

KfK 3142
März 1981

Numerische Untersuchung der Naturkonvektion in einer von unten beheizten, schmalen Hele-Shaw-Zelle

C. Günther
Institut für Reaktorbauelemente

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Reaktorbauelemente

KfK 3142

Numerische Untersuchung der Naturkonvektion
in einer von unten beheizten, schmalen Hele-Shaw-Zelle

Claus Günther

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Inhaltsangabe

Schmale, von unten beheizte Hele-Shaw-Zellen wurden in jüngster Zeit mehrfach experimentell und auch theoretisch untersucht. Dabei wurden für gewisse Bereiche überkritischer Rayleigh-Zahlen jeweils interessante Folgen verschiedener Strömungsmuster gefunden. In der vorliegenden Arbeit werden entsprechende numerische Untersuchungen für eine Hele-Shaw-Zelle mit Breiten- zu-Höhen- zu-Tiefenverhältnis von 2:7:0,3, welche feste, adiabate vertikale Berandungen hat, mit Hilfe eines Rechenprogramms durchgeführt, das die Bewegungsgleichungen des Problems mittels eines Differenzenverfahrens löst. Durch einen parabolischen Ansatz für die Abhängigkeit der Strömung von der z-Koordinate (schmalste Ausdehnung der Hele-Shaw-Zelle) erhält man eine 2-dimensionale Form der Impulsgleichungen, in der sowohl viskose als auch quasiporöse, d.h. den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten proportionale Reibungsterme auftreten. Es zeigt sich, daß die gewählte Methode vorzüglich geeignet ist, die auftretenden transienten Naturkonvektionsvorgänge zu berechnen.

Die Analyse der Symmetrieeigenschaften der berechneten Lösungen liefert mit erträglichem rechnerischen Aufwand die Lösungsverzweigungen des Problems bis zu 16-fach überkritischer Rayleigh-Zahl.

Bemerkenswert ist, daß für einen bestimmten Rayleigh-Zahlbereich zwei stabile Strömungsformen zu einer Rayleigh-Zahl existieren, eine stationäre und eine oszillierende periodische Strömung. Die Abnahme der dimensionslosen Periodendauer der oszillierenden Bewegungen mit zunehmender Rayleigh-Zahl ergibt sich ähnlich wie bei entsprechenden Experimenten. Insgesamt ist eine zumindest qualitative Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen vorhanden.

NUMERICAL INVESTIGATION OF NATURAL CONVECTION IN A HELE-SHAW GAP
HEATED FROM BELOW

Abstract

Small vertical Hele-Shaw-cells heated from below have been investigated recently by several experiments. The experiments are revealing interesting sequences of various convection modes of the fluid flow for certain regions of supercritical Rayleigh-numbers Ra .

The present paper describes a numerical study of the natural convection in a Hele-Shaw-cell; this cavity is of rectangular shape with aspect ratios $H/2d = 22.3$ and $A = H/L = 3.5$. This is accomplished by using a computer code which solves the equations of the problem by a finite difference method. Introducing a parabolic approach for the dependence of the fluid flow on the z -coordinate (direction of the smallest dimension of the cavity), a twodimensional model of the problem is obtained with either a viscous and also a quasiporous friction term in the momentum equations. The computational method is shown to be appropriate to calculate the occurring transient natural convective flows.

The analysis of the properties of the symmetry of the calculated solutions is yielding the bifurcations of the problem up to 16 times the critical Rayleigh number. For a certain region of Ra , there are two different stable solutions for a given Ra , one which is a stationary solution and another which is an oscillating periodical one. The decrease of the dimensionless period of the oscillatory solutions with increasing Ra is found to be in semi-quantitative agreement with experimental findings. Altogether there is an at least qualitative agreement with experimental results.

Numerische Untersuchung der Naturkonvektion in einer von unten
beheizten, schmalen Hele-Shaw-Zelle

Inhaltsangabe

Abstract

- 1) Einleitung
- 2) Physikalisches Modell
- 3) Das Rechenprogramm LEITH
- 4) Zur Stabilität von Strömungsformen
- 5) Ergebnisse
- 6) Vergleich mit bekannten Ergebnissen und Diskussion
- 7) Zusammenfassung

Literatur

Bezeichnungsverzeichnis

Verzeichnis der Abbildungen

Abbildungen

1) Einleitung

Experimentelle Untersuchungen von KOSTER und MÜLLER /11/, /12/ und KOSTER /10/ an Hele-Shaw-Zellen mit Höhen- zu Breitenverhältnissen $A > 1$ haben gezeigt, daß für einen bestimmten Bereich überkritischer Rayleigh-Zahlen oszillierende Konvektionsformen auftreten, wobei sich noch in Abhängigkeit von Ra (Rayleigh-Zahl) verschiedene Strömungsmuster ergeben. Ähnliche Untersuchungen für $A = 2$ sind von PUTIN und TKACHEVA /17/ beschrieben worden.

Um die Nachrechenbarkeit der experimentellen Ergebnisse von /10/ zu untersuchen und genaueren Aufschluß über die zeitabhängigen Strömungsformen zu erhalten, - im Experiment wurden hauptsächlich die Temperaturfelder mit einem holografischen Interferometer gemessen-, wurde in mehreren kürzlich erstellten Rechenprogrammen zur Berechnung zweidimensionaler laminarer Naturkonvektion in Rechtecksgeometrie eine Modifikation eingebaut und einige Experimente mit seitlich perfekt wärmeleitenden Berandungen nachgerechnet. Die durchgeführte Programmänderung berücksichtigte die Reibung in der dritten Dimension in der Form, daß ein zusätzlicher, der Geschwindigkeit proportionaler Reibungsterm mitgenommen wurde. Bei sonstigen numerischen Untersuchungen für Hele-Shaw-Zellen oder für poröses Medium an breiteren Anordnungen hat man diesen Reibungsterm wegen seiner Dominanz als einzigen mitgenommen. Eines der benutzten Programme namens LEITH stellte sich als besonders geeignet zur Nachrechnung oszillierender Flüssigkeitsbewegungen heraus. Diese Nachrechnungen für $A = 3.5$ ergaben in den wenigen gerechneten Beispielen eine gute zumindest qualitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment.

Diese etwas überraschende Übereinstimmung war der Anlaß für eine systematischere numerische Untersuchung des verwandten Problems, bei dem die vertikalen Seiten als adiabat angenommen wurden. Auch dieses Problem ist von KOSTER /10/ experimentell untersucht worden und auch die von PUTIN und TKACHEVA /17/ beschriebenen Experimente waren mit schlecht wärmeleitenden seitlichen Berandungen durchgeführt worden, so daß für numerische Untersuchungen

eine Vergleichsmöglichkeit besteht.

Der schmale, von unten beheizte Hele-Shaw-Spalt stellt eine relativ einfache und übersichtliche Anordnung dar, an der sich Veränderungen der Strömungsform untersuchen lassen. Man hofft, aus dem Studium der Abfolge verschiedener Strömungsmuster auch Erkenntnisse über den Übergang zur Turbulenz gewinnen zu können.

In den letzten Jahren wurde Naturkonvektion in rechtwinkligen Behältern, welche von unten beheizt werden, verstärkt untersucht. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Untersuchungen wurde 1978 von CATTON /3/ gegeben. Ein spezieller Fall eines solchen Behälters, den wir uns in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq X,$$

$$0 \leq y \leq Y,$$

$$0 \leq z \leq Z$$

gegeben denken (- Schwerkraft in Richtung der negativen Y-Achse-), liegt vor, wenn Z viel kleiner als X und Y ist; man pflegt einen solchen Behälter Hele-Shaw-Zelle zu nennen. Untersuchungen an Hele-Shaw-Zellen werden schon länger vorgenommen, um bestimmte zweidimensionale Strömungsformen sichtbar zu machen und auch, um die Strömung in porösen Medien zu simulieren.

Eine weitere Spezialisierung liegt vor, wenn X kleiner oder wesentlich kleiner als Y ist. Diese Anordnung wird auch als Hele-Shaw-Spalt (engl.: "Hele-Shaw-slot") bezeichnet. Die erste Untersuchung der Strömung in einer solchen Anordnung erfolgte in einer Arbeit von LYUBIMOV et al. /14/, in der auch schon eine Abbildung einer typischen oszillierenden Strömungsform für solche Behältnisse wiedergegeben wird.

Die schon eingangs erwähnten Arbeiten von KOSTER und MÜLLER /11/,

KOSTER /10/, und von TKACHEVA und PUTIN /17/ zeigten deutlicher, daß im Hele-Shaw-Spalt mit sich verändernder Rayleigh-Zahl mehrere verschiedene Strömungsmuster auftreten. Diese Anordnung, die nur eine zweidimensionale Strömung zuläßt, eignet sich besonders gut zum Studium von Lösungsverzweigungen. Den zitierten Untersuchungen gemeinsam ist ein bei einer kritischen Rayleigh-Zahl erfolgreicher Übergang vom Ruhezustand zu einem richtungsorientierten stationären Zustand, der in manchen Fällen für steigendes Ra noch einen anderen stationären Strömungszustand durchläuft, bevor dann verschiedene oszillierende Strömungen auftreten (siehe z.B. Abb. 1 und Abb. 2). In den Experimenten wird mehrfach die Existenz zweier verschiedener stabiler Strömungsformen zu einer Rayleigh-Zahl, eine stationäre und eine periodische Strömung, für gewisse Rayleigh-Zahlbereiche ähnlich wie schon in den Untersuchungen von HORNE und O'SULLIVAN /9/ für poröses Medium gefunden.

Für stark überkritische Verhältnisse (KOSTER; Ra etwa Faktor 9 über dem Einsetzen der Oszillationen, gegenüber Ra_c etwa Faktor 20, - PUTIN und TKACHEVA: etwa 20-fach überkritisch) zeigen die Experimente Oszillationen rein stochastischer Natur. Bei etwa 40-fach überkritischer Rayleigh-Zahl fand KOSTER eine Strömungsform, die den Eindruck einer stationären Viererrolle erweckt. Aufgrund der schwachen, jedoch im Experiment deutlich sichtbaren Strömungsschwankungen kann man vermuten, daß diese "Viererrolle" als Grenzyklus des Problems für große Ra mit geringer Ausdehnung anzusehen ist. Bekanntlich besteht unter bestimmten Voraussetzungen eine formale Analogie zwischen den Gleichungen, welche die Strömung in einer Hele-Shaw-Zelle beschreiben und den Gleichungen, welche für ein poröses Medium gelten. Zu diesen Voraussetzungen gehört,

- daß die Trägheitskräfte in den Impulsgleichungen vernachlässigt werden können.
- daß die Strömung im porösen Stoff zweidimensional ist, und
- daß die viskose Reibung in der Hele-Shaw-Zelle vernachlässigbar ist.

Da die hier untersuchten Hele-Shaw-Zellen schmal sind, ist die letztgenannte Bedingung nicht erfüllt. Aus diesem Grunde sind Vergleiche mit Ergebnissen für poröse Medien nur beschränkt zulässig. Unter der genannten Einschränkung kann auch ein Vergleich mit den Untersuchungen von CALTAGIRONE /2/ erfolgen, der die zweidimensionalen Bewegungsgleichungen für poröses Medium in einem Rechtecksbereich der Höhe H und Breite L für verschiedene Werte des Breiten- zu Höhenverhältnisses A und verschiedene Werte der dort eingeführten Rayleigh-Zahl Ra^* gelöst hat. Die Werte des untersuchten Parameters A variierten für $Ra^* = 50$ von 0.4 bis 1.2, für $Ra^* = 2000$ wurden Werte von $A = 0.02$ bis 0.25 betrachtet. Trägheitskräfte wurden nur in der Energiegleichung berücksichtigt. Es zeigte sich hier, daß jeweils für festes A mit wachsendem Ra^* zunächst stationäre Konvektion als stabile Strömungsform einsetzte, für weiter steigendes Ra^* traten fluktuierende Konvektionsformen auf. Diese Übergänge zu fluktuierender Konvektion traten für um so höhere Werte von Ra^* auf, je schmaler die Zelle war. Bemerkenswert war außerdem die Feststellung, daß für festes Ra^* die Nusselt-Zahl Nu^* nicht monoton mit A anwuchs.

Zuvor schon war man in Experimenten, siehe /1/ und /4/, und in theoretischen Untersuchungen /9/ bei porösen Medien für breitere als die hier betrachteten Anordnungen auf fluktuierende Formen von Konvektion gestoßen.

2) Physikalisches Modell

Die Gleichungen für die Strömung eines Fluids in einer rechteckigen Kavität, die in x-y-z-Koordinaten durch

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq L, \\ 0 &\leq y \leq H, \\ -Z &\leq z \leq Z \end{aligned}$$

beschrieben werden kann und bei der

- die Boussinesq-Approximation verwendet wird, d.h. die Dichte wird überall konstant angesetzt außer im Auftriebsterm, die übrigen Stoffwerte seien konstant,
- die Dissipation in der Energiegleichung vernachlässigt wird,

lauten in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} \vec{u} = \text{Pr} \{ \nabla^2 \vec{u} - \text{grad} \phi + \text{Ra} \cdot \vec{k} \cdot T \}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} T = \nabla^2 T$$

$$\text{div} \vec{u} = 0$$

$$\text{Es ist } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{Ra} = \frac{\alpha g \cdot \Delta T \cdot H^3}{\nu \cdot \kappa}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \vec{k} \text{ ein}$$

Einheitsvektor, der in Richtung der negativen y-Achse zeigt und die Richtung der Schwerkraft angibt.

\vec{u} ist der Geschwindigkeitsvektor, T die Temperatur, t die Zeit. ν ist die kinematische Zähigkeit, κ die Temperaturleitzahl, α der Volumenausdehnungskoeffizient, g die Gravitationskonstante, ϕ ist der durch die mittlere Dichte ρ_0 dividierte Druck. Man ersieht aus der Darstellung, daß das Problem u.a. von den

dimensionslosen Kennzahlen Ra, der Rayleigh-Zahl, und Pr, der Prandtl-Zahl, abhängt. Es wird angenommen, daß alle Ränder des betrachteten Parallelepipeds fest sind. Weiter sei $T = T_1$ auf $y = 0$, $T = T_0$ auf $y = 1$, die seitlichen Berandungen bei $x = 0$ und $x = L$ seien adiabat, die Ränder bei $z = \pm Z$ werden ebenfalls als adiabat vorausgesetzt.

Für eine in z-Richtung sehr dünne Kavität der Dicke $2d$ (in dimensionslosen Koordinaten $(\frac{2d}{H})$, d.h. $Z = d$, wobei $d \ll L$ und $d \ll H$, kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U(x, y, t) \cdot \psi(z) \\ v(x, y, z, t) &= V(x, y, t) \cdot \psi(z) \\ w &\equiv 0 \end{aligned}$$

mit $\psi(z) = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(z \cdot \frac{H}{d} \right)^2 \right\}$.

Setzt man diese Ansätze in die Gleichungen und integriert dieselben von $z = -\frac{d}{H}$ bis $z = \frac{d}{H}$, so erhält man nach Division durch $2 \frac{d}{H}$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \gamma \left(U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \text{Pr} \left\{ \nabla_1^2 U - 3 \cdot \left(\frac{H}{d} \right)^2 U - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \gamma \left(U \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \text{Pr} \left\{ \nabla_1^2 V - 3 \cdot \left(\frac{H}{d} \right)^2 V - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \text{Ra} \cdot T \right\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla_1^2 T$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

mit $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Das hier auftretende ϕ (Druck durch mittlere Dichte) ist jetzt ebenso über z gemittelt wie T , das jetzt ebenfalls eine Mittelung

erfahren hat. Weil $\frac{H}{2d} \int \phi^2(z) dz$ von $z = -\frac{d}{H}$ bis $z = \frac{d}{H}$ den Wert 1,2 hat, nimmt γ den Wert 1,2 an. Wegen des geringen Einflusses der Trägheitsglieder in den Impulsgleichungen wurden diese Glieder zwar mitgenommen, jedoch $\gamma = 1$ gesetzt. In den Impulsgleichungen hat man jetzt zwei Reibungsterme, einen viskosen Reibungsterm der Form $Pr \cdot \nabla_1^2 U$ in der Gleichung für U , und einen quasiporösen Reibungsterm $-3 \cdot Pr \left(\frac{H}{d}\right)^2 U$. Bei früheren theoretischen Untersuchungen an Hele-Shaw-Zellen oder porösen Medien mit weiterer horizontaler Ausdehnung hat man den quasiporösen Reibungsterm seiner Dominanz wegen als einzigen Reibungsterm berücksichtigt. Weil die horizontale Ausdehnung in der vorliegenden Untersuchung wesentlich geringer ist als die vertikale und weniger als zehnmal die Dicke, wurde der viskose Reibungseinfluß nicht vernachlässigt.

Man hat hier mit dem beschriebenen Ansatz zunächst die tatsächliche Strömung ersetzt durch eine Strömung, die in z -Richtung ein parabolisches Profil hat und danach durch eine von z unabhängige Strömung, die durch jede Strecke $(x, y, -\frac{d}{H} \leq z \leq \frac{d}{H})$ den gleichen Massendurchsatz wie die parabolische Strömung hat. Außerdem wurde angenommen, daß T nicht von Z abhängt.

Die Mitberücksichtigung viskoser Reibungsterme erlaubt es auch, die Strömungsrandbedingungen besser zu formulieren (beide Komponenten der Strömung = 0 am Rand) als bei rein porösem Reibungsgesetz. Bei einer Lösung der in diesem Abschnitt angegebenen transienten Gleichungen muß von einem die Randbedingungen erfüllenden Anfangszustand ausgegangen werden.

Offensichtlich hängt das betrachtete Problem von den vier dimensionslosen Kenngrößen Ra , Pr , $A = \frac{H}{L}$ und $B = \frac{H}{2d}$ ab. Von diesen werden in der vorliegenden Untersuchung die drei letztgenannten festgehalten, Ra wird variiert. Insgesamt enthält das abgeleitete Modell bezüglich der thermischen Randbedingungen zwei Idealisierungen:

- 1) Der thermische Einfluß der Fenster, welche in einem experimentellen Aufbau einer Hele-Shaw-Zelle vorhanden sein müssen, bleibt völlig außerhalb der Betrachtung.
- 2) Die adiabaten seitlichen Randbedingungen werden im Experiment nur unvollkommen erfüllt.

Durch die Reduktion auf ein Modell, das nur zwei Raumdimensionen berücksichtigt, wurde es möglich, nicht nur repräsentative Rechnungen zu machen, sondern eine parametrische Untersuchung für einen größeren Bereich von Rayleigh-Zahlen durchzuführen.

3. Das Rechenprogramm LEITH

Das Rechenprogramm LEITH, mit dessen Hilfe die numerische Untersuchung durchgeführt wurde, löst numerisch die zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen für laminare Naturkonvektion in zweidimensionaler Rechtecksgeometrie (x-y), wobei von der Boussinesq-Approximation Gebrauch gemacht wird. Die Problemlösung umfaßt die Behandlung zweier Diffusionsgleichungen, eine für den Wärmetransport mit Temperaturleitfähigkeit κ , die andere für Stoffübertragung mit molekularer Diffusivität κ' . Es wird angenommen, daß die Dichte ρ mit der Temperatur T und der Konzentration C in linearer Form zusammenhängt: $\rho = \rho_0 \cdot [1 - \alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)]$. Von dieser Möglichkeit, gleichzeitig zwei diffuse Prozesse miteinander zu schließen, wurde in der vorliegenden Untersuchung kein Gebrauch gemacht.

Das diskrete Maschengitter ist ähnlich dem der MAC-Methode, es werden die primitiven Veränderlichen u , v , p , T (und C) verwendet. Zur Lösung der diskreten Form der Druckgleichung wird der in /21/ beschriebene schnelle Poissongleichungslöser PWSCRT in einer doppelt genauen Version benützt.

Die Werte der Zustandsgrößen u , v , T und C zur Zeit $t + \Delta t$ werden aus den Werten dieser Größen zum Zeitpunkt t unter Benützung der Lösung der Druckgleichung berechnet. Dazu wird eine sogenannte "Zwischenschrittmethode" (engl. "fractional time-step") benutzt, bei der der konvektive Transport in x-Richtung, der konvektive Transport in y-Richtung und dann der Diffusionsterm getrennt in Einzelschritten berechnet werden. Die Berechnung der konvektiven Transportterme erfolgt mit der Methode von LEITH /13/.

Die Methode von LEITH zeichnet sich dadurch aus, daß bei ihr in transienten Rechnungen die sogenannte "künstliche Viskosität", die vielfach bei anderen Approximationen eine störende Rolle spielt, nicht auftritt /18/. Das gesamte Verfahren ist von der Ordnung $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2)$, wobei Δx die Maschenweite des diskreten Gitters in x-Richtung ist, Δy entsprechend in y-Richtung.

Für die vorliegende Untersuchung wurde im Rechenprogramm LEITH ein zusätzlicher, jeweils den Geschwindigkeitskomponenten proportionaler Reibungsterm in die Impulsgleichungen und die aus diesen abgeleitete Druckgleichung eingebaut, um die in Abschnitt 2 aufgestellten Gleichungen numerisch lösen zu können. Es ist bekannt, daß die numerische Stabilität einer Zwischenschrittmethode von der Stabilität der Einzelschritte abhängt. Die Stabilität der konvektiven Schritte ist gesichert, falls die maximalen Beträge der Courantzahlen c_x und c_y ,

$$c_x = \frac{U \cdot \Delta t}{\Delta x}, \quad c_y = \frac{V \cdot \Delta t}{\Delta y},$$

über das gesamte Maschengitter kleiner als Eins bleiben. Die Details dazu sind in ROACHE /19/ ausführlich behandelt. Für einen Zwischenschritt, der nur einen diffusiven Vorgang mit Diffusionskonstante κ^* in zwei Dimensionen berücksichtigt, wobei als diskrete Approximation für eine zweite Ableitung der zentrale Differenzquotient zweiter Ordnung gewählt wird, hat man als Stabilitätsbedingung

$$d' = \frac{\kappa^* \cdot \Delta t}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq 1/2,$$

was auch in der Form $1 - 2d' \geq 0$ geschrieben werden kann. Die Aufnahme des zusätzlichen Reibungstermes in die Impulsgleichungen, formal als zusätzlicher Absorptionsterm anzusehen, modifiziert die Bedingung für d' ; man erhält jetzt mit $\kappa^* = \nu$

$$1 - 2d' - 3\nu \cdot \left(\frac{d}{H}\right)^2 \cdot \Delta t \geq 0$$

als Stabilitätsbedingung, eine etwas schärfere Bedingung als $d' \leq 1/2$, welche jedoch durch ein genügend klein gewähltes Δt immer zu erfüllen ist.

Die Einhaltung dieser Stabilitätsbedingungen wurde im Rechenprogramm LEITH zu Beginn der Rechnung bzw. im Laufe der Rechnung kontrolliert.

Alle durchgeführten Rechnungen benützten das Rechenprogramm LEITH und wurden bis auf einige nachfolgend beschriebene Ausnahmen mit einem Maschennetz von 9 Intervallen in x-Richtung und 33 Intervallen in y-Richtung durchgeführt. Für höhere Rayleigh-Zahlen ist diese Auflösung nicht ganz ausreichend, da in diesen Fällen die Grenzschichten, hier im wesentlichen die Temperaturgrenzschichten, nicht genügend fein aufgelöst werden. Um diese Abhängigkeit der Rechnungen von der Feinheit der örtlichen Diskretisierung zu prüfen, wurden für $Ra = 0.7 \cdot 10^7$ und $Ra = 1.3 \cdot 10^7$ d. h. für oszillierende Strömungen zusätzlich Rechnungen mit $18 * 65$ Punkten durchgeführt. Graphische Darstellungen der zugehörigen Strömungs- und Temperaturfelder sind in den Abbildungen 19 und 20 zu finden. Sie zeigen qualitativ, was den Charakter der Strömungsform betrifft, gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen, die mit dem gröberen Maschennetz erzielt wurden. Für $Ra = 0.7 \cdot 10^7$ weicht der Wert von Nu_{min} erhalten mit dem groberen Maschennetz, um 2 % vom Wert der feineren Rechnung ab. Für Nu_{max} beträgt die Abweichung schon 8,5 %. Für die Rechnungen mit $Ra = 1,3 \cdot 10^7$ waren Nu_{min} , Nu_{max} für die beiden Maschennetze etwa 20 %, wobei das feinere Netz die größeren Werte ergab. Diese Abweichungen sind im Lichte bisher bekannter Erfahrungen verständlich. Eine Faustregel besagt, siehe z.B. /15/, p. 207, daß für eine korrekte Berechnung von Nusselt-Zahlen bei der Berechnung von Naturkonvektionsvorgängen mittels Differenzverfahren mindestens drei Maschenpunkte in der interessierenden Grenzschicht liegen sollten. Dies würde im vorliegenden Falle bei $9 * 33$ Punkten bis zu einer Nusselt-Zahl vom Wert 5, bei $18 * 65$ Punkten bis $Nu = 10$ einen bis auf etwa 3 % korrekten Wert ergeben.

Die absoluten Werte der zuvor erwähnten Rechnungen mit verschiedenen feinen Maschennetzen sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

4) Zur Stabilität von Strömungsformen

Aussagen zur Stabilität von Strömungsformen beziehen sich i.a. auf eingeschwungene Strömungszustände, d.h. Zustände, die ein System annimmt, wenn man es sehr lange sich selbst überläßt und keine Änderungen an ihm vornimmt. Ein eingeschwungener Zustand kann stationär oder oszillatorisch sein. Ein solcher Zustand wird stabil genannt, wenn kleine Störungen an diesem Zustand mit der Zeit herausgedämpft werden und der ursprünglich vorhandene Zustand wieder eingenommen wird. Andernfalls heißt der Zustand instabil.

Wir gehen davon aus, daß wir zu einer fest vorgegebenen Rayleigh-Zahl Ra einen eingeschwungenen Strömungszustand vorliegen haben. Uns interessiert dann, ob die zu einer geringfügig geänderten Rayleigh-Zahl $Ra + \Delta Ra$ gehörige eingeschwungene Strömungsform den gleichen Strömungstyp darstellt wie diejenige zu Ra . Der Strömungstyp sei gekennzeichnet durch die Anzahl der Wirbel, durch Symmetrieeigenschaften dadurch, daß er stationär oder oszillatorisch ist usw.

Tritt für das veränderte $Ra + \Delta Ra$ eine neue Strömungsform auf, so sagt man, die ursprüngliche Strömungsform bei Ra sei instabil geworden. Der Übergang zu einer neuen Strömungsform kann sanft oder sprunghaft erfolgen. Man pflegt diesen Sachverhalt, Übergang zu einer neuen Strömungsform bei einem gewissen Ra , im einfachen Fall (sanfter Übergang) mit dem Begriff der Lösungsverzweigung zu umschreiben. Die das physikalische Problem beschreibenden Gleichungen sind für fest vorgegebenes Ra , i.a. nicht eindeutig lösbar, d.h. es gibt mehrere mathematisch existente Lösungen, die physikalisch stabil sein können oder auch nicht. Variiert man Ra , so stellen alle mathematisch existierenden Lösungen Lösungssäste dar, wobei diese Äste oder Teile dieser Äste stabil oder instabil sein können. Um diesen Sachverhalt graphisch darzustellen, trägt man meist in einem Programm eine Amplitude q der verschiedenen Lösungsformen über Ra auf. Liegt eine einfache

Strömungsverzweigung vor, so schneiden sich zwei Lösungsäste in $Re = Re^*$, wobei jeweils auf einem solchen Lösungsast ein Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten bzw. umgekehrt für zunehmendes Re in diesem Schnittpunkt erfolgt, die physikalisch angenommene Lösung geht bei $Re = Re^*$ vom einen zum anderen Lösungsast über. Dieser Übergang ist in Abb. 3a schematisch dargestellt. Eine Verzweigung kann auch so erfolgen, daß ein Lösungstyp (auf einem Ast der Lösung) instabil wird und durch zwei verschiedene stabile Lösungen für größere Re abgelöst wird (Abb. 3b und 3e). Eine stabile Lösung kann auch mit wachsendem Re instabil werden, wenn ein insgesamt instabiler Lösungsast diesen Ast mit senkrechter Tangente kreuzt (Abb. 3c).

Lösungsäste können auch so beschaffen sein, daß Hysteresiseffekte auftreten. In der Prinzipskizze, in Abb. 3d, in der die stabilen Teile des Lösungsastes als durchgezogene Linie gezeichnet sind, verbleibt man, wenn man von kleinen Re -Werten herkommt, auf dem unteren, stabilen Ast so lange, bis man den Punkt mit senkrechter Tangente erreicht hat und springt erst bei größeren Re auf den oberen stabilen Ast. Entsprechend erfolgt der sprunghafte Übergang von der oberen auf den unteren stabilen Teil, wenn man von großen Re kommt, im letztmöglichen Punkt.

Abweichungen von dem beschriebenen einfachen Schema hat man, wenn es sich um einen Sprung zwischen verschiedenen Lösungsästen handelt. Dann fehlt der verbindende instabile Teil des Lösungsastes, der Sprung braucht dann auch nicht in Punkten mit senkrechter Tangente zu erfolgen. Es erscheint zumindest plausibel, daß Hysteresiseffekte in der Regel in Verbindung mit sprunghaften Veränderungen der Strömungsform auftreten.

Die Skizze 3f) macht deutlich, daß ein sprunghafter Übergang in manchen Fällen nach der einen oder anderen Seite erfolgen kann.

Wir haben bisher zwei bekannte Strömungsverzweigungen nicht erwähnt. (1) Der Übergang vom Ruhezustand zu irgendeiner Strömungsform kennzeichnet die erste Instabilität eines Problems und damit eine Lösungsverzweigung (2). Der Übergang von einer stationären Lösung, - falls eine solche vorhanden -, zu einer instationären mit größer werdendem Ra kennzeichnet ebenfalls eine Veränderung der Strömungsform. Ausführliche Erläuterungen der hier in sehr knapper Form beschriebenen Grundideen der Stabilitätstheorie können z.B. der Monographie von SATTINGER/20/ entnommen werden.

Im folgenden erläutern wir eine weitere, sehr simple Methode zur Identifikation von Lösungsverzweigungen. Dabei handelt es sich um die Analyse der Symmetrieeigenschaften der rechnerisch gefundenen stabilen Lösungen. Dies läßt etwas genauer präzisieren:

(3) Eine Verzweigung liegt vor, wenn für steigendes oder fallendes Ra eine Symmetrieeigenschaft neu auftritt oder verlorenght. Die Begründung hier ist einfach: Stellt man z.B. die Stromfunktion als doppelte Fourierreihe dar, so läßt sich eine Symmetrieeigenschaft der Strömung als Bedingung für die Koeffizienten dieser Reihe formulieren, z.B. daß bestimmte Gruppen von Koeffizienten verschwinden oder gewisse Linearkombinationen von Koeffizienten Null werden. Da die Lösungen und alle aus ihr abgeleiteten Größen, damit auch die Koeffizienten der Fourierreihe analytische Funktionen von Ra im Sinne der Funktionentheorie sind, solange man nicht in Verzweigungspunkte kommt, sind Änderungen der Symmetrie der Strömung und damit der oben angesprochenen Bedingungen für die Koeffizienten notwendigerweise mit Änderungen der Strömungsform verknüpft.

Es bleibt noch zu ergänzen:

(4) Die Aussage von (3) gilt auch, wenn die Aussage für das zeitliche Mittel einer Strömung gilt.

Die eben beschriebenen Kriterien zur Identifikation von Lösungs-

verzweigungen werden an späterer Stelle verwendet, da die Symmetrie der untersuchten Anordnung vermuten läßt, daß Lösungen mit irgendwelchen Symmetrieeigenschaften auftauchen werden. Diese Methode zur Aufdeckung von Lösungsverzweigungen ist neuartig. Die bisher meist angewandte Methode ist die Frequenzanalyse, d.h. man hat z.B. ein bestimmtes Temperatursignal über der Zeit analysiert. Neben den bekannten Verzweigungen, wie zuvor schon erwähnt, dem Übergang aus der Ruhelage zur stationären Strömung und dann dem Übergang von stationärer zur instationärer Strömung fand man im transienten Bereich bei den bisher untersuchten Strömungen zuerst eine oszillatorische Bewegung, die hauptsächlich durch eine Frequenz gekennzeichnet waren. Veränderungen der oszillatorischen Strömungsform für höhere dimensionslose Kennzahlen waren verbunden mit dem Auftreten weiterer Frequenzen, bis irgendwann, für sehr hohe Kennzahlen, sogenannte stochastische Oszillationen auftraten, denen nur noch ein allgemeines Rauschspektrum ohne ausgezeichnete Frequenzen zuzuordnen war.

5) Ergebnisse

Für eine bestimmte Anzahl diskreter Rayleigh-Zahlen wurde bei fest gewählten Werten von $Pr = 38.46$, $A = 3.5$ und $B = 23.33$ entweder ein stationärer Zustand oder ein eingeschwungener transienter Zustand berechnet. Dies erfolgte in der Weise, daß, ausgehend von einem vorgegebenen Ausgangszustand, solange transient gerechnet wurde, bis keine merklichen Abweichungen vom eingeschwungenen Zustand mehr vorhanden waren.

Als Anfangszustand wurde bei einigen Rechnungen der Ruhezustand der Flüssigkeit, verbunden mit einem linearen Temperaturprofil über der y -Koordinate, vorgegeben. In fast allen anderen Fällen wurde der Zustand vom Ende eines Rechenlaufs mit der gleichen oder einer nicht stark abweichenden Rayleigh-Zahl Ra als Ausgangszustand gewählt. Dieses Verfahren wurde einmal für anwachsende und einmal für abnehmende Ra durchgeführt und sollte eine Annäherung für ein kontinuierliches Fortschreiten auf einen Lösungast sein, solange die Lösungen in Abhängigkeit von Ra auf diesem Ast stabil sind.

Zu einer gewissen Anzahl von Rayleigh-Zahlen ist das Rechenergebnis in Abbildungen festgehalten. In den meisten Fällen sind in der Abbildung für einen festen Wert von Ra Stromfunktion und Temperaturfeld durch äquidistante Höhenlinien der betreffenden Funktion dargestellt. Falls die Abbildung einen transienten Vorgang beschreibt, beziehen sich die einzelnen Teilbilder auf äquidistante Zeitschritte. In zwei Fällen, für $Ra = 6 \cdot 10^6$ und $Ra = 10^7$, wurden auch Höhenlinien der Wirbelfunktion und der beiden Geschwindigkeitskomponenten mit abgebildet, um einen Eindruck von den hier auftretenden Bildmustern zu geben. Bei der Berechnung der Stromfunktion traten wegen der Berechnung dieser Funktion aus den diskreten Werten der Geschwindigkeitskomponenten gelegentlich kleinere Rechenungenauigkeiten auf, die nur annähernd symmetrische Stromlinienbilder erzeugten, obwohl alle anderen gezeichneten Funktionen

(z.B. inversions-)symmetrisch sind. Man kann dies gerade bei $Ra = 6 \cdot 10^6$ leicht feststellen.

Als kritische Rayleighzahl Ra_c ergab sich ein Wert, der geringfügig kleiner ist als 10^6 , die dazugehörige Strömungsform war eine stationäre Rolle (Strömungsform b). Für größer werdende Ra ergeben sich bis zu $Ra_2 \approx 5.8 \cdot 10^6$, startend jeweils mit stationären Lösungen zu niedrigerem Ra , ebenfalls stationäre Rollen. Dabei zeigte sich eine Ausrichtung der Rollen in eine Richtung derart, daß sich die Rolle oben in der Zelle etwas nach der Seite neigte, auf der die Strömung nach unten ging. Wie aus Abbildung 4 zu ersehen ist, nimmt diese Neigung mit steigendem Ra zu.

Neben den in Abbildung 4 gezeigten Rollen mit Drehbewegung im Uhrzeigersinn kann jeweils völlig gleichberechtigt auch die Strömung mit umgekehrten Drehsinn auftreten, diese zweite Lösung stellt die an der vertikalen Mittelachse gespiegelte erste Lösung dar. Bei einer Erhöhung von Ra über Ra_2 hinaus kann die thermische Grenzschicht nicht mehr stabil bleiben, wie von HORNE und CALTAGIRONE /8/ beschrieben, und es treten nichtrichtungsorientierte, inversionssymmetrische, oszillierende Strömungen (Strömungsform d) periodischen Charakters auf (Abbildungen 5-7,9). Mit Inversions-symmetrie wird folgendes bezeichnet: Eine Drehung der Zelle von 180° um ihren Mittelpunkt ergibt eine mit der ursprünglich vorliegenden übereinstimmenden Strömungsform. Das Muster von Strömungsform b tritt nach einer halben Periode in der an der mittleren vertikalen Achse gespiegelten Form auf. Hier traten zu bestimmten Zeiten Strömungsbilder auf, welche vier etwa gleichgroße Wirbel zeigen. Daher wird diese Strömungsform auch Vierrollenoszillation genannt. Wie auch aus Abb. 5 für $Ra = 6 \cdot 10^6$ zu ersehen ist, besteht der Hauptteil der Strömungsbewegung darin, eine große, in eine diagonale Lage ausgerichtete Rolle auszubilden. Diese große Rolle wird dann allmählich von zwei etwas kleineren Rollen eingeschnürt und durch die Vereinigung der zwei Rollen zertrennt. Die beiden vereinigten Rollen bilden sich jetzt wieder als große Rolle über die Diagonalrichtung aus, während die Reste der vorigen Trennung aus zwei kleinen Rollen bestehen, von denen wieder die Zerschnürung

der entstandenen großen Rolle ausgeht. Dieser beschriebene Vorgang entspricht der halben Periode der betrachteten Bewegung. Dieser Zustand blieb bei weiterer schrittweiser Erhöhung von Ra erhalten bis zu $Ra = 10^7$. Abb. 8 zeigt die zeitliche Variation der Nusselt-Zahl für $Ra = 0.8 \cdot 10^7$. Diese Darstellung verdeutlicht den Sägezahncharakter dieser Abhängigkeit, bei der ein schnelles Ansteigen zum maximalen Wert von Nu zu sehen ist, danach ein langsames Abnehmen zum Minimum von Nu . Qualitativ ähnliches Verhalten zeigen Temperaturmessungen von KOSTER /10/ und auch von OLSON und ROSENBERGER /16/ für von unten beheizte, abgeschlossene zylindrische Kavitäten.

Bei $Ra = 10^7$ traten, siehe Abb. 9, zum ersten Male bei aufsteigendem Ra Ablösevorgänge auf, bei denen sich warme bzw. kalte Fluidballen aus einer in der Spaltmitte auf- bzw. absteigenden Strömung ablösen und in der jeweiligen horizontalen Berandung abgebaut werden.

Die in Abb. 10 gezeigte Strömung für $Ra = 1.15 \cdot 10^7$ ist richtungsorientiert, d.h. die Bewegung ist nicht mehr im zeitlichen Mittel symmetrisch zur senkrechten Behältermittelachse. Aus dieser Darstellung, die etwa eine Periode umfaßt, ist zu ersehen, daß während der Periode zwei verschiedene Versuche unternommen werden, die große Rolle umzuorientieren. Beide Versuche mißlingen. Die im Bereich bis $Ra = 10^7$ typische Zerschneidung der Hauptrolle durch zwei anwachsende kleinere Rollen funktioniert hier nicht mehr. Der zeitabhängige Verlauf der Nusselt-Zahl, Abb. 12, über der Zeit für die Strömung zu $Ra = 1.15 \cdot 10^7$ zeigt ebenfalls die Kompliziertheit dieser Strömung, die durch eine starke Variation der Nusselt-Zahl gekennzeichnet ist.

Für $Ra = 1.3 \cdot 10^7$ sind die Versuche, die große Rolle umzuorientieren, sehr ähnlich geworden, so daß man aus der Darstellung von Nu über der Zeit, Abb. 13, nur noch einen geringen Unterschied feststellen kann und geneigt ist, jeden Versuch der Umorientierung als unabhängige Periode anzusehen. Der Verlauf einer solchen

Periode ist in Abb. 11 wiedergegeben.

Für $Ra = 1.45 \cdot 10^7$ ergibt sich eine nicht inversionssymmetrische Strömung, die auch richtungsorientiert ist. Diese Strömungsform ist jedoch im zeitlichen Mittel inversionssymmetrisch, Abb. 14. Die Berechnung der eingeschwungenen Strömung zu $Ra = 1.45 \cdot 10^7$ war, ausgehend von einem Zustand der Lösung zu $Ra = 1.15 \cdot 10^7$, sehr langwierig und wurde zur Kontrolle noch einmal, ausgehend von einem Zwischenzustand bei $Ra = 1.6 \cdot 10^7$, berechnet, wobei sich derselbe eingeschwungene Zustand ergab.

Für $Ra = 1.6 \cdot 10^7$ ergab sich, ausgehend von einem bestimmten Zeitpunkt der eingeschwungenen Lösung zu $Ra = 1.3 \cdot 10^7$ die in Abb. 15 dargestellte Lösung, welche wieder inversionssymmetrisch ist. Eine Rechnung, ausgehend von der Lösung zu $Ra = 1.45 \cdot 10^7$, führte auf eine der vorigen ähnliche Strömung, es gab jedoch immer wieder Symmetriestörungen, die abgebaut wurden, dann jedoch wieder auftraten. Dieses wurde mit als Anlaß genommen, um bei der gewählten Diskretisierung von $9 \cdot 33$ Maschenpunkten nicht zu höheren Rayleigh-Zahlen zu gehen.

Verkleinert man nun wieder schrittweise die Rayleigh-Zahlen von $Ra = 1.6 \cdot 10^7$ ausgehend, so trifft man wieder alle oszillierenden Lösungen, die man schon vorher gefunden hat. Bei $Ra = 0.58 \cdot 10^7$ findet jedoch kein Rücksprung zu den stationären Rollen statt.

Ausgehend von der für $Ra = 6 \cdot 10^6$ gefundenen Strömungsform d ergaben sich durch schrittweises Verkleinern von Ra bis zu knapp größer als $Ra = 4 \cdot 10^6$ periodische Strömungen, $Ra = 4.2 \cdot 10^6$ war noch periodisch. Zwischen $Ra = 5 \cdot 10^6$ und $6 \cdot 10^6$ handelte es sich um Strömungsform d. Abbildung 16 zeigt das Bild der für $Ra = 0.5 \cdot 10^7$ gefundenen Strömung. Auf die Nähe eines Verzweigungspunktes kann aus zeitweiligen Symmetriestörungen des Temperaturfeldes geschlossen werden. Für $Ra < 5 \cdot 10^6$ wurde ein weiteres Muster, Strömungsform c, sichtbar, welches durch zwei oszillierende

Stockwerksrollen gekennzeichnet ist. Dieses Muster ist richtungsorientiert und nicht inversionssymmetrisch. Im zeitlichen Mittel sind die Stockwerksrollen symmetrisch zur horizontalen Mittelachse, da man jeweils nach einer halben Periode das an jener Achse gespiegelte Bild antrifft, wie man z.B. auch aus den Abb. 17 für $Ra = 0.45 \cdot 10^7$ und Abb. 18 für $Ra = 0.42 \cdot 10^7$ dargestellten Strömung erkennt. Bei dieser Variante der Strömung besteht eine Wärmeaustauschzone, in Abb. 17 jeweils am linken Rand der Darstellung des Temperaturfeldes, in der die vertikale Geschwindigkeitskomponente nahezu verschwindet und in der der Wärmetransport fast nur durch Wärmeleitung erfolgt. Diese Zone oszilliert um die waagrechte Mittelachse. Man kann in sehr grober Form das Verschwinden dieser Strömungsform für größer werdende Ra mit dem Instabilwerden dieser Zone zu erklären versuchen.

Bei $Ra = 0.4 \cdot 10^7$ findet man dann endlich, numerisch etwas aufwendig, für kleiner werdende Ra , den Übergang zu den stationären Rollen. Bei diesen Rollen bleibt es dann auch, wenn man Ra weiterverkleinert bis zu Ra_c . Die Nusseltzahlen aller berechneten Lösungen sind in Tabelle 1 zusammengefaßt, eine grafische Darstellung der gleichen Daten gibt Abbildung 23. Für die oszillierenden Strömungen werden maximale und minimale Nusselt-Zahlen angegeben. Im Rayleigh-Zahlenbereich zwischen $4 \cdot 10^6$ und $5,8 \cdot 10^6$, in dem zu einem Ra zwei stabile Lösungen existieren, eine stationäre und eine periodische Lösung, liegen die Nusselt-Zahlen der stationären Lösung über den maximalen Nusselt-Zahlen der oszillierenden Lösungen. Dies steht im Einklang mit einer Angabe bei HORNE und O'SULLIVAN /9/, wo für Konvektion in porösem Medium, bei einem quadratischen Behälter mit freien seitlichen Rändern, zu einer bestimmten Rayleigh-Zahl sowohl stationäre Konvektion als auch oszillierendes Verhalten auftreten kann. Die Nusselt-Zahl des stationären Vorganges liegt bei 7.8, der Mittelwert der Nusselt-Zahl für die oszillierende Konvektion liegt bei 6.3, mit dem Maximum der Nusselt-Zahl über der Zeit bei einem Wert von 7.

Die Differenz zwischen Nu_{\max} und Nu_{\min} , in Abhängigkeit von Ra betrachtet, variiert beträchtlich und hat für $Ra = 1.15 \cdot 10^7$ den größten Wert. Die dimensionslosen Periodendauern sind in Tabelle 3 angegeben, in Abb. 24 gezeichnet.

Besonders interessant ist die Abbildung zu $Ra = 0.58 \cdot 10^7$, Abb. 21. Der Wert von Ra liegt wohl sehr nahe einem Umschlagpunkt. Die Strömungsform enthält Elemente von Strömungsform b, von Strömungsform d und vielleicht auch von Strömungsform c. Der Zeitabschnitt in dem nur ein Wirbel vorliegt, erinnert stark an Strömungsform b, die stationäre Rolle. Ein zeitlich nachfolgender Bereich mit zwei etwa gleichstarken Wirbeln und einem zunächst kleinen dritten Wirbel hat Ähnlichkeiten mit Strömungsform c, während danach ein Dreiwirbelströmungsbild auftritt, das etwas an die Viereroszillation (Strömungsform d) erinnert, obwohl eine Kombination mit vier Wirbeln nur andeutungsweise auftritt. Unzweifelhaft ist die Strömung jedoch

- periodisch wie d und c
 - richtungsorientiert wie b und c
 - nicht inversionssymmetrisch wie c
 - auch so beschaffen, daß das an der horizontalen Mittelachse gespiegelte Strömungsbild nicht mit dem Muster übereinstimmt, das nach einer Halbperiode auftritt.
- Strömungsformen c und d hatten noch diese Eigenschaft.

Aus dem letztgenannten Grunde müssen die Extremwerte der Nusselt-Zahlen getrennt für oben und unten angegeben werden. Die Rechnung ergab

$$\begin{aligned} \min Nu_{\text{unten}} &= 3.00 \\ \max Nu_{\text{unten}} &= 7.60 \\ \min Nu_{\text{oben}} &= 3.70 \\ \max Nu_{\text{oben}} &= 7.03, \end{aligned}$$

Diese Werte wurden nicht in die Abbildung der Nusselt-Zahlen über Ra aufgenommen.

Die Strömung für $Ra = 0.58 \cdot 10^7$ ist nicht eindeutig, sie ist auch nicht im bisher betrachteten Sinne mehrdeutig, sie hängt im Rahmen der physikalischen Möglichkeiten hauptsächlich vom Anfangszustand ab.

Geht man von einer stationären Rolle aus, so erhält man als Lösung eine stationäre Rolle, startet mit einer nichtrichtungsorientierten Oszillation, so besitzt die gefundene Lösung auch diese Eigenschaft, sie ist jedoch nicht, -ebenso wie die in Abb. 21 beschriebene Lösung-, zur horizontalen Mittelachse im zeitlichen Mittelsymmetrisch !

Schreibt man die in Abschnitt 2 aufgestellten Bewegungsgleichungen in Kurzform

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = G(\vec{u}, Ra), \quad \text{wobei in } \vec{u} \text{ alle abhängigen Veränderlichen zusammengefaßt sind,}$$

so läßt sich aus den zuvor zusammengestellten Ergebnissen auf Eigenwerte des Operators G schließen; dies sind diskrete Werte von Ra , bei denen eine Verzweigung der Lösungen von $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = G(\vec{u}, Ra)$ in Abhängigkeit von Ra erfolgt, wenn Ra einen solchen Wert durchläuft.

Die symmetrische Anordnung erlaubt zunächst den Schluß, daß mit einer Lösung \vec{u} zu einem bestimmten Ra , welche eine bevorzugte Bewegungsrichtung hat, auch eine gespiegelte Lösung \vec{u}^* eine von \vec{u} verschiedene Lösung zum gleichen Wert von Ra sein muß. Ein Übergang von einer nicht richtungsorientierten Lösung, wie es z.B. die Ruhelage ist, zu einer richtungsorientierten Lösung wie der stationären Rolle für wachsendes Ra bzw. ein umgekehrter Übergang, kennzeichnet bei sanftem Übergangsverhalten einen Verzweigungspunkt vom Typ, der in Abb. 3e als Prinzipskizze dargestellt wurde. Als ersten Eigenwert findet man $Ra_1 = Ra_c$, ein zweiter Eigenwert Ra_2 trennt für abnehmendes Ra bei etwa $5 \cdot 10^6$ die Viereroszillation (Strömungsform d) von der Zweieroszillation

(Strömungsform c). Ra_3 , zwischen 10^7 und $1.15 \cdot 10^7$ liegend, signalisiert den Übergang von der nichtrichtungsorientierten Viereroszillation zur richtungsorientierten Oszillation. Der Verlust der Inversionssymmetrie für alle Zeitpunkte in einem Ra -Bereich um $Ra = 1.45 \cdot 10^7$ ist ebenfalls mit zwei Eigenwerten verbunden, Ra_4 und Ra_5 , deren genaue zahlenmäßige Lage nicht bestimmt wurde. Keine Eigenwerte sind Ra' und Ra'' , bei denen jeweils ein Überspringen auf einen anderen Lösungsast stattfindet, Ra'' hat ungefähr den Wert $5.8 \cdot 10^6$ und markiert den Umschlag von der stationären Rolle zur Viereroszillation bei aufsteigendem Ra , Ra' ist ungefähr $4 \cdot 10^6$ und bezeichnet den Wert, bei dem man für abnehmendes Ra von der Zweieroszillation zur stationären Rolle zurückspringt.

Das Ergebnis dieser Verzweigungsanalyse wurde in Abb. 22 in eine Art Verzweigungsdiagramm zusammengefaßt. Dazu muß festgestellt werden, daß diese Darstellung nur eine qualitative Aussage beinhaltet; man kann auch nicht beweisen, daß man im untersuchten Bereich bis $Ra = 1.6 \cdot 10^7$ nicht etwas vergessen, übersehen oder einfach nicht gefunden hat.

Die nach oben aufgetragene Größe q stellt ein zeitliches Mittel der Summe von zwei Abweichungen von Symmetrien dar und zwar von

- der Symmetrie zur vertikalen Mittelachse und
- Inversionssymmetrie.

Für eine feste, zu Ra gehörige Strömung, die im zeitlichen Mittel symmetrisch zur vertikalen Mittelachse und außerdem inversionssymmetrisch ist, hat q den Wert Null.

Demnach sind die Ruhelage (Strömungsform a) und die nichtrichtungsorientierte Vierrollenoszillation durch $q = 0$ gekennzeichnet. Die stationären Rollen (Strömungsform b) sind zwar inversionssymmetrisch, jedoch nicht symmetrisch zur senkrechten Mittelachse. Die

Stockwerksdoppelrollen (Strömungsform c) besitzen keine der geforderten Symmetrien. Die richtungsorientierten Mehrrollenoszillationen (Strömungsform e) besitzen eine der relevanten Symmetrien, sie sind inversionssymmetrisch.

Die beiden Verzweigungen, die bei $Ra = 1.45 \cdot 10^7$ in einer Umgebung dieser Rayleigh-Zahl den Verlust der für alle Zeitwerte vorhandenen Inversionssymmetrie markieren, kommen in Abb. 22 nicht zum Ausdruck.

Bekannte oder vermutete instabile Lösungen sind in Abbildung 22 gestrichelt eingezeichnet. Die Ruhelage als instabile Lösung für $Ra > Ra_c$ ist bekannt und wurde rechts vom ersten Verzweigungspunkt auf $q = 0$ berücksichtigt. Man kann auch mit Rechenverfahren stationäre Lösungen für $Ra > 0.58 \cdot 10^7$ erzwingen, welche unphysikalisch sind. Auf diese Lösungen wurde durch eine gestrichelte Fortsetzung der Äste b und b' in der Abbildung hingewiesen. Man könnte sich auch vorstellen, in Rechnungen durch Symmetriebedingungen oder symmetrische Ansätze z.B. bei Variationsverfahren, weitere unphysikalische, mathematisch existente Lösungen zu bestimmen. Solche denkbaren instabile Fortsetzungen vorhandener stabiler Lösungsäste wurden an mehreren Stellen in der Zeichnung noch angedeutet.

Man sollte die Abb. 22 als Hilfsmittel dafür ansehen, die Verzweigungen des hier betrachteten Systems verständlicher zu machen, insbesondere die gemeinsame Existenz zweier stabiler Lösungen für einen gewissen Rayleigh-Zahlbereich zu verdeutlichen.

6) Vergleich mit bekannten Ergebnissen und Diskussion

Die hier gefundenen Ergebnisse können verglichen werden mit Resultaten, die man aus Experimenten gewonnen hat und mit Erkenntnissen, die aus theoretischen Untersuchungen verwandter Art bekannt sind.

Man kann davon ausgehen, daß die hier ermittelte kritische Rayleigh-Zahl $Ra_c \approx 10^6$ korrekt ist. Eine Interpolation der Angaben von CALTAGIRONE /2/ führt auf einen Wert von $Ra_c = 0.98 \cdot 10^6$, einer Arbeit von FRICK und CLEVER* /6/ entnimmt man für $B = 23,33$ und für eine Wellenzahl von $\lambda' = A\pi$ mit $A = 3,5$ ein nur geringfügig über 10^6 liegender Wert für die kritische Rayleigh-Zahl.

Eine Stabilitätsanalyse für eine unendlich ausgedehnte, horizontale Flüssigkeitsschicht in einer Hele-Shaw-Zelle, beschrieben durch die Gleichungen aus Abschnitt 2, mit freien Rändern an der Ober- und Unterseite, führt darauf, den Ausdruck

$$Ra(\lambda') = \frac{(\pi^2 + \lambda'^2)^3}{\lambda'^2} + 12 \left(\frac{H}{d}\right)^2 \cdot \frac{(\pi^2 + \lambda'^2)^2}{\lambda'^2}$$

bzgl. λ' zu minimieren. Setzt man hier wegen der endlichen Ausdehnung als Wellenzahl $\lambda' = A \cdot \pi$, so findet man $Ra_c = 0.94 \cdot 10^6$. Man kann hier auch unmittelbar entnehmen, daß die viskose Reibung für das Einsetzen der Konvektion keine wesentliche Rolle ($\approx 2\%$) spielt. Wenn man als Kennzahl für das Einsetzen oszillierender Konvektion Ra_{osc} die Größe Ra'' wählt, erhält man für das Verhältnis Ra_{osc}/Ra_c 5.8, ein Wert, der verblüffend nahe bei einem von OLSON und ROSENBERGER /16/ gefundenen Wert für zylindrische Kavitäten liegt.

Beim Vergleich mit Experimenten muß man sich darüber im klaren sein, daß die thermischen Randbedingungen der Rechnungen experimentell nur näherungsweise erfüllt sind. Außerdem wird der gesamte thermische Einfluß der Glasfenster vernachlässigt. Schon

die beiden angeführten Punkte lassen erwarten, daß eine quantitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung nicht zu erwarten ist. Darüberhinaus gibt es noch Unstimmigkeiten, was die Definition der Rayleigh-Zahl betrifft. In Anlehnung an die Definition der Rayleigh-Zahl für Naturkonvektion in porösen Medien war $Ra = \frac{\alpha g \Delta T \cdot h}{\kappa^* \cdot \nu} \cdot K$ eingeführt worden, mit Permeabilität $K = \frac{(2d)^2}{12}$ und Diffusionskonstante $\kappa^* = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$. In diese Definition wurde mittlerweile, HARTLINE und LISTER /7/, sowohl ein mit den Stoffwerten der Glasfenster korrigierte Diffusionskonstante als auch ein geometrischer Korrekturfaktor, der die Fenster mitberücksichtigt, mitaufgenommen, um Experimente zur Bestimmung der kritischen Rayleigh-Zahl mit der Theorie in Einklang zu bringen. Eine befriedigende Übereinstimmung haben auch diese Verbesserungsvorschläge nicht in allen Fällen gebracht. Zum anderen besteht kein Einverständnis darüber, was als Temperaturleitfähigkeit zu verwenden ist, insbesondere bei der Bestimmung einer dimensionslosen Periodendauer. Angesichts dieser beiden nicht behobenen Unstimmigkeit zwischen Theorie und Experiment bei der Bestimmung schon allein der kritischen Rayleigh-Zahl erscheint es im Augenblick nicht sinnvoll, entsprechende Dinge für mehr als schwach überkritische Verhältnisse in Einklang bringen zu wollen. Wir können demnach allenfalls semiquantitative Übereinstimmung erwarten.

Die quantitativen Abweichungen sind nun folgende:

- 1) Die Rayleigh-Zahlen Ra_c und Ra_{osc} unterscheiden sich in Experiment und Rechnung etwa um den Faktor 10.
- 2) Die auftretenden dimensionslosen Periodendauern unterscheiden etwa um den Faktor 5.

Diese Aussagen beziehen sich ähnlich wie die folgenden Feststellungen auf einen Vergleich der Rechnungen mit den Experimenten von KOSTER /10/. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment bestand hauptsächlich darin, daß jeweils für sich verändernde Rayleigh-Zahl bei festgehaltenen anderen Parametern eine ähnliche Folge von Strömungsmustern auftrat. Dabei wurde nach dem Ruhezustand für $Ra > Ra_c$ eine richtungsorientierte, stationäre Rolle

angetroffen. Danach wurden im Experiment vorwiegend stationäre Zwei-Wirbel-Strömungen gefunden, die in der Rechnung für zunehmendes Ra nicht auftraten und erst für abnehmende Ra als Oszillationen zu Tage traten.

Die inversionssymmetrischen, nichtrichtungsorientierten Oszillationen waren allen Experimenten wie in der Rechnung zu sehen, auch das Auftreten richtungsorientierter Oszillationen ist experimentell gesichert. Die nur im Mittel inversionssymmetrische Lösung bei $Ra = 1.45 \cdot 10^7$ ist in den Experimenten mit schlecht wärmeleitenden Berandungen nicht gesehen worden.

Folgende Einzelpunkte wären noch zu erwähnen:

- 1) Die Abnahme der Periodendauer für die inversionssymmetrischen Oszillationen nimmt in Rechnung und Experiment zunächst mit Ra^{-2} ab;
- 2) Es gibt in der Rechnung für die adiabatisch berandeten Behälter einen Ra-Zwischenbereich, in dem die Perioden stark schwanken, dann aber wieder für größere Ra nahezu ohne Schwankung sind. Ein entsprechender Sachverhalt ist von KOSTER nur für den Fall perfekt wärmeleitender Wände angegeben worden.
- 3) Es treten in Experiment und Rechnung Hysteresiseffekte auf. Zwei verschiedene stabile Lösungen hatten, wie schon erwähnt, auch HORNE und O'SULLIVAN /9/ in ihren Untersuchungen gefunden, wobei die eine Lösung stationär war, während die andere Lösung oszillierte.

Die qualitativen Ergebnisse der Versuche von PUTIN und TKACHEVA /17/ stimmen in vielerlei Hinsicht mit den hier gefundenen überein. Auch dort tritt immer als erste Instabilität eine stationäre Rolle auf, welche für wachsendes Ra in eine oszillierende Doppelrolle überging, zuvor trat in einem Fall noch eine stationäre Doppelrolle auf.

In jedem Falle wurden die stationären Strömungsformen von Zwei-

Wirbel-Bewegungen, die zunächst stationär waren und dann für etwas größer werdende Ra anfangen, zu oszillieren abgelöst; der Übergang war jeweils sanft. Das Auftreten der Vier-Wirbel-Oszillation mit weiter anwachsendem Ra wird meist als sprunghaft bezeichnet; in Verbindung damit findet der Übergang zur Zwei-Wirbel-Oszillation für abnehmendes Ra bei anderen Rayleigh-Zahlen statt. Dies steht qualitativ im Einklang mit den Erkenntnissen der vorliegenden Arbeit. Die in /17/ beschriebenen Experimente wurden noch in Bereiche größerer Rayleigh-Zahlen fortgesetzt, wo stochastische Oszillationen auftraten. Es ist wohl nicht sinnvoll, in diese Rayleigh-Zahlbereiche mit einem numerischen Differenzenverfahren vorzudringen; der rechnerische Aufwand wäre zu hoch. Außerdem würde hier die Schwierigkeit auftreten, daß unklar bliebe, ob Schwankungen der Lösungen dem Einfluß von Rundungsfehler, dem Einfluß von Abschneidefehlern in den numerischen Approximationen oder dem tatsächlichen physikalischen Verhalten der Lösungen zuzuschreiben sind.

Ein Vergleich der errechneten Nusselt-Zahlen mit den Werten, die CALTAGIRONE /2/ für rein poröses Medium berechnet hat, ergibt, daß dort etwa eine Nusselt-Zahl $Nu = 10$ erreicht wird, bevor oszillierende Strömungen auftreten (Angaben für $1/A = 0.25$ und 0.3).

7) Zusammenfassung

Es wurde ein Beispiel der Naturkonvektion in einem von unten beheizten, schmalen Hele-Shaw-Behälter mit festgehaltenen Verhältnissen von Höhe zu Breite und Höhe zu Dicke sowie fester Prandtl-Zahl für einen Bereich von Rayleigh-Zahlen bis etwa 16-fach überkritisch gerechnet und versucht, alle physikalischen Lösungsäste zu erfassen. Durch Modellannahmen, z.B. die Annahme eines Poiseuille-Profiles für die Abhängigkeit der Geschwindigkeiten von der einen Ortskoordinate, wurde es möglich, für das Problem eine örtlich zweidimensionale Beschreibung zu finden, in der in den Impulsgleichungen viskose und quasiporöse Reibungsterme auftreten.

Das benutzte Differenzenverfahren zur numerischen Lösung des zweidimensionalen Problems war insbesondere im Stande, periodische Vorgänge sehr gut zu beschreiben.

Im Zuge der experimentellen und numerischen Untersuchungen stellte sich heraus, daß der Hele-Shaw-Slot besonders geeignet ist, Veränderungen der Strömungsform an einem realen physikalischen Beispiel zu studieren. Dies liegt daran,

- daß die Flüssigkeitsbewegung im wesentlichen zweidimensional ist,
- daß es sich um eine relativ langsame (schleichende) Bewegung handelt,
- und daß in einem Bereich bis etwa 20-fach überkritisch mehrere Veränderungen der Strömungsform auftreten.

Durch eine Analyse der Symmetrieeigenschaften der durch Rechnung gefundenen Lösungen konnte auf die Lage der Verzweigungen des

Problems in Abhängigkeit von der sich ändernden Rayleigh-Zahl geschlossen werden.

Neben den beiden ersten Instabilitäten (Übergang von der Ruhelage zu stationärer Konvektion und Auftreten bzw. Verschwinden oszillierender Konvektion) konnten in der vorliegenden Untersuchung durch Rechnung mittels der genannten Methode fünf weitere Instabilitäten aufgedeckt werden. Man hat hier im Gegensatz zu früher geäußerten Einschätzungen / 5 /, Section 6.3, eine physikalische Anordnung, bei der sich ein Bereich von sieben verschiedenen Strömungsinstabilitäten durch numerische Rechnungen überdecken läßt. Obwohl es nicht möglich war, mit den Rechnungen in den Bereich quasiperiodischer oder stochastischer Oszillationen vorzudringen, haben sich schon im Bereich bis hin zu den periodischen Oszillationen mehrere Verzweigungen nachweisen lassen.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit gaben die experimentellen Untersuchungen, die von J.N. Koster und U. Müller am Institut für Reaktorbauelemente durchgeführt wurden. Die Diskussion dieser Ergebnisse war vom gemeinsamen Interesse geprägt, Experimente und Modellvorstellungen besser in Einklang zu bringen. Außerdem bedanke ich mich für viele fachliche Gespräche mit den Herren Frick und C. Dietsche. Bei der Durchführung der Rechnungen hat mich Fr. S. Stiefel tatkräftig unterstützt, wofür ich mich ebenfalls bedanken möchte.

Literatur

- /1/ CALTAGIRONE, J.P., CLOUPEAU M., und COMBARNOUS M.,
Convection naturelle fluctuante dans une couche poreuse
horizontale, Comptes rendus, vol. 273, 1971, pp. 833-836.

- /2/ CALTAGIRONE, J.P., Thermoconvective Instabilities in a
Horizontal Porous Layer, J. Fluid Mech., Vol. 72, part 2,
1975, pp. 269-287.

- /3/ CATTON, I., "Natural Convection in Enclosures", in:
Sixth International Heat Transfer Conference, Keynote
Papers, Vol. 6, Toronto, Aug. 1978, pp. 13-31.

- /4/ COMBARNOUS M., LE FUR, B., Transfert de chaleur par con-
vection naturelle dans une couche poreuse horizontale.
Comptes Rendus, 269, Série B, 1969, pp. 1009 - 1012.

- /5/ FENSTERMACHER, P.R., SWINNEY H.L., GOLLUB J.P.,
Dynamical instabilities and the transition to chaotic
Taylor vortex flow. J. Fluid Mech. 94, 1, 1979, pp.103-128.

- /6/ FRICK, H., u. CLEVER, R.M., Einfluß der Seitenwände auf
das Einsetzen der Konvektion in einer horizontalen
Flüssigkeitsschicht, ZAMP 31, 1980, pp. 502 - 513.

- /7/ HARTLINE B.K., LISTER C.R.B., Thermal convection in a
Hele-Shaw cell. J. Fluid Mech. 79,2, 1977, pp. 379-389.

- /8/ HORNE, R.N., CALTAGIRONE, J.-P., On the evolution of
thermal disturbances during natural convection in a
porous medium. J. Fluid Mech. 100, 2, 1980, pp. 385-395.

- /9/ HORNE, R.N. and O'SULLIVAN, M.J., Origin of Oscillatory
Convection in a Porous Medium Heated from Below,
Phys. Fluids, Vol. 21, No. 8, Aug. 1978, pp. 1260-1264.

- /10/ KOSTER, J.N., Freie Konvektion in vertikalen Spalten, Dissertation an der Universität Karlsruhe, Oktober 1980, erschienen als Bericht des Kernforschungszentrums Karlsruhe KfK 3066.
- /11/ KOSTER, J.N., MÜLLER, U., "Vertically Staggered Patterns in Free Convective Flow", in: Recent Development in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics, Müller, U., Roesner, K.G., Schmidt, B., eds., Springer, Berlin, 1979, pp. 367-375.
- /12/ KOSTER, J.N., MÜLLER, U.: Free convection in vertical slots, HTD-vol. 8, 1980, pp. 27-30. 19th Nat. Heat transfer conf., Orlando, Florida, July 27-30, 1980.
- /13/ LEITH, C.E., Numerical Simulation of the Earth's Atmosphere; in "Methods in Computational Physics", Vol. 4, pp. 1-28, New York: Academic Press, 1965.
- /14/ LYUBIMOV, D.V., PUTIN, G.F., and CHERNATYNSKII, V.I., "On Convective Motions in a Hele-Shaw Cell", Sov. Phy. Dokl., Vol. 22, No. 7, Juli 1977, pp. 360-362.
- /15/ MOORE, D.R., PECKOVER, R.S., WEISS, N.O., Difference Methods for time-dependent two-dimensional convection, Computer Physics Communications 6, 1974, p. 198-220.
- /16/ OLSON, J.M., F. ROSENBERGER, Convective instabilities in a closed vertical cylinder heated from below. Part 1, Monocomponent gases. J. Fluid Mech. 92, 4, 1979, pp. 609-629.
- /17/ PUTIN, G.F., TKACHEVA E.A., Experimental investigation of supercritical convective motions in a Hele-Shaw-cell. Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, vol. 14, 1, 1979, pp. 3-8.

- /18/ ROACHE, P.J.: On Artificial Viscosity; J. Comp. Physics 10, 1972, pp. 169 - 184.
- /19/ ROACHE, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1972.
- /20/ SATTINGER, D.H.: Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 762, Springer Verlag, 1979.
- /21/ SWARZTRAUBER, P., SWEET, R.: Efficient FØRTRAN subprograms for the solution of elliptic partial differential equations; Techn. Note NCAR-TN/IA-109, National Center for Atmospheric Research, 1975.

Bezeichnungen

$A = \frac{H}{L}$	Verhältnis Höhe zu Breite
$B = \frac{H}{2d}$	Verhältnis Höhe zu Dicke
C	Konzentration
H	Höhe
K	Permeabilität
L	Breite
Nu, Nu*	Nusselt-Zahlen
Pr	Prandtl-Zahl
Ra	Rayleigh-Zahl
Ra*	modifizierte Rayleigh-Zahl
U	von z unabhängige Anteile
V	von Geschwindigkeiten
X	
Y	Längenabmessungen
Z	
T	Temperatur

c_x, c_y	Courant-Zahlen
c_p	spez. Wärme
d	halbe Dicke
d'	Stabilitätskonstante
g	Erdbeschleunigung
k	Wärmeleitfähigkeit
p	Druck
q	Amplitude einer Strömung
t	Zeit
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten
x, y, z	rechtwinklige Ortskoordinaten
G	Operator
\vec{k}	Einheitsvektor in Richtung der negativen y-Achse
u	Geschwindigkeitsvektor

α	temperaturabh. Volumexpansionskoeffizient
β	konzentrationsabh. Konzentrationsexpansionskoeffizient
γ	Modellparameter
κ	Temperaturleitfähigkeit
κ'	molekulare Diffusivität
κ^*	allgemeine Diffusionskonstante
λ	Wellenzahl
ν	kinematische Zähigkeit
ρ	Dichte
ϕ	Druck/Dichte
ψ	Formfunktion
τ	dimensionslose Periodendauer

Δ	Differenz
∂	partiell Differential
grad	Gradient
div	Divergenzoperator
x, y	diskrete Maschenweiten
T	Temperaturdifferenz
t	diskreter Zeitschritt

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \quad \text{Laplace-Operator}$$

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ρ_0	mittlere Dichte
T_0, T_1	feste Temperaturen
Ra_c	kritische Rayleigh-Zahl
Ra_{osc}	Wert der Rayleigh-Zahl für Einsetzen der Konvektion

Verzeichnis der Abbildungen

- 1) Transiente Oszillation nach KOSTER
- 2) Transiente Oszillation nach PUTIN u. TKACHEVA
- 3) Prinzipskizze Lösungsverzweigungen
- 4) Stationäre Rollen
- 5) Oszillation $Ra = 0.6 \cdot 10^7$
- 6) Oszillation $Ra = 0.7 \cdot 10^7$
- 7) Oszillation $Ra = 0.85 \cdot 10^7$
- 8) Nusseltzahl über der Zeit, $Ra = 0.8 \cdot 10^7$
- 9) Oszillation $Ra = 10^7$
- 10) Oszillation $Ra = 1.15 \cdot 10^7$
- 11) Oszillation $Ra = 1.3 \cdot 10^7$
- 12) Nusseltzahl über der Zeit, $Ra = 1.15 \cdot 10^7$
- 13) Nusseltzahl über der Zeit, $Ra = 1.3 \cdot 10^7$
- 14) Oszillation $Ra = 1.45 \cdot 10^7$
- 15) Oszillation $Ra = 1.6 \cdot 10^7$
- 16) Oszillation $Ra = 0.5 \cdot 10^7$
- 17) Oszillation $Ra = 0.42 \cdot 10^7$, Stockwerkzellen
- 18) Oszillation, $Ra = 0.45 \cdot 10^7$, Stockwerkzellen
- 19) Oszillation $Ra = 0.7 \cdot 10^7$, 18.65 Punkte
- 20) Oszillation $Ra = 1.3 \cdot 10^7$, 18.65 Punkte
- 21) Oszillation $Ra = 0.58 \cdot 10^7$
- 22) Verzweigungdiagramm über Ra
- 23) Nusseltzahlen über Ra
- 24) Dimensionslose Periodendauer über Ra

Verzeichnis der Tabellen

- 1) Nusseltzahlen über Ra
- 2) Vergleich gröberes und feineres Maschennetz
- 3) Dimensionslose Periodendauern über Ra

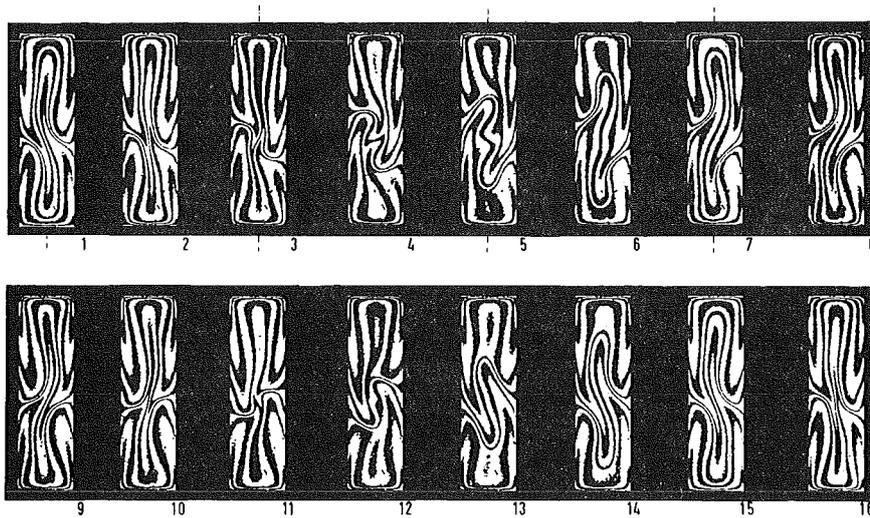


Abbildung 1. Eine Periode einer oszillatorischen Konvektionsströmung bei $Ra^* = 1.06$ im Behälter $H/L = 3.5$ mit gut wärmeleitenden Seitenwänden; Zeitabstand zwischen den Interferogrammen $t = 5$ sec, Experiment KOSTER (1980).

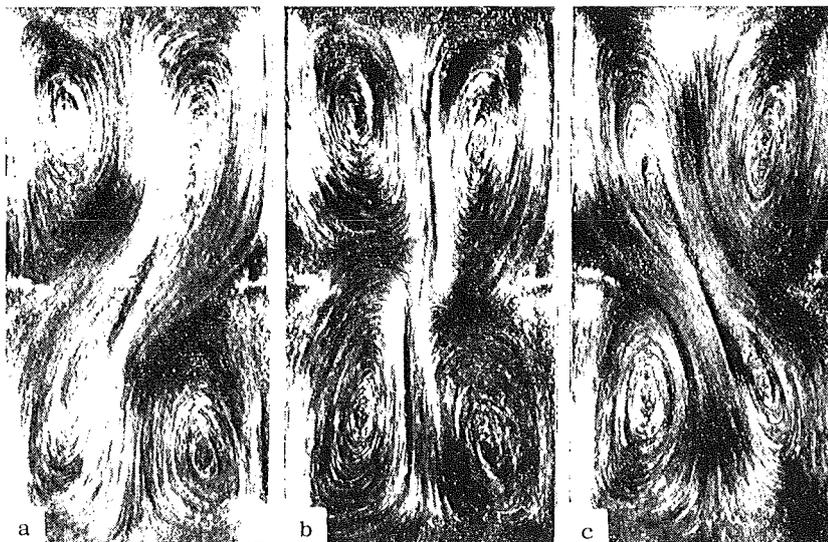
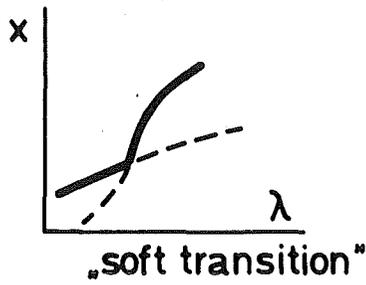
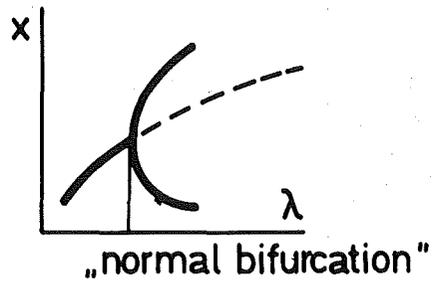


Abbildung 2. Charakteristische Zustände einer oszillatorischen Bewegung für $H/L = 2$ mit schlecht wärmeleitenden Seitenwänden, $Pr = 7$, aus PUTIN u. TKACHEVA (1979).

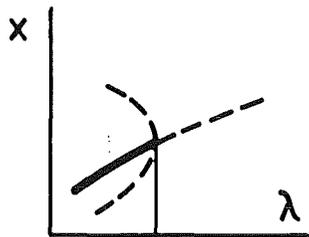
— stabile Lösung
- - - instabile Lösung



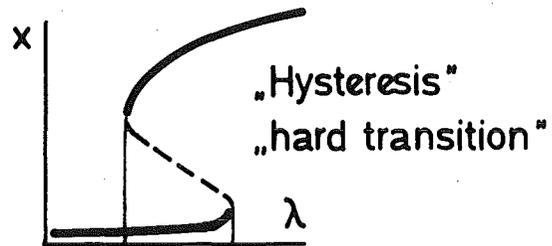
a)



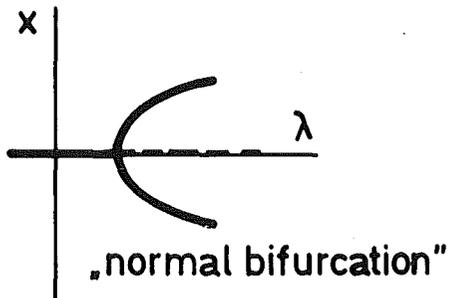
b)



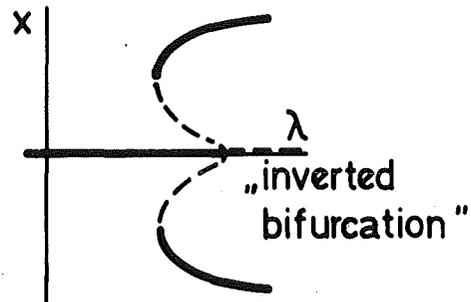
c)



d)



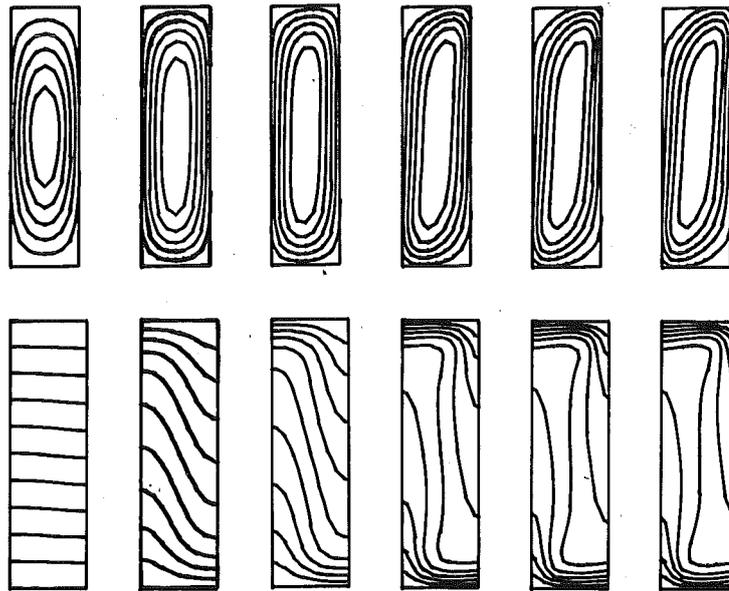
e)



f)

Lösungsverzweigungen

Abbildung 3.



$Ra \cdot 10^{-6}$: 1 1.5 2 4 5 5.5

Abbildung 4. Stationäre Rollen (Strömungsform b) für sechs verschiedene Rayleighzahlen. Dargestellt sind jeweils die Stromfunktion (oben) und das Temperaturfeld.

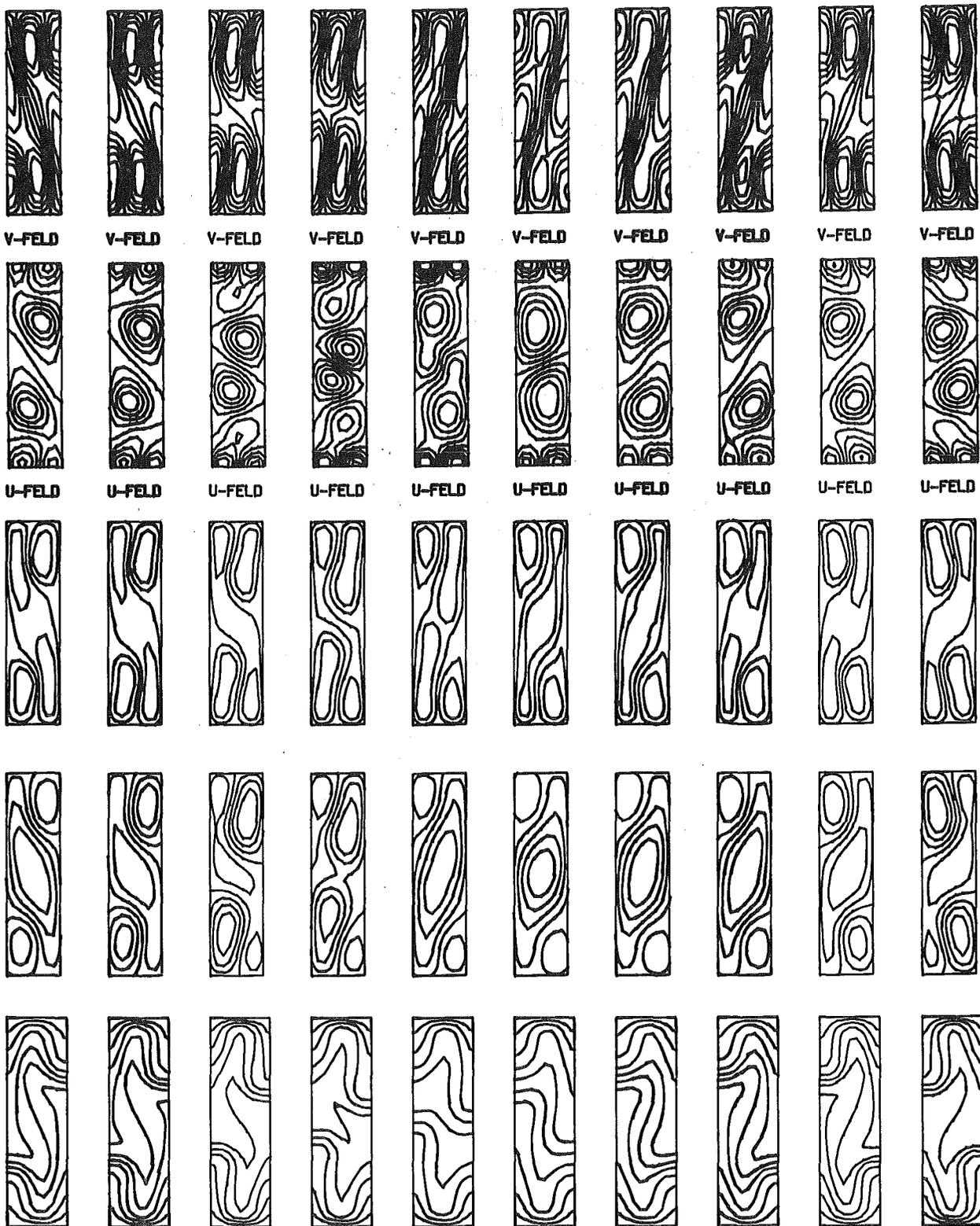


Abbildung 5. $Ra = 0.6 \cdot 10^7$, oszillierende Viererrolle, (Strömungsform d), in der Reihenfolge von oben her enthält die Abbildung Höhenlinien der Geschwindigkeitskomponenten U und V, dann der Wirbelfunktion, der Stromfunktion und des Temperaturfeldes, etwa eine halbe Periode.

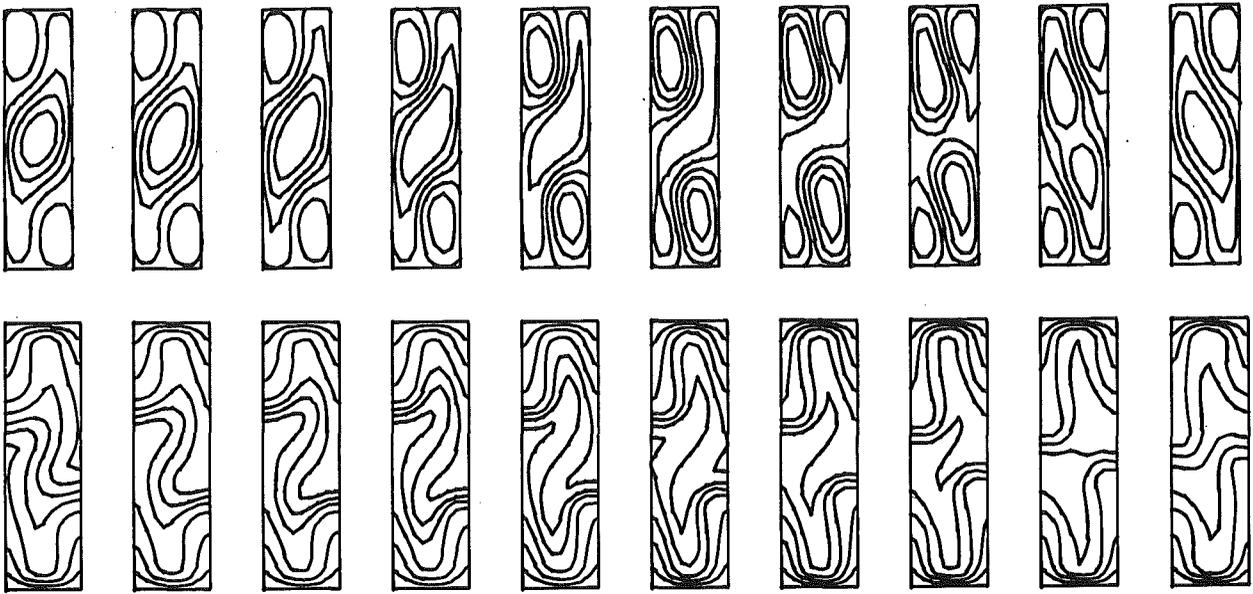


Abbildung 6. $Ra = 0.7 \cdot 10^7$, oszillierende Viererrolle,
(Strömungsform d), Stromfunktion und Temperaturfeld,
etwa eine halbe Periode.

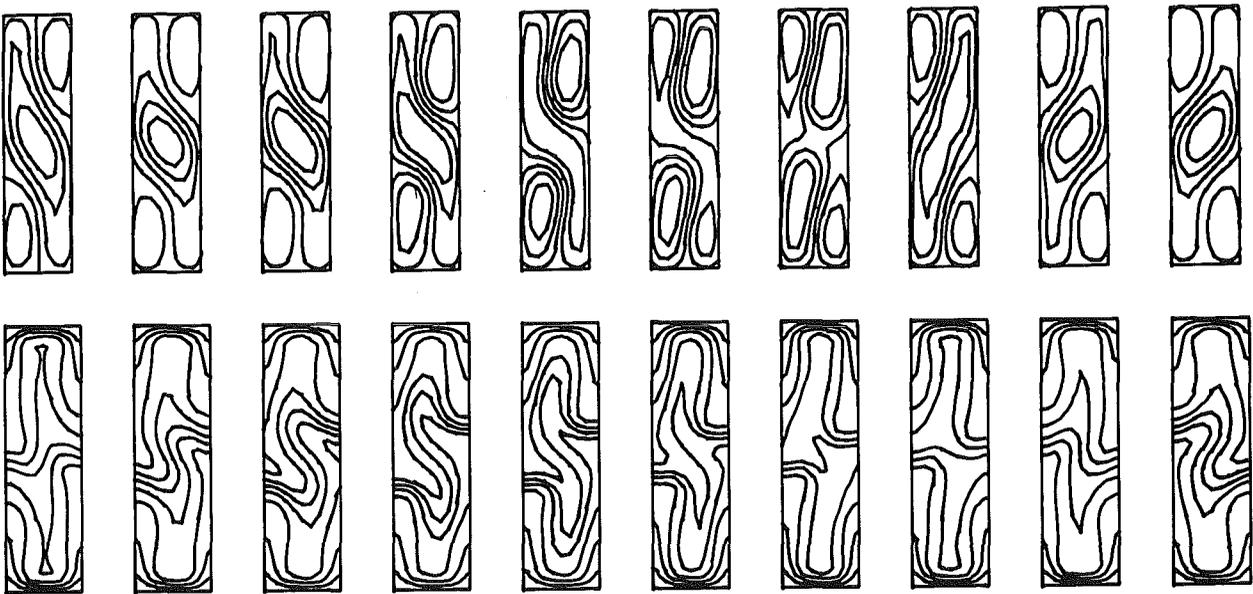


Abbildung 7. $Ra = 0.85 \cdot 10^7$, oszillierende Viererrolle,
(Strömungsform d), Stromfunktion und Temperaturfeld,
etwa eine halbe Periode.

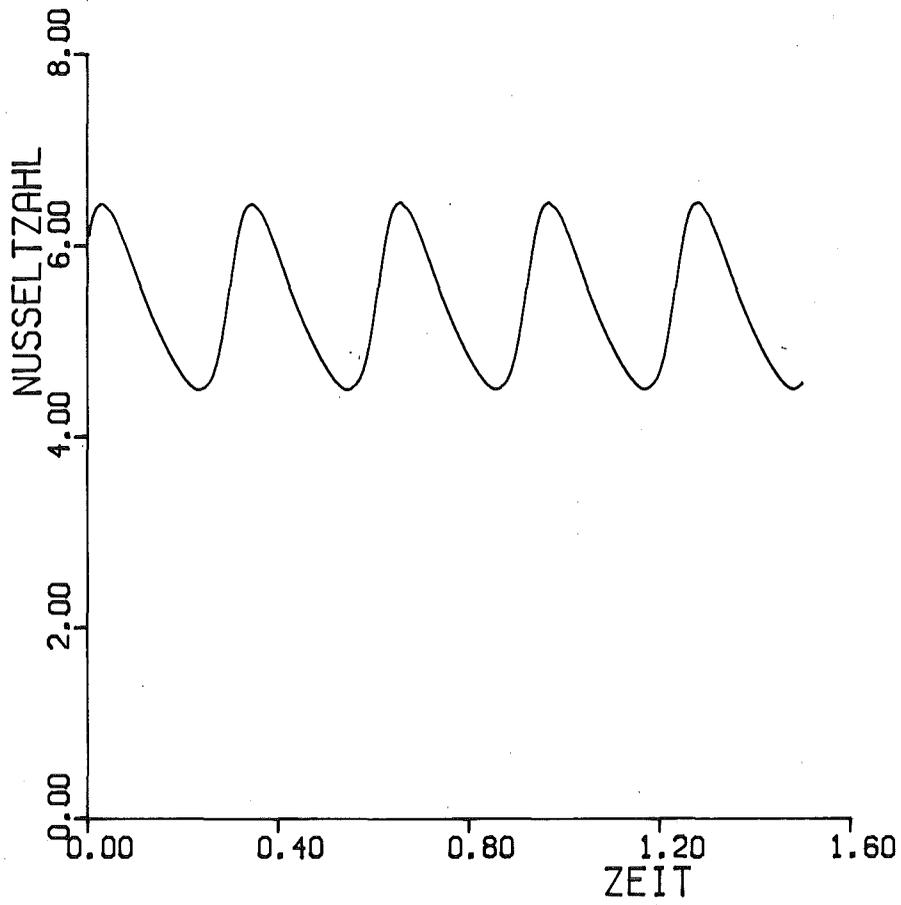


Abbildung 8. Nusseltzahl über der Zeit, $Ra = 0.8 \cdot 10^7$

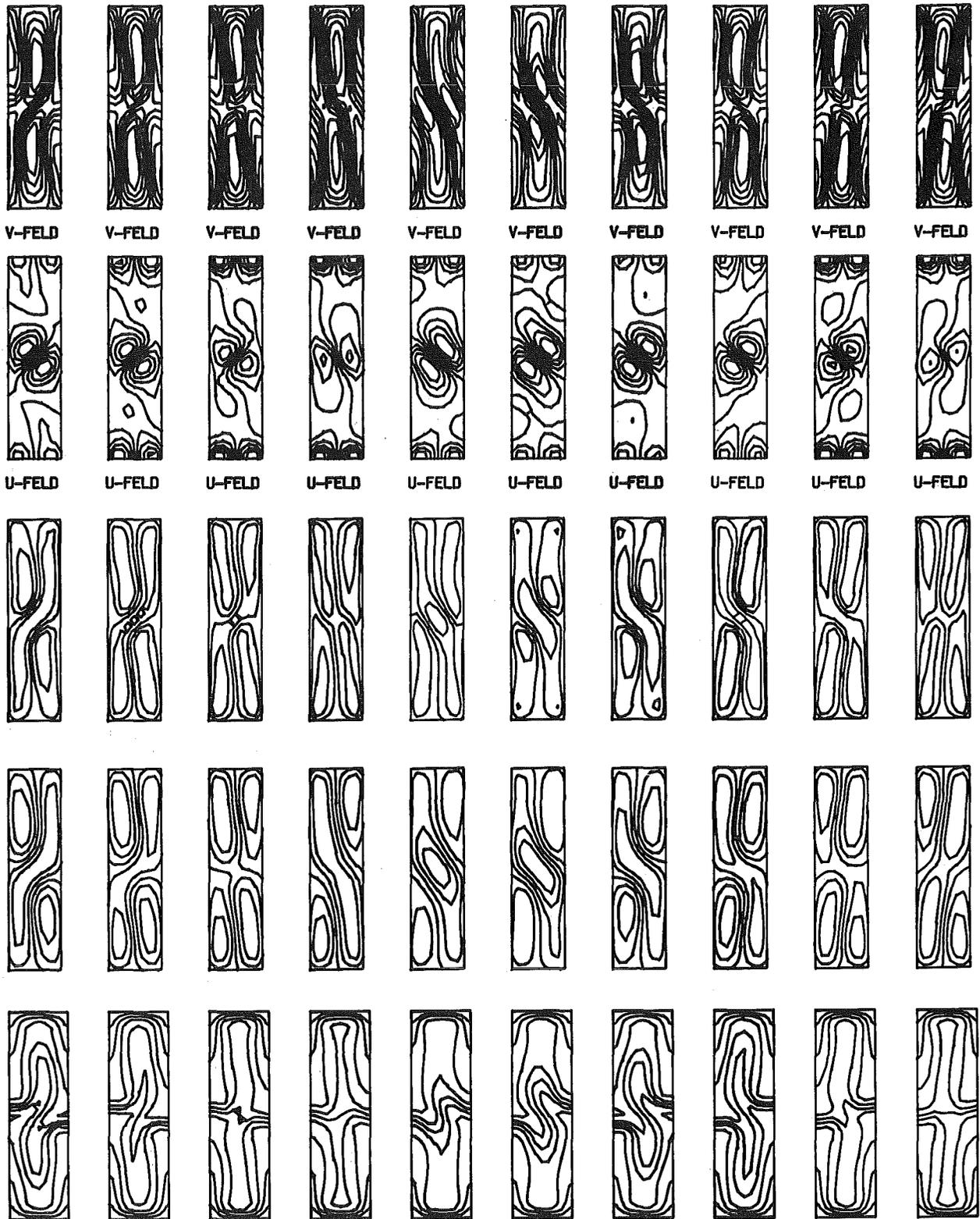


Abbildung 9. $Ra = 10^7$, oszillierende Viererrolle,
(Strömungsform d), Stromfunktion und Temperaturfeld,
etwa eine Periode.

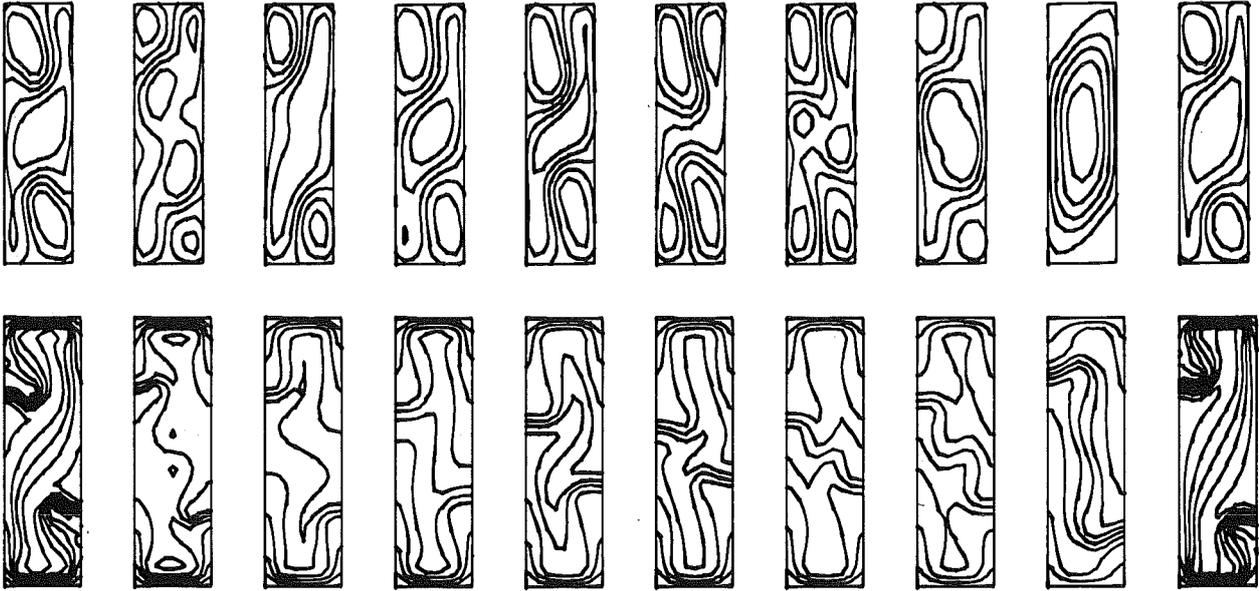


Abbildung 10. $Ra = 1.15 \cdot 10^7$, richtungsorientierte Oszillation, Stromfunktion und Temperaturfeld, ungefähr eine Periode.

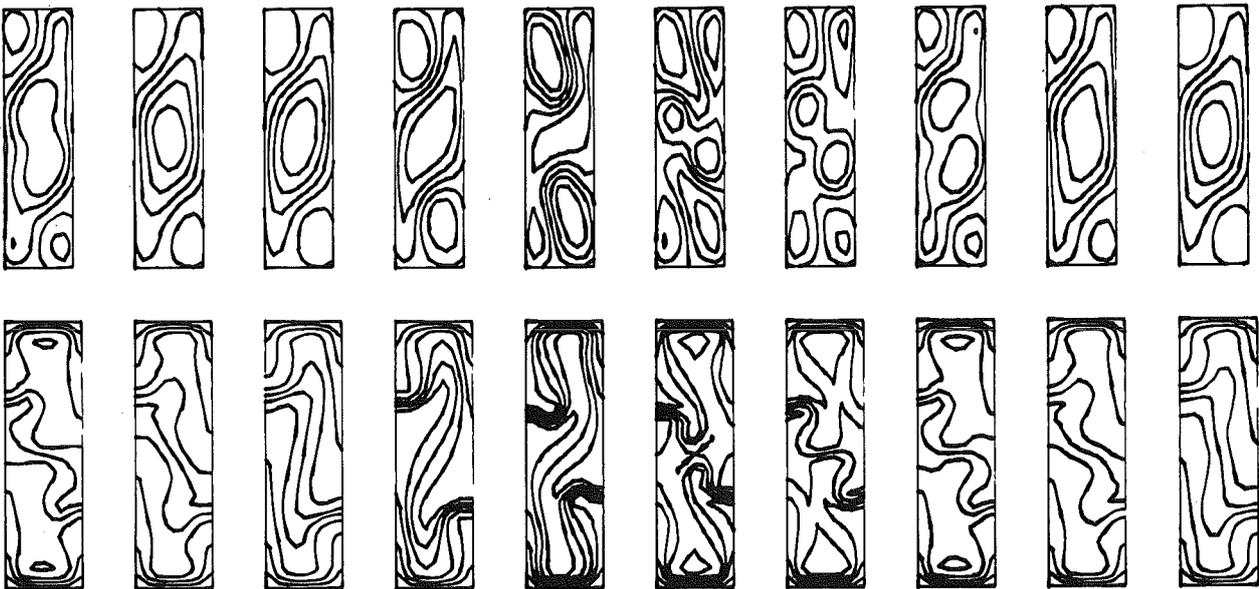


Abbildung 11. $Ra = 1.3 \cdot 10^7$, richtungsorientierte Oszillation, Stromfunktion und Temperaturfeld, ungefähr eine Periode.

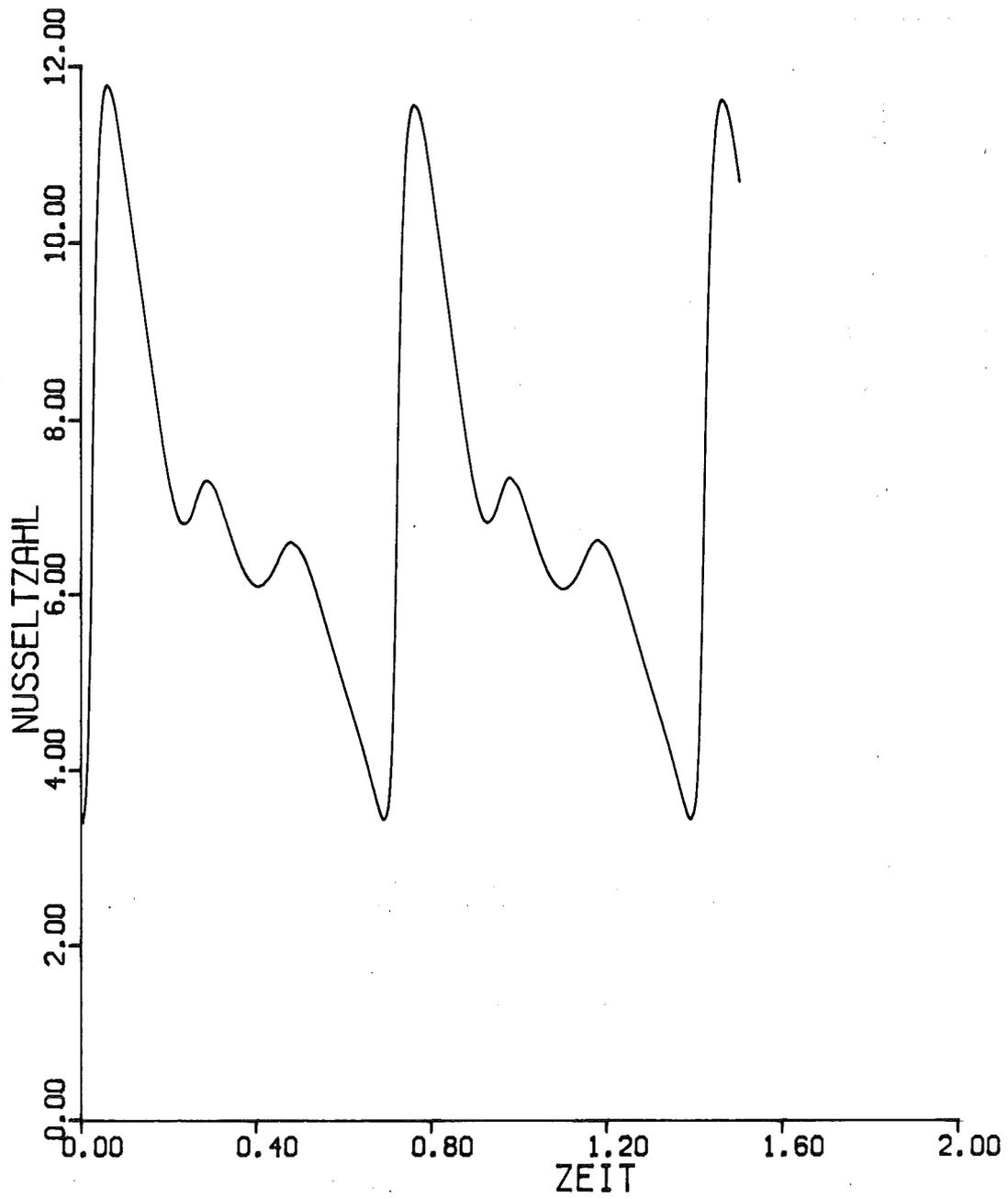


Abbildung 12. $Ra = 1.15 \cdot 10^7$, Nusseltzahl über der Zeit

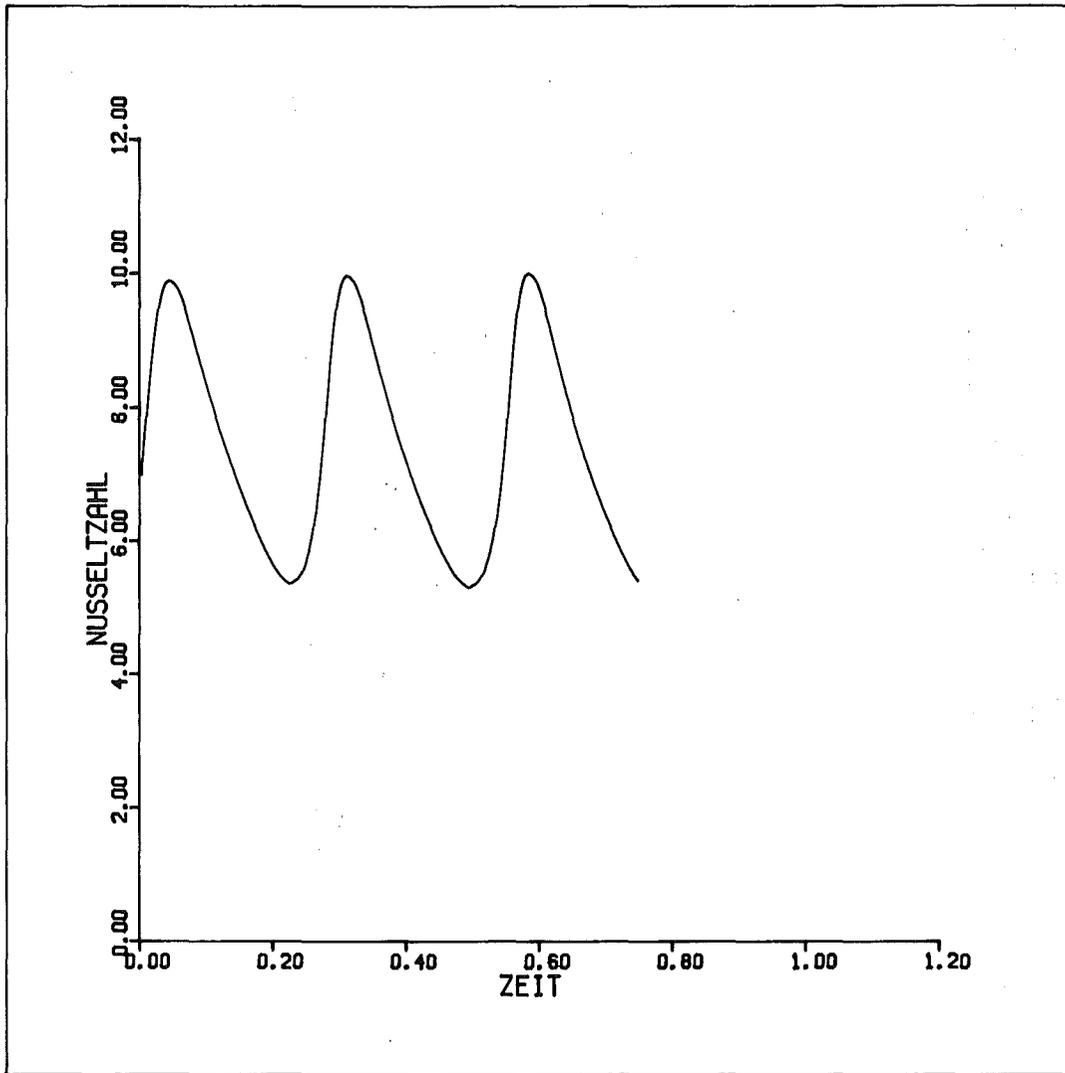


Abbildung 13. $Ra = 1.3 \cdot 10^7$, Nusseltzahl über der Zeit.

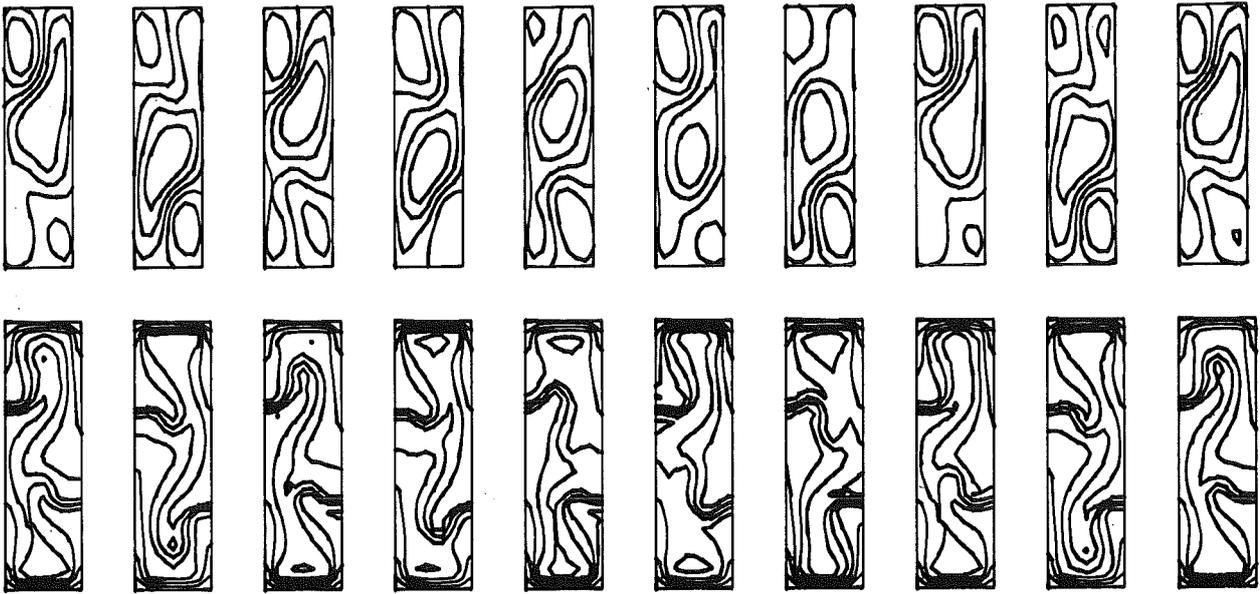


Abbildung 14. $Ra = 1.45 \cdot 10^7$, richtungsorientierte Oszillation, im zeitlichen Mittel inversionssymmetrisch, Stromfunktion und Temperaturfeld, mehrere Perioden.

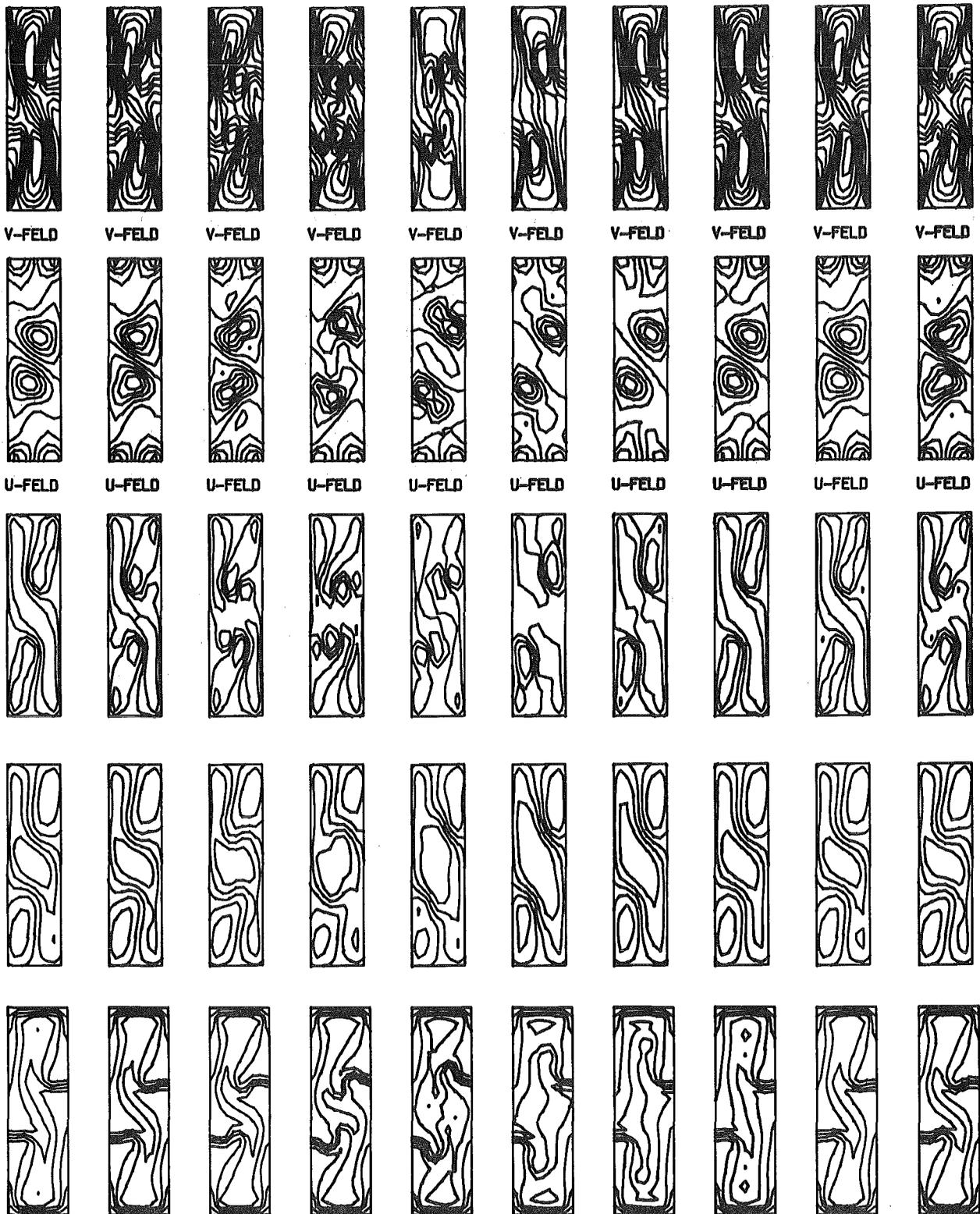


Abbildung 15. $Ra = 1.6 \cdot 10^7$, richtungsorientierte Oszillation (Strömungsform e), die Abbildung zeigt von oben nach unten die beiden Geschwindigkeitskomponenten, die Wirbelfunktion, die Stromfunktion und das Temperaturfeld, etwa eine Periode.

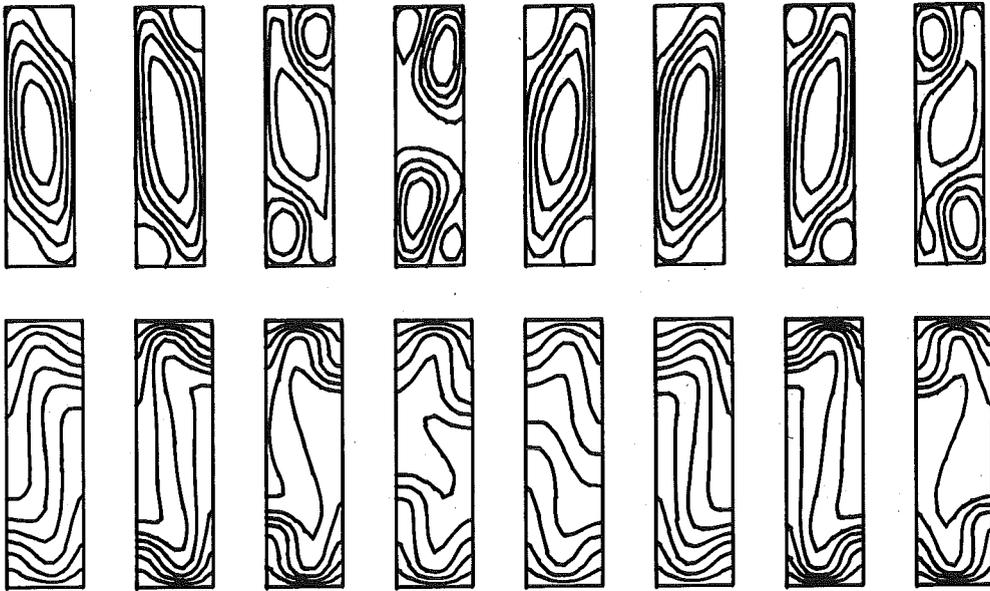


Abbildung 16. $Ra = 0.5 \cdot 10^7$, oszillierende Viererrolle,
(Strömungsform d), Stromfunktion und Temperaturfeld,
etwa eine dreiviertel Periode.

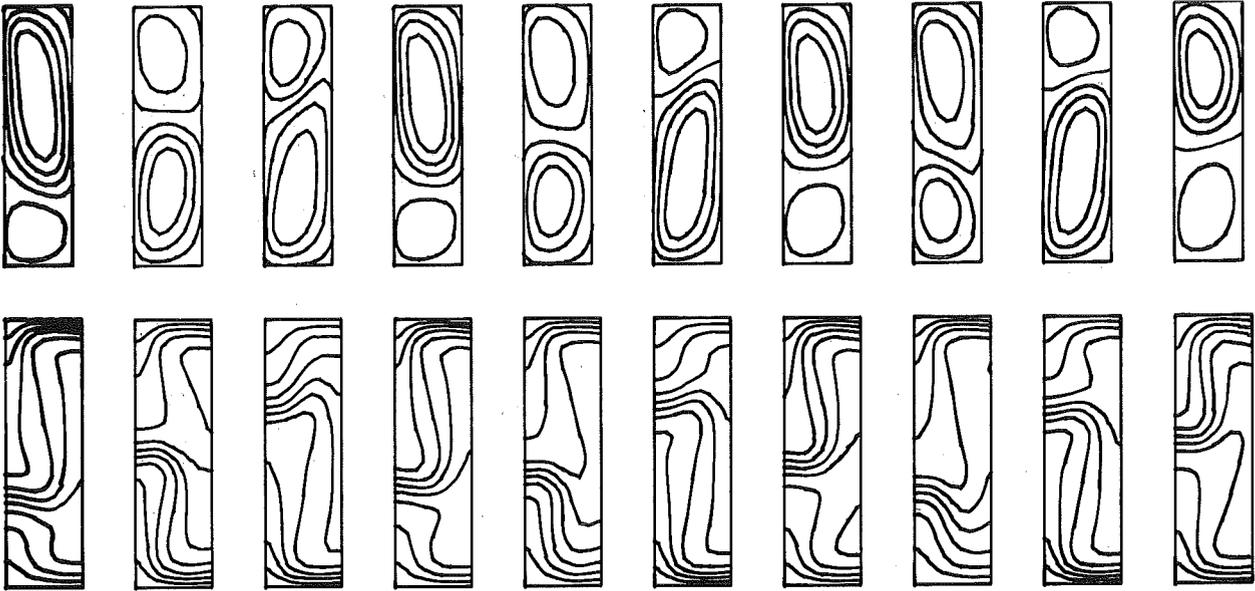


Abbildung 17. $Ra = 0.42 \cdot 10^7$, oszillierende Stockwerkzellen (Strömungsform c), Stromfunktion und Temperaturfeld, die Darstellung umfaßt etwa drei Perioden.

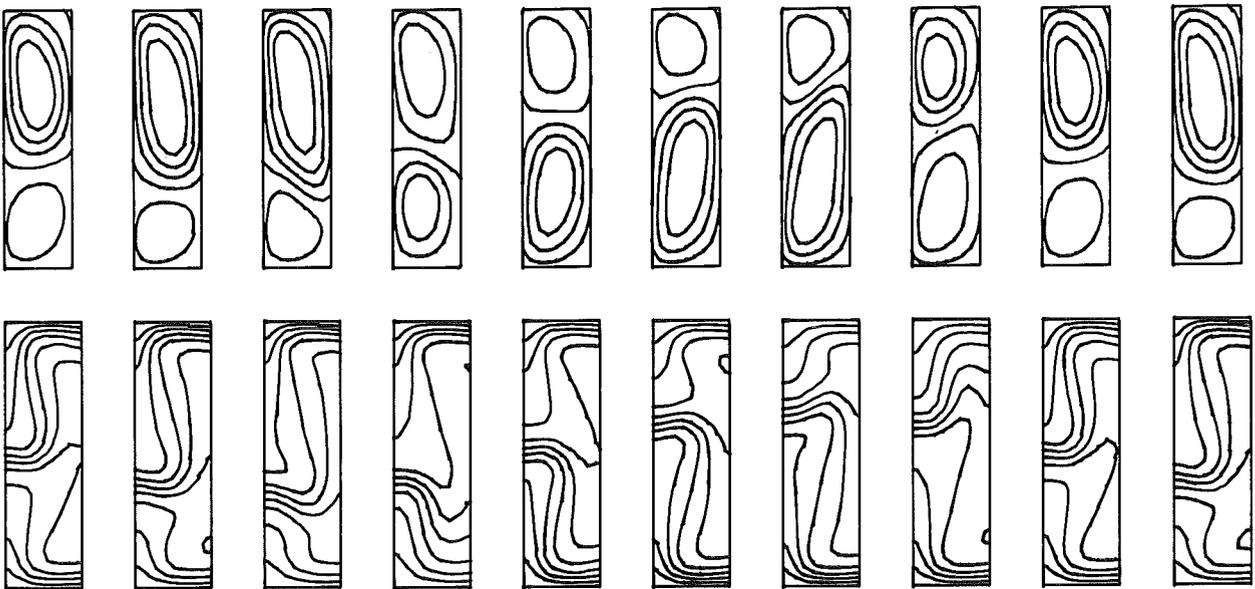


Abbildung 18. $Ra = 0.45 \cdot 10^7$, oszillierende Stockwerkzellen (Strömungsform c), Stromfunktion und Temperaturfeld, etwa eine Periode.

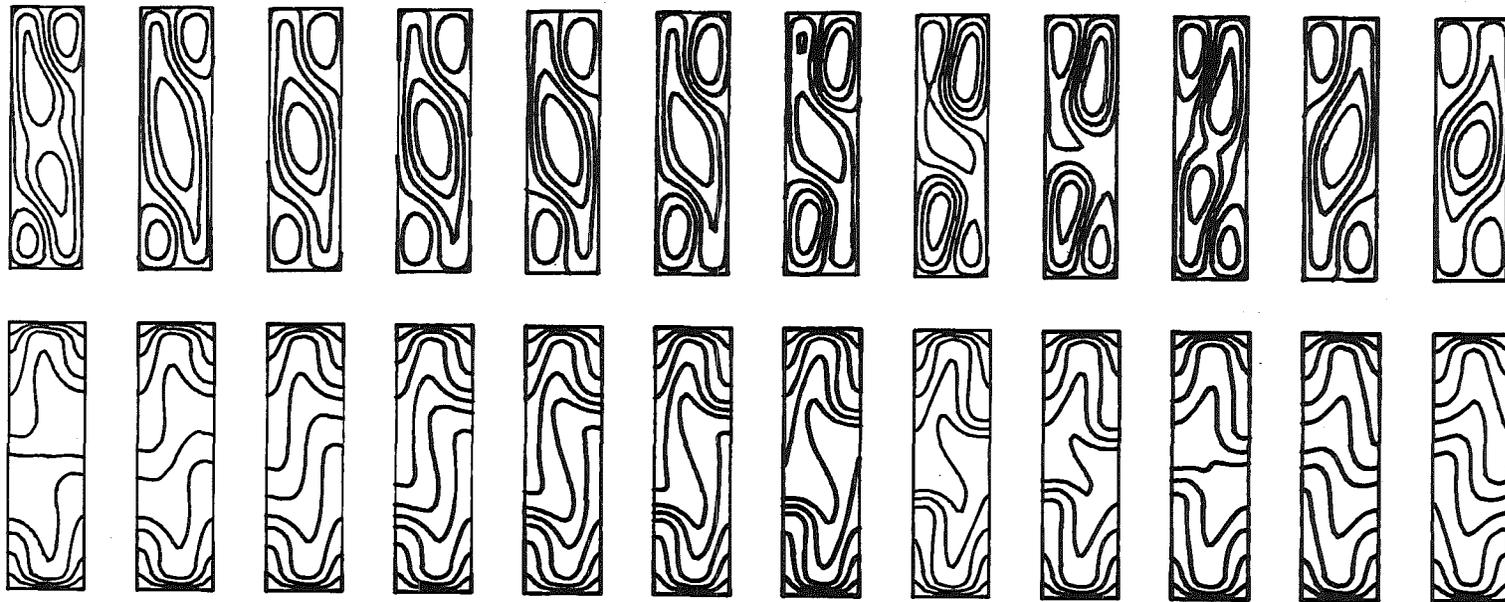


Abbildung 19. $Ra = 0.7 \cdot 10^7$, oszillierende Viererrolle,
 (Strömungsform d), Stromfunktion und Temperaturfeld,
 eine halbe Periode, 18•65 Punkte.

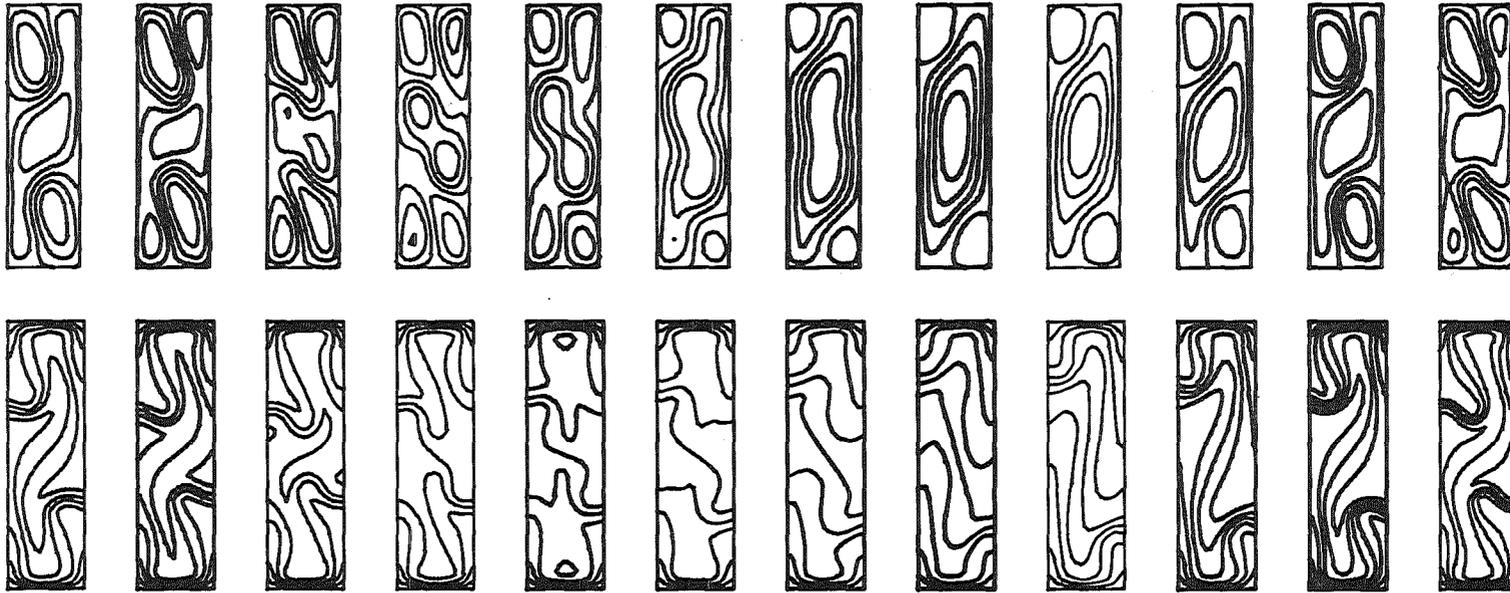


Abbildung 20. $Ra = 1.3 \cdot 10^7$, richtungsorientierte Oszillation,
 (Strömungsform e), Stromfunktion und Temperaturfeld,
 18•65 Punkte.

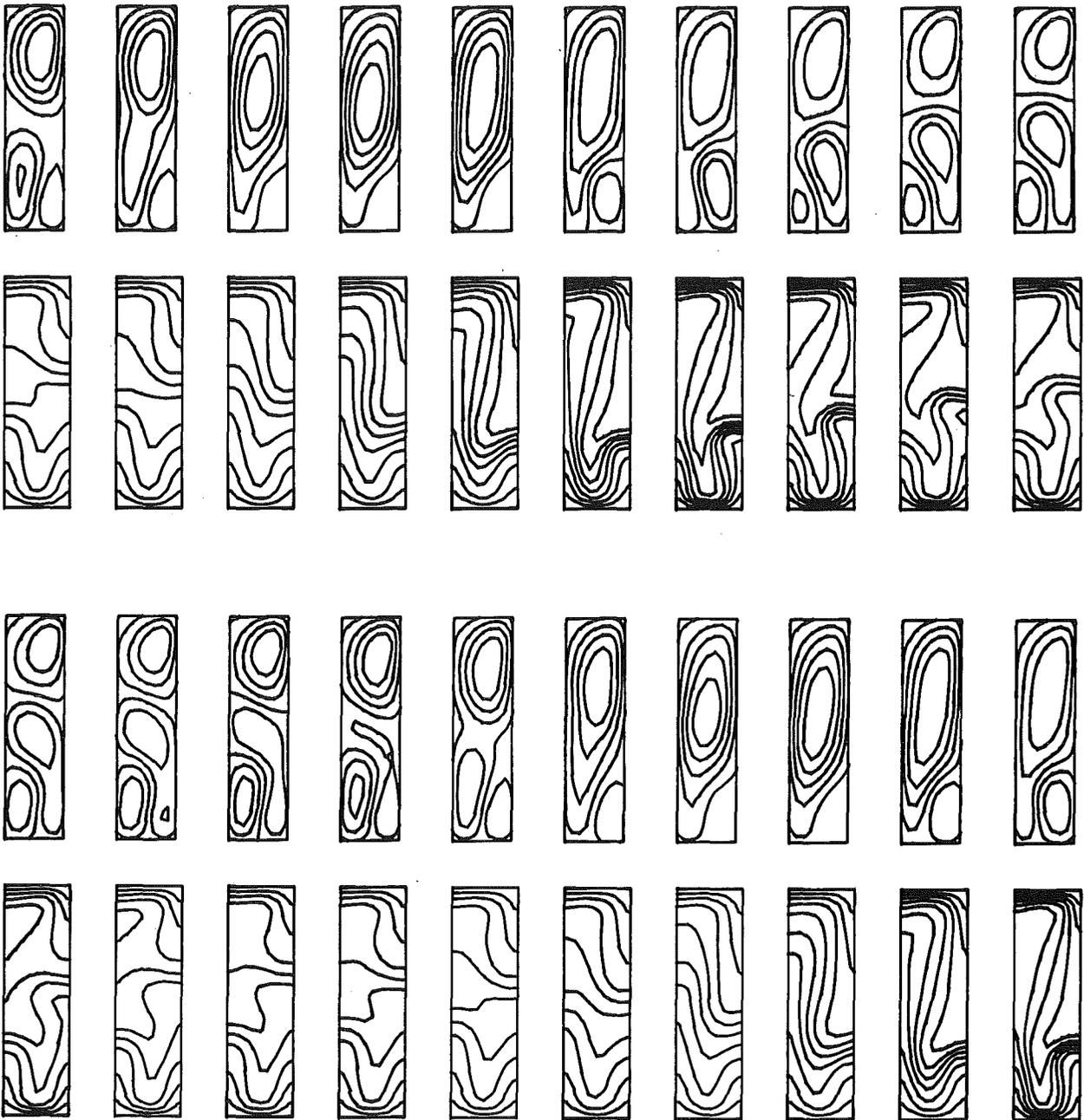
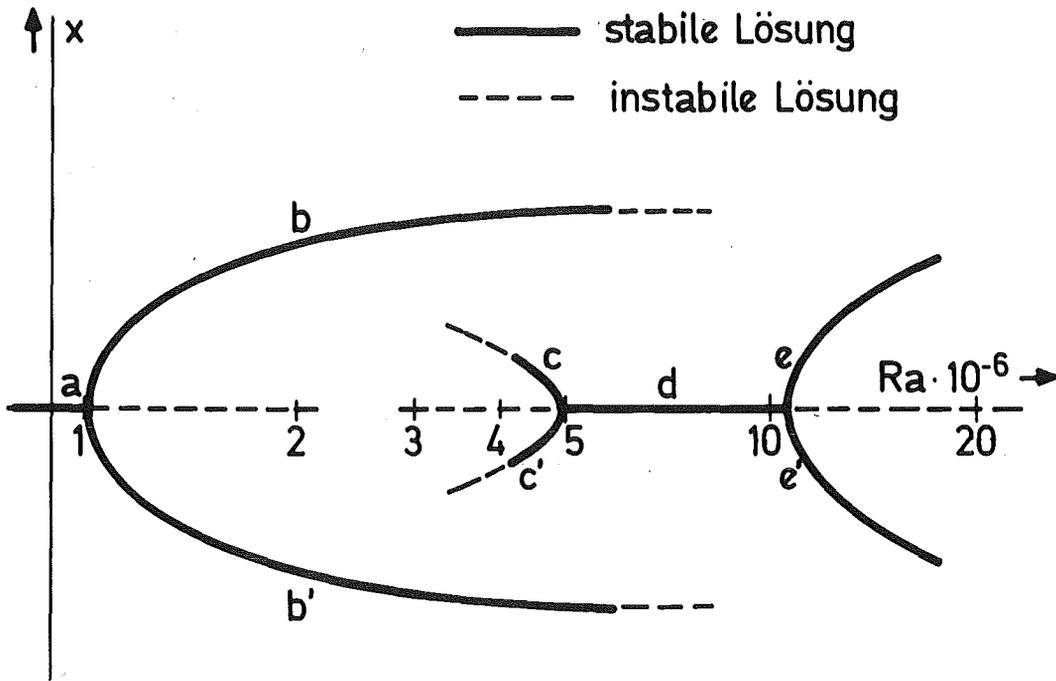


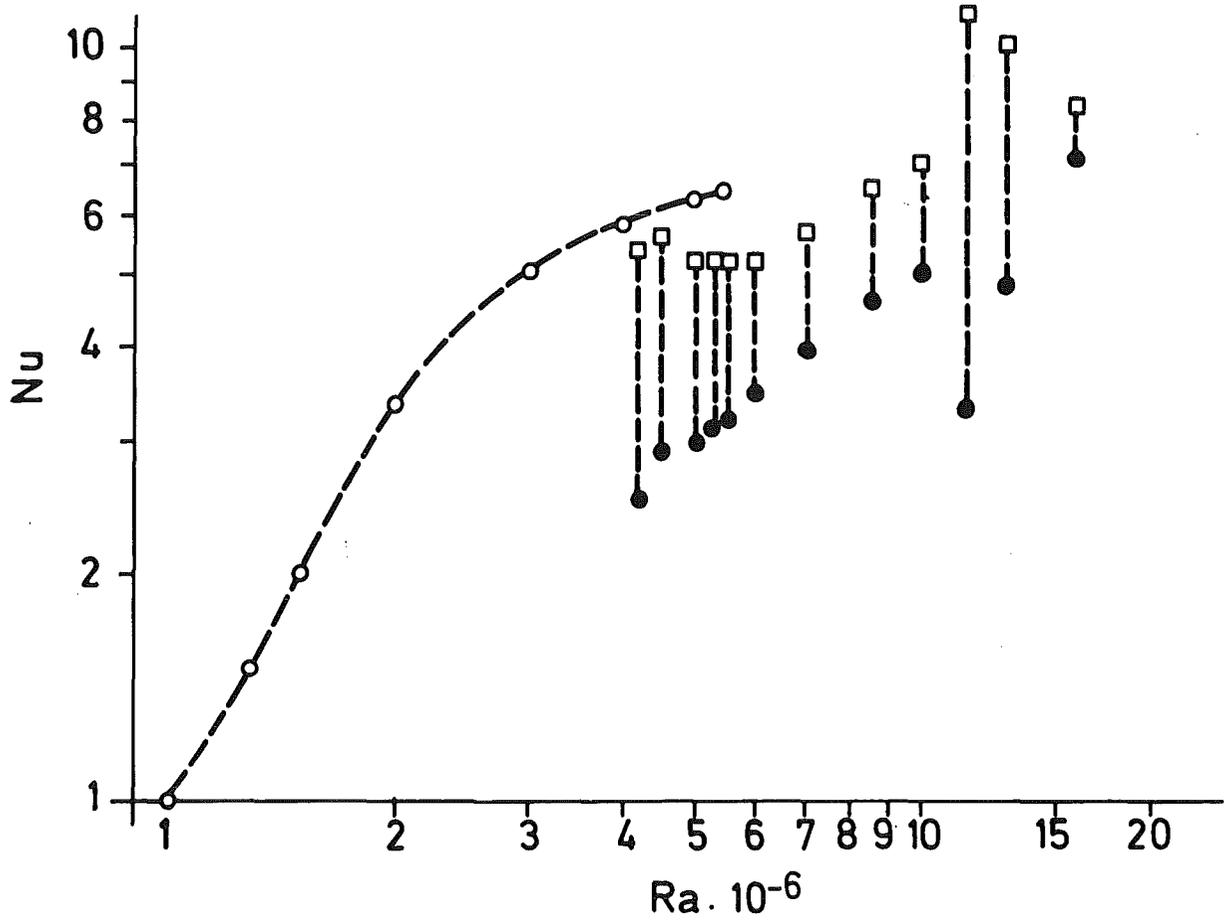
Abbildung 21. $Ra = 0.58 \cdot 10^7$, Sonderform der Strömung in der Nähe eines Übergangspunktes, Stromfunktion und Temperaturfeld, eineinhalb Perioden.



Lösungsverzweigungen über Ra .

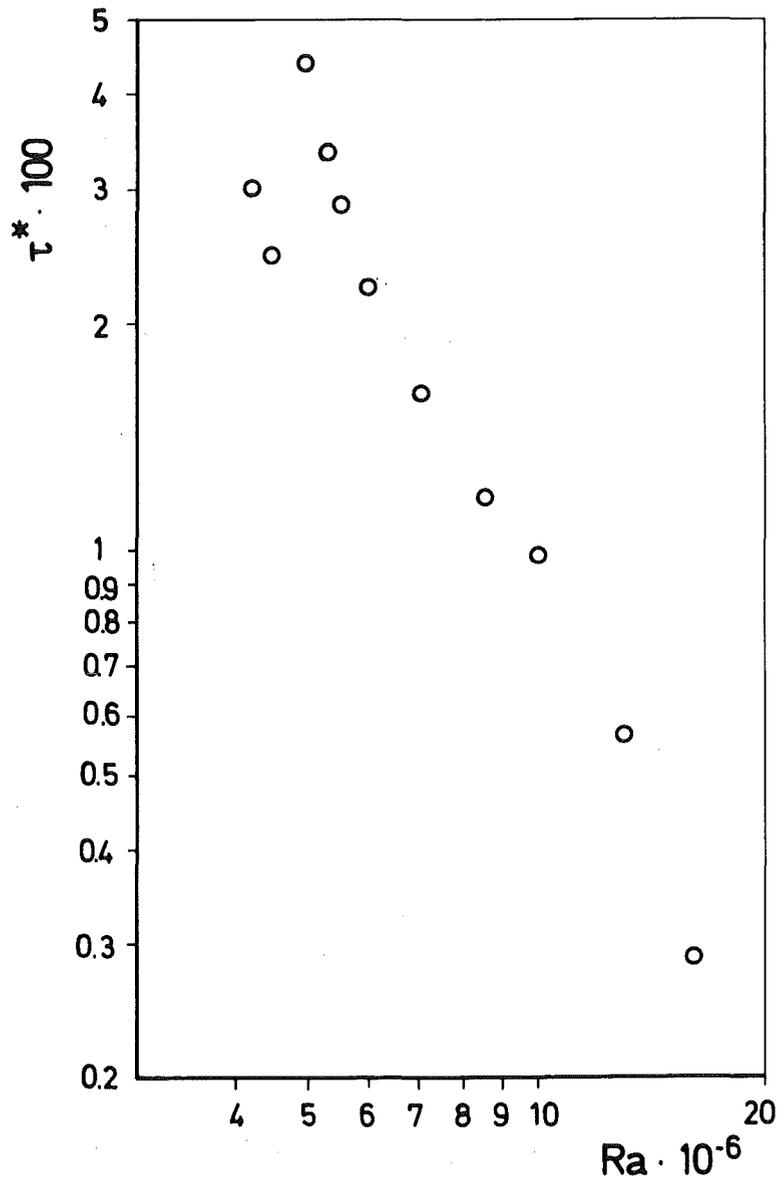
- a - Ruhelage
- b, b' - Stationäre Rolle
- c, c' - Oszillierende Stockwerksdoppelrolle
- d - Oszillierende Viererrolle ohne Vorzugsrichtung
- e, e' - Oszillierende Viererrolle mit Vorzugsrichtung

Abbildung 22.



Berechnete Nusseltzahlen für stationäre Rollen (o), minimale (●) und maximale (□) Nusseltzahl für oszillierende Strömungen

Abbildung 23.



Dimensionslose Periodendauer der Oszillationen
über Ra

Abbildung 24.

TABELLE 1. Nusseltzahlen über Ra.

$Ra \cdot 10^{-7}$	Nusseltzahl für stationäres Verhalten	Nu_{\min} für oszillierendes Verhalten	Nu_{\max} für oszillierendes Verhalten
0.1	1.01		
0.13	1.50		
0.15	2.01		
0.2	3.39		
0.3	5.03		
0.4	5.91		
0.42		2.52	5.47
0.45		2.94	5.65
0.5	6.34	3.04	5.36
0.53		3.19	5.33
0.55	6.42	3.23	5.24
0.6		3.49	5.26
0.7		4.01	5.85
0.8		4.51	6.45
0.85		4.72	6.69
1.0		5.07	7.07
1.15		3.41	11.30
1.3		4.99	10.39
1.45		6.65	10.15
1.6		7.06	8.59

TABELLE 2. Vergleich groberes (9.33 Punkte) und
feineres (18.65 Punkte) Maschennetz.

	9.33 Punkte	18.65 Punkte
$Ra = 0.7 \cdot 10^7$	$Nu_{\min} = 4.01$ $Nu_{\max} = 5.86$ $\tau^* = 0.0161$	$Nu_{\min} = 4.09$ $Nu_{\max} = 6.40$ $\tau^* = 0.0219$
$Ra = 1.3 \cdot 10^7$	$Nu_{\min} = 4.99$ $Nu_{\max} = 10.4$ $\tau^* = 0.00566$	$Nu_{\min} = 6.27$ $Nu_{\max} = 13.21$ $\tau^* = 0.00656$

TABELLE 3: Dimensionslose Periodendauer
 τ^* für die oszillierenden Strömungen in
Abhängigkeit von Ra.

$Ra \cdot 10^{-7}$	$100 \tau^*$
0.42	2.98
0.45	2.47
0.5	4.34
0.53	3.36
0.55	2.88
0.6	2.24
0.7	1.61
0.85	1.17
1.0	0.98
1.3	0.57
1.6	0.29