (1.36) berücksichtigt noch keine Kraftänderungen aufgrund der Leiterkrümmung in der realen Konfiguration. Diese Korrekturen werden empirisch für Solenoide und für D-förmige Magnete eingeführt. Als allgemeiner Ausdruck für die Kraft pro Länge auf ein Toroid ergibt sich der Ausdruck

$$f_1 = \frac{I}{2k'r} \left| 1 + \frac{1}{n} \left( \cos \phi + \frac{r}{\rho} \ln \frac{1,284 \cdot r}{cn} \right) \right| \quad (1.37)$$

Dabei ist  $c$  der Radius eines Leiters mit kreisförmigem Querschnitt. Für Leiter mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge  $w$ ) wird  $c$  durch  $0.573 w$  ersetzt. Gleichung (1.37) kann für Solenoide und D-förmige Magnete angewandt werden.

Moses und Young<sup>6</sup> haben die Genauigkeit der Gleichung (1.37) für Solenoide getestet. Anwendung von (1.37) auf biegemomentfreie Magnete ergibt mit (1.1) und (1.24):

$$\rho = \frac{r}{n} \left( \frac{4\pi T}{\mu_0 I^2} - \ln \frac{1,284 \cdot r}{c \cdot n} \right) / \left( 1 + \frac{1}{n} \cos \phi \right) \quad (1.38)$$

Für  $R_2$  ist der Krümmungsradius  $\rho_2 = \rho(R_2)$  und  $\phi=0$ . Dann kann (1.38) in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\rho}{r} = \left[ \frac{\rho_2}{R_2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \ln \frac{r}{R_2} \right] / \left( 1 + \frac{1}{n} \cos \phi \right) \quad (1.39)$$

Dieses Ergebnis von Moses und Young ist bemerkenswert deshalb, weil der Krümmungsradius  $\rho(r)$  nur von geometrischen Größen und der Spulenzahl abhängt. Die Spulenform liegt fest, wenn die Spulenzahl sowie für eine gegebene Stelle  $R_2$  der Krümmungsradius  $\rho_2$  vorgegeben wird. Gleichung (1.39) wird dann zur numerischen Integration der Differentialgleichung (1.3) für dünne Spulen benutzt oder aber an existierende numerische Lösungen für dicke Spulen angepaßt. Die Moses-Young-Form für LCT ist in Abb. 5 zu sehen.

#### 1.4 Konkrete Fälle

In einer Studie des Argonne National Laboratory (ANL) für einen Tokamak Fusionsreaktor<sup>7</sup> wird die transversale Kraft pro Einheitslänge durch Integration über das Spulenvolumen

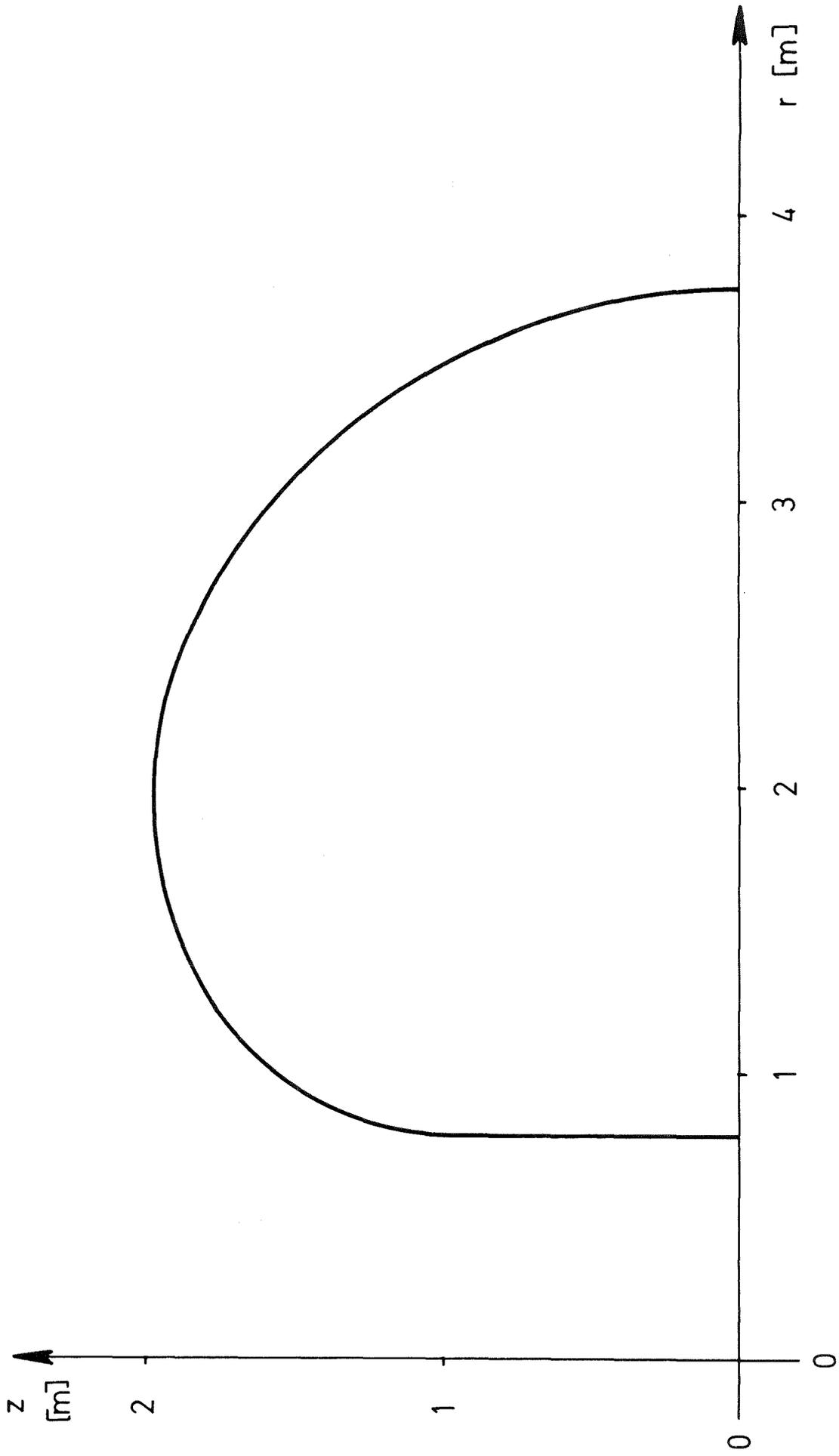


Abb. 5: Moses-Young Form für LCT

erhalten. Sie hängt von der Spulenform, dem Spulenquerschnitt, der Spulenzahl und dem Spulenabstand ab. Für ein Spulensystem mit reiner Zugbeanspruchung des Leiters wird dann geschrieben:

$$\rho = (\beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 r^2) = \pm \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2 z}{dr^2} \quad (1.40)$$

Das Koeffiziententripel  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  wird gefittet. Gestartet wird mit dem Princeton-D, - dies liefert ein neues Tripel von  $\beta$ 's. Dann wird (1.37) gelöst; das Ergebnis ist eine neue Form  $z(r)$ . Mit der neuen Form erhält man ein neues Tripel von  $\beta$ 's. Dieses iterative Verfahren wird solange fortgeführt, bis ein Tripel von  $\beta$ 's ein fast identisches Tripel neuer  $\beta$ 's generiert. Die Konvergenz des Verfahrens ist sehr gut (4 bis 5 Schritte).

In einer Studie des Oak Ridge National Laboratory (ORNL) für einen Tokamak Fusionsreaktor<sup>8</sup> wird eine ovale Form für die Torusmagnete gewählt. Diese ovale Form liegt zwischen der kreisförmigen und der D-Form. Wie in der Studie ausgeführt wird, hat die ovale Form den Vorteil, daß das Volumen und/oder die Beanspruchung der Haltestruktur reduziert sind. Für gleichen horizontalen Durchmesser weist die ovale Form zusätzlich eine geringere Kraft in Richtung zur Torusachse auf als die ideale D-Form. Deshalb werden die mechanischen Beanspruchungen und das geforderte Volumen für die Haltestruktur vermindert. Außerdem sind ovale Spulen zwar schwieriger als runde herzustellen, jedoch leichter als die idealen D-förmigen Spulen.

Das europäische Projekt JET (Joint European Torus) wird ebenfalls D-förmige Spulen erhalten,<sup>11</sup> um die mechanischen Beanspruchungen in engsten Grenzen zu halten. Es sind 32 wassergekühlte Kupfer-spulen, die ein toroidales Magnetfeld von ca. 3 T im Plasmazentrum erzeugen. Die Spulen haben eine Gesamthöhe von 5,68 m und eine Gesamtbreite von 3,86 m.

### 1.5 Vergleich der Lösungen

Ein Vergleich analytischer und numerischer Lösungen ist von M. Söll<sup>9</sup> durchgeführt worden. Ziel des Vergleiches ist, die Genauigkeit der Lösungen zu testen, d.h. herauszufinden, inwieweit die numerisch und analytisch berechneten Magnetparameter übereinstimmen. Der Vergleich wurde für kreisförmige und D-förmige Spulen durchgeführt. Söll kommt zu dem Schluß, daß die Übereinstimmung analytisch und numerisch berechneter Magnetparameter genügend gut für Parameterstudien ist, so daß bei Benutzung analytischer Ausdrücke erhebliche Rechenzeit gespart wird. Als Vergleichsparameter wurden das maximale magnetische Feld, sowie der B(r)-Verlauf, die radiale magnetische Kraft pro Längeneinheit, die auf den Leiter wirkt, und die Kraft benutzt, mit der die Spule auf die innere Abstützung drückt.

### 2. Optimierung der Magnetform bei Berücksichtigung der r- und z-Abhängigkeit des Magnetfeldes

Wie in der Übersicht in Kapitel 1 dargelegt, wurde die r-Abhängigkeit des Magnetfeldes bei der Lösung der Dgl. (1.3) zusammen mit (1.5) vorgegeben oder durch vorgegebene Funktionen mit freien Parametern gefittet. Die z-Abhängigkeit des Magnetfeldes wurde von vorneherein vernachlässigt.

Eine Verallgemeinerung der vorhergehenden Betrachtung ist auf folgende Art und Weise möglich.

Das Torusmagnetfeld ist im allgemeinen Fall von r,  $\theta$ , z abhängig, so daß mit der Bedingung

$$B(r, \theta, z) \cdot \rho = k_0 = \text{constans} \quad (2.1)$$

aus (1.3) folgt:

$$\frac{k_0}{B(r, \theta, z)} = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2 z}{dr^2} \quad (2.2)$$

Bei symmetrischen Anordnungen (vgl. Abb. 1) kann die  $\theta$ -Abhängigkeit des Magnetfeldes vernachlässigt werden. Daher wird die Differentialgleichung

$$\frac{k_0}{B(r,z)} = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2z}{dr^2} \quad (2.3)$$

näher betrachtet. Um eine spezielle Lösung zu erhalten, sind noch zwei weitere Bedingungen vorzugeben. An der Stelle  $R_0$  sei (vgl. (1.13))

$$z_0 = z(R_0) \quad (2.4a)$$

und

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{R_0} = 0 \quad (2.4b)$$

Wenn  $z(r)$  eine geschlossene Kurve ergibt, dann gibt es zwei Stellen  $R_1$  und  $R_2$ , an denen die erste Ableitung  $\frac{dz}{dr}$  Unendlich wird.

Zur weiteren Behandlung der Dgl. (2.3) wird gesetzt:

$$\begin{aligned} y_1 &= z \\ y_2 &= \frac{dz}{dr} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dann folgt das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dr} &= \frac{1}{k_0} \cdot B(r, y_1) \left[ 1 + y_2^2 \right]^{3/2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dies ist im allgemeinsten Falle zu lösen.

Die Bogenlänge ist

$$s(r) = \int_{R_0}^r \left[ 1 + y_2^2 \right]^{1/2} dr' \quad (2.7)$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$r_c = r - \frac{k_0 y_2}{B(r, y_1) [1 + y_2^2]^{1/2}} \quad (2.8)$$

und

$$z_c = y_1 + \frac{k_0}{B(r, y_1) [1 + y_2^2]^{1/2}} \quad (2.9)$$

Zur Ermittlung der optimalen Spulenform bei Berücksichtigung der r- und z-Abhängigkeit des Magnetfeldes wurde ein Rechnerprogramm geschrieben. Dieses löst das Differentialgleichungssystem (2.6) iterativ.

Es wird von der idealen D-Form ausgegangen. Vorgegeben werden  $R_0$  und  $R_1$ , und das Dgl.-system (2.6) wird für ein  $\frac{1}{r}$ -Feld gelöst. Um das entstandene Princeton-D wird nun wiederum eine reale Spule gebaut (d.h. sie hat einen endlichen Wickelquerschnitt). Für diese Spule wird das Magnetfeld  $B(r, z)$  längs der geometrischen Mittellinie ausgerechnet. Mit diesem neuen Feldverlauf, der nun die r- und z-Abhängigkeit berücksichtigt, wird (2.6) wiederum gelöst. Bei der Lösung wird von  $R_0$  ausgegangen und  $k_0$  solange variiert, bis  $R_1$  getroffen wird. Dann bleibt  $k_0$  fest, und das Dgl.-system (2.6) wird nun für  $r > R_0$  gelöst. Dabei erreicht man die Bestimmung des Wertes  $R_2$ . Nun hat man das Ergebnis der 1. Iteration. Die Iteration wird solange durchgeführt, bis sich die errechneten Kurven nicht mehr wesentlich ändern.

In Abb. 6 ist das Ergebnis für LCT zu sehen. Die Bedingung, daß sich die Kurven nicht mehr wesentlich ändern, ist hier folgendermaßen formuliert:

Es müssen zwei der drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

1. Der Betrag der Differenz der maximalen z-Werte für 2 aufeinanderfolgende Iterationen muß kleiner als 1 mm werden.
2. Die Änderung der Länge des geraden Stückes muß kleiner als 1 cm werden.
3. Die Änderung der Bogenlänge muß kleiner als 1 cm werden.

Das Programm stoppt nach der 6. Iteration. Die Ergebnisse der einzelnen Iterationsschritte sind in Tabelle 3 zu finden. Man erkennt die schnelle Konvergenz des Verfahrens sehr deutlich. In Tabelle 2 ist das Ergebnis der 6. Iteration zusammengefaßt. Die Moses-Young-Form für LCT nach Abb. 5 unterscheidet sich von der 6. Iteration nur um wenige mm.

In der letzten Spalte der Tabelle 2 ist  $B \cdot \rho = k_0$  aufgetragen. Im Rahmen der Rechengenauigkeit ist die Konstanz erfüllt. Das Programm zur Magnetfeldberechnung rechnet auf etwa 1 % genau. Die Abweichungen in  $B \cdot \rho$  sind  $< 1$  %.

In Abb. 7 ist das Ergebnis für TESPE veranschaulicht. Die Tabellen 4 und 5 geben das Ergebnis der Iterationen und das Endergebnis für die 5. Iteration an.

Es ist noch zu erwähnen, daß in den beiden hier berechneten Fällen das Magnetfeld am Ort der geometrischen Mittelkurve im Wickelquerschnitt zur Optimierung benutzt wurde, d.h. es wurde keine Mittelung über den Querschnitt vorgenommen.

Zur Kontrolle wurde in den Tabellen 3 und 5 das Produkt aus Magnetfeld und Krümmungsradius berechnet. Die Konstanz ist besser als 1 %. Die Genauigkeit ist durch die Genauigkeit der Feldberechnung des HEDO-Programms gegeben. <sup>10</sup>

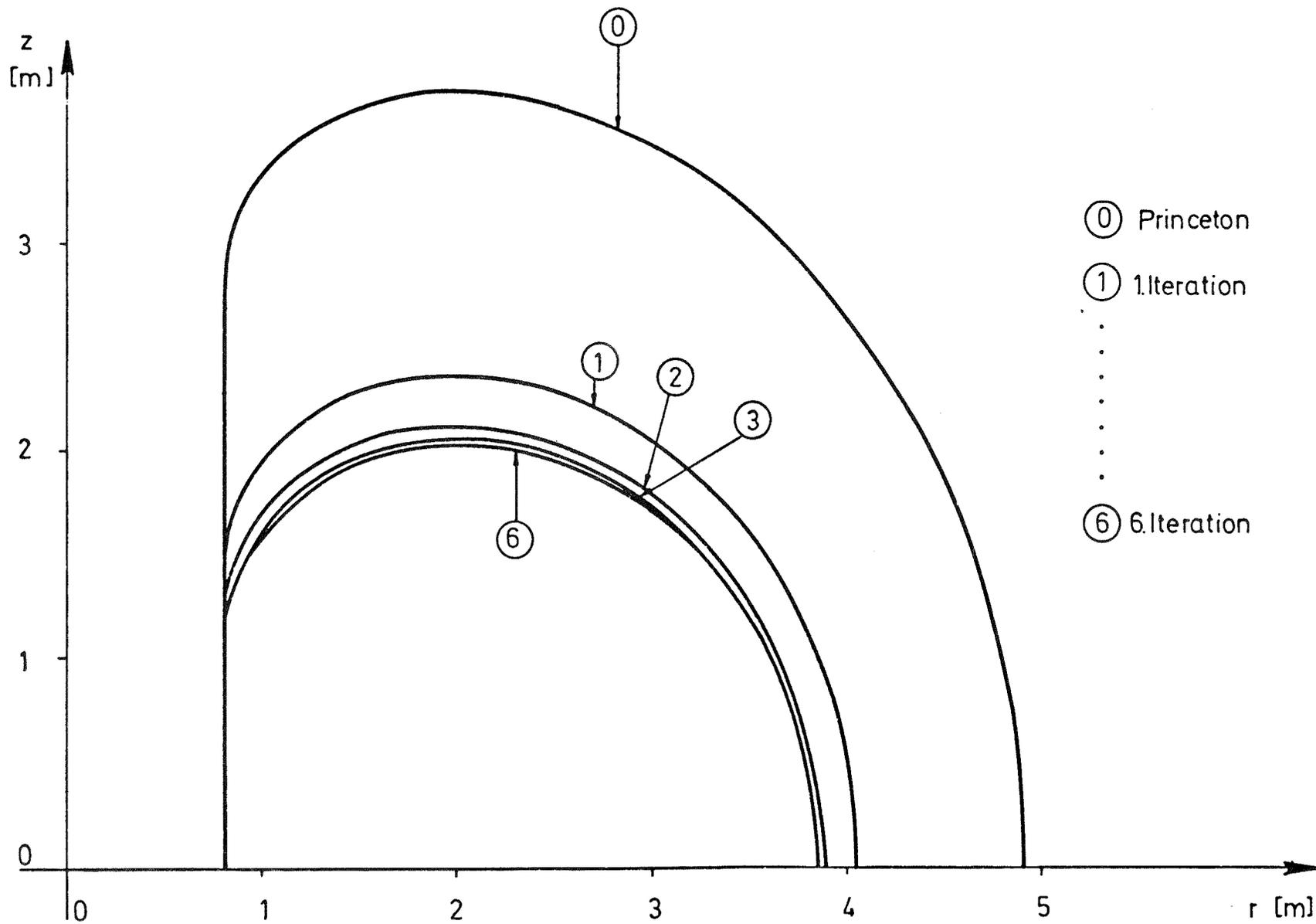


Abb. 6: Optimale Form für LCT bei Berücksichtigung der r- und z-Abhängigkeit des Magnetfeldes.

Tabelle 2: Ergebnis der 6. Iteration für LCT

$r m $	$z m $	$\rho m $	$B T $	$B \cdot \rho  Tm $
3.75888	0.1	2.13077	0.1739321E+01	0.3706100E+01
3.75544	0.22106	2.13072	0.1739543E+01	0.3706475E+01
3.74635	0.32611	2.12821	0.1741570E+01	0.3706480E+01
3.73122	0.34209	2.12262	0.1746271E+01	0.3706664E+01
3.71248	0.44204	2.11733	0.1750987E+01	0.3707413E+01
3.68748	0.54652	2.10697	0.1758906E+01	0.3705966E+01
3.64999	0.67155	2.09221	0.1773052E+01	0.3709594E+01
3.59939	0.80566	2.07566	0.1787574E+01	0.3710395E+01
3.54999	0.91737	2.05254	0.1809351E+01	0.3713766E+01
3.44999	1.09950	2.01509	0.1839647E+01	0.3707453E+01
3.34999	1.24650	1.98956	0.1862152E+01	0.3704254E+01
3.24999	1.36971	1.96259	0.1889320E+01	0.3707967E+01
3.14999	1.47509	1.93470	0.1917524E+01	0.3709825E+01
3.04999	1.56624	1.90339	0.1947185E+01	0.3706247E+01
2.94999	1.64547	1.87270	0.1980212E+01	0.3708339E+01
2.84999	1.71441	1.83905	0.2016300E+01	0.3708069E+01
2.74999	1.77419	1.80556	0.2053072E+01	0.3706948E+01
2.64999	1.82568	1.76896	0.2093677E+01	0.3703978E+01
2.54999	1.86947	1.73275	0.2137715E+01	0.3704132E+01
2.44999	1.90603	1.69528	0.2185601E+01	0.3705197E+01
2.34999	1.93570	1.65676	0.2237091E+01	0.3706319E+01
2.25000	1.95867	1.61703	0.2293253E+01	0.3708259E+01
2.15000	1.97510	1.57529	0.2352939E+01	0.3706625E+01
2.05000	1.98500	1.53279	0.2418214E+01	0.3706614E+01
1.95000	1.98833	1.48901	0.2490335E+01	0.3708137E+01
1.85000	1.98494	1.44313	0.2568435E+01	0.3706595E+01
1.75000	1.97455	1.39603	0.2654863E+01	0.3706275E+01
1.65000	1.95677	1.34791	0.2749709E+01	0.3706370E+01
1.55000	1.93104	1.29774	0.2856395E+01	0.3706871E+01
1.45001	1.89649	1.24579	0.2975252E+01	0.3706546E+01
1.35001	1.85195	1.19145	0.3112010E+01	0.3707792E+01
1.25001	1.79557	1.13502	0.3268805E+01	0.3709236E+01
1.15001	1.72442	1.07575	0.3446773E+01	0.3707859E+01
1.05001	1.63854	1.01319	0.3658332E+01	0.3706648E+01
0.95001	1.51168	0.95043	0.3901999E+01	0.3708593E+01
0.87501	1.38246	0.90286	0.4106196E+01	0.3707304E+01
0.82501	1.25135	0.87340	0.4244643E+01	0.3707292E+01
0.80002	1.14013	0.86341	0.4294090E+01	0.3707561E+01
0.79006	1.03904	0.86980	0.4262331E+01	0.3707396E+01
0.78977	1.03321	0.86910	0.4268623E+01	0.3709851E+01

Tabelle 3: Ergebnis der Iterationen für LCT

Iteration	$R_1$  m	$R_2$  m	$Z_{\max}$  m	Länge des geraden Stücks  m	Bogenlänge  m
0	0,79046	4,81275	0,64995	2,78774	6,63187
1	0,79036	3,97028	0,32097	1,37732	5,00504
2	0,79036	3,81491	0,07728	1,12680	4,70365
3	0,79026	3,77585	0,01570	1,06250	4,62416
4	0,79017	3,76334	1,99559	1,04197	4,60045
5	0,79017	3,76012	1,99093	1,03754	4,59497
6	0,79045	3,75807	1,98836	1,03359	4,59450

Tabelle 4: Ergebnis der Iterationen für TESPE

Iteration	$R_1$  m	$R_2$  m	$Z_{\max}$  m	Länge des geraden Stücks  m	Bogenlänge  m
0	0,19216	1,10056	0,04191	0,42471	1,29555
1	0,19110	0,95701	0,43006	0,19158	1,03435
2	0,19110	0,91378	0,37957	0,14479	0,98850
3	0,19136	0,90142	0,37797	0,13619	0,96671
4	0,19096	0,91943	0,37505	0,13295	0,96545
5	0,19090	0,91871	0,37393	0,13210	0,96383

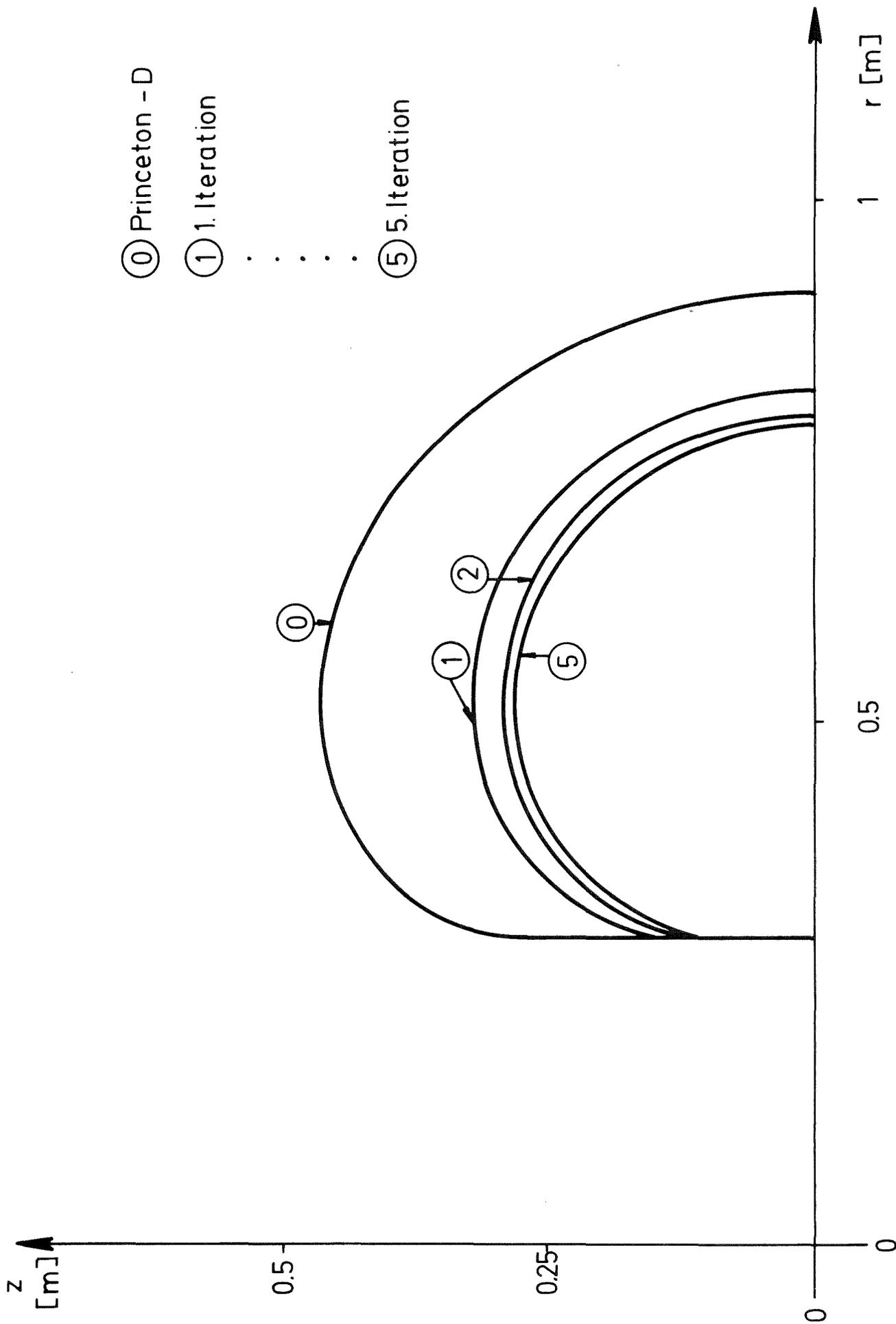


Abb. 7: Optimale Form für TESPE

Tabelle 5: Ergebnis der 5. Iteration für TESPE

$r m $	$z m $	$\rho m $	$B T $	$B \cdot \rho Tm $
0.9 837	0.0	0.38910	0.2154842E+01	0.8394571E+00
0.91812	0.02570	0.38909	0.2154546E+01	0.8383167E+00
0.91623	0.04596	0.38887	0.2155495E+01	0.8382109E+00
0.91312	0.06720	0.38821	0.2159303E+01	0.8381624E+00
0.90875	0.08854	0.38673	0.2166603E+01	0.8378979E+00
0.90250	0.11193	0.38571	0.2172088E+01	0.8378820E+00
0.89500	0.13431	0.38405	0.2180747E+01	0.8375136E+00
0.88500	0.15871	0.38258	0.2189756E+01	0.8377677E+00
0.87500	0.17532	0.38153	0.2200056E+01	0.8393350E+00
0.86500	0.19721	0.37882	0.2215836E+01	0.8394063E+00
0.84500	0.22743	0.37438	0.2237351E+01	0.8375873E+00
0.82500	0.25273	0.37158	0.2257139E+01	0.8387132E+00
0.80500	0.27350	0.36830	0.2276940E+01	0.8385966E+00
0.78500	0.29164	0.36415	0.2299212E+01	0.8372500E+00
0.76500	0.30732	0.36059	0.2320982E+01	0.8369210E+00
0.74500	0.32088	0.35724	0.2348039E+01	0.8391137E+00
0.72500	0.33250	0.35324	0.2374623E+01	0.8388270E+00
0.70500	0.34363	0.34914	0.2401057E+01	0.8385907E+00
0.68500	0.35113	0.34472	0.2433146E+01	0.8387536E+00
0.66500	0.35620	0.34025	0.2465189E+01	0.8387726E+00
0.64500	0.36391	0.33620	0.2495814E+01	0.8390995E+00
0.62500	0.36931	0.33225	0.2529722E+01	0.8404893E+00
0.60500	0.37144	0.32734	0.2566586E+01	0.8401546E+00
0.58500	0.37332	0.32206	0.2600614E+01	0.8376311E+00
0.56500	0.37395	0.31697	0.2641330E+01	0.8372172E+00
0.54500	0.37331	0.31184	0.2688229E+01	0.8383073E+00
0.52500	0.37139	0.30658	0.2734976E+01	0.8385000E+00
0.50500	0.36812	0.30090	0.2785216E+01	0.8386637E+00
0.48500	0.36344	0.29502	0.2836920E+01	0.8369374E+00
0.46500	0.35726	0.28937	0.2892745E+01	0.8370593E+00
0.44500	0.34942	0.28350	0.2957804E+01	0.8385437E+00
0.42500	0.33975	0.27696	0.3023089E+01	0.8372844E+00
0.40500	0.32796	0.27046	0.3095517E+01	0.8372043E+00
0.38500	0.31365	0.26356	0.3176703E+01	0.8371445E+00
0.36500	0.29617	0.25665	0.3268023E+01	0.8387269E+00
0.34500	0.27441	0.24964	0.3366508E+01	0.8379169E+00
0.32000	0.25397	0.24437	0.3427939E+01	0.8376822E+00
0.29500	0.22773	0.23918	0.3500747E+01	0.8372990E+00
0.26500	0.20420	0.23652	0.3540928E+01	0.8375127E+00
0.2375	0.17448	0.23549	0.3560825E+01	0.8385407E+00
0.20432	0.14162	0.23523	0.3562296E+01	0.8379630E+00
0.16172	0.11447	0.23669	0.3540178E+01	0.8379321E+00
0.119077	0.08101	0.23758	0.3522765E+01	0.8369488E+00

## 5. Zusammenfassung und Vergleich

In dieser Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung der Berechnungsmethoden für die Spulenform von Torusmagneten gegeben. Fordert man die Biegemomentfreiheit der Spule im Spulenpaket, so ergibt sich eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung für die Form des Leiters. Wesentlichster Bestandteil dieser Differentialgleichung ist das Magnetfeld. Es zeigt sich, daß das Magnetfeld am Ort des Leiters zu nehmen ist. Berücksichtigt man nur das Magnetfeld auf der Achse, also nur die  $r$ -Abhängigkeit, so ergeben sich große Unterschiede zwischen den resultierenden Spulenformen. Außerdem ist bei geringer Spulenzahl der Unterschied zum idealen Torus bemerkenswert, wie am Beispiel von LCT und TESPE (vgl. Abb. 6 und 7, sowie die Tabellen 3 und 4) zu sehen ist. Insbesondere ist die Wicklungslänge auf der geometrischen Mittellinie für die von uns errechnete optimale Spulenform viel kleiner als die für den idealen Torus.

Mit dem hier erstellten Rechenprogramm hat man ein Instrument, das mit relativ wenigen Eingabewerten (Spulenzahl, Radien, Abmessungen des Wickelpakets, Strom, Windungszahl) die Berechnung der optimalen Form von Magneten in einem Torusverband gestattet.

References

- 1 File, J., Mills, R.G., Sheffield, G.V., Large Superconducting Magnet Designs for Fusion Reactors. IV.th Symp. on Eng. Problems of Fusion Research. Washington, April 1971
- 2 Shafranov, V.D., Optimum Shape of a Toroidal Solenoid. Sov. Phys.-Techn. Phys. 17, 1433 (1973)
- 3 Gralnik, S.L., Tenney, F.H., Analytic solutions for constant-tension coil shapes. J. of Appl. Phys. 47 (1976) 2710
- 4 Boris, J.P., Kuckes, A.F., Closed Expressions for the Magnetic Field in Two-Dimensional Multipole Configurations. Princeton Plasma Physics Laboratory Report MATT-473 (1966)
- 5 File, J., Sheffield, G.V., A Large Superconducting Magnet for Fusion Research (Proc. on the 4<sup>th</sup> Int. Conf. on Magnet Technology. Brookhaven, 1972) Report MATT-927, Princeton Plasma Physics Lab., October 1972
- 6 Moses, R.W. Jr., Young, W.C., Analytic Expressions for Magnetic Forces on Sectored Toroidal Coils, VI<sup>th</sup> Symp. on Eng. Problems of Fusion Research, San Diego, 1975
- 7 Purcell, J.R. et. al.: Tokamak Experimental Power Reactor Studies. Argonne Nat. Lab. Report, ANL/CTR-75-2, June 1975
- 8 Roberts, M. Bettis, E.S., Oak Ridge Tokamak Experimental Power Reactor Study Reference Design, ORNL/TM-5042, Oak Ridge, November 1975
- 9 Söll, M., Comparison of some analytically and numerically calculated parameters for toroidal field coils. IPP 4/145, November 1976

- 10 Preis, H., Berechnung des magnetischen Feldes, der magnetischen Kräfte und des Betriebsverhaltens großer Spulensysteme für Fusionsexperimente.  
IPP III/24, April 1976
- 11 Das JET Projekt, EUR-JET-R7, August 1975