



KfK 3176
März 1982

Elastizitätstheorie zur Brennstabmechanik von Reaktor- Brennstäben bei schnellen Brennstab-Leistungsänderungen

K. Keller
Institut für Material- und Festkörperforschung
Projekt Schneller Brüter

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Material- und Festkörperforschung
Projekt Schneller Brüter

KfK 3176

Elastizitätstheorie zur Brennstabmechanik von Reaktor-Brennstäben
bei schnellen Brennstab-Leistungsänderungen

K. Keller

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH., Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Z u s a m m e n f a s s u n g :

Elastizitätstheorie zur Brennstabmechanik von Reaktor-Brennstäben bei
schnellen Brennstab-Leistungsänderungen

In dem vorliegenden Bericht wurden aus dem Hookeschen Gesetz mit einem verhältnismäßig umfangreichen, einmaligen mathematischen Aufwand einfache, übersichtliche Gebrauchsformeln entwickelt, die es gestatten, die elastischen Spannungen eines Reaktorbrennstabes als Folge einer schnellen Brennstableistungsänderung, insbesondere dann, wenn auftretende Schubspannungen nicht mehr zu vernachlässigen sind, mühelos zu berechnen.

A b s t r a c t :

Theory of elasticity of nuclear fuel element mechanics, caused by rapid
change of the reactor-power

In this report simple formulas are developed from the Hooke's law by an extensive expense of mathematics. They allow to calculate, in a convenient manner, the stresses in a nuclear reactor fuel pin, caused by a rapid change of the reactor power.

I n h a l t	Seite
1. Einleitung	1
2. Modell des Betriebszustandes eines Reaktor- Brennstabes	2
3. Allgemeingültige Spannungs-Dehnungsbeziehungen	5
4. Das für den Brennelementstopfen gültige Belastungssystem	7
5. Das Belastungssystem für die Kontaktzone Brennstoff/Hülle	23
5.1 Das mechanische Belastungssystem	24
5.2 Das thermische Belastungssystem	24
a) Das schubspannungsfreie System	25
b) Belastungen durch die Schubspannung als Folge der axialen Wärmedehnung	42
6. Das Belastungssystem für die kontaktfreie Axialzone	45
7. Numerische Rechnungen	48
8. Diskussion der numerischen Ergebnisse	53
Literatur	54

1. Einleitung

Die Theorie der Reaktor-Brennstäbe hat es sich zur Aufgabe gemacht, die "Lebensgeschichte" eines Reaktor-Brennstabes während seines Betriebes unter den verschiedensten Betriebsarten theoretisch nachzuvollziehen. Derartige theoretische "Brennstabmodelle" wurden an verschiedenen Institutionen entwickelt. Die Entwicklungen endeten alle in mehr oder weniger umfangreichen digitalen Rechenprogrammen, mit denen das Verhalten eines Brennstabes während seines Betriebes näherungsweise berechnet werden kann.

Das wichtigste Teilgebiet und somit die Grundlage der Physik eines Reaktor-Brennstabes ist die Elastizitätstheorie. Neben der durch sie gegebenen Kenntnis über die Belastbarkeit eines Brennelementes sind noch andere physikalische Vorgänge - wie z.B. das Brennstoff- und Hüllkriechen - Funktionen der elastischen Spannungen. Ihr ist daher bei der Entwicklung einer Brennstabtheorie besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Den verschiedenen Rechenprogrammen ist ohne Ausnahme bezüglich der angewandten Elastizitätstheorie ein nicht unerheblicher Mangel gemeinsam. Bei ihrer Entwicklung wurde zur Vereinfachung des Spannungs-Dehnungsproblems die Näherung der "Ebenen Dehnung" angewandt. Mit dieser Näherung wird vorausgesetzt, daß die Schnittebenen des belasteten Materials auch nach der Verformung noch (näherungsweise) eben sind. Auf einen Reaktor-Brennstab angewandt, beschreibt diese Näherung die Spannungs-Dehnungsverhältnisse in demselben ziemlich gut, solange sich die Brennstoffsäule noch nicht an die Hülle angelegt hat. In diesem Fall kann bei einer Leistungsänderung zwischen Brennstoffsäule und Hülle ungehindert eine Relativbewegung stattfinden. Damit treten in diesem Belastungssystem keine Schubspannungen auf. Sie liefert auch nach dem Anliegen des Brennstoffs an die Hülle noch brauchbare Ergebnisse, wenn die Stabileistung des Brennelements konstant bleibt oder wenn eine Leistungsänderung so langsam erfolgt, daß die zwischen Brennstoffsäule und Hülle auftretende Schubspannung infolge Materialkriechens abgebaut wird und demzufolge so klein bleibt, daß sie keinen nennenswerten Einfluß auf das System hat und damit vernachlässigt werden kann.

Nicht mehr angewandt werden kann die oben genannte Näherung, wenn der Brennstab nach dem Anliegen des Brennstoffs an die Hülle eine relativ steil ansteigende, z. B. rampenförmige Leistungserhöhung erfährt und dadurch die zwischen Brennstoffsäule und Hülle auftretende Schubspannung in die Größenordnung der anderen Spannungen kommt und somit nicht mehr vernachlässigbar

ist. Nur das Fehlen von Schubspannungen erlaubt die Anwendung der "Plane-Strain"-Näherung, wie sie noch genannt wird.

In den meisten Fällen, in denen man den Betriebszustand eines Reaktor-Brennelements rechnerisch erfassen will, reicht die obengenannte Näherung zur Elastizitätstheorie aus. Experimente und Erfahrungen an Kernkraftwerken haben jedoch gezeigt, daß es manchmal gut wäre, wenn man über den tatsächlichen (allgemeinen) Spannungszustand eines Brennelementes, welches schon einige Zeit im Betrieb ist und bei dem sich demzufolge die Brennstoffsäule infolge Brennstoffschwellens mindestens schon teilweise an die Hülle angelegt hat, insbesondere bei relativ steilen Leistungsanstiegen (z. B. rampenförmigen) besser Bescheid wüßte. Es soll daher hier versucht werden, die elastischen Spannungs-Dehnungsbeziehungen für einen Reaktor-Brennstab, so weit wie möglich mathematisch exakt zu entwickeln. Näherungen sollen erst dann vorgenommen werden, wenn eine exakte Weiterentwicklung nicht mehr möglich ist.

Ziel ist es, durch eine einmalige, vielleicht aufwendigere mathematische Rechenoperation möglichst einfache, übersichtliche Gebrauchsformeln zu entwickeln, aus denen der allgemeine mechanische Belastungszustand eines Reaktor-Brennstabes, insbesondere dann, wenn auftretende Schubspannungen nicht mehr zu vernachlässigen sind, leicht gewonnen werden kann.

Es handelt sich damit hier vornehmlich nicht um Anwendungsrechnungen, sondern um die Entwicklung von Grundlagen.

2. Modell des Betriebszustandes eines Reaktor-Brennstabes

Um ein Problem in Naturwissenschaft und Technik mathematisch behandeln zu können, ist es notwendig, zunächst von dem zu behandelnden Problem ein Modell zu entwickeln, auf welches die mathematischen Methoden angewandt werden können. Im wesentlichen handelt es sich bei der Entwicklung solcher Modelle um die Festlegung der Anfangs- und Randwerte des Problems sowie um die Vorgabe der physikalischen Änderungen eines oder einiger Parameter. Berechnet werden sollen dann die Auswirkungen dieser Parameteränderungen auf das den bestimmten Randwerten unterworfenen System.

In unserem Fall ist das zu betrachtende System ein unter mechanischen und thermischen Spannungen stehendes, mit konstanter Leistung betriebenes Reaktor-Brennelement. Die physikalische Änderung ist eine veränderliche (rasch anstei-

gende) Stableistung. Betrachtet werden sollen die Spannungsänderungen im Brennelement als Folge der Leistungsänderung.

Um Randwerte vorgeben zu können, mit welchen die allgemeinen Lösungen des Problems in die speziellen überführt werden, muß der Ausgangsbetriebszustand des Brennelements bekannt sein.

Bekanntlich durchläuft ein Brennelement während seiner Betriebszeit ein ganzes Spektrum von Betriebszuständen. Es ist daher unumgänglich, einen Betriebszustand zu definieren, bei welchem sich die Randwerte sowohl in ihren Größen als auch in ihren wirksamen Flächen nicht mit der Zeit verändern. Man ist daher von vornherein gezwungen, einen ganz speziellen herauszugreifen.

Ein mit Sicherheit eintretender Betriebszustand eines Brennelements, der eine möglichst genaue Kenntnis seines Spannungszustandes wünschenswert erscheinen läßt, ist folgender: Ein Brennstab mit etwa sinusförmiger axialer Leistungsverteilung wurde einige Zeit mit konstanter Leistung betrieben. Dadurch hat sich die Brennstoffsäule innerhalb der heißesten axialen Zone (um die Brennstabmitte) infolge Brennstoffschwellens an die Hülle angelegt und ist mit ihr (sehr wahrscheinlich) über eine bestimmte axiale Länge verklebt, während in den unterhalb und oberhalb dieser "verklebten" Zone befindlichen Brennstabzonen zwischen Brennstoffsäule und Hülle noch ein Rest-Gasspalt vorhanden ist. Erfährt das in diesem Betriebszustand befindliche Brennelement nun eine steil ansteigende (z.B. rampenförmige) Leistungserhöhung, so kann sich der oberhalb der "verklebten" Zone befindliche Brennstoffsäulenabschnitt thermisch frei ausdehnen und zwar sowohl in axialer als auch in radialer Richtung. Damit erfährt dieser Teil des Brennelements in diesem Fall keine wesentliche Belastungsänderung gegenüber dem stationären Betriebszustand. Er soll daher hier auch nicht betrachtet werden.

Der untere, hier betrachtete Brennelementabschnitt unterteilt sich von der neuerlichen Belastung her in zwei Teilabschnitte. Diese Abschnitte sind: Die untere axiale Zone, in der noch ein Rest-Gasspalt zwischen Brennstoffsäule und Hülle besteht, und die darüber befindliche axiale Zone, in der die Brennstoffsäule mit der Hülle fest verklebt ist. Erfährt die im unteren Abschnitt befindliche Brennstoffsäule eine Leistungserhöhung, so kann sie sich radial ausdehnen, ohne auf die Hülle einen Kontaktdruck auszuüben; in axialer Richtung kann zwischen Brennstoffsäule und Hülle ungehindert eine Relativbewegung stattfinden. Eine mechanische Wechselwirkung zwischen Brennstoffsäule und Hülle findet in diesem Abschnitt weder in radialer noch in axialer Richtung statt. Mechanische Wechselwirkung infolge thermischer Ausdehnung der Brennstoffsäule

gibt es hier nur auf den unteren Brennelementstopfen und auf die darüber befindliche angrenzende verklebte Zone. Zwischen beiden ist, wegen der sie verbindenden Brennelementhülle, die in diesem Abschnitt befindliche Brennstoffsäule eingespannt. Erfährt die in der oberen verklebten Zone befindliche Brennstoffsäule eine Leistungserhöhung, so übt die neuerlich aufgeheizte Säule auf die sie umgebende Hülle in radialer Richtung einen Kontaktdruck, in axialer Richtung eine Wandschubspannung aus.

Man erkennt schon hieraus, daß in den verschiedenen Axialzonen des Brennstabes verschiedene Randbedingungen gültig sind; demzufolge werden auch die mathematischen Ergebnisse der Spannungsverteilungen in den einzelnen Zonen verschieden sein.

Nach diesen Ausführungen läßt sich der untere Brennstababschnitt in drei verschiedene mechanische Belastungszonen unterteilen. Es sind dies:

I. Der untere Brennelementstopfen:

Er wird im inneren Radialbereich von der sich in axialer Richtung ausdehnenden Brennstoffsäule auf Druck, im äußeren Radialbereich durch die mit ihm verschweißte Hülle auf Zug beansprucht.

II. Der Brennstababschnitt, in dem Brennstoffsäule und Hülle miteinander verklebt sind:

Hier wird einmal, durch den sich in axialer Richtung ausdehnenden, in Zone III noch freistehenden Teil der Brennstoffsäule der mit der Hülle verklebte Anteil auf Druck, die Hülle auf Zug beansprucht. Es sind dies dieselben Belastungsverhältnisse wie beim Stopfen. Zusätzlich werden hier noch, wegen der thermischen Ausdehnung des sich in diesem Abschnitt befindlichen aufgeheizten Brennstoffsäulenanteils, Brennstoffsäule und Hülle in axialer und radialer Richtung belastet.

III. Der Brennelementabschnitt, in dem Brennstoffsäule und Hülle noch keinen Kontakt haben:

In diesem Abschnitt wird die Hülle bei einer Brennstoffaufheizung auf Zug, die Brennstoffsäule auf Druck beansprucht. Zusätzlich wirkt hier noch der von beiden eingeschlossene Spaltgasdruck.

In Abb. 1 sind die drei beschriebenen Belastungszonen schematisch dargestellt.

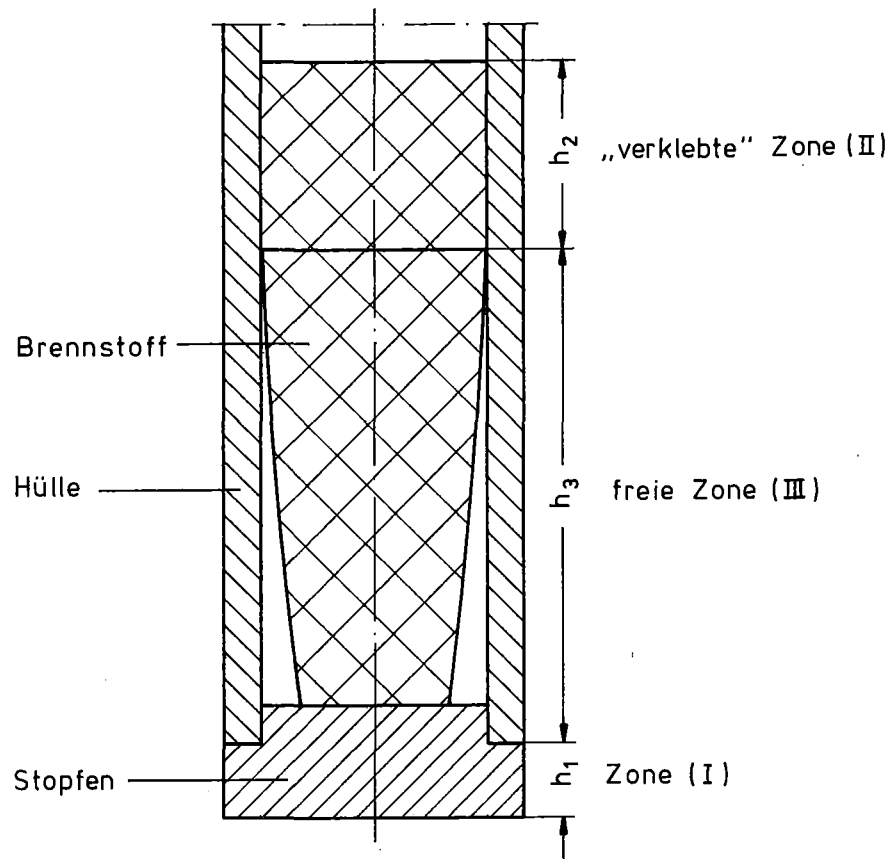


Abb. 1 Schematische Darstellung der beschriebenen Belastungszonen

3. Allgemeingültige Spannungs-Dehnungsbeziehungen

Die Verzerrungen (Dehnungen) als Funktion der Spannungen sind durch das Hookesche Gesetz gegeben. Es lautet (in Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \quad \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] + \alpha T \\
 \text{b) } \quad \varepsilon_t &= \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\
 \text{c) } \quad \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] + \alpha T \\
 \text{d) } \quad \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Hierbei bedeuten die Indices r , t und z die radiale, tangentielle und axiale Richtung, σ_r , σ_t und σ_z die Spannungen, ε_r , ε_t und ε_z die Dehnungen in die

entsprechenden Richtungen. τ_{rz} ist die Schubspannung. Da hier, wenn man von der zugeordneten Schubspannung absieht, nur in axialer Richtung wirkende Schubspannungen auftreten, werden bei ihnen im folgenden die Indices der Einfachheit halber nicht mehr angeschrieben. γ ist der Gleitungswinkel (die durch die Schubspannung hervorgerufene Winkeldeformation). E ist der Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktionszahl. T ist das, im betrachteten Körper (eventuell) vorhandene Temperaturfeld. α ist die Wärmeausdehnungszahl. u bezeichnet die Radialverschiebung und w die Axialverschiebung des unter Spannung stehenden Materials.

Die Gln. (3.1) nach den Spannungen aufgelöst, ergeben:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_r + \frac{\nu\epsilon}{(1-2\nu)} \right] - \frac{E\alpha T}{(1-2\nu)} \\
 \text{b) } \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_t + \frac{\nu\epsilon}{(1-2\nu)} \right] - \frac{E\alpha T}{(1-2\nu)} \\
 \text{c) } \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_z + \frac{\nu\epsilon}{(1-2\nu)} \right] - \frac{E\alpha T}{(1-2\nu)} \\
 \text{d) } \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hierbei ist:

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_t + \epsilon_z \tag{3.3}$$

Mit den Beziehungen zwischen den Dehnungskomponenten und den Verschiebungen (in Zylinderkoordinaten):

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.4}$$

wird aus Gl. (3.3):

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.5}$$

Für ein Brennstabelement gelten die Gleichgewichtsbedingungen (in Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0 \\
 \text{b) } \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Spannungsgleichungen (3.2), in die Gleichgewichtsbedingungen (3.6) unter Beachtung der Verträglichkeitsbedingungen (3.4) und (3.5) eingesetzt, ergeben für die Verschiebungen folgende Differentialgleichungen

- für die Radialverschiebung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.7)$$

- für die Axialverschiebung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.8)$$

Die Gln. (3.7) und (3.8) sind zwei lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen, in denen die Ableitungen der Dehnung (ϵ) und der Temperatur (T) als Störglieder auftreten. Um die Gleichungen lösen zu können, müssen die Funktionen $\epsilon = \epsilon(r, z)$ und $T = T(r, z)$ bekannt sein.

4. Das für den Brennelementstopfen (Zone I) gültige Belastungssystem

Im Brennelementstopfen wird bekanntlich kaum Wärme erzeugt, damit herrscht in ihm überall dieselbe Temperatur. Das bedeutet: Das in den Verschiebungs-Differentialgleichungen (3.7) und (3.8) enthaltene Temperaturfeld ist konstant bzw. die dort auftretenden Temperaturfeldableitungen sind Null.

Aus den genannten Gleichungen ergeben sich damit die hier gültigen temperaturfeldfreien Verschiebungs-Differentialgleichungen

- für die Radialverschiebung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \quad (4.1)$$

- für die Axialverschiebung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \quad (4.2)$$

Um die Gln. (4.1) und (4.2) lösen zu können, muß, wie bereits bemerkt, die Dehnung $\epsilon = \epsilon(r, z)$ bekannt sein.

Den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

auf Gl. (3.5) angewandt, ergibt für die Dehnung ϵ folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3)$$

Gl. (4.3) stellt eine lineare homogene partielle Differentialgleichung dar. Die allgemeine Lösung von Gl. (4.3) kann durch ein Separationsansatz gewonnen werden.

Mit dem Produktansatz

$$\epsilon(r, z) = R(r) Z(z) \quad (4.4)$$

in Gl. (4.3) eingegangen ergibt, nach dem Trennen der Veränderlichen:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = - \kappa^2 \quad (4.5)$$

Hierbei ist $(-\kappa^2)$ eine zunächst beliebige Konstante. (Beide Seiten von Gl. (4.5) können nur dann einander gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten sind.)

Aus Gl. (4.5) ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

- für die Radialfunktion:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \kappa^2 R = 0 \quad (4.6)$$

- für die Axialfunktion:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \kappa^2 Z = 0 \quad (4.7)$$

Gl. (4.6) ist eine Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung; ihre allgemeine Lösung lautet:

$$R(r) = C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r) \quad (4.8)$$

Hierbei sind $J_0(\kappa r)$ und $N_0(\kappa r)$ die Besselfunktionen nullter Ordnung, erster bzw. zweiter Art (Neumann'sche Funktion). C_1 und C_2 sind ebenfalls zunächst willkürliche Konstanten.

Die allgemeine Lösung von Gl. (4.7) lautet:

$$Z(z) = p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z) \quad (4.9)$$

Hierbei sind p und q ebenfalls zunächst willkürliche Konstanten.

Mit den Gln. (4.8) und (4.9) ergibt sich nach dem Lösungsansatz (4.4) als allgemeine Lösung für die Dehnung:

$$\varepsilon(r, z) = [p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z)] [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] \quad (4.10)$$

Gl. (4.10) nach z und unter Beachtung der Differentiationsregel für Zylinderfunktionen $Z_m(\kappa r)$ (Linearkombinationen der Besselfunktionen)

$$\frac{dZ_m(\kappa r)}{dr} = \kappa \left[-Z_{m+1}(\kappa r) + \frac{m}{\kappa r} Z_m(\kappa r) \right] \quad (4.11)$$

nach r differenziert (Ordnungszahl $m = 0$) und in die Differentialgleichungen für die Verschiebungen (4.1) und (4.2) eingesetzt, ergibt

- für die Differentialgleichung der Radialverschiebung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} = \frac{\kappa}{(1-2\nu)} [p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z)] [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \quad (4.12)$$

- für die Differentialgleichung der Axialverschiebung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{\kappa}{(1-2\nu)} [p \cos(\kappa z) + q \sin(\kappa z)] [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] \quad (4.13)$$

Die Gln. (4.12) und (4.13) stellen zwei lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen dar, in welchen Produkte aus Zylinderfunktionen (radial) und hyperbolische Funktionen (axial) als Störfunktionen auftreten.

Nach der Theorie der Differentialgleichungen setzen sich die allgemeinen Lösungen von Differentialgleichungen mit Störgliedern aus der Lösung der verkürzten (homogenen) Gleichung plus einem partikularen Integral der unverkürzten (inhomogenen) Gleichung zusammen.

Die verkürzte Differentialgleichung der Radialverschiebung (4.12) lautet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (4.14)$$

Zur Lösung von Gl. (4.14) wird wiederum der Separationsansatz gemacht:

$$u(r, z) = R(r) Z(z) \quad (4.15)$$

Mit diesem Ansatz in Gl. (4.14) eingegangen, ergibt nach Trennen der Veränderlichen die Gleichung:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = - \kappa^2 \quad (4.16)$$

Hierbei ist $(-\kappa^2)$ ebenfalls eine zunächst willkürliche Konstante (die nicht von vornherein mit der in Gl. (4.5) auftretenden identisch sein muß). Wie sie wirklich aussehen muß, ergibt sich später.

Aus Gl. (4.16) ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

- für die Radialfunktion:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{1}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.17)$$

- für die Axialfunktion:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \kappa^2 Z = 0 \quad (4.18)$$

Gl. (4.17) ist eine mit dem Parameter κ behaftete Besselsche Differentialgleichung erster Ordnung; ihre allgemeine Lösung lautet:

$$R(r) = C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r) \quad (4.19)$$

Hierbei sind $J_1(\kappa r)$ und $N_1(\kappa r)$ Besselfunktionen erster Ordnung, erster bzw.

zweiter Art. C_1 und C_2 sind ebenfalls zunächst willkürliche Konstanten. Sie sind nicht von vornherein mit den in Gl. (4.8) auftretenden identisch. Eine Verwechslung von beiden ist, wie sich später herausstellen wird, kaum möglich bzw. für die Ergebnisse unerheblich. Daher muß zwischen ihnen nicht unterschieden werden; d.h. die identische Bezeichnung kann beibehalten werden. Gl. (4.18) ist mit Gl. (4.7) identisch, damit lautet ihre allgemeine Lösung (Gl. (4.9)) entsprechend:

$$Z(z) = B_1 \sin(kz) + B_2 \cos(kz) \quad (4.20)$$

Hierbei sind B_1 und B_2 ebenfalls zunächst willkürliche Konstanten. Mit den Gln. (4.19) und (4.20) wird die Lösung der verkürzten Radialverschiebungsgleichung (4.14) nach dem Lösungsansatz (4.15):

$$u(r, z) = [B_1 \sin(kz) + B_2 \cos(kz)] [C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr)] \quad (4.21)$$

Die verkürzte Differentialgleichung der Axialverschiebung (4.13) lautet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (4.22)$$

Gl. (4.22) hat dieselbe Form wie die Differentialgleichung für die Gesamtverzerrung (4.3); damit hat die allgemeine Lösung von Gl. (4.22) dieselbe Form wie die der genannten Gleichung. Der Gl. (4.10) entsprechend lautet die allgemeine Lösung von Gl. (4.22):

$$w(r, z) = [P \sin(kz) + Q \cos(kz)] [C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr)] \quad (4.23)$$

Hierbei sind P und Q ebenfalls zunächst willkürliche Konstanten. Die Konstante k ist auch hier nicht mit den beiden vorausgegangenen, mit k bezeichneten Konstanten von vornherein identisch. Ihr Wert wird sich im Laufe der weiteren Rechnung ergeben.

Zur Lösung der inhomogenen Radialverschiebungs-Differentialgleichung (4.12), d.h. zur Bestimmung eines partikularen Integrals der unverkürzten Gleichung wird ein der Lösung der homogenen Gleichung (4.21) ähnlicher, aber von ihr verschiedener Ansatz versucht, der die inhomogene Gleichung identisch befriedigt.

Damit wird angesetzt:

$$u(r,z) = [B_1^* \sin(\kappa z) + B_2^* \cos(\kappa z)] z [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \quad (4.24)$$

Mit diesem Lösungsansatz in die inhomogene Differentialgleichung der Radialverschiebung (4.12) eingegangen, ergibt durch Koeffizientenvergleich für die Konstanten:

$$B_1^* = \frac{q}{2(1-2\nu)} \quad , \quad B_2^* = \frac{p}{2(1-2\nu)} \quad (4.25)$$

Die Gln. (4.25) in Gl. (4.24) eingesetzt, ergibt als partikulares Integral der unverkürzten Radialverschiebungsgleichung (4.12):

$$u(r,z) = \frac{1}{2(1-2\nu)} [q \sin(\kappa z) + p \cos(\kappa z)] z [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \quad (4.26)$$

Zur Lösung der inhomogenen Axialverschiebungs-Differentialgleichung (4.13) wird ebenfalls ein der Lösung der homogenen Gleichung (4.23) ähnlicher, aber von ihr unterschiedlicher Ansatz versucht, der die inhomogene Gleichung (4.13) identisch befriedigt. Damit wird angesetzt:

$$w(r,z) = [P^* \sin(\kappa z) + Q^* \cos(\kappa z)] z [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] + A f(z) \quad (4.27)$$

Das axiale Glied $A f(z)$ wurde hier noch zusätzlich eingeführt, um die axialen Lagerungsverhältnisse am Stopfenende berücksichtigen zu können. A bedeutet hier eine Konstante.

Mit dem Lösungsansatz (4.27) in die inhomogene Axialverschiebungs-Differentialgleichung (4.13) eingegangen, ergibt durch Koeffizientenvergleich für die Konstanten:

$$P^* = - \frac{p}{2(1-2\nu)} \quad , \quad Q^* = - \frac{q}{2(1-2\nu)} \quad (4.28)$$

Die Gln. (4.28) in Gl. (4.27) eingesetzt, ergibt als partikulares Integral der unverkürzten Axialverschiebungsgleichung (4.13):

$$w(r,z) = \frac{1}{2(1-2\nu)} [p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z)] z [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] + A f(z) \quad (4.29)$$

Aus den Lösungen der verkürzten Gleichungen (4.21) und (4.23) und den parti- kularen Integralen der unverkürzten Gleichungen (4.26) und (4.29) lassen sich, wie bereits bemerkt, die vollständigen Lösungen der inhomogenen Verschiebungs- gleichungen additiv zusammensetzen. Die in Gl. (4.21) auftretenden Konstanten B_1 und B_2 können noch eliminiert werden. Mit den obengenannten Gleichungen als Gesamtlösungen der Verschiebungsgleichungen (4.12) und (4.13) und der Lö- sung der Verzerrungsgleichung (4.10) in die Verträglichkeitsbedingung (3.5) eingegangen ergibt:

$$B_1 \sin(\kappa z) + B_2 \cos(\kappa z) = -[P \cos(\kappa z) + Q \sin(\kappa z)] + \frac{(3-4\nu)}{2(1-2\nu)\kappa} [p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z)]$$

Diesen Ausdruck in Gl. (4.21) eingesetzt und dieselbe mit Gl. (4.26) addiert, ergibt als Gesamtlösung der inhomogenen Radialverschiebungsgleichung (4.12):

$$u(r, z) = \left\{ -[P \cos(\kappa z) + Q \sin(\kappa z)] + \frac{(3-4\nu)}{2(1-2\nu)\kappa} [p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z)] + \frac{z}{2(1-2\nu)} [q \sin(\kappa z) + p \cos(\kappa z)] \right\} [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \quad (4.30)$$

Die Gln. (4.23) und (4.29) addiert, ergibt als Gesamtlösung der inhomogenen Axialverschiebungsgleichung (4.13):

$$w(r, z) = \left\{ [P \sin(\kappa z) + Q \cos(\kappa z)] - \frac{z}{2(1-2\nu)} [p \sin(\kappa z) + q \cos(\kappa z)] \right\} [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] + A f(z) \quad (4.31)$$

Anmerkung:

Aus dem Einsetzen der Gln. (4.10), (4.21), (4.23), (4.26) und (4.29) in die Verträglichkeitsbedingung (3.5) zur Elimination der Konstanten B_1 und B_2 ergab sich, daß die in den Gln. (4.5), (4.16) und (4.23) auftretenden Konstanten κ identisch sein müssen.

Ableitung der Spannungen aus den Verschiebungen: Mit den Verschiebungsglei- chungen (4.30) und (4.31) und der Verzerrungsgleichung (4.10) unter Beachtung der Differentiationsregel für Zylinderfunktionen $Z_m(\kappa r)$ (4.11)

$$\frac{dZ_m(\kappa r)}{dr} = \kappa \left[Z_{m-1}(\kappa r) - \frac{m}{(\kappa r)} Z_m(\kappa r) \right] \quad (4.32)$$

(mit $m=1$) in das temperaturfeldfreie ($T = 0$) Spannungssystem (3.2) eingegangen, ergibt

- für die Radialspannung:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ [-\kappa(P\cos(\kappa z) + Q\sin(\kappa z)) + \frac{(3-2\nu)}{2(1-2\nu)} (p\sin(\kappa z) + q\cos(\kappa z)) \right. \\ & + \frac{\kappa z}{2(1-2\nu)} (q\sin(\kappa z) + p\cos(\kappa z))] [C_1 J_2(\kappa r) + C_2 N_2(\kappa r)] \\ & - \frac{1}{(\kappa r)} \left[-\kappa(P\cos(\kappa z) + Q\sin(\kappa z)) + \frac{(3-4\nu)}{2(1-2\nu)} (p\sin(\kappa z) + q\cos(\kappa z)) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\kappa z}{2(1-2\nu)} (q\sin(\kappa z) + p\cos(\kappa z)) \right] [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \right\} \quad (4.33) \end{aligned}$$

- für die Tangentialspannung:

$$\begin{aligned} \sigma_t(r, z) = & \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} [- (P\cos(\kappa z) + Q\sin(\kappa z)) + \frac{(3-4\nu)}{2(1-2\nu)\kappa} (p\sin(\kappa z) + q\cos(\kappa z)) \right. \\ & + \frac{z}{2(1-2\nu)} (q\sin(\kappa z) + p\cos(\kappa z))] [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \\ & \left. + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (p\sin(\kappa z) + q\cos(\kappa z)) [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] \right\} \quad (4.34) \end{aligned}$$

- für die Axialspannung:

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ [\kappa(P\cos(\kappa z) + Q\sin(\kappa z)) - \frac{1}{2} (p\sin(\kappa z) + q\cos(\kappa z)) \right. \\ & \left. - \frac{\kappa z}{2(1-2\nu)} (p\cos(\kappa z) + q\sin(\kappa z))] [C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)] + A \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\} \quad (4.35) \end{aligned}$$

- für die Schubspannung:

$$\begin{aligned} \tau(r, z) = & \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ -\kappa (P\sin(\kappa z) + Q\cos(\kappa z)) + \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} (p\cos(\kappa z) + q\sin(\kappa z)) \right. \\ & \left. + \frac{\kappa z}{2(1-2\nu)} (p\sin(\kappa z) + q\cos(\kappa z)) \right\} [C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)] \quad (4.36) \end{aligned}$$

Mit den Verschiebungsgleichungen (4.30) und (4.31) und den daraus abgeleiteten Spannungsgleichungen (4.33), (4.34), (4.35) und (4.36) sind die Verschiebungen und Spannungen eines unter äußeren Kraftwirkungen stehenden zylinder-

förmigen Körpers in voller Allgemeinheit als Funktion des Ortes dargestellt. Dabei ist es gleichgültig, ob es sich um einen Voll- oder Hohlzylinder handelt.

Die in den genannten Gleichungen auftretenden Konstanten P, Q, p, q, A, C_1, C_2 und K sind aus den für den betreffenden Körper gültigen Verschiebungs- bzw. Belastungsbedingungen zu bestimmen.

In dem hier vorliegenden Fall handelt es sich um die mechanische Belastung des unteren Brennelementstopfens.

Randbedingungen:

Durch eine verhältnismäßig rasche Leistungserhöhung, deren mechanische Auswirkung auf einen Reaktorbrennstab hier untersucht werden soll, wird die Brennstoffsäule in der axialen Brennstabzone, in der zwischen Brennstoff und Hülle ein Gasspalt besteht, wegen des schlechten Wärmeübergangs ziemlich aufgeheizt und zwar solange, bis sich zwischen erzeugter und abfließender Wärme ein thermodynamisches Gleichgewicht eingestellt hat. Der Stopfen wird, wie bereits bemerkt, in dem Radialbereich der auf ihm stehenden Brennstoffsäule ($r = 0$ bis $r = b$) durch die axiale thermische Ausdehnung derselben auf Druck ($-p_0$) und in dem mit der Hülle verschweißten Radialbereich ($r = b$ bis $r = a$) auf Zug (p_1) beansprucht.

Wenn man den Zentrierzapfen, der keinen großen Einfluß auf die Spannungsverteilung im Stopfen besitzt, vernachlässigt, kann er mit seinen eingepprägten Spannungen als belasteter Vollzylinder angenommen werden. Schematisch ist er durch Abb. 2 dargestellt.

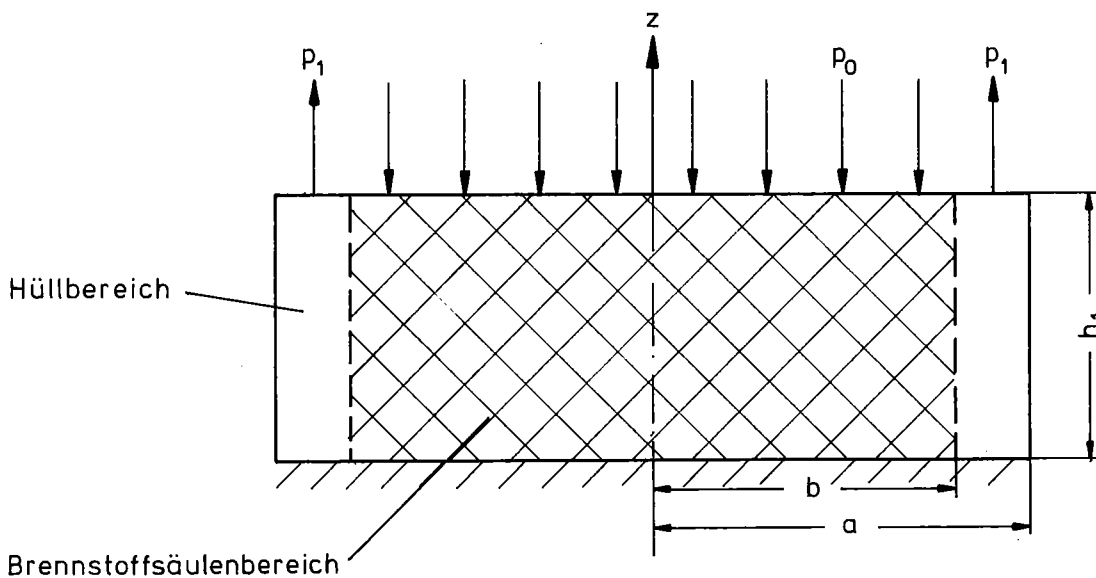


Abb. 2 Schematische Darstellung des Brennelementstopfens

Man kann annehmen, der Stopfen ist am unteren Ende unverschiebbar gelagert. Das Eigengewicht des Brennstabes wird vernachlässigt. Der in radialer Richtung wirkende Kühlmitteldruck wird mit Null angenommen. Die Kühlmittelwand-schubspannung wird als vernachlässigbar klein angesehen.

Damit und nach Abb. 2 gelten für den belasteten Stopfen die Randbedingungen:

$$w(r,0) = 0 \quad (4.37)$$

$$\sigma_r(a,z) = 0 \quad (4.38)$$

$$\tau(r,0) = 0 \quad (4.39)$$

$$\tau(r,h_1) = 0 \quad (4.40)$$

$$\tau(a,z) = 0 \quad (4.41)$$

$$\sigma_z(r,0) = 0 \quad (4.42)$$

$$\sigma_z(r,h_1) = -p_0 \quad (\text{für } 0 \leq r \leq b) \quad (4.43)$$

$$\sigma_z(r,h_1) = p_1 \quad (\text{für } b \leq r \leq a) \quad (4.44)$$

Außer diesen Randbedingungen müssen sowohl für die Verschiebungen als auch für die Spannungen für $r = 0$ endliche Werte bestehen. Die Neumannschen Funktionen $N_0(kr)$ und $N_1(kr)$ sind für $r = 0$ nicht regulär, sie können damit keine Lösung des Problems sein. Damit muß in den Verschiebungsgleichungen (4.30) und (4.31) und in den Spannungsgleichungen (4.33) bis (4.36) die Konstante $C_2 = 0$ sein.

In den genannten Gleichungen werden die Produkte der Konstanten P , Q , p und q multipliziert mit der Konstante C_1 zu neuen Konstanten. Die alten Bezeichnungen werden aber beibehalten. Damit verschwindet C_1 aus dem Gleichungssystem.

Die restlichen in den Gleichungen vorkommenden Konstanten sind aus den vorstehenden Randbedingungen zu bestimmen. Die Randbedingungen (4.38) und (4.41) können beide nur erfüllt werden, wenn in der Radialspannungsgleichung (4.33) der mit $J_2(kr)$ behaftete Term nicht mit einbezogen, d.h. weggelassen wird. Dann ergibt sich mit Gl. (4.33) nach der Randbedingung (4.38) oder mit Gl. (4.36) nach der Randbedingung (4.41) (mit $C_2 = 0$) die "Eigenwertgleichung":

$$J_1(k a) = 0 \quad (4.45)$$

Gleichung (4.45) ist eine transzendente Gleichung. Sie hat unendlich viele Lösungen ($k_1, k_2, k_3 \dots k_n \dots$). Nach der Randbedingung (4.39) ist $\tau(r,0) = 0$. Da aber $\cos(0) \neq 0$ ist, müssen nach Gl. (4.36) die Konstanten $Q = p = 0$ sein.

Mit den bereits gewonnenen Erkenntnissen nehmen die für den unteren Stopfen gültigen Verschiebungs- und Spannungsgleichungen folgende Form an:

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -P_n \cos(\kappa_n z) + \frac{(3-4\nu) q_n}{2(1-2\nu)\kappa_n} \cos(\kappa_n z) + \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \sin(\kappa_n z) \right\} J_1(\kappa_n r) \quad (4.46)$$

$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [P_n \sin(\kappa_n z) - \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \cos(\kappa_n z)] J_0(\kappa_n r) + A_n f(z) \right\} \quad (4.47)$$

$$\sigma_r(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [\kappa_n P_n - \frac{(3-4\nu) q_n}{2(1-2\nu)}] \cos(\kappa_n z) - \frac{\kappa_n z q_n}{2(1-2\nu)} \sin(\kappa_n z) \right\} \frac{J_1(\kappa_n r)}{(\kappa_n r)} \quad (4.48)$$

$$\sigma_t(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(-\kappa_n P_n + \frac{(3-4\nu) q_n}{2(1-2\nu)}) \cos(\kappa_n z) + \frac{\kappa_n z q_n}{2(1-2\nu)} \sin(\kappa_n z)] \frac{J_1(\kappa_n r)}{(\kappa_n r)} \right\} \quad (4.49)$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(\kappa_n P_n - \frac{q_n}{2}) \cos(\kappa_n z) - \frac{\kappa_n z q_n}{2(1-2\nu)} \sin(\kappa_n z)] J_0(\kappa_n r) + A_n \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\} \quad (4.50)$$

$$\tau(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [-\kappa_n P_n + \frac{(1-\nu) q_n}{(1-2\nu)}] \sin(\kappa_n z) + \frac{\kappa_n z q_n}{2(1-2\nu)} \cos(\kappa_n z) \right\} J_1(\kappa_n r) \quad (4.51)$$

Anmerkung:

In den Spannungsgleichungen (4.48) und (4.49) treten für $r = 0$ die unbestimmten Ausdrücke $\frac{0}{0}$ auf. Zur Bestimmung dieser Spannungsgrenzwerte wird die l'Hospital'sche Regel angewandt. Sie soll hier nicht gesondert angeschrieben werden.

Der Zusammenhang zwischen den Hyperbelfunktionen und der Exponentialfunktion ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\sin(\kappa z) = \frac{e^{\kappa z} - e^{-\kappa z}}{2}, \quad \cos(\kappa z) = \frac{e^{\kappa z} + e^{-\kappa z}}{2} \quad (4.52)$$

Schon oberflächliche Abschätzungen zeigen, daß die nach Gl. (4.45) zu bestimmenden Eigenwerte κ_n mit den in Frage kommenden Brennstabradien a relativ groß

sein werden. Damit gilt für die Axialargumente in der hauptsächlich interessierenden (hochbelasteten) Axialzone: $(\kappa_n z) \gg 0$.

Damit ergibt sich aus den Gln. (4.52):

$$\sin(\kappa_n z) \approx \cos(\kappa_n z) \approx \frac{e^{\kappa_n z}}{2} \quad (4.53)$$

Damit gehen die Axialfunktionen des Spannungsgleichungssystems von den Hyperbelfunktionen in die Exponentialfunktion über. Es ist nun naheliegend, die in Gl. (4.47) auftretende, noch unbekannt Funktion $f(z)$ ebenfalls als Exponentialfunktion anzunehmen.

Damit und mit Gl. (4.53) in die Gln. (4.46) bis (4.51) eingegangen (den Faktor $1/2$ in die Konstanten einbezogen), ergibt:

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n z} \left\{ -P_n + \frac{q_n}{2(1-2\nu)} \left[\frac{(3-4\nu)}{\kappa_n} + z \right] \right\} J_1(\kappa_n r) \quad (4.54)$$

$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n z} \left\{ \left[P_n - \frac{z q_n}{2(1-2\nu)} \right] J_0(\kappa_n r) + A_n \right\} \quad (4.55)$$

$$\sigma_r(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n z} \left[\kappa_n P_n - \frac{q_n}{2(1-2\nu)} ((3-4\nu) + \kappa_n z) \right] \frac{J_1(\kappa_n r)}{(\kappa_n r)} \quad (4.56)$$

$$\sigma_t(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n z} \left\{ \left[-\kappa_n P_n + \frac{q_n}{2(1-2\nu)} ((3-4\nu) + \kappa_n z) \right] \frac{J_1(\kappa_n r)}{(\kappa_n r)} \right\} \quad (4.57)$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n z} \left\{ \left[\kappa_n P_n - q_n \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa_n z}{2(1-2\nu)} \right) \right] J_0(\kappa_n r) + \kappa_n A_n \right\} \quad (4.58)$$

$$\tau(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n z} \left\{ -\kappa_n P_n + \frac{q_n}{2(1-2\nu)} \left[2(1-\nu) + \kappa_n z \right] \right\} J_1(\kappa_n r) \quad (4.59)$$

Wenn man beachtet, daß - wie bereits bemerkt - die axialen Argumente $(\kappa_n z)$ im Hauptbelastungsbereich relativ groß sind und die Belastungen, wie Abschätzungen zeigen, bei kleinen Argumenten $(\kappa_n z)$, also bei kleinem z , nur noch unbedeutend sind, können die Gln. (4.54) bis (4.59) noch etwas vereinfacht werden.

Man kann dann für sie schreiben:

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{K_n z} \left[-P_n + \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \right] J_1(K_n r) \quad (4.60)$$

$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{K_n z} \left\{ \left[P_n - \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \right] J_0(K_n r) + A_n \right\} \quad (4.61)$$

$$\sigma_r(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{K_n z} \left[P_n - \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \right] \frac{J_1(K_n r)}{(K_n r)} \quad (4.62)$$

$$\sigma_t(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{K_n z} \left\{ \left[-P_n + \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \right] \frac{J_1(K_n r)}{(K_n r)} \right\} \quad (4.63)$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{K_n z} \left\{ \left[P_n - \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \right] J_0(K_n r) + A_n \right\} \quad (4.64)$$

$$\tau(r, z) = \frac{E}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{K_n z} \left[-P_n + \frac{q_n z}{2(1-2\nu)} \right] J_1(K_n r) \quad (4.65)$$

Die restlichen drei Serien der in den vorstehenden Gleichungen noch unbekanntenen Konstanten P_n , q_n und A_n sind aus den noch verbliebenen Randbedingungen (4.40), (4.42) und der für den jeweils betreffenden Radialbereich gültigen Randbedingung (4.43) oder (4.44) zu bestimmen.

Aus den Spannungsgleichungen (4.62) bis (4.65) erkennt man, daß sich die Spannungen in axialer Richtung mit der Exponentialfunktion verändern. Man kann daher von vornherein annehmen, daß sie mit dem Entfernen von der axialen Lastangriffsfläche mit der Exponentialfunktion abnehmen. Wegen den zu erwartenden großen Eigenwerten K_n werden die Exponenten der Exponentialfunktionen mit wachsendem n dem Betrag nach rasch sehr groß. Damit werden die Glieder der in den Gleichungen auftretenden Reihen schnell sehr klein. Man kann daher mit guter Näherung diese nach dem ersten Glied abbrechen. Damit entfällt in den Gln.

(4.60) bis (4.65) das Summenzeichen sowie der Index n .

Gl. (4.65) liefert mit der Randbedingung (4.40):

$$P = \frac{h_1}{2(1-2\nu)} q \quad (4.66)$$

Im folgenden sind die für den Brennstoffsäulenbereich gültigen Größen mit dem Index b, die für den Hüllbereich gültigen mit dem Index c bezeichnet.

Mit Gl. (4.64) wird aus der Randbedingung (4.43):

$$- p_0 \frac{(1+\nu)}{E} = \kappa e^{\kappa h_1} \left\{ \left[P_b - \frac{q_b h_1}{2(1-2\nu)} \right] J_0(\kappa r) + A_b \right\} \quad (4.67)$$

Mit Gl. (4.64) wird aus der Randbedingung (4.44):

$$p_1 \frac{(1+\nu)}{E} = \kappa e^{\kappa h_1} \left\{ \left[P_c - \frac{q_c h_1}{2(1-2\nu)} \right] J_0(\kappa r) + A_c \right\} \quad (4.68)$$

Gl. (4.64) liefert mit der Randbedingung (4.42):

$$\int_{(F)} (P J_0(\kappa r) + A) dF = 0 \quad (4.69)$$

Hierbei ist F die Querschnittsfläche.

Für den Brennstoffsäulen-Radialbereich ($r = 0$ bis $r = b$) wird aus Gl. (4.69):

$$P_b \int_0^b r J_0(\kappa r) dr + A_b \int_0^b r dr = 0 \quad (4.70)$$

Für den Hüll-Radialbereich ($r = b$ bis $r = a$) wird aus Gl. (4.69):

$$P_c \int_b^a r J_0(\kappa r) dr + A_c \int_b^a r dr = 0 \quad (4.71)$$

Für das in den Gln. (4.70) und (4.71) auftretende Integral der Besselfunktion gilt:

$$\int_0^r r J_0(\kappa r) dr = \frac{r}{\kappa} J_1(\kappa r) \quad (4.72)$$

Mit dem Integral (4.72) nach Einsetzen der Integrationsgrenzen in Gl. (4.70) eingegangen, ergibt nach dem Lösen des zweiten Integrals:

$$A_b = - \frac{2 J_1(\kappa b)}{(\kappa b)} P_b \quad (4.73)$$

Mit dem Integral (4.72) nach Einsetzen der Integrationsgrenzen in Gl. (4.71) eingegangen, ergibt nach dem Lösen des zweiten Integrals:

$$A_c = - \frac{2(a J_1(\kappa a) - b J_1(\kappa b))}{\kappa (a^2 - b^2)} P_c \quad (4.74)$$

Unter Beachtung der Eigenwertgleichung (4.45) wird aus Gl. (4.74):

$$A_c = \frac{2b J_1(\kappa b)}{\kappa (a^2 - b^2)} P_c \quad (4.74a)$$

Mit Gl. (4.66) in Gl. (4.67) eingegangen ergibt damit:

$$A_b = - p_0 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{e^{-\kappa h_1}}{\kappa} \quad (4.75)$$

Mit Gl. (4.66) in Gl. (4.68) eingegangen ergibt damit:

$$A_c = p_1 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{e^{-\kappa h_1}}{\kappa} \quad (4.76)$$

Mit Gl. (4.75) in Gl. (4.73) eingegangen ergibt:

$$P_b = p_0 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{b e^{-\kappa h_1}}{2 J_1(\kappa b)} \quad (4.77)$$

Mit Gl. (4.76) in Gl. (4.74a) eingegangen ergibt:

$$P_c = p_1 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(a^2 - b^2) e^{-\kappa h_1}}{2b J_1(\kappa b)} \quad (4.78)$$

Mit Gl. (4.77) wird aus Gl. (4.66):

$$q_b = p_0 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(1-2\nu)b}{J_1(\kappa b)} \frac{e^{-\kappa h_1}}{h_1} \quad (4.79)$$

Mit Gl. (4.78) wird aus Gl. (4.66):

$$q_c = p_1 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(1-2\nu)(a^2 - b^2)}{b J_1(\kappa b)} \frac{e^{-\kappa h_1}}{h_1} \quad (4.80)$$

Mit den Gln. (4.75), (4.77) und (4.79) in die Spannungsgleichungen (4.62) bis (4.65) eingegangen, ergibt für den Radialbereich der Brennstoffsäule ($r = 0$ bis $r = b$) die Stopfenbelastungen (Spannungen):

$$\sigma_r(r, z) = \frac{p_0}{2} \frac{(\kappa b)}{J_1(\kappa b)} \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) \frac{J_1(\kappa r)}{(\kappa r)} e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.81)$$

$$\sigma_t(r, z) = \frac{p_0}{2} \left[\frac{(\kappa b)}{J_1(\kappa b)} - \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) \frac{J_1(\kappa r)}{(\kappa r)} \right] e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.82)$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{p_0}{2} \left\{ \frac{(\kappa b)}{J_1(\kappa b)} \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) J_0(\kappa r) - 2 \right\} e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.83)$$

$$\tau(r, z) = \frac{p_0}{2} \left[- \frac{(\kappa b)}{J_1(\kappa b)} \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) J_1(\kappa r) \right] e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.84)$$

Mit den Gln. (4.76), (4.78) und (4.80) in die Spannungsgleichungen (4.62) bis (4.65) eingegangen, ergibt für den Radialbereich der Hülle ($r = b$ bis $r = a$) die Stopfenbelastungen (Spannungen):

$$\sigma_r(r, z) = \frac{p_1}{2} \frac{\kappa (a^2 - b^2)}{b J_1(\kappa b)} \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) \frac{J_1(\kappa r)}{(\kappa r)} e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.85)$$

$$\sigma_t(r, z) = \frac{p_1}{2} \left[\frac{\kappa (a^2 - b^2)}{b J_1(\kappa b)} - \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) \frac{J_1(\kappa r)}{(\kappa r)} \right] e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.86)$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{p_1}{2} \left\{ \frac{\kappa (a^2 - b^2)}{b J_1(\kappa b)} \left(1 - \frac{z}{h_1}\right) J_0(\kappa r) + 2 \right\} e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.87)$$

$$\tau(r, z) = \frac{p_1}{2} \left[- \frac{\kappa (a^2 - b^2)}{b J_1(\kappa b)} \left(1 - \frac{z}{h_1}\right) J_1(\kappa r) \right] e^{-\kappa (h_1 - z)} \quad (4.88)$$

Mit den Gln. (4.81) bis (4.88) wurde ein verhältnismäßig einfacher Formalismus entwickelt, der die Spannungsverteilung eines Brennelementstopfens beschreibt, wenn er durch die auf ihm aufstehende Brennstoffsäule mit dem Druck ($- p_0$) und durch die mit ihm verschweißte Hülle auf Zug (p_1) belastet wird. Diese Belastung entsteht durch die verhinderte axiale thermische Ausdehnung der aufgeheizten Brennstoffsäule.

Aus den genannten Gleichungen erkennt man (durch Einsetzen der Randkoordinaten), daß an der Stelle der axialen Maximalbelastung ($z = h_1$) und am Rand des Brennstabes ($r = a$) die Randbedingungen exakt erfüllt sind. Das bedeutet: in der Umgebung der maximalen Belastung werden die Spannungsverhältnisse durch den vorstehend entwickelten Formalismus genau beschrieben. Am unteren Ende des Stopfens ($z = 0$) werden die Randbedingungen nicht ganz erfüllt. Es bleiben dort nach den Formeln geringe Restbeträge. Die wahren Werte müßten (nach den Randbedingungen) Null sein. Da aber, wie aus den Gleichungen hervorgeht, die Spannungen mit der Exponentialfunktion abnehmen, sind diese Restbeträge minimal, so daß der Fehler dort sehr klein bleibt. Interessant ist, daß die Spannungen mit der Exponentialfunktion abnehmen; d.h. äußere Belastungen - dergestalt wie sie hier gegeben sind - erzeugen nur im unmittelbar angrenzenden Bereich des Körpers nennenswerte Spannungen. Sie klingen mit zunehmender Entfernung von der Angriffsfläche sehr schnell ab.

5. Das Belastungssystem für die Kontaktzone Brennstoff/Hülle

Bei der Aufheizung der Brennstoffsäule erfährt diese Zone eine zweifache Belastung. Einmal ist es die äußere Belastung, die dadurch entsteht, daß der noch freistehende Anteil der Brennstoffsäule (in Zone III) sich in axialer Richtung auszudehnen versucht und dadurch im Radialbereich der Säule auf das sich darüber befindliche System drückt. Dadurch wird das betrachtete System im Radialbereich

der Brennstoffsäule ($r = 0$ bis $r = b$) auf Druck, im Radialbereich der Hülle ($r = b$ bis $r = a$) auf Zug beansprucht. Es ist dies dieselbe Belastung, die der schon betrachtete Stopfen erfährt. Zum anderen wird diese Zone durch das Temperaturfeld T belastet, welches durch den sich in ihr befindenden, ebenfalls aufgeheizten Brennstoffsäulenanteil erzeugt wird.

Zur mathematischen Behandlung dieses Systems sind die vollständigen Differentialgleichungen der Verschiebungen (3.7) und (3.8) zu lösen.

Da es sich bei den genannten Gleichungen um lineare Gleichungen handelt, können die Gesamtlösungen aus Teillösungen zusammengesetzt werden. Demnach lassen sich auch die Differentialgleichungen, aus denen sie hervorgegangen sind, aufspalten. Letztere lassen sich damit aufspalten in solche, die die Wirkungen der äußeren mechanischen Kräfte beschreiben und solche, die die thermischen Wirkungen beschreiben.

5.1 Das mechanische Belastungssystem

Nach dem Prinzip der Gleichheit von actio und reactio sind die auf das System wirkenden äußeren Kräfte genau dieselben, wie die auf den Stopfen wirkenden. Wenn man nun den Koordinatenursprung an das obere Ende der verklebten Zone mit der positiven z -Richtung nach unten legt, gelten genau die durch die Gln. (4.37) bis (4.44) gegebenen Randbedingungen. Damit gelten auch hier die Spannungsgleichungen (4.81) bis (4.88). Nur ist dort die Stopfenhöhe (h_1) durch die Länge der verklebten Zone (h_2) zu ersetzen. Der einzige Unterschied zwischen dem Stopfen und der hier betrachteten Zone ist, daß in der letztgenannten Materialien mit verschiedenen Elastizitätsmodulen vorhanden sind. Da aber der Elastizitätsmodul in den genannten Gleichungen nicht mehr vorhanden ist, gelten diese hier uneingeschränkt. Damit ist das von den mechanischen Kraftwirkungen hervorgerufene Belastungssystem mathematisch durch die Gleichungen (4.81) bis (4.88) beschrieben.

5.2 Das thermische Belastungssystem

Wegen des kleinen Verhältnisses von Brennstabradius zu Brennstablänge und wegen des in der betrachteten Zone bestehenden kleinen axialen Temperaturgradienten kann der Wärmefluß in axialer Richtung vernachlässigt werden. Damit wird das in den Verschiebungs-Differentialgleichungen (3.7)

und (3.8) auftretende Temperaturfeld, wenn man es zunächst als stationär annimmt, $T = T(r)$ (näherungsweise) eine reine Radialfunktion.

Man kann nun, wegen der Linearität der das System beschreibenden Differentialgleichungen die Wirkungen des Temperaturfeldes (a) in ein reines Schubspannungsfreies Radialsystem und (b) in ein Schubspannungsbehaftetes System zerlegen – letzteres entsteht durch die unterschiedlichen Wärmeausdehnungszahlen von Brennstoff- und Hüllmaterial – und beide getrennt behandeln.

a) Das Schubspannungsfreie System:

Wegen $T = T(r)$ werden die "thermischen" Spannungen und die Radialverschiebung $u = u(r)$ reine Radialfunktionen. Wegen dem Fehlen der Schubspannung ($\tau = 0$) wird, nach Gl. (3.2d), die Axialverschiebung $w = w(z)$ eine reine Axialfunktion.

Es wird damit:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (5.1)$$

Die Verträglichkeitsbedingung (3.5) nach r differenziert und, unter Beachtung von Gl. (5.1) in die Radialverschiebungs-Differentialgleichung (3.7) eingesetzt, ergibt für dieselbe:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} \frac{dT}{dr} \quad (5.2)$$

Die Verträglichkeitsbedingung (3.5) nach z differenziert und, unter Beachtung von Gl. (5.1) in die Axialverschiebungs-Differentialgleichung (3.8) eingesetzt, ergibt für dieselbe:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \quad (5.3)$$

Gl. (5.2) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right) = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} \frac{dT}{dr} \quad (5.4)$$

Gl. (5.4) zweimal integriert, ergibt für die Radialverschiebung:

$$u(r) = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} \frac{1}{r} \int rT(r) dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (5.5)$$

Hierbei sind C_1 und C_2 zunächst beliebige Konstanten.

Gl. (5.3) zweimal integriert, ergibt für die Axialverschiebung:

$$w(z) = A_1 z + A_2 \quad (5.6)$$

Hierbei sind A_1 und A_2 ebenfalls zunächst willkürliche Konstanten. A_2 kann im weiteren als Null gesetzt werden, da sie nur eine Transversalverschiebung des gesamten Systems bedeutet.

Mit den Gln. (5.5) und (5.6) in die Verträglichkeitsbedingung (3.5) eingegangen, ergibt:

$$\epsilon(r) = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} T(r) + 2 C_1 + A_1 \quad (5.7)$$

Mit den Gln. (5.5), (5.6) und (5.7), unter Beachtung von Gl. (3.4) in die Spannungsgleichungen (3.2) eingegangen, ergibt für die Spannungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \sigma_r(r) = E \left\{ \frac{(C_1 + \nu A_1)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{C_2}{(1+\nu)r^2} - \frac{\alpha}{(1-\nu)r^2} \int rT(r) dr \right\} \\ \text{b) } \sigma_t(r) = E \left\{ \frac{(C_1 + \nu A_1)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{C_2}{(1+\nu)r^2} - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \left[T(r) - \frac{1}{r^2} \int rT(r) dr \right] \right\} \\ \text{c) } \sigma_z(r) = E \left\{ \frac{(1-\nu)A_1 + 2\nu C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\alpha}{(1-\nu)} T(r) \right\} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Die in den Gln. (5.8) hergeleiteten Spannungen gelten sowohl für den Brennstoffzylinder als auch für die Hülle; je nachdem welche Temperaturverteilung verwendet wird.

Die in den Gln. (5.8) auftretenden Konstanten sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

Am Außenrand des Brennstabes ($r = a$) ist die Radialspannung Null. In der Kontaktfläche Brennstoff-Hülle ($r = b$) sind die Radialspannungen von Hülle

und Brennstoffsäule gleich (gleich dem Kontaktdruck); außerdem sind dort die Radialverschiebungen derselben gleich. Ferner haben die Spannungen in der Brennstoffsäule für $r = 0$ endliche Werte. An den Enden des Systems treten hier keine Belastungen auf.

Damit gelten hier die Randbedingungen:

$$\sigma_{rc}(a) = 0 \quad (5.9)$$

$$\sigma_{rc}(b) = \sigma_{rb}(b) \quad (5.10)$$

$$u_c(b) = u_b(b) \quad (5.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rb}(0) \\ \sigma_{tb}(0) \end{array} \right\} \neq \infty \quad (5.12)$$

$$\int_0^b \sigma_{zb} r dr = 0 \quad (5.13)$$

$$\int_b^a \sigma_{zc} r dr = 0 \quad (5.14)$$

In den Randbedingungen (5.9) bis (5.14) und im folgenden bezeichnen die Indices c die Hülle und b den Brennstoff.

Um die Konstanten in Gl. (5.8) mit den vorstehenden Randbedingungen bestimmen zu können, muß die Temperaturverteilung in Brennstoffsäule und Hülle bekannt sein.

Das Temperaturfeld $T = T(r, t)$ im Brennstoffzylinder und der Hülle: Die Temperaturverteilung im Brennstab ist durch folgende Wärmeleitungsgleichung gegeben:

$$\frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.15)$$

Hierbei ist $k/\rho c$ die Temperaturleitfähigkeit, k die Wärmeleitfähigkeit, ρ die Dichte, c die spezifische Wärme und q die Wärmequellendichte.

Wegen $T = T(r)$ wird $\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$.

Damit wird aus Gl. (5.15):

$$\frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.16)$$

Gl. (5.16) gilt sowohl für die Brennstoffsäule als auch für die Hülle. Für letztere ist, da in ihr kaum Wärme erzeugt wird, $q = 0$ zu setzen.

Im allgemeinen ist die Wärmeleitfähigkeit k eine Funktion der Temperatur. In dem hier zu erwartenden Temperaturbereich nimmt sie mit zunehmender Temperatur ab. Gleichzeitig nimmt aber auch die Dichte ρ ab. Damit kann man hier mit guter Näherung die Temperaturleitfähigkeit als konstant annehmen. Da Gl. (5.16) linear ist, läßt sich die Temperatur aufspalten in einen stationären Anteil $T_s = T_s(r)$ und einen instationären Anteil $T_i = T_i(r,t)$ und die Gesamttemperatur additiv aus beiden Anteilen zusammensetzen. Damit gilt:

$$T(r,t) = T_s(r) + T_i(r,t) \quad (5.17)$$

Mit Gl. (5.17) in Gl. (5.16) eingegangen und dieselbe zerlegt, ergibt

- für den stationären Anteil (wenn die Wärmequellldichte q zunächst als konstant angenommen wird):

$$\frac{k}{\rho c} \left(\frac{d^2 T_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_s}{dr} \right) + \frac{q}{\rho c} = 0 \quad (5.18)$$

- für den instationären Anteil:

$$\frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (5.19)$$

Lösen der für die Brennstoffsäule gültigen stationären Wärmeleitungsgleichung:

Gl. (5.18) etwas umgeformt lautet:

$$\frac{d \left(r \frac{dT_{bs}}{dr} \right)}{dr} = - \frac{q}{k_b} r \quad (5.20)$$

Gl. (5.20) zweimal integriert, ergibt für die Brennstoffsäulentemperatur:

$$T_{bs}(r) = - \frac{q}{k_b} \frac{r^2}{4} + C_{1b} \ln r + C_{2b} \quad (5.21)$$

In Gl. (5.21) muß die Integrationskonstante $C_{1b} = 0$ sein, weil die Temperatur für $r = 0$ einen endlichen Wert besitzen muß. Die Integrationskonstante C_{2b} ist aus einer Randbedingung zu bestimmen.

Lösen der für die Brennstabhülle gültige stationären Wärmeleitungsgleichung:

In der Brennstabhülle wird kaum Wärme erzeugt. Damit ergibt sich aus Gl. (5.18) (mit $q = 0$) die für die Hülle gültige stationäre Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{d^2 T_{cs}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_{cs}}{dr} = 0 \quad (5.22)$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (5.22) lautet:

$$T_{cs}(r) = C_{1c} \ln r + C_{2c} \quad (5.23)$$

Hierbei bedeuten C_{1c} und C_{2c} Integrationskonstanten; sie sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

Randbedingungen:

Setzt man die Kühlmiteleintrittstemperatur der Einfachheit halber Null und vernachlässigt die Kühlmittelaufheizung, dann gilt für den Wärmeübergang Hülle-Kühlmittel ($r = a$) die Randbedingung:

$$k_c \left. \frac{dT_c}{dr} \right|_{r=a} = -\beta T_c(a) \quad (5.24)$$

Hierbei ist β die Wärmeübergangszahl Hülle-Kühlmittel.

In der Grenzfläche Brennstoff-Hülle ($r=b$) wird keine Wärme gespeichert; dies führt auf die Randbedingung:

$$k_c \left. \frac{dT_c}{dr} \right|_{r=b} = k_b \left. \frac{dT_b}{dr} \right|_{r=b} \quad (5.25)$$

Obwohl in diesem hier betrachteten Brennstababschnitt die Brennstoffsäulenoberfläche an der Hüllinnenwand anliegt, sind in der Berührungsfläche ($r=b$) die Temperaturen von Brennstoff und Hülle nicht gleich. Damit gilt die Randbedingung:

$$T_c(b) = T_b(b) - \Delta T \quad (5.26)$$

- ΔT ist der Temperatursprung in der Grenzschicht.

Mit den allgemeinen Temperaturgleichungen (5.21) und (5.23) in die Randbedingungen (5.24), (5.25) und (5.26) eingegangen, ergibt (mit $C_{1b} = 0$) für die Konstanten:

$$C_{1c} = -\frac{q \cdot b^2}{2 k_c}, \quad C_{2c} = \frac{\left(\frac{k_c}{a} + \beta \cdot \ln a\right) \cdot \frac{q \cdot b^2}{2 k_c}}{\beta}$$

$$C_{2b} = \frac{q \cdot b^2}{2} \left[\left(\frac{1}{2 k_b} + \frac{1}{\alpha \beta}\right) + \frac{1}{k_c} \ln \left(\frac{a}{b}\right) \right] + \Delta T$$

Mit diesen Ausdrücken in die Temperaturgleichungen (5.21) und (5.23) eingegangen, ergibt für die stationären Temperaturverteilungen

- in der Brennstoffsäule:

$$T_{bs}(r) = \frac{q}{2} \left[\frac{(b^2 - r^2)}{2 k_b} + \frac{b^2}{k_c} \left(\frac{k_c}{a \beta} + \ln \left(\frac{a}{b}\right) \right) \right] + \Delta T \quad (5.27)$$

- in der Brennstabhülle:

$$T_{cs}(r) = \frac{q \cdot b^2}{2 k_c} \left[\frac{k_c}{a \beta} + \ln \left(\frac{a}{r}\right) \right] \quad (5.28)$$

Lösen der instationären Wärmeleitungsgleichung (5.19):

Da die Gl. (5.19) linear ist, kann ihre allgemeine Lösung durch einen Produktansatz gewonnen werden. Es wird gesetzt:

$$T_i(r, t) = \phi(r) \cdot \Psi(t) \quad (5.29)$$

Mit diesem Lösungsansatz in Gl. (5.19) eingegangen, ergibt nach Trennen der Veränderlichen:

$$\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\rho c}{k} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (5.30)$$

Hierbei ist $(-\lambda^2)$ eine zunächst willkürliche Konstante.

Aus Gl. (5.30) ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

- für die Radialfunktion:

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \lambda^2 \phi = 0 \quad (5.31)$$

- für die Zeitfunktion:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{k \lambda^2}{\rho c} \Psi = 0 \quad (5.32)$$

Gl. (5.31) ist eine Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung; ihre allgemeine Lösung lautet:

$$\phi(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r) \quad (5.33)$$

Hierbei sind C_1 und C_2 zunächst willkürliche Konstanten. $J_0(\lambda r)$ und $N_0(\lambda r)$ sind Besselfunktionen nullter Ordnung erster bzw. zweiter Art.

Die allgemeine Lösung von Gl. (5.32) lautet:

$$\psi(t) = e^{-\frac{k\lambda^2}{\rho c} t} \quad (5.34)$$

Mit den Gln. (5.33) und (5.34) wird nach dem Lösungsansatz (5.29) das allgemeine Integral der instationären Wärmeleitungsgleichung (5.19):

$$T_i(r, t) = [C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r)] e^{-\frac{k\lambda^2}{\rho c} t} \quad (5.35)$$

Gl. (5.35) gilt sowohl für die Brennstoffsäule als auch für die Hülle, je nachdem welche Temperaturleitfähigkeit ($k/\rho c$) in der Exponentialfunktion verwendet wird. Für den Brennstoffbereich muß die Konstante $C_2=0$ sein, da - wie bereits früher erwähnt - die Neumannsche Funktion $N_0(\lambda r)$ für $r=0$ nicht endlich ist.

Die durch die Gln. (5.24), (5.25) und (5.26) gegebenen Randbedingungen gelten auch für die instationären Temperaturen von Brennstoffsäule und Hülle, d.h. sie können zur Bestimmung der in Gl. (5.35) auftretenden Konstanten herangezogen werden.

Die instationären Temperaturen von Brennstoff und Hülle aus Gl. (5.35) sind, der Randbedingung (5.26) entsprechend, dann einander gleich, wenn die in den Exponentialfunktionen auftretenden Zeitkonstanten und die Ortsfunktionen in der Berührungsgrenzschicht ($r=b$) einander gleich sind. (Den instationären Temperatursprungzuwachs nicht berücksichtigt.) Damit gilt:

$$\left(\frac{\rho c}{k\lambda^2} \right)_b = \left(\frac{\rho c}{k\lambda^2} \right)_c \quad (5.36)$$

und (mit $C_{2b} = 0$)

$$C_{1c} J_0(\lambda_c b) = C_{1b} J_0(\lambda_b b) \quad (5.37)$$

Aus Gl. (5.37) folgt: $C_{2c} = 0$.

Mit Gl. (5.35), unter Beachtung von $C_{2c}=0$ in die Randbedingung (5.24) eingegangen, ergibt mit der Differentiationsregel für Zylinderfunktionen (4.11) die Eigenwertgleichung:

$$\lambda_c J_1(\lambda_c a) = \frac{\beta}{k_c} J_0(\lambda_c a) \quad (5.38)$$

Gl. (5.38) ist eine transzendente Gleichung; sie hat unendlich viele Lösungen ($\lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \dots, \lambda_{cn}$). Mit diesen, für die Hülle gültigen Eigenwerten λ_{cn} und den bekannten Materialdaten lassen sich aus Gl. (5.36) die für die Brennstoffsäule gültigen Eigenwerte λ_{bn} berechnen.

Mit den gewonnenen Erkenntnissen nehmen die instationären Temperaturgleichungen (5.35) folgende Formen an

- für die Brennstoffsäule:

$$T_{ib}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{bn} J_0(\lambda_{bn} r) e^{-\left(\frac{k\lambda_n^2}{\rho c}\right)_b t} \quad (5.39)$$

- für die Hülle:

$$T_{ic}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{cn} J_0(\lambda_{cn} r) e^{-\left(\frac{k\lambda_n^2}{\rho c}\right)_c t} \quad (5.40)$$

Die in den Gln. (5.39) und (5.40) noch verbliebenen Konstanten C_n sind aus Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Entsprechend der Aufspaltung der Wärmeleitungsgleichung (5.16) in einen stationären und einen instationären Anteil lassen sich die vollständigen Lösungen, Gl. (5.17) entsprechend, additiv aus stationärer und instationärer Lösung zusammensetzen.

Damit wird aus den Gln. (5.27) und (5.39) die Temperaturverteilung in der Brennstoffsäule:

$$T_b(r,t) = \frac{q}{2} \left[\frac{(b^2 - r^2)}{2k_b} + \frac{b^2}{k_c} \left(\frac{k_c}{\alpha\beta} + \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} C_{bn} J_0(\lambda_{bn} r) e^{-\left(\frac{k\lambda_n^2}{\rho c}\right)_b t} + \Delta T \quad (5.41)$$

Aus den Gln. (5.28) und (5.40) die Temperaturverteilung in der Hülle:

$$T_c(r,t) = \frac{q b^2}{2 k_c} \left[\frac{k_c}{\alpha\beta} + \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} C_{cn} J_0(\lambda_{cn} r) e^{-\left(\frac{k\lambda_n^2}{\rho c}\right)_c t} \quad (5.42)$$

Mit den Gln. (5.41) und (5.42) ist der Temperaturverlauf in Brennstoffsäule und Hülle gegeben, wenn die Wärmequellldichte zum Zeitpunkt $t=0$ ruckartig entweder von Null auf q oder von einer vorausgegangenen stationären Wärmequellldichte um q auf eine neue stationäre Wärmequellldichte erhöht wird. Man erkennt aus den Gleichungen, daß der zeitliche Temperaturanstieg der Leistungserhöhung nur verzögert folgt. Wie rasch er erfolgt, hängt von den in den Verzögerungsgliedern enthaltenen Zeitkonstanten $\rho c/k\lambda_n^2$ ab. Theoretisch läuft die Temperatur, den Gleichungen entsprechend, erst für $t \rightarrow \infty$ in den stationären Zustand ein.

Bestimmung der Amplitudenfaktoren C_n der Besselfunktionen:

Zum Zeitpunkt $t=0$ wird die Temperatur im Brennstab mit Null angenommen.

Damit wird aus den Gln. (5.41) und (5.42):

$$-\frac{q}{2} \left[\frac{(b^2-r^2)}{2k_b} + \frac{b^2}{k_c} \left(\frac{k_c}{\alpha\beta} + \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_{bn} J_0(\lambda_{bn} r) \quad (5.43)$$

$$-\frac{q b^2}{2 k_c} \left[\frac{k_c}{\alpha\beta} + (\ln a - \ln r) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_{cn} J_0(\lambda_{cn} r) \quad (5.44)$$

Die Multiplikation der Gln. (5.43) und (5.44) mit $r J_0(\lambda_m r)$ und Integration über die für sie gültigen Grundgebiete, ergibt:

$$\begin{aligned} -\frac{q}{2} \left[\int_0^b \frac{(b^2-r^2)r}{2k_b} J_0(\lambda_{bm} r) dr + \frac{b^2}{k_c} \left(\frac{k_c}{\alpha\beta} + \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right) \int_0^b r J_0(\lambda_{bm} r) dr \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} C_{bn} \int_0^b r J_0(\lambda_{bm} r) J_0(\lambda_{bn} r) dr \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} -\frac{q b^2}{2 k_c} \left[\left(\frac{k_c}{\alpha\beta} + \ln a \right) \int_b^a r J_0(\lambda_{cm} r) dr - \int_b^a (\ln r) r J_0(\lambda_{cm} r) dr \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} C_{cn} \int_b^a r J_0(\lambda_{cm} r) J_0(\lambda_{cn} r) dr \end{aligned} \quad (5.46)$$

Die Integrale der rechten Seite der Gln. (5.45) und (5.46) sind durch Gl.(5.47a) gegeben. Aus ihr ergibt sich die Orthogonalrelation der Besselfunktionen.

$$\int_0^r r J_0(\kappa_m r) J_0(\kappa_n r) dr = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ r^2/2 J_1^2(\kappa_n r) & \text{für } m = n \end{cases} \quad (5.47a)$$

Für die Integration der Besselfunktionen gilt allgemein:

$$\int_0^r r^m J_{m-1}(\lambda r) dr = \frac{r^m}{\lambda} J_m(\lambda r) \quad (m > 0) \quad (5.47)$$

Daraus wird (mit $m = 1$):

$$\int_0^r r J_0(\lambda r) dr = \frac{r}{\lambda} J_1(\lambda r) \quad (5.48)$$

Für das unter anderem auf der linken Seite der Gl. (5.45) auftretende Integral ist:

$$\int_0^r r^3 J_0(\lambda r) dr = \int_0^r \frac{r^2}{\lambda} \frac{\partial(r J_1(\lambda r))}{\partial r} dr \quad (5.49)$$

Partielle Integration von Gl. (5.49) liefert, unter Beachtung von Gl. (5.47):

$$\int_0^r r^3 J_0(\lambda r) dr = \frac{r^3}{\lambda} J_1(\lambda r) - \frac{2 r^2}{\lambda^2} J_2(\lambda r) \quad (5.50)$$

Für Besselfunktionen höherer Ordnung gilt die Rekursionsformel:

$$J_{m+1}(\lambda r) = \frac{2m}{(\lambda r)} J_m(\lambda r) - J_{m-1}(\lambda r) \quad (5.51)$$

Mit $m=1$ wird aus Gl. (5.51)

$$J_2(\lambda r) = \frac{2}{(\lambda r)} J_1(\lambda r) - J_0(\lambda r)$$

Damit in Gl. (5.50) eingegangen, ergibt:

$$\int_0^r r^3 J_0(\lambda r) dr = \frac{2 r^2}{\lambda^2} \left\{ J_0(\lambda r) + \left(\frac{\lambda r}{2} + \frac{2}{\lambda r} \right) J_1(\lambda r) \right\} \quad (5.52)$$

Kombiniert man Gl. (5.52) mit Gl. (5.48), so erhält man für das erste Integral der rechten Seite von Gl. (5.45):

$$\int_0^b (b^2 - r^2) r J_0(\lambda_{bm} r) dr = \frac{4b}{\lambda^3} J_1(\lambda_{bm} b) - \frac{2 b^2}{\lambda_{bm}^2} J_0(\lambda_{bm} b) \quad (5.53)$$

Mit den Integralen (5.48), (5.53) und (5.47a) in Gl. (5.45) eingegangen, ergibt für die Amplitudenfaktoren der Besselfunktionen im Brennstoffzylinder-Radialbereich ($r = 0$ bis $r = b$):

$$C_{bn} = - \frac{q}{\lambda_{bn} J_1(\lambda_{bn} b)} \left\{ \frac{1}{2 k_b} \left[\frac{4}{\lambda_{bn}^2 b} - \frac{2}{\lambda_{bn}} \frac{J_0(\lambda_{bn} b)}{J_1(\lambda_{bn} b)} \right] + \frac{b}{k_c} \left[\frac{k_c}{a\beta} + \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right] \right\} \quad (5.54)$$

Die Kombination der auf der linken Seite von Gl. (5.46) stehenden Integrale, ergibt nach partieller Integration, unter Beachtung der Gln. (4.11) und (5.48):

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{k_c}{\beta} + \ln a \right) \int_b^a J_0(\lambda_{cm} r) dr - \int_b^a \ln r J_0(\lambda_{cm} r) dr \right] = \\ & \frac{k_c}{a\beta \lambda_{cm}} (a J_1(\lambda_{cm} a) - b J_1(\lambda_{cm} b)) - \frac{b}{\lambda_{cm}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{1}{\lambda_{cm}^2} (J_0(\lambda_{cm} a) - J_0(\lambda_{cm} b)) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Mit Gl. (5.55) und der Orthogonalrelation (5.47a) (mit den Grenzen a und b) und den hier gültigen Eigenwerten λ_{cn} in Gl. (5.46) eingegangen, ergibt für die Amplitudenfaktoren der Besselfunktionen im Hüll-Radialbereich ($r = b$ bis $r = a$):

$$\begin{aligned} C_{cn} = & \frac{q b^2}{k_c \lambda_{cn} (a^2 J_1^2(\lambda_{cn} a) - b^2 J_1^2(\lambda_{cn} b))} \left\{ \frac{k_c (a J_1(\lambda_{cn} a) - b J_1(\lambda_{cn} b))}{a \beta} - b \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda_{cn}^2} (J_0(\lambda_{cn} a) - J_0(\lambda_{cn} b)) \right\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Wie bereits bemerkt, ist mit den Gln. (5.41) und (5.42) der Temperaturverlauf in Brennstoffsäule und Hülle gegeben, wenn die Wärmequellendichte zum Zeitpunkt $t=0$ ruckartig um den konstanten Wert q erhöht wird. Durch die in den genannten Gleichungen enthaltenen instationären Temperaturanteile wird der Temperaturanstieg zeitlich verzögert.

Es interessiert hier aber nicht nur dieser Anfahrvorgang, sondern auch die Auswirkungen beliebiger, zum beliebigen Zeitpunkt einsetzende Änderungen der Wärmequellendichte.

Mit den Zeitkonstanten

$$\theta_n = \frac{\rho c}{k \lambda_n^2} \quad (5.57)$$

lassen sich die Brennstofftemperatur (Gl. (5.41)) und die Hülltemperatur

(Gl. (5.42)) unter Beachtung der Gln. (5.54) und (5.56) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{T_b(r,t)}{q} = \chi_b(r,t) = \left\{ \phi_b(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{bn}^* J_0(\lambda_{bn} r) e^{-\frac{t}{\theta_{bn}}} \right\} \quad (5.58)$$

$$\frac{T_c(r,t)}{q} = \chi_c(r,t) = \left\{ \phi_c(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{cn}^* J_0(\lambda_{cn} r) e^{-\frac{t}{\theta_{cn}}} \right\} \quad (5.59)$$

Die durch das Verhältnis vom zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße (hier die Temperatur T) zur Eingangs- oder Störgröße (hier die Wärmequellendichte q) gegebene Zeitfunktion $\chi(r,t)$ bezeichnet man als Übergangsfunktion des Systems. (Die hier noch auftretende radiale Abhängigkeit spielt dabei keine Rolle.) Die Störfunktion q ist hierbei eine "Sprung"-Funktion.

Damit gilt, nach den Gln. (5.58) bzw. (5.59) für den Temperaturverlauf:

$$T(r,t) = q \chi(r,t) \quad (5.60)$$

Gl. (5.60) gibt, wie bereits bemerkt, den Temperaturverlauf, wenn die Wärmequellendichte zum Zeitpunkt $t=0$ von Null sprunghaft auf den konstanten Wert q erhöht wird. Setzt nun der Leistungssprung q nicht wie bei diesem Anfahrvorgang zum Zeitpunkt $t=0$, sondern zu irgendeinem anderen Zeitpunkt $t=\tau$ ein, so ist der Temperaturverlauf (Gl. (5.60) entsprechend) gegeben durch:

$$T(r,t) = q \chi(r, (t-\tau)) \quad (5.61)$$

Beträgt nun die Dauer eines zum Zeitpunkt $t=\tau$ einsetzenden Leistungssprungs der Größe q die Zeit $d\tau$, dann ist die durch diesen Leistungsimpuls erzeugte infinitesimale Temperaturänderung oder, was dasselbe ist, der Linearzuwachs der Temperatur durch das totale Differential gegeben.

Damit ist die vom Leistungsimpuls $q d\tau$ hervorgerufene Temperaturänderung (aus Gl. (5.61)):

$$dT(r,t) = q \dot{\chi}(r, (t-\tau)) d\tau \quad (5.62)$$

Hierbei ist $\dot{\chi}$ die zeitliche Ableitung der Übergangsfunktion.

Aus derartigen Leistungsimpulsen kann man jeden beliebigen zeitlichen Verlauf einer Leistungsfunktion zusammensetzen. Jeder Impuls setzt zu einem Zeitpunkt $t=\tau$ ein und hat den Betrag $q=q(\tau)$.

Zu jedem Leistungsimpuls gehört daher (nach Gl. (5.62)) ein zeitlicher Verlauf der Temperatur von:

$$dT(r,t) = q(\tau) \dot{\chi}(r, (t-\tau)) d\tau \quad (5.63)$$

Wegen der Linearität des Systems überlagern sich die von den einzelnen Impulsen herrührenden Anteile von $T(r,t)$, so daß man den wirklichen Wert von $T(r,t)$ in irgendeinem Zeitpunkt t erhält, wenn man die Wirkung aller Leistungsimpulse von $\tau=\tau_0$ bis $\tau=t$ summiert.

Diese Summation ausgeführt, ergibt für den zeitlichen Temperaturverlauf:

$$T(r,t) = \int_{\tau_0}^t q(\tau) \dot{\chi}(r, (t-\tau)) d\tau \quad (5.64)$$

Um den zeitlichen Verlauf der Temperatur nach Gl. (5.64) berechnen zu können, muß der zeitliche Verlauf der Wärmequellendichte $q(\tau)$ bzw. $q(t)$ und die Übergangsfunktion χ bzw. deren zeitliche Ableitung $\dot{\chi}$ bekannt sein.

Die Übergangsfunktionen $\chi(r,t)$ für die Brennstoff- und Hülltemperatur sind mit den Gln. (5.58) bzw. (5.59) gegeben, wobei die stationären Radialfunktionen $\phi_b(r)$ und $\phi_c(r)$ den Gln. (5.41) bzw. (5.42), die Konstanten C_n^* den Gln. (5.54) bzw. (5.56) zu entnehmen sind.

Aus Gl. (5.58) oder (5.59) ergibt sich die, sowohl für die Brennstoffsäule als auch für die Hülle gültige Form der Übergangsfunktion (wenn man dort noch für $t = (t-\tau)$ setzt) zu:

$$\chi(r, t-\tau) = \left[\phi(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^*}{\theta_n} J_0(\lambda_n r) e^{-\frac{(t-\tau)}{\theta_n}} \right] \quad (5.65)$$

Gl. (5.65) nach der Zeit abgeleitet, ergibt:

$$\dot{\chi}(r, (t-\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{C_n^*}{\theta_n} J_0(\lambda_n r) e^{-\frac{t}{\theta_n}} e^{-\frac{\tau}{\theta_n}} \quad (5.66)$$

Der instationäre Leistungsverlauf eines Kernreaktors und damit eines Brennelementes ist fast immer eine mehr oder weniger steil ansteigende Leistungs-

rampe. Damit ist:

$$q(t) = \dot{q} t \quad (5.67)$$

Hierbei ist \dot{q} der (konstante) Leistungsanstieg.

Aus der Leistungsgleichung (5.67) wird für die zum Zeitpunkt $t = \tau_0$ einsetzende Brennstableistung:

$$q(\tau) = \dot{q}\tau \quad (5.68)$$

Zu bemerken ist, daß es sich bei der durch Gl. (5.68) gegebenen Leistung nur um die instationäre handelt. Die vor dem Zeitpunkt $t = \tau_0$ (eventuell) bestehende stationäre Leistung spielt hier keine Rolle.

Mit den Gln. (5.66) und (5.68) in Gl. (5.64) eingegangen, ergibt für den zeitlichen Temperaturverlauf:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{C_n^*}{\theta_n} J_0(\lambda_n r) e^{-\frac{t}{\theta_n}} \int_{\tau_0}^t \dot{q}\tau e^{\frac{\tau}{\theta_n}} d\tau \quad (5.69)$$

Das in Gl. (5.69) auftretende Integral gelöst, ergibt damit aus der genannten Gleichung den instationären Temperaturverlauf für Brennstoffsäule und Hülle (je nachdem welche Zeitkonstanten θ_n und welche Eigenwerte λ_n verwendet werden) bei rampenförmigem Brennstableistungsverlauf zu:

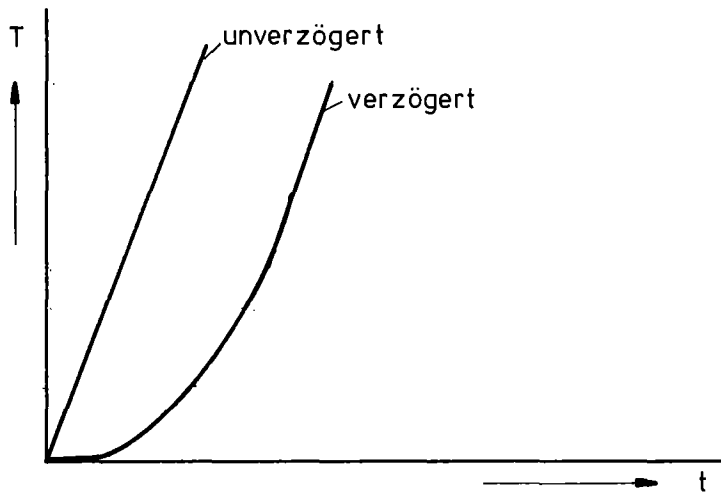
$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - C_n^* J_0(\lambda_n r) \dot{q} \theta_n \left[\left(\frac{t}{\theta_n} - 1 \right) - \left(\frac{\tau_0}{\theta_n} - 1 \right) e^{-\frac{(t-\tau_0)}{\theta_n}} \right] \quad (5.70)$$

Für große t wird $(\tau_0/\theta_n - 1) e^{-(t-\tau_0)/\theta_n} \ll (t/\theta_n - 1)$; damit wird dann aus Gl. (5.70) für den instationären Temperaturverlauf im Brennstab:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - C_n^* J_0(\lambda_n r) \dot{q} (t - \theta_n) \quad (5.71)$$

In Abb. 3 ist der durch die Gln. (5.70) und (5.71) gegebene Temperaturverlauf aufgezeichnet. Der nichtlineare Anfangsverlauf ist durch die in Gl. (5.70) enthaltenen, zu Beginn der Leistungsrampe maßgeblichen Verzögerungsglieder gegeben. Sind diese mit größer werdender Zeit weitgehend abgeklungen, verläuft die Temperatur, wie aus Gl. (5.71) ersichtlich ist, mit $\sum \theta_n$ verzögert parallel zum Temperaturverlauf, der vorhanden sein würde, wenn es keine Verzögerung

gäbe, d.h. sie verläuft dann parallel zum Leistungsanstieg.



Abh. 3 Temperaturverlauf beim Leistungsanstieg

Aus den vorstehenden instationären Temperaturbetrachtungen ergab sich, daß Temperaturänderungen als Folge von Leistungsänderungen ein Verzögerungssystem erster Ordnung darstellen. Hierbei ist die sich sprunghaft ändernde Leistung die Störfunktion, die als Folge daraus sich ändernde Temperatur die Antwortfunktion. Beide sind durch die die Zeitkonstanten enthaltende Übergangsfunktion miteinander verknüpft. Ändert sich die Leistung sprunghaft auf einen neuen Wert, so läuft die Temperatur, den in der Übergangsfunktion enthaltenen Zeitkonstanten entsprechend, mehr oder weniger schnell in den neuen Gleichgewichtszustand ein. Dieser Fall ist z.B. im Anfahrvorgang gegeben. Mathematisch ist er durch die Gln. (5.58) (für die Brennstoffsäule) und (5.59) (für die Hülle) gegeben.

Liegt ein beliebiger zeitlicher Verlauf der Leistungsänderung vor, so wird die sich daraus ergebende Temperaturänderung als Wirkung der Summe kleiner (infinitesimaler) sprunghafter Leistungsimpulse dargestellt, wobei die einzelnen Impulse und die daraus resultierenden Temperaturänderungen wiederum durch die die Zeitkonstanten enthaltende Übergangsfunktion bzw. deren zeitliche Ableitung miteinander verknüpft sind. Mathematisch ist dieser Fall für eine rampenförmige Leistungsänderung durch die Gln. (5.70) bzw. (5.71) gegeben.

Rechnungen haben ergeben, daß mit den infrage kommenden Brennstabbradien a , den Wärmeübergangszahlen β und den Wärmeleitfähigkeiten des Hüllmaterials k_c

der nach Gl. (5.38) berechnete kleinste Eigenwert $\lambda_{c1} \approx 3,8/\text{cm}$ sein wird. Die mit diesem Eigenwert und den möglichen Hüllmaterialkonstanten nach Gl. (5.57) berechnete größte (maßgebliche) Zeitkonstante beträgt $\Theta_{c1} \approx 1,1 \text{ sec}$. Das bedeutet: Die in den Temperaturgleichungen (5.41) und (5.42) auftretenden instationären Terme fallen bei Temperaturberechnungen mit sprunghaftem Brennstableistungsanstieg nur dann ins Gewicht, wenn die interessierenden Zeiten in der Größenordnung der oben berechneten Zeitkonstanten Θ_{c1} liegen oder kleiner sind. Für Zeiten, die wesentlich größer sind als die oben berechnete Zeitkonstante, sind die in den genannten Temperaturgleichungen auftretenden instationären Terme weitgehend abgeklungen; es herrschen dann praktisch stationäre Verhältnisse. Wenn dies für eine sprunghafte Änderung der Leistung gilt, dann gilt es erst recht für eine mit der Zeit veränderliche, da sich die instationären Abklingzeiten und die Leistungsänderungszeiten zum Teil kompensieren; d.h. während sich die Leistung noch ändert, klingen die instationären Terme schon ab. Für eine rampenförmige Leistungsänderung sind damit die instationären Temperaturterme sicher weitgehend abgeklungen, wenn für die Rampenanstiegszeit gilt: $\Delta t_R \gg \Theta_{c1}$. Das bedeutet: Für diese Fälle kann man bezüglich des Temperaturverlaufes im Brennelement quasistationär rechnen. Die Temperaturänderung folgt der Leistungsänderung dann praktisch unverzögert.

Im allgemeinen spielen Leistungsrampen mit einer Rampendauer von $\Delta t_R \lesssim 1 \text{ sec}$, wenn überhaupt, nur eine untergeordnete Rolle. Es sollen daher hier nur Auswirkungen von Leistungsrampen betrachtet werden, deren Anstiegszeit Δt_R groß ist gegen die oben angegebene. Damit können hier die in den Temperaturgleichungen (5.41) und (5.42) auftretenden instationären Temperaturterme von vornherein vernachlässigt werden. Die Temperaturverteilungen in Brennstoffsäule und Hülle sind damit hier durch die stationären Verteilungen gegeben, obwohl die Brennstableistung variabel ist. Es ist damit der quasistationäre Fall gegeben. Mit den nun damit gültigen Temperaturgleichungen (5.27) und (5.28) können die in den Spannungsgleichungen (5.8) auftretenden Konstanten nach den Randbedingungen (5.9) bis (5.14) bestimmt werden.

Führt man diese Rechnungen aus und setzt die erhaltenen Konstanten in die Spannungsgleichungen (5.8) ein, so erhält man mit $\nu = 1/3$ und der Abkürzung

$$z = a^2 \left(2 + \frac{E_C}{E_b} \right) + b^2 \left(1 - \frac{E_C}{E_b} \right) \quad (5.72)$$

für die thermischen Spannungen in der Brennstoffsäule:

$$\sigma_{rb}(r) = \frac{3E_b}{2} \frac{qb^2}{4k_c} \left\{ \frac{2}{z} \frac{E_c}{E_b} [(a^2-b^2) \left[\alpha_c \left(\frac{k_c}{a\beta} + \frac{1}{2} - \frac{b^2 \ln(\frac{a}{b})}{(a^2-b^2)} \right) - \alpha_b \left(\frac{k_c}{4k_b} + \frac{k_c}{a\beta} + \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right) \right] - \alpha_b \frac{k_c}{4k_b} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \right\} \quad (5.73)$$

$$\sigma_{tb}(r) = \frac{3E_b}{2} \frac{qb^2}{4k_c} \left\{ \frac{2}{z} \frac{E_c}{E_b} [(a^2-b^2) \left[\alpha_c \left(\frac{k_c}{a\beta} + \frac{1}{2} - \frac{b^2 \ln(\frac{a}{b})}{(a^2-b^2)} \right) - \alpha_b \left(\frac{k_c}{4k_b} + \frac{k_c}{a\beta} + \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right) \right] - \alpha_b \frac{k_c}{2k_b} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{b^2} \right) \right\} \quad (5.74)$$

$$\sigma_{zb}(r) = \frac{3E_b}{2} \frac{qb^2}{4k_c} \alpha_b \left\{ - \frac{k_c}{k_b} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{b^2} \right) \right\} \quad (5.75)$$

für die thermischen Spannungen in der Brennstabhülle:

$$\sigma_{rc}(r) = \frac{3E_c}{2} \frac{qb^2}{4k_c} \left\{ \left[\alpha_c \left[\left(1 - \frac{2b^2}{z} \right) \left[\left(\frac{k_c}{a\beta} + \frac{1}{2} \right) - \frac{b^2 \ln(\frac{a}{b})}{(a^2-b^2)} \right] - \left(\frac{k_c}{a\beta} + \frac{1}{2} \right) \right] + \alpha_b \frac{2b^2}{z} \left[\frac{k_c}{4k_b} + \frac{k_c}{a\beta} + \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right] \right] \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \alpha_c \ln \left(\frac{a}{r} \right) \right\} \quad (5.76)$$

$$\sigma_{tc}(r) = \frac{3E_c}{2} \frac{qb^2}{4k_c} \left\{ \left[\alpha_c \left(1 - \frac{2b^2}{z} \right) \left[\frac{k_c}{a\beta} + \frac{1}{2} - \frac{b^2 \ln(\frac{a}{b})}{(a^2-b^2)} \right] + \alpha_b \frac{2b^2}{z} \left[\frac{k_c}{4k_b} + \frac{k_c}{a\beta} + \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right] \right] \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \alpha_c \left[\frac{2k_c}{a\beta} + \left(\frac{k_c}{a\beta} + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + 3 \ln \left(\frac{a}{r} \right) \right] \right\} \quad (5.77)$$

$$\sigma_{zc}(r) = \frac{3 E_c}{2} \frac{q b^2}{4 k_c} \alpha_c \left\{ 1 - \frac{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{(a^2 - b^2)} - 2 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right\} \quad (5.78)$$

Die Gln. (5.73) bis (5.78) liefern die Spannungen in Brennstoffsäule und Hülle als Folge einer Leistungserhöhung um den Betrag q , wobei die Brennstoffsäule bereits vor der Leistungserhöhung mit der Hülle Kontakt hat. Für den Leistungsanstieg ist es hierbei nicht notwendig, daß er streng rampenförmig erfolgt. Wesentlich ist nur, daß die Anstiegszeit groß ist ($\gg 1$ sec), damit die quasistationäre Rechnung erlaubt ist.

Obwohl die mit den Gln. (5.73) bis (5.78) gegebenen Spannungen streng genommen nur für Leistungsänderungszeiten $\Delta t_R \gg \approx 1$ sec gelten, lassen sie auch Abschätzungen für Änderungszeiten $\Delta t_R \lesssim 1$ sec zu. Aus den Temperaturgleichungen (5.41) und (5.42) erkennt man, daß die Temperaturen bei sprunghaftem Leistungsanstieg mit der zuvor berechneten, hier maßgeblichen Zeitkonstanten $\Theta_{1c} \approx 1,1$ sec nach dieser Zeit bereits auf etwa 66 % des stationären Endwertes angestiegen sind. Dasselbe gilt auch für die, durch die Gln. (5.73) bis (5.78) gegebenen Spannungen, da diese von den Temperaturen hervorgerufen werden. Zwischenwerte zwischen sprunghaftem Leistungsanstieg und langsamerem lassen sich leicht durch Interpolation erhalten.

b) Belastungen durch die Schubspannung als Folge der axialen Wärmedehnung

Wie bereits erwähnt, versucht die Kontaktfläche Brennstoff-Hülle ($r=b$, $T_c(b) = T_b(b) - \Delta T$) sich bei einer Aufheizung der Brennstoffsäule wegen der unterschiedlichen Wärmeausdehnungszahlen von Brennstoff- und Hüllmaterial unterschiedlich (in axialer Richtung) auszudehnen. Da aber Brennstoffsäule und Hülle als fest verbunden angenommen wird, sind beide in ihrer freien Ausdehnung behindert. Dadurch entsteht in der Kontaktfläche eine thermische Schubspannung. Sie belastet die Brennstabhülle zu den im vorangegangenen Abschnitt berechneten thermischen Spannungen noch zusätzlich.

Die am System angreifende Belastung ist die schon erwähnte, in der Kontaktfläche Brennstoff-Hülle ($r=b$) entstehende thermische Schubspannung. Sie wirkt in axialer Richtung. Wegen der in diesem Brennstababschnitt (annähernd) gleichmäßigen axialen Temperaturverteilung ist die axiale Wärmedehnung ebenfalls (annähernd) eine gleichmäßige. Damit ist sie eine reine Radialfunktion.

Es gilt damit:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = A_1 f(r) \quad (5.79)$$

Hierbei ist $f(r)$ eine zunächst unbekannte Funktion und A_1 eine zunächst beliebige Konstante.

Die Integration von Gl. (5.79) ergibt:

$$w(r, z) = A_1 f(r) \cdot z + A_2 \quad (5.80)$$

A_2 ist eine Integrationskonstante; sie kann Null gesetzt werden, da sie nur eine Transversalverschiebung des ganzen Systems bedeutet.

Da hier nur axiale Belastung auftritt, ist die Axialverzerrung mit der Gesamtverzerrung identisch. Die Radialverschiebung ist daher $u=0$.

Damit wird aus der Verzerrungsgleichung (3.5):

$$\epsilon = \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.81)$$

Aus Gl. (5.81) ergibt sich, unter Beachtung von Gl. (5.79):

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 0$$

Damit in Gl. (3.8) eingegangen, ergibt (mit $T=0$) für die Axialverschiebung die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (5.82)$$

Die Integration von Gl. (5.82) liefert:

$$w(r, z) = A_1^* f(z) \ln r + A_2^* \quad (5.83)$$

Die Integrationskonstante A_2^* kann Null gesetzt werden, da sie nur eine Axialverschiebung des Systems bedeutet.

Durch Vergleich der beiden Gleichungen (5.80) und (5.83) ergibt sich: $f(r) = \ln r$ und $f(z) = z$. Damit ist die Axialverschiebung gegeben durch:

$$w(r, z) = A_1 z \ln r \quad (5.84)$$

Gl. (5.84) nach r differenziert, ergibt:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{A_1 z}{r} \quad (5.85)$$

Mit Gl. (5.85) in Gl. (3.2d) eingegangen, ergibt (mit u=0) für die thermische Schubspannung:

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{A_1 z}{r} + \bar{A}_1 \quad (5.86)$$

Die Konstante \bar{A}_1 wurde in Gl. (5.86) zusätzlich eingeführt, um letztere an die äußere Randbedingung anpassen zu können. Am äußeren Rand (r=a) gilt:

$$\tau(a, z) = 0 \quad (5.87)$$

Mit Gl. (5.86) in die Randbedingung (5.87) eingegangen, ergibt:

$$\bar{A}_1 = - \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{A_1 z}{a} \quad \text{Damit wird} \quad \tau = \frac{E A_1 z}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (5.88)$$

Am inneren Rand (r=b) gilt die Bedingung:

$$\tau(b, z) = \tau_0 \quad (5.89)$$

Damit wird aus Gl. (5.88):

$$A_1 = \frac{2(1+\nu)}{Ez} \left(\frac{a-b}{ab} \right) \tau_0$$

Diesen Ausdruck in Gl. (5.88) eingesetzt, ergibt für die thermische Schubspannung:

$$\tau = \tau_0 \frac{(a \cdot b)}{(a-b)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (5.90)$$

Gl. (5.90) liefert die radiale Schubspannungsverteilung in der Brennstabhülle, die beim Aufheizen des Brennstabes als Folge der unterschiedlichen Wärmeausdehnungszahlen von Hüllmaterial und Brennstoff in dem Axialbereich des Brennstabes entsteht, in dem sich der Brennstoff bereits vor dem Aufheizen an die Hülle angelegt hat.

Berechnung von τ_0 :

Ist die von einer Wärmequellldichteerhöhung Δq hervorgerufene Temperaturerhöhung

in der Grenzschicht Hülle-Brennstoff ΔT_G (zu berechnen nach Gl. (5.27) oder (5.28), für $r=b$) dann gilt

- für die Gleitung der gestauchten Brennstoffsäulengrenzschicht:

$$\gamma_b = \alpha_b \Delta T_G - \frac{\tau_0}{G_b} \quad (5.91)$$

- für die Gleitung der gestreckten Hüllgrenzschicht:

$$\gamma_c = \alpha_c \Delta T_G + \frac{\tau_0}{G_c} \quad (5.92)$$

In den Gln. (5.91) und (5.92) sind G_b und G_c die Schubmoduln des Brennstoffs bzw. des Hüllmaterials. Sie sind gegeben durch:

$$G_b = \frac{E_b}{2(1+\nu)} \quad , \quad G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \quad (5.93)$$

Die Gln. (5.91) und (5.92) gleichgesetzt und nach τ_0 aufgelöst, ergibt, unter Beachtung von Gl. (5.93) für die Grenzschichtsschubspannung:

$$\tau_0 = (\alpha_b - \alpha_c) \Delta T_G \frac{E_b E_c}{2(1+\nu)(E_b + E_c)} \quad (5.94)$$

Damit ist das Spannungsproblem in der Brennstabzone II (Zone, in der Brennstoff und Hülle verklebt sind) gelöst.

6. Das Belastungssystem für die kontaktfreie Axialzone

Für diese Zone III ist, wie aus der Überschrift hervorgeht, charakteristisch, daß zwischen Brennstoffsäule und Brennstabhülle kein Kontakt besteht. Zwischen ihnen befindet sich noch ein Gasspalt. Bei einer Brennstabaufheizung können zwischen Brennstoffsäule und Hülle ungehindert Relativbewegungen stattfinden. Damit tritt hier das Problem der Schubspannungen nicht auf. An äußeren Belastungen treten in axialer Richtung Kräfte auf, die dadurch entstehen, daß die zwischen Stopfen (Zone I) und verklebter Zone (Zone II) eingespannte freistehende Brennstoffsäule bei der Aufheizung an der axialen Ausdehnung gehindert wird. Hierbei wird die Hülle auf Zug, die Brennstoff-

säule auf Druck beansprucht.

Da hier, wie bereits bemerkt, keine Schubspannungen auftreten, gelten hier zur Berechnung der übrigen Spannungen ebenfalls die Gln. (5.8), aber mit anderen Konstanten versehen als im vorangegangenen Kapitel. Zur Berechnung der in den genannten Gleichungen auftretenden, hier gültigen Konstanten sind die Randbedingung der Radialverschiebungsgleichung von Hüllinnen- und Brennstoffaußenrand (Gl. (5.11)) und die Randbedignungen der Axialbelastungen von Hülle und Brennstoffsäule (Gl. (5.13) und Gl. (5.14)) durch hier gültige zu ersetzen. Die restlichen beiden, nämlich die Gln. (5.9) und (5.12), bleiben erhalten, da sie auch hier gültig sind.

Anstelle der Randbedingung (5.11) tritt:

$$\sigma_{rb}(b) = \sigma_{rc}(b) = - p_g \quad (6.1)$$

Anstelle der Randbedingungen (5.13) und (5.14) treten hier:

$$2\pi \int_0^b \sigma_{zb} r dr = - K \quad (6.2)$$

$$2\pi \int_b^a \sigma_{zc} r dr = K \quad (6.3)$$

Hierbei ist p_g der im Spalt zwischen Brennstoffsäule und Hülle wirksame Spaltgasdruck. K ist die am Systemende angreifende Kraft. Sie entsteht, wie bereits bemerkt, durch die verhinderte axiale thermische Ausdehnung der aufgeheizten Brennstoffsäule. Neben den hier angegebenen Änderungen der mechanischen Randbedingungen ändern sich auch die thermischen Randbedingungen der zur Berechnung der in den Spannungsgleichungen (5.8) auftretenden Temperaturfelder verwendeten Wärmeleitungsgleichungen von Brennstoffsäule und Hülle. Zwar gelten auch hier die Gln. (5.21) und (5.23) aber mit anderen Konstanten C_1 und C_2 . Wegen des hier zwischen Brennstoff und Hülle vorhandenen Gasspaltes ist der Wärmestrom, insbesondere bei raschen Leistungsänderungen, kein kontinuierlicher mehr. Damit gilt die Randbedingung (5.25) höchstens nur noch näherungsweise.

In der Schwierigkeit der Bestimmung des numerischen Wertes des Temperatursprungs liegt das eigentliche Problem der mechanischen Behandlung dieses Abschnitts. Eine Menge Betrachtungen sind zu dem Problem des Wärmedurchgangs im Gasspalt Brennstoff-Hülle schon angestellt worden. Ohne irgendwelche Rechnungen auszuführen,

kann man sagen, daß bei einer Stabileistungserhöhung die Brennstabhülle infolge des erhöhten Temperaturgradienten nur wenig mehr belastet wird als sie vom vorausgehenden stationären Betrieb her belastet ist, da der Wärmeübergang im Gasspalt sicher wesentlich langsamer erfolgt als die Ableitung der Wärme in der gut leitenden Hülle. Eine mechanische Belastung in radialer Richtung gibt es nicht, da nach Voraussetzung ein Gasspalt zwischen Brennstoff und Hülle existiert.

Die wesentliche Belastung dieses Systems in Zone III wird, insbesondere bei den hier in Frage kommenden Leistungsanstiegen, durch die an den Enden desselben angreifende Kraft K verursacht, die ihrerseits durch die behinderte Axialausdehnung der aufgeheizten Brennstoffsäule entsteht. Sie allein soll hier berücksichtigt werden.

Ist die bei der Brennstoffsäulenaufheizung entstehende Kraft K, so gilt

- für die Hüllbelastung:

$$\sigma_{zc} = \frac{K}{F_c} \quad (6.4)$$

- für die Brennstoffsäulenbelastung:

$$\sigma_{zb} = - \frac{K}{F_b} \quad (6.5)$$

Hierbei sind F_c und F_b der Hüll- bzw. der Brennstoffsäulenquerschnitt.

Berechnung der Axialkraft K:

Wird die Brennstoffsäule im freistehenden Axialbereich (h_3) um ΔT_b aufgeheizt, so beträgt die axiale Dehnung der gestauchten Säule:

$$\frac{\Delta h_{3b}}{h_3} = \alpha_b \Delta T_b - \frac{K}{E_b F_b} \quad (6.6)$$

Wird die Brennstabhülle in demselben Axialbereich (h_3) um ΔT_c aufgeheizt, so beträgt die axiale Dehnung der gestreckten Hülle:

$$\frac{\Delta h_{3c}}{h_3} = \alpha_c \Delta T_c + \frac{K}{E_c F_c} \quad (6.7)$$

Da beide Dehnungen gleich sein müssen, erhält man durch Gleichsetzen der Gln. (6.6) und (6.7) und Auflösen nach der Kraft dieselbe zu:

$$K = (\alpha_b \Delta T_b - \alpha_c \Delta T_c) \frac{E_b F_b \cdot E_c F_c}{E_b F_b + E_c F_c} \quad (6.8)$$

Nun ist bei einer Leistungserhöhung der Wärmedurchgang durch den Gasspalt zwischen Brennstoffsäule und Hülle viel schlechter als die Ableitung der Wärme in der gut leitenden Hülle. Man kann hier daher die Aufheizung der Hülle ΔT_c als Folge einer Leistungserhöhung vernachlässigen. Mit $\Delta T_c = 0$ wird damit aus Gl. (6.8):

$$K = \alpha_b \Delta T_b \frac{E_b F_b \cdot E_c F_c}{E_b F_b + E_c F_c} \quad (6.8a)$$

Mit dem in den vorangegangenen Kapiteln hergeleiteten Formalismus können nun die Belastungen eines Brennstabes, dessen Ausgangszustand durch das Modell in Abb. 1 gegeben ist, für den Fall eines schnellen Brennstab-Leistungsanstieges berechnet werden.

7. Numerische Rechnungen

Im folgenden sollen nun mit dem in den vorausgegangenen Kapiteln hergeleiteten Formalismus die mechanischen Belastungen eines typischen Leichtwasserreaktor-Brennstabes berechnet werden.

Die Betriebsbedingungen sind folgende: Der besagte Brennstab befindet sich seit einiger Zeit im Reaktor und wurde während dieser Zeit mit einer stationären Stableistung betrieben. Die Brennstoffsäule hat sich hierbei in der heißesten Axialzone auf einer Länge von h_2 an die Hülle angelegt und ist mit ihr fest verklebt. Die Stableistung wird rampenförmig so erhöht, daß der Maximalwert des Leistungszuwachses $\Delta N = 50 \text{ W/cm}$ beträgt. Der Einfachheit halber wird die sinusförmige Leistungsverteilung durch eine trapezförmige angenähert. Damit wird sie in der hochbelasteten Brennstabzone näherungsweise eine gleichmäßige. In der Zone des noch freistehenden Brennstoffzylinders steigt sie näherungsweise linear an.

Materialkonstanten:

$$\beta = 2,5 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{ grd}} \quad (\text{Wärmeübergangszahl Brennstab-Kühlmittel})$$

$$\alpha_b = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/grd} \quad (\text{Wärmeausdehnungszahl des Brennstoffs})$$

$$\alpha_c = 0,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/grd} \quad (\text{Wärmeausdehnungszahl des Hüllmaterials})$$

$$k_b = 0,03 \frac{\text{W}}{\text{cm grd}} \quad (\text{Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffs})$$

$$k_c = 0,15 \frac{\text{W}}{\text{cm grd}} \quad (\text{Wärmeleitfähigkeit des Hüllmaterials})$$

$$E_b = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \quad (\text{Elastizitätsmodul des Brennstoffs})$$

$$E_c = 1,0 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \quad (\text{Elastizitätsmodul des Hüllmaterials})$$

$$\rho_b = 10,5 \text{ gr/cm}^3 \quad (\text{Dichte des Brennstoffs})$$

$$\rho_c = 6,5 \text{ gr/cm}^3 \quad (\text{Dichte des Hüllmaterials})$$

$$c_b = 0,343 \text{ Wsec/gr grd} \quad (\text{spezifische Wärme des Brennstoffs})$$

$$c_c = 0,359 \text{ Wsec/gr grd} \quad (\text{spezifische Wärme des Hüllmaterials})$$

$$a = 0,55 \text{ cm} \quad (\text{Brennstabaußenradius})$$

$$b = 0,5 \text{ cm} \quad (\text{Brennstoffsäulenradius})$$

Um die als Folge einer äußeren Kraftwirkung auftretende Belastung des Stopfens (Zone I) und des Axialabschnitts, in dem Brennstoff und Hülle miteinander verklebt sind (Zone II), nach den Gln. (4.81) bis (4.88) berechnen zu können, müssen die in den genannten Gleichungen auftretenden axialen Randspannungen p_0 und p_1 bekannt sein. Diese werden von der Kraftwirkung erzeugt, die dadurch entsteht, daß der zwischen beiden Zonen I und II eingespannte, noch freistehende Anteil der Brennstoffsäule beim Aufheizen in seiner axialen Ausdehnung gehindert wird. Um die Kraft K , aus der die genannten Randspannungen zu berechnen sind, nach Gl. (6.8a), bestimmen zu können, muß die als Folge einer Leistungserhöhung entstehende Brennstoffsäulenaufheizung ΔT_b bekannt sein.

Die Temperaturerhöhung der Brennstoffsäule als Folge einer Leistungserhöhung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich der Temperaturerhöhung im Brennstoff und der Erhöhung des Temperatursprungs im Gasspalt zwischen Brennstoffsäule und Hülle.

Die Erhöhung des Temperatursprungs im Gasspalt ist näherungsweise gegeben durch:

$$\Delta T_s = \frac{1}{2} \frac{\Delta N}{2 \pi b h} \quad (7.1)$$

Hierbei ist h die Wärmedurchgangszahl.

Bei einem, dem linearen axialen Leistungsanstieg entsprechenden linearen Temperaturanstieg ist die Brennstoffaufheizung näherungsweise durch folgende Gleichung gegeben:

$$\Delta T_b = \frac{1}{2} \frac{\Delta N}{4 \pi k_b} \quad (7.2)$$

Die in Gl. (7.1) auftretende Wärmedurchgangszahl h ist nicht genau bekannt. Es wird hier folgende verwendet: $h = 0,5 \text{ W/cm}^2 \text{ grad}$ (Zahlenwert für Gasspalt).

Mit dieser Wärmedurchgangszahl, dem mittleren Radius des Gasspaltes und der vorstehend angenommenen Leistungserhöhung wird nach Gl. (7.1) die Erhöhung des Temperatursprungs im Gasspalt $\Delta T_s = 16 \text{ grad}$.

Mit der vorgegebenen Leistungserhöhung wird nach Gl. (7.2) die Brennstoffaufheizung: $\Delta T_b = 66 \text{ grad}$.

Damit beträgt die mittlere Temperaturerhöhung des noch freistehenden Brennstoffsäulenanteils als Folge der gegebenen Leistungserhöhung $\Delta T = \Delta T_s + \Delta T_b = 49 \text{ grad}$. Mit dieser Temperaturerhöhung ergibt sich nach Gl. (6.8a) eine auf Stopfen und verklebte Zone als Folge des zwischen beiden eingespannten noch freistehenden Brennstoffsäulenanteils eine wirksame Axialkraft von $K = 138,0 \text{ kp}$.

Mit dem verwendeten Brennstoffsäulen- und Hüllquerschnitt ergeben sich damit die axialen Randspannungen zu:

$$p_0 = 177 \text{ kp/cm}^2, \quad p_1 = 860 \text{ kp/cm}^2.$$

Nach der Eigenwertgleichung (4.45) ergibt sich mit $a = 0,55 \text{ cm}$ der erste (maßgebliche) mechanische Eigenwert zu:

$$\kappa = 6,9/\text{cm}.$$

Mit der in diesem Beispiel angenommenen Erhöhung der Stableistung ergibt sich (nach Gl. (5.27) eine Temperaturerhöhung der Berührungsgrenzschicht von $\Delta T_G = 9$ grad. Hier wurde der Temperatursprung ΔT (wegen des Kontaktes) mit der Wärmedurchgangszahl $h = 2 \text{ W/cm}^2 \text{ grad}$ berechnet. Damit ergibt sich (nach Gl. (5.94)) für die thermische Grenzschichtschubspannung $\tau_0 = 0,6 \text{ kp/mm}^2$.

In Abb. 4 sind die mit den Gl. (4.81) und (4.88) berechneten Stopfenbelastungen (Zone I) aufgezeichnet. Die Stopfenlänge wurde hierbei mit $h_1 = 2 \text{ cm}$ angenommen. Ein ähnlicher Spannungsverlauf ergibt sich auch in Zone II (in der Brennstoff und Hülle verklebt sind) als Folge der äußeren Belastung, hervorgerufen durch die verhinderte Brennstoffsäulenausdehnung der Zone III, da auch hier der oben genannte Formalismus gilt. Man erkennt - was aus dem Formalismus schon ersichtlich ist -, daß die Spannungen mit dem Entfernen von der Lastangriffsfläche sehr rasch abnehmen.

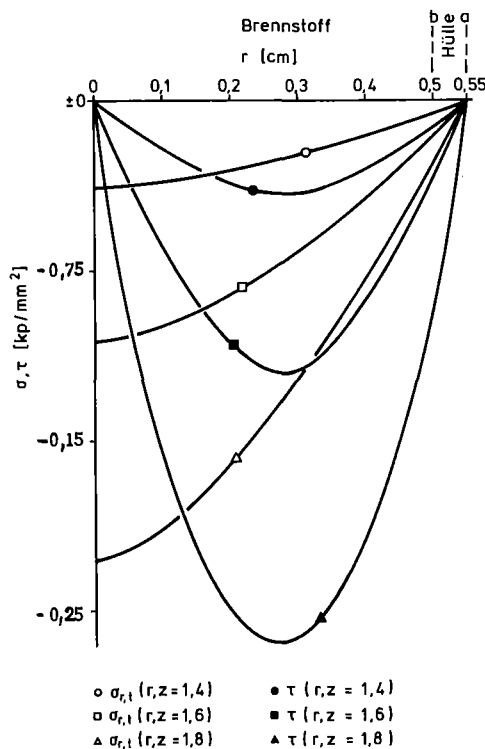


Abb. 4: Spannungsverteilung im Stopfen (Zone I) als Folge der Belastung durch die aufstehende Brennstoffsäule (gegeben durch die Gleichungen (4.81) bis (4.88))

In Abb. 5 sind die mit den Gln. (5.73) bis (5.78) berechneten Spannungen aufgezeichnet. Es sind dies die Spannungen, die in der Zone II (Brennstoff-Hülle-

Kontaktzone) entstehen, wenn die Wärmequellendichte q in dem innerhalb dieser Zone befindlichen Brennstoffsäulenanteil um den in diesem Beispiel angenommenen Betrag erhöht wird. Hierbei ist, wie aus den Herleitungen der Formeln hervorgeht, vorausgesetzt, daß der Brennstoff mit der Hülle vor der Leistungserhöhung Kontakt hat. Aus dem Diagramm erkennt man, daß bezüglich der Belastbarkeit eines Brennelementes als Folge einer raschen Leistungserhöhung die Hülltangentialspannung die maßgebliche Spannung ist.

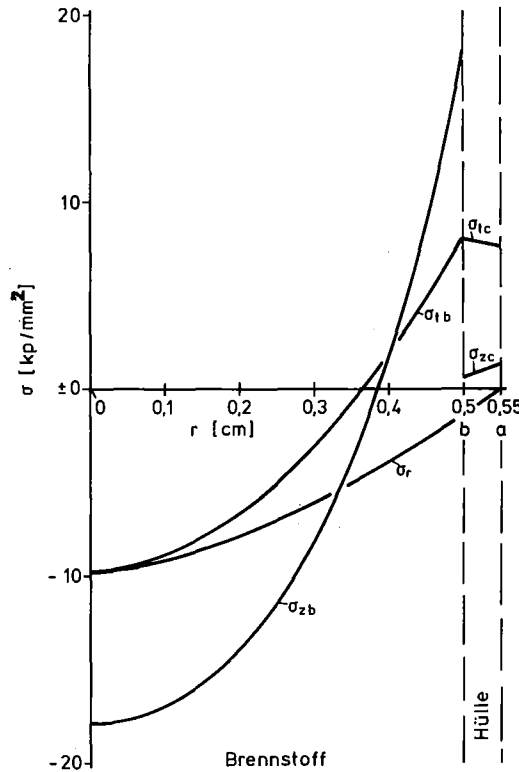


Abb. 5: Thermische Spannungen in der Kontaktzone Brennstoff/Hülle
(gegeben durch die Gleichungen (5.73) bis (5.78))

In Abb. 6 ist die mit Gl. (5.90) berechnete, in der Hülle wirksame thermische Schubspannung aufgezeichnet. Sie entsteht in dem Axialbereich, in dem Brennstoffsäule und Hülle verklebt sind (Zone II), als Folge der unterschiedlichen Wärmeausdehnungszahlen von Brennstoff und Hüllmaterial.

Die Spannungen in Zone III (Zone, in der die Brennstoffsäule mit der Hülle keinen Kontakt hat) als Folge des in ihr befindlichen, bei der Aufheizung in seiner axialen Ausdehnung behinderten Brennstoffsäulenanteils sind durch die schon berechneten axialen Randspannungen ($-P_0$) für die Brennstoffsäule und P_1 für die Hülle gegeben.

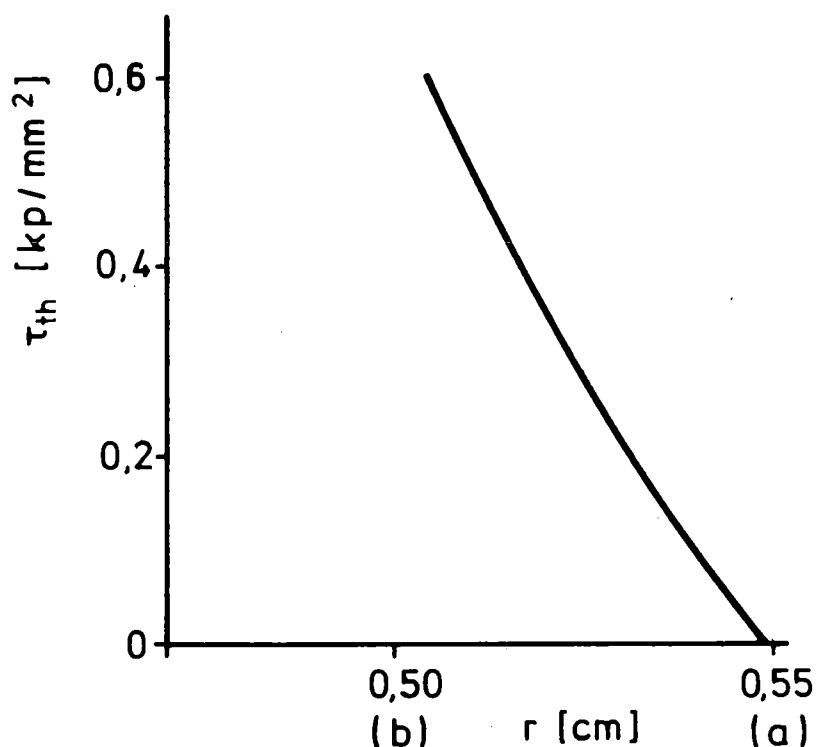


Abb. 6: Schubspannung in der Hülle als Folge der thermischen Axialdehnung der Brennstoffsäule (Brennstabzone II)

8. Diskussion der Ergebnisse

Vergleicht man die als Folge der in dem Beispiel angenommenen Leistungserhöhungen entstandenen Brennelementspannungen, so erkennt man aus Abb. 4, daß die durch die verhinderte axiale Brennstoffsäulenausdehnung entstehenden Stopfenspannungen verhältnismäßig klein sind. Dasselbe gilt auch für die durch diese Belastung in der verklebten Zone II entstehenden Spannungen. Selbst wenn die nicht genau bekannte Wärmedurchgangszahl Brennstoff-Hülle h hier zu optimistisch angenommen worden wäre, würden bei einem schlechteren Wärmedurchgang und damit bei einer nach Gl. (6.8a) berechneten höheren Axialkraft die von dieser Kraft verursachten Spannungen immer noch klein bleiben. Damit spielt diese Belastung bei einer Leistungserhöhung nur eine untergeordnete Rolle.

Ebenfalls klein ist die in Abb. 6 dargestellte Schubspannung, welche als Differenz der unterschiedlichen Wärmeausdehnungszahlen von Brennstoff- und Hüllmaterial entsteht. Die hier relativ kleine Schubspannung erklärt sich einmal aus der großen Kontaktfläche zwischen Brennstoffsäule und Hülle und zum anderen

dadurch, daß bei den in Frage kommenden Leistungserhöhungen die Kontaktflächentemperatur nicht allzu hoch ansteigt.

Die bezüglich der Belastbarkeit eines Brennelementes als Folge einer Leistungsänderung interessierenden Spannungen sind damit durch Abb. 5 gegeben. Betrachtet man hier die Hüllspannungen, auf die es in diesem Fall nur ankommt, so erkennt man, daß die Tangentialspannung mit Abstand am größten ist. Dies führt zu dem Schluß: Wenn man die Belastbarkeit eines Brennelementes als Folge einer Leistungsänderung kennen lernen will, genügt es, die Hülltangentialspannung nach Gl. (5.77) zu berechnen. Erhält man mit der vorgegebenen Leistungserhöhung einen für die Hülltangentialspannung zulässigen Wert, braucht man alle übrigen hier entwickelten Spannungsgleichungen zu weiteren Berechnungen nicht heranziehen, da sie alle wesentlich kleinere Werte liefern.

Anmerkung:

Testrechnungen wurden mit den in diesem Bericht entwickelten Formeln an einem Leichtwasser-Brennstab durchgeführt. Anwendungsrechnungen können mit ihnen sowohl für Leichtwasser-Brennstäbe als auch für Schnellbrüter-Brennstäbe ausgeführt werden. Hierzu sind die jeweils gültigen Materialdaten und Stababmessungen in die allgemein gültigen Formeln einzusetzen.

Literatur:

Mathematik

- /1/ P. Frank, F. Mises: Differentialgleichungen der Physik, 2 Bände, Braunschweig, 1961
- /2/ G. Hellwig : Partielle Differentialgleichungen, Stuttgart, 1960
- /3/ E. Klingbeil: Tensorrechnung für Ingenieure, Mannheim, 1966
- /4/ J. Horn: Partielle Differentialgleichungen, Berlin, 1949
- /5/ E. Kamke: Differentialgleichungen, Band I, Stuttgart, 1977
- /6/ I.G. Petrowski: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, Leipzig, 1955
- /7/ W. Magnus, F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1948

- /8/ F. Sauter: Differentialgleichungen der Physik, Berlin, 1958
- /9/ R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952
- /10/ R. Rothe: Höhere Mathematik, Teil VI, Stuttgart, 1958
- /11/ W. Schmeidler: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Band I, Leipzig, 1955
- /12/ W.I. Smirnow: Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil IV, Berlin, 1963
- /13/ I.N. Sneddon: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Mannheim, 1961
- /14/ H. Teichmann: Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung, Mannheim, Wien, Zürich, 1973
- /15/ G. N. Watson: Theorie of Besselfunctions, Cambridge, 1944
- /16/ N.W. Mc. Lachlan: Besselfunctions for Ingeneers, Oxford, 1961
- /17/ S.G. Michlin: Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik, Thun, Frankfurt a.M., 1978

Theoretische Physik:

- /18/ A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Band VI, Wiesbaden, 1947
- /19/ D. Morgenstern, I. Szabó: Vorlesungen über theroretische Mechanik, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961
- /20/ W. Weizel: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963
- /21/ L. D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VII, Berlin, 1970

Technik:

- /22/ K. Magnus, H.H. Müller: Grundlagen der Technischen Mechanik, Stuttgart, 1979
- /23/ D. Rüdiger, A. Kneschke: Technische Mechanik, Band 2, Zürich, Frankfurt a.M., 1966
- /24/ K. Marguerre: Technische Mechanik, zweiter Teil, Berlin, Heidelberg, New York, 1967
- /25/ I. Szabó: Einführung in die technische Mechanik, Berlin, Heidelberg, New York, 1966
- /26/ O. Szabó: Höhere technische Mechanik, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

- /27/ S. Timoshenko: Strength of Materials, Part II, Toronto, London, New York, 1963
- /28/ D. Smidt: Reaktortechnik (zwei Bände), Karlsruhe, 1971
- /29/ K. Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952
- /30/ H. Böhm: Einführung in die Metallkunde, Mannheim, Zürich, 1969
- /31/ H. Blumenauer, G. Pusch: Bruchmechanik, Leipzig, 1973

Formelsammlungen und Tabellen:

- /32/ E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch: Tafeln höherer Funktionen, Stuttgart, 1966
- /33/ I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Leipzig, 1960
- /34/ F. Ringleb: Mathematische Formelsammlung, Berlin, 1949
- /35/ M. Abramowitz, I.H. Stegun: Handbook of mathematical Functions, New York, 1968

Sonstige Literatur:

- /36/ W. Dienst: Fast Breeder Oxide Fuel Irradiation Results relevant to Light Water Reaktor Fuel, Report at the Symp. on Water Reactor Fuel and Core Performance, Sanderstolen, 1976, S. 6.b
- /37/ K.D. Cloß:
unveröffentlichter Bericht, 1969
- /38/ G. Ondracek, H. Kämpf: Thermische Ausdehnung oxidischer Brennstoffe, KfK 1400, 1971
- /39/ C. Peterson: Literaturübersicht über einige Eigenschaften von Zirkaloy-4 bei höheren Temperaturen, KfK-Ext. 6/73-6, 1974
- /40/ R. Godesar: Untersuchung des Wärmeübergangs-Koeffizienten im Spalt zwischen Brennstoff und Hülle auf die sicherheitstechnische Auslegung von stabförmigen Brennstäben für schnelle Brutreaktoren, Dissertation TH-Aachen, 1972
- /41/ D. Stegemann, W. Wiesenack: Modeling Fuel Element Performance of Light Water Reactors, Ber. des Instituts für Kerntechnik der TU-Hannover, 1978
- /42/ I. Müller-Lyda: Untersuchungen zur mechanischen Wechselwirkung zwischen Brennstoff und Hüllrohr in Brennstäben von Schnellen Brüter-Reaktoren, KfK 3012, 1980
- /43/ H. Böhm, W. Dienst, K. Kummerer: Arbeiten zur Brennelement-Entwicklung für den Schnellen Brutreaktor SNR-300, KfK 1999, 1974

- /44/ H. Steiner: Der Wärmedurchgang in Karbid-Brennstäben mit mittleren bis großen Fertigungsspalten beim Anfahren, KfK 2472, 1977
- /45/ H. Steiner, I. Müller-Lyda:
unveröffentlichter Bericht, 1979
- /46/ K. Laßmann:
unveröffentlichter Bericht, 1979
- /47/ K. Laßmann, A. Moreno: The light-water-reactor version of the URANUS integral fuel-rod code, Atomkernenergie Bd. (30), 1977, Lfg. 3
- /48/ I. Müller: Untersuchungen zur mechanischen Wechselwirkung zwischen Oxidbrennstoff und Hülle bei Leistungswechseln in Schnellbrüterbrennstäben, KfK 2376, 1976