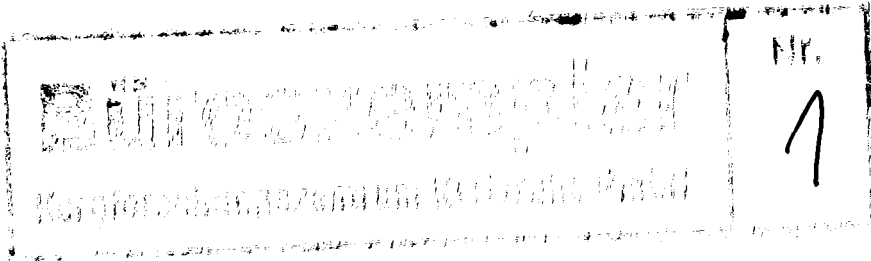


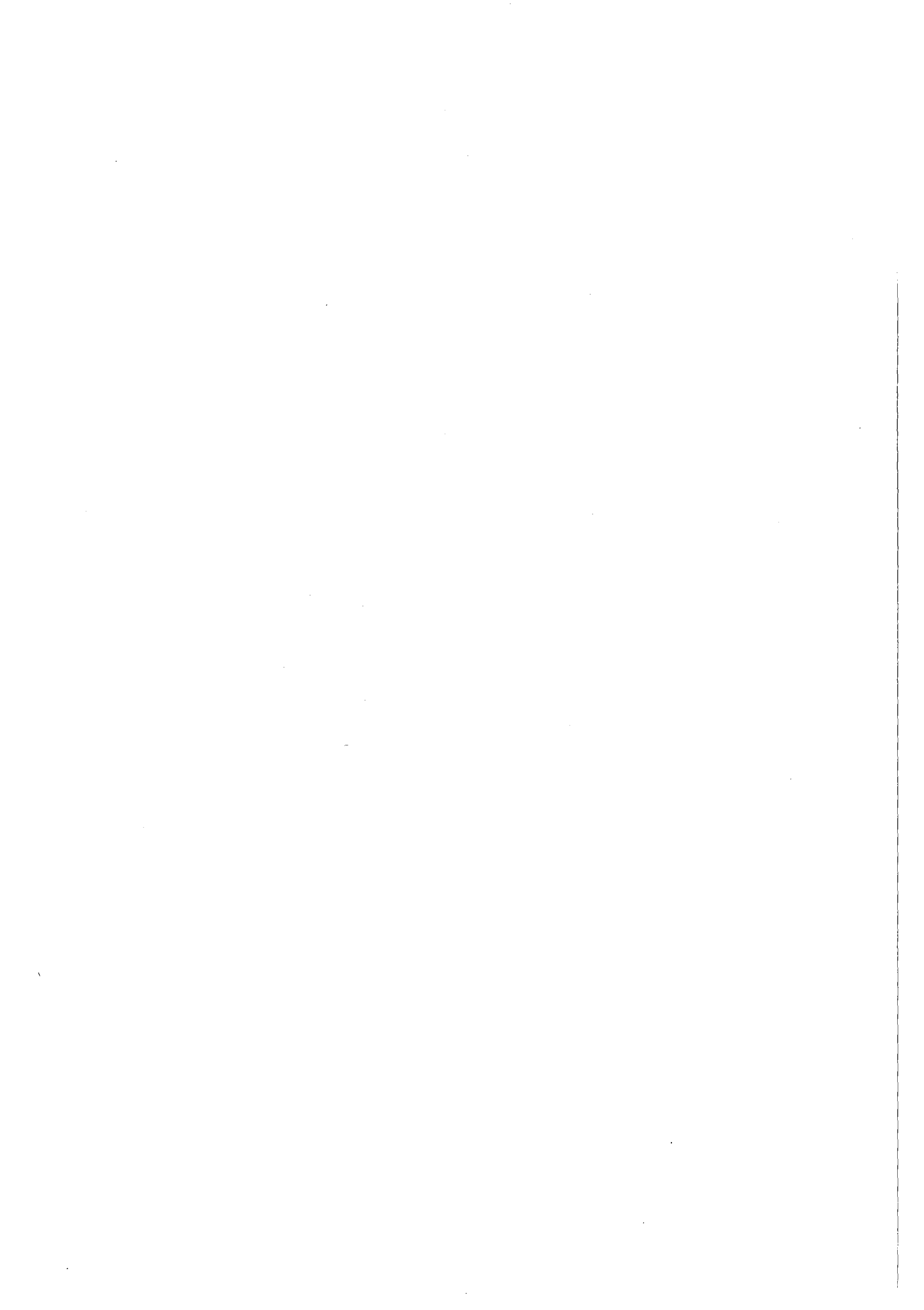
**KfK 3648
1982/1983**

Zur quantitativen Gefüge- Eigenschafts-Korrelation mehrphasiger Werkstoffe

**G. Ondracek
Institut für Material- und Festkörperforschung**

Kernforschungszentrum Karlsruhe





Zur quantitativen Gefüge-Feldeigenschafts-Korrelation mehrphasiger Werkstoffe

Teil I: Theorie der Gefügestruktur-Feldeigenschafts-Gleichungen zweiphasiger Werkstoffe

Im Teil I dieser Abhandlung wird – aufbauend auf Literaturansätzen zur Theorie des Zusammenhangs zwischen Gefügestruktur und Feldeigenschaften nach dem Grenzwert- und dem Modellkonzept – eine allgemeine Gefüge-Feldeigenschafts-Gleichung abgeleitet, die die Berechnung von Feldeigenschaftswerten zweiphasiger Werkstoffe aus ihren Gefügedaten erlaubt. Die Bestimmung der Gefügefaktoren durch quantitative Gefügeanalyse wird im Teil II der Arbeit beschrieben, während im Teil III berechnete und experimentelle Werte der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von zweiphasigen metallischen Werkstoffen verglichen werden.

In part I of this contribution – based upon earlier literature about the theoretical interrelationship between the microstructure and field properties due to the bound as well as the model microstructure concept – a general microstructure-field-property equation is derived providing the calculation of field properties of two-phase materials from their microstructural data. How to determine the microstructure factors by quantitative microstructural analysis is described in part II, whilst finally – in part III, calculated and measured electrical and thermal conductivities of two-phase metallic materials are compared.

1 Einleitung: Definitionen und Prämissen

Die Eigenschaften mehrphasiger Werkstoffe hängen von den Eigenschaften ihrer Phasen und von deren Geometrie und geometrischen Anordnung im Werkstoff, d.h. von seiner Gefügestruktur, ab.

Unter den Eigenschaften sollen die meßbaren Kenngrößen zur Charakterisierung der Erscheinungsformen und Verhaltensweisen des Werkstoffes unter gegebenen Zustandsbedingungen verstanden werden, die sich aufgrund gewisser Gemeinsamkeiten und

Analogien aus der Sicht des Gefüge-Eigenschafts-Zusammenhanges in Gruppen zusammenfassen lassen [26] (vgl. Tabelle 1). So beschreibt beispielsweise die Gruppe der **Feldeigenschaften** die Verhaltensweise von Werkstoffen beim Auftreten von elektrischen, magnetischen und Temperaturfeldern, und zwar auch, wenn diese kombiniert einwirken (elektromagnetische Felder → optische Eigenschaften).

Die Gemeinsamkeit der Feldeigenschaften beruht dabei:

– auf der Analogie der Feldgleichungen für Felder dieser Art [32], die im Gegensatz zu mechanischen Spannungs-Dehnungs-Feldern, nicht an Materie gebunden sind und auch im Vakuum existieren können.

– auf der Herleitung der Feldeigenschaftskenngrößen für mehrphasige

Werkstoffe durch Linearkombination von Vektoren (vgl. Tabelle 1).

In der vorliegenden Arbeit wird der quantitative Zusammenhang zwischen diesen Feldeigenschaften mehrphasiger Werkstoffe und ihrer Gefügestruktur behandelt. Dabei zeigt sich, daß die **Gefügestruktur** eines mehrphasigen Werkstoffes durch die in Tabelle 2 zusammengefaßten Angaben hinreichend erfaßbar ist [26, 28, 29, 35] (zur „Mittelwertsprämisse“ vgl. 2.3). Alle Angaben – außer derjenigen zur Anzahl der Phasen – implizieren einen makroskopisch homogenen Werkstoff (**Kontinuumsprämisse**), d. h.,

– mikroskopisch quasihomogene lokale Verteilung der Phasen und
– kontinuierlichen („stetigen“) Übergang zwischen den Phasen an den Phasengrenzen.

Außerdem wird vorausgesetzt, daß sich der Werkstoff im stabilen thermochemischen Gleichgewicht befindet, d. h. daß sich seine Gefügestruktur nicht ändert.

2 Zur Ableitung von Gefügestruktur-Feldeigenschafts-Gleichungen zweiphasiger Werkstoffe

2.1 Literaturansätze

Seit über 100 Jahren wurden in der Literatur mehr als 40 Gleichungen vorgestellt, die auf empirischer, halbempirischer oder theoretischer Grundlage

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Gerhard Ondracek, Universität und Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Material- und Festkörperforschung, Postfach 3640, D-7500 Karlsruhe.

den Zusammenhang zwischen Gefügestruktur und Feldeigenschaften zweiphasiger Werkstoffe mathematisch erfassen sollen. Sie werden in den Originalarbeiten sowohl für den elektrischen Widerstand [23], die Dielektrizitätskonstante [45] und die elektrische [14] und thermische Leitfähigkeit [2] als auch für die magnetische Permeabilität [8] und den optischen Brechungsindex [21] angegeben. Zum besseren Vergleich wurden diese Gleichungen später – unter Anwendung der Analogie von Feldeigenschaftskenngrößen – auf den spezifischen elektrischen Widerstand zweiphasiger Werkstoffe umgeschrieben [32], wobei Gleichungen für poröse Werkstoffe teilweise unberücksichtigt blieben [40]. Tabelle 3 enthält einen Auszug aus den Tabellen, in denen solche Gleichungen zusammengestellt wurden. Ihre Zuverlässigkeit wurde mit Plausibilitätskriterien als Randbedingung überprüft [32]. So muß beispielsweise erfüllt sein, daß der Widerstand des zweiphasigen Werkstoffs identisch wird mit demjenigen einer Phase, wenn die Konzentration der anderen Phase Null wird. Oder es muß für einen solchen Werkstoff auch dann ein reeller spezifischer elektrischer Widerstand existieren, wenn derjenige einer Phase unendlich groß wird (Poren als zweite Phase). Auf diese Weise konnten einige – zuverlässige –

Gleichungen selektiert werden [27], für deren theoretische Ableitung zwei Wege beschrieben worden sind: das Grenzwertkonzept und das Modellkonzept.

2.2 Das Grenzwertkonzept

Betrachtet wird die Wechselwirkung zwischen einem „primären“ Feld und einem in dieses Feld eingebrachten Werkstoff. Feldgleichungen als Korrelationsfunktionen liefern die Verknüpfung von Primärfeldgrößen, wie der äußeren Feldstärke, mit den aus der Wechselwirkung hervorgehenden Feldgrößen im Werkstoff [8]. In diesen Korrelationsfunktionen sind die spezifischen Feldeigenschaftskenngrößen des Werkstoffs, wie die thermische oder elektrische Leitfähigkeit, die Dielektrizitätskonstante oder die magnetische Permeabilität, enthalten. Sie gestatten für den homogenen, einphasigen Werkstoff die Berechnung der über die Wechselwirkung mit dem Feld in den Werkstoff eingebrachten Energie. Bringt man jede Phase eines mehrphasigen Werkstoffs zunächst als einphasigen Werkstoff in ein konstantes Primärfeld, so läßt sich die über das Primärfeld in die Phase eingebrachte Energie berechnen. Für den mehrphasigen Werkstoff erhält man dann – aufgrund der Additivität von Energien – die

Gesamtenergie des Systems durch Addition der in den Volumenanteilen der Phasen gespeicherten Energie. Betrachtet man dabei z. B. einen zweiphasigen Werkstoff, so hat man über **eine** – und nur eine – der in Tab. 2 aufgeführten Angaben zur quantitativen Beschreibung der Gefügestruktur verfügt, nämlich über die Anzahl der Phasen. Darüber hinaus ist das Gefüge nicht definiert. Im stabilen thermochemischen Gleichgewicht strebt dieses System ein Energieminimum an. Die Ableitung der Energiefunktion nach den Feldeigenschaftsgrößen des zweiphasigen Werkstoffes und die Anwendung der mathematischen Extremwertbedingungen für ein energetisches Minimum liefern zwei – mathematisch exakte – Grenzwerte, zwischen denen die betrachteten Feldeigenschaften des Systems liegen müssen und variieren können. Reicht man diese Grenzwerte für alle möglichen Volumenanteile der Phasen eines zweiphasigen Werkstoffes (Phasenkonzentration als unabhängige Variable) aneinander, so ergeben sich Grenzkurven über der Konzentration der Phasen. Der Variationsbereich der betrachteten Feldeigenschaften zwischen diesen Grenzkurven hängt von dem als verfügbar angenommenen Informationsausmaß über die Gefügestruktur ab. Da bis hierher von den in Tab. 2 aufgeführten Angaben zur quantitativen Beschreibung der Gefügestruktur lediglich **eine** Aussage als bekannt vorausgesetzt worden war, nämlich daß es sich um ein **zweiphasiges** System handelt, bezeichnet man die die Grenzkurven liefernden Gleichungen als **Grenzwertgleichungen I. Ordnung** [26]:

$$\varphi^I_C = c_2 \varphi_2 + (1 - c_2) \varphi_1$$

(obere Grenzwertgleichung) (1)

$$\varphi^{II}_C = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{c_2 \varphi_1 + (1 - c_2) \varphi_2}$$

(untere Grenzwertgleichung) (2)

$\varphi^I_C, \varphi^{II}_C$ = oberer und unterer Grenzwert der Feldeigenschaften, z. B. der Leitfähigkeit des zweiphasigen Werkstoffes;
 φ_1, φ_2 = Feldeigenschaften der Phasen des zweiphasigen Werkstoffes;
 c_2 = Volumenanteil der Phase 2 des zweiphasigen Werkstoffes.

Sie entsprechen den bekannten Kirchhoff-Gesetzen für Parallel- und Reihen-anordnung der Phasen und sind – wie die physikalisch-mathematische Herleitung impliziert – die äußersten Grenzwerte für die Feldeigenschaften eines zweiphasigen Werkstoffes überhaupt! Ermöglicht das Informationsausmaß zum Gefüge dagegen zwei Aussagen, nämlich daß es sich um ein **zweiphasiges** und **isotropes** System handelt, so hat man über zwei der unabhängig variablen Gefügeangaben verfügt,

Tabelle 1. Zur Gruppensystematik der Eigenschaften

Eigenschaftsgruppe	Thermochemische Eigenschaften	Feldeigenschaften	Mechanische Eigenschaften: Untergruppe elastische Eigenschaften
Beispiel einer Eigenschaftskenngröße	spezifische Wärme	Wärmeleitfähigkeit	Elastizitätsmodul
	mathm. Prinzip	Linearkombination von Vektoren	Linearkombination von Tensoren
Bestimmung der Eigenschaftskenngrößen für den zweiphasigen Werkstoff	die entsprechende Eigenschaftskenngröße jeder Phase z. B. spez. Wärmen der beiden Phasen Einflußgrößen	die entsprechende Eigenschaftskenngröße jeder Phase z. B. Wärmeleitfähigkeit der beiden Phasen	die entsprechende Eigenschaftskenngröße jeder Phase z. B. Elastizitätsmodulen der beiden Phasen und eine andere elastische Eigenschaftskenngröße jeder Phase, z. B. Poissonzahlen der beiden Phasen
	Konzentration der Phasen	Konzentration, Form und Orientierung der Phasen	Konzentration, Form und Orientierung der Phasen

Tabelle 2. Zur Beschreibung der Gefügestruktur.

1. Zahl der Phasen	z. B. zwei-, drei-, mehrphasig
2. Anordnung der Phasen Einlagerungsgefüge Durchdringungsgefüge	Voraussetzung: Kontinuumsprämissa \triangleq makroskopisch quasihomogenes System
3. Volumenanteil der Phasen: Volumen x Anzahl der Phasenteilchen	Voraussetzung: Mittelwertsprämissa
4. Form der Phasenteilchen	„
5. Orientierung der Phasenteilchen	„

Tabelle 3. Auszug aus den tabellarisch zusammengestellten Gefügestruktur-Feldeigenschaften-Gleichungen der Literatur: Gleichungen für zwei-phasige Werkstoffe mit Einlagerungsgefüge und sphärischen Teilchen der Einlagerungsphase [32].

Originalgleichung	Substitutionen	auf Widerstand umgeformte Gleichung	Bemerkungen	Autor
$\frac{X_1-1}{X_1+2} = \frac{X_1-1}{X_1+2} + \frac{X_2-1}{X_2+2}$	$X = \frac{1}{\rho_c} \quad X_{1,2} = \frac{1}{\rho_{0,M}}$ $\delta_1 = C_D \quad \delta_2 = 1 - C_D$	$\rho_c = \rho_M \frac{1+2\rho_M C_D \frac{\rho_M}{\rho_c} - C_D}{1+2\rho_M - 2C_D \rho_M + 2C_D \rho_M}$	geringe Konzentration	Poisson Mosotti Lorenz Clausius Lorentz
$K = \frac{2K_1 + K_2 + p(K_1 - K_2)}{2K_1 + K_2 - 2p(K_1 - K_2)} K_2$	$K = \rho_c \quad K_{1,2} = \rho_{0,M}$ $p = C_D$	$\rho_c = \rho_M \frac{2 + C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 - C_D)}{2 - 2C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 + 2C_D)}$	geringe Konzentration	Maxwell Wiener Wagner Kerner Herring Hashin, Shtrikman
$\mu^2 = 1 + \frac{3p}{\frac{v_2}{v_1} - p - 1,65 \frac{v_1 - v_2}{v_1} \frac{\rho_M}{\rho_c}}$	$v = \frac{\rho_M}{\rho_c} \quad \mu^2 = \frac{\rho_M}{\rho_c}$ $p = C_D$	$\rho_c = \rho_M \frac{2 + C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 - C_D) - (1 - \frac{\rho_M}{\rho_c}) (0,523 C_D^3 + \dots)}{2 - 2C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 + 2C_D) - (1 - \frac{\rho_M}{\rho_c}) (0,523 C_D^3 + \dots)}$	kubisch-primitive Anordnung, geringe Konzentration	Rayleigh Runge (korrigiert) Zahlenfaktor in Rayleigh's Ab- teilung)
$K_m = \frac{2+K_d}{1-K_d} - 2f + 0,409 \frac{6+3K_d}{4+3K_d} f^2 - 2,133 \frac{3-3K_d}{4+3K_d} f^3$ $K_m = \frac{2+K_d}{1-K_d} + f + 0,409 \frac{6+3K_d}{4+3K_d} f^2 - 0,906 \frac{3-3K_d}{4+3K_d} f^3$	$K_m = \frac{1}{\rho_c} \quad K_d = \frac{\rho_M}{\rho_c}$ $f = C_D$	$\rho_c = \rho_M \frac{2 + C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 - C_D) + 0,409 C_D^3 - \frac{6+3\frac{\rho_M}{\rho_c}}{4+3\frac{\rho_M}{\rho_c}} - 0,906 C_D^3}{2 - 2C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 + 2C_D) + 0,409 C_D^3 - \frac{6+3\frac{\rho_M}{\rho_c}}{4+3\frac{\rho_M}{\rho_c}} - 2,133 C_D^3}$	kubisch-primitive Anordnung	Meredith Tobias
$\epsilon_m = \frac{2\epsilon_1^2(1-V_1) + \epsilon_1 \epsilon_2 (1+2V_1) - K \epsilon_1 (\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2})^2 (2\epsilon_1 + \epsilon_2)(1-V_2)}{\epsilon_1 (2+V_1) + \epsilon_2 (1-V_2) - K (\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2})^2 (2\epsilon_1 + \epsilon_2)(1-V_2)}$	$\epsilon_m, V_2 = \frac{1}{\rho_{c,M,D}} \quad K = V$ $V_2 = C_D$	$\rho_c = \rho_M \frac{2 + C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 - C_D) - V(1 - C_D) \frac{(\frac{\rho_M}{\rho_c} - 1)^2}{2 + \frac{\rho_M}{\rho_c}}}{2 - 2C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 + 2C_D) - V(1 - C_D) \frac{(\frac{\rho_M}{\rho_c} - 1)^2}{2 + \frac{\rho_M}{\rho_c}}}$	V-Verteilungsfaktor (=0,78 für statistische Verteilung)	Higuchi
$\epsilon_1 = 1 - \frac{1}{3} p (1 - p) (\frac{\rho_M}{\rho_c})^2$	$\epsilon = \frac{1}{\rho_c} \quad \epsilon' = \frac{C_D}{\rho_c} + \frac{1 - C_D}{\rho_M}$ $p = C_D \quad \delta = \frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_M}$	$\rho_c = \frac{3\rho_M \rho_c}{3\rho_M (1 - C_D) + 3\rho_M C_D - \frac{C_D(1 - C_D)(\rho_M - \rho_c)^2}{\rho_c(1 - C_D) + \rho_M C_D}}$	geringe Konzentration, statistische Verteilung (höhere Terme bei ellipsoidem Dispergenten und nicht stat. Verteilung)	Brown
$\frac{1}{\mu_A} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1 - \frac{3E}{4\pi} \frac{1}{K_s}}{K_s} + \frac{2 \tan^{-1} \left[\frac{(\frac{3E}{4\pi})^{1/2}}{K_s (K_s - K_0) - \frac{3E}{4\pi}} \right]}{\pi (K_s - K_0) \left[\frac{K_s}{K_s (K_s - K_0) - \frac{3E}{4\pi}} \right]^{1/2}} \right]$	$\frac{1}{\mu_A} = \rho_c \quad K_{0,5} = \frac{1}{\rho_{0,M}}$ $x = 12 \quad E = C_D$	$\rho_c = \frac{\rho}{12} \left[1 - 2 \sqrt{\frac{3C_D}{4\pi}} + \frac{2}{\pi \left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_c}\right) \sqrt{\frac{1}{\pi \left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_c}\right) \sqrt{\frac{3C_D}{4\pi}} \tan \sqrt{\frac{3C_D}{4\pi}}}} \right]$	kubische Anordnung	Topper
$\frac{E}{E_0} = 1 + 3c_V + 3V^2 \left(1 + \frac{V}{4} + \frac{V^2}{256} + \dots\right) c^2$	$E = \frac{1}{\rho_c} \quad \epsilon_{01} = \frac{1}{\rho_{0,M}}$ $C = C_D \quad \gamma = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_1}$	$\rho_c = \rho_M \frac{2 + C_D}{2 - 3C_D + \frac{\rho_M}{\rho_c} (1 + 3C_D) + 3C_D^2 \frac{(\frac{\rho_M}{\rho_c} - 1)^2}{\rho_c} \left[1 + \frac{\rho_M - 1}{4(2 + \frac{\rho_M}{\rho_c})} + \frac{(\frac{\rho_M}{\rho_c} - 1)^2}{256(2 + \frac{\rho_M}{\rho_c})} + \dots \right]}$		Peterson Hermanns
$1 - \delta_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_{0k}}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_{0k}}}$	$\delta_1 = C_D \quad \epsilon_{0k} = \frac{1}{\rho_c} \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{\rho_{0,M}}$	$1 - C_D = \frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0} \sqrt{\frac{\rho_{0,M}}{\rho_c}}$	statistische Verteilung	Bruggeman Niesel

nämlich über die Anzahl der Phasen und die Orientierung der Phasenteilchen (\cong statistisch). Mit diesen zwei Voraussetzungen ergeben sich engere Grenzwertgleichungen II. Ordnung [3],

$$\rho_c = \varphi_2 \frac{3\varphi_1 + 2C_2(\varphi_2 - \varphi_1)}{3\varphi_2 - C_2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\rho_c = \varphi_c^{\parallel} \text{ für } \varphi_1 < \varphi_2 \quad (3)$$

$$\rho_c = \varphi_{IIc} \text{ für } \varphi_1 > \varphi_2$$

$$\rho_c = \varphi_1 \frac{3\varphi_2 + 2(1 - C_2)(\varphi_1 - \varphi_2)}{3\varphi_1 - (1 - C_2)(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\rho_c = \varphi_{IIc} \text{ für } \varphi_1 < \varphi_2 \quad (4)$$

$$\rho_c = \varphi_c^{\parallel} \text{ für } \varphi_1 > \varphi_2$$

Für andere als Feldeigenschaften wurden inzwischen auch Grenzwertgleichungen höherer Ordnung abgeleitet [16–18].

2.3 Das Modellkonzept

Die Gleichungen (1)–(4) sind theoretisch exakt abgeleitet, praktisch aber nicht hinreichend aus zwei Gründen:

- die unteren Grenzwerte verschwinden für Poren als zweite Phase ($\varphi_2 \rightarrow 0$);
- der Variationsbereich ist selbst zwischen den Grenzwerten II. Ordnung zu groß, wenn die Feldeigenschaftenwerte der Phasen eines zweiphasigen Werk-

stoffes sehr unterschiedlich sind (vgl. Abb. 17, Teil III und Lit. [27])

Es wurde daher versucht, die Gefügefeldeigenschaften-Korrelation über einen alternativen Weg weiter zu entwickeln. Er führt über die mathematische Behandlung eines Modellgefüges, durch das der reale Werkstoff – näherungsweise – beschrieben wird. Diese – exakte – Beschreibung eines unrealen Modells liefert immer nur eine – unexakte – Beschreibung des realen Werkstoffs, deren physikalische und ingenieurmäßige Qualität jedoch einmal durch den Vergleich mit den theoretisch exakt abgeleiteten Gleichungen (1)–(4) und zum anderen durch den Vergleich mit experimentellen Werten prüfbar ist.

Das gewählte Modell geht von einem realen zweiphasigen Werkstoff aus, dessen Gefüge aus einer – kontinuierlichen – Matrixphase besteht, in die die Teilchen der – anderen – Einlagerungsphase diskontinuierlich, aber makroskopisch quasihomogen, eingebettet sind. Diese im realen Werkstoff in der Regel irregulär gestalteten Teilchen werden durch Rotationsellipsoide ersetzt, d. h. Teilchen mit einer regulären, mathematisch erfaßbaren Geometrie und geometrischen Anordnung im Werkstoff, die eine einzige – mittlere –

Form, Größe und Orientierung haben (Mittelwertsprämisse). Dabei ist die – mittlere – Form durch das Verhältnis von Rotations- (z) zu Nebenachse (x) des Rotationsellipsoids gegeben, durch das man die realen Teilchen substituiert. Um es zu erhalten, wird jedes reale Teilchen durch ein Rotationsellipsoid ersetzt gedacht, daß das gleiche Verhältnis von Oberfläche zu Volumen wie das Realteilchen und damit ein bestimmtes Achsenverhältnis hat. Der Mittelwert aus den Achsenverhältnissen aller Teilchen

$$\frac{z}{x} = \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{z}{x^2} i}{n} \quad (5)$$

entspricht dem Achsenverhältnis desjenigen Rotationsellipsoids, durch das die realen Teilchen im Modell ersetzt werden. Dabei zeigt sich, daß es für ein und dasselbe Achsenverhältnis jeweils zwei Möglichkeiten gibt, die realen Teilchen der Einlagerungsphase zu substituieren: nämlich einmal durch ein abgeplattetes – zum anderen durch ein gestrecktes Rotationsellipsoid. Stereologisch erhält man für jeden der beiden Typen sogar je 2 – also insgesamt 4 – Achsenverhältnisse, aus denen

sich jedoch in der Regel eines als für die Substitution der Realteichen zu bevorzugendes selektieren läßt (vgl. Teil II dieser Arbeit).

Die – mittlere – Größe der Rotationsellipsoide, durch die die realen eingelagerten Teilchen substituiert werden, ergibt sich aus deren Anzahl und der Volumenkonzentration der eingelagerten Phase,

die – mittlere – Orientierung aus der Orientierung der Rotationsachsen der substituierenden Rotationsellipsoide zur Feldrichtung.

Ein Vergleich dieser Modellannahmen, nämlich

– Zweiphasigkeit (\triangleq Anzahl der Phasen),

– Einlagerung- (Matrix-)gefüge (\triangleq Anordnung der Phasen) bei makroskopisch homogener Verteilung und kontinuierlicher Phasengrenze (Kontinuumsprämissen) und

– Beschreibung der Form, Orientierung und Größe der Teilchen der eingelagerten Phase durch einheitliche Rotationsellipsoide (rotationsellipsoide **Mittelwertprämissen**),

mit den in Tab. 2 genannten 5 notwendigen Angaben zur quantitativen Beschreibung der Gefügestruktur ergibt, daß an Stelle des Volumenanteils der Phasen im Modell zunächst die – nicht genau definierte – mittlere Größe der Phasenteilchen und ihre Anzahl erscheint. Dies erklärt sich aus der Tatsache, daß an sich außer der Zahl und Anordnung **der Phasen** in Tab. 2 **fünf** weitere Gefügeparameter zur vollständigen Beschreibung des Einlagerungsgefüges eines zweiphasigen Werkstoffes notwendig wären [29], nämlich

- die Form,
- die Orientierung,
- die Größe,
- die Anzahl und
- die lokale Verteilung

der Teilchen der Einlagerungsphase. Durch die Kontinuumsprämissen entfällt der Verteilungsparameter, da die örtliche Verteilung als konstant und statistisch angenommen wird, während – wie später gezeigt wird – Größe und Anzahl der Phasenteilchen in **einem** Gefügefaktor (Phasenkonzentrationsfaktor) zusammengefaßt werden können.

Die rotationsellipsoide Beschreibung der eingelagerten Phasenteilchen – **und nur diese** – bietet dabei den Vorteil

– hoher Anpassungsfähigkeit an reale irreguläre Geometrien durch kontinuierliche Veränderung des Achsenverhältnisses, dessen Extremfälle

scheibenförmige ($\frac{z}{x} \rightarrow 0$) und zylindrische Einlagerungen ($\frac{z}{x} \rightarrow \infty$) einschließen und dessen Sonderfall

($\frac{z}{x} = 1$) sphärischen eingelagerten

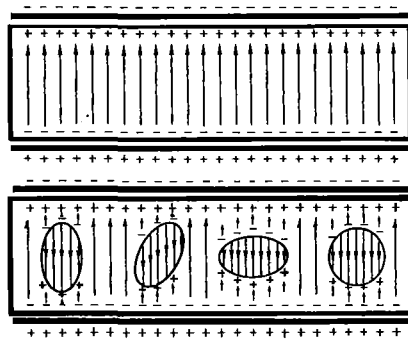


Abb. 1. Feldüberlagerung (schematisch) im zweiphasigen Werkstoff

Phasenteilchen entspricht.

– keine Unstetigkeitsstellen wie Ecken und Kanten zu besitzen, die Barrieren für die mathematische Behandlung des Feldpotentials von Grenzflächen in zweiphasigen Werkstoffen darstellen könnten.

– der Ermittlung der für ein reales Gefüge am besten geeigneten Substitutions-Rotationsellipsoide aus gefügeanalytischen Messungen über – verfügbare – stereologische Funktionen (vgl. Teil II dieser Abhandlung, METALL, demnächst).

Die theoretische Behandlung des Modells beginnt mit der Beschreibung des homogenen Feldes im einphasigen Werkstoff über dessen Feldgleichung. Werden in den Werkstoff Teilchen einer zweiten Phase eingelagert, so wird durch Influenz ein Störfeld erzeugt, das sich dem ursprünglichen Feld überlagert (Abb. 1). Für jedes der beiden Felder läßt sich die Feldgleichung aufstellen. Das resultierende Feld ergibt sich durch Superposition des homogenen, primären Feldes und des induzierten Störfeldes, wie im folgenden am Beispiel des elektrischen Feldes gezeigt wird:

Die Feldstärke im Inneren eines ellipsoiden Teilchens (E_D), das sich in einem homogenen äußeren Feld (Matrixfeld \triangleq Primärfeld; Feldstärke E_M) befindet, ist gegeben durch [12, 35, 39, 45]

$$\frac{E_D}{E_M} = \sum_{i=x,y,z} \frac{\epsilon_M \cos^2 \alpha_{iD}}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) F_{iD}} \quad (6)$$

(F_{iD} = Entelektrisierungs- oder Depolarisationsfaktor, bezogen auf die Achse $i = x, y, z$ des eingelagerten ellipsoiden Phasenteilchens;

ϵ_M, ϵ_D = Dielektrizitätskonstanten von Matrix- und Einlagerungsphase;
 α_{iD} = Orientierungswinkel der Achse $i = x, y, z$ des ellipsoiden Teilchens der eingelagerten Phase zur Feldrichtung)

wobei gilt

$$\sum_{i=x,y,z} F_{iD} = 1 \quad (7)$$

und

$$\sum_{i=x,y,z} \cos^2 \alpha_{iD} = 1 \quad (8)$$

Für Rotationsellipsoide (Rotationsachse z , Nebenachsen $x = y$) wird außerdem gemäß Gleichung (7)

$$F_{zD} = 1 - 2F_{xD} \quad (9)$$

so daß sich F_{zD} stets durch F_{xD} ausdrücken läßt. In den folgenden Ableitungen wird daher nur noch $F_{xD} = F_D$ als Formfaktor der eingelagerten Phase verwendet, wobei gilt [32, 37, 44]

$$F_{xD} = F_D = \frac{x^2 z}{2} \int_0^\infty \frac{dw}{(x^2 + w)^2 \sqrt{z^2 + w}} = \frac{x}{2z \left(1 - \frac{x}{z}\right)^2} \left\{ \frac{1}{z} + \frac{x}{2z \sqrt{1 - \frac{x}{z}}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{z}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{x}{z}}} \right\} \quad (10)$$

In Gleichung 10 tritt nur das Achsenverhältnis $\frac{x}{z}$ auf, nicht aber die Achsenlängen (x, z) allein. Dementsprechend handelt es sich nur um einen Formfaktor, für den die Größe der Teilchen keine Rolle spielt.

Mit Gleichung 8 und 9 erhält man aus Gleichung 6

$$\frac{E_D}{E_M} = \frac{\epsilon_M (\cos^2 \alpha_{xD} + \cos^2 \alpha_{yD})}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) F_{xD}} + \frac{\epsilon_M \cos^2 \alpha_{zD}}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) (1 - 2F_{xD})} \quad (11)$$

sowie wegen Gleichung 10 ($F_D = F_{xD}$) und Gleichung 8 ($\cos^2 \alpha_D = \cos^2 \alpha_{zD}$)

$$\frac{E_D}{E_M} = \frac{\epsilon_M (1 - \cos^2 \alpha_D)}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) F_D} + \frac{\epsilon_M \cos^2 \alpha_D}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) (1 - 2F_D)} \quad (12)$$

Entsprechend der Voraussetzung für Gleichung (6), daß es sich um ein ellipsoides Phasenteilchen in einem homogenen Primärfeld handelt, gilt Gleichung (12) nur solange, als das primäre Matrixfeld (E_M, ϵ_M) homogen und konstant bleibt. Nun wird in und um die eingelagerten Teilchen ein Störfeld induziert, dessen Einfluß auf das Matrixfeld solange als vernachlässigbar angesehen werden kann, als die Konzentration der eingelagerten Phasenteilchen klein, d.h. der größte Teil des Feldes in der Matrixphase ungestört bleibt. Gleichung (12), angewandt auf einen zweiphasigen Werkstoff mit Einlagerungsgefüge, gilt dementsprechend nur für geringe Konzentrationen der eingelagerten Phase.

Andererseits läßt sich die Feldstärke (E_C) eines zweiphasigen Werkstoffes – sowie seine dielektrische Verschiebung (D_C) – aus den entsprechenden Größen seiner Phasen (E_M, E_D bzw. D_M, D_D) und deren Volumenanteilen berechnen nach den Mittelwertsätzen von Wiener [45]

$$E_C = c_M E_M + c_D E_D \quad (13)$$

$$D_C = c_M D_M + c_D D_D \quad (14)$$

(c_D = Volumenanteil der eingelagerten Phase; $c_M = 1 - c_D$ = Volumenanteil der Matrixphase) mit

$$D_C = E_C \epsilon_C; D_M = E_M \epsilon_M; D_D = E_D \epsilon_D \quad (15)$$

Aus Gleichung (13) folgt

$$\frac{E_D}{E_M} = \frac{E_C - c_M E_M}{c_D E_M} \quad (16)$$

und mit Gleichung 14 und 15 wird daraus

$$\frac{E_D}{E_M} = \frac{c_M}{c_D} \frac{\epsilon_M - \epsilon_C}{\epsilon_C - \epsilon_D} \quad (17)$$

Der Vergleich von Gleichung 17 und Gleichung 12 liefert

$$\frac{c_M}{c_D} \frac{\epsilon_M - \epsilon_C}{\epsilon_C - \epsilon_D} = \epsilon_M \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\epsilon_M + (\epsilon_D - \epsilon_M) (1 - 2F_D)} \right] \quad (18)$$

Ersetzt man die Dielektrizitätskonstanten (ϵ_i) in Gleichung (18) gemäß Feldgleichungsanalogue [32] durch eine allgemeine Feldeigenchaftskenngröße (φ_i) und löst nach der Feldeigenchaft des zweiphasigen Werkstoffes (φ_C) auf, so erhält man die **Gefügestruktur-Feldeigenchafts-Gleichung für zweiphasige Werkstoffe mit Einlagerungsgefüge bei geringer Konzentration der eingelagerten Phase**

$$\varphi_C = \varphi_M \frac{1 + \frac{c_D}{c_M} \varphi_D \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) (1 - 2F_D)} \right]}{1 + \frac{c_D}{c_M} \varphi_M \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) (1 - 2F_D)} \right]} \quad (19a)$$

$$\varphi_C = \varphi_M \frac{1 - c_D + c_D \varphi_D \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) (1 - 2F_D)} \right]}{1 - c_D + c_D \varphi_M \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) (1 - 2F_D)} \right]} \quad (19b)$$

Gleichung (19) wird für sphärische Form der eingelagerten Phasenteilchen ($F_D = 0,33$; $\cos^2 \alpha_D = 0,33$; vgl. Teil II) identisch mit der für diesen Fall abgeleiteten Maxwell-Gleichung [23], die ihrerseits wiederum näherungsweise gleich ist mit der entsprechenden Gleichungsform von Niesel [24, 30]. Die Beschränkung von Gleichung (19) auf geringe Konzentrationen der eingelagerten Phase kann physikalisch anschaulich so verstanden werden, daß in der Ableitung nur die Überlagerung des homogenen Primärfeldes und des

induzierten Störfeldes im Innern der eingelagerten rotationsellipsoiden Teilchen berücksichtigt wurde, nicht aber die Überlagerung des homogenen Primärfeldes und des influenzierten Störfeldes außerhalb um die eingelagerten rotationsellipsoiden Teilchen und die – zusätzliche – gegenseitige Überlagerung von induzierten Störfeldern der verschiedenen Teilchen der Einlagerungsphase. Diese erfolgt mit Sicherheit dann, wenn der mittlere Abstand zwischen den Teilchen der Einlagerungsphase kleiner wird als die Reichweite der Störfelder. Da dieser mittlere Abstand ($\bar{\lambda}$) nach der Fullman-Gleichung [41]

$$\bar{\lambda} = \bar{L}_3 \frac{1 - c_D}{c_D} \quad (20)$$

sowohl von der Volumenkonzentration der eingelagerten Phase (c_D) als auch von der Größe ihrer Teilchen (\bar{L}_3 = mittlere räumliche Sehnenlänge) abhängt, kommt die gegenseitige Überlagerung von Störfeldern erst bei höheren – je nach Teilchengröße unterschiedlichen – Konzentrationen der Einlagerungsphase zur Geltung. Die Interferenz von Primär- und Störfeld in der Matrixphase wird in der unten weitergeführten Ableitung durch die – wie sich zeigen wird mathematisch nicht exakte – „Methode der schematischen Differentiation“ berücksichtigt. Dabei wird angenommen, daß der zweiphasige Werkstoff mit geringer Konzentration der Einlagerungsphase als quasihomogene Matrixphase betrachtet werden kann, in die wiederum Teilchen der Einlagerungsphase in geringer Konzentration (dc_D) eingebracht werden [4]. Die effektive Feldeigenchaft kann damit wieder mit Hilfe der zuerst abgeleiteten Gefügestruktur-Feldeigen-

chafts-Gleichung (19) für geringe Konzentration der eingelagerten Phase wie folgt ermittelt werden:

Mit $\varphi_M \triangleq \varphi_C$ und $c_M + c_D + dc_D = 1$ (21) erhält man aus Gleichung 19

$$\varphi_C + d\varphi_C = \varphi_C \frac{1 + \frac{dc_D}{1 - c_D - dc_D} \varphi_D \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) (1 - 2F_D)} \right]}{1 + \frac{dc_D}{1 - c_D - dc_D} \varphi_C \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) (1 - 2F_D)} \right]} \quad (22)$$

Und durch Umformung (vgl. auch Gleichung (18))

$$\frac{dc_D}{1 - c_D - dc_D} = \frac{d\varphi_C}{\varphi_C (\varphi_D - \varphi_C - d\varphi_C) \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) (1 - 2F_D)} \right]} \quad (23)$$

Mit der vereinfachenden Relation

$$dc_D \ll (1 - c_D) \text{ und } d\varphi_C \ll \varphi_C \quad (24)$$

erhält man die Näherungsform

$$\frac{dc_D}{1 - c_D} = \frac{d\varphi_C}{\varphi_C (\varphi_D - \varphi_C) \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_D + (\varphi_D - \varphi_C) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_C + (\varphi_D - \varphi_C) (1 - 2F_D)} \right]} \quad (25)$$

deren Integration – auf der linken Gleichungsseite zwischen den (Konzentrations-)Grenzen 0 und c_D , auf der rechten Gleichungsseite zwischen den (Feldeigenchafts-)Grenzen φ_M und φ_C – die allgemeine Gefüge-Feldeigenchafts-Gleichung für zweiphasige Werkstoffe ohne Beschränkung der Konzentration der Phasen liefert. Die Integrierbarkeit der Gleichung (25) wird, einem früheren Vorschlag gemäß [31, 37], über Partialbruchzerlegung der rechten Seite erreicht: durch Umformung ergibt sich

$$\frac{dc_D}{1 - c_D} = d\varphi_C \frac{2F_D (1 - F_D) \varphi_C^2 + \varphi_C (\varphi_D - \varphi_C) (\varphi_C [2F_D + (1 - 3F_D + 4F_D^2) \varphi_C \varphi_D + F_D (1 - 2F_D) \varphi_D^2] + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)) + \varphi_D [1 - 2F_D - \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)]}{\varphi_C (\varphi_D - \varphi_C) (\varphi_C [2F_D + (1 - 3F_D + 4F_D^2) \varphi_C \varphi_D + F_D (1 - 2F_D) \varphi_D^2] + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D))} = d\varphi_C \frac{Q(\varphi_C)}{P(\varphi_C)} \quad (26)$$

und nach den Regeln der Partialbruchzerlegung gilt dann [3]

$$\frac{Q(\varphi_C)}{P(\varphi_C)} = \frac{R}{\varphi_C - \varphi_{C1}} + \frac{S}{\varphi_C - \varphi_{C2}} + \frac{T}{\varphi_C - \varphi_{C3}} \quad (27)$$

mit den Lösungen der Nennerfunktion $P(\varphi_C)$ in Gleichung (26)

$$\varphi_{C1} = 0; \varphi_{C2} = \varphi_D;$$

$$\varphi_{C3} = \varphi_D \left[1 - \frac{1}{2F_D + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} \right]$$

und

$$R = \frac{Q(\varphi_{C1})}{P'(\varphi_{C1})} = \frac{F_D (1 - 2F_D)}{1 - 2F_D - \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} \quad (28)$$

$$S = \frac{Q(\varphi_{C2})}{P'(\varphi_{C2})} = -1 \quad (29)$$

$$T = \frac{Q(\varphi_{C3})}{P'(\varphi_{C3})} = \frac{F_D (1 - 2F_D)}{1 - 2F_D - \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} + \frac{2F_D (1 - F_D)}{2F_D + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} - 1 \quad (30)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (27) bis (30) und Einführung der Integrale ergibt sich aus Gleichung (26)

$$c_D \int_0^{\varphi_C} \frac{d\varphi_C}{1 - c_D} = \int_0^{\varphi_C} \frac{R d\varphi_C}{\varphi_M} - \int_0^{\varphi_C} \frac{\varphi_C}{\varphi_M} \frac{d\varphi_C}{\varphi_C - \varphi_D} + \int_0^{\varphi_C} \frac{\varphi_C}{\varphi_M} \frac{1}{\varphi_C - \varphi_D} \left[1 - \frac{1}{2F_D + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} \right] d\varphi_C \quad (31)$$

Eine andere Herleitung der Gleichung (31) über Partialbruchzerlegung nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten ist an anderer Stelle explizit aufgezeigt [36]. Ihre Integration liefert eine – schon früher mitgeteilte [28, 31, 34, 37] – **allgemeine (Modell-)Gefügestruktur-Feldeigenschafts-Gleichung für zweiphasige Werkstoffe mit Einlagerungsgefüge ohne Konzentrationsbeschränkung**

$$1 - c_D = \frac{\varphi_D - \varphi_C}{\varphi_D - \varphi_M} \left[\frac{\varphi_C}{\varphi_C} \right]^R \left[\frac{\varphi_C}{\varphi_M} + \varphi_D \left\{ 1 - \frac{1}{2F_D + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} \right\} \right]^T + \varphi_D \left\{ 1 - \frac{1}{2F_D + \cos^2 \alpha_D (1 - 3F_D)} \right\} \quad (32)$$

(φ = Feldeigenschaft; D, M, C = Indizes für die Einlagerungsphase D, die Matrixphase M und das zweiphasige Material C; c_D = Volumenanteil der Einlagerungsphase = Phasenkonzentrationsfaktor; F_D = Formfaktor; $\cos^2 \alpha_D$ = Orientierungsfaktor; R, T = Exponenten gem. Gleichungen (28), (30).

Wie die Ableitung zeigt, wird der Gefügeeinfluß auf die Feldeigenschaften von zweiphasigen Werkstoffen mit (Modell-)Einlagerungsgefüge vollständig erfaßt durch drei Gefügeparameter, die sich auf die eingelagerte Phase beziehen und als

- Phasenkonzentrationsfaktor (c_D)
- Formfaktor (F_D) und
- Orientierungsfaktor ($\cos^2 \alpha_D$)

in die Gefügestruktur-Feldeigenschafts-Gleichung eingehen.

Der **Phasenkonzentrationsfaktor** (c_D) entspricht dem Volumenanteil der Einlagerungsphase (vgl. Teil II dieser Abhandlung, METALL demnächst), unterliegt der Bedingung $0 \leq c_D \leq 1$ und enthält die vorn aufgeführten beiden Gefügeparameter „Größe“ und „Anzahl“ der Teilchen der eingelagerten Phase; denn gibt man z. B. die Größe

für abgeplattete bzw. gestreckte Rotationsellipsoide mit gleichem Verhältnis von großer – zu – kleiner Achse (z. B. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, „= 2) über ihre mittlere Sehnenlänge (\bar{L}_3) an, so gilt für abgeplattete Rotationsellipsoide [41]

$$\bar{L}_3 = 1.278 a$$

$$V_a = 1.006 (\bar{L}_3)^3$$

$$c_D = \frac{1.006 (\bar{L}_3)^3 \cdot N}{V_M + 1.006 (\bar{L}_3)^3 \cdot N}$$

oder für gestreckte Rotationsellipsoide

$$\bar{L}_3 = 1,46 b$$

$$V_a = 2,69 (\bar{L}_3)^3$$

$$c_D = \frac{2,69 (\bar{L}_3)^3 \cdot N}{V_M + 2,69 (\bar{L}_3)^3 \cdot N}$$

und damit

$$c_D = f(\bar{L}_3, N, V_M)$$

($V_{a,g}$ = Volumen eines einzelnen abgeplatteten bzw. gestreckten Rotationsellipsoids;

N = Anzahl der rotationsellipsoiden Teilchen im Gesamtvolumen;

V_M = Volumen der Matrixphase)

Die Gefügeparameter **Größe** und **Anzahl** der Teilchen der eingelagerten Phase sind demnach nicht unabhängig voneinander, sondern nur kombiniert über den Phasenkonzentrationsfaktor variierbar. Dies ist eine einsichtige Konsequenz der Methode der schematischen Differentiation, die formal anschaulich Störfeldüberlagerungen bei **allen** Konzentrationen berücksichtigt, obwohl diese bei geringen Konzentrationen vernachlässigbar klein werden. Eine tatsächlich wirksame Störfeldüberlagerung beginnt daher erst oberhalb einer gewissen Konzentration der Einlagerungsphase, die von der Größe ihrer Teilchen abhängt. Für das Ergebnis der Gleichung (32) ist dieser Beginn der Störfeldüberlagerung – und damit der Einfluß der Teilchengröße als unabhängige Variable – irrelevant.

Der **Formfaktor** in Gleichung (32) entspricht dem Depolarisations- oder Entelektrisierungsfaktor und ergibt sich aus dem Verhältnis von Rotations- zu Nebenachse des die realen Teilchen substituierenden Rotationsellipsoids. Er läßt sich gemäß Gleichung (10) für jedes Achsenverhältnis berechnen [39, 44] und unterliegt der Bedingung $0 \leq F_D \leq 0,5$ mit $F_D = 0,33$ für sphärische Gestalt der Teilchen der Einlagerungsphase. In Abb. 2 ist das Ergebnis dieser Berechnung graphisch dargestellt (vgl. hierzu Teil II, METALL, demnächst).

Der **Orientierungsfaktor** schließlich ergibt sich ableitungsgemäß als Kosinusquadrat desjenigen Winkels, den die Rotationsachse des substituierenden Rotationsellipsoids mit der Feldrichtung bildet und unterliegt der Bedingung $0 \leq \cos^2 \alpha_D \leq 1$ mit $\cos^2 \alpha_D = 0,33$ für statistische Orientierung, d. h.

orientierungslose oder isotrope Einlagerung der Teilchen der eingelagerten Phase (vgl. auch Teil II, METALL, demnächst).

2.4 Zur Konvergenz zwischen Grenzwert- und Modellkonzept

Das Gleichung (32) zugrunde liegende Modell und ihre – mathematisch nicht exakte – Ableitung über die Methode der schematischen Differentiation machen ihre physikalische und ingenieurmäßige „Qualitätskontrolle“ auf Zuverlässigkeit und damit Brauchbarkeit zwingend notwendig. Physikalisch kann dies dadurch erfolgen, daß Gleichung (32) für jene Randbedingungen zum gleichen Ergebnis führen muß, die den nach dem Grenzwertkonzept abgeleiteten Gleichungen zugrunde liegen.

Die Grenzwertgleichungen I. Ordnung entsprechen den Kirchhoff-Gesetzen für Parallel- und Reihenordnung der beiden Phasen. Für das Modell ergibt sich aus den oberen Grenzwerten I. Ordnung daher die Randbedingung, daß die Teilchen der „eingelagerten“ Phase senkrecht zur Feldrichtung orientierte Scheiben ($\cos^2 \alpha_D = 0$) mit „unendlich“ großer Nebenachse bei endlicher

Rotationsachse ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z}{x} = 0$; $F_D = 0$,

vgl. Abb. 2) sind oder parallel zur Feldrichtung orientierte Zylinder ($\cos^2 \alpha_D = 1$) mit „unendlich“ großer Rotationsachse bei endlicher Nebenachse

($\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{x} = \infty$; $F_D = 0,5$; vgl. Abb. 2).

Beide Fälle entsprechen der Parallelanordnung der Phasen und lassen sich gleichberechtigt durch entweder senkrecht zur Feldrichtung orientierte Scheiben ($\cos^2 \alpha_D = 0$) mit endlicher Nebenachse bei unendlich kleiner

Rotationsachse ($\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{x} = 0$; $F_D = 0$)

oder parallel zur Feldrichtung orientierte Zylinder ($\cos^2 \alpha_D = 1$) mit endlicher Rotationsachse bei unendlich kleiner

Nebenachse ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{x} = \infty$; $F_D = 0,5$) dar-

stellen. Diese Darstellung entspricht der Forderung des Modellkonzepts nach Einlagerungsgefüge. – Die Randbedingungen für die unteren Grenzwerte I. Ordnung ergeben sich aus der parallel zur Feldrichtung orientierten Scheibe ($\cos^2 \alpha_D = 1$) mit endlicher Rotations- und unendlich großer Neben-

achse ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z}{x} = 0$; $F_D = 0$, vgl. Abb. 2)

oder endlicher Nebenachse und unendlich kleiner Rotationsachse ($\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{x} = \infty$; $F_D = 0$). Dieser Fall entspricht der

Reihenanzordnung der Phasen. Setzt man diese Randbedingungen in Gleichung (32) ein und substituiert die Indizes ($M, D \triangleq 1, 2$), so erhält man die Gleichungen (1) und (2) für die Grenzwerte I. Ordnung. – Eine zweite „physikalische Qualitätskontrolle“ der Gleichung (32) ergibt sich mit der Randbedingung, die aus den Grenzwerten II. Ordnung (Gleichung (3) und (4)) für das Modell folgt: „statistische Orientierung“. Man setzt den entsprechenden Orientierungsfaktor ($\cos^2 \alpha_D = 0,33$; vgl. Teil II, METALL, demnächst) in Gleichung (32) ein und läßt den Formfaktor variieren ($0 \leq F_D \leq 0,5$). Da das Modellkonzept die Annahme einer bestimmten Matrixphase vorschreibt, nimmt man einmal die Phase mit der größeren Feldeigenschaftskenngröße (z. B. höhere Leitfähigkeit: $\varphi_M = \varphi_2 > \varphi_D = \varphi_1$, vgl. Abb. 3a) und ein anderes Mal die Phase mit der kleineren Feldeigenschaftskenngröße (z. B. niedrigeren Leitfähigkeit: $\varphi_M = \varphi_1 < \varphi_D = \varphi_2$, vgl. Abb. 3b) als Matrixphase an und erhält jeweils obere und untere Grenzwerte. Um die Annahme einer bestimmten Phase als Matrixphase zu eliminieren, ist aus den so erhaltenen 4 Grenzwerten der höchste und der niedrigste als Grenzwert II. Ordnung für zweiphasige isotrope Gefüge anzusehen. Die Überlagerung der Grenzkurven für eine Matrixphase mit höherer Feldeigenschaftskenngröße mit denjenigen für eine Matrixphase mit niedrigerer Feldeigenschaftskenngröße liefert grafisch die äußersten Grenzkurven für das isotrope zweiphasige Modellgefüge (vgl. Abb. 3c). Dabei entspricht überraschenderweise die obere Grenzkurve einem Modellgefüge, bei dem die Phase mit der niedrigeren Feldeigenschaft die Matrixphase bildet, in die orientierungslos **scheibenförmige** Teilchen der Einlagerungsphase mit höherer Feldeigenschaftskenngröße diskontinuierlich eingebettet sind ($\cos^2 \alpha_D = 0,33$; $F_D = 0$). Die untere Grenzkurve dagegen gilt für ein Modellgefüge, bei dem die Phase mit höherer Feldeigenschaftskenngröße die Matrixphase bildet, in die – orientierungslos – scheibenförmige Teilchen der Phase mit niedrigerer Feldeigenschaftskenngröße diskontinuierlich eingelagert sind ($\cos^2 \alpha_D = 0,33$; $F_D = 0$). Setzt man den entsprechenden Orientierungs- und Formfaktor ($\cos^2 \alpha_D = 0,33$; $F_D = 0$) in Gleichung (32) (bzw. (28) und (30)) ein und substituiert die Indizes ($M = 2, D = 1$, für $\varphi_D < \varphi_M$; $M = 1, D = 2$, für $\varphi_D > \varphi_M$), so erhält man die Gleichungen (3), (4) der Grenzwerte II. Ordnung. Damit ist physikalisch die Konvergenz zwischen dem Grenzwertkonzept und dem Modellkonzept nachgewiesen. Gleichung (32), hervorgegangen aus dem Modellkonzept, kann nun benutzt werden, um Grenzwertgleichungen höherer Ordnung für zweiphasige Werkstoffe (\triangleq Anzahl der Phasen) abzuleiten. Mit bekannter Matrixphase (\triangleq Anordnung der Phasen) und isotro-

pem Gefüge (\triangleq Orientierungsfaktor), also **drei** definierten Voraussetzungen zum Gefüge, folgen aus Gleichung (32) beispielsweise engere **Grenzwertgleichungen III. Ordnung**:

$$1 - c_D = \frac{\varphi_C - \varphi_D \varphi_M + 2\varphi_D}{\varphi_M - \varphi_D \varphi_C + 2\varphi_D}$$

$$\begin{cases} \varphi_C = \varphi^{III} \text{ für } \varphi_M < \varphi_D \\ \varphi_C = \varphi^{III} \text{ für } \varphi_M > \varphi_D \end{cases} \quad (33)$$

$$1 - c_D = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{\varphi_M - \varphi_D} \sqrt[3]{\frac{\varphi_M}{\varphi_C}}$$

$$\begin{cases} \varphi_C = \varphi^{III} \text{ für } \varphi_M > \varphi_D \\ \varphi_C = \varphi^{III} \text{ für } \varphi_M < \varphi_D \end{cases} \quad (34)$$

wobei Gleichung (33) die oberen Grenzwerte beschreibt, wenn die Matrixphase den niedrigeren Feldeigenschaftswert gegenüber demjenigen der Einlagerungsphase besitzt ($\varphi_M < \varphi_D$), und sie ergibt die unteren Grenzwerte, wenn die Matrixphase den höheren Feldeigenschaftswert gegenüber demjenigen der Einlagerungsphase hat. Dies entspricht Gleichung (3) des Grenzwertkonzeptes für $\varphi_M < \varphi_D$ bzw. Gleichung (4) für $\varphi_M > \varphi_D$ und, gleichzeitig, einem Matrixgefüge mit orientierungslos eingelagerten scheibenförmigen Teilchen der Einlagerungsphase ($F_D = 0$; $\cos^2 \alpha_D = 0,33$) im Modellkonzept. Gleichung (34) dagegen liefert die un-

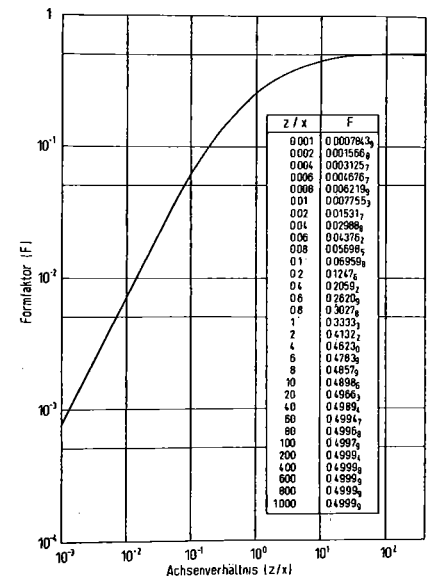


Abb. 2. Der Formfaktor als Funktion des Achsenverhältnisses rotationsellipsoider Teilchen.

teren Grenzwerte, wenn die Matrixphase die niedrigere Feldeigenschaftskenngröße gegenüber derjenigen der Einlagerungsphase hat ($\varphi_M > \varphi_D$) und die oberen Grenzwerte für den umgekehrten Fall ($\varphi_M < \varphi_D$). Sie entspricht einem Matrixgefüge mit kugelförmigen

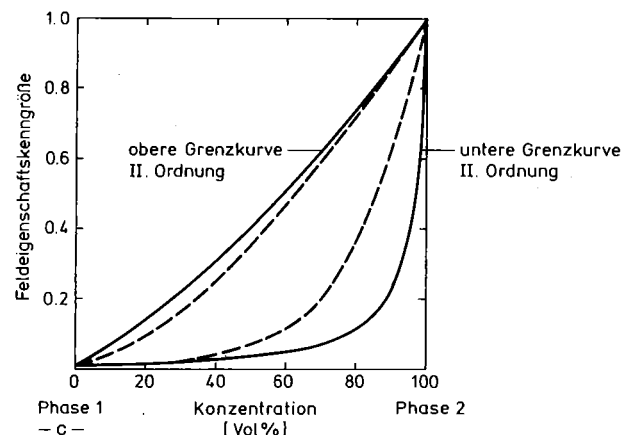
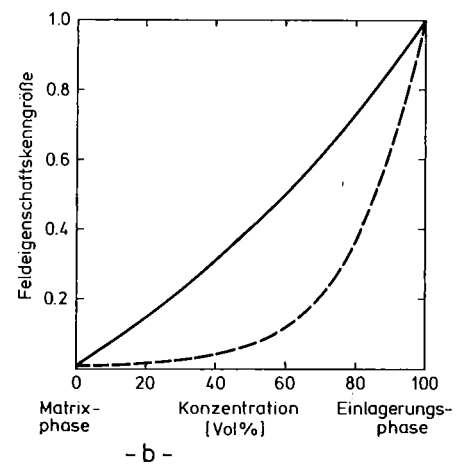
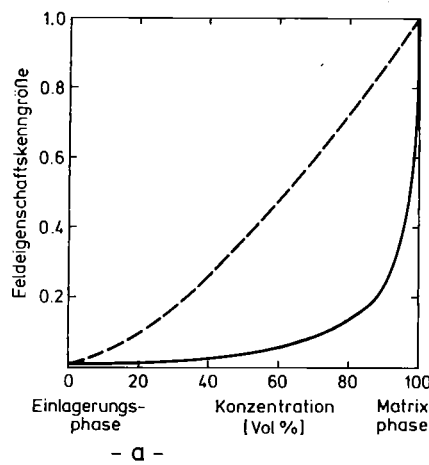


Abb. 3a-c. Grenzkurven II. und III. Ordnung.

Teilchen der Einlagerungsphase ($\cos^2 \alpha_D = 0,33$; $F = 0,33$) im Modellkonzept.

In Abb. 3 ergaben sich die Grenzkurven II. Ordnung aus der Überlagerung zweier Kurvenpaare (Abb. 3c), von denen eines für eine Matrixphase mit höherer (Abb. 3a), das andere für eine solche mit niedrigerer Feldeigenschaftskenngröße (Abb. 3b) galt. Diese beiden Kurvenpaare entsprechen den Grenzkurven III. Ordnung des zweiphasigen isotropen Werkstoffs.

Auch die übrigen Feststellungen zur Konvergenz zwischen Grenzwert- und Modellkonzept lassen sich grafisch am konkreten Beispiel demonstrieren. In Abb. 4 ist dies für die Funktion

$$\varphi_c = f(F)$$

nach Gleichung (32) einmal für isotrope zweiphasige Werkstoffe ($\cos^2 \alpha = 0,33$) mit höherer ($\varphi_M/\varphi_D = 100$), zum anderen für isotrope zweiphasige Werkstoffe mit niedrigerer Feldeigenschaftskenngröße der Matrixphase ($\varphi_M/\varphi_D = 0,01$) bei konstanter Phasenkonzentration ($c_D = 0,5$) dargestellt. Die beiden Feldeigenschaftswerte für den Formfaktor $F = 0$ schließen die Feldeigenschaftswerte für alle anderen Formfaktoren ein und liefern daher die Grenzwerte II. Ordnung. Dabei entspricht überraschenderweise, wie bereits erwähnt, der **untere** Grenzwert einer Matrixphase, deren Feldeigenschaftskenngröße **höher** ist, als diejenige der Einlagerungsphase, während sich dies für Formfaktoren zwischen den Schnittpunkten der beiden Kurven umkehrt. Praktisch würde dies z. B. bedeuten, daß ein zweiphasiger isotroper Werkstoff, dessen Matrixphase die niedrigere Leitfähigkeit hat, für bestimmte Formfaktoren der Teilchen der Einlagerungsphase eine höhere effektive Leitfähigkeit aufweist, als der entsprechende zweiphasige Werkstoff mit gleicher Gefügestruktur, aber höherer Leitfähigkeit der Matrixphase. Es ist möglich, daß dieses Ergebnis mit den vereinfachenden Näherungsrelationen bei der Ableitung der Gleichung (32) in Zusammenhang steht. Theoretische und experimentelle Überprüfungen dieser Aussage sind erforderlich.

Andere Grenzwerte erhält man, wenn die Informationen über das Gefüge, insbesondere die Angaben zur Form und Orientierung der Einlagerungsphase aus Messungen am realen Gefüge hergeleitet werden. Da, wie vorn bereits erwähnt, die modellmäßige Beschreibung der Form in der Regel zweideutig ist, ergeben sich über zwei gleichberechtigte Formfaktoren aus Gleichung (32) jeweils zwei Gleichungen. Bei über Messungen

- festgestellter Zweiphasigkeit (\triangleq Anzahl der Phasen),
- definierter Matrixphase (\triangleq Anordnung der Phasen),
- definierten Grenzen für die Form

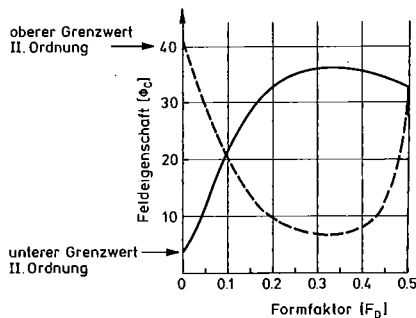


Abb. 4. Die Abhängigkeit der Feldeigenschaft eines zweiphasigen isotropen Werkstoffs mit Einlagerungsgefüge und Matrixphase mit höherer (—) bzw. niedrigerer Feldeigenschaftskenngröße (---) vom Formfaktor.

über definierte Grenzen für das Verhältnis von Rotations- zu Nebenachse des die Teilchen der Einlagerungsphase substituierenden Rotationsellipsoids (\triangleq Formfaktor),

– definierter Orientierung des die Teilchen der Einlagerungsphase substituierenden Rotationsellipsoids (\triangleq Orientierungsfaktor),

wären dies Gleichungen, die 4 Informationen voraussetzen und die daher – besonders realistische – Grenzkurven IV. Ordnung festlegen. Die Ermittlung dieser Informationen in Form von Gefügefaktoren aus Messungen am realen Werkstoff werden im Teil II dieser Arbeit behandelt (siehe METALL, demnächst).

2.5 Einlagerungs- und Durchdringungsgefüge

Die gefundene Korrelation zwischen Grenzwert- und Modellkonzept erlaubt eine weitere, verallgemeinernde Schlußfolgerung aufgrund von Plausibilitätsüberlegungen: Grundsätzlich lassen sich bei mehrphasigen Gefügen zwei Strukturen unterscheiden, das Einlagerungs- und das Durchdringungsgefüge [27, 29]. Einlagerungsgefüge liegt dann vor, wenn mindestens eine Phase (Einlagerungsphase) diskontinuierlich in mindestens eine andere, kontinuierliche Phase (Matrixphase) eingelagert ist. Dabei kann die eingelagerte Phase durchaus in höherer Konzentration vorliegen als die Matrixphase. Durchdringungsgefüge dagegen ist dann gegeben, wenn alle im Werkstoff vertretenen Phasen kontinuierlich auftreten. Dies ist ganz allgemein dann der Fall, wenn sich die Phasen in Form von schwammähnlichen Netzstrukturen dreidimensional durchdringen. Zwischen beiden Gefügetypen gibt es Übergänge. So kann durch zunehmende Agglomeration von Teilchen der eingelagerten Phase bei steigender Konzentration dieser Phase stetig der Übergang vom Einlagerungsgefüge mit bestimmter Matrixphase zum Durchdringungsgefüge erfolgen.

Weitere Konzentrationssteigerung der ursprünglichen Einlagerungsphase kann dann über Durchdringungsgefüge zur Bildung eines Einlagerungsgefüges führen, in dem die ursprüngliche eingelagerte Phase zur Matrixphase, die ursprüngliche Matrixphase zur Einlagerungsphase wird.

Diese Überlegungen machen auch anschaulich jene Sonderfälle klar, in denen sämtliche oder einzelne Phasen in mehrphasigen Werkstoffen nur in zwei oder einer Dimension kontinuierlich auftreten. Ein solcher Werkstoff besitzt möglicherweise in einer Richtung Durchdringungs-, in einer anderen Einlagerungsgefüge und ist anisotrop (z. B. Parallel- bzw. Reihenanordnung der Phasen).

Die Ableitung der Gleichungen 1 bis 4 für die Grenzwerte I. und II. Ordnung erhielt keine Annahme darüber, ob es sich um Einlagerungs- oder Durchdringungsgefüge handelt. Die Grenzwerte schließen demnach sowohl die Feldeigenschaftswerte des zweiphasigen Werkstoffs mit Einlagerungsgefüge als auch jene des zweiphasigen Werkstoffs mit Durchdringungsgefüge ein. Da diese Grenzwerte mit entsprechenden Randbedingungen auch aus Gleichung 32 für das Modellgefüge folgen, darf angenommen werden, daß auch eine mit dem Modellkonzept ableitbare Gleichung für die Feldeigenschaften zweiphasiger Werkstoffe mit Durchdringungsgefüge die Bedingung erfüllt, daß mit ihr berechnete Feldeigenschaftswerte immer zwischen den entsprechenden Grenzwerten liegen, die aus Grenzwertgleichungen folgen.

Zur Ableitung einer solchen Gleichung wird davon ausgegangen, daß in die Zwischenräume eines kontinuierlichen Skeletts aus Rotationsellipsoiden einer Phase, andere Rotationsellipsoide einer anderen Phase so eingepaßt werden, daß sich auch diese berühren und nur noch vernachlässigbar kleine Zwischenräume übrig bleiben. Zu diesem quasihomogenen zweiphasigen Werkstoff mit Durchdringungsgefüge (Phasen m, k) wird eine geringe Menge von -Rotationsellipsoiden der einen Phase (m) zugegeben. Die dadurch eintretende Feldeigenschaftsänderung kann mit der bekannten Gleichung für zweiphasige Werkstoffe mit Einlagerungsgefüge (Gleichung (19)) beschrieben werden, wenn man den ursprünglichen, aus zwei kontinuierlichen Phasen bestehenden Werkstoff als quasihomogene Matrixphase betrachtet. Man erhält eine Gleichung mit zwei unbekanntem, nämlich der Feldeigenschaftskenngröße der quasihomogenen „Matrixphase“ und der effektiven Feldeigenschaft nach Zugabe einer geringen Menge der einen Phase. Im Gedankenexperiment betrachtet man nun den neu entstandenen zweiphasigen Werkstoff als quasihomogene Matrixphase und gibt die

jenige – wiederum geringe – Menge der anderen Phase (k) zu, für die die mit der Gleichung für Einlagerungsgefüge und geringe Konzentration der Einlagerungsphase berechenbare Feldeigenenschaftsänderung entgegengesetzt gleich groß wird, wie die bei der ersten (m-)Phasenzugabe verursachte Feldeigenenschaftsänderung. Dann muß die Feldeigenenschaft des nun vorliegenden zweiphasigen Werkstoffs identisch sein mit derjenigen des ursprünglich vorhandenen zweiphasigen Werkstoffs mit Modell-Durchdringungs-Gefüge. Mit dieser Randbedingung ergibt sich aus dem so erhaltenen System von Gleichungen eine **allgemeine Gefügestruktur-Feldeigenenschafts-Gleichung für zweiphasige Werkstoffe mit Durchdringungsgefüge** [24, 32, 37, 38].

$$\begin{aligned}
 & (1 - c_k) (\varphi_m - \varphi_c) \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_m}{\varphi_c + (\varphi_m - \varphi_c) F_m} + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos^2 \alpha_m}{\varphi_c + (\varphi_m - \varphi_c) (1 - 2F_m)} \right] = \\
 & = c_k (\varphi_c - \varphi_k) \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha_k}{\varphi_c + (\varphi_k - \varphi_c) F_k} + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos^2 \alpha_k}{\varphi_c + (\varphi_k - \varphi_c) (1 - 2F_k)} \right] \quad (35)
 \end{aligned}$$

Man kann nun für gegebene Phasenfeldeigenschaften (φ_m , φ_k) und verschiedene, jeweils konstant gehaltene Phasenkonzentrationen die Form- und Orientierungsfaktoren zwischen ihren

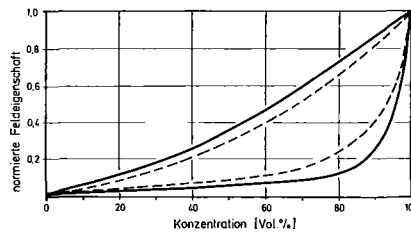


Abb. 5. Grenzkurven II. Ordnung (—) und berechnete Extremwertkurven für Durchdringungsgefüge (---).

möglichen Grenzen ($0 \leq F_m \leq 0,5$; $0 \leq F_k \leq 0,5$; $0 \leq \cos^2 \alpha_m \leq 1$; $0 \leq \cos^2 \alpha_k \leq 1$) variieren lassen. Wenn die vorn gemachte Annahme richtig ist, dürfen auch die größten und kleinsten dabei errechneten Werte nicht außerhalb der Grenzwerte liegen, die durch das Grenzkurvenkonzept definiert sind. Demnach müßte beispielsweise für Grenzfälle ($F_m = F_k = 0$; $\cos^2 \alpha_m = \cos^2 \alpha_k = 0$ bzw. $F_m = F_k = 0$; $\cos^2 \alpha_m = \cos^2 \alpha_k = 1$) Gleichung (35) mit den Grenzkurven I. Ordnung konvergieren, was auch der Fall ist. Außerdem müßten alle Werte für zweiphasige, isotrope Werkstoffe mit Durchdringungsgefüge ($\cos^2 \alpha_m = \cos^2 \alpha_k = 0,33$) nach Gleichung (35) innerhalb der berechenbaren Grenzkurven II. Ordnung liegen. In Abb. 5 ist der Verlauf der Feldeigenschaften von zweiphasigen isotropen Werkstoffen mit Durchdringungsgefüge ($\cos^2 \alpha_m = \cos^2 \alpha_k = 0,33$) über der Phasenkonzentration für zwei angenommene Phasen-

feldeigenschaften ($\varphi_m = 100$, $\varphi_k = 1$) und extreme Formfaktorenkombinationen ($F_m = F_k = 0$; $F_m = F_k = 0,5$; $F_m = 0,5$, $F_k = 0$; $F_m = 0$, $F_k = 0,5$) verglichen mit den Grenzkurven II. Ordnung. Wie sich – auch für andere Formfaktorkombinationen – zeigt, liegen alle Werte für Durchdringungsgefüge innerhalb dieser Grenzkurven. Eine allgemeine mathematische Beweisführung zu diesem Sachverhalt steht noch aus.

2.6 Erweiterung der Theorie vom zweiphasigen auf den dreiphasigen Werkstoff

Die Methode der schematischen Differentiation läßt sich formal auch auf mehrphasige Werkstoffe anwenden [37]. Mit Gleichung (32) hat man die Feldeigenenschaft für den zweiphasigen Werkstoff als Funktion seiner Gefügestruktur erfaßt. Diesen zweiphasigen Werkstoff betrachtet man nun als quasihomogene Matrixphase, in die eine dritte Phase eingelagert wird. Auf dem Wege der Methode der schematischen Differentiation müssen sich nun Gefügestruktur - Feldeigenenschafts - Gleichungen für den dreiphasigen Werkstoff ableiten lassen, deren allgemeine mathematische Behandlung und experimentelle Prüfung jedoch bislang noch nicht durchgeführt wurde.

Literaturverzeichnis siehe Teil III dieser Abhandlung (METALL, demnächst).

Prof. Dr. G. ONDRACEK, Karlsruhe

Zur quantitativen Gefüge-Feldeigenschaften-Korrelation mehrphasiger Werkstoffe

Teil II: Die Bestimmung der Gefügedaten durch quantitative Gefügeanalyse

Im Teil I dieser Abhandlung wird – aufbauend auf Literaturansätzen zur Theorie des Zusammenhangs zwischen Gefügestruktur und Feldeigenschaften nach dem Grenzwert- und dem Modellkonzept – eine allgemeine Gefüge-Feldeigenschaften-Gleichung abgeleitet, die die Berechnung von Feldeigenschaftenwerten zweiphasiger Werkstoffe aus ihren Gefügedaten erlaubt. Die Bestimmung der Gefügefaktoren durch quantitative Gefügeanalyse wird im Teil II der Arbeit beschrieben, während im Teil III berechnete und experimentelle Werte der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von zweiphasigen metallischen Werkstoffen verglichen werden.

In part I of this contribution – based upon earlier literature about the theoretical interrelationship between the microstructure and field properties due to the bound as well as the model microstructure concept – a general microstructure-field-property equation is derived providing the calculation of field properties of two-phase materials from their microstructural data. How to determine the microstructure factors by quantitative microstructural analysis is described in part II, whilst finally – in part III, calculated and measured electrical and thermal conductivities of two-phase metallic materials are compared.

1 Gefügeparameter: Anzahl und Anordnung der Phasen

Gemäß Tabelle 2* (vgl. Teil I dieser Arbeit, METALL 36, 1982, S. 524) benötigt man insgesamt 5 Angaben zur vollständigen quantitativen Erfassung der Gefügestruktur eines mehrphasigen Werkstoffs, die mit Hilfe der quantitativen Gefügeanalyse ermittelt werden. Das Prinzip dieser quantitativen Gefügeanalyse ist in Abb. 6 wiedergegeben. Vom präparierten Schnitt durch den Werkstoff werden Gefügebilder optisch dargestellt und vergrößert, fotografisch und/oder elektronisch nachgebildet, nachvergrößert und vermessen. Die in der Ebene ermittelten Meßgrößen werden über stereologische Gleichungen in einem ersten Computerprogramm auf dreidimensionale Gefügeparameter umgerechnet, die dann über weitere Rechenprogramme die gesuchten Gefügefaktoren und Eigenschaften des zweiphasigen Werkstoffs liefern. – Besonders einfach – ist die Ermittlung der Angabe zur Anzahl der Phasen (vgl. Tabelle 2), die bei ausreichender Kontrastierung unmittelbar im vergrößerten Gefügebild erkennbar sind. Die Angabe zur Unterscheidung zwischen Einlagerungs- und Durchdringungsgefüge erhält man aus der Messung folgender Größen im Gefügebild:
– der Anzahl aller eingelagerten Teilchen (N_E);
– der Anzahl aller eingelagerten Teilchen ohne Kontakt mit anderen Teilchen der Einlagerungsphase (N_0);

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Gerhard Ondracek, Universität und Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Material- und Festkörperforschung, Postfach 3640, D-7500 Karlsruhe.

*) Die Numerierung der Tabellen, Abbildungen, Gleichungen und Literaturzitate erfolgt fortlaufend über alle drei Teile dieser Abhandlung.

– der Anzahl der Kontaktstellen zwischen Teilchen der Einlagerungsphase (n_k).

Über die Beziehung [7] ergibt sich

$$\frac{2 n_k \cdot N_E}{N_E - N_0} - 1 = K \quad (36)$$

wobei der Kettenbildungsgrad (K) ein Maß für die mittlere Zahl der Kontaktnachbarteilchen pro Teilchen ist [38]. In Abb. 7 ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen von Durchdringungsgefüge in Abhängigkeit vom Kettenbildungsgrad angegeben. Bei einer kleineren mittleren Zahl von Kontaktnachbarteilchen ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Durchdringungsgefüge gering (z. B. 0 für $K \leq 1$). Mit steigendem Kettenbildungsgrad steigt die Wahrscheinlichkeit, was dem schon erwähnten stetigen Übergang von „reinem“ Einlagerungs- zu „reinem“ Durchdringungsgefüge entspricht (vgl. METALL 36, S. 530).

2 Gefügefaktoren

Drei Gefügeparameter (vgl. METALL 36, Tabelle 2 und S. 524), die das Gefüge eines zweiphasigen Werkstoffs quantitativ beschreiben, sind durch die Ableitung der Gleichung (32) als Gefügefaktoren definiert.

Ihre Ermittlung am realen Werkstoff erfolgt durch Messung in zweidimensionalen Gefügebildern, aus deren Meßdaten über stereologische Gleichungen die für den dreidimensionalen Werkstoff gültigen Gefügefaktoren errechnet werden können. Dabei ergibt sich der Phasenkonzentrationsfaktor als Volumenanteil der Phasen direkt aus dem Mittelwert der Flächenanteile der Phasen in Gefügebildern, die von statistisch durch den Werkstoff gelegten Schnitten stammen (Delesse-Prinzip). – Gemäß Gleichung (10) und Abb. 2 ist der Formfaktor eine Funktion des Verhältnisses von Rotations- und Nebenachse desjenigen Rotationsellipsoids, durch das die realen Teilchen der Einlagerungsphase im Modell ersetzt werden. Daß dieses – „räum-

liche“ – Achsenverhältnis $\left[\frac{z}{x} \right]$ aus

dem – mittleren – „ebenen“ Achsenverhältnis der Schnittellipsen von Substitutions-Rotationsellipsoiden über stereologische Gleichungen bestimmbar ist, war ein wesentlicher Grund für die Wahl des Rotationsellipsoid-Modells zur Beschreibung realer Werkstoffe (vgl. METALL 36, S. 528).

Praktisch geht man so vor, daß für jeden Schnitt eines – irregulär geform-

Quantitative Gefüge-Analyse:

Präparation + optisch-elektronische + Rechenprogramme
Messung

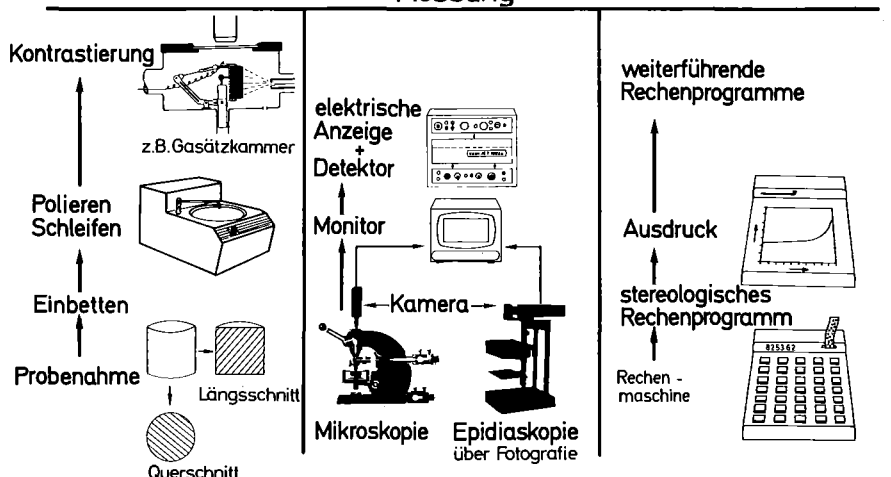


Abb. 6. Ablaufschema der quantitativen Gefügeanalyse [26].

ten – Teilchens der Einlagerungsphase im zweidimensionalen Gefügebild Fläche und Umfang gemessen und daraus das Achsenverhältnis jener Schnittellipse errechnet wird, die das gleiche Fläche-zu-Umfang-Verhältnis aufweist, wie die vermessene Teilchenschnittfläche (Abb. 8) [33]. Da man die Achsenverhältnisse in der Ebene sowohl aus „kleiner Achse-(b')-zu-großer-Achse (a') „als auch aus „großer-Achse-zu-kleiner-Achse“ bilden kann, erhält man auch jeweils zwei Mittelwerte der gemessenen Achsenverhältnisse von Schnittellipsen:

$$\frac{\sum \frac{a'}{b'}}{n} = \left[\frac{a'}{b'} \right] ; \frac{\sum \frac{b'}{a'}}{n} = \left[\frac{b'}{a'} \right] \quad (37)$$

Zu jedem dieser Achsenverhältnisse liefern die stereologischen Gleichungen je ein Achsenverhältnis für ein abgeplattetes und je ein Achsenverhältnis für ein gestrecktes Rotationsellipsoid [5, 34, 37], also insgesamt 4 „räumliche“ Achsenverhältnisse $\left[\frac{z}{x} \right]$:

$$\left[\frac{b'}{a'} \right] = \left[\frac{z}{x} \right] \frac{\arcsin \sqrt{1 - \left[\frac{z}{x} \right]^2}}{\sqrt{1 - \left[\frac{z}{x} \right]^2}} \quad (38)$$

$$\left[\frac{b'}{a'} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \left[\frac{z}{x} \right]^2 \sqrt{1 - \left[\frac{z}{x} \right]^2}} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\left[\frac{z}{x} \right]^2}} \right) \left[\frac{z}{x} \right]^2 \quad (39)$$

$$\left[\frac{a'}{b'} \right] = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin \sqrt{1 - \left[\frac{z}{x} \right]^2}}{2 \left[\frac{z}{x} \right]^2 \sqrt{1 - \left[\frac{z}{x} \right]^2}} \quad (40)$$

$$\left[\frac{a'}{b'} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\left[\frac{z}{x} \right]^2}}} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\left[\frac{z}{x} \right]^2}} \right) \left[\frac{z}{x} \right]^2 \quad (41)$$

In Abb. 9 sind diese Gleichungen graphisch dargestellt [27, 34]. – Im Gedankenexperiment sei nun einmal angenommen, es liege ein zweiphasiger Werkstoff mit gleichen gestreckten rotationsellipsoiden Teilchen der Einlagerungsphase vor. In statistisch durch ihn gelegten Schnitten erscheinen dann die Schnittellipsen, deren Vermessung die beiden Achsenverhältnisse gemäß Gleichung (37) liefert. Aus den Gleichungen (38) bis (41) folgen damit 4 Achsenverhältnisse von Rotationsellipsoiden, von denen aber zwei, nämlich diejenigen für gestreckte Rotationsellipsoide, dem angenommenen Modellwerkstoff entsprechend, identisch sein müssen, während die zugehörigen beiden Achsenverhältnisse für abgeplattete Rotationsellipsoide

ungleich sind. Für die quantitative Gefügeanalyse eines realen Werkstoffs bedeutet dies, daß von den vier aus Messungen erhaltenen Achsenverhältnissen für Substitutions-Rotationsellipsoide jeweils zwei für den gleichen Rotationsellipsoidtyp (gestreckt oder abgeplattet) näherungsweise gleich sind bzw. näher beieinander liegen als die beiden anderen. Das diesen – näherungsweise gleichen – Achsenverhältnissen entsprechende Rotationsellipsoid wäre dann am besten zur modellmäßigen Beschreibung der realen Teilchen der Einlagerungsphase geeignet. – Im Realfall werden allerdings die Unterschiede zwischen den räumlichen Achsenverhältnissen in der Regel so klein sein (vgl. Abb. 9, gestrichelte Linien), daß eine Selektion für praktische Zwecke nicht möglich ist. In diesen Fällen bildet man entweder aus den beiden Achsenverhältnissen für jeden Rotationsellipsoid-Typ je einen Mittelwert, erhält damit gemäß Gleichung (10) bzw. Abb. 2 zwei Formfaktoren und entsprechende Grenzkurven (vgl. METALL S. 529) oder man mittelt über alle vier Achsenverhältnisse und erhält einen „singulären“ mittleren Formfaktor.

Gemäß der Ableitung von Gleichung (32) ist der Orientierungsfaktor das Kosinusquadrat desjenigen Winkels,

den die die Realteilchen im Modell substituierenden Rotationsellipsoide gleicher Form und Größe mit der Feldrichtung bilden (vgl. Abb. 10). Auch er läßt sich – wie der Formfaktor – aus durch quantitative Gefügeanalyse bestimmten Achsenverhältnissen errechnen. Zur Herleitung des Zusammenhangs geht man von folgenden Gleichungen aus [5]:

$$\left[\frac{b'}{a'} \right]_A = \sqrt{\cos^2 \alpha_A + \frac{\sin^2 \alpha_A}{\left[\frac{z}{x} \right]^2}} \quad (42)$$

für gestreckte Rotationsellipsoide $\left[\frac{z}{x} \right]_{,,}$ und

$$\left[\frac{a'}{b'} \right]_A = \sqrt{\cos^2 \alpha_A + \frac{\sin^2 \alpha_A}{\left[\frac{z}{x} \right]^2}} \quad (43)$$

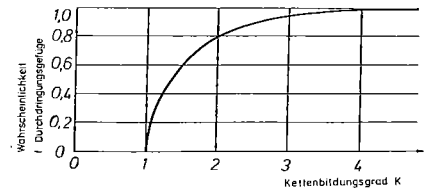


Abb. 7. Kettenbildungsgrad.

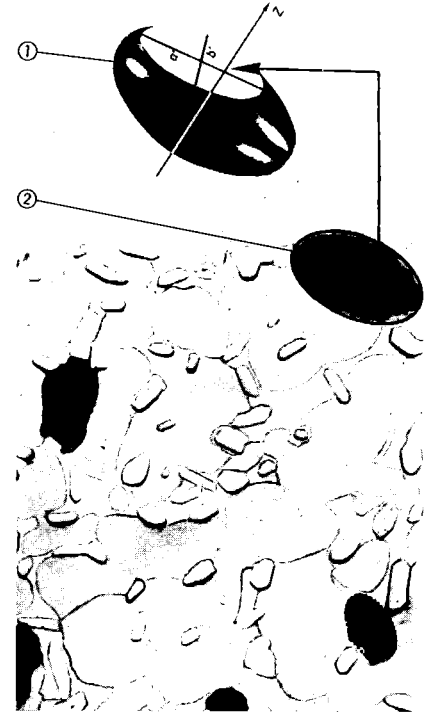


Abb. 8. Zur Bestimmung der Achsenverhältnisse von Schnittellipsen (① abgeplattetes Rotationsellipsoid, ② Schnittellipse).

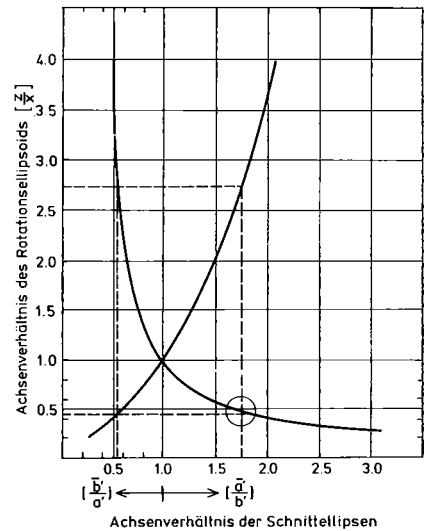


Abb. 9. Zum Zusammenhang zwischen dem („räumlichen“) Achsenverhältnis von Rotationsellipsoiden und dem mittleren („ebenen“) Achsenverhältnis ihrer Schnittellipsen [5, 34].

für abgeplattete Rotationsellipsoide $\left[\frac{z}{x} \right]_{,,}$ bzw. nach Umformung

$$\cos^2 \alpha_A = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]^2 \left[\frac{b'}{a'} \right]_A^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]^2 - 1} \quad (44a)$$

und

$$\cos^2 \alpha_A = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{a'}{b'} \right]_A^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1} \quad (44b)$$

Für diese Gleichungen wird das („räumliche“) Achsenverhältnis der Rotationsellipsoide mit den Gleichungen (38) bis (41) aus den mittleren Achsenverhältnissen

der Schnittelellipsen $\left(\left[\frac{b'}{a'} \right]_A, \left[\frac{a'}{b'} \right]_A \right)$

bestimmt, die in statistisch durch den Werkstoff gelegten Schnitten vermessen wurden. Die in den Gleichungen selbst enthaltenen mittleren Achsenverhältnisse der Schnittelellipsen $\left(\left[\frac{b'}{a'} \right]_A, \left[\frac{a'}{b'} \right]_A \right)$ dagegen sind diejenigen, die in Schnittebenen (A) senkrecht zur Feldrichtung vermessen wurden (vgl. Abb. 11).

Das bei der Ermittlung des „singulären“ Formfaktors erörterte Selektionsverfahren zur Bestimmung eines mittleren räumlichen Achsenverhältnisses schreibt über dieses vor, welche der beiden Gleichungen (44a) oder (44b) zur Bestimmung des Orientierungsfaktors anzuwenden ist. Betrachtet man dagegen die mittleren Achsenverhältnisse für das gestreckte und das abgeplattete Rotationsellipsoid als gleichberechtigt, so erhält man zwei – gleichberechtigte – Orientierungsfaktoren und damit wiederum entsprechende Grenzkurven höherer Ordnung. Durch eine zusätzliche Meßvorschrift läßt sich der Orientierungsfaktor gemäß Gleichung (44) optimieren. Grundsätzlich kann man ja die Orientierung des Substitutions-Rotationsellipsoids zu jeder Raumrichtung bestimmen, indem man die Achsenverhältnisse der Schnittelellipsen in allen 3 zu den drei Raumrichtungen senkrechten Schnittebenen ermittelt (vgl. Abb. 11), also

$$\begin{aligned} \left[\frac{b'}{a'} \right]_A &\rightarrow \cos^2 \alpha_A \\ \left[\frac{b'}{a'} \right]_B &\rightarrow \cos^2 \alpha_B \\ \left[\frac{b'}{a'} \right]_C &\rightarrow \cos^2 \alpha_C \end{aligned} \quad (45)$$

Als mathematische Randbedingung gilt dann

$$\cos^2 \alpha_A + \cos^2 \alpha_B + \cos^2 \alpha_C = 1 \quad (46)$$

Diese Randbedingung wird jedoch nur am idealen Modell erfüllt, während für den Realfall gelten wird

$$\sum_{i=A}^C \cos^2 \alpha_i = X \geq 1 \quad (47)$$

Für die Anpassung des Modellwerkstoffs an den realen Werkstoff setzt man

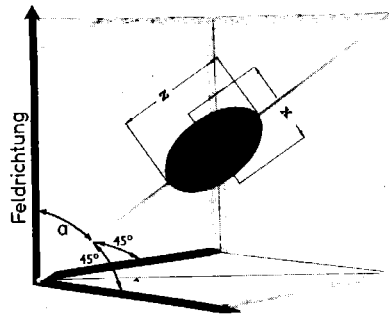


Abb. 10. Orientierungswinkel (α) und Orientierungsvektor zum Orientierungsfaktor ($\cos^2 \alpha$) bei isotroper („statistischer“) Orientierung.

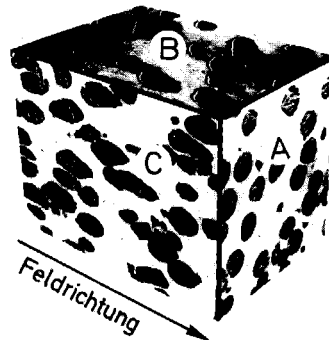


Abb. 11. Orientierte Schnittebenen (A, B, C) durch den zweiphasigen Werkstoff zur Ermittlung des Orientierungsfaktors.

$$Y \cos^2 \alpha_A + Y \cos^2 \alpha_B + Y \cos^2 \alpha_C = Y \cdot X = 1 \quad (48)$$

mit

$$Y \cos^2 \alpha_A = \cos^2 \alpha_D \quad (49)$$

und

$$Y = \frac{1}{\cos^2 \alpha_A + \cos^2 \alpha_B + \cos^2 \alpha_C} \quad (50)$$

sowie analog zu Gleichung (44a) bzw. (44b)

$$\cos^2 \alpha_B = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{b'}{a'} \right]_B^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1} \quad (51a)$$

$$\cos^2 \alpha_B = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{a'}{b'} \right]_B^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1} \quad (51b)$$

$$\cos^2 \alpha_C = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{b'}{a'} \right]_C^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1} \quad (52a)$$

$$\cos^2 \alpha_C = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{a'}{b'} \right]_C^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1} \quad (52b)$$

Mit den Gleichungen (44a), (51a) und (52a) folgt aus Gleichung (50)

$$Y = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left\{ \left[\frac{b'}{a'} \right]_A^2 + \left[\frac{b'}{a'} \right]_B^2 + \left[\frac{b'}{a'} \right]_C^2 \right\} - 3} \quad (53)$$

und mit den Gleichungen (44b), (51b) und (52b) folgt aus Gleichung (50)

$$Y = \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left\{ \left[\frac{a'}{b'} \right]_A^2 + \left[\frac{a'}{b'} \right]_B^2 + \left[\frac{a'}{b'} \right]_C^2 \right\} - 3} \quad (54)$$

Aus den Gleichungen (44), (53) und (54) sowie Gleichung (49) folgt der aus gefügeanalytischen Messungen bestimmbare Orientierungsfaktor

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_D &= \\ &= \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{b'}{a'} \right]_A^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left\{ \left[\frac{b'}{a'} \right]_A^2 + \left[\frac{b'}{a'} \right]_B^2 + \left[\frac{b'}{a'} \right]_C^2 \right\} - 3} \end{aligned} \quad (55)$$

oder

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_D &= \\ &= \frac{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left[\frac{a'}{b'} \right]_A^2 - 1}{\left[\frac{z}{x} \right]_{\perp}^2 \left\{ \left[\frac{a'}{b'} \right]_A^2 + \left[\frac{a'}{b'} \right]_B^2 + \left[\frac{a'}{b'} \right]_C^2 \right\} - 3} \end{aligned} \quad (56)$$

Da beispielsweise für einen Modellwerkstoff mit statistischer Orientierung gelten muß

$$\left[\frac{b'}{a'} \right]_A = \left[\frac{b'}{a'} \right]_B = \left[\frac{b'}{a'} \right]_C \quad (57)$$

bzw.

$$\left[\frac{a'}{b'} \right]_A = \left[\frac{a'}{b'} \right]_B = \left[\frac{a'}{b'} \right]_C \quad (58)$$

folgt erwartungsgemäß (vgl. S. 529) aus Gleichung (55) bzw. Gleichung (56)

$$\cos^2 \alpha_D = \frac{1}{3}$$

für den isotropen Werkstoff.

Damit sind jene drei Gefügefaktoren, die nach Gleichung (32) die Gefügestruktur mit den Feldeigenschaften eines zweiphasigen Werkstoffs quantitativ korrelieren, gefügeanalytisch bestimmbar. Nach gefügeanalytischen Angaben berechnete Werte sollen nun mit experimentellen Werten der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von zweiphasigen metallischen Werkstoffen verglichen werden.

Literaturverzeichnis siehe Teil III dieser Abhandlung (METALL, demnächst).

Prof. Dr. G. ONDRACEK, Karlsruhe

Zur quantitativen Gefüge-Feldeigenschaften-Korrelation mehrphasiger Werkstoffe

Teil III: Vergleich berechneter und experimenteller Feldeigenschaftswerte für metallische Zweiphasenwerkstoffe

Im Teil I dieser Abhandlung*) wird – aufbauend auf Literaturansätzen zur Theorie des Zusammenhangs zwischen Gefügestruktur und Feldeigenschaften nach dem Grenzwert- und dem Modellkonzept – eine allgemeine Gefüge-Feldeigenschaften-Gleichung abgeleitet, die die Berechnung von Feldeigenschaftswerten zweiphasiger Werkstoffe aus ihren Gefügedaten erlaubt. Die Bestimmung der Gefügefaktoren durch quantitative Gefügeanalyse wird im Teil II der Arbeit*) beschrieben, während im vorliegenden Teil III berechnete und experimentelle Werte der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von zweiphasigen metallischen Werkstoffen verglichen werden.

In part I of this contribution*) – based upon earlier literature about the theoretical interrelationship between the microstructure and field properties due to the bound as well as the model microstructure concept – a general microstructure-field-property equation is derived providing the calculation of field properties of two-phase materials from their microstructural data. How to determine the microstructure factors by quantitative microstructural analysis is described in part II*), whilst finally – in this part III, calculated and measured electrical and thermal conductivities of two-phase metallic materials are compared.

Im allgemeinen sind die Angaben zur Gefügestruktur in jener Literatur, die Meßwerte der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von metallischen Zweiphasenwerkstoffen mitteilt, nicht sehr spezifiziert. Am besten definiert sind sie für Werkstoffe mit Einlagerungsgefüge, wenn die eingelagerte Phase Faserform hat. In Abb. 12**) und 13 sind experimentelle Werte der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von Werkstoffen mit Al-Matrixphase wiedergegeben, in die Stahlfasern ($F_D = 0,5$) orientiert eingelagert wurden. Die Rotationsachse der Fasern hatte verschiedene, bekannte Orientierungen zum Stromfluß (0° ; 30° ; 60° ; 90°), so daß sich die Orientierungsfaktoren errechnen ließen. Die für die verschiedenen Faserorientierungen nach Gleichung (32) und den Gleichungen (28–30) errechneten theoretischen Kurven spiegeln sowohl für die elektrische wie für die thermische Leitfähigkeit

den experimentellen Verlauf richtig wieder. – Es sei in diesem Zusammenhang angemerkt, daß beispielsweise in Feldrichtung orientiert eingelagerte Kurzfasern bei hinreichend kleinem Faserdurchmesser wegen des dann näherungsweise gleichen Formfaktors ($F_D = 0,5$) den gleichen Feldeigenschaftseffekt hervorrufen wie die in der Regel teureren und technologisch schwerer handhabbaren „Endlos“-Fasern.

Zur Simulation gerichtet erstarrter Eutektika wurden netzförmig angeordnete Cu-Fasern ($F_D = 0,5$) in eine Bi-Matrixphase eingelagert. Gemessen wurde die elektrische Leitfähigkeit in der in Abb. 14 skizzierten Richtung: Trotz netzförmiger Anordnung waren dabei die Faserachsen stets senkrecht orientiert zur Stromrichtung ($\alpha_D = 90^\circ$). Aus Gleichung (32) folgt daher für den theoretischen Verlauf der Leitfähigkeit mit der Cu-Faser-Konzentration die Beziehung

$$1 - c_D = \frac{\phi_C - \phi_D}{\phi_M - \phi_D} \sqrt{\frac{\phi_M}{\phi_C}} \quad (59)$$

Der mit ihr errechnete Kurvenverlauf in Abb. 14 stimmt wiederum hinreichend gut mit den Meßwerten überein. – Die bisher erörterten Beispiele ermöglichen den Vergleich theoretischer

Kurven aus singulären Punkten mit gemessenen Werten, da die Gefügestruktur modellmäßig definierbar war. Pulvermischungen aus Ag- und Fe-Pulvern ergaben nach dem Sintern Einlagerungsgefüge mit wechselnder Matrixphase, aber in jedem Fall quasi-sphärischen Teilchen der eingelagerten Phase ($F_D \approx 0,33$; $\cos^2 \alpha_D \approx 0,33$). Gleichung (32) liefert für dieses Gefüge bei Fe-Matrixphase eine unterste Grenzkurve. Die Kaltverformung der Sinterlinge durch Ziehen führte zu einer Gefügestruktur mit in Ziehrichtung orientierten, faserähnlichen Teilchen der Einlagerungsphase ($F_D \approx 0,5$; $\cos^2 \alpha_D = 1$) [42]. Man erhält für diese Gefügestruktur aus Gleichung (32) die oberste Grenzkurve, die Gleichung (1) entspricht. Alle Meßwerte mußten zwischen diesen Grenzkurven liegen, was – wie Abb. 15 zeigt – auch der Fall ist.

Für Abb. 15 ergaben sich die Grenzkurven aus bekannten Form- und Orientierungsfaktoren. Im Falle pulvertechnologisch hergestellter Al-UAl₄-Werkstoffe dagegen war nur bekannt, daß der Werkstoff aus zwei Phasen (Al, UAl₄) im Gleichgewicht besteht, quasi-isotrop aufgebaut ist und bis etwa 50 Vol.-% UAl₄ eine Al-Matrixphase existiert. Dementsprechend müßten die Meßwerte zwischen 50 und 100 Vol.-% Al innerhalb der theoretischen Grenzkurven III. Ordnung (Gleichung (33), (34)) und diejenigen zwischen 0 und 50 Vol.-% Al innerhalb der Grenzkurven II. Ordnung (Gleichungen (3), (4)) liegen. Wie der Vergleich zwischen experimentellen Werten und theoretischen Grenzkurven in Abb. 16 zeigt, trifft dies auch zu. Entfällt für gemessene Leitfähigkeiten isotroper zweiphasiger Metalle auch die Information, welche der beiden Phasen die Matrixphase ist, so müssen die Meßwerte lediglich noch innerhalb der Grenzkurven II. Ordnung (Gleichungen (3), (4)) liegen, was für die in Abb. 17–19 angeführten Systeme im Rahmen der Meßgenauigkeit auch er-

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Gerhard Ondracek, Universität und Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Material- und Festkörperforschung, Postfach 3640, D-7500 Karlsruhe.

*) Teil I und II dieser Arbeit wurde in METALL 36 (1982), S. 523–531 und S. 1288–1290 veröffentlicht.

**) Die Numerierung der Tabellen, Abbildungen, Gleichungen und Literaturzitate erfolgt fortlaufend über alle drei Teile dieser Abhandlung.

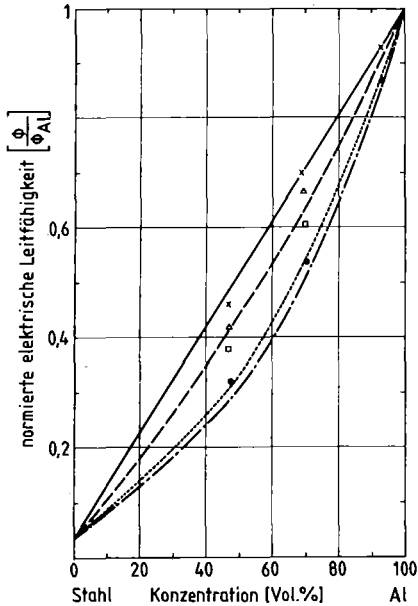


Abb. 12. Elektrische Leitfähigkeit von Aluminium-Stahl-Metall mit Al-Matrixphase und gerichtet eingelagerten Stahlfasern (\times 0° , Δ 30° , \square 60° , \bullet 90° Neigung der Faserachse zur Feldrichtung) bei Raumtemperatur [13] und berechnete Kurven gemäß Gl. (32) für 0° (—), 30° (---), 60° (...), 90° Faserorientierung (—·—).

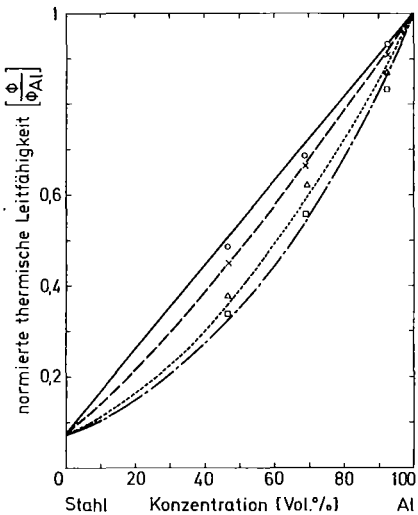


Abb. 13. Thermische Leitfähigkeit von Aluminium-Stahl-Metall mit Al-Matrixphase und gerichtet eingelagerten Stahlfasern (\circ 0° , \times 30° , Δ 60° , \square 90° Neigung der Faserachse zur Feldrichtung) bei Raumtemperatur [13] und berechnete Kurven gemäß Gl. (32) für 0° (—), 30° (---), 60° (...), 90° Faserorientierung (—·—).

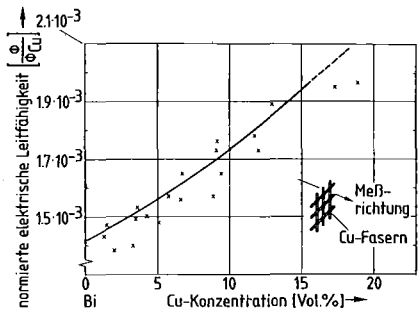


Abb. 14. Elektrische Leitfähigkeit von gerichtet erstarrtem Bi-Cu-Metall (\times) bei Raumtemperatur [42] senkrecht zur Erstarrungsrichtung und berechnete Kurve gemäß Gleichung (59) (—).

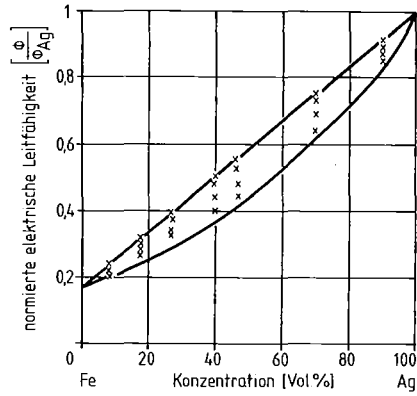


Abb. 15. Elektrische Leitfähigkeit von Ag-Fe-Metall (\times) [42] mit gerichtet eingelagerten Fasern (obere Grenzkurve) und sphärischen Ag-Teilchen eingelagert in eine Fe-Matrixphase (untere Grenzkurve).

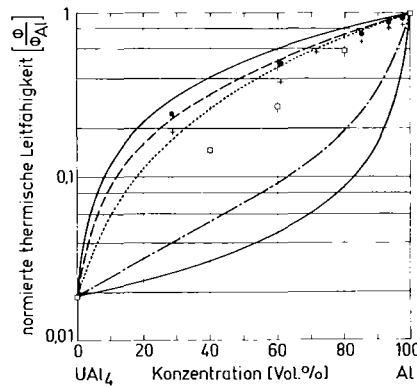


Abb. 16. Thermische Leitfähigkeit von Al-UAl₄-Metall (\bullet + \square) bei 366 K [10, 11] und Grenzkurven I. (—), II. (---) und III. Ordnung (...).

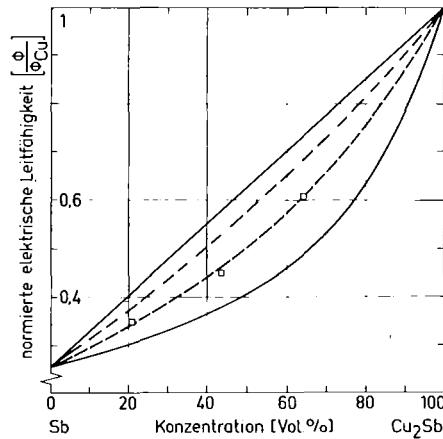


Abb. 17. Elektrische Leitfähigkeit von Cu₂Sb-Sb-Metall (\square) bei 289 K [19] und Grenzkurven I. (—) und II. Ordnung (---).

füllt ist. Im Gegensatz zu Abb. 16, in der selbst Grenzkurven III. Ordnung einen auch für eine ingenieurmäßige Näherung noch nicht ausreichend geringen Variationsbereich für die thermische Leitfähigkeit eingrenzen, kommt der schon durch die Grenzkurven II. Ordnung vorgegebene Variationsbereich für die elektrische Leitfähigkeit in Abb. 17–20 in die Nähe der Meßgenauigkeiten. Wie die Abbildungen demonstrieren, hängt der Variations-

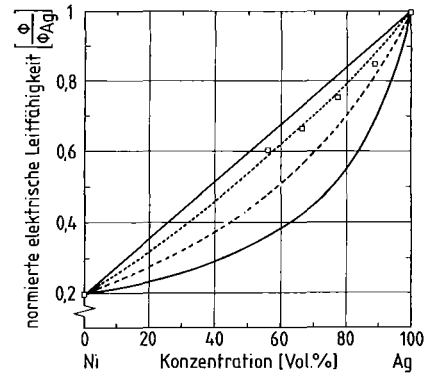


Abb. 18. Elektrische Leitfähigkeit von Ag-Ni-Metall (\square) bei Raumtemperatur und Grenzkurven I. (—) und II. Ordnung (---).

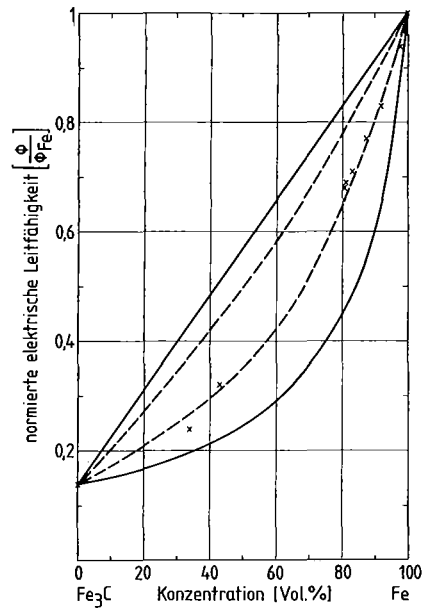


Abb. 19. Elektrische Leitfähigkeit von Stahl und Gußeisen (\times) bei Raumtemperatur [20] und Grenzkurven I. (—) und II. Ordnung (---).

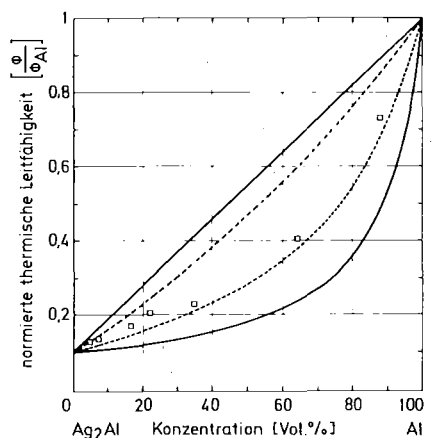


Abb. 20. Thermische Leitfähigkeit von Ag₂Al-Al (\square) bei Raumtemperatur [19] und Grenzkurven I. (—) und II. Ordnung (---).

bereich zwischen den Grenzkurven und damit deren praxisrelevante Aussage zur Eigenschaftsbestimmung wesentlich vom Unterschied der Leitfähigkeitswerte der Phasen ab.

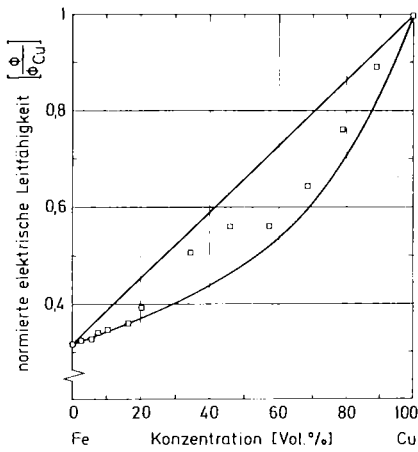


Abb. 21. Elektrische Leitfähigkeit von Cu-Fe-Metall (□) bei Raumtemperatur [19] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

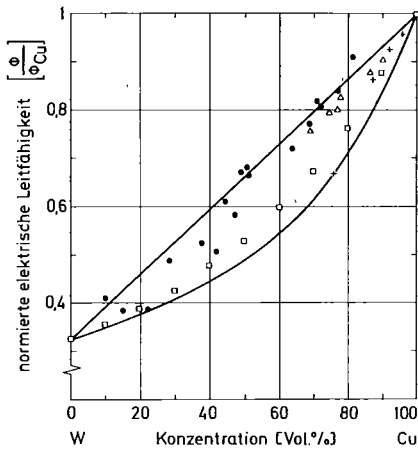


Abb. 22. Elektrische Leitfähigkeit von Cu-W-Metall (● □ + △) bei Raumtemperatur [6, 9, 15, 36] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

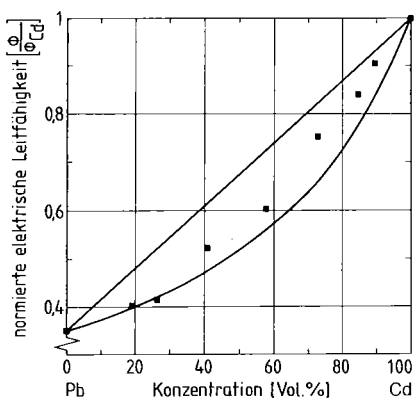


Abb. 23. Elektrische Leitfähigkeit von Cd-Pb-Metall (■) bei Raumtemperatur [19] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

Können – bedingt durch ihre Technologie – zweiphasige Werkstoffe schließlich auch nicht mehr als isotrop angesehen werden, so sind theoretisch nur noch die Grenzkurven I. Ordnung (Gleichungen (1), (2)) zur Erwartungsvorhersage für ihre Feldeigenschaften anwendbar. In einigen Fällen, z. B. bei Unterschieden der Leitfähigkeitswerte der Phasen bis 1:3, können sie dennoch für praktische Eigenschafts-

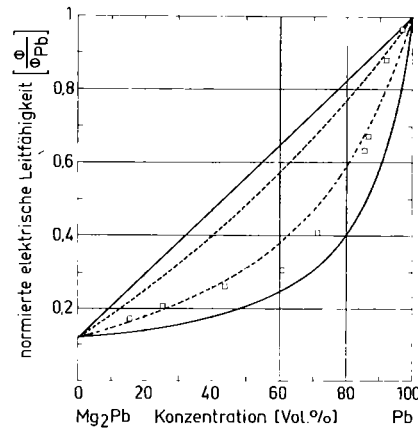


Abb. 24. Elektrische Leitfähigkeit von Mg₂Pb-Pb-Metall (□) bei Raumtemperatur [19] und Grenzkurven I. Ordnung (—) und II. Ordnung (---).

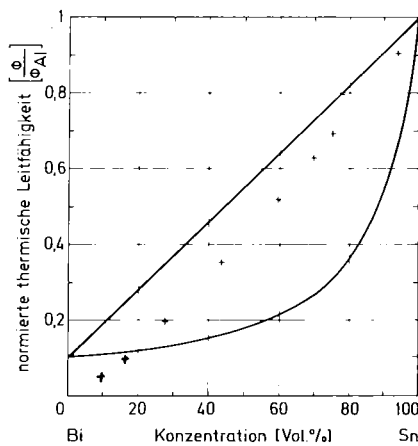


Abb. 25. Thermische Leitfähigkeit von Bi-Sn-Metall (+) bei Raumtemperatur [19] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

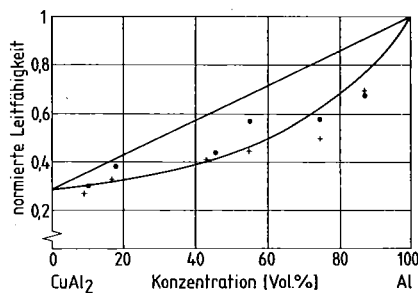


Abb. 26. Elektrische (+) und thermische Leitfähigkeit (●) von Al-CuAl₂-Metall bei Raumtemperatur [1] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

schätzungen ausreichend sein (vgl. Abb. 21–23). Oberhalb dieses Verhältnisses der Leitfähigkeitswerte der Phasen von etwa 1:3 sind jedoch Grenzkurven höherer Ordnung auch zur praktisch hinreichenden Eigenschaftsbestimmung erforderlich (vgl. Abb. 24, 25). Dennoch erfüllen die Grenzkurven I. Ordnung auch in solchen Fällen eine besondere Funktion. In Umkehrung der Bestätigung theoretischer Werte durch gemessene sind Grenzkurven I. Ordnung nämlich geeignet, bei hinreichender Genauigkeit der Leitfähigkeitswerte

ihrer reinen Phasen über die Zuverlässigkeit experimenteller Werte für zweiphasige Werkstoffe in I. Näherung zu entscheiden. Diese Werte dürfen nicht außerhalb der Grenzkurven I. Ordnung liegen, da die entsprechenden Gleichungen die äußersten Grenzwerte für die Feldeigenschaften überhaupt liefern (vgl. Teil I dieser Abhandlung, METALL 36 (1982), S. 523–531). So sind beispielsweise die Meßwerte für hohe Bi-Konzentration in Abb. 25 sowie diejenigen für hohe Al-Konzentration in Abb. 26 und die oberhalb der oberen Grenzkurve I. Ordnung liegenden Meßwerte in den Abb. 22 und 27 unzuverlässig, während Meßwerte wie die im Beispiel der Abb. 28 gezeigten als vollends unbrauchbar angesehen werden müssen. Wie auf diese Weise überprüfte andere Literaturstellen zeigen, trifft diese Aussage für eine ganze Reihe experimenteller elektrischer und thermischer Leitfähigkeitswerte zu. Vergleiche ähnlicher Art zwischen experimentellen und theoretischen Feldeigenschaftswerten wurden inzwischen auch für andere als metallische Zweiphasenwerkstoffe wie Hartmetalle, Cermets, zweiphasige keramische Werkstoffe und Keramik-, Metall- und Polymer-Kohlenstoff-Verbundwerkstoffe [25, 27, 28] sowie poröse Werkstoffe [24a] durchgeführt.

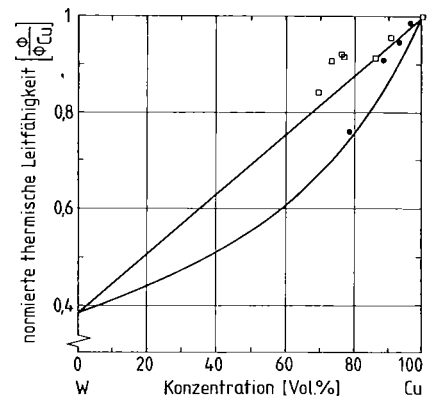


Abb. 27. Thermische Leitfähigkeit von Cu-W-Metall mit Cu-Matrixphase (□ ●) bei Raumtemperatur [6, 9] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

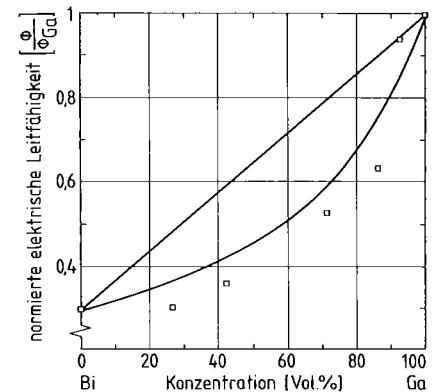


Abb. 28. Elektrische Leitfähigkeit von Bi-Ga-Metall (□) bei Raumtemperatur [22] und Grenzkurven I. Ordnung (—).

Sie alle zeigen, daß die Kenntnis des quantitativen Zusammenhangs zwischen Gefügestruktur und Eigenschaften nicht nur ein tieferes Verständnis für das Verhalten mehrphasiger Werkstoffe eröffnet, sondern es auch ermöglicht,

- die für bestimmte Eigenschaftswerte optimalen Gefügestrukturen vorzuberechnen und – durch technologische Rückkopplung – „maßgeschneiderte“ Werkstoffe herzustellen;
- die Eigenschaften mehrphasiger Werkstoffe dort aus den Eigenschaften ihrer Phasen und ihren Gefügedaten ohne direkte Eigenschaftsmessung zu bestimmen, wo diese schwierig, aufwendig und/oder ungenau ist;
- die Zuverlässigkeit gemessener Eigenschaftswerte im Rahmen einer erweiterten Qualitätskontrolle rechnerisch zu überprüfen.

Danksagung

Einige wertvolle Informationen wurden den Abschlußarbeiten meiner Diplomanden, der Herren Peter Klein, Ulrich Naumann und Rolf Schmitt, entnommen. Frau Vera Karcher und Frau Ulrike Frick haben die aufwendigen Zeichnungen sowie die durch die Gleichungen besonders schwierige Schreibarbeit bei der Herstellung des Manuskripts besorgt. Für ihr umsichtiges Mitwirken sei ihnen herzlich gedankt. – Schließlich hat Herr Schust vom Fachinformationszentrum Karlsruhe für den III. Teil dieser Abhandlung durch systematische Literaturrecherche wesentlich zur Arbeit geleistet.

Schrifttum

1. Aliev, N. A.: Trudy Inst. Fiz. i. Mat., Akad. Nauk, Azerbeidzhan SSR, Ser. Fiz. 8 (1956), 101.
2. Behrens, E.: J. Comp. Mat. 2 (1968), 1.
3. Bronstein, J., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig (1963), 110.
4. Bruggemann, D. A. G.: Ann. Phys. 24 (1935), 636; 25 (1936), 645.
5. De Hoff, R. T., Rhines, F. N.: Trans. Met. Soc. AIME 221 (1961), 975.
6. Dulnev, G. N., Zarichnyak, Y. P., Machavariani, E. S.: Teplofizika Vysoki Temperatura II – 4 (1973), 887.
7. Gurland, S.: 4. Plansee Seminar Reutte (1965), 507.
8. Hashin, Z., Shtrikman, S.: J. Appl. Physics 33 – 10 (1962), 3125.
9. Ivan, J., Sebo, P., Taborsky, L., Havalda, A.: Kovove Materialy 3 – XI (1973), 228.
10. Jesse, A.: Diss. Uni. Karlsruhe, Fak. Maschinenbau (1970).
11. Jones, T. J., Street, K. N., Scoberg, J. A., Baird, J.: Canadian Metallurgical Quarterly Vol. 2, Nr. 1 (1963).
12. Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Akad. Verlagsgesellschaft Frankfurt (1959), 262.
13. Karpinos, D. M., Klimenko, V. S., Kadyrov, V. H.: High Temp. – High Pressure 5 (1973), 13.
14. Kerner, E. H.: Proc. Phys. Soc. 69B (1956), 802.
15. Kieffer, R., Hotop, W.: Pulvermetallurgie und Sinterwerkstoffe, Springer-Verlag Berlin – Göttingen – Heidelberg (1943), 324.
16. Kröner, E.: J. Phys. F.: Metal Phys. 8 – 11 (1978), 2261.
17. Kröner, E.: J. Mech. Phys. Solids 25 (1977), 137.
18. Kröner, E., Koch, H.: SM Archives 1 – 2/3 (1976), 183.
19. Landauer, R.: J. Appl. Physics 23 – 7 (1952), 779.
20. Landolt-Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Springer Verlag Berlin – Heidelberg – New York, Bd. IV 2a (1963), 234.
21. Lorenz, L.: Wied. Ann. II (1969), 70.
22. Magomedov, A. M. A., Ismailov, M. A., Pashaev, B. P.: Teplofizika Zysokich Temperatura 13 – 5 (1975), 1106.
23. Maxwell, J. C.: Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford Vol. I (1904), 435.
24. Niesel, W.: Ann. Phys. 6 – 10 (1952), 336.
- 24a. Nikolopoulos, P., Ondracek, G.: Z. Metallkunde 74/1 (1983) 49.
25. Ondracek, G.: Tagungsberichte der VII. Internationalen Pulvermetallurgischen Tagung, Dresden (1981), 125 D.
26. Ondracek, G.: Werkstoffkunde-Leitfaden für Studium und Praxis, expert und VDE-Verlag (1979), 12, 91.
27. Ondracek, G.: Z. Werkstofftechnik 8 (1977), 220, 280.
28. Ondracek, G.: Z. Werkstofftechnik 5 – 8 (1974), 416.
29. Ondracek, G.: in Science in Ceramics Vol. 6 (1973) III/1 und Bericht des Kernforschungszentrums Karlsruhe, KfK Ext 6/73 – 2 (1973), 40.
30. Ondracek, G., Schulz, B.: in E. Kröner, K. H. Anthony, H. H. E. Leipholz, „Continuum Models of Discrete Systems“ SM-Study Nr. 15, University of Waterloo Press (1980), 499.
31. Ondracek, G., Schulz, B.: in J. W. Provan, H. H. E. Leipholz, „Continuum Models of Discrete Systems“ SM-Study, Nr. 12, University of Waterloo Press (1978), 223.
32. Ondracek, G., Schulz, B.: Ber. DKG 48 – 10 (1971), 427, 525.
33. Ondracek, G., Thümmler, F.: Radex-Rundschau 1/2 (1980), 77.
34. Pejsa, R.: Diss. Universität Karlsruhe, Fakultät Maschinenbau (1981).
35. Pohl, R. W.: Elektrizitätslehre, Springer-Verlag Berlin – Göttingen – Heidelberg (1964), 156.
36. Schreiner, H.: Pulvermetallurgie elektrischer Kontakte, Springer-Verlag Berlin – Göttingen – Heidelberg (1964), 122.
37. Schulz, B.: Bericht des Kernforschungszentrums Karlsruhe, KfK 1988 (1974), 29.
38. Schulz, B.: Bericht des Kernforschungszentrums Karlsruhe, KfK Ext. 6/74 – 4 (1974), 128.
39. Stille, U.: Arch. Elektrotechnik 30 – 3/4 (1944), 91.
40. Tsao, G. T.: Ind. Eng. Chem. 53 (1961), 395.
41. Underwood, E. E.: Quantitative Stereology, Addison-Wesley Publ. Company Inc. Reading Mass. (1970), 83.
42. Wahl, H. P., Wassermann, G.: Z. Metallkunde 61 (1970), 326.
43. Watson, W. G., Hahn, W. C., Kraft, R. N.: Metallurgical Transaction A GA (1975), 151.
44. Westphal, W. H.: Physikalisches Wörterbuch, Springer-Verlag Berlin – Göttingen – Heidelberg (1952), 351.
45. Wiener, O.: Abh. math.-phys. Kl. königl.-sächs. Ges. d. Wiss. 32 – 6 (1912), 509.