

**KfK 3804**  
**September 1984**

# **Zur Numerik kompressibler, reibungsfreier Strömungen**

## **Ein Verfahrenvergleich**

**E. Halter**  
**Institut für Datenverarbeitung in der Technik**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the specific procedures and protocols that must be followed to ensure compliance with all relevant regulations and standards.

3. The third part of the document provides a detailed overview of the various roles and responsibilities of all staff members, ensuring that everyone is clear on their duties and how they contribute to the overall success of the organization.

4. The final part of the document concludes with a summary of the key points discussed and a reaffirmation of the organization's commitment to high standards of performance and ethical conduct.

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Datenverarbeitung in der Technik

KfK 3804

Zur Numerik kompressibler, reibungsfreier Strömungen.

Ein Verfahrensvergleich.

E. Halter

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung.

Drei mathematische Verfahren zur Berechnung kompressibler, reibungsfreier Strömungen werden vorgestellt und auf ihre Anwendbarkeit auf räumlich eindimensionale Anfangswertprobleme untersucht. Eine praktische Erprobung liefert Einsicht in bislang wenig bekannte Eigenschaften der untersuchten Verfahren und bietet eine Entscheidungshilfe zu ihrer Auswahl.

On numerical methods for compressible nonviscous fluid flow: a comparison.

Three mathematical procedures for the computation of compressible, nonviscous fluid flow are presented. Their applicability to initial value problems in one spatial dimension is investigated. A practical test provides insight on less well known characteristics of the methods considered and gives some assistance as to the best choice.

Inhalt.

Einleitung. . . . .	3
Riemannprobleme der Gasdynamik. . . . .	4
Das Rothe-Verfahren. . . . .	9
Das Lax-Wendroff-Verfahren. . . . .	13
Das Glimm-Schema. . . . .	15
Ergebnisse. . . . .	17
Zusammenfassung. . . . .	39
Literatur. . . . .	40

### Einleitung.

Die Dynamik der Pelletkompression bei der Trägheitsfusion ist im wesentlichen hydrodynamischer Natur. Da ihre Erfassung nicht immer in Experimenten erfolgen kann, ist es sinnvoll, ausgehend von mathematischen Modellen, die Abläufe zu simulieren. Durch Symmetrieannahmen erhält man räumlich eindimensionale, kompressible Strömungsmodelle. Die Viskosität kann vernachlässigt werden. Zur Berechnung von eindimensionalen Strömungen kompressibler nichtviskoser Fluide gibt es viele Verfahren. Die besonderen Schwierigkeiten solcher Berechnungen sind im möglichen Auftreten von Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten begründet. Die numerischen Verfahren brauchen deshalb eine Methode zur Bewältigung dieser Schwierigkeiten. Hier werden drei Verfahren sehr unterschiedlicher Art vorgestellt und im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit und Leistung untersucht.

Das Rothe-Verfahren ist ein implizites, halbnumerisches Verfahren mit unbedingter numerischer Stabilität. Die Konsistenzordnung ist eins, es kommt ohne künstliche Dissipation aus.

Das Lax-Wendroff-Verfahren mit künstlicher Viskosität hat seinen Ursprung in einer Approximation der Taylorreihe der gesuchten Lösung. In Bereichen glatter Lösung besitzt es die Konsistenzordnung zwei. Um auch unstetige Lösungen noch sinnvoll zu approximieren, wird eine Dissipation mit Hilfe künstlicher Viskosität eingebaut. Als explizites Differenzenverfahren unterliegt es einer Zeitschrittweitenbeschränkung zur Sicherung der numerischen Stabilität.

Das Glimm-Schema basiert auf der Lösung von Anfangswertproblemen für die Gleichungen der Gasdynamik mit stückweise konstanten Anfangswerten. Es ist ein explizites, monotones Verfahren mit der Konsistenzordnung eins ohne künstliche Dissipation.

Riemannprobleme der Gasdynamik.

In den angewandten Naturwissenschaften sind die Riemannprobleme der Gasdynamik wichtig in zweierlei Hinsicht. Erstens besteht die Möglichkeit exakte Lösungen der Gleichungen der Gasdynamik zu erhalten und numerische Ergebnisse irgendwelcher mathematischer Verfahren damit zu vergleichen [19,21,31]. Zweitens sind Riemannlöser ihrerseits zentraler Baustein in einigen strömungsmechanischen Verfahren wie der Random-Choice-Methode von Glimm [2,7,9,31] und anderen [4].

Ein Anfangswertproblem für ein hyperbolisches System von Erhaltungsgleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad 0 \leq t < \infty \quad , \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l & , \quad x < 0 \quad , \\ u_r & , \quad x > 0 \quad , \end{cases} \quad (2)$$

wobei  $u_l, u_r$  gegebene konstante Vektoren sind, wird Riemannproblem genannt. Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit seiner Lösung ist im allgemeinen nichttrivial. Ergebnisse dazu [10,22] wurden auch noch in den letzten Jahren erzielt [17,30].

Die Erhaltungsgleichungen der kompressiblen, reibungsfreien Gasdynamik sind in praktischen Anwendungen von vorrangiger Bedeutung. Hier wird der Einfachheit halber die Zustandsgleichung des polytropen Gases verwendet, eine Verwendung anderer Zustandsgleichungen ist aber nicht mit prinzipiellen Schwierigkeiten verbunden [4,7]. Die Erhaltungsgröße  $u$  und der Fluß  $f(u)$  in (1) sind :

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \rho : \text{Massendichte} , \\ m : \text{Impulsdichte} , \\ e : \text{Energiedichte} , \end{array} \quad (3)$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} m \\ (\gamma-1)e + ((3-\gamma)/2)(m^2/\rho) \\ (\gamma e - ((\gamma-1)/2)(m^2/\rho))(m/\rho) \end{pmatrix}, \quad \gamma : \text{Adiabatexp.} \quad (4)$$

Die Substitutionen

$$u := m/\rho \quad \text{und} \quad p := (\gamma-1)(e - \frac{1}{2}(m^2/\rho)) , \quad (5)$$

wobei  $u$  (Bezeichnungswechsel!) und  $p$  die Geschwindigkeit bzw. den Druck des Gases bedeuten, führen auf das Gleichungssystem in Nicht-erhaltungsform

$$\begin{aligned} \rho_t + \rho u_x + u p_x &= 0 \\ u_t + uu_x + p_x/\rho &= 0 \\ p_t + up_x + \gamma p u_x &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$(\rho, u, p)^T = \begin{cases} (\rho_l, u_l, p_l)^T, & x < 0, \\ (\rho_r, u_r, p_r)^T, & x > 0, \end{cases} \quad (7)$$

mit gegebenen Werten  $\rho_l, \rho_r, u_l, u_r, p_l, p_r$ . Sie unterliegen den Restriktionen

$$\begin{aligned} \rho_l \geq 0, \quad p_l \geq 0, \quad \text{falls } \rho_l = 0 \text{ dann } p_l = 0, \\ \rho_r \geq 0, \quad p_r \geq 0, \quad \text{falls } \rho_r = 0 \text{ dann } p_r = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Das beschriebene Anfangswertproblem hat im allgemeinen keine klassische Lösung. Es existiert jedoch eine schwache Lösung und diese ist eindeutig. Sie kann Unstetigkeiten und konstante Zustände enthalten, das sind Bereiche der  $x$ - $t$ -Ebene, in denen  $(\rho, u, p)^T$  konstant

ist. Da sich Perturbationen mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten, gibt es die konstanten Zustände  $S_1$  und  $S_r$ , welche von den konstanten Anfangswerten  $(\rho_1, u_1, p_1)^T$  und  $(\rho_r, u_r, p_r)^T$  herrühren. Im allgemeinen gibt es einen dritten Bereich  $S_*$ , welcher durch eine Kontaktunstetigkeit in zwei konstante Zustände I und II geteilt wird und durch zentrierte Wellen von den konstanten Zuständen  $S_1$  und  $S_r$  getrennt wird. Die Geschwindigkeit und der Druck in I und II sind die gleichen und werden deshalb mit  $u_*$  und  $p_*$  bezeichnet. Die zentrierten Wellen sind Stoßwellen oder Verdünnungswellen. Die Lösung des Riemannproblems hängt von den Anfangswerten ab. Die konstanten Zustände  $S_1$  und  $S_r$  existieren in jedem Fall, aber  $S_*$  oder einer der konstanten Zustände I und II können fehlen. Die Kontaktunstetigkeit und die zentrierten Wellen müssen auch nicht notwendig vorhanden sein. Falls beide zentrierte Wellen auftreten, müssen sie nicht von unterschiedlichem Typ sein, d. h. beide können Stoßwellen oder Verdünnungswellen sein. Die Lösung ist konstant auf den Linien  $x/t = \text{const}$ , daher sind die Ränder der zentrierten Wellen und der konstanten Zustände Geraden durch den Ursprung  $x = 0$ ,  $t = 0$ .

Die praktische Bestimmung der Lösung bedeutet die Entscheidung, welche konstanten Zustände und zentrierten Wellen auftreten, wo die Berandungen der einzelnen Bereiche verlaufen und welche Werte die gesuchten Größen dort annehmen. Dazu wurde ein besonders effizienter Algorithmus [14,15] entwickelt, der es erlaubt, die Lösung an vorgegebener Stelle mit einer Genauigkeit zu berechnen, die nur durch die Maschinengenauigkeit begrenzt ist. Zunächst werden die Anfangswerte auf ihre Zulässigkeit (gleichbedeutend mit physikalischer Relevanz) geprüft. Danach erfolgt eine Fallunterscheidung. Ein dem Riemannproblem zugeordnetes Fixpunktproblem [14,15] mit den Anfangswerten als Parametern ist genau dann lösbar, wenn

$$u_1 - u_r + 2(c_1 + c_r)/(\gamma - 1) \geq 0 \quad (9)$$

wobei  $c_1, c_r$  die Werte der lokalen Schallgeschwindigkeit

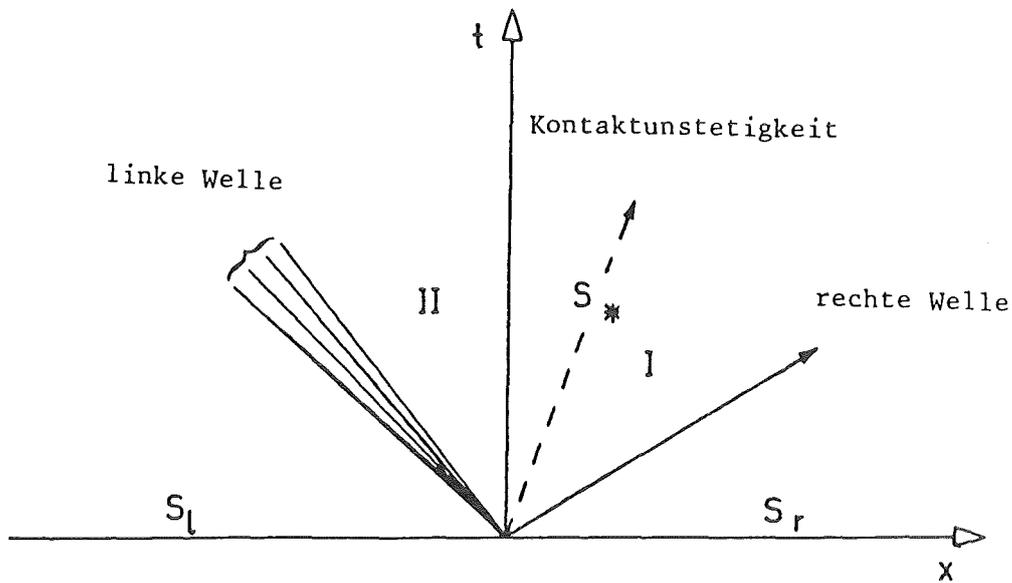


Fig. 1. Die Lösung des Riemannproblems qualitativ

$$c = (\gamma p / \rho)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

in den konstanten Zuständen  $S_l, S_r$  bedeuten. Falls (9) erfüllt ist, berechnet ein sicher und schnell konvergierendes Iterationsverfahren die Lösung nach Vorgabe einer Fehlertoleranz, anderenfalls kann die Lösung sogar explizit angegeben werden. In diesem Fall sind beide zentrierte Wellen Verdünnungswellen und dazwischen liegt eine Vakuumzone. Mit

$$\begin{aligned} u_{V1} &= ((\gamma-1)u_1 + 2(x/t + c_1)) / (\gamma+1) \\ \rho_{V1} &= ((u_{V1} - x/t)^2 \rho_1^\gamma / (\gamma p_1))^{1/(\gamma-1)} \\ p_{V1} &= (\rho_{V1} / \rho_1)^\gamma p_1 \end{aligned} \quad (11)$$

und

$$\begin{aligned}
u_{Vr} &= ((\gamma-1)u_r + 2(x/t - c_r))/(\gamma+1) \\
\rho_{Vr} &= ((x/t - u_{Vr})^2 \rho_r / (\gamma p_r))^{1/(\gamma-1)} \\
p_{Vr} &= (\rho_{Vr} / \rho_r)^\gamma p_r
\end{aligned} \tag{12}$$

definiert man

$$(\rho, u, p)^T = \begin{cases} (\rho_1, u_1, p_1)^T & , \quad x/t < u_1 - c_1 \\ (\rho_{V1}, u_{V1}, p_{V1})^T & , \quad u_1 - c_1 < x/t < u_1 + 2c_1/(\gamma-1) \\ \text{Vakuum} & , \quad u_1 + 2c_1/(\gamma-1) < x/t < u_r - 2c_r/(\gamma-1) \\ (\rho_{Vr}, u_{Vr}, p_{Vr})^T & , \quad u_r - 2c_r/(\gamma-1) < x/t < u_r + c_r \\ (\rho_r, u_r, p_r)^T & , \quad u_r + c_r < x/t . \end{cases} \tag{13}$$

Die Lösung des Riemannproblems kann nicht in den Größen  $\rho, u, p$  angegeben werden. Aber durch die Transformation

$$m = \rho u \quad , \quad e = p/(\gamma-1) + \frac{1}{2}\rho u^2 \tag{14}$$

erhält man eine (schwache) Lösung der Erhaltungsgleichungen, wenn man  $u$  und  $p$  in (13) substituiert und  $\rho = m = e = 0$  in der Vakuumzone definiert. Aus der Sicht der Physik sind die natürlichen Variablen in der kompressiblen Strömungsmechanik die Erhaltungsgrößen  $\rho, m, e$ . Es gibt jedoch auch mathematische Gründe, diese Variablen zu benutzen, z. B. die Lösbarkeit des Anfangswertproblems (1),(2) ohne die Einschränkung (9) an die Vorgaben.

### Das Rothe-Verfahren.

Das ursprünglich für parabolische Randwertprobleme entwickelte Rothe-Verfahren [28], auch horizontale Linienmethode genannt, hat sich in neuerer Zeit auch für hyperbolische Anfangs-Randwertprobleme erfolgreich gezeigt [8,13,16,17,23,24]. Eine Anwendung auf Anfangswertprobleme der kompressiblen, reibungsfreien Strömungsmechanik war deshalb naheliegend. Das Verfahren ist implizit und halbnumerisch. Eine feste, aber beliebige Zeitschrittweite  $h > 0$  wird vorgegeben. Gesucht werden nur von der Raumvariablen  $x$  abhängende Funktionen  $u_n$  als Approximationen der exakten Lösung  $u$  zum Zeitpunkt  $t = nh$ . Die auftretenden Zeitableitungen werden durch Differenzenquotienten ersetzt, wodurch eine Folge gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme entsteht. Auf die Erhaltungsgleichung (1) angewandt bedeutet dies

$$h f'(u_n) u_n' + u_n = u_{n-1}, \quad x \in R, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (15)$$

wobei mit  $f'$  die Jacobimatrix von  $f$  und mit  $u_n'$  der Vektor der gewöhnlichen Ableitungen der Komponenten von  $u_n$  nach  $x$  gemeint ist. Die Anfangswerte des Evolutionsproblems werden als Startwerte  $u_0$  in dieses Verfahren übernommen.

Das Rothe-Verfahren kann auch auf die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Nichterhaltungsform angewandt werden. Dies kann zu sehr übersichtlichen und relativ einfachen Randwertproblemen führen. Bisherige Erfahrungen [12] zeigten jedoch, daß bei der Berechnung von Strömungen über große Zeitintervalle die Erhaltung der Erhaltungsgrößen verloren gehen kann. Dies geschieht nicht bei Verwendung der Erhaltungsform, denn die Integration von (15) über ein

Intervall  $[x_1, x_2]$  liefert

$$\int_{x_1}^{x_2} u_n dx = \int_{x_1}^{x_2} u_{n-1} dx - h(f(u_n(x_2)) - f(u_n(x_1))) , n=1,2,3,\dots, \quad (16)$$

d. h. die Änderung der Erhaltungsgröße  $u_n$  erfolgt nur durch den Fluß  $f(u_n)$  an den Grenzen des betrachteten Intervalls.

Zur Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von (15) muß  $f'$  näher betrachtet werden. Aus (6) ergibt sich

$$f'(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)m^2/(2\rho^2) & (3-\gamma)m/\rho & \gamma-1 \\ -\gamma em/\rho^2 + (\gamma-1)m^3/\rho^3 & \gamma e/\rho - 3(\gamma-1)m^2/(2\rho^2) & \gamma m/\rho \end{pmatrix} \quad (17)$$

und daraus berechnet sich

$$\det f'(u) = (\gamma^2 - \gamma + 2)m^3/(2\rho^3) - \gamma(\gamma-1)em/\rho^2 . \quad (18)$$

Das Verschwinden der Determinante von  $f$  ist damit gleichbedeutend, daß  $m$  verschwindet oder nach (5) und (10), daß

$$m^2/\rho^2 = \gamma p/\rho = c^2 , \quad (19)$$

was die Gleichheit des Betrags der Strömungsgeschwindigkeit  $|m/\rho|$  und der lokalen Schallgeschwindigkeit  $c$  besagt. Offenbar ist der Übergang vom Unterschallbereich zum Überschallbereich und umgekehrt in der horizontalen Linienmethode ein kritischer Vorgang, denn dort ist das

System (15) nicht mehr in die Gestalt eines expliziten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen, da die Matrix  $f'$  singulär wird. Falls jedoch  $d := \det f'(u) \neq 0$  ist, kann man (1) in explizite Form bringen. Mit

$$d f'^{-1}(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma^2+3)\frac{m^2}{\rho^2} - \gamma(\gamma-1)\frac{e}{\rho} & -\gamma\frac{m}{\rho} & \gamma-1 \\ d & 0 & 0 \\ \frac{(3-\gamma)\gamma em^2}{2\rho^3} - \frac{(3-\gamma)(\gamma-1)m^4}{4\rho^4} & -\frac{\gamma em}{\rho^2} + (\gamma-1)\frac{m^3}{\rho^3} & \frac{1}{2}(3-\gamma)\frac{m^2}{\rho^2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

folgt aus (15)

$$u_n' = 1/h f'^{-1}(u_n)(u_{n-1} - u_n) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad n=1,2,3,\dots \quad (21)$$

Die rechten Seiten dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen können als Funktionen der Variablen  $x$  und  $u_n$  aufgefaßt werden. Ihre Lipschitzstetigkeit in  $u_n$  mindestens in kompakten Bereichen des  $\mathbb{R}^3$ , in denen  $\rho > 0$ ,  $e > 0$  und  $d \neq 0$  gilt, bedeutet die eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für (21).

Die horizontale Linienmethode berücksichtigt die Vorgabe der Anfangswerte zu (1), da diese als Startwerte  $u_0$  verwendet werden. Schon im ersten Schritt verlangt (21) eine zusätzliche Bedingung, da sonst die Lösung  $u_1$  nicht eindeutig ist. Bei der Lösung von Riemannproblemen sind nur solche Approximationen sinnvoll, bei denen die vorgegebenen Anfangswerte  $u_l$  und  $u_r$  als Grenzwerte für  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow +\infty$  angenommen werden. Es ist bisher nicht bekannt, ob eine solche Bedingung die Existenz und Eindeutigkeit der Rothe-Lösungen  $u_n$  garantiert. Wenn dies jedoch der Fall ist, so benötigt man ein numerisches Verfahren zur Durchführung der horizontalen Linienmethode.

Dabei können mindestens zwei ernste Schwierigkeiten auftreten. Erstens muß das Problem korrekt gestellt sein, d. h. die Lösungen  $u_n$  von (15) hängen stetig ab von den Daten, hier also auch von den in einer geeigneten Zusatzbedingung vorgegebenen Werten. Zweitens muß das Verfahren mit den beschriebenen Singularitäten der Differentialgleichung (15) fertigwerden, es genügt nicht ein Verfahren nur für (21).

Die Eignung des Rothe-Verfahrens für skalare Erhaltungsgleichungen wurde erst in jüngerer Zeit untersucht [25]. Die getroffenen Aussagen können jedoch nur zu einem kleinen Teil auf Systeme von Erhaltungsgleichungen ausgedehnt werden. Eine im Zusammenhang mit der eindeutigen Lösbarkeit einiger skalarer Riemannprobleme aufgestellte Vermutung, die Forderung der Stetigkeit der Rothelösungen könnte die Eindeutigkeit garantieren, erwies sich im allgemeinen Fall als unhaltbar.

Die praktische Anwendung des Rothe-Verfahrens auf Riemannprobleme wurde wegen der bestehenden Unklarheiten nicht vorgenommen. Es ist möglich, daß eine konstruktive Antwort auf die gestellten Fragen die Durchführbarkeit der Methode erweisen wird.

### Das Lax-Wendroff-Verfahren.

Eines der klassischen Verfahren zur Berechnung kompressibler, reibungsfreier Strömungen ist das Zweischnittverfahren von Lax und Wendroff [26]. Es wird nur in Kombination mit künstlicher Viskosität benutzt, da es im Fall von Stoßwellen sonst nicht stabil ist. Seine Vorteile liegen in der einfachen Anwendbarkeit und der hohen Konsistenzordnung, welche im Fall glatter Lösungen gute Approximationen liefert. Die hier verwendete Version der künstlichen Viskosität geht zurück auf [20] und wird auch in neuerer Zeit empfohlen und angewandt [31]. Sie hat den Vorteil, die hohe Genauigkeit des ursprünglichen Verfahrens zu erhalten und ist leicht dem bestehenden Schema als ein nachträglicher Korrekturschritt hinzuzufügen.

Die nachfolgenden Formeln beziehen sich auf die Größen und Bezeichnungen in (3) und (4). Das Gebiet der unabhängigen Variablen wird mit einem Rechteckgitter überzogen mit der konstanten Maschenweite  $\Delta x$  in räumlicher Richtung und der erst im Laufe der Rechnung festzulegenden nicht notwendig konstanten Maschenweite  $\Delta t$  in zeitlicher Richtung. Die tiefgestellten Indices beziehen sich auf den Ort  $x$ , die hochgestellten auf den Zeitpunkt  $t$ . Die nicht ganzzahligen Indices bedeuten Zwischenresultate, mit denen ein nachfolgender Rechenschritt arbeitet. Mit  $f_i^n$  ist  $f(u_i^n)$  gemeint,  $\lambda$  bezeichnet das Verhältnis der Zeit- und Raumschrittweite  $\Delta t/\Delta x$ . Das Verfahren ist explizit, d. h. die Werte des nachfolgenden Zeitniveaus  $n+1$  werden aus den Werten des Zeitniveaus  $n$  berechnet. Der Vorteil dieses Verfahrenstyps liegt im geringen Rechenaufwand, da keine Iterationen erforderlich sind. Die numerische Stabilität expliziter numerischer Verfahren unterliegt jedoch der CFL-Bedingung. Sie lautet hier

$$\sigma := \lambda \max(|u|+c) \leq 1 \quad (22)$$

mit  $u$  aus (5) und  $c$  aus (10). Sie setzt eine obere Schranke für die Zeitschrittweite  $\Delta t$ . Die praktische Durchführung des Verfahrens wurde wie folgt vorgenommen (vgl. [31]). Eine Zahl  $\sigma \leq 1$  und eine Zahl  $\nu > 0$  (Viskosität) werden als konstante Parameter vorgegeben. Aus der Bedingung (22) wird  $\Delta t$  ermittelt, wobei für  $u$  und  $c$  die zum Zeitniveau  $n$  gehörigen Werte einzusetzen und das Maximum über alle Raumstützstellen  $i$  zu bilden ist. Nun erfolgt das eigentliche Lax-Wendroff-Verfahren in zwei Schritten:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{1}{2}\lambda(f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (23)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (24)$$

Die Werte zur Zeit  $t_{n+1}$  werden nun mit künstlicher Viskosität korrigiert. In Programmierschreibweise (links des Gleichheitszeichens: neuer Wert, rechts: bisheriger Wert) lautet dieser Schritt:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+1} + \lambda\nu(d_{i+1}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - d_i(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})) \quad (25)$$

wobei

$$d_i := |m_i^{n+1}/\rho_i^{n+1} - m_{i-1}^{n+1}/\rho_{i-1}^{n+1}| \quad (26)$$

schon zuvor berechnet wurde. Die historisch bedingte doppelte Belegung der Bezeichnung  $u$  einerseits für den Vektor der Erhaltungsgrößen  $(\rho, m, e)$  und andererseits für die (skalare) Strömungsgeschwindigkeit führt an dieser Stelle oft zu Fehlern [31]. In den hier angegebenen Lax-Wendroff-Formeln und der Korrektur mit künstlicher Viskosität ist  $u$  immer der Vektor der Erhaltungsgrößen. Die Verwendung der Strömungsgeschwindigkeit würde (26) vereinfachen, aber es sollten Mißverständnisse vermieden werden.

### Das Glimm-Schema.

Eines der neueren Verfahren zur Berechnung kompressibler, reibungsfreier Strömungen ist das Glimm-Schema [9,10]. Es wurde von Chorin noch etwas verfeinert [2] und in den vergangenen Jahren auf eine Reihe praktischer Probleme angewandt [7,31]. Die Grundidee des Verfahrens ist die Interpretation einer eindimensionalen Strömung als Lösung von lokalen Riemannproblemen. Wie das Lax-Wendroff-Verfahren ist das Glimm-Schema ein Zweischrittverfahren. Die  $x$ -Achse wird in Intervalle der festen, aber beliebigen Länge  $\Delta x > 0$  geteilt. Die zu berechnenden Werte  $u_i^n$  sind Näherungen der exakten Lösung eines Anfangswertproblems für die Gasgleichungen an den Stellen  $x_i = i\Delta x$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , zu den Zeitpunkten  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Die Werte zu  $n = 0$  werden durch die Anfangswerte gegeben. Seien nun die Werte berechnet für alle  $i$  und bis einschließlich dem Zeitpunkt  $t_n$ . Um eine Näherung  $u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  zu finden, wird ein Riemannproblem betrachtet mit den Anfangswerten  $u_i^n$  für  $x < (i+\frac{1}{2})\Delta x$  und  $u_{i+1}^n$  für  $x > (i+\frac{1}{2})\Delta x$ . Die maximal zulässige Zeitschrittweite  $\Delta t$  ergibt sich hierbei aus der Bedingung  $\sigma \leq \frac{1}{2}$ , welche sicherstellt, daß die von den verschiedenen Riemannproblemen erzeugten zentrierten Wellen innerhalb des Zeitintervalls  $\Delta t$  nicht miteinander wechselwirken. Die Lösung des Riemannproblems wird nun berechnet; sie ist für alle  $x$  und alle  $t \geq t_n$  definiert. Ihr Wert an der Stelle  $x = (i+\frac{1}{2}+\theta)\Delta x$ ,  $t = t_n + \Delta t$  wird als  $u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  genommen. Die Größe  $\theta$  ist dabei ein für diesen Zeitschritt gezogener Wert einer im Intervall  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  gleichverteilten Zufallsvariablen. Der nachfolgende Zeitschritt von  $n+\frac{1}{2}$  auf  $n+1$  wird entsprechend durchgeführt. Die in [2] beschriebene Art, die gezogenen Zufallszahlen zu modifizieren, führt auf eine Folge sogenannter gleichmäßiger als statistisch gleichverteilter Zufallszahlen und verbessert die Konvergenz des Verfahrens.

Die praktische Durchführung des Verfahrens ist einfach nachdem ein Riemannlöser zur Verfügung steht. Die Anwendung auf Riemannprobleme stellt keine Vereinfachung für das Glimm-Schema dar, weil aus der lokalen Sicht die Riemannprobleme für das Verfahren nicht erkennbar sind. Dies gilt insbesondere in Verdünnungswellen.

Die von Chorin vorgeschlagene Modifikation der Zufallszahlen bewirkt eine schnellere Gleichverteilung und verbessert die Erwartungswerte der Stoßwellenlokalisierung. Dazu werden zwei Primzahlen  $m_1$  und  $m_2$  mit  $m_1 < m_2$  sowie eine natürliche Zahl  $n_0 < m_2$  vorgegeben. Mit

$$n_i := (n_{i-1} + m_1) \pmod{m_2}, \quad i=1,2,3,\dots, \quad (27)$$

wird eine Folge von Pseudozufallszahlen  $n_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , erklärt. Die Folge der für das Glimm-Schema gezogenen Zufallszahlen  $\theta_i$  wird damit modifiziert gemäß

$$\theta_i' := (\theta_i + n_i + \frac{1}{2}) / m_2 - \frac{1}{2}, \quad i=1,2,3,\dots. \quad (28)$$

Das Verfahren arbeitet nun mit den Werten  $\theta_i'$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Bei den hier beschriebenen Anwendungen wurde  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 7$  und  $n_0 = 6$  gewählt [2]. Zu jedem Zeithalbschritt wurde dann mit Hilfe der IMSL-Routine GGUBFS eine Zufallszahl  $\theta_i$  und gemäß (27) eine Zahl  $n_i$  gezogen und damit  $\theta_i'$  nach (28) bestimmt.

Unbekannt ist die Stabilität des Verfahrens in Bezug auf die Zufallszahlenfolgen, genauer, ob verschiedene Folgen von Zufallszahlen die Näherungslösung stark verändern können oder nicht. In der vorliegenden Untersuchung wurde ein besonderes Augenmerk dieser Frage gewidmet. Der Einfluß verschiedener Folgen von Zufallszahlen auf das Ergebnis wurde durch die Wahl von verschiedenen Startwerten DSEED im Zufallszahlengenerator GGUBFS untersucht.

### Ergebnisse.

Nun sollen die numerischen Ergebnisse diskutiert werden. Es ist naheliegend, die exakte Lösung und die Näherungslösung graphisch gegenüber zu stellen. Dies geschieht in den nachfolgenden Bildern. Dargestellt sind in der linken Spalte der Diagramme die Erhaltungsgrößen  $\rho$ ,  $m$  und  $e$  und in der rechten Spalte die Größen  $p$ ,  $u$  und  $\varepsilon$ . Die Angabe von drei Größen beschreibt die Lösung schon vollständig, aber die Angabe aller sechs Größen ergibt ein vollständigeres Bild der Eigenschaften der Näherungsverfahren. Die exakte Lösung ist jeweils eine durchgezogene Linie, die Näherungslösung ist durch Punkte über den verwendeten Stützstellen wiedergegeben. Gerechnet wurde im Intervall  $[-2.5, 2.5]$  der  $x$ -Achse und beginnend bei  $t = 0$  bis zum Zeitpunkt  $t = 1$ . Die gezeigten Bilder stellen die exakte Lösung und die Näherungslösung in  $t = 1$  dar.

Als Testprobleme wurden Riemannprobleme mit verschiedenen Daten gewählt. Die Lösungen haben alle zur Zeit  $t = 1$  ihren interessanten (nicht konstanten) Verlauf noch im dargestellten räumlichen Intervall  $[-2.5, 2.5]$ . Ein erstes Beispiel ist das Stoßwellenrohrproblem aus [31] mit den Daten

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.4 \quad , \\ (\rho_l, u_l, p_l) &= (1.0, 0.0, 1.0) \quad , \\ (\rho_r, u_r, p_r) &= (0.125, 0.0, 0.1) \quad . \end{aligned} \tag{29}$$

Die exakte Lösung zeigt eine Verdünnungswelle nach links, eine Stoßwelle nach rechts und eine Kontaktunstetigkeit dazwischen. Die bei der Diskussion der qualitativen Eigenschaften der Lösungen von Riemannproblemen allgemein festgestellten Merkmale sind in diesem

Beispiel gut erkennbar. Die Geschwindigkeit und der Druck bleiben konstant an der Kontaktunstetigkeit, alle anderen Größen haben dort einen Sprung. An der Stoßfront springen alle Größen und in der Verdünnungswelle durchlaufen alle Größen einen stetigen Übergang zwischen zwei konstanten Bereichen (Fig. 2).

Das zweite Beispiel ist ein Riemannproblem mit den Daten

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.5 \quad , \\ (\rho_1, u_1, p_1) &= (0.5, 1.0, 0.5) \quad , \\ (\rho_r, u_r, p_r) &= (1.0, 0.0, 0.8) \quad . \end{aligned} \tag{30}$$

Die Lösung weist zwei Stoßwellen und eine Kontaktunstetigkeit auf. Dazwischen liegen konstante Zustände (Fig. 3).

Als drittes Beispiel wurde ein Riemannproblem mit den Daten

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.5 \quad , \\ (\rho_1, u_1, p_1) &= (1.0, 2.5, 2.0) \quad , \\ (\rho_r, u_r, p_r) &= (1.0, -2.5, 2.0) \end{aligned} \tag{31}$$

gewählt. Auch hier zeigt die Lösung zwei Stoßwellen, jedoch die Kontaktunstetigkeit dazwischen verschwindet in diesem Fall (Fig. 10).

Die Anwendung der Lax-Wendroff-Methode und des Glimm-Verfahrens war unproblematisch und bereitete kaum Schwierigkeiten. In Fig. 2 bis Fig. 10 sind die Ergebnisse der Berechnungen mit dem Lax-Wendroff-Verfahren dargestellt. Fig. 2 und 3 zeigen einige typische Eigenschaften des Verfahrens: Ein Überschießen der Näherungslösung hinter der Sprungstelle vergleichbar mit dem Gibbschen Phänomen und starke Glättung auch in Verdünnungszonen. Die Verdopplung der Anzahl der räumlichen Stützstellen führt wegen der CFL-Bedingung zunächst auf etwa eine doppelte Anzahl von benötigten Zeitschritten. Das Überschießen in den Bereichen der Sprungstellen wird dabei nicht geringer, jedoch die starke Glättung nimmt ab (Fig. 4 und 5). Um zu verhindern, daß die Näherungslösungen über die korrekte Sprunghöhe

hinausschwingen, kann man versuchen, die Dissipation zu erhöhen. Dazu wurde die künstliche Viskosität von  $\nu = 1$  auf  $\nu = 5$  heraufgesetzt. Diese Rechnungen waren numerisch instabil und ließen sich erst nach Absenkung von  $\sigma$  um den Faktor 5 durchführen. Offenbar muß die Bedingung  $\nu\sigma \leq 1$  zur numerischen Stabilität erfüllt werden. In diesem Fall erhöhte sich die Anzahl der benötigten Zeitschritte etwa um den Faktor 5. Der gewünschte Effekt wurde nicht erreicht, stattdessen war eine starke Zunahme der Glättung in weiten Bereichen der Lösung zu beobachten (Fig. 6 und 7). Eine Verdopplung der räumlichen Stützstellen konnte daran nicht viel ändern (Fig. 8 und 9). Die bisher gezeigten Anwendungen des Lax-Wendroff-Verfahrens wurden für die ersten beiden der oben beschriebenen Beispiele durchgeführt. Ein unerwartetes Verhalten des Lax-Wendroff-Verfahrens wurde im dritten Beispiel festgestellt (Fig. 10). An der Stelle  $x = 0$  beschreibt die Näherungslösung eine lokale Dichteabnahme und eine lokale Erhöhung der inneren Energie. Die exakte Lösung weist in diesem Bereich jedoch einen konstanten Zustand auf.

In den Fig. 11 bis Fig. 20 sind die Ergebnisse der Berechnungen mit dem Glimm-Verfahren dargestellt. Die in der Literatur als typisch bezeichneten Eigenschaften des Verfahrens [31] widerspiegeln sich in Fig. 11 und 12. Die Sprunghöhen der Unstetigkeiten werden reproduziert, jedoch die Sprungstellen sind etwas ungenau lokalisiert. Die Wirkung unterschiedlicher Startwerte für den Zufallszahlen-generator und damit die Stabilität des Verfahrens hinsichtlich der Folgen von Zufallszahlen wird in den Fig. 13 bis 18 gezeigt. Gerade im Bereich der Verdünnungswelle hat das Glimm-Verfahren die deutlichsten Schwierigkeiten, die exakte Lösung zu reproduzieren (Fig. 15). Offensichtlich versucht das Verfahren die Lösung lokal zu glätten und produziert dabei kleine Stoßwellen. Der Verdünnungszone wird dadurch eine falsche Struktur unterlegt. Die Reaktion des Glimm-Verfahrens auf falsche Vorgabe von  $\sigma$  war recht harmlos (Fig. 19 und 20) im Vergleich zum Verfahren von Lax und Wendroff. Numerische Instabilität wurde nicht beobachtet, die produzierte Näherungslösung war jedoch im allgemeinen nicht sehr sinnvoll (Fig. 19).







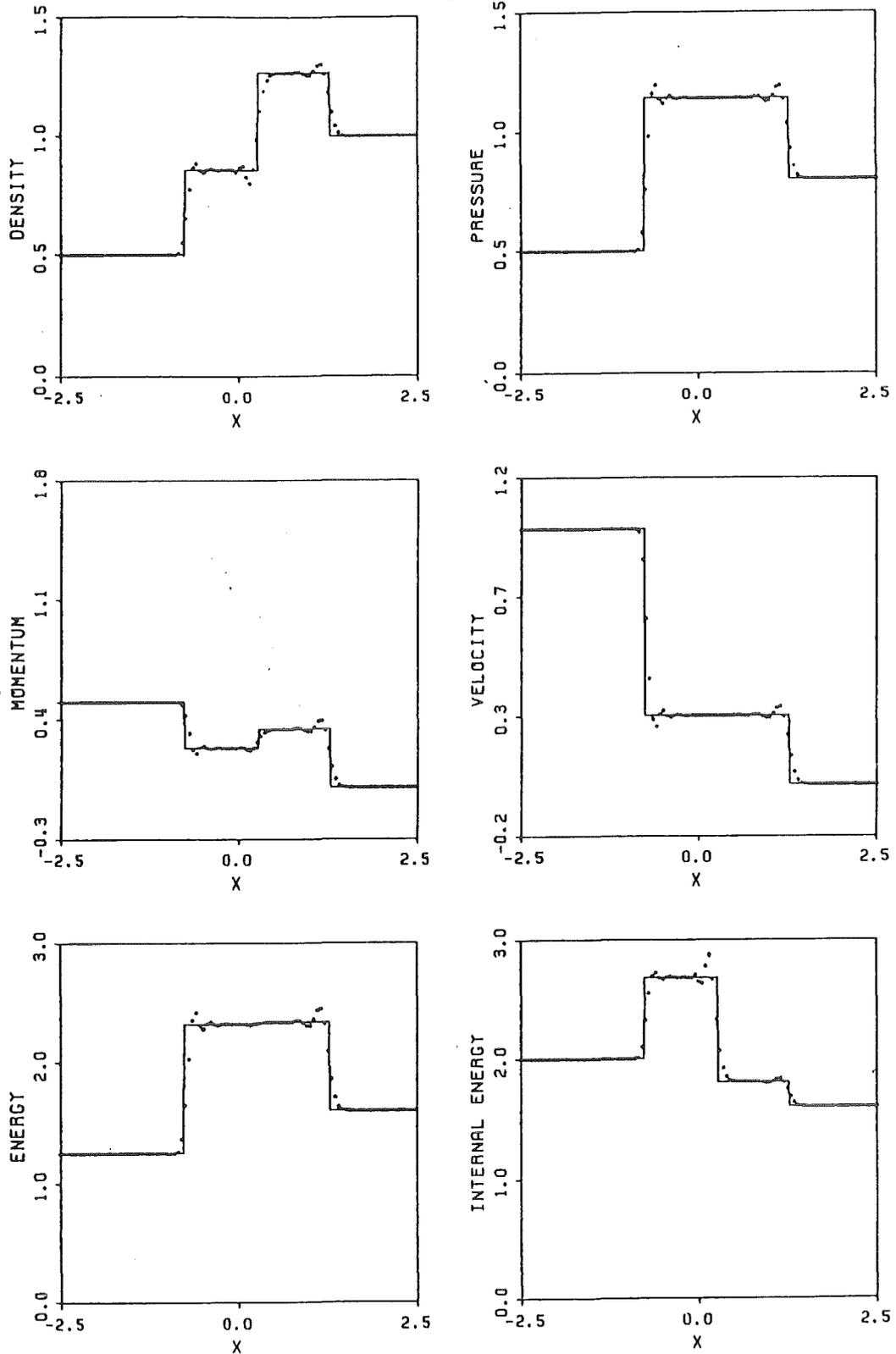


Fig. 5. SOLUTION TO THE RIEMANN PROBLEM AT  $T = 1.00$

DATA :  $\text{GAMMA} = 1.50$     $\text{RHOL} = 0.500$     $\text{UL} = 1.000$     $\text{PL} = 0.500$   
            $\text{RHOR} = 1.000$     $\text{UR} = 0.000$     $\text{PR} = 0.800$

APPROXIMATION : LAX-WENDROFF-METHOD  
                   TWO STEP WITH ARTIFICIAL VISCOSITY

DATA :  $\text{DX} = 0.050$     $\text{SIGMA} = 0.90$     $\text{NUE} = 1.00$   
           NUMBER OF REQUIRED TIME STEPS = 50



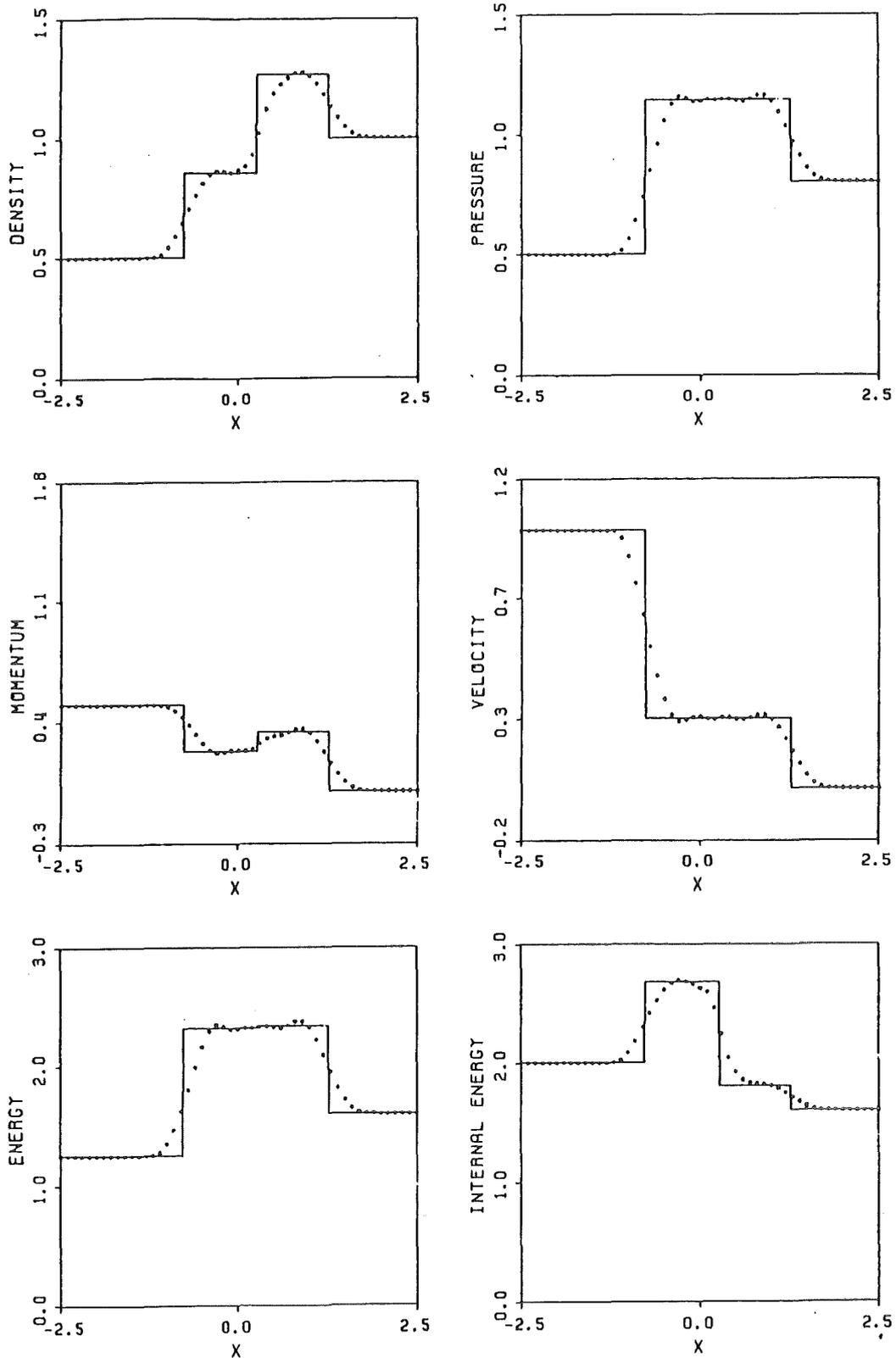


Fig. 7. SOLUTION TO THE RIEMANN PROBLEM AT  $T = 1.00$

DATA : GAMMA = 1.50    RHOL = 0.500    UL = 1.000    PL = 0.500  
                           RHOR = 1.000    UR = 0.000    PR = 0.800

APPROXIMATION : LAX-WENDROFF-METHOD  
 TWO STEP WITH ARTIFICIAL VISCOSITY

DATA : DX = 0.100    SIGMA = 0.18    NUE = 5.00  
 NUMBER OF REQUIRED TIME STEPS = 124



























Zusammenfassung.

Die Lax-Wendroff-Methode und das Glimm-Schema sind in der Anwendung auf eindimensionale Gasströmungen gut benutzbare explizite Berechnungsverfahren.

Ihre Stärken zeigt die Lax-Wendroff-Methode in Bereichen mit glattem Lösungsverlauf wegen ihrer hohen Konsistenzordnung. Beim Auftreten von Unstetigkeiten treten jedoch ihre Schwächen in Form starker Dämpfung und Nichtmonotonie zutage. Bei der Erhöhung der künstlichen Viskosität muß zur Beibehaltung der numerischen Stabilität die Zeitschrittweite reduziert werden. Die Überschießer werden dabei nicht ganz vermieden, die unerwünscht starke Dämpfung wächst noch an. Einige Fälle von künstlicher Heizung wurden beobachtet.

Die Stärke des Glimm-Schemas ist die gute Wiedergabe der Sprunghöhe bei auftretenden Unstetigkeiten. Die Sprungstelle wird jedoch nur ungenau reproduziert. Eine starke Abhängigkeit der Lösung von der gezogenen Zufallszahlenfolge wurde beobachtet. In nichtkonstanten, stetigen Bereichen kann eine falsche Unterstruktur entstehen.

Literatur.

- [1] R. Brent, "Algorithms for Minimization Without Derivatives," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [2] A. J. Chorin, J. Computational Phys. 22 (1976), 517.
- [3] A. J. Chorin and J. E. Marsden, "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics," Springer, New York/Heidelberg/Berlin, 1979.
- [4] P. Colella and H. M. Glaz, Numerical Modelling of Inviscid Shocked Flows of Real Gases, in "Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics," (E. Krause, ed.), p. 175, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1982.
- [5] R. Courant and K. O. Friedrichs, "Supersonic Flow and Shock Waves," Interscience, New York/London, 1948.
- [6] R. J. DiPerna, Arch. Rational Mech. Anal. 64 (1977), 1.
- [7] J. Flores and M. Holt, J. Computational Phys. 44 (1981), 377.
- [8] W. Gerdes, Computing 19 (1978), 251.
- [9] J. Glimm, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 697.
- [10] J. Glimm and P. D. Lax, "Decay of Solutions of Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," Amer. Math. Soc., Providence, 1970.
- [11] S. K. Godunov, Mat. Sbornik 47 (1959), 271.
- [12] E. Halter, Bericht Nr. 18, Fak. f. Math., Universität Karlsruhe, 1981.
- [13] E. Halter and C.-D. Munz, Z. f. angew. Math. Mech. 62 (1982), T280.
- [14] E. Halter, "Zur Loesung des Riemannproblems fuer polytropes Gas," Fakultat f. Math., Bericht Nr. 22, Universitaet Karlsruhe, 1982.
- [15] E. Halter, Unveröffentlicher Bericht des KfK (1983).
- [16] E. Halter, Meth. Verf. math. Phys. 26 (1983), 69.
- [17] E. Halter, Unveröffentlicher Bericht des KfK (1983).
- [18] A. Harten and P. D. Lax, SIAM J. Numer. Anal. 18 (1981), 289.
- [19] G. Knorr and M. Mond, J. Computational Phys. 38 (1980), 212.
- [20] A. Lapidus, J. Computational Phys. 2 (1967), 154.

- [21] P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.* 7 (1954), 159.
- [22] P. D. Lax, "Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves," SIAM, Philadelphia, 1972.
- [23] E. Martensen, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 84A (1979), 1.
- [24] E. Martensen, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 1 (1979), 101.
- [25] C.-D. Munz, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1983.
- [26] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, "Difference Methods for Initial-Value Problems," 2nd ed., Interscience, New York/London/Sydney, 1967.
- [27] B. Riemann, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Mathematisch-physikalische Klasse* 8 (1860), 43.
- [28] E. Rothe, *Math. Ann.* 102 (1930), 650.
- [29] R. G. Smith, *Trans. Amer. Math. Soc.* 249, No. 1 (1979), 1.
- [30] J. Smoller, "Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations," Springer, New York/Heidelberg/Berlin, 1983.
- [31] G. A. Sod, *J. Computational Phys.* 27 (1978), 1.