

KfK 3170
Juni 1981

Varianten der ICE-Technik mit reduzierter numerischer Dämpfung

J. Benner
Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Nukleare Sicherheit

KfK 3170

Varianten der ICE-Technik mit reduzierter numerischer Dämpfung

J. Benner

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH., Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Die ICE - (Implicit-Continuous-Eulerian)Technik ist ein weitverbreitetes numerisches Verfahren zur Lösung von Strömungsproblemen. Das Verfahren bietet viele Vorteile, leidet aber an ausgesprochener numerischer Dämpfung. Hier werden verschiedene Varianten dieses Rechenverfahrens untersucht, mit dem Ziel, eine stabile Variante mit möglichst geringer numerischer Dämpfung aufzuzeigen. Als Testprobleme dienten ein eindimensionales (1D) Problem (Stoßrohr) und zwei zweidimensionale (2D) Probleme (Flachwasserströmung, Überströmung einer Stufe).

Die Rechnungen zeigen, daß die Ergebnisse des klassischen ICE-Verfahrens in vielen Fällen verbessert werden können, vor allem durch eine Senkung des Implizitheitsgrades der Differenzengleichungen. Die Verwendung zentrierter Differenzen statt einseitiger Aufwind-Differenzen ist wegen verringerter Stabilität problematisch.

Abstract

Variants of the ICE-technique with Reduced Numerical Damping

The ICE - (Implicit-Continuous-Eulerian) technique is a widespread numerical method for solving flow-problems. This method has many advantages but suffers on strong numerical damping. Here some variants of this technique are investigated in order to find a stable variant with as least damping as possible. For testing we used a one-dimensional (1D) problem (shock tube) and two two-dimensional (2D) problems (shallow water flow, backward facing step).

The calculations show that in many cases the numerical results of ICE are improved by a lower degree of implicitness of the finite difference equations. The use of central differences instead of one-sided upwind differences is generally not advisable because then the scheme is less stable.

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Formelzeichen	2
3. Darstellung der untersuchten Testprobleme	4
3.1 Stoßrohrproblem	4
3.2 Flachwasserströmung	6
3.3 Überströmung einer Stufe	8
4. Numerisches Integrationsverfahren	11
4.1 Untersuchtes Differentialgleichungssystem, 2D-Probleme	11
4.2 Maschennetz	12
4.3 Interpolationsformeln	13
4.4 Differenzgleichungen	16
4.5 Berücksichtigung der Energiegleichung beim 1D-Stoßrohr- problem	25
5. Ergebnisse	27
5.1 Kompressibles Fluid: Stoßrohrproblem	27
5.2 Kompressibles Fluid: Flachwasserbecken	43
5.3 Inkompressibles Fluid: Überströmung einer Stufe	59
6. Schlußfolgerungen	65
7. Literatur	67
Anhang: Berechnung eines kritischen Massenstromes	70

1. Einleitung

Die Implicit-Continuous-Fluid-Eulerian (ICE) Technik von Harlow und Amsden (/1/, /2/) wird in verschiedenen fluiddynamischen Codes verwendet. Neuerdings hat sich gezeigt, daß dieses Finite-Differenzenverfahren in manchen Fällen unter starker numerischer Dämpfung leidet /3/. Die Gründe dafür sind bekannt: Die Verwendung von Aufwind-Differenzen und die implizite Behandlung einiger Terme der Differenzgleichungen. In dieser Arbeit werden nun Varianten des ICE-Verfahrens vorgestellt, die auf diese Techniken verzichten.

An drei verschiedenen Testproblemen werden diese Varianten überprüft und verglichen:*)

- (1) 1D-Problem, kompressible Strömung:
Stoßrohrproblem /4/.
- (2) 2D-Problem, kompressible Strömung:
Flachwasserströmung mit hydraulischer Analogie /5/.
- (3) 2D-Problem, inkompressible Strömung:
Strömung über eine Stufe

*) 1D = eindimensional, 2D = zweidimensional, u.s.w.

Diese drei Testprobleme werden als erstes kurz beschrieben. Danach werden die verschiedenen numerischen Verfahren dargestellt. Beim anschließenden Vergleich der einzelnen Verfahren in Bezug auf

- Genauigkeit der Ergebnisse
- Stabilitätsverhalten
- Rechenaufwand

ergeben sich erhebliche Unterschiede, die diskutiert werden.

2. Formelzeichen

Dimensionsbehaftete Größen

$\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$	$[\text{m}]$	Ortskoordinaten
t	$[\text{sec}]$	Zeit
h	$[\text{m}]$	Wasserhöhe
ρ	$[\text{kg/m}^3]$	Dichte, entspricht h in der hydraulischen Analogie
$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\}$	$[\text{m/sec}]$	Geschwindigkeitskomponenten
g	$[\text{m/sec}^2]$	Erdbeschleunigung
p	$[\text{Pa}]$	Entspricht $1/2 \cdot g \cdot h^2$ in der hydraulischen Analogie
c	$[\text{m/sec}]$	Schallgeschwindigkeit, entspricht $\sqrt{g \cdot h}$ in der hydraulischen Analogie
ν	$[\text{m}^2/\text{sec}]$	kinematische Zähigkeit
U	$[\text{m/sec}]$	charakteristische Geschwindigkeit
L	$[\text{m}]$	charakteristische Länge
e	$[\text{J/kg}]$	spezifische innere Energie

Dimensionslose Größen

κ Adiabatenkoeffizient

$$\beta = \max_{i,j} \left\{ \frac{\Delta t \cdot |u_i^j|}{\Delta x_i} + \frac{\Delta t \cdot |v_i^j|}{\Delta y_j} \right\} \quad \text{Courant-Zahl}$$

$$\text{Re} = \frac{U \cdot L}{\nu} \quad \text{Reynoldszahl}$$

Indizes

- Wert zur Zeit $t=0$
- k_{rit} kritische Größen
- q_{ussen} Wert in einer Randmasche

Diskretisierte Größen

- Δx_i Maschenbreite
- Δy_j Maschenhöhe
- Δt Zeitschrittweite
- Q_i^j Wert in der Mitte von Masche (i,j)
- $Q_{i+\frac{1}{2}}^j$ Wert in der Mitte der Maschengrenze zwischen (i,j) und $(i+1, j)$
- $Q_i^{j+\frac{1}{2}}$ Wert in der Mitte der Maschengrenze zwischen (i,j) und $(i, j+1)$
- $Q_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}$ Wert in einem Knotenpunkt des Gitters
- ${}^n Q$ Wert zum Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$
- $\tilde{Q}, \tilde{\tilde{Q}}$ vorläufige Werte

Parameter in den Differenzgleichungen

- θ } Grad der Implizitheit
- ϕ }
- N_0 Anzahl der Zeitschritte bis zur Mittelung zwischen der $(n-1)$ -ten und der n -ten Zeitebene
- C Stärke der künstlichen Viskosität
- k Art der künstlichen Viskosität

3. Darstellung der untersuchten Testprobleme

Die Wahl eines geeigneten Testproblems zum Vergleich verschiedener Codes ist kein einfaches Problem. Es müssen verschiedene, sich teilweise widersprechende Kriterien erfüllt sein:

- (a) Das numerische Verfahren muß strapaziert werden, um dessen Schwachstellen herauszufinden. Im vorliegenden Fall heißt das, daß hohe Geschwindigkeiten und Strömungen schräg zu Maschengrenzen vorhanden sein müssen.
- (b) Die Ergebnisse sollten in irgend einer Form kontrollierbar sein (analytisches Ergebnis, Experiment).
- (c) Es sollte nach Möglichkeit kein rein akademisches Problem sein, sondern auch eine gewisse praktische Relevanz besitzen.
- (d) In der Literatur sollten Vergleichsergebnisse mit anderen numerischen Verfahren vorliegen.

Die gewählten Testprobleme werden jetzt beschrieben und anhand dieser Kriterien bewertet.

3.1 Stoßrohrproblem

Ein Zylinder ist durch eine Membran in zwei halbseitig- unendliche Teile getrennt. Er ist mit einem idealen Gas gefüllt, das auf beiden Seiten der Membran unterschiedliche Dichte und Drücke, aber gleiche Temperaturen und Geschwindigkeiten hat (Abb. 1). Zur Zeit $t=0$

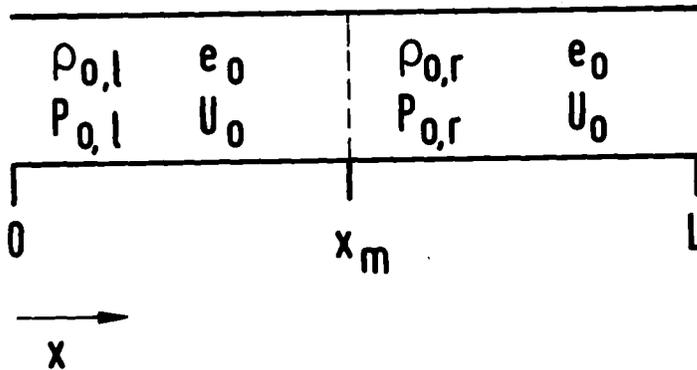


Abb. 1: Stoßrohr mit Anfangsbedingungen

wird die Membran entfernt, es breiten sich dann zu einer Seite eine Schockfront, zur anderen Seite eine Entlastungswelle aus.

Das Problem wird durch folgende Differentialgleichungen beschrieben /4/:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{Impulsgleichung})$$

$$(3) \quad \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(u e)}{\partial x} \right) - e \frac{\partial \rho}{\partial x} = - p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{Energiegleichung})$$

$$(4) \quad p = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot e \quad (\text{Zustandsgleichung})$$

Randbedingungen sind wegen der vorausgesetzten Unendlichkeit des Zylinders nicht erforderlich, im Stoßbereich gelten die Rankine - Hugoniot Beziehungen /4/.

Die Lösung des Systems (1) - (4) läßt sich zu jedem Zeitpunkt analytisch berechnen /4/. Deswegen, sowie wegen seiner relativen Einfachheit ist dies eines der beliebtesten Testprobleme zum Vergleich numerischer Verfahren (siehe z.B. /6/, /7/). Ein weiterer Vorteil ist, daß an diesem Problem leicht der Einfluß hoher konvektiver Geschwindigkeiten studiert werden kann. Man kann nämlich in Form einer Galilei-Transformation dem Gesamt-

system eine konstante Anfangsgeschwindigkeit u_0 aufprägen. Dies ändert nichts an der physikalischen Lösung des Problems.

3.2 Flachwasserströmung

Unter bestimmten Voraussetzungen sind die Differentialgleichungen, die das Ausströmen von Wasser aus einem ebenen Becken mit senkrechten Wänden beschreiben, (Abb. 2) formal identisch zu Kontinuitäts- und Impulsgleichungen für die zweidimensionale Strömung eines idealen, kompressiblen Gases /5/. Die wesentliche Voraussetzung ist dabei die "Flachheit" des Beckens. Die Differentialgleichungen der Flachwasserströmung lauten dann:

$$(5) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hvu)}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$(7) \quad \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(hvu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

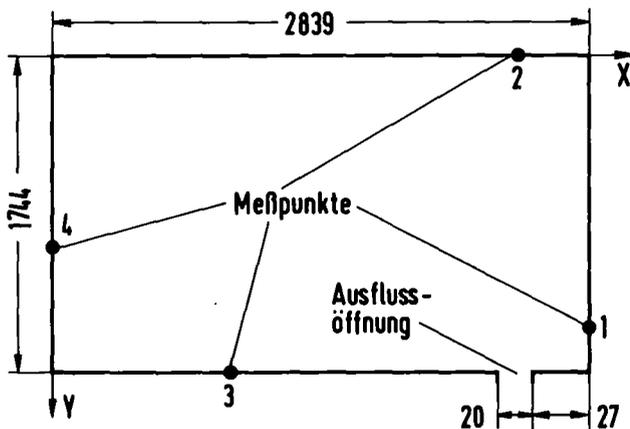
$$(8) \quad p = \frac{g}{2} \cdot h^2$$

+ Anfangs- und Randbedingungen, die weiter unten spezifiziert werden.

Die Analogie zur ebenen Gasströmung /8/ ergibt sich, wenn man die physikalischen Größen gem. Tabelle 1 identifiziert.

Flachwasserströmung		ebene Gasströmung	
h	Wasserhöhe	ρ	Dichte des Gases
$\sqrt{g \cdot h}$	Ausbreitungsgeschw. kleiner Störungen	c	Schallgeschwindigkeit
$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\}$	Strömungsgeschw.	$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\}$	Strömungsgeschw.
t	Zeit	t	Zeit
$\frac{\rho}{2} \cdot h^2 = p$		p	Druck

Tabelle 1: Hydraulische Analogie



Punkt	Koordinaten [m]
1	(2.839, 1.5)
2	(2.569, 0.0)
3	(1.0, 1.744)
4	(0.0, 1.0)

Abb. 2: Flachwasserbecken, Geometrie und Meßpunkte

Tabelle 2: Koordinaten der Meßpunkte

Aus der 'Zustandsgleichung' (8) folgt, daß die Analogie nur für ein hypothetisches Gas mit Adiabatenkoeffizienten $\kappa = 2$ gilt. Mit der Bernoulli-Gleichung kann man zeigen, daß bei Ausströmen von Gas aus einem Behälter am Ausfluß ein gewisser kritischer Druck p_{krit} und eine kritische Ausströmgeschwindigkeit u_{krit} nicht überschritten werden/9/. Bei dem oben angegebenen Wert für κ gilt (ρ_0, p_0 Anfangsdichte und- druck)

$$(9) \quad p_{krit} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot p_0$$

$$(10) \quad u_{krit} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}$$

In der Analogie gemäß Tabelle 1 entspricht dem eine "kritische Höhendifferenz" am Ausfluß

$$(11) \quad h_{\text{krit}} = \frac{2}{3} \cdot h_0$$

und eine kritische Geschwindigkeit

$$(12) \quad u_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot g \cdot h_0}$$

Dabei ist h_0 die konstante Anfangshöhe der Wasseroberfläche, das Wasser befindet sich zur Zeit $t=0$ in Ruhe.

Die festen Wände werden als reibungsfrei angenommen, (11) und (12) sind die theoretisch zu erwartenden Randbedingungen am Ausfluß.

Die eben beschriebene Flachwasseranalogie ist benutzt worden, um die Druckentlastung in einem DWR bei Kühlmittelverluststörfall zu simulieren; die dazu gemachten Experimente sind in /10/ dokumentiert. In diesen Experimenten wurde der zeitliche Verlauf der Wasserhöhe in vier verschiedenen Punkten im Kanal gemessen, Abb. 2 zeigt die Lage der Punkte sowie die Maße des Versuchskanals. In /10/ sind auch Vergleichsrechnungen mit dem Code YAQUI /11/ dokumentiert.

Bei diesem Problem muß das numerische Verfahren eine Strömung berechnen, die in manchen Teilen schräg zu Maschengrenzen liegt und, zumindest im Ausströmbereich, hohe Geschwindigkeiten aufweist. Ein Vergleich mit experimentellen Daten ist allerdings nur an Punkten in Wandnähe möglich, wo die Geschwindigkeiten relativ niedrig sind.

3.3 Überströmung einer Stufe

Die Differentialgleichungen für den Strom eines inkompressiblen, zähen Mediums über eine Stufe sind die Navier-Stokes Gleichungen /9/:

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$(15) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v$$

+ Anfangs- und Randbedingungen

Hier soll die Strömung über eine Stufe betrachtet werden,
Abb. 3 zeigt die Geometrie.

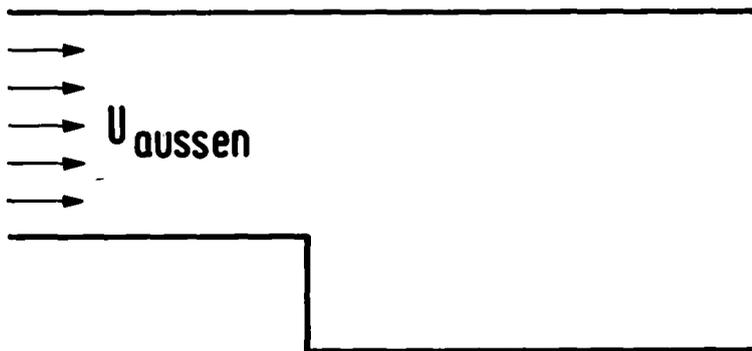


Abb. 3: Backward facing step

Der Anfangszustand sei eine ruhende Flüssigkeit unter konstantem Druck p_0 . Auf der linken Seite strömt Flüssigkeit mit der konstanten Geschwindigkeit U_{aussen} zu, auf der rechten Seite kann sie frei abfließen. Die oberen und unteren Wände seien fest und reibungsfrei. Es sollen Vektorplots der Strömungsfelder, die mit verschiedenen numerischen Verfahren berechnet wurden, miteinander verglichen werden.

Auch dieses Problem wird häufig zum Vergleich numerischer Verfahren verwendet. So findet man experimentelle Ergebnisse in /12/ und /13/. Numerische Berechnungen für laminare Strömung sind in /14/ - /16/ dokumentiert, für turbulente Strömung in /17/ und /18/.

Wieder muß das numerischer Verfahren eine Strömung berechnen, die schräg zu Maschen verläuft (im Rezirkulationsbereich unterhalb der Stufe). Dies sollte vor allem bei Verwendung von Aufwind-Differenzen zu numerischer Dämpfung führen.

4. Numerisches Integrationsverfahren

4.1 Untersuchtes Differentialgleichungssystem, 2D Probleme

Die Gleichungssysteme (5) - (8) und (13) - (15) lassen sich formal auf eine Form bringen:

$$(16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$(17) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$(18) \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$(19) \quad p = p(\rho)$$

+ Anfangs- und Randbedingungen

Bei den Gleichungen (5) - (8) für die Flachwasserströmung ist dies offensichtlich, wenn man die Analogie gemäß Tabelle 1 beachtet und $\nu = 0$ setzt. (13) - (15) für den inkompressiblen Fall kann dadurch auf (16) - (19) zurückgeführt werden, daß man die Dichte ρ räumlich und zeitlich konstant hält. Formal wird dies durch die Forderung

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \longrightarrow \infty$$

erreicht.

Im folgenden sollen für die Lösung des Differentialgleichungssystems (16) - (19) Differenzenverfahren entwickelt werden.

4.2 Maschennetz

Zur räumlichen Diskretisierung wird das Grundgebiet Ω in rechteckige Maschen eingeteilt. Wir nehmen (wie in §3) an, daß Ω geradlinige Kanten hat, diese sollen mit Maschengrenzen zusammenfallen. Δx_i sei die Breite der i -ten Masche in x -Richtung, Δy_j die Höhe der j -ten Masche in y -Richtung.

Randbedingungen werden in üblicher Weise (siehe z.B. /19/) in Form von "fiktiven Randmaschen" definiert.

Durchgehend soll ein sog. "staggered grid" verwendet werden, d.h. verschiedene Variable werden an verschiedenen Stellen im Maschennetz berechnet. In diesem Fall werden Stoffwerte wie Druck, Dichte oder Energie in den Maschenmitten berechnet, Geschwindigkeiten und Impulse dagegen an Mittelpunkten von Maschengrenzen. Abb. 4 zeigt die Indizierung der Variablen.

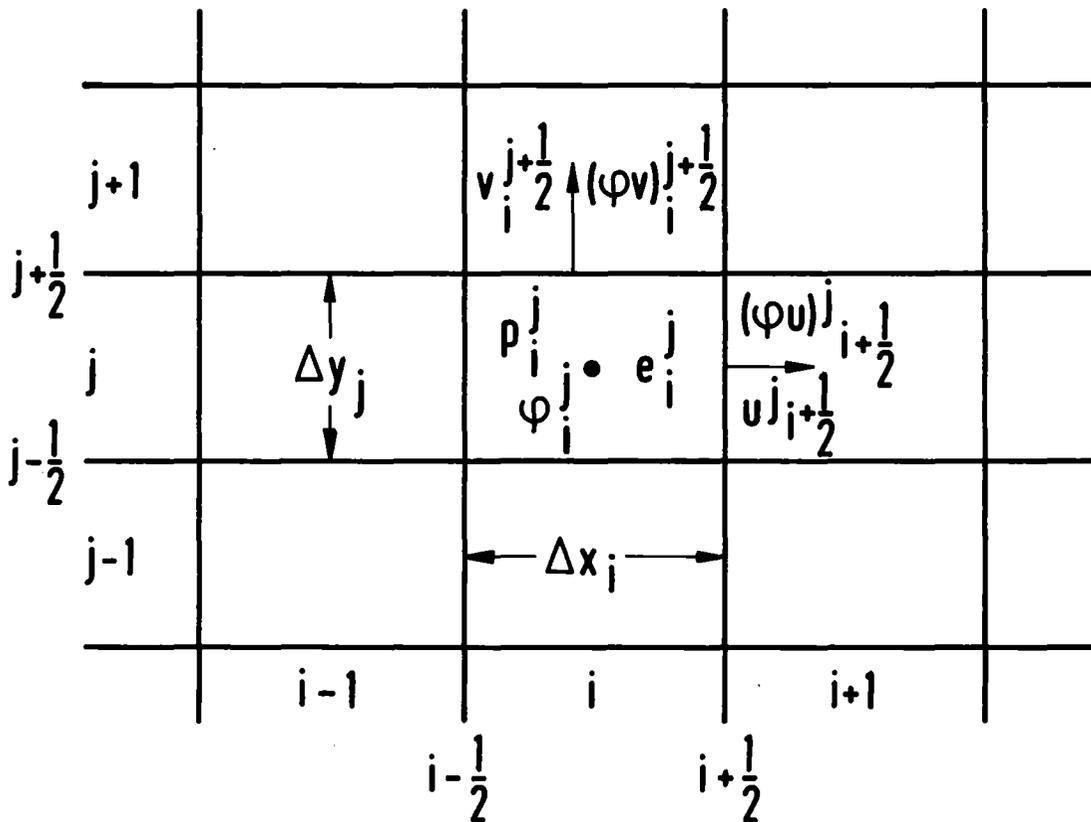


Abb. 4: Indizierung im Maschennetz

4.3 Interpolationsformeln

In den Differentialgleichungen (16) - (18) kommen Produkte der Größen g , u und v vor, die an verschiedenen Stellen im Maschenetz berechnet werden. Es sind deshalb verschiedene Interpolationsvorschriften zur Berechnung dieser Produkte notwendig. Die verwendeten Interpolationen werden im folgenden kurz zusammengestellt, für jedes Produkt werden 2 verschiedene Interpolationsarten angeboten.

Berechnung von gu :

(a) Aufwind-Differenzen

$$\langle gu \rangle_{i+\frac{1}{2}}^j := \frac{1}{2} \cdot u_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot \left\{ (1 + \text{sign}(u_{i+\frac{1}{2}}^j)) \cdot g_i^j + (1 - \text{sign}(u_{i+\frac{1}{2}}^j)) \cdot g_{i+1}^j \right\}$$

oder

(b) Zentrierte Differenzen

$$(gu)_{i+\frac{1}{2}}^j := \frac{1}{2} \cdot u_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot \left\{ \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot g_i^j + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot g_{i+1}^j \right\}$$

Berechnung von gv :

(a)

$$\langle gv \rangle_i^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \cdot v_i^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ (1 + \text{sign}(v_i^{j+\frac{1}{2}})) \cdot g_i^j + (1 - \text{sign}(v_i^{j+\frac{1}{2}})) \cdot g_i^{j+1} \right\}$$

oder (b)

$$(gv)_i^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \cdot v_i^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot g_i^j + \frac{\Delta y_j}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot g_i^{j+1} \right\}$$

Berechnung von $\mathcal{S}uu$:

$$u_i^j := \frac{1}{2} \cdot (u_{i-\frac{1}{2}}^j + u_{i+\frac{1}{2}}^j)$$

(a)

$$\langle \mathcal{S}uu \rangle_i^j := \frac{1}{2} \cdot u_i^j \cdot \left\{ (1 + \text{sign}(u_i^j)) \cdot (\mathcal{S}u)_{i-\frac{1}{2}}^j + (1 - \text{sign}(u_i^j)) \cdot (\mathcal{S}u)_{i+\frac{1}{2}}^j \right\}$$

oder (b)

$$(\mathcal{S}uu)_i^j := \frac{1}{2} \cdot u_i^j \cdot \left\{ (\mathcal{S}u)_{i-\frac{1}{2}}^j + (\mathcal{S}u)_{i+\frac{1}{2}}^j \right\}$$

Berechnung von $\mathcal{S}VV$:

$$V_i^j := \frac{1}{2} \cdot (V_i^{j-\frac{1}{2}} + V_i^{j+\frac{1}{2}})$$

(a)

$$\langle \mathcal{S}VV \rangle_i^j := \frac{1}{2} \cdot V_i^j \cdot \left\{ (1 + \text{sign}(V_i^j)) \cdot (\mathcal{S}V)_i^{j-\frac{1}{2}} + (1 - \text{sign}(V_i^j)) \cdot (\mathcal{S}V)_i^{j+\frac{1}{2}} \right\}$$

oder (b)

$$(\mathcal{S}VV)_i^j := \frac{1}{2} \cdot V_i^j \cdot \left\{ (\mathcal{S}V)_i^{j-\frac{1}{2}} + (\mathcal{S}V)_i^{j+\frac{1}{2}} \right\}$$

Berechnung von g_{uv} :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{\Delta y_{i+1} \cdot u_{i+\frac{1}{2}}^j + \Delta y_i \cdot u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}}{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}}$$

(a)

$$\langle g_{uv} \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \cdot u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ (1 + \text{sign}(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}})) \cdot (g_{uv})_i^{j+\frac{1}{2}} + (1 - \text{sign}(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}})) \cdot (g_{uv})_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \right\}$$

oder (b)

$$(g_{uv})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \cdot u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (g_{uv})_i^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (g_{uv})_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \right\}$$

Berechnung von g_{vu} :

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{\Delta x_{i+1} \cdot v_i^{j+\frac{1}{2}} + \Delta x_i \cdot v_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}$$

(a)

$$\langle g_{vu} \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ (1 + \text{sign}(v_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}})) \cdot (g_{vu})_{i+\frac{1}{2}}^j + (1 - \text{sign}(v_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}})) \cdot (g_{vu})_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right\}$$

oder (b)

$$(g_{vu})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}} \cdot (g_{vu})_{i+\frac{1}{2}}^j + \frac{\Delta y_i}{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}} \cdot (g_{vu})_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right\}$$

Bei der Form (a) der Interpolation wird diejenige Zelle stärker berücksichtigt, aus der die Flüssigkeit herausströmt. Man spricht dann von "Donor-cell-interpolation" oder "Aufwind-Differenzen". Bei (b) wird das arithmetische Mittel der Werte in den beiden angrenzenden Zellen verwendet, dies wird mit "zentrierten Differenzen" bezeichnet.

Um mit den anderen Termen in den Gleichungen (17) und (18) konsistent zu bleiben, werden die Größen ρ_{uv} und ρ_{vu} in den Knotenpunkten des Gitters berechnet.

4.4 Differenzgleichungen, Randbedingungen

Zur Zeitintegration des Differentialgleichungssystems (16) - (19) wird eine konstante Schrittweite Δt benutzt. Ein hochgestellter Indexⁿ bezeichnet einen Näherungswert zum Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$.

Es wird das Grundschema der ICE-Technik benutzt, wie z.B. in /19/. Im inkompressiblen Grenzfall (13) - (15) ergibt sich dabei der SOLA-Code /20/.

Die Integration kann man in 3 Schritte einteilen:

- (1) Schätzwerte für ρ, p, u und v zum Zeitpunkt $(n+1) \cdot \Delta t$ durch explizite Integration der Gleichungen (16) - (19) (bzw. (17) - (19) im inkompressiblen Fall).
- (2) Iterative Verbesserung der Werte, um eine teilweise implizite Lösung der Differenzgleichungen zu erhalten. Abbruchkriterium für die Iteration ist das Erfülltsein der Kontinuitätsgleichung (bzw. der Divergenzgleichung im inkompressiblen Grenzfall).

Wahlweise kann noch ein weiterer Schritt berücksichtigt werden:

- (3) Dämpfung numerischer Oszillationen mit einer "künstlichen Viskosität" gemäß /22/.

Insgesamt werden folgende Differenzgleichungen gelöst:

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{{}^{n+1}g_i^j - {}^n g_i^j}{\Delta t} + \theta \cdot \left\{ \frac{{}^{n+1}\langle gu \rangle_{i+\frac{1}{2}}^j - {}^{n+1}\langle gu \rangle_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta x_i} + \frac{{}^{n+1}\langle gv \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - {}^{n+1}\langle gv \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j} \right\} \\ & + (1-\theta) \cdot \left\{ \frac{{}^n\langle gu \rangle_{i+\frac{1}{2}}^j - {}^n\langle gu \rangle_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta x_i} + \frac{{}^n\langle gv \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - {}^n\langle gv \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j} \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Zustandsgleichung

$${}^{n+1}p_i^j = p({}^{n+1}g_i^j)$$

Impulsgleichung- u-Komponente

(a) Bei Verwendung von Aufwind-Differenzen

$$\begin{aligned} (\widetilde{gu})_{i+\frac{1}{2}}^j &= {}^n(gu)_{i+\frac{1}{2}}^j - \Delta t \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{{}^n\langle guu \rangle_{i+1}^j - {}^n\langle guu \rangle_i^j}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + \right. \\ & \left. \frac{{}^n\langle gvu \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - {}^n\langle gvu \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j} + 2 \cdot \phi \cdot \frac{{}^{n+1}p_{i+1}^j - {}^{n+1}p_i^j}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right. \\ & \left. + 2 \cdot (1-\phi) \cdot \frac{{}^n p_{i+1}^j - {}^n p_i^j}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right\} \end{aligned}$$

$$+ 0.2 \cdot \left(\frac{{}^n u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - {}^n u_{i+\frac{3}{2}}^{\dot{\circ}}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{{}^n u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - {}^n u_{i-\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}}}{\Delta x_i} \right) / (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) -$$

$$0.2 \cdot \left(\frac{{}^n u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}+1} - {}^n u_{i+\frac{3}{2}}^{\dot{\circ}}}{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}} - \frac{{}^n u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - {}^n u_{i+\frac{3}{2}}^{\dot{\circ}-1}}{\Delta y_i + \Delta y_{i-1}} \right) / \Delta y_i \}$$

(b) Bei Verwendung zentrierter Differenzen

$$(\widetilde{gu})_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} = f_1 \cdot {}^n (gu)_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} + f_2 \cdot {}^{n-1} (gu)_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - f_3 \cdot \Delta t \cdot \{$$

$$2 \cdot \frac{{}^n (guu)_{i+1}^{\dot{\circ}} - {}^n (guu)_i^{\dot{\circ}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + \frac{{}^n (gVu)_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}+\frac{1}{2}} - {}^n (gVu)_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}-\frac{1}{2}}}{\Delta y_i} +$$

$$2 \cdot \phi \cdot \frac{{}^{n+1} p_{i+1}^{\dot{\circ}} - {}^{n+1} p_i^{\dot{\circ}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + 2 \cdot (1-\phi) \cdot \frac{{}^n p_{i+1}^{\dot{\circ}} - {}^n p_i^{\dot{\circ}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} -$$

$$0.2 \cdot \left(\frac{{}^{n-e} u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - {}^{n-e} u_{i+\frac{3}{2}}^{\dot{\circ}}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{{}^{n-e} u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - {}^{n-e} u_{i-\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}}}{\Delta x_i} \right) / (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) -$$

$$0.2 \cdot \left(\frac{{}^{n-e} u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}+1} - {}^{n-e} u_{i+\frac{3}{2}}^{\dot{\circ}}}{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}} - \frac{{}^{n-e} u_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} - {}^{n-e} u_{i+\frac{3}{2}}^{\dot{\circ}-1}}{\Delta y_i + \Delta y_{i-1}} \right) / \Delta y_i \}$$

$$\widetilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} = (\widetilde{gu})_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{\circ}} \cdot \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i+1} \cdot {}^{n+1} g_i^{\dot{\circ}} + \Delta x_i \cdot {}^{n+1} g_{i+1}^{\dot{\circ}}}$$

Dabei sind:

(20) $1=0, f_1=1, f_2=0, f_3=1$ für $n=0$

(21) $1=1, f_1=0, f_2=1, f_3=2$ für $n \neq 0, n \not\equiv 0 \pmod{N_0}$

(22) $1=1, f_1=0.5, f_2=0.5, f_3=1.5$ für $n=N_0, 2 \cdot N_0, 3 \cdot N_0, \dots$

Impulsgleichung - v-Komponente

Im Fall (a):

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{gV})_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} &= {}^n(gV)_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - \Delta t \cdot \left\{ \frac{{}^n\langle g_{uv} \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^n\langle g_{uv} \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} + \right. \\
 & 2 \cdot \frac{{}^n\langle g_{VV} \rangle_i^{\dot{j}+1} - {}^n\langle g_{VV} \rangle_i^{\dot{j}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + 2 \cdot \phi \cdot \frac{{}^{n+1}P_i^{\dot{j}+1} - {}^{n+1}P_i^{\dot{j}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + \\
 & 2 \cdot (1-\phi) \cdot \frac{{}^n P_i^{\dot{j}+1} - {}^n P_i^{\dot{j}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} - \\
 & 0.2 \cdot \left(\frac{{}^n V_{i+1}^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^n V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - \frac{{}^n V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^n V_{i-1}^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) / \Delta x_i - \\
 & \left. 0.2 \cdot \left(\frac{{}^n V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^n V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{{}^n V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^n V_i^{\dot{j}-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j} \right) / (\Delta y_j + \Delta y_{j+1}) \right\}
 \end{aligned}$$

Im Fall (b):

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{gV})_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} &= f_1 \cdot {}^n(gV)_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} + f_2 \cdot {}^{n+1}(gV)_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - f_3 \cdot \Delta t \cdot \left\{ \right. \\
 & \frac{{}^n(g_{uv})_{i+\frac{1}{2}}^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^n(g_{uv})_{i-\frac{1}{2}}^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} + 2 \cdot \frac{{}^n(g_{VV})_i^{\dot{j}+1} - {}^n(g_{VV})_i^{\dot{j}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + \\
 & 2 \cdot \phi \cdot \frac{{}^{n+1}P_i^{\dot{j}+1} - {}^{n+1}P_i^{\dot{j}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + 2 \cdot (1-\phi) \cdot \frac{{}^n P_i^{\dot{j}+1} - {}^n P_i^{\dot{j}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} - \\
 & \left. 0.2 \cdot \left(\frac{{}^{n-1} V_{i+1}^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^{n-1} V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - \frac{{}^{n-1} V_i^{\dot{j}+\frac{1}{2}} - {}^{n-1} V_{i-1}^{\dot{j}+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) / \Delta x_i - \right.
 \end{aligned}$$

$$2.2 \cdot \left(\frac{h \cdot e \cdot V_i^{j+\frac{3}{2}} - h \cdot e \cdot V_i^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta Y_{j+1}} - \frac{h \cdot e \cdot V_i^{j+\frac{1}{2}} - h \cdot e \cdot V_i^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta Y_j} \right) / (\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1}) \Bigg\}$$

$$\tilde{V}_i^{j+\frac{3}{2}} = (\tilde{\rho v})_i^{j+\frac{3}{2}} \cdot \frac{\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1}}{h^{n+1} \rho_i^{j+1} \cdot \Delta Y_j + h^{n+1} \rho_i^j \cdot \Delta Y_{j+1}}$$

Dabei sind l, f_1, f_2, f_3 gemäß (20) - (22) zu wählen.

Künstliche Viskosität

$$\begin{aligned} \widetilde{(\rho u)}_{i+\frac{1}{2}}^j &= (\widetilde{\rho u})_{i+\frac{1}{2}}^j + C \cdot \Delta t \cdot \rho \cdot \{ \\ &\Delta X_i^2 \cdot \text{FBS}(K, \tilde{U}_{i+\frac{3}{2}}^j - \tilde{U}_{i+\frac{1}{2}}^j) \cdot ((\widetilde{\rho u})_{i+\frac{3}{2}}^j - (\widetilde{\rho u})_{i+\frac{1}{2}}^j) - \\ &\Delta X_{i+1}^2 \cdot \text{FBS}(K, \tilde{U}_{i+\frac{1}{2}}^j - \tilde{U}_{i-\frac{1}{2}}^j) \cdot ((\widetilde{\rho u})_{i+\frac{1}{2}}^j - (\widetilde{\rho u})_{i-\frac{1}{2}}^j) \} / \\ &(\Delta X_i + \Delta X_{i+1})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{n+1} (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^j &= \widetilde{(\rho u)}_{i+\frac{1}{2}}^j + 2.25 \cdot C \cdot \Delta t \cdot \text{FBS}(K, \tilde{V}_i^{j+\frac{3}{2}} + \tilde{V}_{i+1}^{j+\frac{3}{2}} - \tilde{V}_i^{j-\frac{1}{2}} - \tilde{V}_{i+1}^{j-\frac{1}{2}}) \cdot \{ \\ &\widetilde{(\rho u)}_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \cdot (\Delta Y_j + \Delta Y_{j-1}) - \\ &\widetilde{(\rho u)}_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot (\Delta Y_{j+1} + 2 \cdot \Delta Y_j + \Delta Y_{j-1}) + \\ &\widetilde{(\rho u)}_{i+\frac{1}{2}}^{j-1} \cdot (\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1}) \} / \\ &(\Delta Y_{j+1} + \Delta Y_j + \Delta Y_{j-1})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{1}{2}} &= \widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{1}{2}} + C \cdot \Delta t \cdot \rho \cdot \{ \\ &\Delta Y_j^2 \cdot \text{ABS}(K, \widetilde{V}_i^{j+\frac{3}{2}} - \widetilde{V}_i^{j+\frac{1}{2}}) \cdot (\widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{3}{2}} - \widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{1}{2}}) - \\ &\Delta Y_{j+1}^2 \cdot \text{ABS}(K, \widetilde{V}_i^{j+\frac{1}{2}} - \widetilde{V}_i^{j-\frac{1}{2}}) \cdot (\widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{1}{2}} - \widetilde{(gV)}_i^{j-\frac{1}{2}}) \} / \\ &(\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{n+1}(gV)_i^{j+\frac{1}{2}} &= \widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{1}{2}} + C \cdot \Delta t \cdot 2.25 \cdot \text{ABS}(K, \widetilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^j + \widetilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - \widetilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^j - \widetilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}) \cdot \{ \\ &\widetilde{(gV)}_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \cdot (\Delta X_i + \Delta X_{i-1}) - \\ &\widetilde{(gV)}_i^{j+\frac{1}{2}} \cdot (\Delta X_{i-1} + 2 \cdot \Delta X_i + \Delta X_{i+1}) + \\ &\widetilde{(gV)}_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \cdot (\Delta X_{i+1} + \Delta X_i) \} / \\ &(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i + \Delta X_{i+1})^2 \end{aligned}$$

$${}^{n+1}u_{i+\frac{1}{2}}^j = {}^{n+1}(gu)_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot \frac{\Delta X_i + \Delta X_{i+1}}{\Delta X_{i+1} \cdot g_i^j + \Delta X_i \cdot g_{i+1}^j}$$

$${}^{n+1}V_i^{j+\frac{1}{2}} = {}^{n+1}(gV)_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot \frac{\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1}}{\Delta Y_{j+1} \cdot g_i^j + \Delta Y_j \cdot g_i^{j+1}}$$

Es sind

$$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$$

$$0 \leq C$$

$$N_0 \in \mathbb{N}$$

$$k = 1, 2$$

$$\text{ABS}(0, a) := |a|$$

$$\text{ABS}(1, a) := \begin{cases} -a & \text{für } a < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich durch verschiedene Parameter θ , ϕ , C , N_0 und k , sowie durch die Verwendung von Aufwind- oder zentrierten Differenzen.

θ und ϕ bestimmen den "Grad der Implizitheit" der Differenzgleichungen. Im ursprünglichen ICE-Verfahren von Harlow und Amsden sind beide Parameter gleich 1, damit ist das Maximum an Implizitheit erreicht, ohne auf jedem Zeitschritt nichtlineare algebraische Gleichungen lösen zu müssen. Der Abbruchfehler ist bei diesem Verfahren von der Größenordnung $O(\Delta x, \Delta y)$, während das halbimplizite Verfahren ($\theta = \phi = \frac{1}{2}$) von zweiter Ordnung ist [21].

Verwendet man zur räumlichen Diskretisierung zentrale Differenzen, so muß man aus Stabilitätsgründen dies auch in Zeitrichtung tun und insbesondere die diffusiven Terme auf der Zeitebene $(n-1) \cdot \Delta t$ betrachten. Aus Stabilitätsgründen ist es weiter notwendig, nach einer bestimmten Anzahl von Zeitschritten von dieser Regel abzugehen und eine Mittelung zwischen den Werten auf der n -ten und der $(n-1)$ -ten Zeitstufe vorzunehmen, dies wird über den Parameter N_0 gesteuert.

Das Verfahren mit Aufwind-Differenzen ist von erster Ordnung, während bei zentralen Differenzen der Abbruchfehler (ohne Mittelung) von der Größenordnung $O(\Delta x, \Delta y^2)$ ist.

Die Parameter C und k bestimmen die künstliche Viskosität. Bei $k=1$ wird nur gedämpft, wenn es in einer Koordinatenrichtung zu Kompression kommt, d.h. in einer Richtung mehr Fluid in die betrachtete Zelle hinein als herausströmt. Bei $k=0$ hat das Vorzeichen der Geschwindigkeitsdifferenz keinen Einfluß auf die Dämpfung. Der Faktor C bestimmt die Stärke der künstlichen Viskosität. Er gibt an, über wieviele Maschen eine Schockfront verschmiert werden soll. Diese Form der künstlichen Viskosität wurde von Lapidus /22/ eingeführt und hier auf die Verhältnisse im "staggered grid" angepaßt.

Die Korrektur hat, wie man zeigen kann, eine Größenordnung $O(\Delta t \cdot \Delta x^2, \Delta t \cdot \Delta y^2)$ und sollte deshalb die Genauigkeit des Gesamtverfahrens nicht beeinflussen.

Die Stabilitätsbedingung für alle betrachteten Verfahren ist nach /23/:

$$\Delta t \cdot \left\{ \frac{|u_i^j|}{\Delta x_i} + \frac{|v_i^j|}{\Delta y_j} + 2 \cdot \nu \cdot \left(\frac{1}{\Delta x_i^2} + \frac{1}{\Delta y_j^2} \right) \right\} < \frac{1}{2}$$

für alle Maschen (i,j)

Die Schrittweitenbegrenzung ist damit unabhängig von der Schallgeschwindigkeit

$$C = \sqrt{\frac{dP}{dS}}$$

was bei expliziten Verfahren nicht der Fall ist (siehe z.B. /24/).

Um diese Differenzgleichungen eindeutig lösen zu können, müssen noch in geeigneter Weise Anfangs- und Randbedingungen gestellt werden. Dabei machen die Anfangsbedingungen keine Schwierigkeiten.

An Randbedingungen treten 3 verschiedene Typen auf:

- feste, reibungsfreie Wand
- freier Abfluß
- erzwungener Zufluß

Alle werden sie mit Hilfe "fiktiver Randmaschen" /19/ behandelt. Die Bedingungen sind im einzelnen (bei Wand in X-Richtung, Abb. 5):

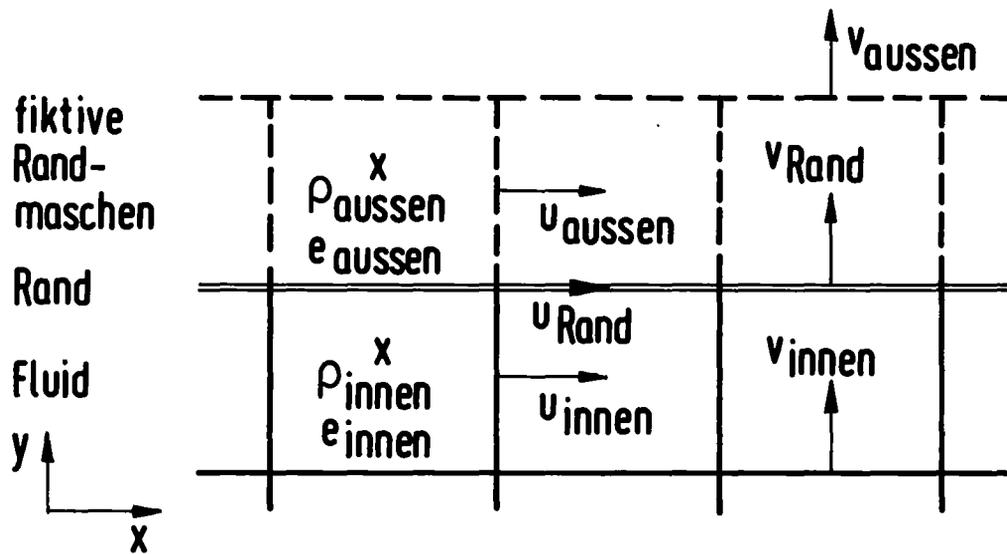


Abb. 5: Senkrechter Rand mit fiktiven Randmaschen

(a) Bei fester, reibungsfreier Wand:

$$p_{\text{aus}} = p_{\text{in}} = p_{\text{Rand}}$$

$$e_{\text{aus}} = e_{\text{in}} = e_{\text{Rand}}$$

$$v_{\text{Rand}} = 0$$

$$u_{\text{aus}} = u_{\text{in}} = u_{\text{Rand}}$$

(b) Bei freiem Abfluß:

$$\left. \begin{array}{l} p_{\text{aus}} \\ e_{\text{aus}} \end{array} \right\} \text{Vorgabewert}$$

$$v_{\text{aus}} = v_{\text{Rand}}$$

$$u_{\text{aus}} = 0$$

(c) Bei erzwungenem Zufluß:

$$\left. \begin{array}{l} p_{\text{ausßen}} \\ e_{\text{ausßen}} \\ v_{\text{Rand}} \end{array} \right\} \text{Vorgabewert}$$

$$u_{\text{ausßen}} = 0$$

4.5 Berücksichtigung der Energiegleichung beim 1D-Stoßrohrproblem

Beim 1D-Testproblem (Gl.(1) - (4)) tritt zusätzlich zu Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichung noch die Energiegleichung (3) auf, die im System (16) - (19) nicht vorgesehen ist. Die Lösung dieser Gleichung muß in das Grundschemata des ICE-Verfahrens, wie es in § 4.4 vorgestellt wurde, eingeführt werden.

Dazu wird in den ersten beiden Schritten, d.h. in der expliziten Phase und der iterativen Phase, die Energie explizit behandelt. Danach schließt sich dann ein Schritt an, in dem die Energiegleichung gelöst wird. Werden Aufwind-Differenzen zur Interpolation verwendet, so gehen in die Energiegleichung die in der Iterationsphase berechneten neuen Werte für u und ρ ein. Bei zentrierten Differenzen werden diese Größen auf der alten Zeitebene benutzt, in jedem Fall wird aber der Druck unter Benutzung des alten Wertes für die Energie aus der Zustandsgleichung (4) berechnet. Alle Verfahren sind damit für die Energie rein explizit.

Die Differenzenform der Energiegleichung lautet dann:

(a) Bei Aufwind-Differenzen

$$\frac{\tilde{e}_j - e_j^n}{\Delta t} = e_j^n \frac{\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x_j} + \frac{\langle e^n \tilde{u} \rangle_{j+\frac{1}{2}} - \langle e^n \tilde{u} \rangle_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x_j} =$$

$$- \frac{p_j^{n+1}}{s_j^{n+1}} \frac{\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x_j}$$

(b) Bei zentrierten Differenzen

$$\frac{\tilde{e}_j - e_j^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} = e_j^n \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_j} + \frac{(eu)_{j+\frac{1}{2}}^n - (eu)_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_j} =$$

$$- \frac{p_j^n}{s_j^n} \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_j}$$

Die Dämpfung numerischer Oszillationen mit der künstlichen Viskosität schließt sich dann als vierter Schritt an:

$$e_j^{n+1} = \tilde{e}_j + C \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \cdot \left\{ \text{ABS}(k, \tilde{u}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{j-\frac{1}{2}}) \cdot (\tilde{e}_{j+1} - 2 \cdot \tilde{e}_j + \tilde{e}_{j-1}) \right\}$$

5. Ergebnisse

5.1 Kompressibles Fluid: Stoßrohrproblem

Im folgenden sollen die Ergebnisse verglichen werden, die die verschiedenen Codes für das Stoßrohrproblem liefern. Zum Vergleich wurde die Dichte-Kurve gewählt, dies hatte verschiedene Gründe. Wegen der Vielzahl der anzustellenden Vergleiche mußte man sich auf die Präsentation einer physikalischen Größe beschränken. Hier bot sich die Dichte an, da deren räumliche Verteilungskurve im Vergleich zu den anderen Zustandsgrößen den kompliziertesten Verlauf hat (siehe Abb. 6 bis Abb. 9). Alle numerischen Effekte wie Oszillationen oder Verschmierungen, die man an anderen Kurven erkennen konnte, zeigten sich auch bei der Dichte, wenn auch manchmal weniger stark ausgeprägt.

Es wurden jedesmal folgende Anfangswerte und Parameter gewählt:

$$\rho_l = 0.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_r = 0.1 \text{ kg/m}^3$$

$$e_0 = 0.18 \text{ J/kg}$$

$$\alpha = 1.667$$

Danach beträgt die Ruheschallgeschwindigkeit im Stoßrohr

$$C_0 = 0.447 \text{ m/sec } /4/.$$

Als Maschenweite bei der Ortsdiskretisierung wurde jeweils 1/3 m genommen, die Anzahl der Maschen richtet sich nach der vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit des Gases. Diese Anzahl wurde stets so groß gewählt, daß der Schock am Ende des Berechnungszeitraumes ($T_{\max} = 10 \text{ sec}$) den Rand des Rohres noch nicht erreicht hatte. Die Trennfläche befand sich jedesmal bei Masche 30, entsprechend einem Wert $x_m = 10 \text{ m}$.

Zur Darstellung der Lösungen wurde eine Anzahl von Zeichnungen mit dem Plotter erstellt, in jeder Zeichnung sind das numerische und das analytische Ergebnis zusammen dargestellt.

Als erstes wurde eine Reihe von Rechnungen mit anfangs ruhendem Gas ($U_0 = 0$ m/sec) gemacht.

Die maximale Geschwindigkeit im Schockbereich liegt dann bei 0.1 m/sec, das sind ca. 22 % der Ruheschallgeschwindigkeit.

Abb. 10 zeigt die Dichtekurve, die sich bei Verwendung der normalen ICE-Technik und einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.4$ sec ergibt, entsprechend einer Courant-Zahl $\beta = 0.12$. Man erkennt ein relativ starkes Verschmieren der Entlastungswelle und der beiden Unstetigkeiten.

Für Abb. 11 wurden zur Integration von Impuls- und Energiegleichung zentrierte Differenzen benutzt (in Zukunft als Leapfrog-Schema bezeichnet). Das Ergebnis hat sich dadurch nicht verbessert, nur die Kontakt-Unstetigkeit ist etwas steiler wiedergegeben.

Für Abb. 12 sind wieder Aufwind-Differenzen benutzt worden, wobei jetzt aber die Kontinuitätsgleichung und die Druckterme in der Impulsgleichung halbimplizit ($\theta=0.5, \phi=0.5$) berechnet wurden (in Zukunft als halbimplizites Schema bezeichnet). Man erkennt eine deutliche Verbesserung in der Wiedergabe der Entlastungswelle, gleichzeitig aber auch starke numerische Oszillationen im Stoßbereich.

Abb. 13 zeigt die Ergebnisse, die mit dem halbimpliziten Leapfrog-Schema erzielt wurden. Die Entlastungswelle ist genau so gut wie in Abb. 12 wiedergegeben, die Oszillationen haben kleinere Amplitude. Um diese Oszillationen zu dämpfen, wurden wie schon erwähnt 2 verschiedene Typen künstlicher Viskosität benutzt.

Für Abb. 14 und Abb. 15 wurde der erste Typ benutzt (Parameter $k=1$), mit $C = 2$ bzw. $C = 4$. Wieder wurde das Aufwind-Schema zugrunde gelegt. Man erkennt diesmal eine wirksame Dämpfung der Oszillationen, aber auch eine Verschlechterung in der Darstellung der Entlastungswelle im Vergleich mit Abb. 12, vor allem im Falle der starken Viskosität $C = 4$ (Abb. 15).

Abb. 16 und Abb. 17 zeigen dasselbe für das Leapfrog-Schema. Die Unstetigkeiten werden besser wiedergegeben als in Abb. 10 und 11, aber auch hier wird die Entlastungswelle zu stark verschmiert.

Für Abb. 18 und Abb. 19 wurden das halbimplizite Aufwind-Schema und eine numerische Dämpfung mit $k = 2$ und $C = 2$ bzw. $C = 4$ benutzt. Hier ist eine Genauigkeit in der Darstellung der Entlastungswelle zu erkennen, die fast an den ungedämpften Fall (Abb. 12) heranreicht. Gleichzeitig verschwinden schon bei $C = 2$ die Oszillationen vollkommen (Abb. 18).

Das halbimplizite Leapfrog-Schema liefert mit dieser Art der Dämpfung (Abb. 20 und Abb. 21) fast identische Ergebnisse, die Kontakt-Unstetigkeit ist sogar noch etwas besser wiedergegeben. Auch hier reicht die schwache Dämpfung ($C = 2$) aus.

Bei kleineren Zeitschrittweiten sind die Ergebnisse im ganzen ähnlich, die Differenzen zwischen den einzelnen Kurven erwartungsgemäß nicht so ausgeprägt.

Abb. 22 zeigt bei $\Delta t = 0.2$ sec die Dichte-Kurve, die mit der normalen ICE-Technik gewonnen wurde. Die Courant-Zahl ist jetzt $\beta = 0.06$.

In Abb. 23 wurde das halbimplizite Aufwind-Schema ohne künstliche Viskosität benutzt. Man erkennt wieder numerische Oszillationen, die allerdings nur eine kleine Amplitude besitzen.

Für Abb. 24 wurden diese Oszillationen gedämpft, die Parameter der künstlichen Viskosität sind $k = 2$, und $C = 2$, was sich auch hier als optimal erwiesen hat.

In Abb. 25 - Abb. 27 ist dasselbe für das Leapfrog-Schema dargestellt. Die Unterschiede zu den Abb. 22- 24 sind gering.

Bei einem größeren Zeitschritt ($\Delta t = 0.8$ sec, $\beta = 0.24$) werden die Ergebnisse erwartungsgemäß schlechter.

Abb. 28 und Abb. 29 zeigen die Lösungskurven der vollimpliziten Verfahren. Die Entlastungswelle wird sehr stark verschmiert, beim Leapfrog-Schema auch die Schockfront. Bei dieser Zeitschrittweite erweist es sich, daß die Aufgabe der Aufwind-Differenzen einen gewissen Stabilitätsverlust bewirkt. Das halbimplizite

Leapfrog-Verfahren divergiert, auch bei künstlicher Dämpfung. Das halbimplizite Aufwind-Schema ist dagegen stabiler. Die Verwendung einer künstlichen Viskosität ist jetzt aber zwingend notwendig, wie Abb. 30 zeigt. Bei $C = 2$ (Abb. 31 und Abb. 32) erhält man akzeptable Ergebnisse, die Verbesserung gegenüber der ICE- Technik (Abb. 25) ist deutlich. Dämpfung mit einem Faktor $C = 4$ führt zum Versagen des Verfahrens wegen Instabilität. Es ist zu vermuten, daß dies ein Einfluß der zu starken numerischen Dämpfung ist.

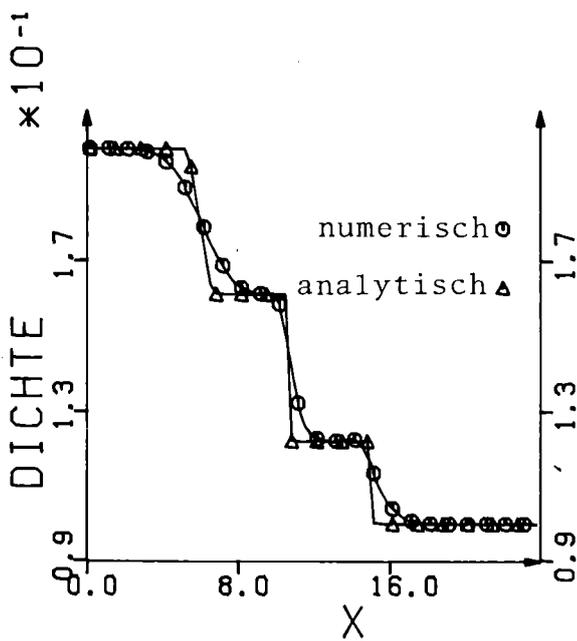


Abb. 6: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

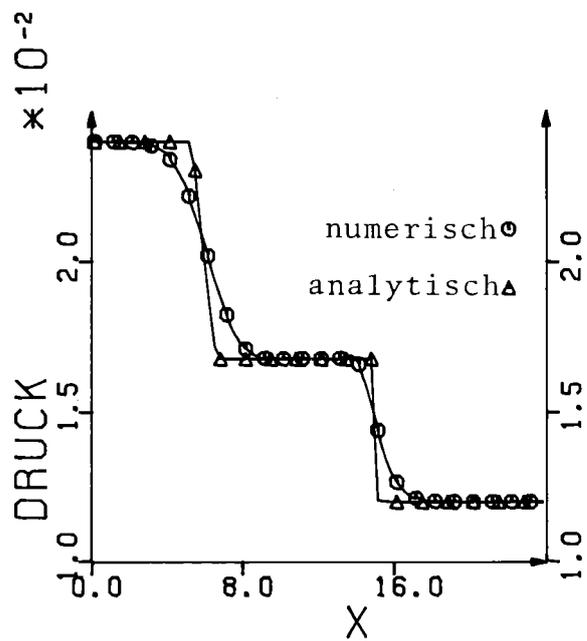


Abb. 7: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

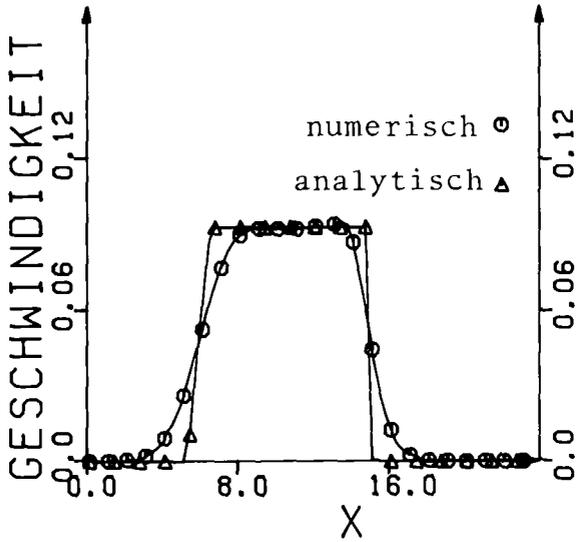


Abb.8: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

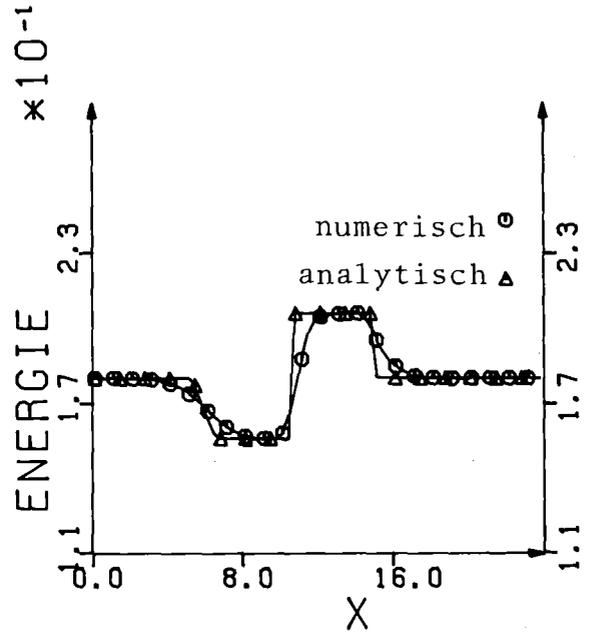


Abb.9: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

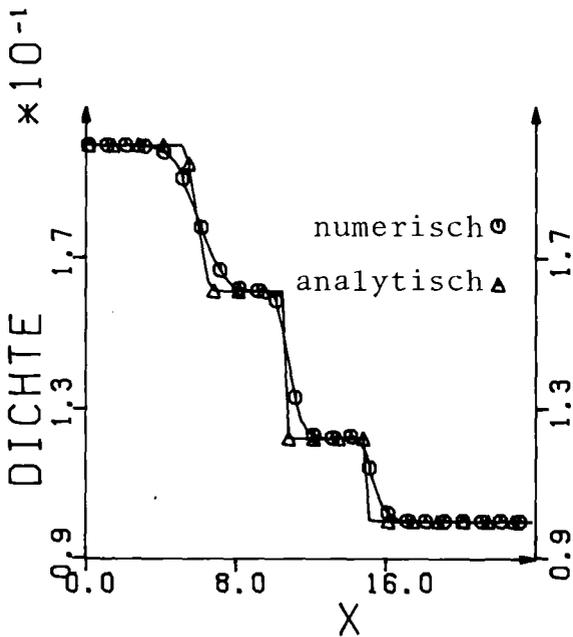


Abb.10: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.4$ sec

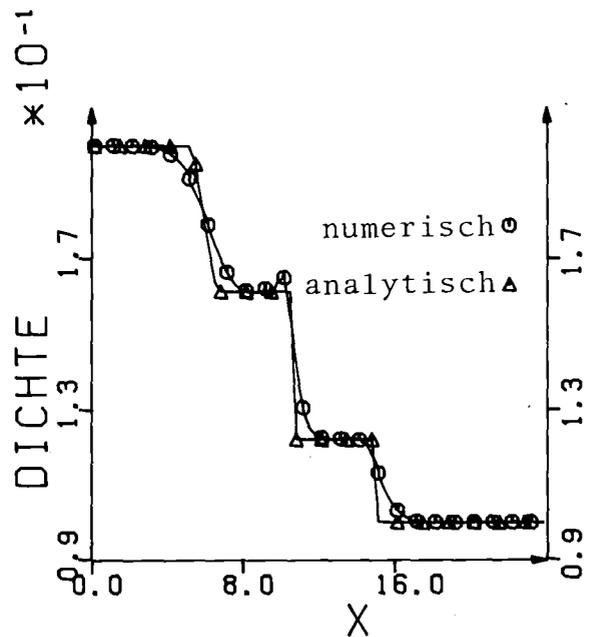


Abb.11: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.4$ sec

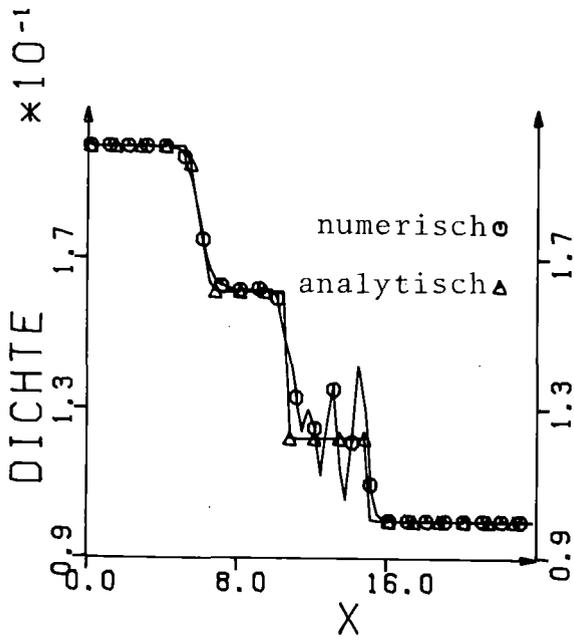


Abb.12: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=0, \Delta t=0.4$ sec

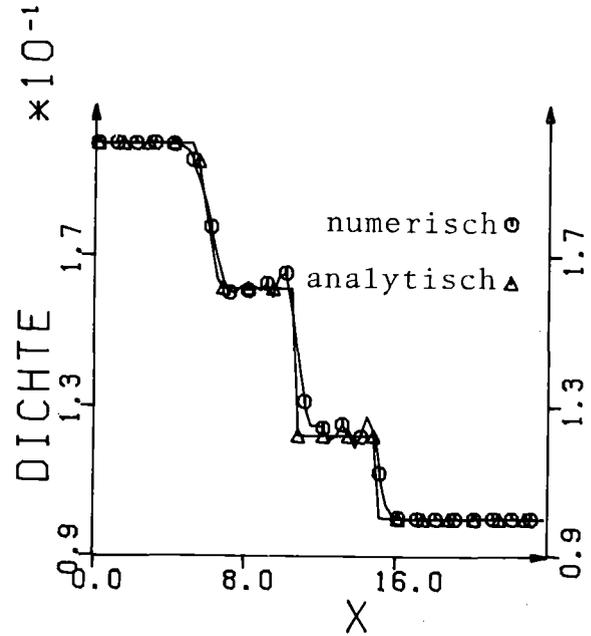


Abb.13: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=0, \Delta t=0.4$ sec

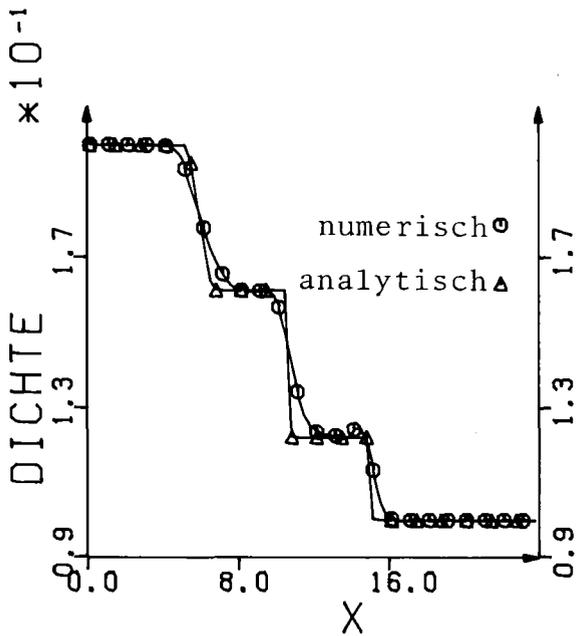


Abb.14: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=2, k=1, \Delta t=0.4$ sec

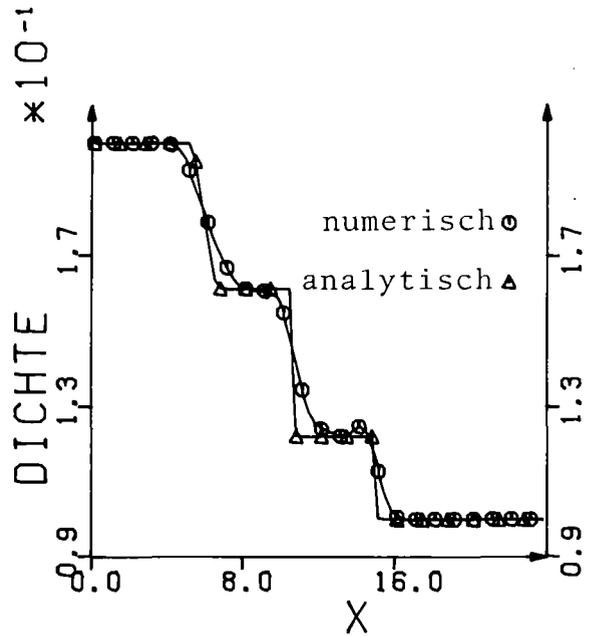


Abb.15: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=0.4$,
 $C=4, k=1, \Delta t=0.4$ sec

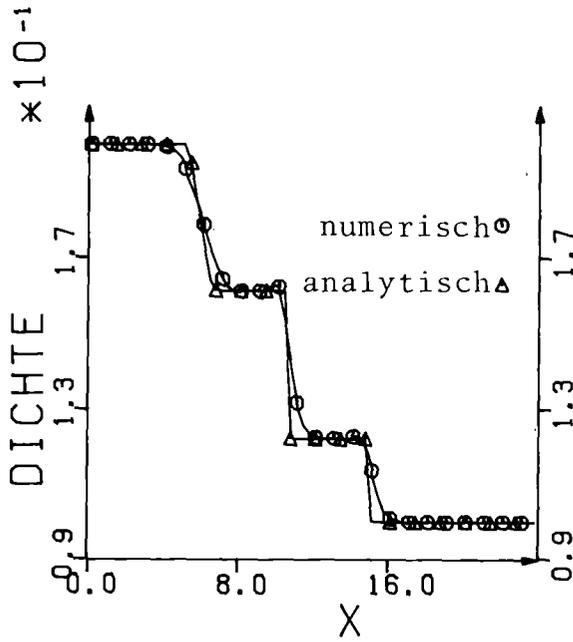


Abb. 16: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=2, k=1, \Delta t=0.4$ sec

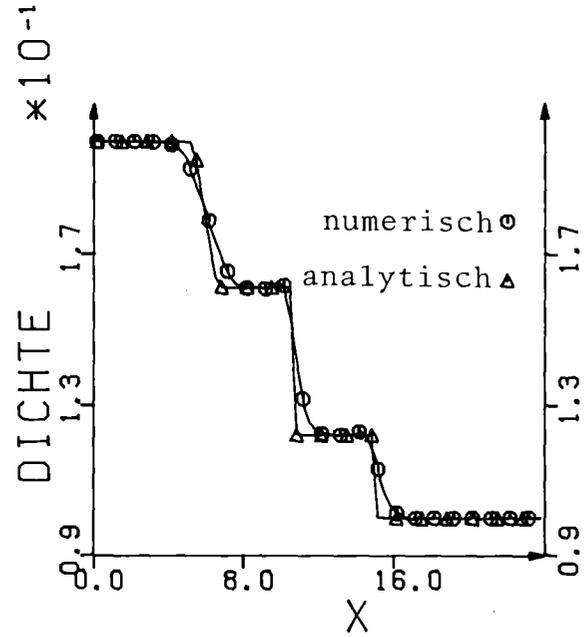


Abb. 17: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=4, k=1, \Delta t=0.4$ sec

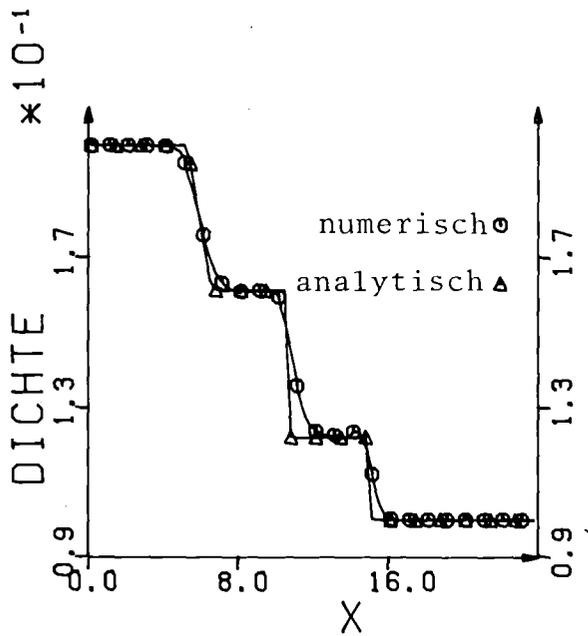


Abb. 18: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.4$ sec

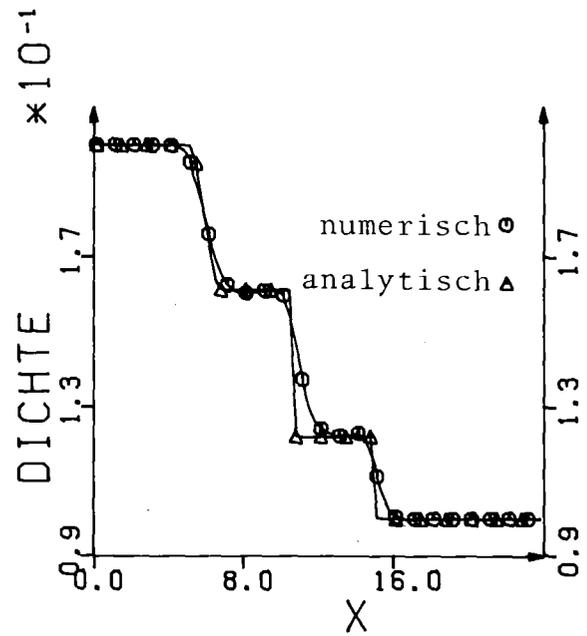


Abb. 19: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=4, k=2, \Delta t=0.4$ sec

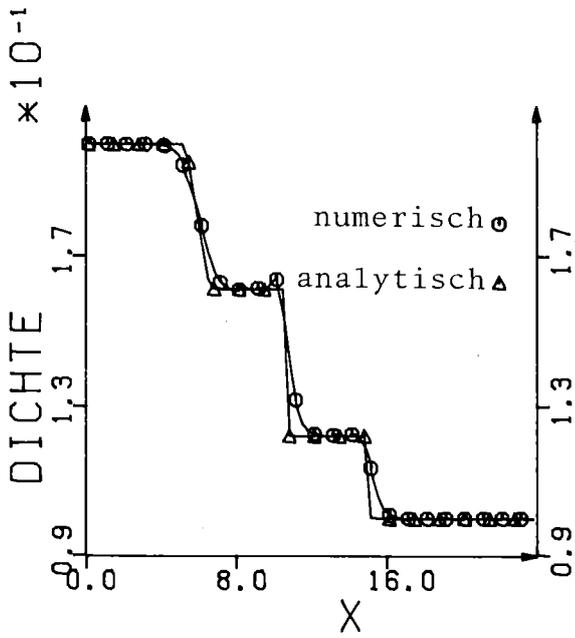


Abb.20: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.4$ sec

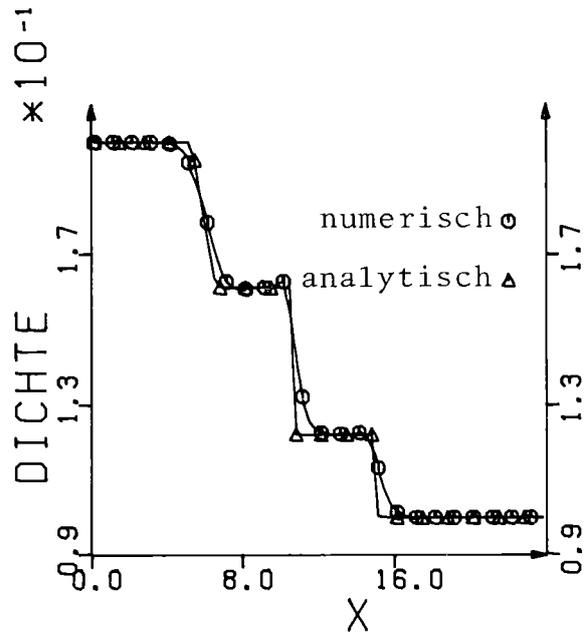


Abb.21: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=4, k=2, \Delta t=0.4$ sec

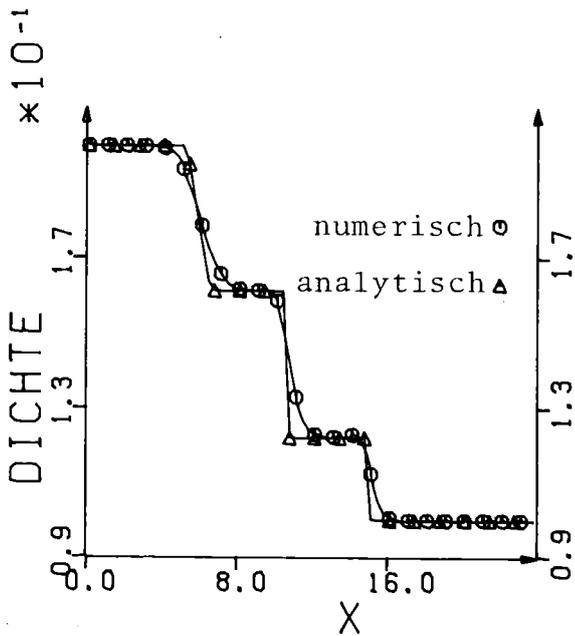


Abb.22: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=1$,
 $C=0, \Delta t=0.2$ sec

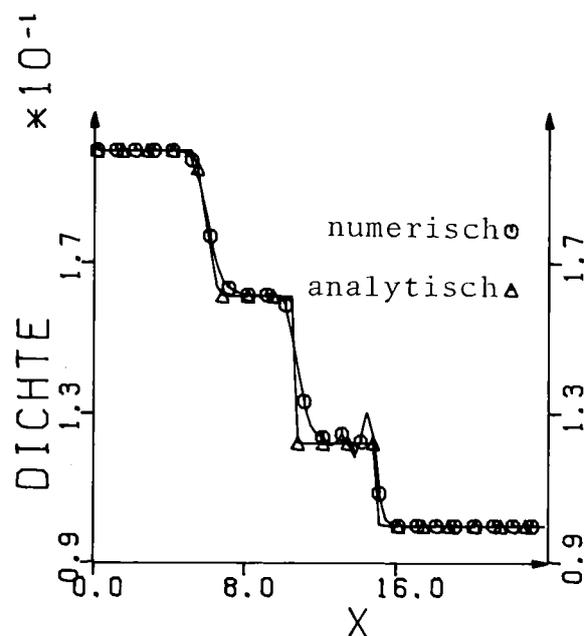


Abb.23: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=0, \Delta t=0.2$ sec

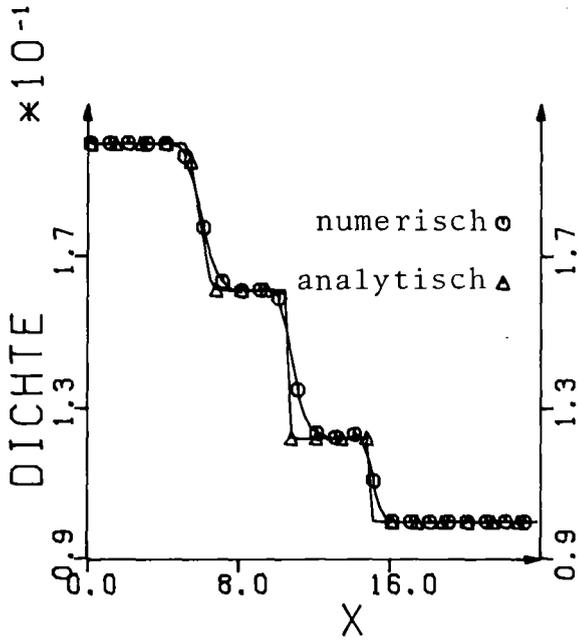


Abb.24: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.2$ sec

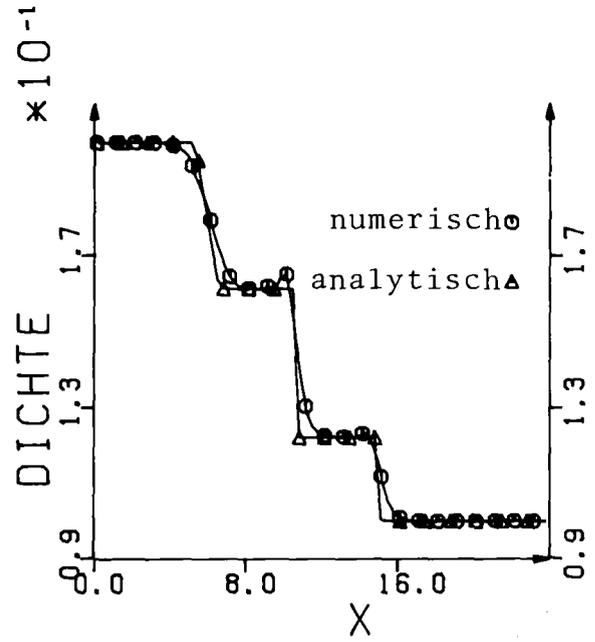


Abb.25: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.2$ sec

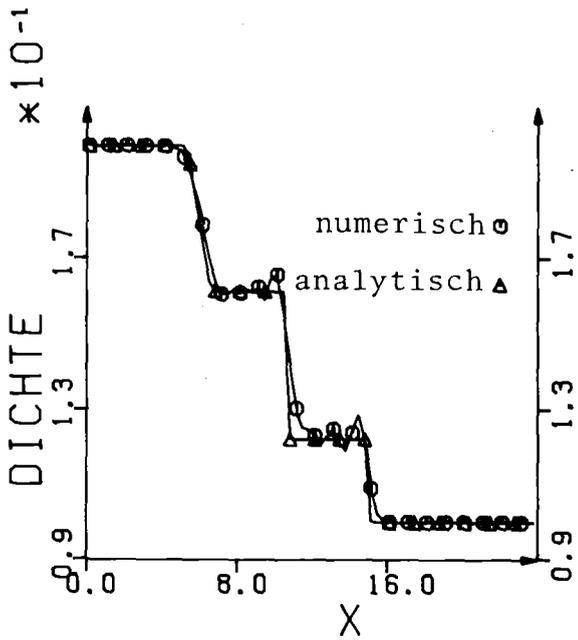


Abb.26: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=0, \Delta t=0.2$ sec

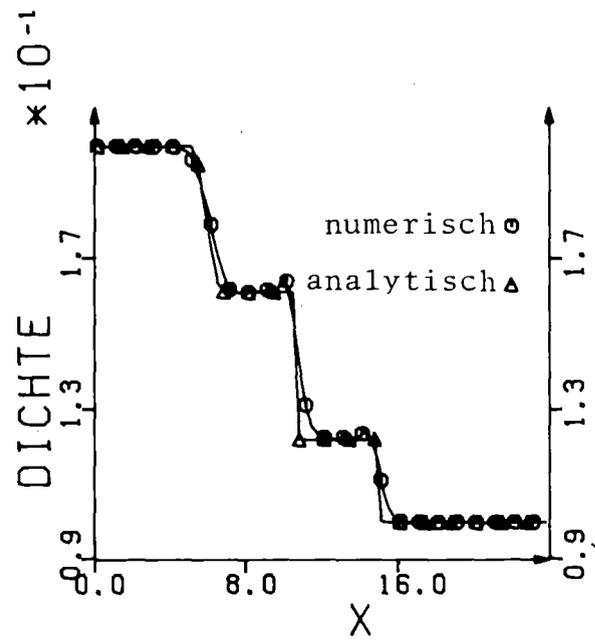


Abb.27: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.2$ sec

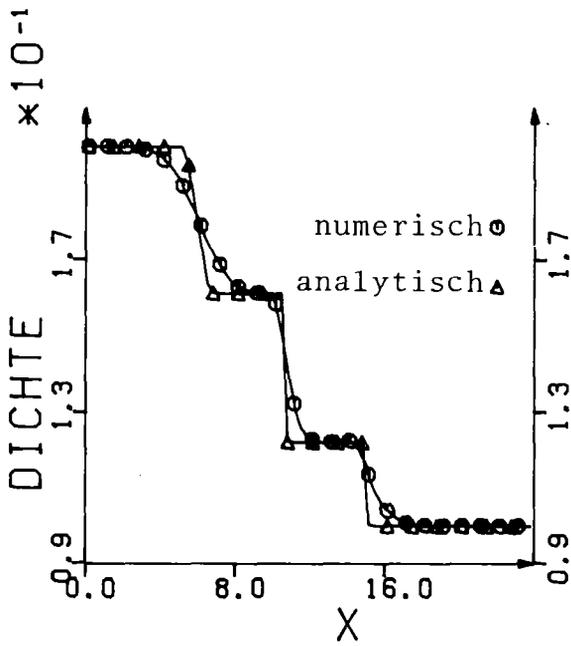


Abb.28: Aufwind-Differenzen, $\phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

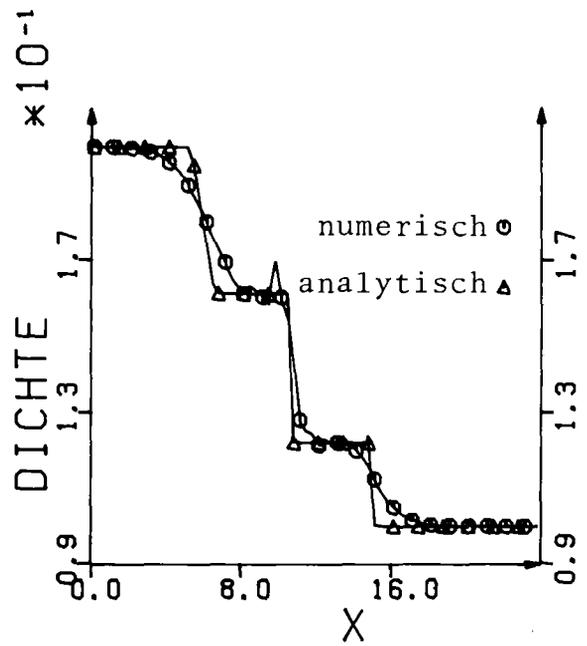


Abb.29: Zentrierte Differenzen, $\phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

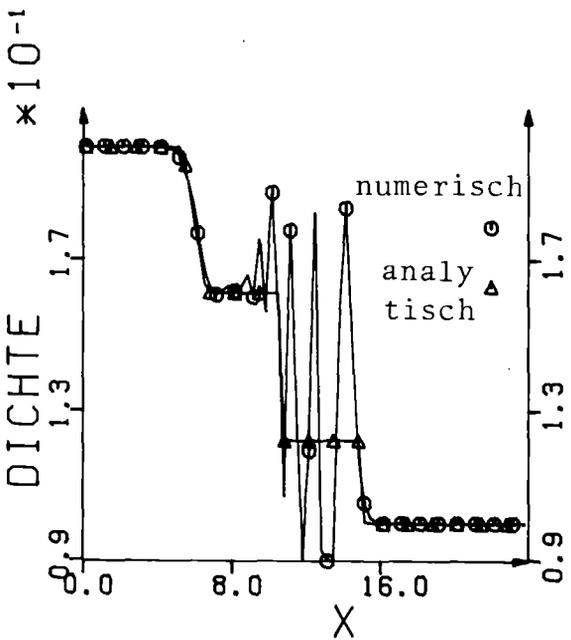


Abb.30: Aufwind-Differenzen, $\phi = 0.5$,
 $C=0, \Delta t=0.8$ sec

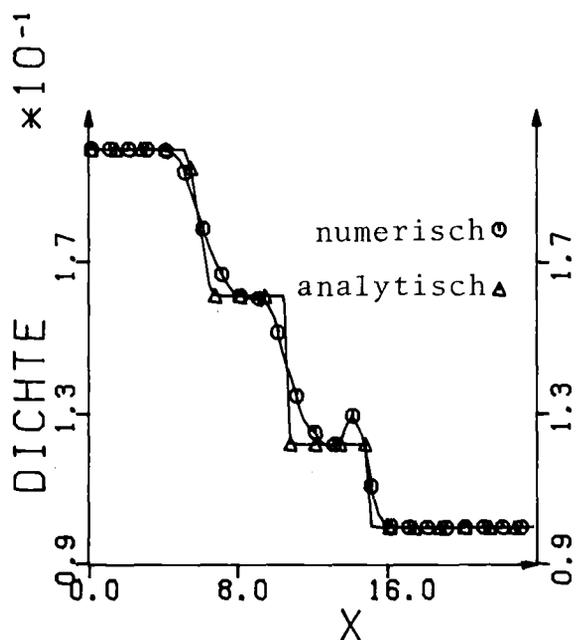


Abb.31: Aufwind-Differenzen, $\phi = 0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.8$ sec

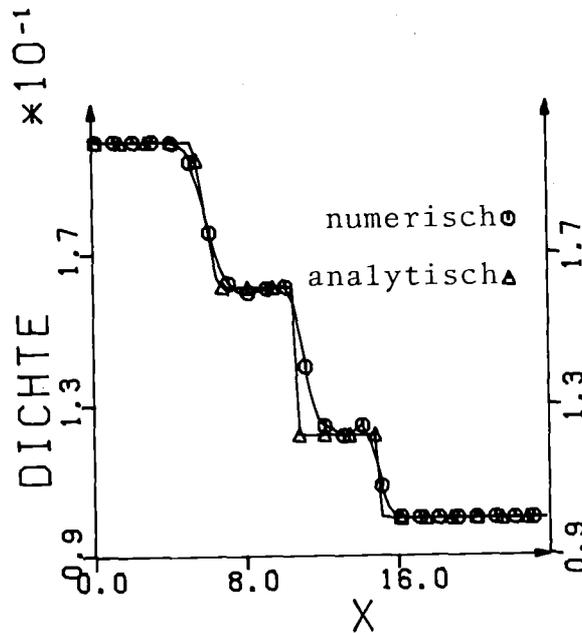


Abb. 32: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=2$, $k=2$, $\Delta t = 0.8$ sec

Die Ergebnisse ändern sich bei Vorgabe einer konstanten Anfangsgeschwindigkeit $U_0 = 0.3$ m/sec. Die höchsten konvektiven Geschwindigkeiten liegen jetzt bei 0.4 m/sec, entsprechend 89 % der Schallgeschwindigkeit.

Allgemein ist festzustellen, daß sich die Ergebnisse in diesem Fall stark verschlechtern. Alle Verfahren, die Aufwind-Differenzen benutzen, zeigen so starke Dämpfung, daß fast keine Konturen in der Lösungskurve mehr zu erkennen sind. Die Unterschiede zwischen halb- und vollimpliziten Verfahren sowie Verfahren mit und ohne künstlicher Viskosität sind minimal. Abb. 33 - Abb. 35 zeigen die Ergebnisse für Zeitschrittweiten 0.05, 0.1 und 0.2 sec. ($\beta = 0.06, 0.12, 0.24$).

Etwas anderes werden die Lösungskurven erst, wenn man in Impuls- und Energiegleichung das Leapfrog-Schema verwendet.

Für Abb. 36 wurde das vollimplizite Leapfrog-Schema, für Abb. 37 das halbimplizite verwendet, jeweils bei einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ ($\beta = 0.12$). Es sind leichte Verbesserungen im Bereich der Entlastungswelle festzustellen, gleichzeitig treten im Schockbereich Oszillationen auf.

Mit der numerischen Viskosität nach Lapidus lassen sich diese Oszillationen dämpfen, sie verschwinden aber nicht vollkommen (Abb. 38 - Abb. 41). Die beiden verschiedenen Typen liefern fast gleiche Ergebnisse, die Darstellung der Entlastungswelle wird durch die numerische Dämpfung nicht beeinflusst. Insgesamt ist nur eine geringe Verbesserung zur normalen ICE-Technik (Abb. 34) festzustellen.

Bei anderen Zeitschrittweiten innerhalb des Stabilitätsbereiches sind die Ergebnisse ähnlich. Abb. 42 zeigt beispielhaft für $\Delta t = 0.2 \text{ sec}$ das halbimplizite Leapfrog-Schema ohne Dämpfung, in Abb. 43 sind die entsprechenden Ergebnisse bei schwacher Dämpfung ($C = 2$) und in Abb. 44 bei starker Dämpfung ($C = 4$) dargestellt.

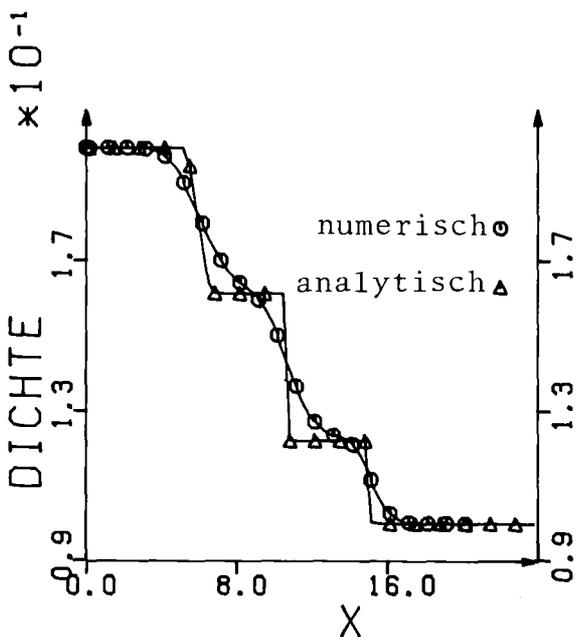


Abb. 33: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.05 \text{ sec}$

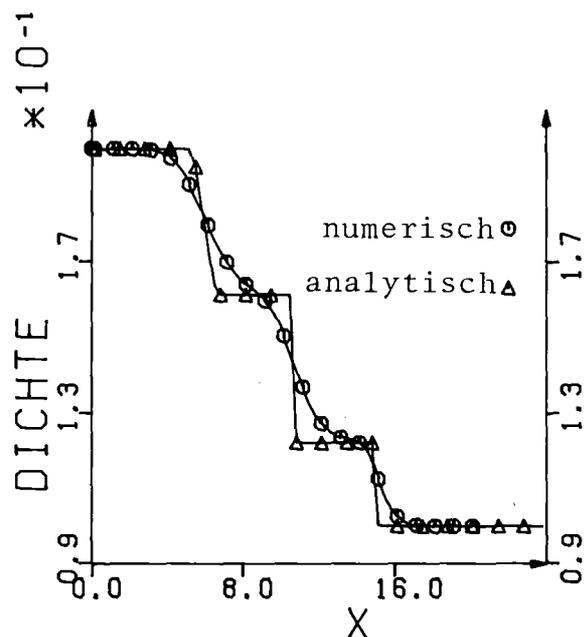


Abb. 34: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, \Delta t=0.1 \text{ sec}$

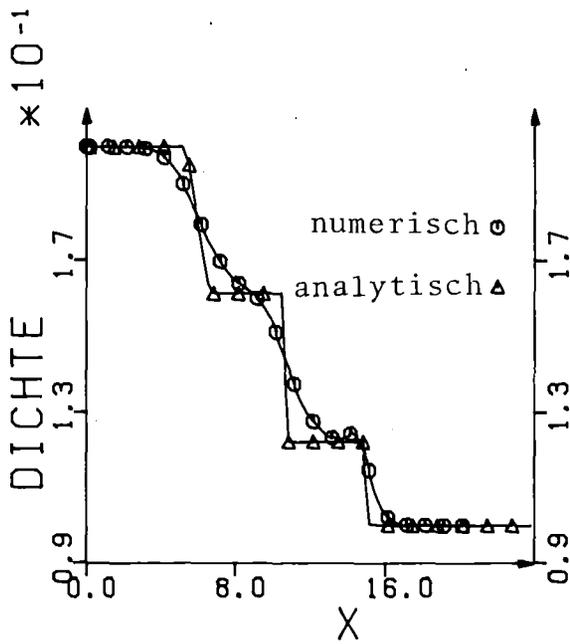


Abb.35: Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=1$,
 $C=0, \Delta t=0.2$ sec

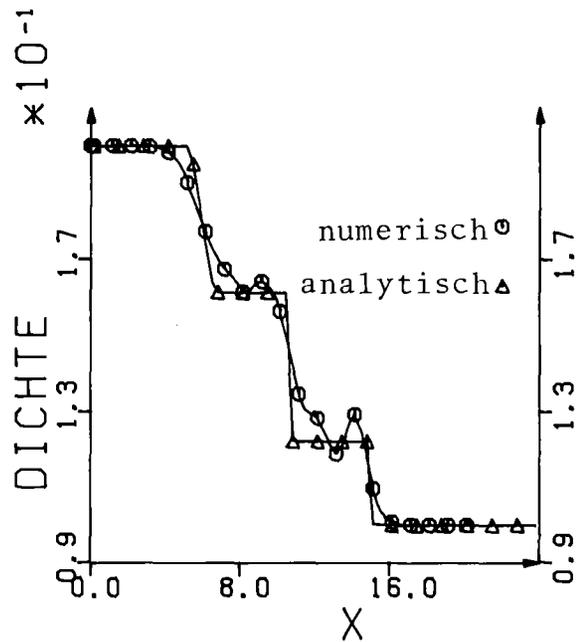


Abb.36: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi=1$,
 $C=0, \Delta t=0.1$ sec

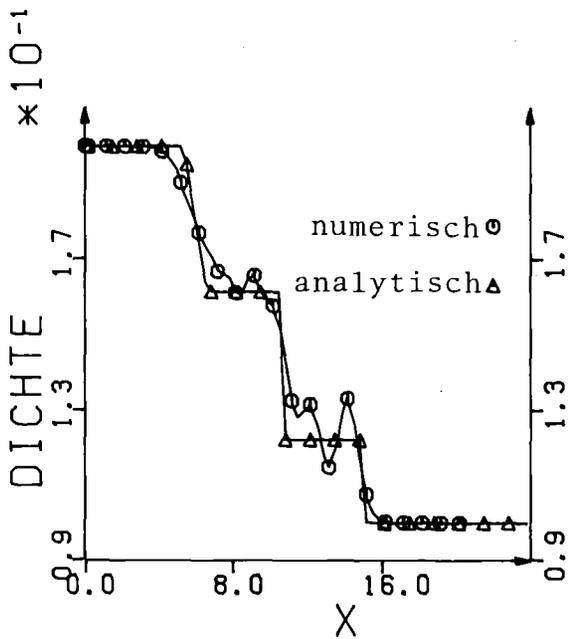


Abb.37: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=0, \Delta t=0.1$ sec

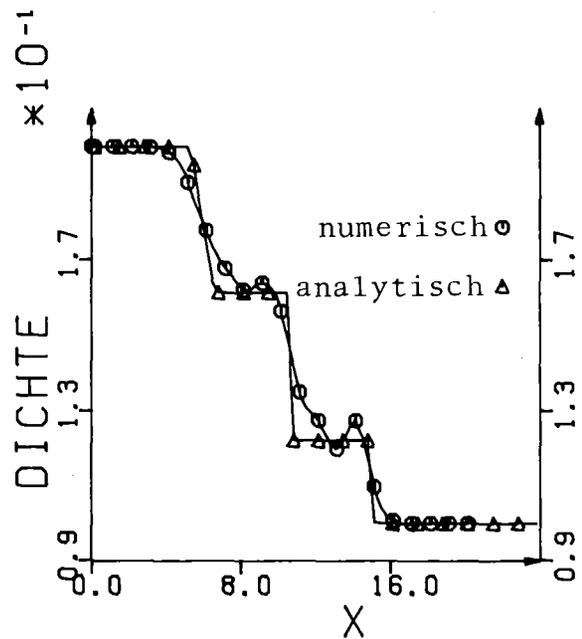


Abb.38: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi=0.5$,
 $C=2, k=1, \Delta t=0.1$ sec

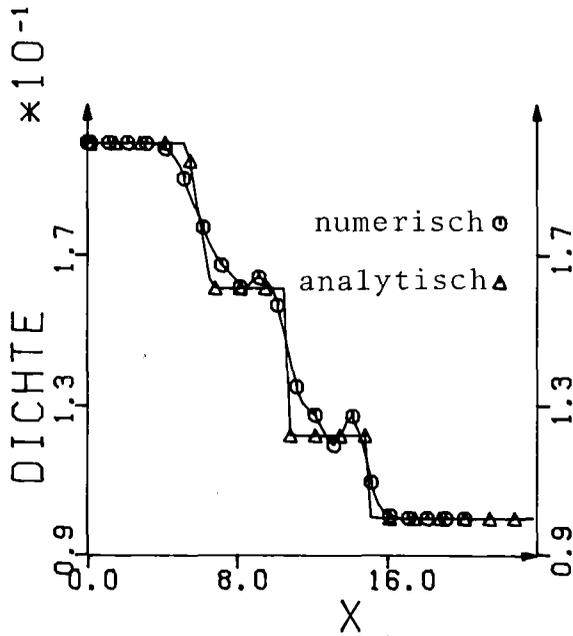


Abb.39: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.1$ sec

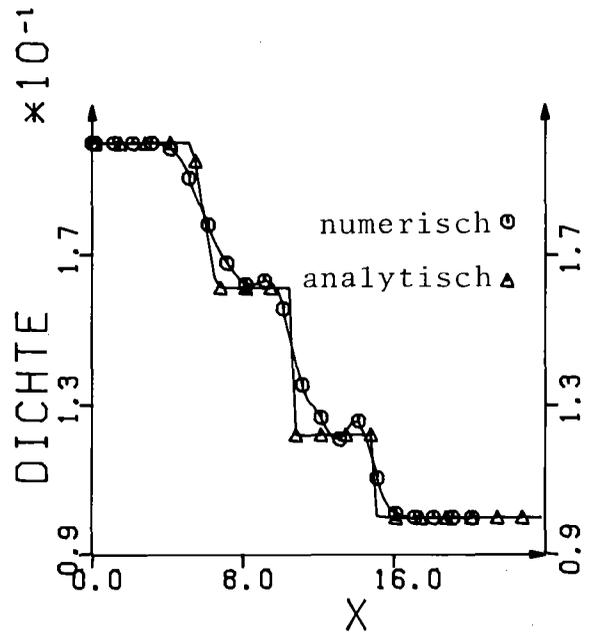


Abb.40: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=4, k=1, \Delta t=0.1$ sec

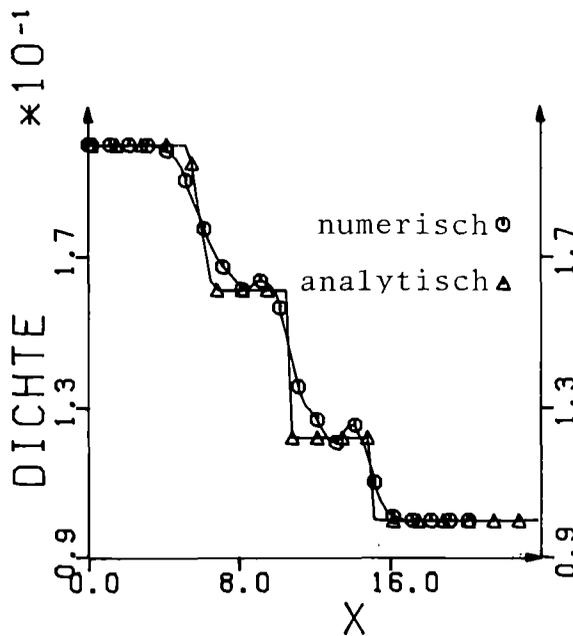


Abb.41: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=4, k=2, \Delta t=0.1$ sec

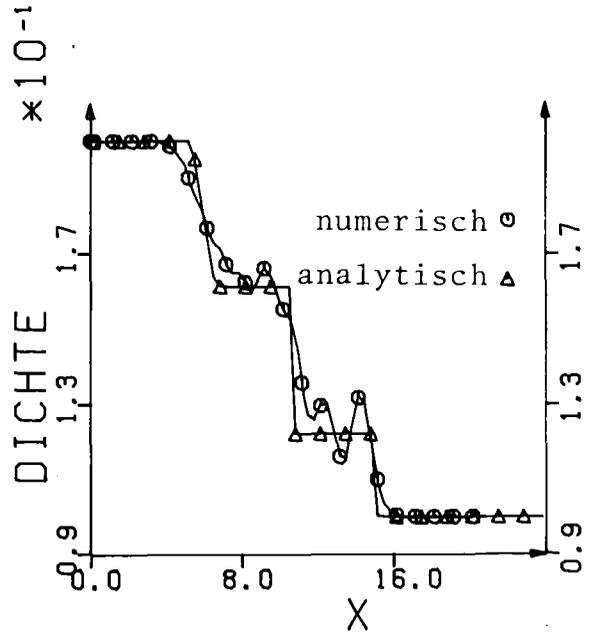


Abb.42: Zentrierte Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C=0, \Delta t=2$ sec

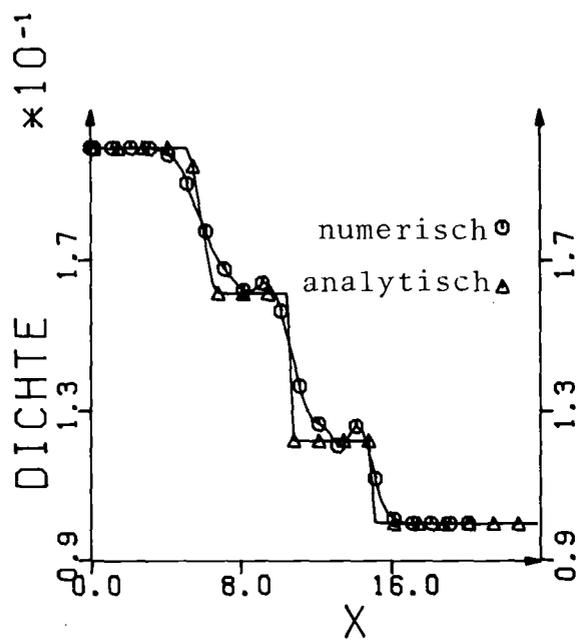


Abb.43: Zentrierte Differenzen, $\Theta, \phi=0.5$,
 $C=2, k=2, \Delta t=0.2$ sec

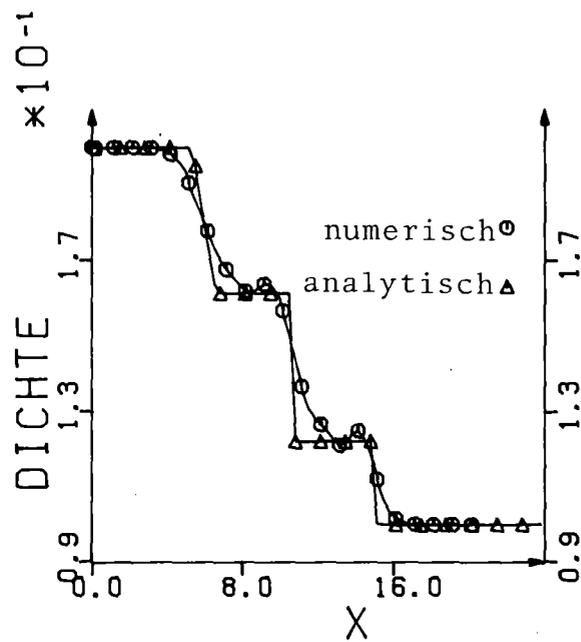


Abb.44: Zentrierte Differenzen, $\Theta, \phi=0.5$,
 $C=4, k=2, \Delta t=0.2$ sec

Ein Vergleich der Rechenzeiten ist Tabelle 3 zu entnehmen. Man sieht, daß eine Reduktion des Implizitheitsgrades den Rechenaufwand verringert, vor allem bei einer Rechnung mit hoher Courant-Zahl. Bei Verwendung zentrierter Differenzen steigen die Rechenzeiten, die geringere Stabilität bedingt einen größeren Rechenaufwand in der Iterationsphase. Die Rechnungen wurden auf einer IBM 3033 durchgeführt.

Verfahren	$\beta = 0.12$		$\beta = 0.24$	
	Zeit [sec]	Durchschn. Anzahl von Iterationen	Zeit [sec]	Durchschn. Anzahl von Iterationen
Aufwind Diff. $\theta, \phi=1, \epsilon=0$	1.3	3.7	1.5	10.7
Aufwind Diff. $\theta, \phi=0.5, \epsilon=0$	1.1	2.88	1.1	7.4
Aufwind Diff. $\theta, \phi=0.5, \epsilon=2, k=2$	1.1	2.1	0.9	4.79
Zentrierte Diff. $\theta, \phi=1, \epsilon=0$	1.9	6.7	1.8	13.9
Zentrierte Diff. $\theta, \phi=0.5, \epsilon=0$	1.1	2.88	--	--
Zentrierte Diff. $\theta, \phi=0.5, \epsilon=2, k=2$	1.3	2.88	--	--

Tabelle 3 : Rechenzeiten bei Stoßrohrproblem

$$U_0 = 0 \text{ m/sec}$$

5.2 Kompressibles Fluid: Flachwasserbecken

Als Anfangshöhe des Wasserspiegels wurde wie im Experiment $h_0 = 50$ mm gewählt. Bei dieser Höhe beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Störungen nach Tabelle 1 0.7 m/sec, im stationären Zustand ist die kritische Ausströmgeschwindigkeit 0.558 m/sec (nach (12)).

Um bei allen untersuchten Verfahren vergleichbare Abbruchfehler zu erhalten, wurde immer mit denselben Orts- und Zeitdiskretisierungen gearbeitet. Das örtliche Gitternetz bestand aus 23-Maschen in X- und 12 Maschen in Y-Richtung. Maschenbreiten und -höhen waren nicht äquidistant, die kleinsten Maschen lagen im Bereich der Ausströmöffnung mit Breiten von 0.05 m. Als Zeitschrittweite wurden 0.025 sec gewählt, dies führt zu einer Courant-Zahl $\beta \approx 0.3$.

Die Festlegung der Randbedingung für die Höhe im Bereich der Ausströmöffnung erwies sich als problematisch. Es zeigte sich, daß die Wahl der naheliegenden Randbedingung $h_{\text{außen}} = 0$ zu falschen Ergebnissen führt. Abb 4.5 zeigt beispielhaft für Punkt 1, daß die errechneten Ausströmraten weit über den gemessenen liegen. Gleichzeitig ist die Geschwindigkeit an der Ausströmstelle weit im "Überschallbereich" (maximal das 1.86 fache der Wellenausbreitungs-Geschwindigkeit). Der gleiche Fehler trat auch bei Nachrechnung mit dem Code YAQUI auf (siehe / 10 /). Warum die Rechenverfahren nicht in der Lage sind, die kritischen Größen am Ausfluß zu berechnen, muß noch untersucht werden (Anhang). Die theoretisch zu erwartende kritische Höhendifferenz wurde deshalb vorerst als Randbedingung aufgeprägt.

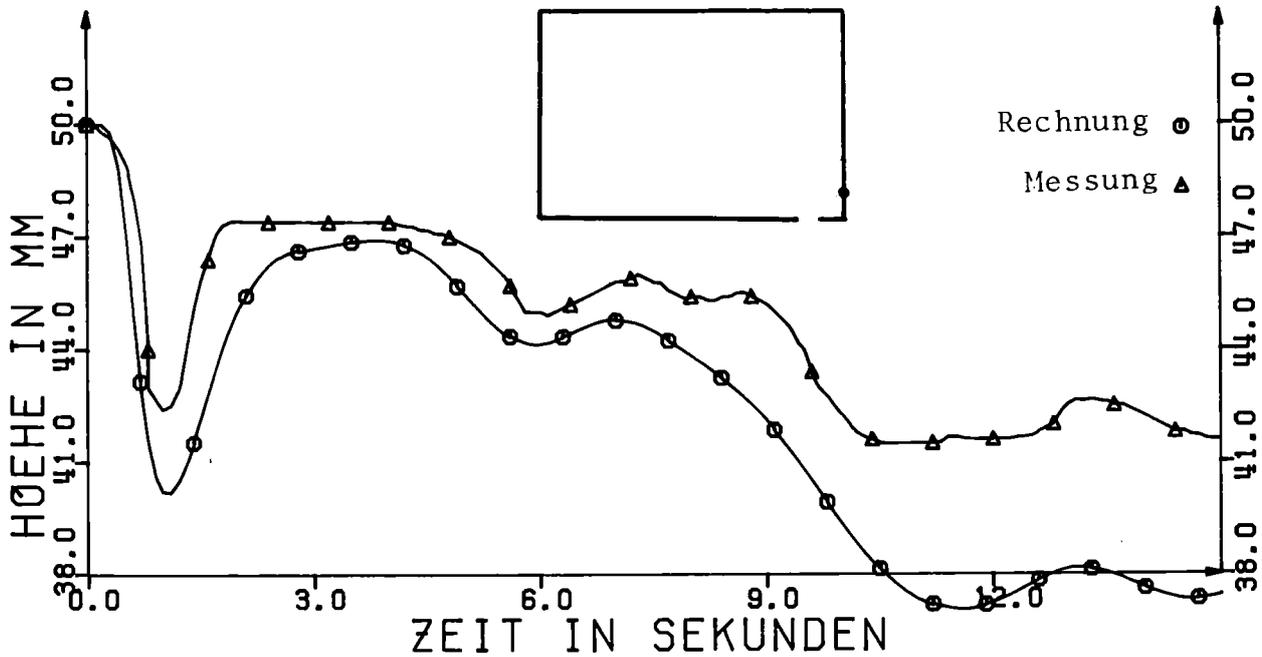


Abb. 45: Punkt 1, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C=0, h_{\text{aussen}} = 0, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

Abb. 46 - Abb. 49 zeigen die Ergebnisse, die mit dem ICE-Verfahren (Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1, C=0$) gewonnen wurden. Es fallen 2 Dinge auf:

- Die Ausströmraten sind geringer, liegen aber immer noch etwas zu hoch.
- Die Schwankungen in der Wasserhöhe, die auf die von der Ausströmöffnung ausgehende Entlastungswelle zurückzuführen sind, erscheinen stark gedämpft. Dies gilt vor allem für Meßstellen, die weiter entfernt von der Öffnung liegen.

Zu erwähnen ist, daß die Ausströmgeschwindigkeit (max. 0.558 m/sec) in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Theorie steht.

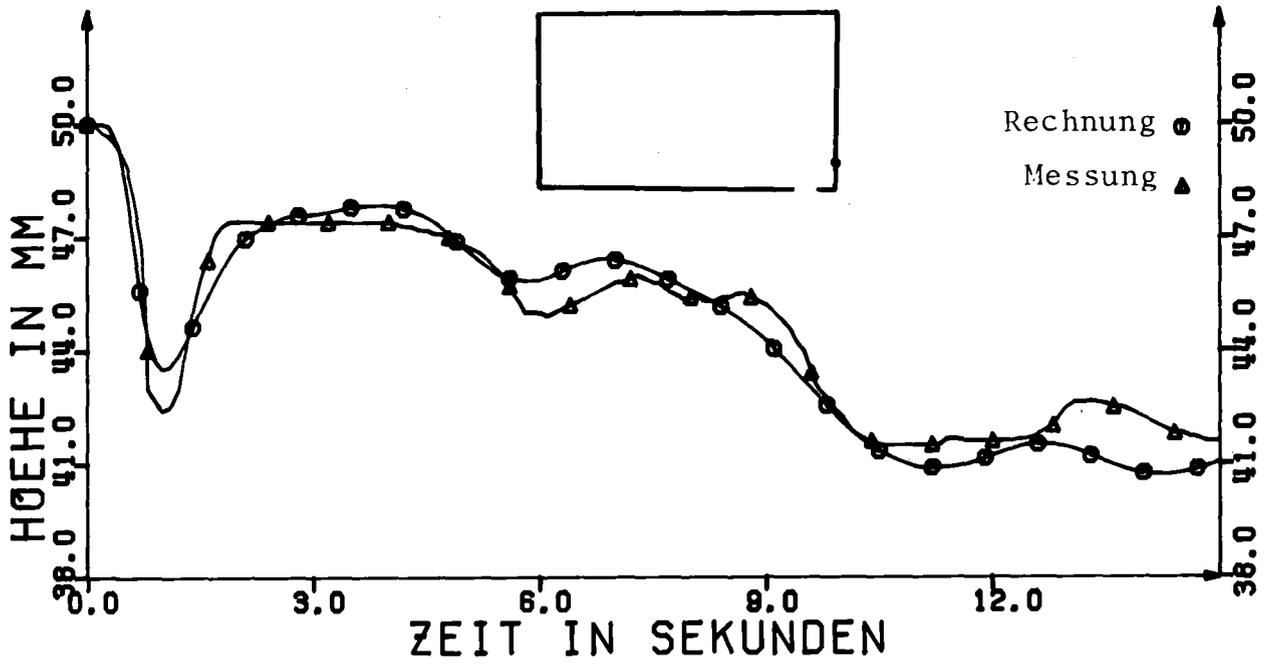


Abb. 46: Punkt 1, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=1$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025$ sec

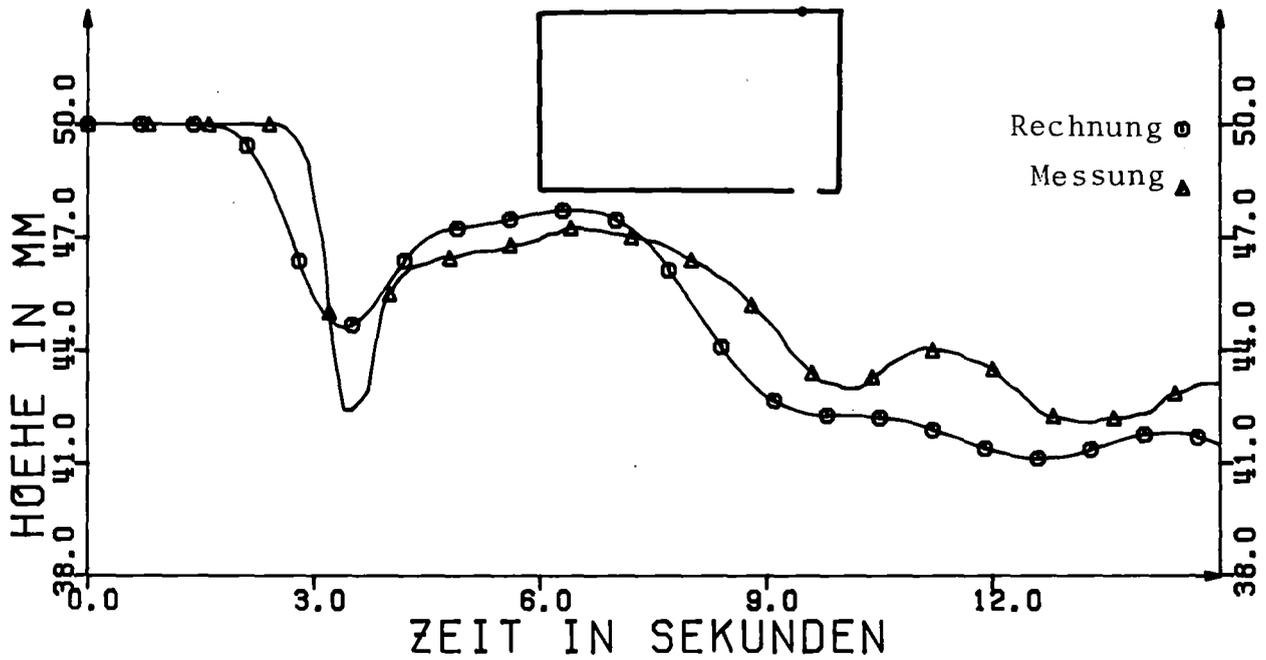


Abb. 47: Punkt 2, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi=1$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025$ sec

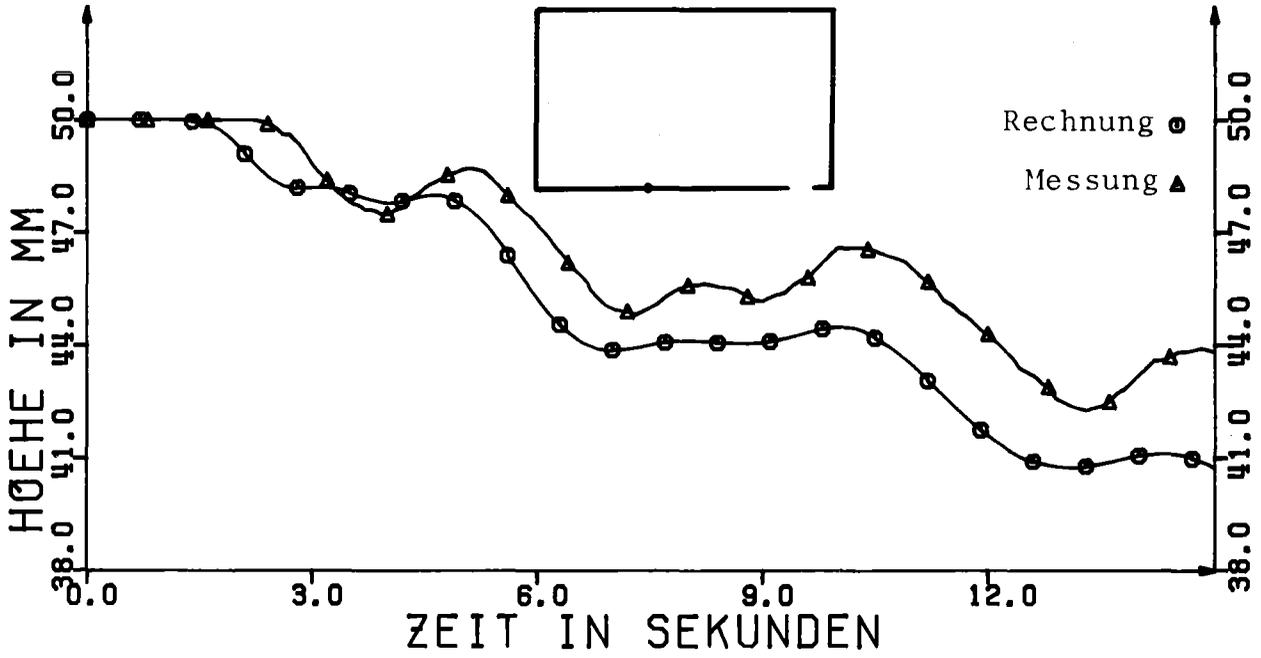


Abb. 48: Punkt 3, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

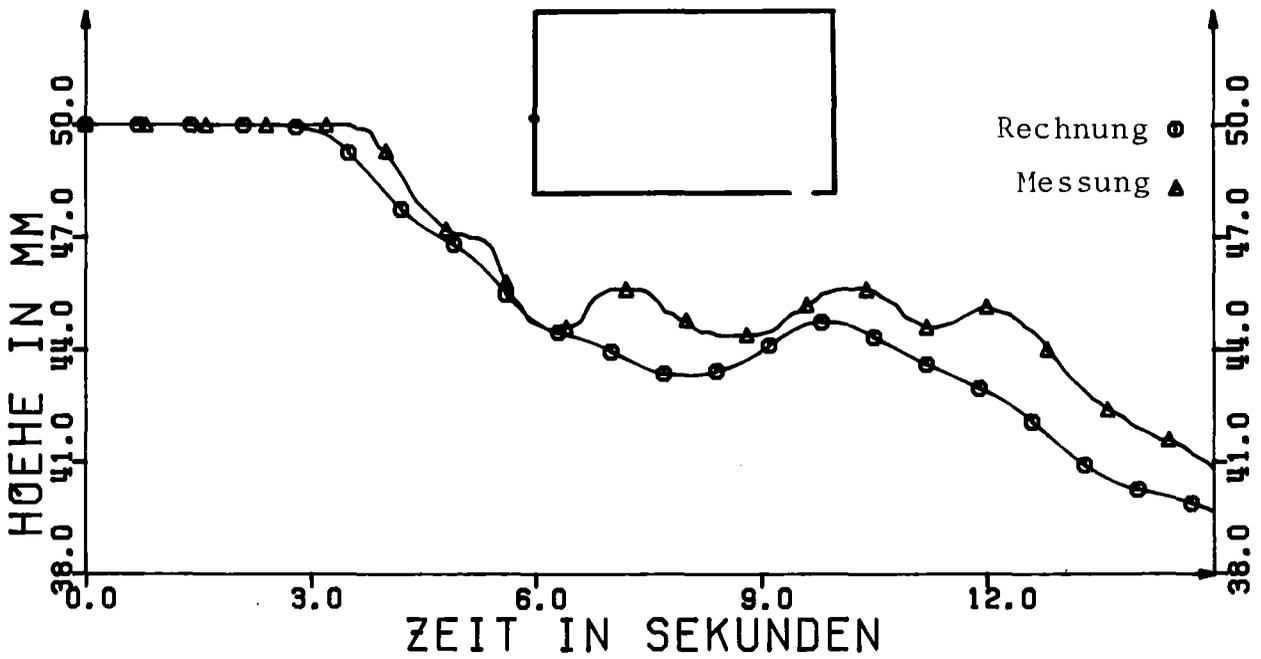


Abb. 49: Punkt 4, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

In /10/ wurde gezeigt, daß der erste Punkt durch die Vernachlässigung der Bodenreibung im Modell der hydraulischen Analogie zu erklären ist. Durch eine Grenzschicht am Beckenboden verringert sich die im Experiment effektiv wirksame Wasserhöhe. Benutzt man in der Rechnung eine um 2 mm geringere effektive Höhe (Anfangshöhe 48 mm) und vergleicht die Ergebnisse mit dem Experiment (Abb. 50 und Abb. 51), so erkennt man eine deutliche Verringerung des systematischen Fehlers. Da dieser Fehler im physikalischen Modell, und nicht im numerischen Verfahren liegt, wird er im weiteren nicht mehr untersucht.

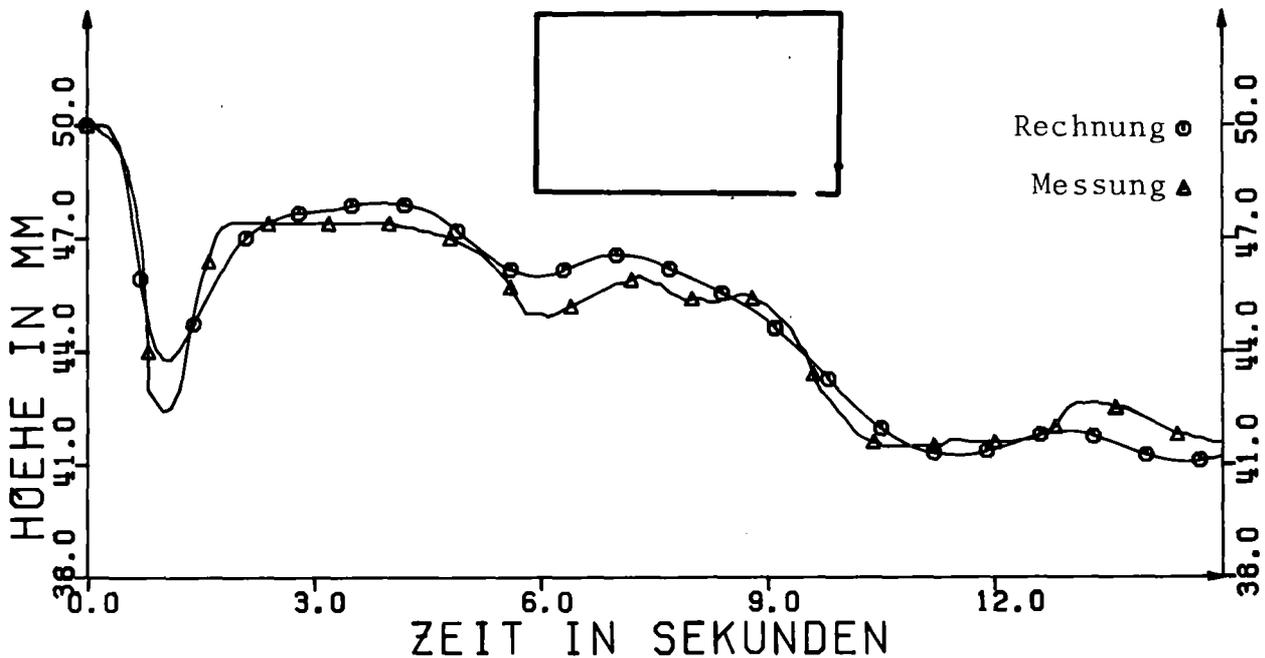


Abb. 50: Punkt 1, Rechnung mit Aufwind-Differenzen,
 $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $h_0 = 48$ mm, $\Delta t = 0.025$ sec

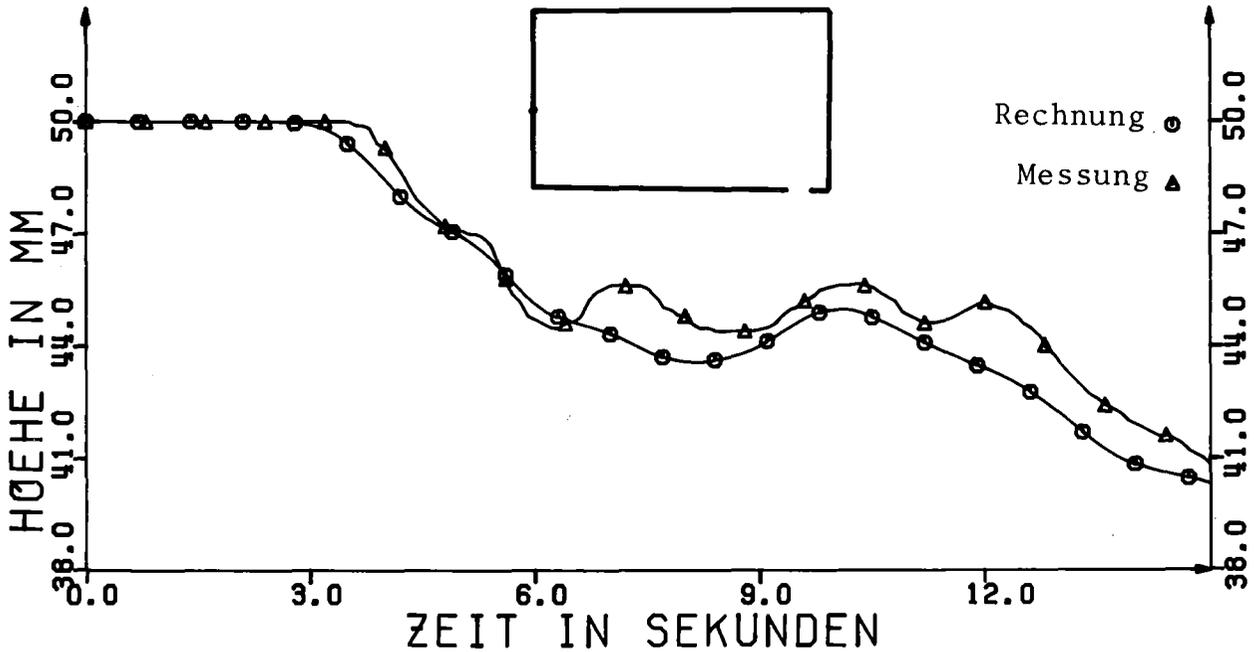


Abb. 51: Punkt 4, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$,
 $C = 0$, $h_0 = 48$ mm, $\Delta t = 0.025$ sec

Dagegen ist der zweite Punkt, die Verschmierung der Entlastungswelle, auf das numerische Verfahren zurückzuführen. Es soll gezeigt werden, daß sich hier die Ergebnisse des ICE-Verfahrens verbessern lassen.

Dies wird durch das "halbimplizite Aufwind-Schema" geleistet, siehe Abb. 52 - Abb. 55 (Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$, $C=0$). Man erkennt jetzt fast alle experimentell festgestellten Wellen auch in der Rechnung, die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist größtenteils im Bereich der Meßgenauigkeit (2mm).

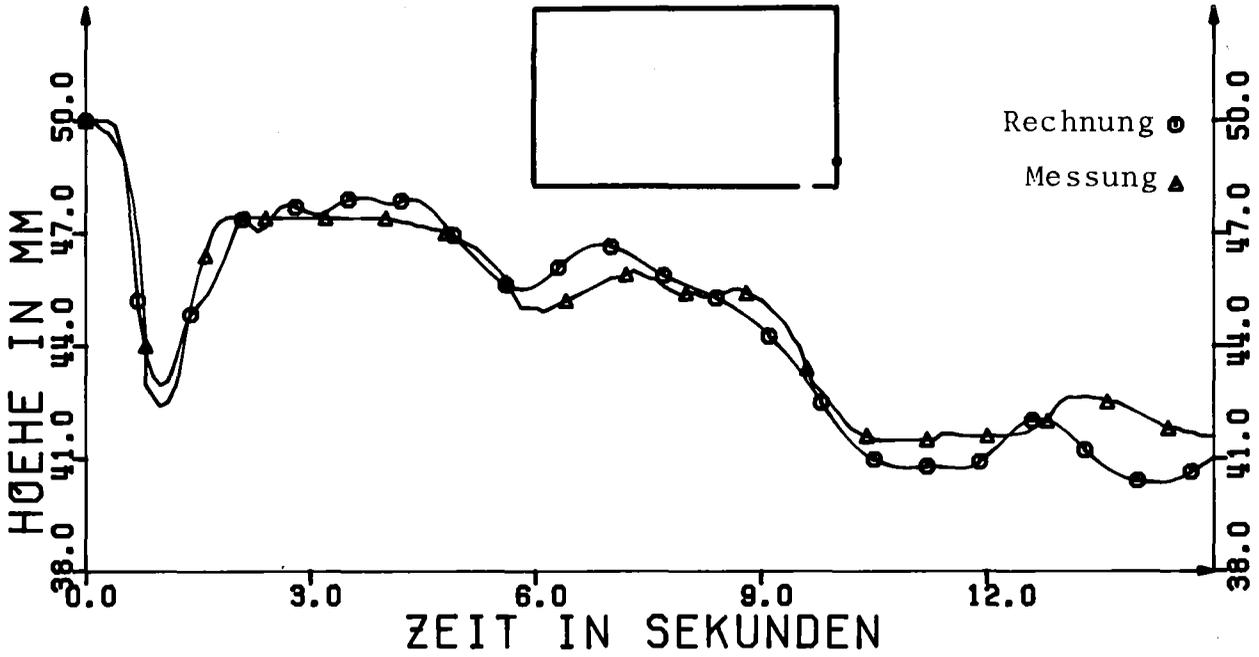


Abb. 52: Punkt 1, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025$ sec

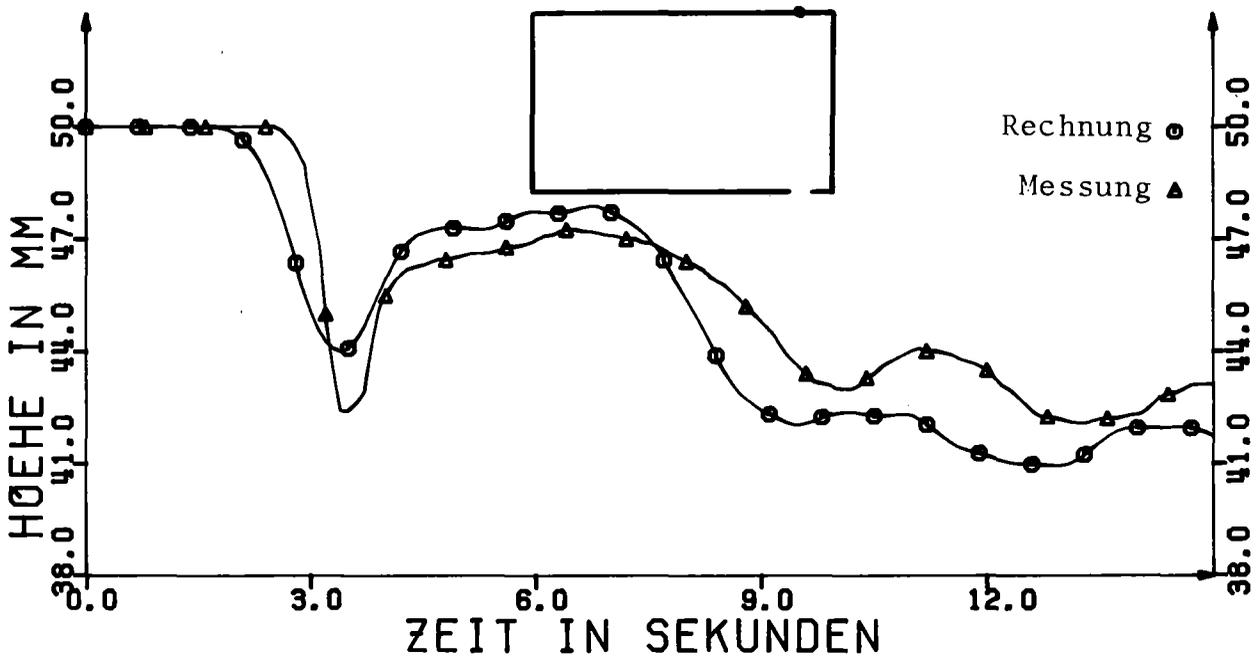


Abb. 53: Punkt 2, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025$ sec

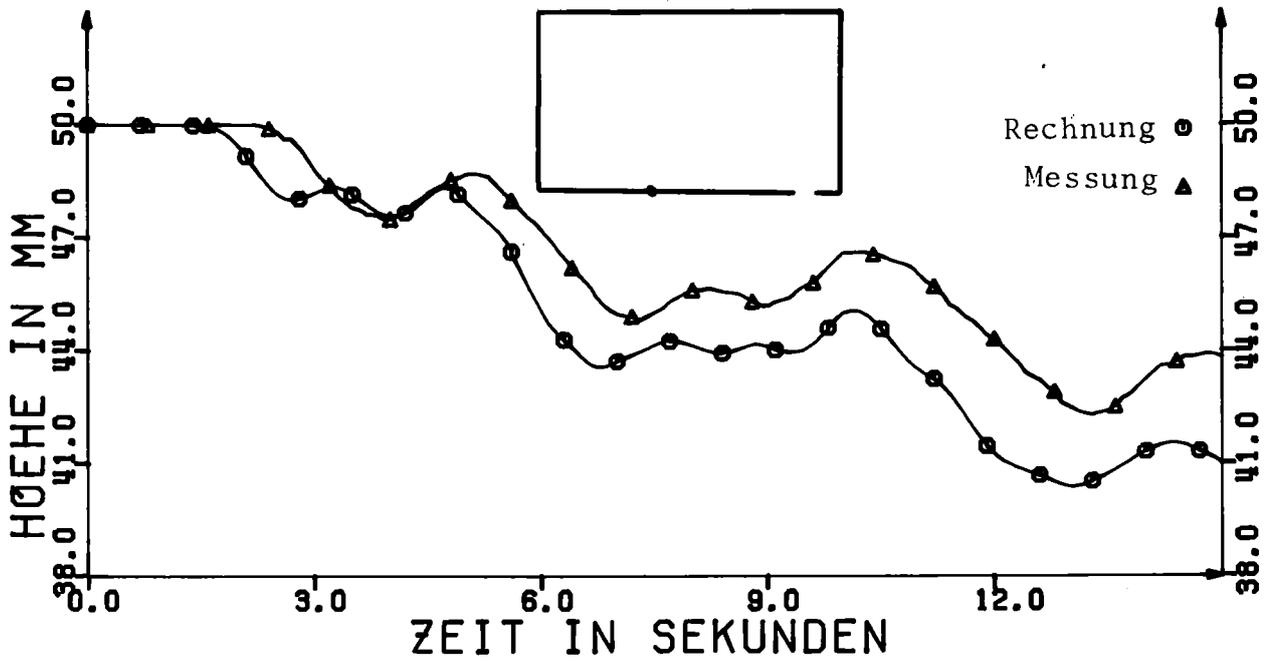


Abb. 54: Punkt 3, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025$ sec

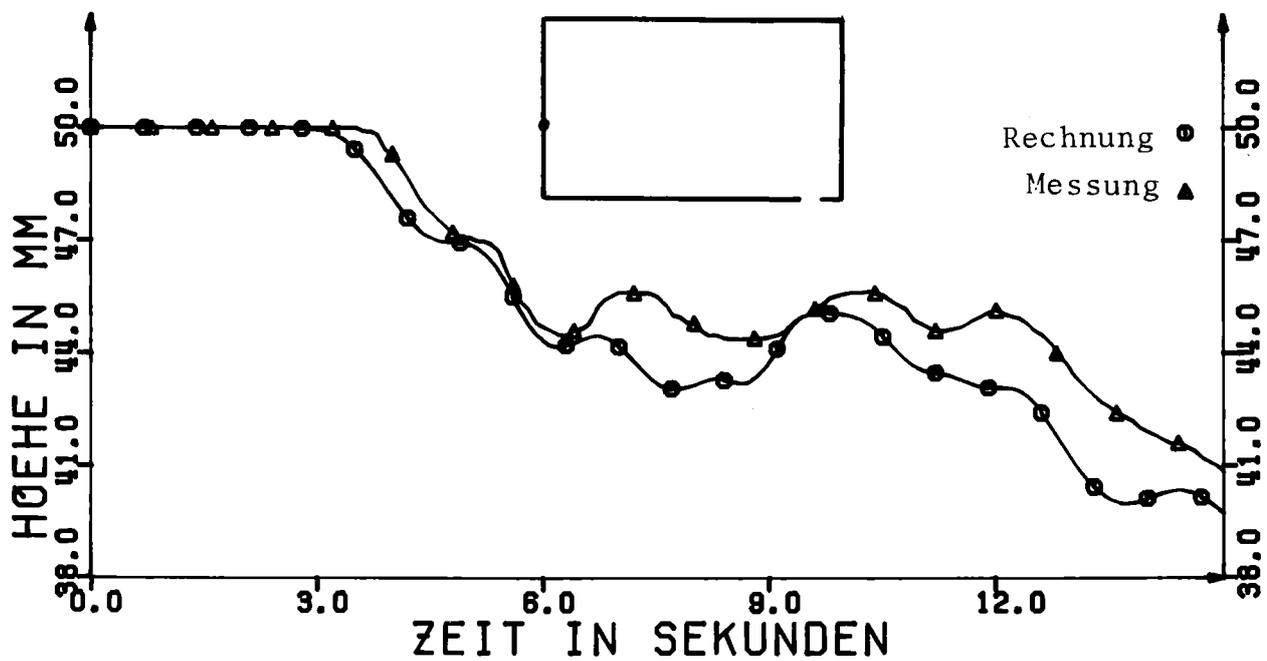


Abb. 55: Punkt 4, Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$,
 $C = 0, \Delta t = 0.025$ sec

Als nächstes soll untersucht werden, ob die Verwendung zentrierter Differenzen die numerischen Resultate noch weiter verbessern kann.

Eine Anzahl von Rechnungen mit dem Leapfrog-Schema haben gezeigt, daß zur Unterdrückung numerischer Oszillationen zwei Glättungen notwendig sind:

- (1) Glättung mit einer "Artificial Viscosity"
(Parameter C, k)
- (2) Mittelung zwischen den Werten auf der (n-1)-ten und der n-ten Zeitebene jeweils nach N_0 Integrationsschritten.

Die Untersuchungen haben weiter ergeben, daß bei gegebener Diskretisierung ein Maximalwert von N_0 nicht überschritten werden darf. Bei der oben beschriebenen Diskretisierung lag dieser Maximalwert bei 10, bei einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.0075$ sec bei ca. 30. Zu hohe Werte von N_0 zeigten sich dabei vor allem durch hochfrequente Oszillationen in den Geschwindigkeitskurven (Abb. 56)

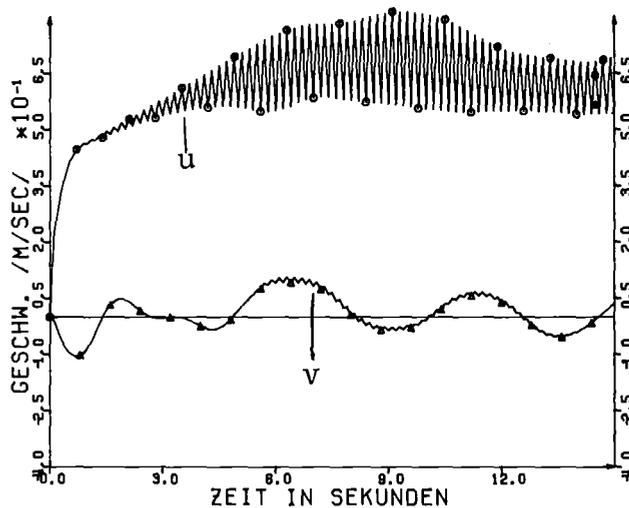


Abb. 56: Geschwindigkeit am Ausfluß, Rechnung mit zentrierten Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $N_0 = 10$, $\Delta t = 0.02$ sec

Auf die Stärke der numerischen Dämpfung hat der Parameter N_0 überraschenderweise keinen Einfluß (vergleiche Abb. 57 und Abb. 63 für $N_0 = 1$ und $N_0 = 5$ beim halbimpliziten Leapfrog-Verfahren).

Zusätzlich zu dieser Mittelung muß noch einmal mit einer künstlichen Viskosität geglättet werden, da es sonst zu numerischen Oszillationen in den Lösungskurven kommt (Abb. 58). Die Stärke der künstlichen Dämpfung kann klein gehalten werden ($C = 1$). Es erweist sich als vorteilhaft, nur in Bereichen zu glätten, in denen in einer Koordinatenrichtung Kompression auftritt ($k = 1$).

Vergleicht man die Ergebnisse von Leapfrog- und Aufwind-Schemata miteinander, so erkennt man kaum Unterschiede. Das vollimplizite Leapfrog-Verfahren (Abb. 59 - Abb. 62) liefert fast dieselben Ergebnisse wie das vollimplizite Aufwind-Verfahren (Abb. 46 - Abb. 49). Dasselbe gilt für die halbimpliziten Verfahren (Abb. 63 - Abb. 66), wenn hier auch das Aufwind-Schema etwas weniger Dämpfung zeigt.

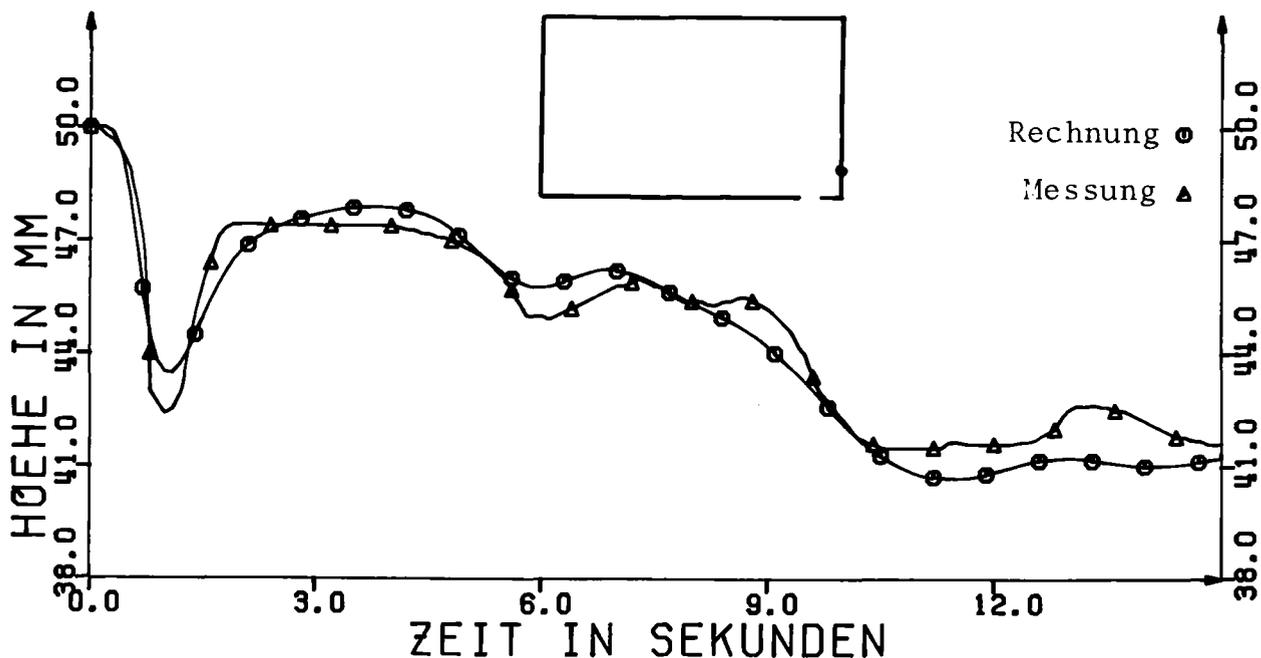


Abb. 57: Punkt 1, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 0.5$, $C = 1$, $k = 2$, $N_0 = 1$, $\Delta t = 0.025$ sec

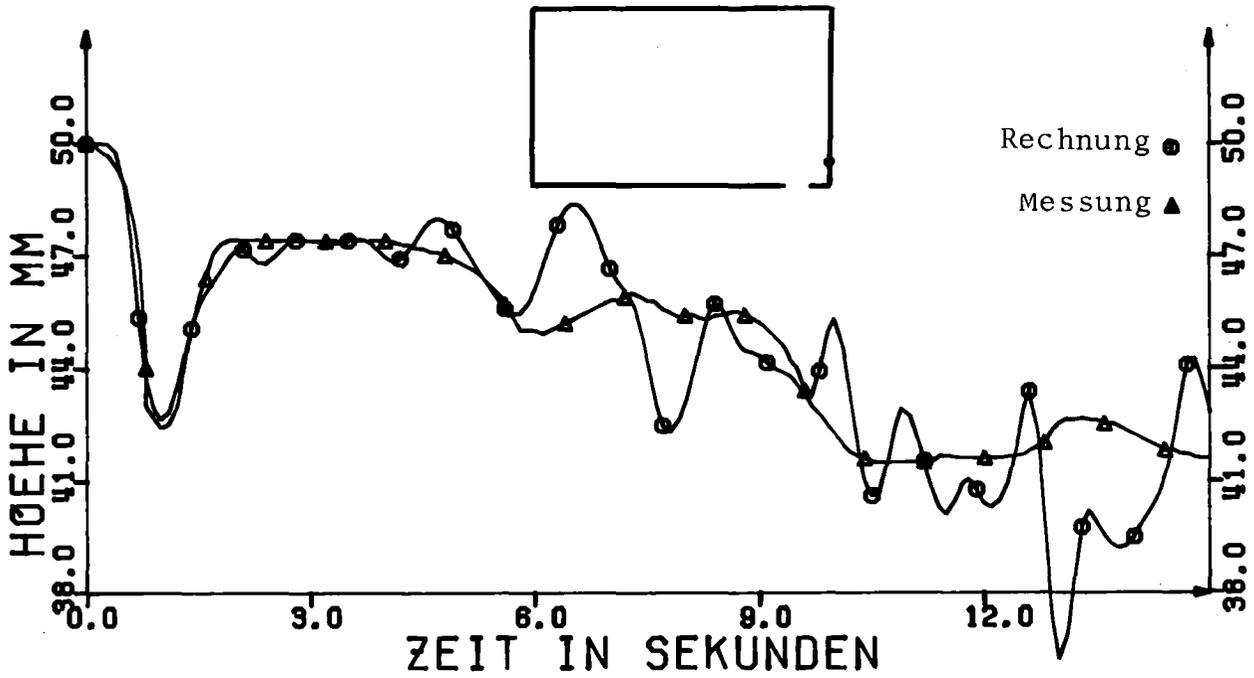


Abb. 58: Punkt 1, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 0.5, C = 0, N_0 = 1, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

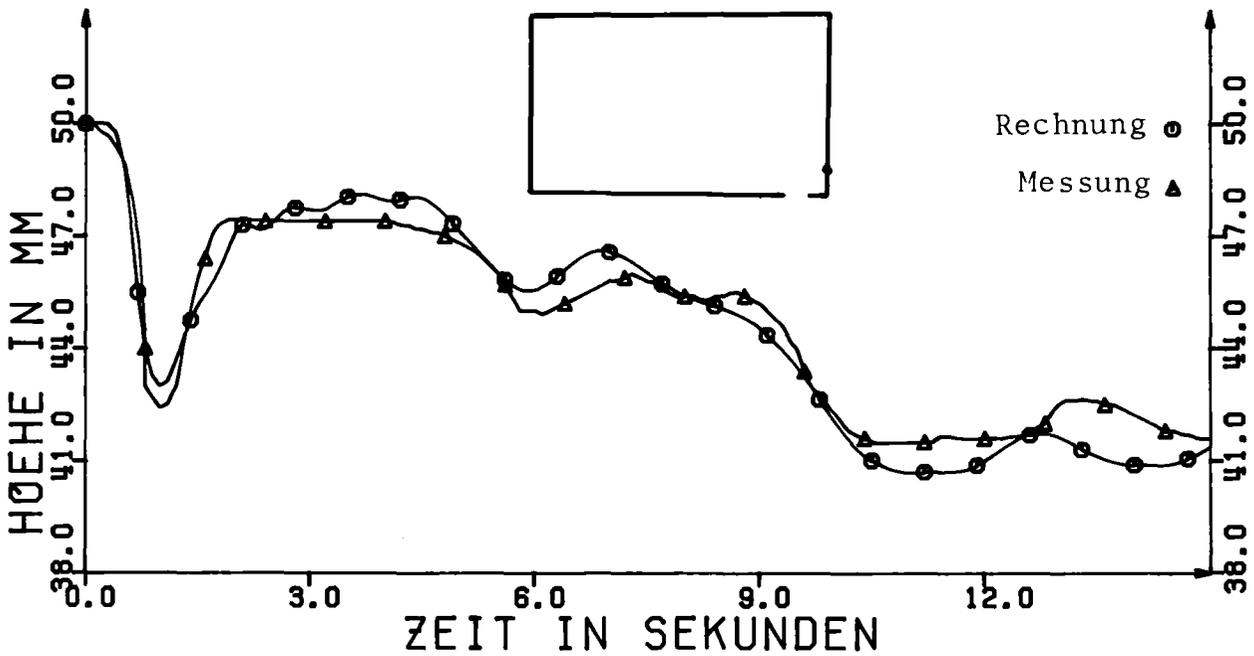


Abb. 59: Punkt 1, Rechnung mit zentrierten Differenzen, $\theta, \phi = 1,$
 $C = 1, k = 2, N_0 = 5, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

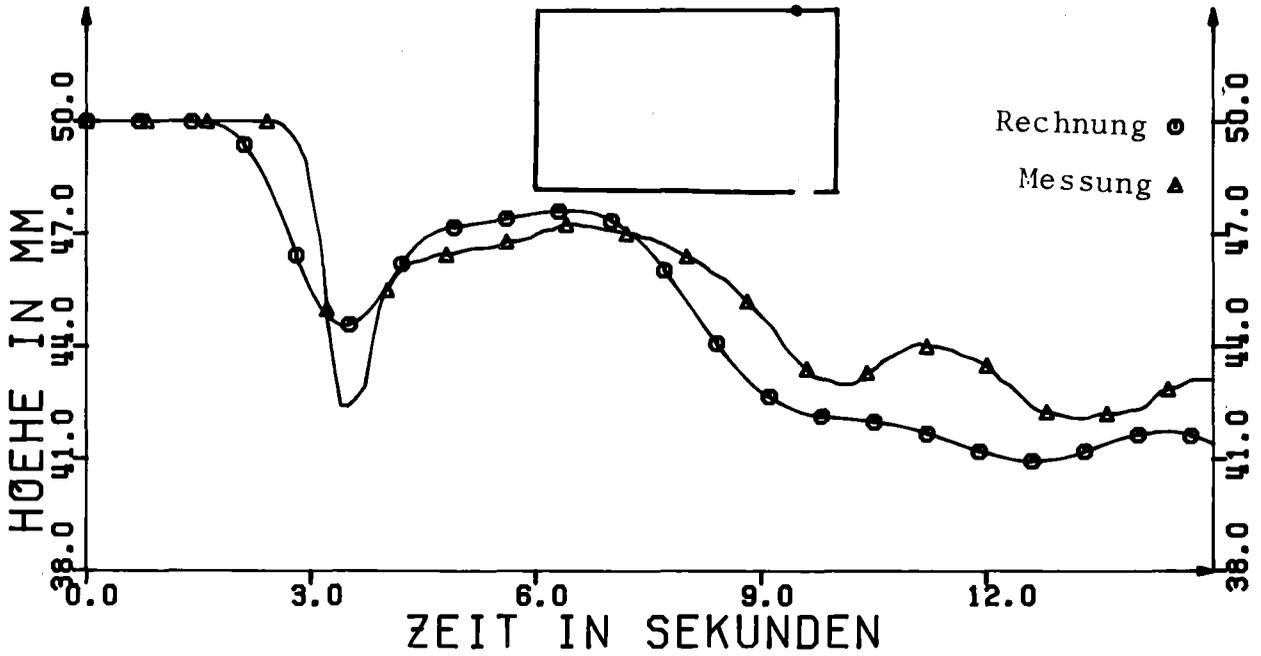


Abb. 60: Punkt 2, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\sigma, \phi = 1$, $C = 1$, $K = 2$, $N_0 = 5$, $\Delta t = 0.025$ sec

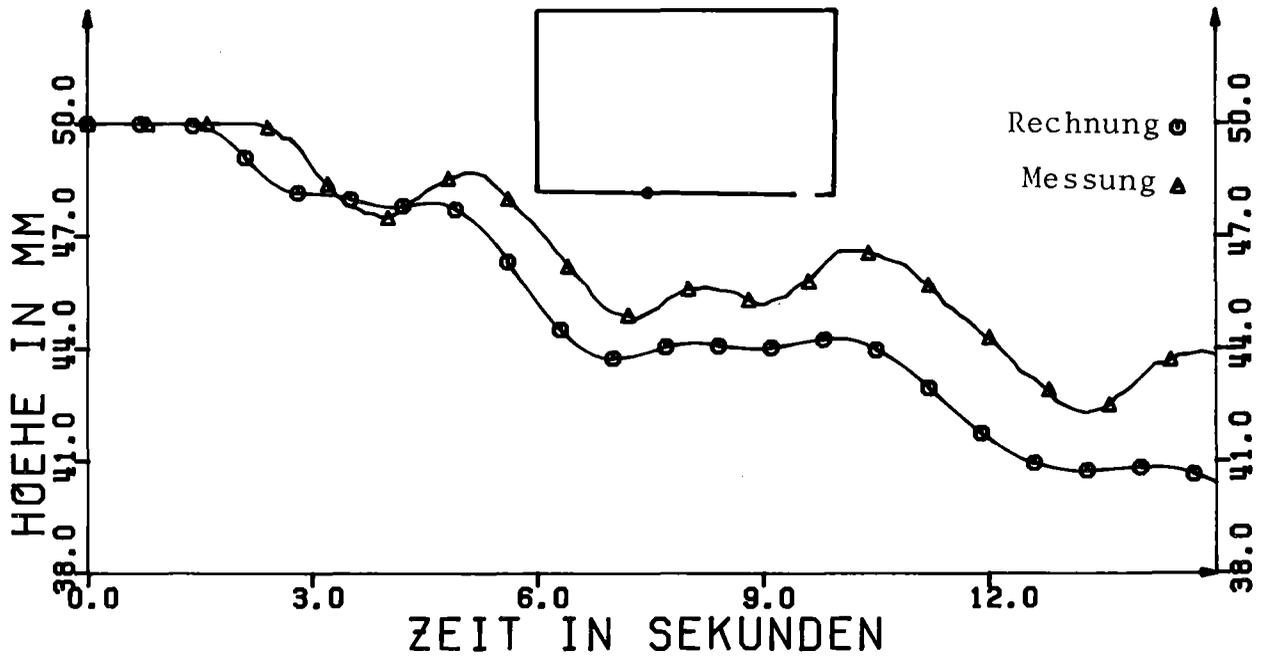


Abb. 61: Punkt 3, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\sigma, \phi = 1$, $C = 1$, $K = 2$, $N_0 = 5$, $\Delta t = 0.025$ sec

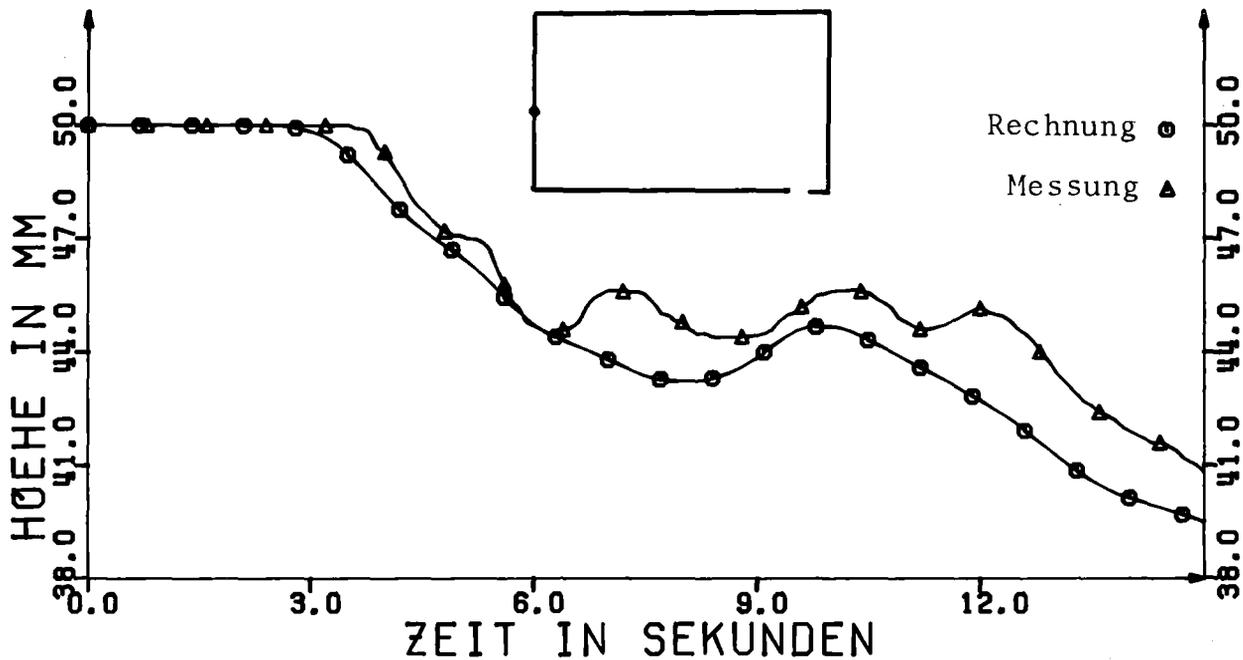


Abb. 62: Punkt 4, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 1, C = 1, k = 2, N_0 = 5, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

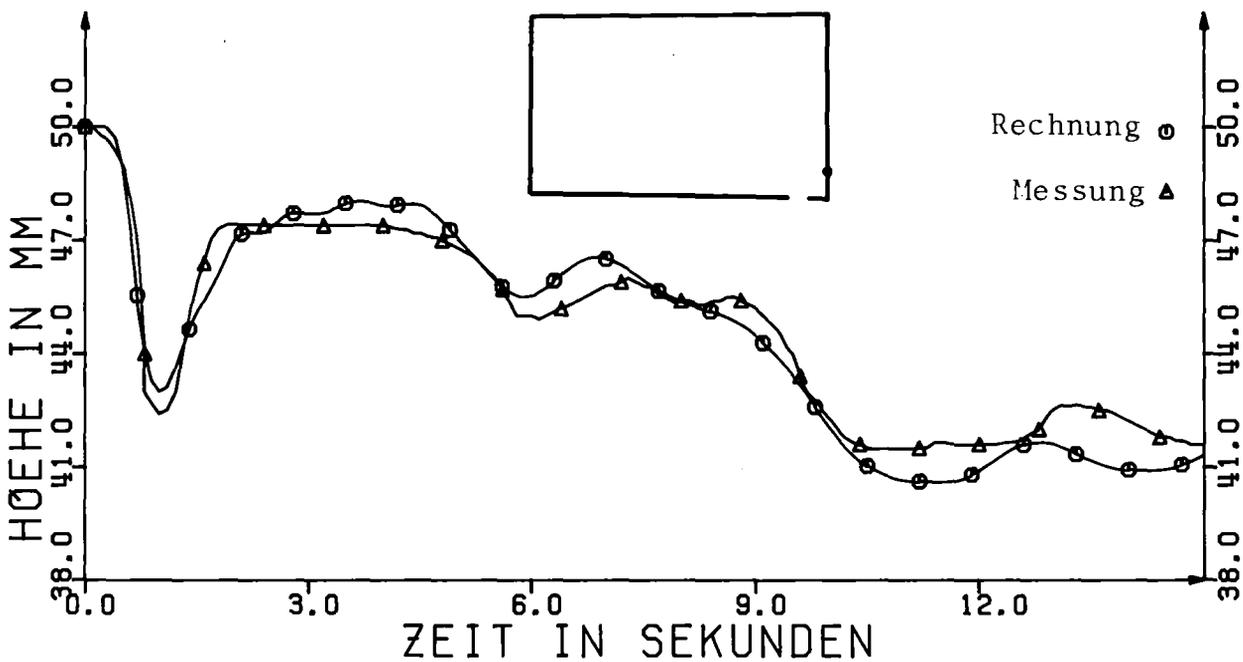


Abb. 63: Punkt 1, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 0.5, C = 1, k = 2, N_0 = 5, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

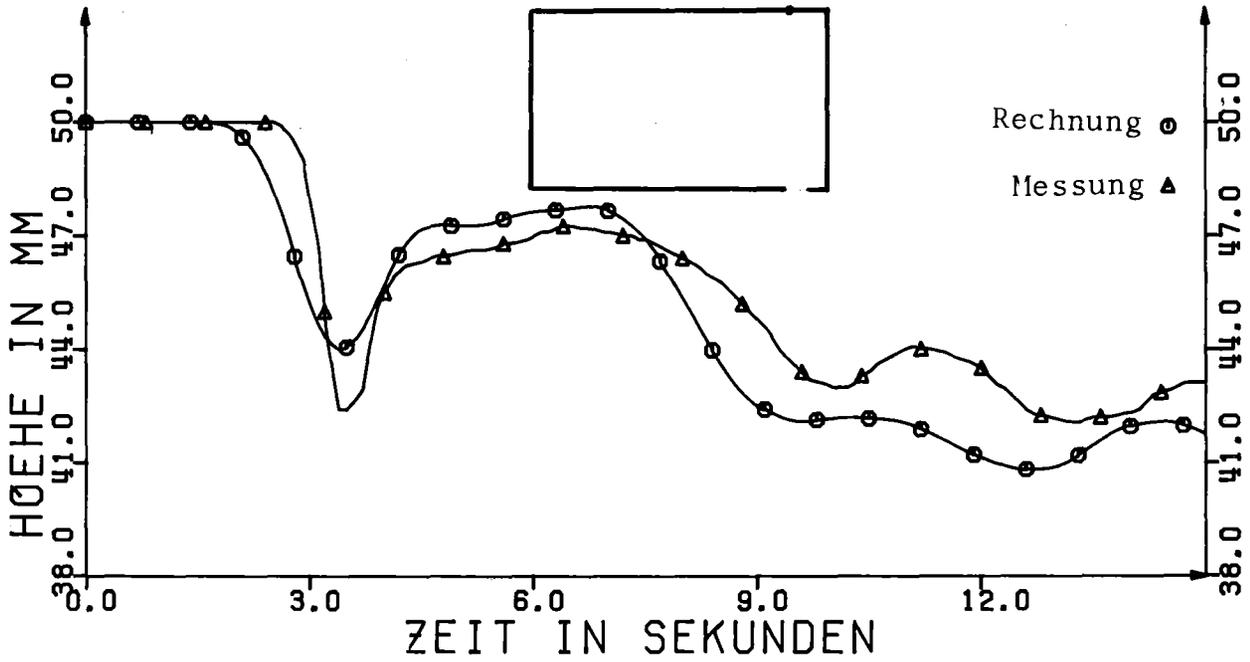


Abb. 64: Punkt 2. Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 0.5, C = 1, k = 2, N_0 = 5, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

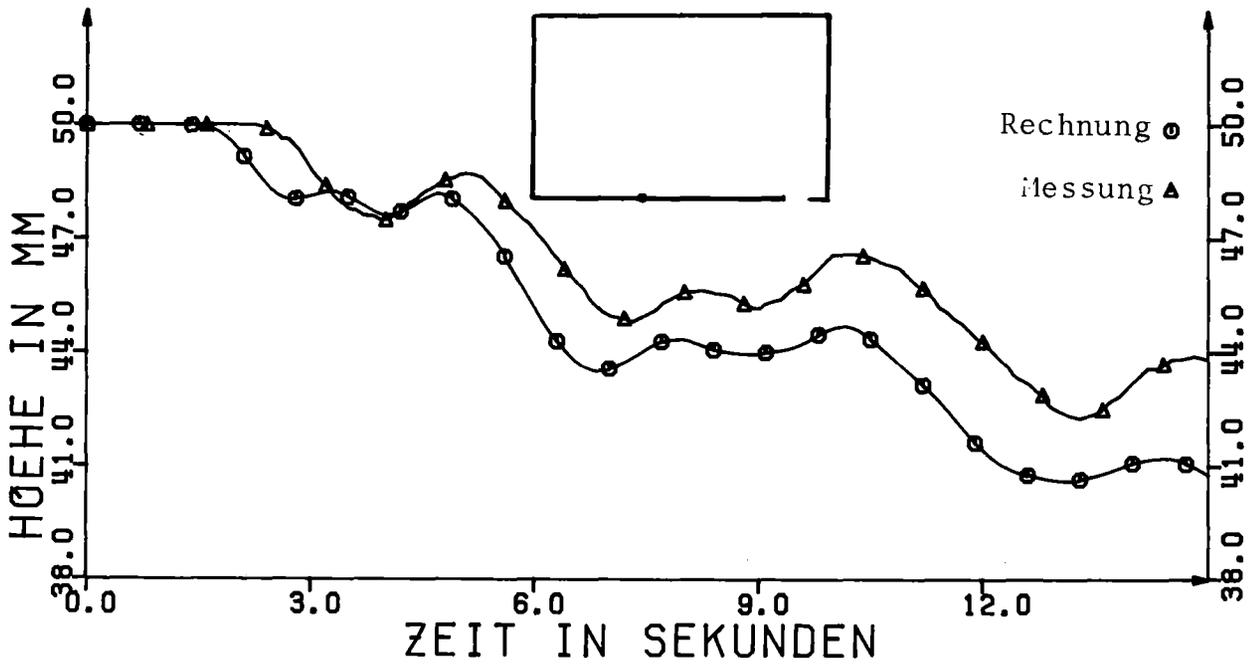


Abb. 65: Punkt 3, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 0.5, C = 1, k = 2, N_0 = 5, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

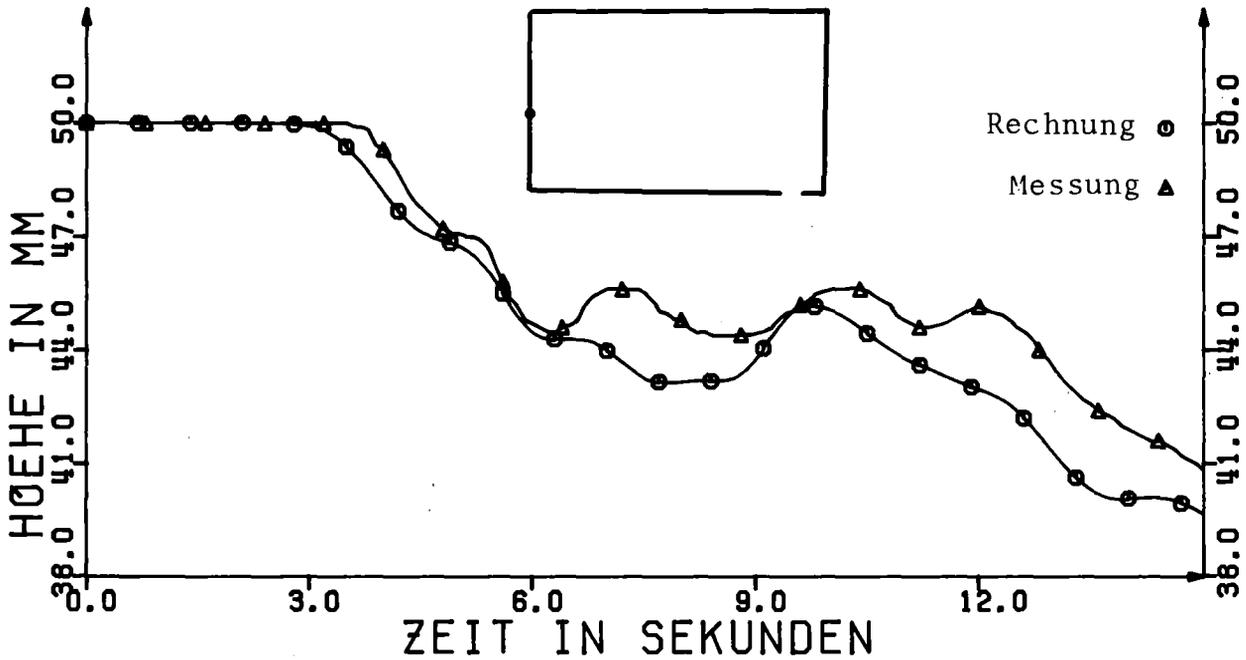


Abb. 66: Punkt 4, Rechnung mit zentrierten Differenzen,
 $\theta, \phi = 0.5, C = 1, k = 2, N_0 = 5, \Delta t = 0.025 \text{ sec}$

Zum Schluß sollen noch die Rechenzeiten der einzelnen Verfahren miteinander verglichen werden (Tab. 4). Die angegebenen Zeiten wurden auf einer IBM 3033 erzielt, sie beziehen sich auf 600 Integrationsschritte ($T_{\text{max}} = 15 \text{ sec}$).

Verfahren	Zeit 1) Explizite Phase 2) Iterationsphase [sec] 3) Künstl. Viskosität	Durchschnittl: Anzahl von Iterationen
Aufwind-Differenzen $\theta, \phi = 1, C = 0$	$\left. \begin{array}{l} 1) 102 \\ 2) 160 \\ 3) 0 \end{array} \right\} 262$	1,86
Aufwind-Differenzen $\theta, \phi = 0.5, C = 0$	$\left. \begin{array}{l} 1) 102 \\ 2) 149 \\ 3) 0 \end{array} \right\} 251$	1,68
Zentrierte Differenzen $\theta, \phi = 1, C=1, K=2, N_o=5$	$\left. \begin{array}{l} 1) 81 \\ 2) 646 \\ 3) 38 \end{array} \right\} 765$	10,5
Zentrierte Differenzen $\theta, \phi = 1, C=1, K=2, N_o=1$	$\left. \begin{array}{l} 1) 81 \\ 2) 567 \\ 3) 38 \end{array} \right\} 686$	9,13
Zentrierte Differenzen $\theta, \phi = 0.5, C=1, K=2, N_o=5$	$\left. \begin{array}{l} 1) 81 \\ 2) 398 \\ 3) 38 \end{array} \right\} 517$	6,12
Zentrierte Differenzen $\theta, \phi = 0.5, C=1, K=2, N_o=1$	$\left. \begin{array}{l} 1) 81 \\ 2) 357 \\ 3) 38 \end{array} \right\} 476$	5,39

Tabelle 4: Rechenzeiten

Man erkennt, daß die Verfahren mit Aufwind-Differenzen erheblich geringere Rechenzeiten benötigen, der Aufwand in der Iterationsphase ist um einen Faktor 2-3 kleiner. Bei zentrierten Differenzen erkennt man einen Einfluß des Mittelungsparameters N_0 auf die Rechenzeit, kleineres N_0 bewirkt eine geringere Iterationszahl. Insgesamt erweist sich bei der Rechenzeit das halbimplizite Aufwind-Schema als optimal. Es ist bemerkenswert, daß das Leapfrogverfahren mit Mittelung bei jedem Zeitschritt ($N_0 = 1$) von allen Verfahren mit zentrierten Differenzen relativ am besten abgeschnitten hat. Eine weitergehende theoretische Untersuchung dieser Variante ist vielleicht lohnend.

5.3 Inkompressibles Fluid: Überströmung einer Stufe

Auch hier erwies sich die Wahl der richtigen Randbedingungen als nicht ganz einfach. Auf der Einflußseite wurde ein konstantes Strömungsprofil aufgeprägt. Um in der Iterationsphase zur Konvergenz zu kommen war es notwendig, die Einströmgeschwindigkeit mit einer Rampe hochzufahren. Als weitere Randbedingung wurde in den Randmaschen auf der Ausströmseite der Druck konstant gehalten. Die übrigen Ränder wurden als fest und reibungsfrei betrachtet. Zum besseren Vergleich der Ergebnisse sind die physikalischen Größen dimensionslos gemacht worden. Dazu wurde als charakteristische Länge die Höhe L der Stufe verwendet, als charakteristische Geschwindigkeit die Einströmgeschwindigkeit U_{aussen} .

Das Gitternetz bestand aus quadratischen Maschen der Länge 0.2. Es wurden zwei verschiedene Zeitdiskretisierungen untersucht, entsprechend Courant-Zahlen von $\beta = 0.1$ bzw. $\beta = 0.3$. Da nur kleine Zähigkeiten untersucht wurden, bestimmte die Courant-Zahl praktisch die Zeitschrittweiten.

Die Annahme reibungsfreier Wände ist physikalisch sicherlich falsch und kann auch Auswirkungen auf die numerischen Ergebnisse haben. So werden wahrscheinlich die Geschwindigkeiten im Wirbel zu hoch berechnet. Hier ging es aber im wesentlichen um den Vergleich ein-

zelner Verfahren. Dabei scheint ein systematischer Fehler, der in allen Fällen gleich groß ist, akzeptabel zu sein.

Die halbimpliziten Verfahren erwiesen sich bei diesem Testproblem als nicht geeignet. Es ist nicht sinnvoll, die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

halbimplizit zu behandeln, da diese Gleichung eine Nebenbedingung ist, der das Strömungsfeld zu jedem Zeitpunkt genügen muß. Eine halbimplizite Behandlung der Druckterme in den Impulsgleichungen hat sich praktisch als schlecht erwiesen, der Aufwand in der iterativen Phase stieg stark an, ohne daß sich andere Strömungsformen ergaben.

Abb. 67 bis Abb. 70 zeigen Rechnungen mit einer Reynoldszahl $Re = 50$ und Courant-Zahl $\beta = 0.1$. Rechnungen mit $\beta = 0.3$ ergaben praktisch dieselben Strömungsbilder, darum wurden diese hier nicht dokumentiert. Die Strömungsfelder wurden zur Zeit $T = 10$ aufgenommen (dimensionslos mit der charakteristischen Zeit L/U_0). Für Abb. 67 wurde das Aufwind Schema verwendet, für Abb 68 - Abb 70 Leapfrog-Schemata mit $N_0 = 30,5$ und 1 . Bei den Leapfrog-Verfahren mit unterschiedlichen N_0 -Parametern erkennt man nur geringe Unterschiede. Im Vergleich mit dem Aufwind-Schema fällt auf, daß bei diesem Modell der Stau-punkt etwas weiter stromaufwärts ist.

Interessant ist der Vergleich der Rechenzeiten in Tabelle 5. Zu beachten ist hier, daß die Maximalzahl von Iterationen auf 100 beschränkt war, dieser Wert wurde bei allen Verfahren einige Male überschritten.

Es fällt auf, daß anders als in § 5.2 die Verfahren mit zentrierten Differenzen bei $\beta = 0.1$ wesentlich besser liegen als das Aufwind-Verfahren. Die Abhängigkeit der Rechenzeit vom Parameter N_0 entspricht dagegen den Erfahrungen des letzten Abschnittes. Bei höherer Courant-Zahl sind die Unterschiede zwischen Aufwind- und Leapfrog-Verfahren geringer.

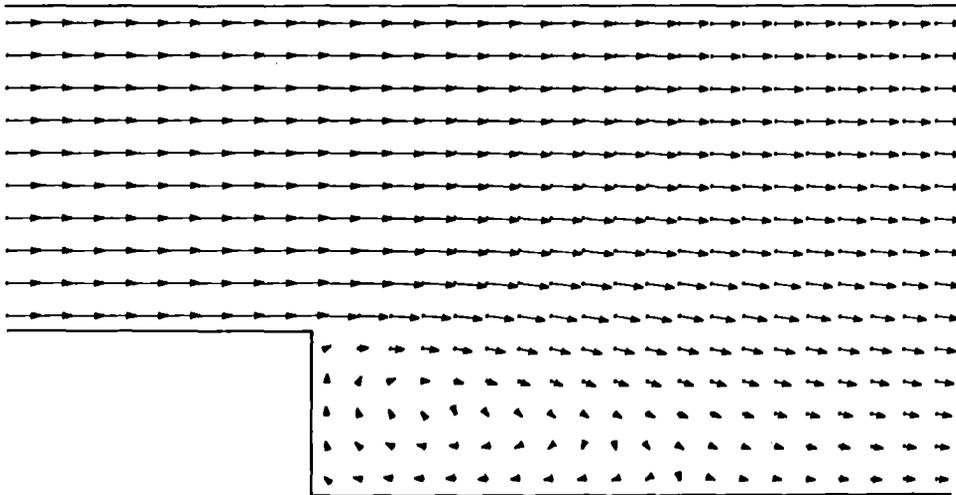


Abb. 67: Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $Re = 50$

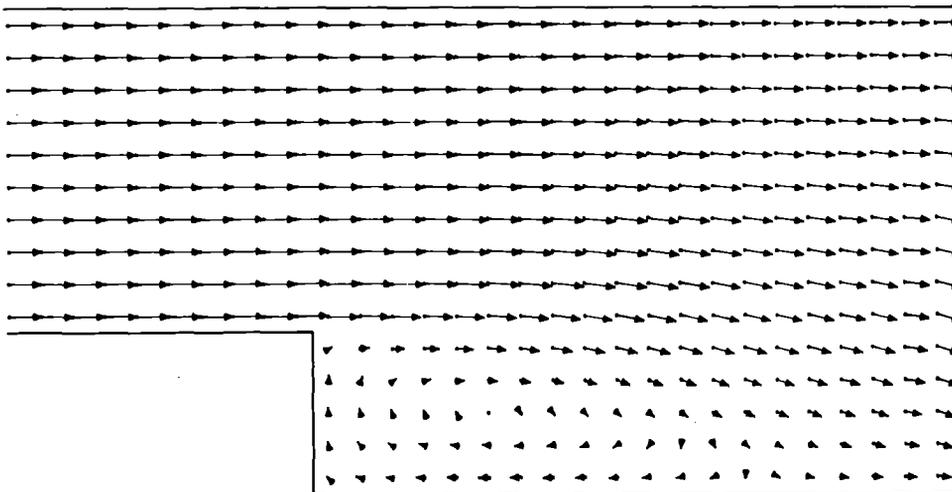


Abb. 68: Rechnung mit zentrierten Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $N_0 = 30$,
 $Re = 50$

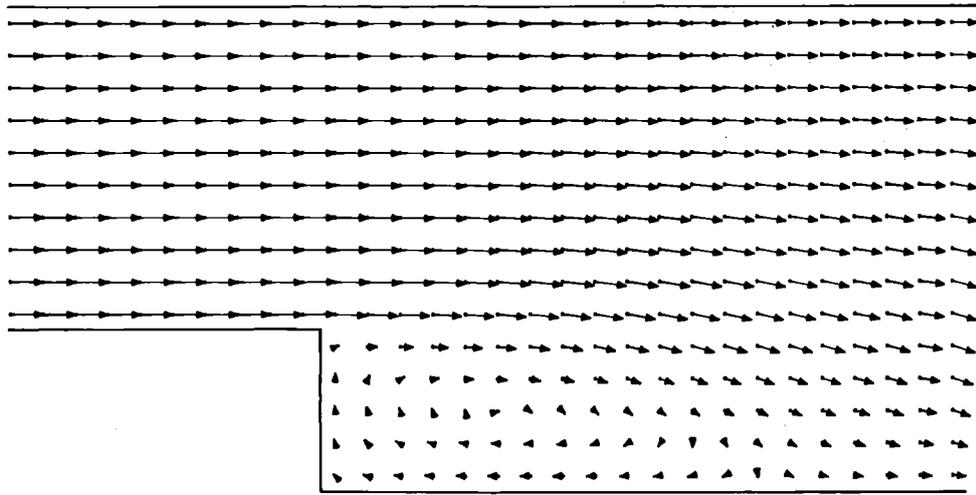


Abb. 69: Rechnung mit zentrierten Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $N_O = 5$,
Re = 50

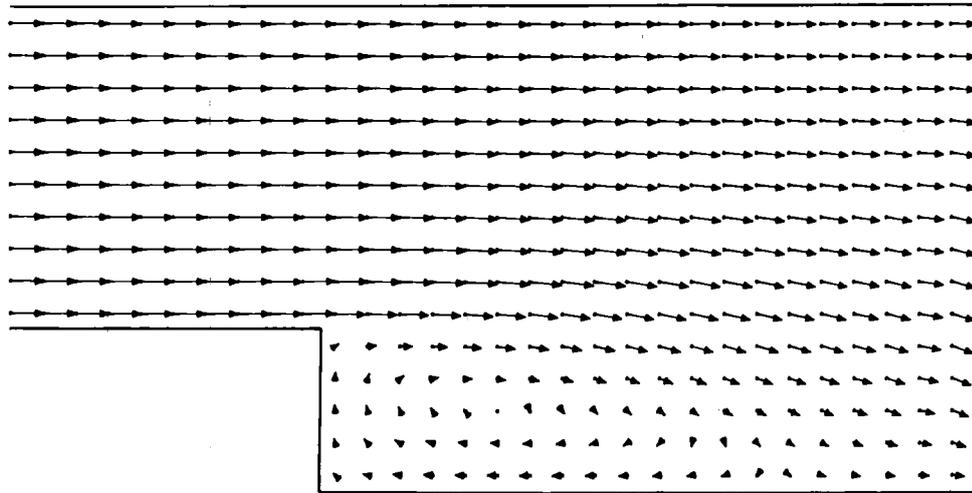


Abb. 70: Rechnung mit zentrierten Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $N_O = 1$,
Re = 50

SCHEMA	$\beta = 0.1$		$\beta = 0.3$	
	Anzahl von Iterationen	Zeit: (1)Explizit (2)Iteration /sec/	Anzahl von Iterationen	Zeit: (1)Explizit (2)Iteration /sec/
Aufwind-Differenzen	21.9	(1)58 (2)180	14.9	(1)20
Zentrierte Differenzen $N_o = 30$	17.6	(1)58 (2)146	Divergenz	
Zentrierte Differenzen $N_o = 5$	11.3	(1)58 (2)96	22.9	(1)20 (2)62
Zentrierte Differenzen $N_o = 1$	9.6	(1)58 (2)83	12.6	(1)20 (2)36

Tabelle 5: Re=50, Rechenzeiten

SCHEMA	$\beta = 0.1$		$\beta = 0.3$	
	Anzahl von Iterationen	Zeit: (1)Explizit (2)Iteration /sec/	Anzahl von Iterationen	Zeit: (1)Explizit (2)Iteration /sec/
Aufwind-Differenzen	23.9	(1)58 (2)	25.7	(1)19 (2)68
Zentrierte Differenzen $N_o = 5$	11.9	(1)58 (2)101	24.4	(1)19 (2)65

Tabelle 6: Re=250, Rechenzeiten

Etwas anders sehen die Verhältnisse bei größerer Reynoldszahl aus. Abb.71 und Abb.72 zeigen im Vergleich Aufwind- und Leapfrog Verfahren (mit $N_o = 5$). Die Unterschiede im Strömungsbild sind jetzt größer, vor allem ist die Rückströmung am Fuß der Stufe beim Leapfrog-Schema stärker. Die Rechenzeiten sind ähnlich wie bei Re=50(siehe Tabelle 6).

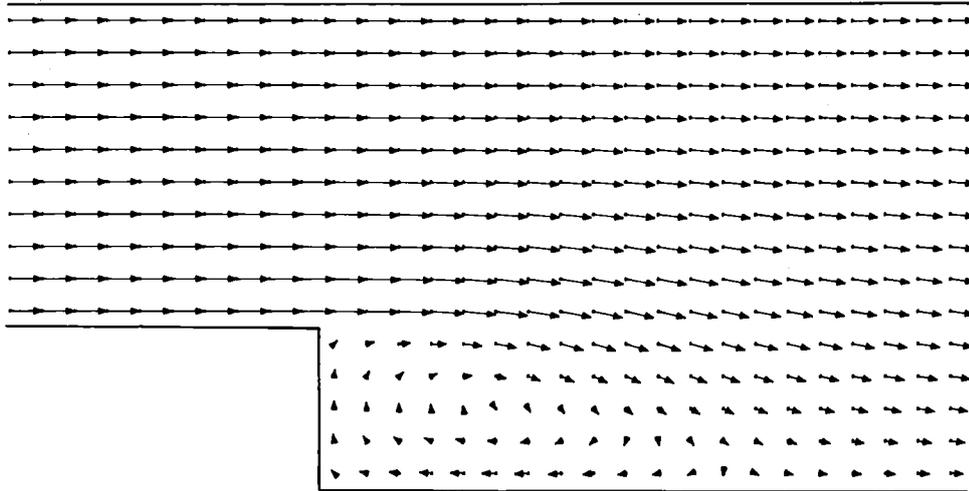


Abb. 71: Rechnung mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $Re = 250$

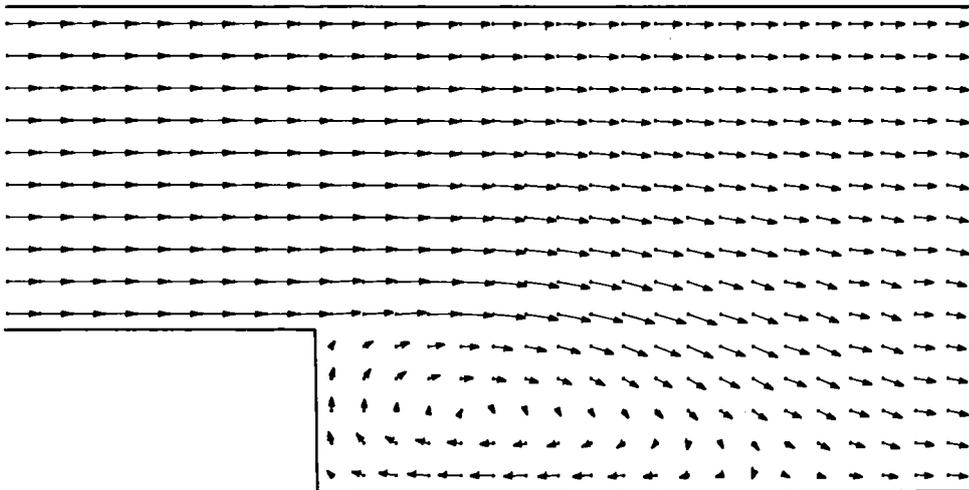


Abb.: 72: Rechnung mit zentrierten Differenzen, $\theta, \phi = 1$, $C = 0$, $N_o = 5$,
 $Re = 250$

6. Schlußfolgerungen

Die Ergebnisse der Rechnungen an den drei Testproblemen lassen sich zu 4 Punkten zusammenfassen:

(a) Es ist bei der Berechnung kompressibler Strömungen vorteilhaft, die Kontinuitätsgleichung und die Druckterme in der Impulsgleichung halb- statt vollimplizit zu behandeln. Man erhält dann deutliche Verbesserungen in Bezug auf Genauigkeit und Rechenaufwand. Das Stabilitätsverhalten ist fast gleich, nur bei Verdichtungsstößen ist Vorsicht geboten. Der einzige Nachteil der halbimpliziten Technik ist der doppelte Speicherplatzbedarf.

(b) Die Dämpfung durch Aufwind-Differenzen spielte bei den Problemen aus § 5.1 und § 5.2 nur eine geringe Rolle. Die Ergebnisse zeigen hier, daß die Verwendung des Leapfrog-Verfahrens sehr problematisch ist. Man hat i.a. einen erheblichen Stabilitätsverlust zu erwarten, so daß eine künstliche Dämpfung numerischer Oszillationen erforderlich ist. Dies beeinflußt die Genauigkeit des Verfahrens und wirkt sich negativ auf die Rechenzeit aus.

Etwas anders waren die Ergebnisse bei der Rezirkulationsströmung gemäß § 5.3. Hier machte sich die Dämpfung durch Aufwind-Differenzen stärker bemerkbar, da die Strömungsrichtung in weiten Teilen quer zu den Maschengrenzen geht. Das Leapfrog-Verfahren erforderte in diesem Fall weniger Rechenzeit, die Ergebnisse zeigten weniger numerische Dämpfung. In allen Fällen traten in der Iterationsphase allerdings Konvergenzschwierigkeiten auf.

Bei solchen Problemen muß man also von der "Donor-cell-interpolation" abraten. Es wäre zu untersuchen, ob es nicht eine Alternative zu voll zentrierten Differenzen gibt, die nicht die oben beschriebenen Stabilitätsprobleme hat.

(c) Bei Problemen mit Verdichtungsstößen versagen die nicht-dämpfenden Verfahren, wenn die numerischen Oszillationen im Stoßbereich nicht künstlich gedämpft werden. Wird diese künstliche Dämpfung

nur im Stoßbereich "eingeschaltet", so werden die glatten Teile der Lösung davon nur unwesentlich beeinflusst. Zur Darstellung des Schocks selber sind alle hier vorgestellten Verfahren ungeeignet.

- (d) Enttäuschend sind die Ergebnisse bei einem Problem mit hohen konvektiven Geschwindigkeiten (§ 5.1). Alle hier untersuchten Verfahren zeigen in diesem Fall starke numerische Dämpfung. In diesem Fall sollte man ganz auf semi-implizite Verfahren verzichten und auf die (hier nicht untersuchten) expliziten Verfahren zurückgreifen.

L i t e r a t u r

- /1/ F.H.Harlow, A.A.Amsden:
Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow,
J.Comp.Phys.3(1968),80-93
- /2/ F.H.Harlow, A.A.Amsden:
A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All
Flow Speeds, J.Comp.Phys.8(1971),197-213
- /3/ F. Kedziur:
Untersuchung einer Zweiphasen-Düsenströmung und Über-
prüfung verschiedener Rechenprogramme anhand experimen-
teller Ergebnisse, KfK 2946(1980)
- /4/ F.H. Harlow, A.A.Amsden:
Fluid Dynamics, LA 4700, June 1971
- /5/ D. P. Riabouchinsky:
Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide
compressible,Comp.Rend. de l'Academie des Sciences
195 (1932) 22, 998
- /6/ Gary A. Sod:
A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems
of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, J.Comp.Phys.
27(1978), 1-31
- /7/ K. Srinivas, J. Guraraja, K. Krishna Prasad:
An Assessment of the Quality of Selected Finite Difference
Schemes for Time Dependent Compressible Flows, J.Comp.
Phys.20(1976) 140-159
- /8/ J. Zierep:
Vorlesungen über theoretische Gasdynamik,
G. Braun Karlsruhe (1963)

- /9/ K. Wieghardt:
Theoretische Strömungslehre, Teubner (1974)
- /10/ F. Kedziur, N. Moussiopoulos, U. Schumann, K. Stölting:
PWR-Depressurization and its Hydraulic Analogy, Nucl.
Eng. Design 47 (1978),25-34
- /11/ A.Amsden, C. Hirt:
YAQUI, An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program
for Fluid Flow at All Speeds, LA 5100 (1973)
- /12/ W. Cherdron, F. Durst, J.H. Whitelaw:
Asymmetric Flows and Instabilities in Symmetric Ducts
with Sudden Expansions, J. Fluid Mech.(1978) Vol.84,part.1, 13-31
- /13/ E.O. Macagno, T.K. Hung:
Computational and Experimental Study of a Captive
Annular Eddy, J. Fluid. Mech. (1967) vol 28, 43-67
- /14/ P.J. Roache, T.J. Mueller:
Numerical Solutions of Laminar Separated Flow,
AIAA Journal Vol.8(1970), 530-538
- /15/ T.J.R. Hughes, W.K. Liu, A. Brooks:
Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow
by the Penalty Function Formulation, J.Comp.Phys.30
(1979), 1-60
- /16/ I.P. Castro:
The Numerical Prediction of Recirculating Flows,
in: Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow,
Proc.First Int. Conf., Ed.C. Taylor, K. Morgan,
C.A. Brebbia, Pentech Press Plymouth (1978), 329-339

- /17/ H.Ha Minh, P. Chassaing:
Some Numerical Predictions of Incompressible Turbulent Flows, in: Numerical Methods in Laminar und Turbulent Flow, Proc First Int. Conf., Ed.C. Taylor, K. Morgan, C.A. Brebbia, Pentech Press Plymouth (1978), 287-299
- /18/ A.J. Oliver:
A Finite Difference Solution for Turbulent Flow and Heat Transfer over a Backward Facing Step in an Annular Duct, in: Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Proc First Int. Conf., Ed.C. Taylor, K. Morgan C.A. Brebbia, Pentech Press Plymouth (1978), 467-478
- /19/ G. Enderle:
FLUST-2D- Ein Programm zur Berechnung der zweidimensionalen Strömung eines kompressiblen Mediums in aneinandergelinkelten Rechteckbereichen, KfK 2679 (1979)
- /20/ C.W. Hirt, B.D. Nichols, N.C. Romero:
SOLA - A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows, LA-5852 (1975)
- /21/ U. Schumann:
Effektive Berechnung dreidimensionaler Fluid-Struktur-Wechselwirkung beim Kühlmittelverluststörfall eines Druckwasserreaktors - FLUX, KfK 2645 (1979)
- /22/ A. Lapidus:
A Detached Shock Calculation by Second-Order Differences, J.Comp.Phys.2 (1967), 154-177
- /23/ U. Schumann:
Linear Stability of Finite Difference Equations for Three-Dimensional Flow-Problems, J.Comp.Phys.18 (1975)
- /24/ R.D. Richtmyer, K.W. Morton:
Difference Methods for Initial-Value Problems, Wiley & Sons (1967)

Anhang: Berechnung eines kritischen Massenstromes

In § 5.2 ergaben sich Probleme mit der Randbedingung an der Ausflußöffnung. Bei Vorgabe der Randbedingung $h = 0$ in der fiktiven Randmasche (Abb. A1) trat im Ausströmbereich Überschallgeschwindigkeit auf, der berechnete Massenstrom war viel zu hoch (Abb. A3). Es wurde nun die Vermutung aufgestellt, daß dies an der fehlenden Diskretisierung des Außenbereichs liegt.

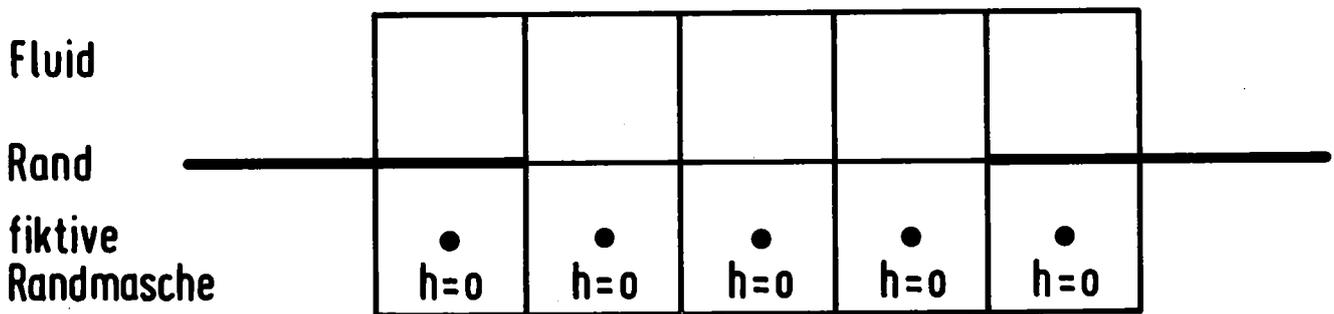


Abb. A1: Diskretisierung der Ausströmöffnung ohne Außenbereich

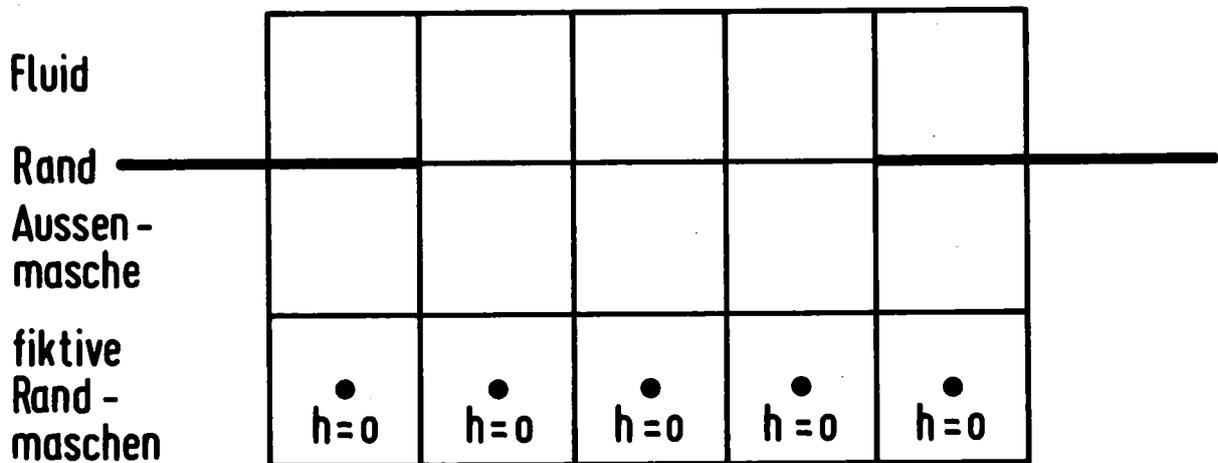


Abb. A2: Diskretisierung der Ausströmöffnung mit Außenbereich

Zur Überprüfung dieser Hypothese wurde eine Serie von Rechnungen gemacht (mit Aufwind-Differenzen, $\theta, \phi = 0.5$, $C = 0$, $\Delta t = 0.025$ sec), bei der der Außenbereich mit einer Masche mitberücksichtigt wurde (Abb. A2). In der daran angrenzenden Masche wurde die Höhe h auf Null gesetzt. Wie Abb A4 zeigt, steht der berechnete Massenstrom jetzt in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Experiment.

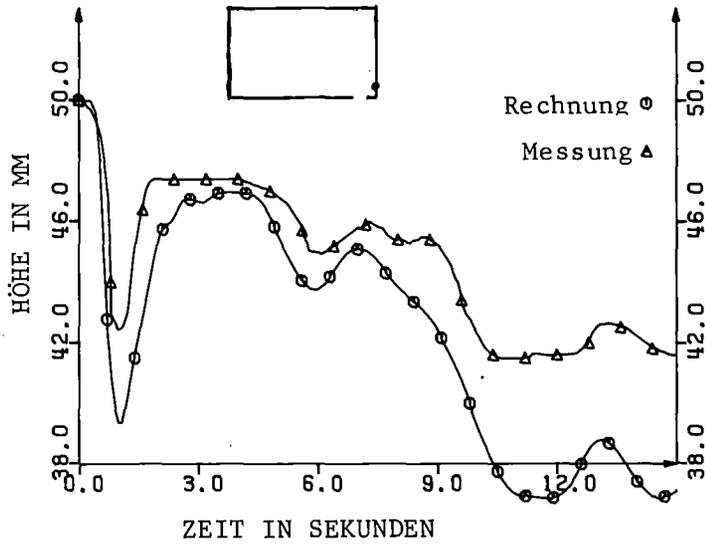


Abb. A3: Punkt 1, ohne Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = 0$

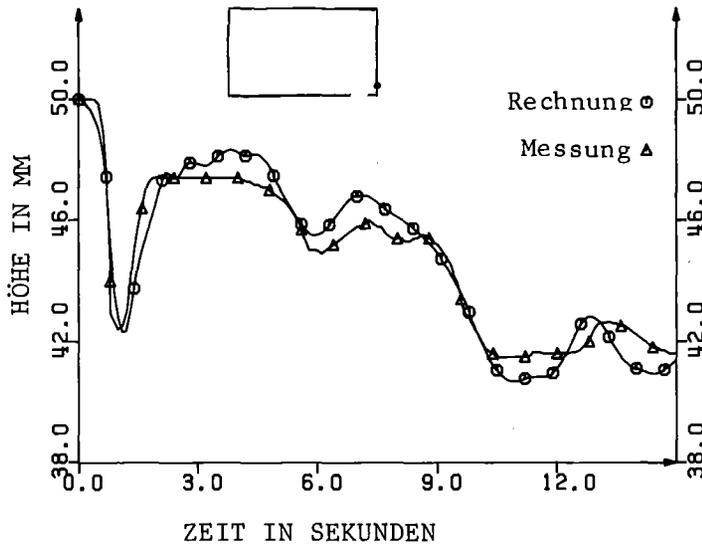


Abb. A4: Punkt 1, mit Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = 0$

Nach der Theorie ist der Massenstrom an einer kritischen Stelle unabhängig vom Außendruck, wenn dieser nur kleiner als der kritische Druck ist. Dies bestätigt sich in der Rechnung zumindest noch für einen Außendruck, der halb so hoch wie der kritische Druck ist (Abb. A5). Ist der Außendruck gleich dem kritischen Druck (Abb. A6), so liegt der Massenstrom etwas zu hoch.

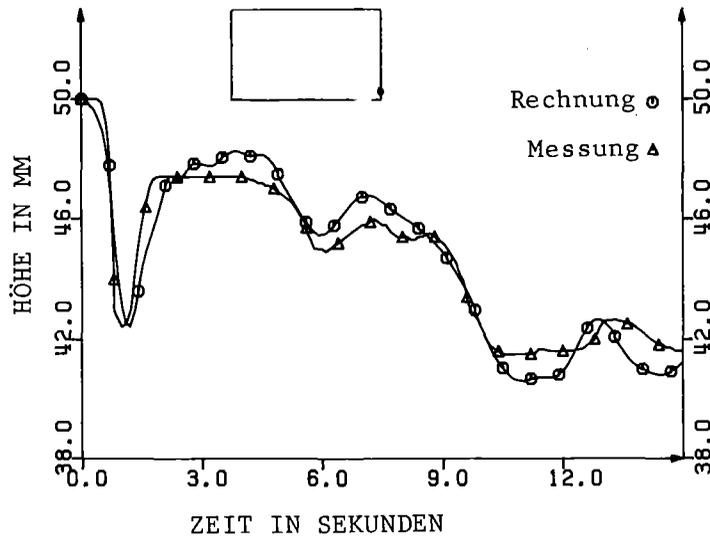


Abb. A5: Punkt 1, mit Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = 1/2 h_{\text{krit}}$

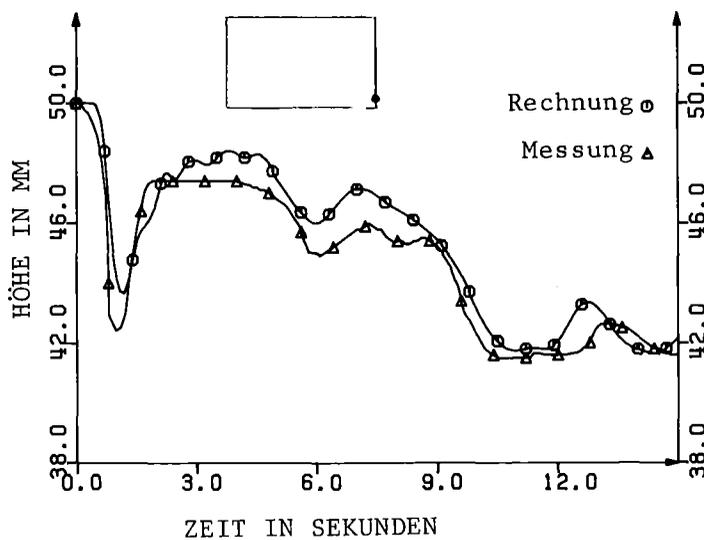


Abb. A6: Punkt 1, mit Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = h_{\text{krit}}$

Abb. A7 - Abb. A10 zeigen noch einmal für einen anderen Meßpunkt im Becken die Berechnung ohne Außenbereich (Abb. A7), mit Außenbereich und $h_{\text{aussen}} = 0$ (Abb. A8), $h_{\text{aussen}} = 1/2 h_{\text{krit}}$ (Abb. A9) und $h_{\text{aussen}} = h_{\text{krit}}$. Das Ergebnis ist im wesentlichen dasselbe, nur daß sich bei diesem, von der Ausströmöffnung weiter entfernten Punkt der systematische Fehler durch die Vernachlässigung der Bodenreibung stärker bemerkbar macht.

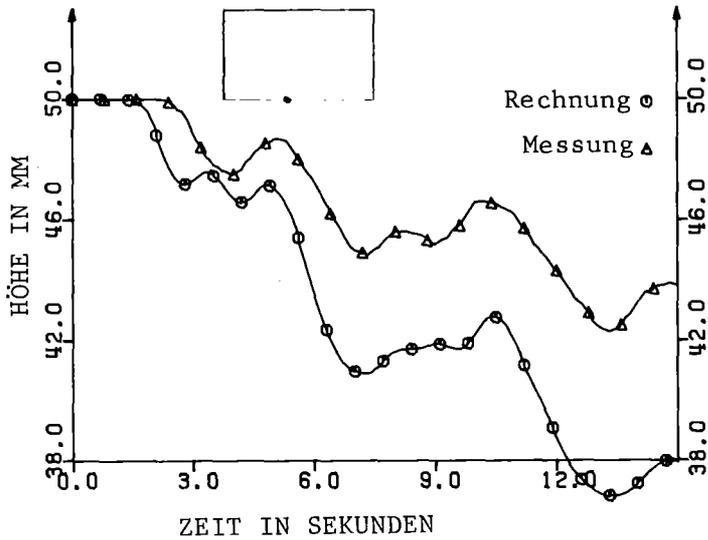


Abb. A7: Punkt 3, ohne Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = 0$

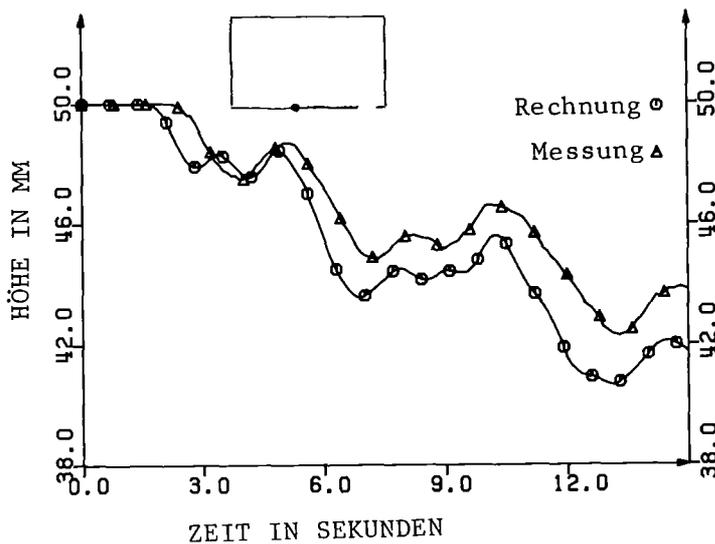


Abb. A8: Punkt 3, mit Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = 0$

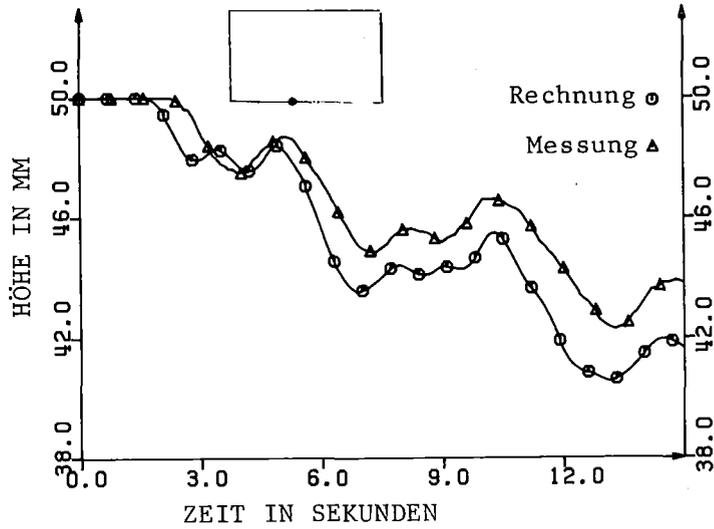


Abb. A9: Punkt 3, mit Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = 1/2 h_{\text{krit}}$

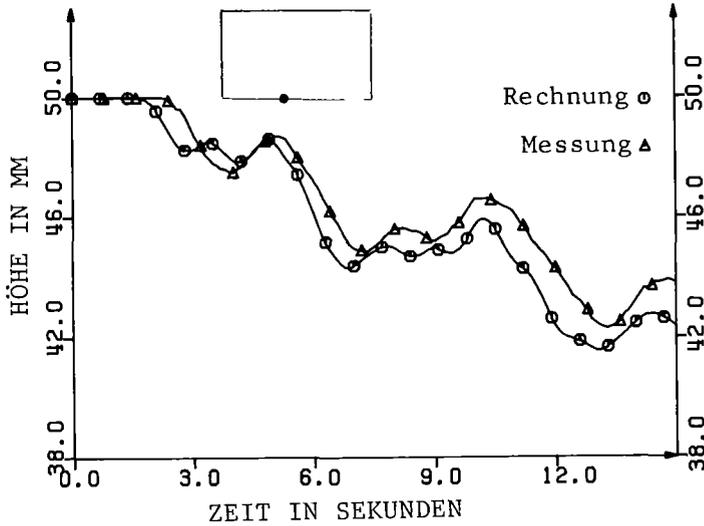


Abb. A10: Punkt 3, mit Außenbereich, $h_{\text{aussen}} = h_{\text{krit}}$

Die Schlußfolgerung aus dieser Untersuchung ist, daß ein numerisches Verfahren nur dann einen kritischen Massenstrom berechnen kann, wenn sowohl der Bereich stromaufwärts als auch der Bereich stromabwärts der kritischen Stelle diskretisiert werden.