



KfK 2915
EUR 6405d
Februar 1980

Grundlagen der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen

L. Caldarola
Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

KfK 2915

EUR 6405d

Grundlagen der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen

L. CALDAROLA⁽¹⁾

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH., Karlsruhe

(1) Wissenschaftlicher Hauptreferent der Europäischen Gemeinschaft delegiert an das Kernforschungszentrum Karlsruhe (KfK)

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Grundlagen der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen

Zusammenfassung

Die Grundlagen der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen werden erläutert. Es wird gezeigt, daß die beschränkten Variablen Minterme einer Filterfunktion sind, die nur die gewünschten Elemente aus einer Menge aussortieren läßt. Ferner wird gezeigt, daß die Konzepte des Minimalschnitts und der maximalen Deckung von Mintermen, anders als in der gewöhnlichen binären Booleschen Algebra, zu zwei verschiedenen Arten von Primimplikanten (Primterme) führen. Die Vor- und Nachteile der beiden Typen von Primimplikanten werden kurz diskutiert.

Boolean algebra with restrictions on variables

Abstract

The fundamental rules of the boolean algebra with restrictions on variables are explained. The restricted variables can be understood as minterms of a filtering function, which allows one to sort out the desired elements of a set. In addition it is shown that the concepts of the minimal cut set and of the maximum covering of minterms lead to two different types of prime implicants. This is unlike the case of the usual binary boolean algebra. The advantages and disadvantages of both types of prime implicants are also briefly discussed.

Vorwort

Dieser Bericht ist eine erweiterte Fassung meines
Habilitationsvortrages. (1)

Der erste Teil (Abb. 1 bis 17) des Berichtes enthält
die Definitionen und die Grundregeln der Booleschen Algebra
mit beschränkten Variablen.

Im zweiten Teil (Abb. 18 bis 28) werden die Konzepte
von Monomen und Multinomen und zwei daraus folgende unter-
schiedliche Arten von Primimplikanten (Primterme)
betrachtet.

Der Bericht besteht aus einer Sammlung kommentierter
Abbildungen.

(1) Gehalten am Mittwoch den 16. Januar 1980 vor der Fakultät
für Elektrotechnik der Universität Karlsruhe.

Der Vortrag enthielt nur den ersten Teil dieses Berichts.

E I N L E I T U N G

In verschiedenen Veröffentlichungen / 1; 2; 3; 4; 5 / habe ich gezeigt, daß die Boolesche Algebra mit beschränkten Variablen folgende Vorteile hat.

1. Sie ermöglicht die Beschreibung von technischen Systemen, die aus Komponenten mit zwei oder mehr als zwei Zuständen bestehen.
2. Sie ist das Werkzeug, um die Methode der Fehlerbaumanalyse mit der der Zustandsanalyse eines technischen Systems korrekt und einfach zu kombinieren.
3. Sie ermöglicht eine korrekte mathematische Behandlung der statistischen Abhängigkeiten zwischen Komponenten desselben Systems.

In diesem Vortrag möchte ich die Grundlage der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen aufzeigen, indem ich den Zusammenhang zwischen den Beschränkungen und den Axiomen der Booleschen Algebra erläutere. Der Zweck und die Grundregeln der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen werden auch erläutert.

Dieses wird der erste Teil des Vortrages.

Ferner werde ich mich mit der Problematik der Primimplikanten beschäftigen, weil hier ein wesentlicher Unterschied zwischen dieser und der gewöhnlichen Booleschen Algebra liegt.

1. T E I L

Zur Abb. 1

Ich fange mit der Definition der Booleschen Algebra an / 6; 7 /.

Gegeben sei eine Menge von Elementen X, Y, Z usw. Zwischen ihnen seien zwei Operationen erklärt und zwar derart, daß hierdurch irgend zwei Elementen X, Y der Menge ein eindeutig bestimmtes Element zugeordnet wird.

Diese beiden Operationen seien Addition und Multiplikation genannt.

Die Menge bildet zusammen mit den zwei Operationen eine Boolesche Algebra, falls die folgenden vier Gesetze (Axiome) gelten.

Diese heißen: das Kommutative Gesetz, das Distributive Gesetz, die Existenz in der Menge der Elemente 0 und 1 und die Existenz in der Menge des Komplements \bar{X} für jedes Element X der Menge.

Es ist wichtig, hier zu erwähnen, daß keine weitere Spezifikation in der Definition der Booleschen Algebra angegeben wird. Darum sind viele Booleschen Algebren möglich.

Huntington / 8 / hat gezeigt, daß das Assoziative Gesetz aus dem o.g. vier Axiomen abgeleitet werden kann. Ebenso kann man aus den o.g. Axiomen einige Gesetze ableiten, mit denen man operieren kann / 7 /.

Diese Gesetze sind gut bekannt, und ich werde darüber nicht sprechen.

DEFINITION DER BOOLESCHEN ALGEBRA

MENGE VON ELEMENTEN: X; Y; Z u.s.w.

ZWEI OPERATIONEN: (+) ; (·)

VIER AXIOME:

- A1 : KOMMUTATIVES GESETZ
- A2 : DISTRIBUTIVES GESETZ
- A3 : EXISTENZ DER ELEMENTE 0 UND 1
- A4 : EXISTENZ DES KOMPLEMENTES \bar{X} FÜR JEDES
ELEMENT X

Zur Abb. 2

Hier wird der Fall der gewöhnlichen Booleschen Algebra gezeigt. Die Menge enthält nur die Elemente 0 und 1. Darum sind die Variablen binär. Sie können entweder den Wert 0 oder 1 annehmen.

Die zwei Operationen werden Disjunktion und Konjunktion genannt und werden von der linken Tabelle bzw. rechten beschrieben.

Wie man mit der gewöhnlichen Booleschen Algebra operiert, ist auch gut bekannt / 6; 7; 9 /. Darum möchte ich mich nicht damit aufhalten.

GEWÖHNLICHE BOOLESCHE ALGEBRA

(BINÄRE VARIABLEN)

MENGE: { 0 ; 1 }

DEFINITION DER OPERATIONEN:

DISJUNKTION

(ADDITION)

(+)	0	1
0	0	1
1	1	1

KONJUNKTION

(MULTIPLIKATION)

(·)	0	1
0	0	0
1	0	1

Zur Abb. 3

Wir betrachten jetzt die Menge M_b , die drei Elemente (Atome) enthält, nämlich b_1 , b_2 und b_3 .

Z.B. können b_1 , b_2 und b_3 die drei Zustände eines elektrischen Schalters sein, nämlich intakt, geschlossen ausgefallen und offen ausgefallen.

Jedem Atom dieser Menge wird eine binäre Variable zugeordnet, die entweder den Wert 0 oder den Wert 1 annimmt. Diese Variablen sind β_1 ; β_2 und β_3 .

Aus drei binären Variablen entstehen $2^3 = 8$ Kombinationen von Werten der Variablen. Jede Kombination von Werten (Dreierzahl) kann als Atom einer Menge M_r verstanden werden.

Wir machen jetzt die Konvention, daß die Atome b_1 ; b_2 ; b_3 von M_b identisch mit den Atomen r_1 ; r_2 ; r_3 ; von M_r sind. Das heißt, daß M_b eine Untermenge von M_r ist.

In der Tabelle wird das Atom b_1 von der ersten Dreierzahl identifiziert werden, b_2 von der zweiten und b_3 von der dritten. Jede der drei gewählten Kombinationen von Werten hat die Eigenschaft, daß nur eine der Variablen den Wert 1 annimmt. Alle anderen Variablen nehmen den Wert 0 an. Die restlichen fünf Reihen der Tabelle haben kein zugeordnetes Atom in der Menge M_b .

Da wir nur die ersten drei Reihen der Tabelle auswählen wollen, definieren wir eine Boolesche binäre Funktion Φ_B , die den Wert 1 in den ersten drei Reihen der Tabelle und den Wert 0 in den letzten fünf Reihen der Tabelle annimmt. Diese Funktion nennen wir Filterfunktion.

Wir können jetzt schreiben, daß die Menge M_b aus denjenigen Elementen der Menge M_b besteht, für die die Aussage $\Phi_B = 1$ gilt.

MENGE M_b = $\{ b_1 ; b_2 ; b_3 \}$ $n = 3$

BINÄRE VARIABLEN: β_1 β_2 β_3 $2^3 = 8$ KOMBINATIONEN

VARIABLEN			ATOM VON		FILTER-FUNKTION Φ_B
β_1	β_2	β_3	M_r	M_b	
1	0	0	r_1	b_1	1
0	1	0	r_2	b_2	1
0	0	1	r_3	b_3	1
0	1	1	r_4	KEIN	0
1	0	1	r_5	KEIN	0
1	1	0	r_6	KEIN	0
1	1	1	r_7	KEIN	0
0	0	0	r_8	KEIN	0

MENGE M_r = $\{ r_1 ; r_2 ; \dots ; r_8 \}$

$M_b = \{ r \in M_r ; \Phi_B = 1 \}$

Zur Abb. 4

Die Tabelle der Abb. 3 ist die Wahrheitstafel der Filterfunktion ϕ_B . Aus dieser Wahrheitstafel können wir (mit Hilfe der Regeln der gewöhnlichen Booleschen Algebra) ϕ_B als Funktion der Variablen β_1 ; β_2 und β_3 explizieren. Dieses ist in Abb. 4 gegeben.

Wir leiten jetzt die drei beschränkten Variablen B_1 ; B_2 ; und B_3 ein. Jede dieser beschränkten Variablen ist eine Konjunktion aller Variablen Betas. In der Konjunktion ist nur eine Variable β nicht negiert.

Eine Konjunktion, in der alle Grundvariablen anwesend sind, bezeichnet man als Minterm. Darum können wir sagen, daß die beschränkten Variablen die Mintermen der Filterfunktion ϕ_B sind.

Da die beschränkten Variablen die Minterme der Filterfunktion sind, ist die Konjunktion von jedem Paar dieser Variablen gleich Null. Diese sind die Beschränkungen zweiter Art.

Da ϕ_B gleich der Booleschen Summe von B_1 ; B_2 ; und B_3 ist, kann die Bedingung $\phi_B = 1$ mit der Bedingung $B_1 + B_2 + B_3 = 1$ ersetzt werden. Diese Bedingung heißt Beschränkung erster Art.

Jede beschränkte Variable B_i kann auch als Konjunktion der entsprechenden Variablen β_i und der Filterfunktion ϕ_B ausgedrückt werden.

FILTERFUNKTION UND BESCHRÄNKTE VARIABLEN

$$\Phi_B = \underbrace{(\beta_1 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3)}_{B_1} + \underbrace{(\bar{\beta}_1 \beta_2 \bar{\beta}_3)}_{B_2} + \underbrace{(\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_3)}_{B_3}$$

BESCHRÄNKTE VARIABLEN = MINTERME DER FILTERFUNKTION Φ_B

$$B_1 \cdot B_2 = B_1 \cdot B_3 = B_2 \cdot B_3 = 0 \quad \text{BESCHR. 2. ART}$$

(MEHRERE)

$$\{\Phi_B = 1\} \equiv \{B_1 + B_2 + B_3 = 1\} \quad \text{BESCHR. 1. ART}$$

(NUR EINE)

$$B_1 = \beta_1 \cdot \Phi_B$$

$$B_2 = \beta_2 \cdot \Phi_B$$

$$B_3 = \beta_3 \cdot \Phi_B$$

Zur Abb. 5

Wir haben jetzt in der Tabelle der Abb. 5 die Werte der beschränkten Variablen B_1 ; B_2 und B_3 eingeführt.

Aus dieser Tabelle entnimmt man, daß, wenn eine beschränkte Variable den Wert 1 annimmt, alle anderen beschränkten Variablen den Wert 0 annehmen. Diese Bedingungen sind in den Beschränkungen 2. Art enthalten, die sagen, daß zwei Variable nicht den Wert 1 gleichzeitig annehmen können.

Die letzten fünf Reihen der Tabelle sind verboten. Hier nehmen alle beschränkten Variablen den Wert 0 an.

Die Beschränkung 1. Art sorgt dafür, daß mindestens eine der Variablen den Wert 1 annimmt.

Wir werden die beschränkten Variablen B_1 ; B_2 und B_3 statt β_1 ; β_2 und β_3 für die Identifizierung der Atome der Menge M_b wählen. Jedes Atom b_i ist von dem Wert 1 der assoziierten beschränkten Variablen B_i eindeutig identifiziert.

NORMALE VARIABLEN			M_b	Φ_B	BESCHRÄNKTE VARIABLEN		
β_1	β_2	β_3			B_1	B_2	B_3
1	0	0	b_1	1	1	0	0
0	1	0	b_2	1	0	1	0
0	0	1	b_3	1	0	0	1
0	1	1		0	0	0	0
1	0	1		0	0	0	0
1	1	0		0	0	0	0
1	1	1		0	0	0	0
0	0	0		0	0	0	0

BESCHR. 1. ART $B_1 + B_2 + B_3 = 1$

BESCHR. 2. ART $B_1 \cdot B_2 = B_1 \cdot B_3 = B_2 \cdot B_3 = 0$

ZUORDNUNG DAS ATOM b_i WIRD EINDEUTIG VON DER AUSSAGE

$\{B_i = 1\}$ IDENTIFIZIERT

($i=1,2,3$)

Zur Abb. 6

Die Disjunktion der ersten zwei Beschränkungen 2. Art ergibt

$$B_1 \cdot (B_2 + B_3) = 0$$

Aus dem Vergleich zwischen dieser Gleichung und der zweiten Gleichung der Definition des Komplements von B_1 und zwischen der Beschränkung 1. Art und der ersten Gleichung der Definition des Komplements von B_1 ergibt sich, daß das Komplement von B_1 gleich der Disjunktion von B_2 und B_3 ist.

KOMPLEMENT EINER BESCHRÄNKTEN VARIABLEN

BESCHRÄNKUNGEN 2. ART

$$\left. \begin{aligned} B_1 \cdot B_2 &= 0 \\ B_1 \cdot B_3 &= 0 \\ B_2 \cdot B_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$B_1 \cdot \underbrace{(B_2 + B_3)} = 0$$

BESCHRÄNKUNG 1. ART

$$B_1 + \underbrace{(B_2 + B_3)} = 1$$

KOMPLEMENT

$$B_1 + \bar{B}_1 = 1$$

$$B_1 \cdot \bar{B}_1 = 0$$

ES FOLGT:

$$\bar{B}_1 = B_2 + B_3$$

Zur Abb. 7

Was wir für den Fall von drei beschränkten Variablen gesagt haben, kann auf den Fall von n beliebigen Variablen übertragen werden.

Die Beschränkung 1. Art sagt, daß die Disjunktion aller n beschränkten Variablen gleich 1 ist. Dieses bedeutet, daß mindestens eine der Variablen den Wert 1 annimmt.

Die Beschränkungen 2. Art sagen, daß alle möglichen Konjunktionen von zwei verschiedenen Variablen gleich 0 ist. Dieses bedeutet, daß zwei Variablen nicht den Wert 1 gleichzeitig annehmen können. Die Anzahl der Beschränkungen 2. Art ist gleich n mal $(n - 1)$ geteilt durch 2.

Aus den Beschränkungen 1. und 2. Art und aus dem Axiom A4 (Abb. 1) kann man ableiten, daß das Komplement jeder Variablen gleich der Disjunktion aller anderen Variablen ist (Komplementgesetz).

Aber man kann auch zeigen, daß die Beschränkungen 1. und 2. Art aus dem Komplementgesetz und dem Axiom A4 abgeleitet werden können. In anderen Worten, man kann die Bedingung zugrunde legen, daß das Komplement jeder Variable gleich der Disjunktion aller anderen übrig gebliebenen Variablen ist und die Beschränkungen 1. und 2. Art ableiten.

BESCHRÄNKUNGEN

BESCHRÄNKUNG 1. ART

$$\sum_{i=1}^n B_i = 1 \quad (1)$$

BESCHRÄNKUNGEN 2. ART

$$B_i \cdot B_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (2)$$

$n(n-1)/2$

KOMPLEMENTSGESETZ
(NEGATIONSGESETZ)

$$\bar{B}_i = \sum_{j=1}^n B_j \quad (j \neq i) \quad (3)$$

$(i; j = 1; 2; \dots; n)$

AUS (1) (2) UND (A4) FOLGT (3)

ODER

AUS (3) UND (A4) FOLGEN (1) UND (2)

Zur Abb. 8

Eine Komponente eines technischen Systems wird normalerweise beschrieben von einer mehrwertigen Variablen, deren Definitionsbereich eine Anzahl von Werten enthält, die der Anzahl der Zustände der Komponente gleich ist.

Dieses Vorgehen ist sehr einfach, solange alle Komponenten des Systems zwei Zustände haben, nämlich intakt und ausgefallen, weil in diesem Fall die gewöhnliche binäre Boolesche Algebra angewandt werden kann.

Wenn eine Komponente mehr als zwei Zustände hat, ist die zugeordnete mehrwertige Variable nicht mehr binär, und darum ist die gewöhnliche binäre Boolesche Algebra nicht mehr anwendbar.

Man könnte eine mehrwertige Logik entwickeln.
Dieses Vorgehen ist aber sehr schwierig.

Wir wollen dagegen einen anderen Weg einschlagen. Wir wollen die binäre Boolesche Algebra behalten. Darum operieren wir mit binären Variablen.

Jedem Zustand einer Komponente wird eine binäre Boolesche Variable zugeordnet. Die Variablen derselben Komponente aber beschränken sich ein miteinander, weil die Komponente in einer gegebenen Zeit nur in einem Zustand sich befinden kann und muß.

Die Variablen, die sich ein miteinander beschränken, bilden eine Gruppe, die Bande genannt wird.

Wir kommen jetzt zur Definition einer Bande von Variablen.

(Abb. 8)

EINE MENGE VON BINÄREN BOOLESCHEN VARIABLEN WIRD BANDE GENANNT, WENN DAS KOMPLEMENT JEDER VARIABLEN GLEICH DER DISJUNKTION ALLER RESTLICHEN VARIABLEN IST (ODER "WENN DIE VARIABLEN DIE BESCHRÄNKUNGEN 1. UND 2. ART ERFÜLLEN").

JEDER MENGE M_b , DIE AUS EINER BELIEBIGEN ANZAHL VON ATOMEN BESTEHT, KANN MAN EINE BANDE B MIT DERSELBEN ANZAHL VON VARIABLEN ZUORDNEN (UND UMGEKEHRT). DIE ZUGEORDNETE BANDE B WIRD ALS BANDE DER MENGE M_b GEGENZEICHNET.

ZUORDNUNG DAS ATOM b_i WIRD EINDEUTIG VON DER AUSSAGE $\{B_i = 1\}$ IDENTIFIZIERT.

Zur Abb. 9

Wir haben zwei Banden, nämlich B mit n_B Variablen und C mit n_C Variablen. Betrachten wir jetzt die $n_Z = n_B \cdot n_C$ Variablen Z_{ij} . Jede Variable Z_{ij} ist gleich der Konjunktion einer Variable B_i der Bande B und einer Variable C_j der Bande C .

Es ist leicht zu beweisen, daß die Variable Z_{ij} die Beschränkungen 1. und 2. Art erfüllen (siehe Abb. 9).

Darum bildet die Menge der n_Z Variablen Z_{ij} eine Bande, nämlich die Bande Z .

Wir kommen jetzt zur Definition des Produkts (Sternprodukts) von zwei Banden (Abb. 10).

BANDE	BESCHR. VARIABLEN		
	ANZAHL	BEZEICH.	INDICES
B	n_B	B_i	$i=1,2,\dots,n_B$
C	n_C	C_j	$j=1,2,\dots,n_C$

BETRACHTEN WIR DIE $n_Z = n_B \cdot n_C$ VARIABLEN Z_{ij}

$$Z_{ij} = B_i \cdot C_j$$

$$\sum_{i=1}^{n_B} \sum_{j=1}^{n_C} Z_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n_B} B_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_C} C_j \right) = 1 \quad \underline{\text{1. ART}}$$

$$Z_{ij} \cdot Z_{kq} = B_i \cdot C_j \cdot B_k \cdot C_q = 0 \quad \text{für } \left\{ \begin{array}{l} i \neq k \\ \text{oder} \\ j \neq q \end{array} \right. \quad \underline{\text{2. ART}}$$

DIE MENGE Z DER n_Z VARIABLEN Z_{ij} IST EINE BANDE.

Zur Abb. 10

Hier ist die Definition des Produkts von zwei Banden gegeben.

Es ist wichtig zu erwähnen, daß eine Bande eine besondere Art von Menge ist (Abb. 8).

Zwischen Mengen existiert das kartesische Produkt / 10 /.
Das Produkt zwischen Banden aber ist kein kartesisches Produkt.

Um diesen Unterschied zu betonen, werden wir das Produkt zwischen Banden als Sternprodukt bezeichnen.

PRODUKT⁽¹⁾ VON ZWEI BANDEN

DAS PRODUKT VON ZWEI BANDEN, NÄMLICH, B UND C MIT n_B BZW. n_C VARIABLEN, IST EINE BANDE Z , DEREN ANZAHL n_Z VON VARIABLEN GLEICH DEM ARITHMETISCHEN PRODUKT VON n_B UND n_C IST.

JEDE VARIABLE Z_{ij} DER PRODUKTBANDE Z IST GLEICH DER KONJUNKTION DER ENTSPRECHENDEN VARIABLEN B_i UND C_j DER FAKTORBANDEN B BZW. C .

$$Z_{ij} = B_i \cdot C_j$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_B) \quad (j = 1, 2, \dots, n_C)$$

$$Z = B * C$$

(1) AUCH STERNPRODUKT GENANNT

Zur Abb. 11

Wir betrachten jetzt zwei Mengen, nämlich M_b mit n_B Atomen und M_c mit n_C Atomen.

Wir ordnen jedem Atom b_i der Menge M_b eine normale binäre Variable β_i zu. Wir definieren die Filterfunktion ϕ_B und die beschränkten Variablen B_i . Kurz gesagt, ordnen wir eine Bande B der Menge M_b zu. Dasselbe machen wir mit der Menge M_c , deren zugeordnete Bande C heißt.

Betrachten wir jetzt die Menge M_z , die die Produktmenge von M_b und M_c ist. Die Menge M_b und M_c werden Faktormengen genannt. Die Anzahl der Elemente der Produktmenge M_z ist gleich dem arithmetischen Produkt von n_B und n_C . Wir ordnen jedem Atom z_{ij} eine normale binäre Variable ζ_{ij} zu, die gleich der Konjunktion von β_i und γ_j ist.

Wir definieren jetzt die Filterfunktion ϕ_z so, daß sie nur dann den Wert 1 annimmt, wenn nur eine der Variablen ζ_{ij} den Wert 1 und alle anderen den Wert 0 annehmen, d.h. wenn die entsprechenden Variablen β_i und γ_j den Wert 1 und alle restlichen Betas und Gammas den Wert 0 annehmen. Daraus folgt, daß ϕ_z nur dann den Wert 1 annimmt, wenn beide Funktionen ϕ_B und ϕ_C auch den Wert 1 annehmen. Das bedeutet, daß ϕ_z gleich der Konjunktion der Filterfunktionen ϕ_B und ϕ_C ist.

Daher ist nun leicht zu zeigen (Abb. 11), daß die beschränkten Variablen Z_{ij} gleich der Konjunktion der entsprechenden beschränkten Variablen B_i (der Bande B) und C_j (der Bande C) sind.

Wir haben gezeigt (Abb. 9 und 10), daß die Variablen Z_{ij} , die aus dem Sternprodukt von zwei Banden entstehen, eine Bande bilden, weil sie die Beschränkungen 1. und 2. Art erfüllen. Deshalb können wir sagen, daß wir die Bande Z der Produktmenge M_z zugeordnet haben. Die Bande Z heißt Produktbande.

Kurz gesagt, die Bande der Produktmenge M_z ist gleich dem Produkt der Banden der Faktormengen M_b und M_c .

	FAKTORMENGE	FAKTORMENGE	PRODUKTMENGE
	M_b	M_c	$M_z = M_b \times M_c$
ANZAHL DER ATOME	n_B	n_C	$n_z = n_B \cdot n_C$
BEZEICH. DER ATOME	b_i	c_j	$z_{ij} = b_i \times c_j$

NORMALE VARIABLEN	β_i	γ_j	$\zeta_{ij} = \beta_i \cdot \gamma_j$
FILTER-FUNKTIONEN	Φ_B	Φ_C	$\Phi_Z = \Phi_B \cdot \Phi_C$
BESCHR. VARIABLEN	$B_i = \Phi_B \cdot \beta_i$	$C_j = \Phi_C \cdot \gamma_j$	$Z_{ij} = B_i \cdot C_j$
	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Z = B * C</i>
	FAKTORBANDE	FAKTORBANDE	PRODUKTBANDE

$$(i=1,2,\dots,n_B)$$

$$(j=1,2,\dots,n_C)$$

$$Z_{ij} = \Phi_Z \cdot \zeta_{ij} = (\Phi_B \cdot \Phi_C) \cdot (\beta_i \cdot \gamma_j) = (\Phi_B \cdot \beta_i) \cdot (\Phi_C \cdot \gamma_j) = B_i \cdot C_j$$

DIE BANDE EINER PRODUKTMENGE⁽¹⁾ IST GLEICH DEM PRODUKT⁽²⁾ DER BANDEN DER FAKTORMENGEN.

- (1) CARTESISCHES PRODUKT
- (2) STERNPRODUKT

Zur Abb. 12

Wir betrachten jetzt mehrere Faktormengen und die Produktmenge dieser Faktormengen. Wir ordnen jeder Faktormenge eine Faktorbande zu.

Wir können sagen, daß die Bande der Produktmenge gleich dem Produkt aller Faktorbanden ist.

Wir können auch sagen, daß die Produktbande in Faktorbanden zerlegt wird.

Die Zerlegung einer Bande in Faktorbanden ist in der Abb. 12 erläutert.

ZERLEGUNG EINER BANDE IN PRIMÄRBANDEN

JEDE BANDE, DEREN ANZAHL VON VARIABLEN KEINE PRIMZAHL IST, KANN ALS DAS PRODUKT VON ANDEREN BELIEBIGEN BANDEN ENTWICKELT WERDEN, VORAUSGESETZT, DASS DIE ANZAHL DER VARIABLEN DER PRODUKTBANDE GLEICH DEM ARITHMETISCHEN PRODUKT DER ANZAHL DER VARIABLEN ALLER FAKTORBANDEN IST.

DIE FAKTORBANDEN, DIE NICHT WEITER ZERLEGT WERDEN, HEISSEN PRIMÄRBANDEN UND DEREN VARIABLEN PRIMÄRVARIABLEN.

JEDE VARIABLE DER PRODUKTBANDE IST GLEICH EINER BESTIMMTEN KONJUNKTION DER PRIMÄRVARIABLEN, DIE MINTERM GENANNT WIRD.

DIE PRIMÄRVARIABLEN EINES MINTERMS GEHÖREN ZU PRIMÄRBANDEN, DIE UNTEREINANDER VERSCHIEDEN SIND.

DIE ANZAHL DER PRIMÄRVARIABLEN EINES MINTERMS IST GLEICH DER GESAMTEN ANZAHL DER PRIMÄRBANDEN.

Zur Abb. 13

Wir betrachten jetzt ein technisches System, und wir bezeichnen mit " elementarem Zustand " einen Zustand des Systems. Das System besteht aus Komponenten, die wir Primärkomponenten nennen und deren Zustände, Primärzustände.

Wenn wir dieses System mathematisch beschreiben wollen, sagen wir, daß jeder elementare Zustand als Element (das wir Atom nennen) einer Menge M_S betrachtet werden kann.

Ebenso können die Primärzustände der Primärkomponenten als Elemente (die wir Primäratome nennen) von Mengen (die wir Primärmengen nennen) betrachtet werden.

Der erste Satz: " Das System S besteht aus Primärkomponenten " wird in die mathematische Sprache wie folgt übersetzt:
" Die Menge M_S ist gleich dem kartesischen Produkt der Primärmengen. "

Da ein komplexes technisches System eine riesige Anzahl von Zuständen hat, hat die entsprechende Menge eine große Anzahl von Atomen. Darum ist die Methode der Zustandsanalyse, die auf der Mengentheorie basiert, sehr umfangreich und daher unpraktikabel.

Aus diesem Grund ordnet man jedem Atom eine beschränkte binäre Variable zu, und jedem Primäratom eine Primärvariable, die auch binär und beschränkt ist. Dieses erlaubt uns, den zweiten Satz weiter wie folgt zu übersetzen: " Die Bande S ist gleich dem Sternprodukt der Primärbanden."

DAS	SYSTEM S	BESTEHT AUS	PRIMÄRKOMPONENTEN
DIE	MENGE M_S	IST GLEICH DEM KARTES. PRODUKT DER	PRIMÄRMENGEN
DIE	BANDE S	IST GLEICH DEM STERNPRODUKT DER	PRIMÄRBANDEN

Zur Abb. 14

Der erste Satz: " Jeder elementare Zustand des Systems ist gleich einer Kombination von Primärzuständen aller Primärkomponenten ", wird in die mathematische Sprache wie folgt übersetzt:

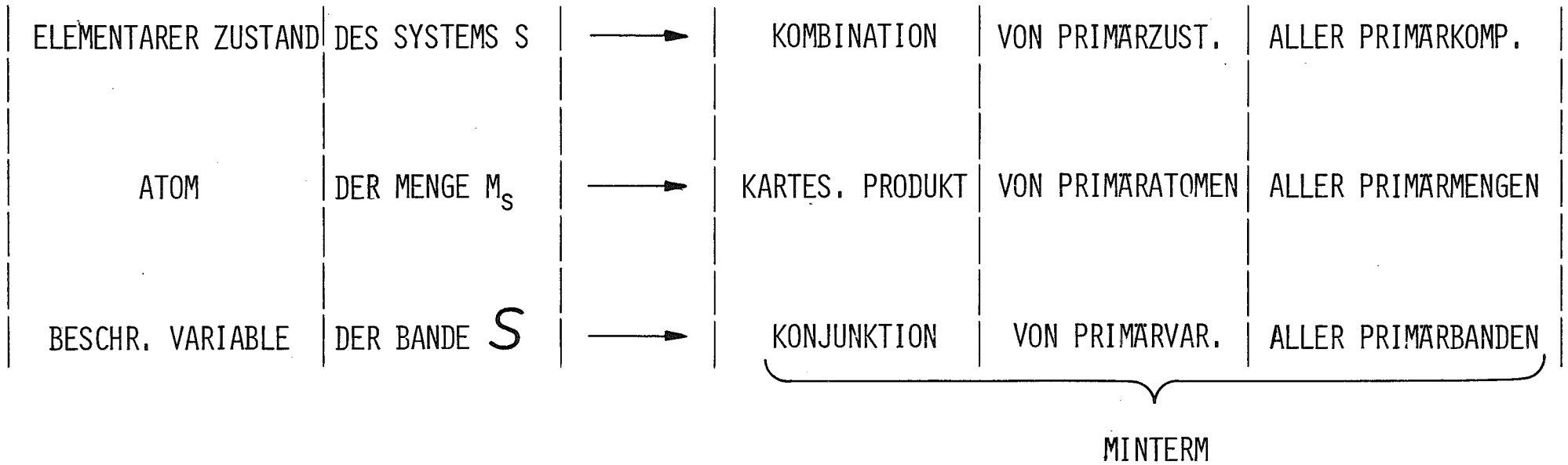
" Jedes Atom der Menge M_s ist gleich einem Kartesischen Produkt von Primäratomen aller Primärmengen."

Wir können den Satz weiter wie folgt übersetzen:

" Jede Variable der Bande **S** ist gleich einer Konjunktion von Primärvariablen aller Primärbanden."

Kurz gesagt, statt der umfangreichen Methode der Mengentheorie, wenden wir die Methode der Booleschen Algebra an. Die beschränkten binären Variablen erlauben uns, die Methode der Booleschen Algebra anzuwenden, auch in dem Fall, daß die Primärkomponenten mehr als zwei Zustände haben.

Es ist jetzt höchste Zeit, daß wir die Boolesche Algebra mit beschränkten Variablen endgültig definieren (Abb. 15)



ANMERKUNG

JEDE { PRIMÄRKOMPONENTE
 PRIMÄRMENGE
 PRIMÄRBANDE } KOMMT IN { DER KOMBINATION
 DEM KARTES. PRODUKT
 DER KONJUNKTION } EINMAL UND NUR EINMAL VOR

BOOLESCHE ALGEBRA MIT BESCHRÄNKTEN VARIABLEN

EINE BINÄRE BOOLESCHE ALGEBRA WIRD BOOLESCHE ALGEBRA MIT BESCHRÄNKTEN VARIABLEN GENANNT, WENN DIE MENGE IHRER PRIMÄRVARIABLEN DERART IN TEILMENGEN TEILBAR IST, DASS (1) JEDE VARIABLE NUR EINER TEILMENGE ANGEHÖRT UND (2) DAS KOMPLEMENT JEDER VARIABLEN EINER JEDEN TEILMENGE GLEICH DER DISJUNKTION ALLER RESTLICHEN VARIABLEN DERSELBEN TEILMENGE IST.

SOLCHE TEILMENGEN HEISSEN PRIMÄRBANDEN.

REGELN DER BOOLESCHEN ALGEBRA MIT BESCHRÄNKTEN VARIABLEN

1. DIE REGELN DER GEWÖHNLICHEN BINÄREN BOOLESCHEN ALGEBRA SIND ALLE IN DER BOOL. ALGEBRA MIT BESCHRÄNKTEN VARIABLEN ENTHALTEN.

2. AUSSERDEM ENTHÄLT DIE BOOL. ALGEBRA MIT BESCHR. VARIABLEN ZUSÄTZLICHE REGELN, DIESE SIND DIE BESCHRÄNKUNGEN ZWISCHEN DEN PRIMÄRVARIABLEN, DIE ZU DERSELBEN PRIMÄRBANDE GEHÖREN.

3. DAGEGEN GIBT ES KEINE BESCHRÄNKUNGEN ZWISCHEN PRIMÄRVARIABLEN, WENN DIESE ZU VERSCHIEDENEN PRIMÄRBANDEN GEHÖREN.

Zur Abb. 17

Wir wollen jetzt an einem Beispiel zeigen, wie man mit der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen operiert.

Es seien drei Primärbanden gegeben, nämlich A mit drei Primärvariablen, B und C je mit zwei.

Wir haben die Funktion TOP als Konjunktion von zwei Disjunktionen von Primärvariablen.

Wir führen die Multiplikation aus bei Anwendung der normalen Gesetze der gewöhnlichen Booleschen Algebra.

Jetzt stellen wir fest, daß die Konjunktion der Primärvariablen A_1 und A_2 verschwinden soll, weil beide Variablen zu derselben Primärbande A gehören (Beschränkung 2. Art)

Wir führen jetzt die Komplementierung der Funktion TOP aus bei Anwendung der normalen Gesetze der gewöhnlichen Booleschen Algebra (Gesetz von De Morgan).

Die Konjunktionen $A_1 \cdot \bar{C}_1$ und $\bar{C}_1 \cdot B_1$ verschwinden, weil sie in dem Term \bar{C}_1 enthalten sind. Ebenso die Konjunktion $\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2$ verschwindet, weil sie in der Konjunktion $\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1$ enthalten ist.

Wir wenden jetzt das Komplementgesetz für \bar{C}_1 und \bar{B}_1 an, die gleich C_2 bzw. B_2 sind.

Wir können auch das Komplementgesetz für \bar{A}_2 und \bar{A}_1 anwenden. \bar{A}_2 ist gleich $A_1 + A_3$ und \bar{A}_1 ist gleich $A_2 + A_3$.

Schließlich erhalten wir die letzte Gleichung, die keine negierte Primärvariable enthält.

Es ist wichtig hier zu betonen, daß wir Konjunktionen haben, die nur Primärvariablen enthalten (die wir Monomen nennen) und Konjunktionen, die sowohl negierte wie auch nicht negierte Variablen enthalten. Diesen letzten Typ nennen wir Multinom.

BEISPIEL

$$(n_A = 3 \quad ; \quad n_B = 2 \quad ; \quad n_C = 2)$$

$$TOP = (C_1 + A_2) \cdot (A_1 + B_1)$$

$$TOP = C_1 \cdot A_1 + \cancel{A_2 \cdot \bar{A}_1} + C_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1$$

$$\begin{aligned} \overline{TOP} &= (\bar{C}_1 + \bar{A}_1) \cdot (\bar{C}_1 + \bar{B}_1) \cdot (\bar{A}_2 + \bar{B}_1) = \\ &= (\bar{C}_1 + \cancel{\bar{A}_1 \cdot \bar{C}_1} + \cancel{\bar{C}_1 \cdot \bar{B}_1} + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1) \cdot (\bar{A}_2 + \bar{B}_1) = \\ &= \bar{C}_1 \cdot \bar{A}_2 + \cancel{\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2} + \bar{C}_1 \cdot \bar{B}_1 + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 = \\ &= C_2 \cdot \bar{A}_2 + C_2 \cdot B_2 + \bar{A}_1 \cdot B_2 \end{aligned}$$

$$\overline{TOP} = C_2 \cdot A_1 + C_2 \cdot A_3 + C_2 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_2 + A_3 \cdot B_2$$

2. T E I L

Zur Abb. 18

Jetzt kommen wir zu dem zweiten Teil des Vortrages.
Hier sind einige Definitionen gegeben, die für die Weiterführung des Vortrages notwendig sind.

Ein Element ist entweder eine Primärvariable oder eine negierte Primärvariable, z. B. sind B_i ; \bar{D}_k Elemente.

Ein Monom ist eine Konjunktion von Primärvariablen. Z.B. ist $C_3 \cdot A_2 \cdot B_1$ ein Monom.

Ein Multinom ist eine Konjunktion von Elementen.
Z.B. ist $\bar{C}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{B}_2$ ein Multinom.

Ein Multinom, dessen Elemente Primärvariablen sind, ist ein Monom.

DEFINITIONEN

1. EIN ELEMENT IST ENTWEDER EINE PRIMÄRVARIABLE
ODER EINE NEGIERTE PRIMÄRVARIABLE

$$B_i ; \bar{D}_k$$

2. EIN MONOM IST EINE KONJUNKTION VON PRIMÄR-
VARIABLEN

$$C_3 \cdot A_2 \cdot B_1$$

3. EIN MULTINOM IST EINE KONJUNKTION VON ELEMENTEN

$$\bar{C}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{B}_2$$

4. EIN MULTINOM, DESSEN ELEMENTE ALLE PRIMÄR-
VARIABLEN SIND, IST EIN MONOM.

Zur Abb. 19

Hier wird an einem Beispiel gezeigt, wie ein Multinom als Disjunktion von Monomen entwickelt werden kann.

Das Multinom ist $\bar{C}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{B}_2$

Da beide Primärbande **B** und **C** je drei Variable enthalten, haben wir

$$\bar{C}_1 = C_2 + C_3$$

und

$$\bar{B}_2 = B_1 + B_3$$

Bei Berücksichtigung der o.g. zwei Gleichungen kann das Multinom weiter wie folgt entwickelt werden

$$\bar{C}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{B}_2 = (C_2 + C_3) \cdot A_2 \cdot (B_1 + B_3)$$

Die Ausführung der Konjunktionen gibt die Disjunktion der Monome, die dem Multinom gleich ist (siehe Abb. 19).

Eine Primärvariable ist gleich der Konjunktion aller restlichen negierten Primärvariablen derselben Primärbande.

Dieses Gesetz folgt direkt aus dem Komplement des Komplementgesetzes. Wie schon erwähnt, sagt das Komplementgesetz, daß das Komplement einer Primärvariablen gleich der Disjunktion aller restlichen Primärvariablen derselben Primärbande ist.

MULTINOM = DISJUNKTION VON MONOMEN

BEISPIEL ($n_A = 2$; $n_B = 3$; $n_C = 3$)

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{B}_2 &= (C_2 + C_3) \cdot A_2 \cdot (B_1 + B_3) = \\ &= C_2 \cdot A_2 \cdot B_1 + C_2 \cdot A_2 \cdot B_3 + C_3 \cdot A_2 \cdot B_1 + C_3 \cdot A_2 \cdot B_3\end{aligned}$$

EINE PRIMÄRVARIABLE IST GLEICH DER KONJUNKTION ALLER
RESTLICHEN NEGIERTEN PRIMÄRVARIABLEN DERSELBEN PRIMÄRBANDE

BEISPIEL ($n_B = 3$)

AUS $\bar{B}_1 = B_2 + B_3$

ES FOLGT $B_1 = \bar{B}_2 \cdot \bar{B}_3$

Zur Abb. 20

Ein Multinom kann verschiedene Formen haben. Die Wichtigsten sind die Längste und die Kürzeste.

Alle Elemente der längsten Form sind negierte Primärvariable. Die kürzeste Form kann aus jeder Form des Multinoms abgeleitet werden durch die Anwendung der Tatsache, daß eine Primärvariable gleich der Konjunktion aller restlichen negierten Primärvariablen derselben Primärkomponente ist.

Zum Beispiel ist der Ausdruck $\bar{B}_1 \cdot \bar{B}_3 \cdot \bar{B}_4 \cdot \bar{A}_2$ die längste Form eines Multinoms, weil alle Primärvariablen negiert sind.

Da die Konjunktion von \bar{B}_1 ; \bar{B}_3 und \bar{B}_4 gleich B_2 ist (weil die Primärbande **B** vier Variablen hat), bekommen wir die kürzeste Form des Multinoms als Konjunktion zwischen B_2 und \bar{A}_2 .

ALLE ELEMENTE DER LÄNGSTEN FORM EINES MULTINOMS SIND
NEGIERTE PRIMÄRVARIABLEN.

DIE KÜRZESTE FORM KANN AUS JEDER FORM DES MULTINOMS
ABGELEITET WERDEN DURCH DIE ANWENDUNG DES GESETZES,
NÄMLICH, DASS EINE PRIMÄRVARIABLE GLEICH DER KONJUNK-
TION ALLER RESTLICHEN NEGIERTEN PRIMÄRVARIABLEN IST,
DIE ZUR SELBEN PRIMÄRBAUDE GEHÖREN.

$$B_i = \prod_{j=1}^{n_B} \bar{B}_j \quad (i \neq j)$$

BEISPIEL $(n_A = 3 \quad ; \quad n_B = 4)$

LÄNGSTE FORM $\bar{B}_1 \cdot \bar{B}_3 \cdot \bar{B}_4 \cdot \bar{A}_2$

KÜRZESTE FORM $B_2 \cdot \bar{A}_2$

Zur Abb. 21

Hier wird die Definition eines Implikanten gegeben.

Eine Boolesche Funktion ist ein Implikant einer zweiten Booleschen Funktion, wenn die Konjunktion der beiden Funktionen gleich der ersten Funktion ist.

IMPLIKATION

EINE BOOLESCHER FUNKTION (Y) IST EIN IMPLIKANT
EINER ZWEITEN BOOLESCHER FUNKTION (TOP), FALLS
DIE KONJUNKTION DER BEIDEN FUNKTIONEN GLEICH
DER ERSTEN FUNKTION (Y) IST.

$$Y \cdot (\text{TOP}) = Y$$

Zur Abb. 22

Man kann eine Boolesche Funktion als Disjunktion von Monomen oder als Disjunktion von Multinomen entwickeln.

In beiden Fällen sind die Primimplikanten von großer Bedeutung. In der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen sind im allgemeinen Primmonomen verschieden von Primmultinomen. Ein Primmonom ist ein Minimalchnitt, d.h. eine Konjunktion einer minimalen Anzahl von Primärvariablen, die die Boolesche Funktion impliziert.

Ein Primmultinom dagegen ist mit dem Konzept der maximalen Deckung von Mintermen einer Booleschen Funktion verbunden.⁽¹⁾

Es ist wichtig zu erwähnen, daß in der gewöhnlichen Booleschen Algebra die zwei Konzepte des Minimalchnitts und der maximalen Deckung von Mintermen zu identischen Primimplikanten führen.

⁽¹⁾ Der Autor ist Herrn E. Guagnini für diesen Hinweis dankbar.

PRIMIMPLIKANTEN

(PRIMTERME)

PRIMMONOM = KONJUNKTION EINER MINIMALEN ANZAHL
VON PRIMÄRVARIABLEN, DIE DIE BOOLESCHE
FUNKTION IMPLIZIERT (MINIMALSCHNITT)

PRIMMULTINOM = KONJUNKTION EINER MINIMALEN ANZAHL
VON NEGIERTEN PRIMÄRVARIABLEN, DIE
DIE BOOLESCHE FUNKTION IMPLIZIERT
(MAXIMALE ÜBERDECKUNG VON MINTERMEN)

IN DER GEWÖHNLICHEN BINÄREN BOOLESCHEN ALGEBRA FÜHREN DIE
KONZEPTE DES MINIMALSCHNITTS UND DER MAXIMALEN DECKUNG ZU
IDENTISCHEN PRIMIMPLIKANTEN.

IN DER BOOLESCHEN ALGEBRA MIT BESCHRÄNKTEN VARIABLEN KÖNNEN
DIE BEIDEN KONZEPTE ZU VERSCHIEDENEN PRIMIMPLIKANTEN FÜHREN.

Zur Abb. 23

Ein Monom, das eine Boolesche Funktion impliziert, ist ein Primmonom, wenn jedes andere von ihm implizierte Monom die Funktion nicht impliziert.

Betrachten wir zuerst in unserem Beispiel das Monom $F_2 \cdot G_2$. Die Monomen, die von diesem Monom impliziert werden, sind F_2 und G_2 . Beide implizieren die Funktion TOP nicht. In der Tat sind die Konjunktionen zwischen F_2 und TOP und zwischen G_2 und TOP verschieden von F_2 bzw. G_2 . Darum ist das Monom $F_2 \cdot G_2$ ein Primmonom der Funktion TOP.

Dagegen ist das Monom $F_2 \cdot G_1$ kein Primmonom, weil die Konjunktion zwischen G_1 und TOP gleich G_1 ist. Da G_1 die Funktion TOP impliziert, ist das Monom $F_2 \cdot G_1$ kein Primmonom.

PRIMMONOM

EIN MONOM, DAS EINE BOOLESCHE FUNKTION IMPLIZIERT,
IST EIN PRIMMONOM, WENN JEDES ANDERE VON IHM IMPLI-
ZIERTE MONOM DIE FUNKTION NICHT IMPLIZIERT.

BEISPIEL ($n_G = 4, \quad n_F = 3$)

$$\text{TOP} = F_2 \cdot G_2 + F_2 \cdot G_1 + G_1 \cdot F_3 + G_2 \cdot F_3 + F_1 \cdot G_1 + F_1 \cdot G_3 + F_3 \cdot G_3$$

$F_2 \cdot G_2$ IST EIN PRIMMONOM WEIL

$$F_2 \cdot (\text{TOP}) \neq F_2 \qquad G_2 \cdot (\text{TOP}) \neq G_2$$

$F_2 \cdot G_1$ IST KEIN PRIMMONOM WEIL

$$G_1 \cdot (\text{TOP}) = G_1$$

Zur Abb. 24

Ein Multinom, das eine Boolesche Funktion impliziert, ist ein Primmultinom, wenn jedes andere von ihm implizierte Multinom die Funktion nicht impliziert.

In unserem Beispiel betrachten wir das Multinom $G_2 \cdot \bar{F}_1$. Es ist wichtig, daß man erstens die längste Form des Multinoms berechnet, und aus dieser kann man alle implizierten Multinomen sofort herausziehen. Die längste Form des betrachteten Multinoms ist $\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot \bar{F}_1$. Da das implizierte Multinom $\bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot \bar{F}_1$ die Funktion TOP impliziert, ist das betrachtete Multinom kein Primmultinom.

Das Multinom $\bar{F}_2 \cdot \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4$ ist dagegen ein Primmultinom, weil, wie leicht zu sehen ist, alle anderen von ihm implizierte Multinomen keine Implikanten der Funktion TOP sind.

PRIMMULTINOM

EIN MULTINOM, DAS EINE BOOLESCHE FUNKTION IMPLIZIERT,
IST EIN PRIMMULTINOM, WENN JEDES ANDERE VON IHM IM-
PLIZIERTE MULTINOM DIE FUNKTION NICHT IMPLIZIERT.

BEISPIEL (n_G = 4 ; n_F = 3)

$$\text{TOP} = G_2 \cdot \bar{F}_1 + G_1 \cdot \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \cdot \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4$$

$$G_2 \cdot \bar{F}_1 = \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot \bar{F}_1 \text{ (LANGSTE FORM) IST KEIN PRIMMULTINOM}$$

W E I L

$$\bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot \bar{F}_1 \text{ (TOP)} = \bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot \bar{F}_1$$

$$\bar{F}_2 \cdot \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4 \text{ (LANGSTE FORM) IST EIN PRIMMULTINOM}$$

W E I L

$$\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4 \text{ (TOP)} \neq \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4 \quad \bar{F}_2 \cdot \bar{G}_4 \text{ (TOP)} \neq \bar{F}_2 \cdot \bar{G}_4$$

$$\bar{F}_2 \cdot \bar{G}_2 \text{ (TOP)} \neq \bar{F}_2 \cdot \bar{G}_2$$

Zur Abb. 25

Es sei eine Boolesche Funktion gegeben.

Eine Disjunktion von Primmonomen, die gleich der Funktion ist, heißt Basis der Funktion.

Eine Disjunktion von Primmultinomen, die gleich der Funktion ist, heißt Multibasis der Funktion.

Die vollständige Basis einer Booleschen Funktion ist die Disjunktion aller Primmonomen der Funktion und ist selbstverständlich gleich der Funktion.

Die vollständige Multibasis einer Booleschen Funktion ist die Disjunktion aller Primmultinomen der Funktion und ist auch gleich der Funktion.

DEFINITIONEN

1. DIE DISJUNKTION ALLER PRIMMONOMEN
EINER BOOLESCHEN FUNKTION HEISST
VOLLSTÄNDIGE BASIS DER FUNKTION.

2. DIE DISJUNKTION ALLER PRIMMULTINOMEN
EINER BOOLESCHEN FUNKTION HEISST
VOLLSTÄNDIGE MULTIBASIS DER
FUNKTION.

Zur Abb. 26

In diesem Beispiel, das sich auf den Ausfall eines technischen Systems bezieht, sind vollständige Basis und vollständige Multibasis der Booleschen Funktion TOP verglichen.

Die vollständige Multibasis enthält das Multinom $\bar{G}_4 \cdot L_2 \cdot F_2$, das völlig überflüssig ist. D.h. daß die Funktion unverändert bleibt, wenn dieses Multinom wegfällt.

Es ist klar, daß in diesem Fall die Berechnung der vollständigen Basis von Vorteil ist, weil

- (1) der Ausdruck kürzer ist,
- (2) die Bedeutung der einzelnen Primmonomen einfacher und direkter ist und
- (3) die Algorithmen weniger aufwendig sind.

BEISPIEL

(AUSFALL EINES SYSTEMS)

PRIMÄRBANDE	ANZAHL DER VARIABLEN
G	4
F	3
L	3

VOLLSTÄNDIGE BASIS

$$TOP = F_1 \cdot L_1 + G_2 \cdot L_1 + G_1 + G_3 \cdot F_1 + G_2 \cdot F_2 + G_3 \cdot L_2$$

VOLLSTÄNDIGE MULTIBASIS

$$TOP = F_1 \cdot L_1 + \bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot L_1 + G_1 + \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4 \cdot F_1 + \bar{G}_3 \cdot \bar{G}_4 \cdot F_2 + \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_4 \cdot L_2 + \underbrace{\bar{G}_4 \cdot L_2 \cdot F_2}$$



Zur Abb. 27

Das Beispiel hier bezieht sich auf den Erfolg des gerade betrachteten Systems.

Hier werden die vollständige Basis und die vollständige Multibasis der Funktion $\overline{\text{TOP}}$ verglichen.

Im Gegensatz zu dem Ausfall des Systems, ist hier die vollständige Multibasis viel kürzer.

Es ist auch wichtig zu erwähnen, daß hier die vollständige Multibasis einige überflüssige Primmultinome enthält. Z.B. wird die Funktion unverändert bleiben, wenn die beiden letzten Primmultinome wegfallen.

Es ist leicht zu zeigen, daß wenn alle negierten Primvariablen aller Primmultinomen der vollständigen Multibasis expliziert werden, so erhält man alle Primmonome der vollständigen Basis.

Wenn man aber eine unvollständige Multibasis (z.B. ohne die letzten beiden Primmultinome) betrachtet und alle negierten Primvariablen expliziert, so kann man (wie in diesem Fall) nicht alle Primmonome und zusätzlich einige Monome, die keine Primmonome sind, bekommen.

Die Durchführung dieser beiden letzten Rechnungen ist dem Leser als Übung überlassen.

BEISPIEL

(ERFOLG EINES SYSTEMS)

VOLLSTÄNDIGE BASIS

$$\begin{aligned}\overline{\text{TOP}} &= G_2 \cdot F_1 \cdot L_2 + G_2 \cdot F_1 \cdot L_3 + G_2 \cdot F_3 \cdot L_2 + G_2 \cdot F_3 \cdot L_3 + \\ &+ G_3 \cdot F_2 \cdot L_1 + G_3 \cdot F_2 \cdot L_3 + G_3 \cdot F_3 \cdot L_1 + G_3 \cdot F_3 \cdot L_3 + \\ &+ G_4 \cdot F_2 + G_4 \cdot F_3 + G_4 \cdot L_2 + G_4 \cdot L_3\end{aligned}$$

VOLLSTÄNDIGE MULTIBASIS

$$\begin{aligned}\overline{\text{TOP}} &= \bar{F}_1 \cdot G_4 + \bar{F}_1 \cdot \bar{L}_2 \cdot \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 + \bar{L}_1 \cdot \bar{F}_2 \cdot \bar{G}_3 \cdot \bar{G}_1 + \\ &+ \bar{L}_1 \cdot G_4 + F_3 \cdot L_3 \cdot \bar{G}_1\end{aligned}$$

Zur Abb. 28

Und jetzt können wir einige vorläufige Schlußfolgerungen über Vorteile und Nachteile von der Anwendung von Primmonomen und Primmultinomen ziehen.

Die Algorithmen für die Berechnung der Primmultinomen sind viel komplizierter als die für die Berechnung des Primmonomen, weil eine größere Anzahl von Gesetzen angewandt werden muß.

Die Bedeutung der Primmonomen ist einfacher und direkter zu verstehen als die der Primmultinomen, weil die Primmonomen Minimalschnitte sind.

Es scheint z.Zt., daß die Anwendung der Primmultinomen nur im Fall der Beschreibung des Erfolgs eines technischen Systems von Vorteil sein kann, weil die entsprechenden Booleschen Ausdrücke kompakter sind. Das gilt nicht im Fall des Ausfalls eines Systems.

PRIMMONOMEN UND PRIMMULTINOMEN

SCHLUSSFOLGERUNGEN

1. DIE ALGORITHMEN FÜR DIE BERECHNUNG DER PRIMMULTINOMEN SIND VIEL KOMPLIZIERTER ALS DIE FÜR DIE BERECHNUNG DER PRIMMONOMEN (GRÖßERE ANZAHL VON GESETZEN).
2. DIE BEDEUTUNG DER PRIMMONOMEN (MINIMALSCHNITT) IST EINFACHER UND DIREKTER ZU VERSTEHEN ALS DIE DER PRIMMULTINOMEN (MAXIMALE DECKUNG).
3. ES SCHEINT Z.Z., DASS DIE ANWENDUNG DER PRIMMULTINOMEN NUR IM FALL DER BESCHREIBUNG DES ERFOLGES EINES TECHNISCHEN SYSTEMS VON VORTEIL SEIN KANN (KOMPaktere BOOLESCHE AUSDRÜCKE).

Abschließende Zusammenfassung

Mit diesem Vortrag habe ich gezeigt, daß die beschränkten Variablen als Minterme einer " ad hoc " definierten Filterfunktion verstanden werden können.

Aus diesem Grund sind zusätzliche Axiome für die Theorie der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen nicht notwendig.

Der Zweck und die Grundregeln dieser Algebra wurden bereits erläutert.

Zusätzlich habe ich die Problematik der Primimplikanten kurz dargestellt. Anders als in dem Fall der gewöhnlichen Booleschen Algebra führen die Konzepte des " Minimalschnitts " und der " maximalen Deckung von Mintermen " in der Booleschen Algebra mit beschränkten Variablen nicht zu identischen Primimplikanten.

Die Vorteile und die Nachteile bei der Anwendung beider Arten von Primimplikanten wurden auch kurz diskutiert.

Literaturverzeichnis

1. L. Caldarola, A. Wickenhäuser, 1977,
" Recent Advancements in fault tree methodology at
Karlsruhe ", International Conf. on Nucl. Systems
Reliability Engineering and Risk Assessment,
Gatlingburg, SIAM, 518-542, June 1977
2. L. Caldarola, 1978, " Fault tree analysis of multi-
state systems with multistate components ",
ANS Topical Meeting on Probabilistic Analysis of
Nuclear Reactor Safety, Los Angeles, California,
Paper VIII.1. May 1978
3. L. Caldarola, 1979, " Fault tree analysis with multi-
state components ", KFK 2761, February 1979.
4. L. Caldarola, 1980, " Generalized fault tree analysis
combined with state analysis ", KfK 2530.
5. L. Caldarola, 1980, "Coherent systems with multistate
components" (accepted for publication in Nuclear
Engineering and Design).
6. O. Föllinger und W. Weber, 1967, " Methoden der Schalt-
algebra " R. Oldenbourg Verlag München. Wien
7. J.E. Whitesitt, 1961, " Boolean Algebra and its applica-
tions " Addison-Wesley Publishing Co. Inc.
8. E.V. Huntington, 1904, " Sets of independent postulates
for the algebra of Logic." Transactions of the American
Mathematical Society, vol. 5, pages 288-309
9. J. Kuntzmann, 1967, " Fundamental Boolean Algebra,"
Blackie and Sons Ltd.
10. W. Dück und M. Bliefernich, 1971, " Operationsforschung
Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle ".
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, Band 1.