

**KfK 3739**

**Juli 1984**

**Untersuchung  
der Naturkonvektion  
in einem engen Spalt mit Hilfe  
eines Differenzenverfahrens**

**P. Schira, C. Günther, U. Müller  
Institut für Reaktorbauelemente**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Reaktorbauelemente

KfK 3739

Untersuchung der Naturkonvektion in einem engen Spalt  
mit Hilfe eines Differenzenverfahrens

P. Schira, C. Günther, U. Müller

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

## Zusammenfassung

Experimente von Koster zur Naturkonvektion in schmalen Hele-Shaw-Zellen wurden mit einem bestehenden Rechenprogramm nachvollzogen. Die Überprüfung der Genauigkeit des Programmes in Abhängigkeit von numerischen Parametern und physikalischen Annahmen führte zu folgenden Ergebnissen:

Das Basismodell der Rechnungen, das einen konstanten Temperaturverlauf quer zum Spalt voraussetzt und somit keinen Wärmeaustausch mit den Fenstern zuläßt, ergibt eine Unterschätzung der experimentell ermittelten kritischen Rayleighzahlen (Einsetzen von Konvektion, Einsetzen von Oszillation) um etwa den Faktor 10 und eine Überschätzung der Periodendauern um den Faktor 5. Eine zusätzlich erstellte Variante des Programmes, die in erster Näherung einen Wärmeaustausch mit den Fenstern berücksichtigt, liefert, im Gegensatz zum Basismodell, eine Überschätzung der kritischen Rayleighzahlen und kleinere dimensionslose Periodendauern als die Experimente. Mit diesen beiden Modellannahmen werden die experimentellen Ergebnisse von Koster eingegrenzt. Da das modifizierte Wärmeübergangsmodell den tatsächlichen Wärmeaustausch mit den Fenstern überschätzt - es wird ein linearer Temperaturverlauf über die Höhe am Fensterrand und im Inneren ein parabolisches Temperaturprofil über die Tiefe angenommen - darf man davon ausgehen, daß mit einem geeignet angepaßten Wärmeübertragungskoeffizienten für den Wärmeaustausch zwischen Fluid und Fenster rechnerisch die experimentellen Ergebnisse von Koster auch quantitativ nachvollzogen werden können.

Mit weiteren Rechnungen konnten Vorstellungen über Ursachen für das Instabilwerden und Einsetzen instationärer Strömungen, die auf einem Modell von Howard basieren, erhärtet werden. Insgesamt bedarf jedoch dieser Fragenkreis noch weiterer Untersuchungen.

Bei der Abschätzung des Einflusses physikalischer Annahmen auf das verwendete Rechenmodell ergibt sich, daß man die Trägheitsglieder in den Impulsgleichungen vernachlässigen darf. Dagegen findet man, daß wegen der geringen Breite des Hele-Shaw-Spaltens die Newtonsche Reibung mit in Betracht gezogen werden muß. Ein Reibungsmodell, das allein auf dem Reibungsverlustgesetz von Darcy für Strömungen in porösen Körpern beruht, liefert eine von den Experimenten stark abweichende Phänomenologie. Beispielsweise findet man für eine solche

rein "poröse Reibung" keinen sprunghaften Übergang von stationärer zu oszillierender Konvektion.

Die Abhängigkeit der Rechenergebnisse von numerischen Parametern wie Feinheit des Maschennetzes oder Größe der Zeitschrittweite, zeigt einerseits bei Verfeinerung der Auflösung keine monotone Konvergenz in den Nusseltzahlen, andererseits bleiben die zu ein und derselben Rayleigh-Zahl gehörigen verschiedenen Strömungsformen im wesentlichen erhalten.

## Investigation of Natural Convection in a Small Slot Using a Finite Difference Method

### Summary

Experimental results by Koster who studied natural convection processes in slender Hele-Shaw cells are simulated with an existing twodimensional natural convection code. This investigation yields the following results:

The basic model of the calculations, which assumes a constant temperature across the gap (smallest extent of the Hele-Shaw cell) and thus without heat exchange with the Plexiglas windows, leads to an underestimation of the experimentally obtained critical Rayleigh numbers (onset of convection, onset of oscillatory convection) by one order of magnitude and an overestimation of the nondimensional period compared to the experimental findings. Another version of the code, which permits heat exchange with the windows reveals an overestimation of the critical Rayleigh numbers and smaller dimensionless periods than the experiments. By these two different approaches a twoside bounding the Koster's experiments are achieved. As the modified version overestimates the real heat transfer from and to the windows it may be concluded that using a suitably adapted heat transfer coefficient for the thermal coupling of the fluid and the windows numerical simulation would also reproduce quantitatively the results of Koster.

The reason for the break down of the steady flow solution and the onset of transient flow was studied numerically by examining a model proposed by Howard. At this time no really satisfying answer to this question is available.

The validation of the influence of physical assumptions on the basic model shows that the inertial terms of the momentum equations may be neglected. Viscous friction has to be included in the model with regard to the small width (extent in y-direction) of the Hele-Shaw cell. Assuming solely a Darcy-like friction law yields results differing considerably from those obtained with the inclusion of viscous friction. As an example, for "porous friction" only, no abrupt transition from stationary to oscillatory convection is found.

No monotonic convergence of the numerical results is observed for decreased mesh size and reduced time steps. With coarse and fine discretization and at the same Rayleigh number nearly the same flow types are always obtained.

## Inhalt

1.	Einleitung	1
2.	Problembeschreibung und Lösungsmethode	7
2.1	Grundgleichungen	7
2.1.1	Dreidimensionale Beschreibung	7
2.1.2	Vereinfachungen für die Spaltgeometrie	8
2.2	Randbedingungen	13
2.3	Numerische Lösung	15
2.3.1	Differenzenverfahren	15
2.3.2	Rechenprogramm LEITH	16
2.3.3	Numerische Stabilität	16
2.3.4	Durchführung der Rechenläufe	17
2.3.5	Auswertung der integralen Größen	19
3.	Ergebnisse, charakteristische Merkmale der Konvektionsströmungen	21
3.1	Adiabate Seitenwände	21
3.1.1	Diskussion der verschiedenen Strömungszustände	21
3.1.2	Quantitative Merkmale der verschiedenen Moden	30
3.2	Isotherme Seitenwände	33
3.3	Zusammenfassung der Ergebnisse für diabate und perfekt wärmeleitende Seitenwände	37
3.4	Ursachen für das Einsetzen der instationären Strömung	39
4.	Einfluß der physikalischen Parameter	44
4.1	Trägheitsterme in den Impulsgleichungen	44
4.2	Newton'scher Reibungsterm	45
4.3	Gleichungen nach dem Darcy-Gesetz	49
4.4	Einfluß schwach unsymmetrischer thermischer Randbedingungen	53
5.	Einfluß der numerischen Parameter	54
5.1	Einfluß der Zeitschrittweite	54
5.2	Einfluß der Maschenweite	55
5.3	Variation beider Einflußgrößen	56



6.	Zusammenfassung	59
7.	Anhang	61
7.1	Bezeichnungen	61
7.2	Numerische Approximation des Gleichungssystemes	63
8.	Literatur	66

## 1. Einleitung

Freie Konvektionsströmungen in horizontalen Flüssigkeitsschichten zählen zu den klassischen Problemen der hydrodynamischen Stabilität, seit im Jahre 1900 das Phänomen der Zellularkonvektion von Bénard /1/ beschrieben wurde. Eine erste theoretische Behandlung wurde von Lord Rayleigh /23/ im Jahre 1916 durchgeführt. Dieses sogenannte Rayleigh-Bénard Problem beruht auf der Wärmeübertragung durch eine horizontale, zähe und wärmeleitende Flüssigkeitsschicht. Die klassischen Versuche von Bénard wurden an einer Flüssigkeitsschicht mit fester Bodenfläche und freier Oberfläche durchgeführt, jedoch umfaßt heute der Themenkreis der Bénard-Konvektion auch alle anderen Kombinationen von fester und freier horizontaler Begrenzung. Erwärmt man die Flüssigkeitsschicht langsam über die Bodenfläche und hält die Oberfläche auf konstanter Temperatur, so bleibt die Flüssigkeit zunächst bei relativ geringer Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite in Ruhe, d.h. die zugeführte Wärme wird allein durch Wärmeleitung zur Oberfläche transportiert. Dieser Ruhezustand ist stabil, d.h. Störungen, die in Form von Temperaturstörungen oder Strömungsvorgängen an der Flüssigkeit angebracht und sich selbst überlassen werden, klingen mit wachsender Zeit ab. Mit zunehmender Erwärmung erreicht man jedoch eine bestimmte Temperaturdifferenz bzw. einen bestimmten Temperaturgradienten, bei dem in der Flüssigkeit eine Bewegung einsetzt. Die Flüssigkeitsschicht ist dann instabil. Diese Bewegungen sind ungedämpft und es bildet sich bei gleichmäßiger Wärmezufuhr eine stationäre laminare Strömung von in sich geschlossenen Wirbeln aus, die man als Zellen bezeichnet. Die Form der Zellen hängt dabei entscheidend von der Randbedingung an den Horizontalflächen der Flüssigkeit ab. Bei einer freien Oberfläche erkennt man beim Blick auf die Flüssigkeit eine Polygonstruktur, wobei Hexagonalzellen bevorzugt sind. Bei einer festen Oberfläche bilden sich langgestreckte walzenförmige Zellen aus. Der Beginn der Bewegung läßt sich auf sehr einfache Weise aus einer Kräftegleichgewichtsbetrachtung in der Flüssigkeit erfassen. Einerseits erzeugen Auftriebskräfte, die auf der Dichteabnahme der Flüssigkeit im bodennahen Bereich beruhen, Aufwärts- bzw. Abwärtsströmungen, zum anderen wird diese Bewegung durch die Viskosität der Flüssigkeit und durch den lokalen Temperatúrausgleich durch Wärmeleitung gehemmt. Eine allgemeine Konvektionsbewegung kann sich durchsetzen, wenn die Auftriebskräfte die Widerstandskräfte überwiegen, sonst kehrt sie in den Ruhezustand zurück. Beide Kräfte lassen sich durch die folgenden, für die Konvektion relevanten physikalischen und geometrischen Größen beschreiben:

- $g$  = Erdbeschleunigung  
 $\rho_m$  = Bezugsdichte, i.a. bei linearem Temperaturprofil das arithmetische Mittel aus  $\rho_o$  und  $\rho_u$ , den Dichten an Ober- und Unterseite der Flüssigkeitsschicht,  
 $\alpha$  = Wärmeausdehnungskoeffizient,  
 $\nu$  = kinematische Viskosität,  
 $s$  = Schichtdicke,  
 $\Delta T$  = Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Schicht,  
 $\kappa$  = Temperaturleitzahl

Die Auftriebskraft, bezogen auf die Volumeneinheit, ergibt sich zu  $A = -\rho_m g \alpha \Delta T$ . Dieser Bewegung entgegen wirkt infolge der Zähigkeit ein Strömungswiderstand  $W$ , der proportional dem Gradienten der Schubspannung,  $\rho_m \nu \partial^2 w / \partial z^2$  ist. Als sachgemäße Größen, die ein Maß für auftretende Geschwindigkeiten bilden, erweisen sich die Verhältnisse  $\kappa/s$  oder  $\nu/s$ , wobei  $\kappa/s$  ein Maß für den auftretenden Energietransport darstellt,  $\nu/s$  stellt ein Maß für den Impulstransport dar. Gilt für das Verhältnis  $\nu/\kappa$ , der Prandtl-Zahl,  $Pr \gg 1$ , so ist die Geschwindigkeit proportional  $\kappa/s$  und die Widerstandskraft ergibt sich zu  $\rho \nu \kappa / s^3$ . Für die Bedingung  $A = W$  erhält man eine dimensionslose Kennzahl

$$Ra = - g \alpha \Delta T s^3 / (\nu \kappa) ,$$

die Rayleigh-Zahl genannt wird. Ihre Größe bildet ein Maß für die Intensität der freien Konvektion in ebenen Flüssigkeitsschichten. Der mit dem Beginn der Konvektion verknüpfte Wert wird als kritische Rayleigh-Zahl  $Ra_c$  bezeichnet.

Da Zellularkonvektionsströmungen in der Natur und in der Technik eine große Rolle spielen, sind seit ihrer Entdeckung eine Vielzahl von experimentellen und theoretischen Untersuchungen vorgenommen worden. Bei vielen Untersuchungen wurden dabei einfache Randbedingungen, wie unendliche horizontale Ausdehnung der Flüssigkeit und unendlich große Wärmeleitfähigkeit der horizontalen Berandungen gestellt.

Obwohl diese Annahmen im Experiment nur näherungsweise zu verwirklichen sind, stimmen die Ergebnisse ausgezeichnet mit den theoretischen Überlegungen überein. Für zwei feste horizontale Berandungen gibt Rayleigh nach seiner Theorie der kleinen Störungen einen Wert von  $Ra_c = 1707$  an. Jeffreys /13/, Low /17/

und Pellew und Southwell /20/ errechnen für feste Berandungen an der Ober- und Unterseite einen Wert von  $Ra_c = 1706$ . Diese Werte wurden z. B. von Schmidt und Saunders /26/ ( $Ra_c = 1700$ ) und Silveston /28/ ( $Ra_c = 1700 \pm 51$ ) experimentell sehr gut bestätigt. Da die Rayleigh-Zahl eine dimensionslose Kennzahl ist, behält sie aufgrund der Ähnlichkeitsgesetze für jede Flüssigkeit ihre Gültigkeit. In den Experimenten von Silveston wurde dies bei Verwendung von Wasser, Heptan, Glycol und Siliconölen gezeigt.

Im Bereich großer Rayleigh-Zahlen (etwa zehnfach überkritisch) zeigen Experiment (Krishnamurti /16/) und Theorie eine Umwandlung der zweidimensionalen Zellkonfiguration in dreidimensionale Zelltypen, die bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl durch zeitabhängige, jedoch sich periodisch wiederholende Strömungen ersetzt werden. Für noch höhere Rayleigh-Zahlen liegt turbulente Strömung vor. All diese grundlegenden Gesetzmäßigkeiten der Zellularkonvektion lassen sich sinngemäß übertragen auf die Konvektionsströmung in Behältern, deren horizontale Ausdehnung in der gleichen Größenordnung wie die Höhe der Flüssigkeit liegt. Als neue Randbedingung wird zusätzlich zu den Bedingungen an den zwei horizontalen festen Wänden eine Begrenzung der Flüssigkeitsschicht durch vertikale feste Wände verlangt. Der Einfluß von festen vertikalen Wänden auf den Beginn der Konvektion in horizontalen Flüssigkeitsschichten ist schon lange bekannt. Pellew und Southwell /20/ haben auf diesen Einfluß hingewiesen und Zierp /33/ hat durch die vereinfachte Annahme von "SLIP-FLOW" an den Rändern die theoretischen Untersuchungen dieses Problems begonnen. Davis /3/ hat für Behälter mit rechteckiger Grundfläche erste ausführliche theoretische Ergebnisse für den Beginn der Instabilität geliefert. Seine Ergebnisse beruhen auf der Annahme, daß alle Berandungen aus festem und perfekt wärmeleitendem Material bestehen, d.h. die durch Konvektion entstehenden Geschwindigkeits- und Temperaturstörungen verschwinden dort. Dies besagt, daß die lineare vertikale Temperaturverteilung im vorkonvektiven Zustand auch nach dem Beginn der Instabilität erhalten bleibt. Er stellt dabei fest, daß die Konvektionsströmung in solchen Behältern im stationären Zustand zylinderförmige Walzen ausbildet, deren Achsen immer parallel zur kürzeren Rechteckseite verlaufen. Die kritische Rayleigh-Zahl ist bei sehr kleinen Behältern ein Vielfaches von  $Ra_c$  für die unbegrenzte Flüssigkeitsschicht, nähert sich jedoch mit zunehmender Seitenlänge sehr rasch dem Wert von 1700, wie Frick und Clever /5a/ gezeigt haben. Die Ergebnisse von Davis wurden in weiteren Arbeiten von Segel /27/, Davies-Jones /4/ und von Catton /2/ vervollständigt. Dabei wurde auch der Aspekt der nicht oder nur schlecht wärme-

leitenden Seitenwände untersucht. Es wurde festgestellt, daß dies zu einer Erniedrigung der kritischen Rayleigh-Zahlen führt. Ausführliche experimentelle Arbeiten liegen von Stork & Müller /30/ vor.

Bei der Untersuchung der Konvektion in endlichen, rechteckigen Behältern kann man unterscheiden zwischen solchen, deren Ausdehnungen in alle drei Raumdimensionen von derselben Größenordnung sind, und anderen, bei denen eine der horizontalen Ausdehnungen wesentlich kleiner ist als die beiden anderen Ausdehnungen. Diese Behälter werden Hele-Shaw Zellen genannt, in Anlehnung an Hele-Shaw /8/, der 1898 zwei planparallele Platten zur Visualisierung von Stromlinien bei Strömungen um einfache Körper benutzte. Die Strömung in Hele-Shaw-Zellen ist dreidimensional, über die Spalttiefe  $d$  kann für die Geschwindigkeit in guter Näherung ein Poiseuille-Profil angenommen werden. Für den Sonderfall, daß die zweite horizontale Ausdehnung kleiner als die Höhe ist, nennen wir die Anordnung einen Hele-Shaw-Spalt. Die beiden Geometrien sind in Abb. 1 dargestellt.

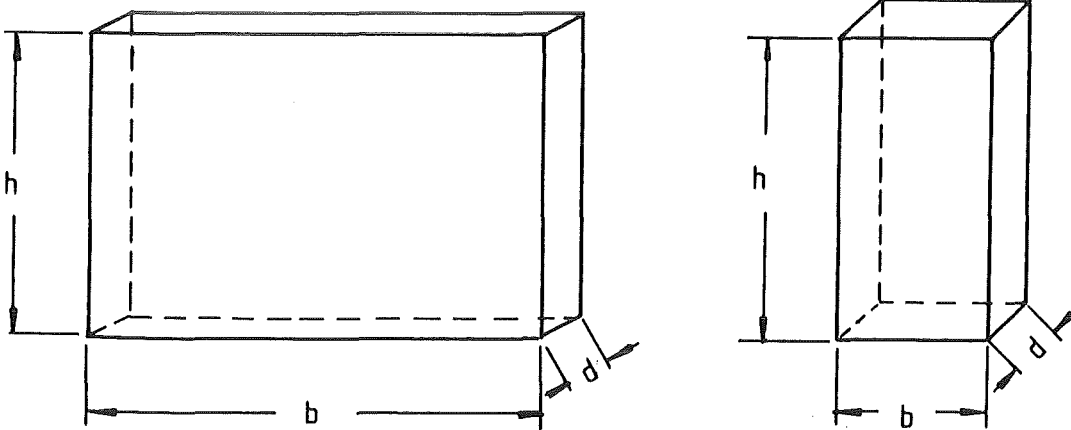


Abb. 1a: Hele-Shaw-Zelle ( $h < b$ )

Abb. 1b: Hele-Shaw-Spalt ( $h > b$ )

Untersuchungen zur Konvektionsströmung in Hele-Shaw-Zellen sind derzeit unter zwei Gesichtspunkten von besonderem Interesse:

- Der schmale, von unten beheizte Hele-Shaw Spalt stellt eine relativ einfache und übersichtliche Anordnung dar, an der sich Veränderungen der Strömungsform untersuchen lassen. Man hofft, aus dem Studium der Abfolge verschiedener Strömungsmuster auch Erkenntnisse über den Übergang zur Turbulenz gewinnen zu können.

- Aufgrund einer formalen Analogie ist die Simulation von Strömungen in porösen Stoffen durch eine Serie paralleler Hele-Shaw-Zellen möglich (Kvern-vold, Tyvand /6a/). Damit können anhand von Untersuchungen an Hele-Shaw-Zellen eine Reihe von Transportvorgängen simuliert werden, die z. B. bei Ausbreitung von Schadstoffen in Grundwasserströmungen, Ausbeutung von Öllagerstätten oder Nutzung geothermischer Energie von Bedeutung sind.

Bei Experimenten in Hele-Shaw Spalten konnten bisher eine Reihe verschiedener stationärer und instationärer Konvektionszustände gefunden werden. Letztere können periodisch oszillierend oder von stochastischer Natur sein. Zu bestimmten Rayleigh-Zahlen können zwei und mehr Strömungsformen vorliegen - eine stationäre und eine bzw. mehrere oszillierende Formen. Bisher ist noch nicht vollständig geklärt, welcher Mechanismus zur Instabilität der stationären Strömung führt. Horne und Caltagirone /9/ sowie Horne und O'Sullivan /10, 11/ stützen sich auf eine von Howard /12/ begründete Theorie. Danach ist die Ursache der instationären Strömungen eine Instabilität der thermischen Grenzschicht. Nach dem Modell von Howard klingt die Periodendauer  $\tau$  der durch thermische Instabilität verursachten Oszillation in der Hele-Shaw-Zelle typisch proportional zu  $Ra^{-2}$  ab. Horne, Caltagirone und O'Sullivan fanden aus numerischen Berechnungen, die auf dem Darcy-Gesetz basieren, das Verhalten  $Ra^{-3/2}$ . Ihre Überlegungen beruhen auf der modifizierten Vorstellung, daß sich periodisch heiße Fluidelemente ("hot-spots") aus der Grenzschicht an den horizontalen Wänden lösen und in der Zirkulationsströmung der Zelle mitgeführt werden. Rabinovich /22/ neigt auch zu dieser Auffassung als Erklärung für den Charakter der Oszillationsbewegung.

Neuere experimentelle Arbeiten liegen von Koster /14/, Koster und Müller /15/, Lyubimov, Putin und Chernatynskij /18/ sowie Putin und Tkacheva /21/ vor. Koster untersuchte von unten beheizte Hele-Shaw-Zellen unterschiedlicher Geometrien und thermischer Randbedingungen. Als Arbeitsmedium wurde ein spezielles Siliconöl oder Wasser eingesetzt. Die Temperaturfelder in der Zelle wurden mit einem Interferometer sichtbar gemacht. Koster fand heraus, daß mehrere stationäre Strömungsformen und daneben periodisch oszillierende Strömungen bei ein und derselben Rayleigh-Zahl existieren können und daß für höhere Rayleigh-Zahlen Strömungen mit stochastischem Charakter auftreten können. Putin und Tkacheva /21/ arbeiteten mit Zellen, deren Seitenwände aus Plexiglas bestanden, und mit Wasser als Strömungsmedium. Sie machten die

Stromlinien mittels Aluminium-Flittern sichtbar. Für vergleichbare Geometrien erhielten sie ähnliche Strömungsformen wie Koster.

Frick /5/ und Günther /7/ haben Rechnungen durchgeführt, bei denen sie mit verschiedenen numerischen Verfahren die Gleichungen der Thermofluidmechanik lösten, welche die Strömung im von unten beheizten Hele-Shaw-Spalt beschreiben. Diese Arbeiten folgten weitgehend den experimentellen Vorgaben von Koster /14/. Der von Koster untersuchte Behälter hat die Längenverhältnisse  $h:b:d = 3,5:1:0,16$ . Er besteht aus einem 3,2 mm starkem Kupferblechrahmen. Der Behälter mit, nach Definition, gut wärmeleitenden Randbedingungen, hat 12 mm dicke Glasscheiben als breite Seitenwände (Fenster). Gefüllt ist der Hele-Shaw-Spalt mit Siliconöl der Prandtl-Zahl  $Pr = 38,5$ . Die numerischen Ergebnisse von Frick und von Günther haben die experimentellen Beobachtungen bereits in wesentlichen Punkten nachvollziehen können, wobei u. a. die numerische Simulation der komplexen großräumigen Wirbelstrukturen in Abhängigkeit von der Intensität der Beheizung der Schicht im Vordergrund stand. Es sind jedoch noch einige Fragen offen geblieben, die nachfolgend formuliert sind und die Gegenstand dieser Abhandlung sind. Es handelt sich dabei um folgende Punkte:

1. Es ist die kritische Rayleigh-Zahl für den Übergang von stationärer zu instationärer Strömung für den Fall adiabater seitlicher Spaltwände zu bestimmen. Dabei ist durch eine Variation der Maschenweite des Differenzenverfahrens die Genauigkeit des Ergebnisses zu überprüfen.
2. Für verschiedene, wachsende überkritische Rayleigh-Zahlen sind alle möglichen instationären Strömungszustände zu berechnen. Diese sind mit Hilfe von Isothermen- und Stromlinienfeldern graphisch darzustellen und zu diskutieren. Insbesondere soll die Entstehung lokaler Strömungswirbel in den Temperaturgrenzschichten der beheizten bzw. gekühlten Ränder identifiziert und ihre gegenseitige Wechselwirkung geklärt werden.
3. Es ist zu untersuchen, in welcher Weise sich diese Ergebnisse ändern, wenn im numerischen Verfahren die Navier-Stokes-Gleichungen für den Impulstransport in gesättigten porösen Materialien verwendet werden.
4. Es ist zu untersuchen, wie sich die Ergebnisse ändern, wenn adiabate Spaltwände durch isotherme Wände ersetzt werden.

## 2. Problembeschreibung und Lösungsmethode

### 2.1 Grundgleichungen

#### 2.1.1 Dreidimensionale Beschreibung

Das betrachtete Problem wird durch die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie sowie die Rand- und Anfangsbedingungen vollständig beschrieben. Zur Vereinfachung werden folgende Annahmen getroffen:

- Das betrachtete Fluid sei ein inkompressibles Newton'sches Medium.
- Die Boussinesq-Approximation gelte, d.h. alle Stoffwerte werden als konstant betrachtet mit Ausnahme der Dichte im Auftriebsterm, hier wird eine lineare Abhängigkeit der Dichte  $\rho$  von der Temperatur angenommen.

$$\rho(T) = \rho_m (1 - \alpha (T - T_m)), \quad T_m = \frac{T_u + T_o}{2}, \quad (2.1)$$

mit einer mittleren Dichte  $\rho_m$  und einer mittleren Temperatur  $T_m$ , die in der Mitte zwischen der oben vorgegebenen Temperatur  $T_o$  und der unten vorgegebenen Temperatur  $T_u$  liegt,  $\alpha$  ist der Wärmeausdehnungskoeffizient.

- Dissipation durch Reibung sowie Wärmestrahlung wird vernachlässigt.

Unter diesen Voraussetzungen lauten die Bilanzgleichungen wie folgt:

$$\text{Impulsbilanz: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nu \cdot \nabla^2 \vec{v} - \nabla \phi + \alpha g (T - T_m) \vec{k} \quad (2.2a)$$

$$\text{Energiebilanz: } \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2b)$$

$$\text{Massenbilanz: } \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2c)$$

Die bisher noch nicht definierten Größen haben folgende Bedeutung:

$\vec{v}$  =  $(u, v, w)$  ist der Geschwindigkeitsvektor im zugrunde gelegten kartesischen  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem. Die Zuordnung der Geschwindigkeitskomponenten zu den Koordinatenachsen ist in Abb. 2 dargestellt.

$g$  = Gravitationskonstante

$\kappa$  = Temperaturleitzahl

$\nu$  = kinematische Viskosität

$T$  = Temperatur

$\phi$  = Druck pro mittlerer Dichte; in diese Größe wurde der konstante Teil der Gravitationskraft mitaufgenommen.



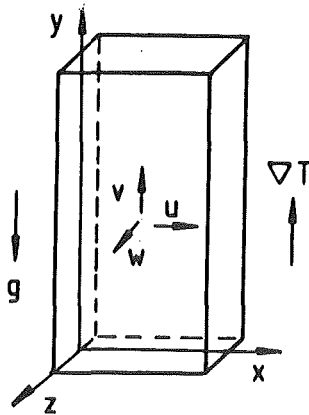


Abb. 2: Geschwindigkeiten, Temperaturgradient und Erdschwere im kartesischen Koordinatensystem

Der Laplace-Operator hat die Form:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Die Abmessungen des Hele-Shaw-Spaltes werden durch die Ungleichungen  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq h$ ,  $-d/h \leq z \leq d/2$  beschrieben.

### 2.1.2 Vereinfachungen für die Spaltgeometrie

Wegen der geringen Spalttiefe der Hele-Shaw-Zelle ( $d/h \ll 1$ ) kann die Bewegung in z-Richtung vernachlässigt werden ( $w = 0$ ). Außerdem wird die z-Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten u und v mit einem einfachen Ansatz erfaßt und danach formal eliminiert. Dies geschieht durch die Annahme, daß eine Poiseuille-Strömung zwischen den seitlichen Platten vorliegt. Deshalb wird ein Produktansatz für u und v mit einer Parabelfunktion über die Spalttiefe d in der folgenden Form gewählt:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= U(x,y,t) f(z), \\ v(x,y,z,t) &= V(x,y,t) f(z), \\ w(x,y,z,t) &= 0 , \end{aligned} \tag{2.3a}$$

mit

$$f(z) = a \left[ 1 - \left( \frac{z}{d} \right)^2 \right]$$

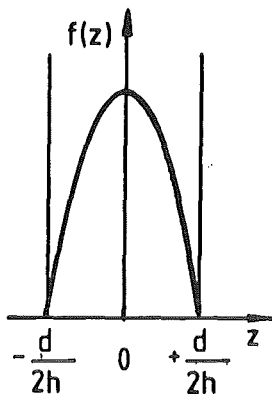


Abb. 3a: parabolisches Profil  
über die Spalttiefe

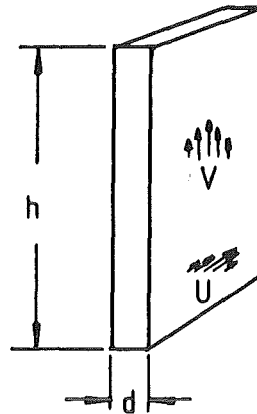


Abb. 3b: Geschwindigkeitskomponenten u und v in z-Richtung

Die in Abbildung 3a dargestellte Funktion  $f(z)$  ist so gewählt, daß sie an den Stellen  $z = -d/2$  und  $z = +d/2$  null wird und das Integral

$$\frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} f(z) dz = 1 \quad (2.3b)$$

wird. Dies ergibt  $a = 3/2$ .

Mit dem Ansatz (2.3a) entfällt die Impulsgleichung für die Geschwindigkeitskomponente  $w$ . Außerdem ergibt sich z. B.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 [U(x, y, t) \cdot f(z)] = \\ &= \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \cdot f(z) + U \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= \nabla_{\perp}^2 \cdot U \cdot f(z) - 12 \left( \frac{1}{d} \right)^2 \cdot U \end{aligned}$$

mit der Abkürzung  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Es tritt hier eine Aufspaltung des Reibungsterms  $\nu \cdot \nabla^2 u$  in zwei Bestandteile auf, wobei der erste die Reibung in  $x$ - und  $y$ -Richtung beinhaltet, während der zweite Ausdruck Reibung in  $z$ -Richtung, verursacht durch das Haften der Flüssigkeit an den Fenstern beschreibt. Man kann  $k = 1/12 \cdot d^2$  als Permeabilität auffassen, siehe z. B. Yih /32/, pp. 382-383. Nach einer später erfolgenden Integration bezüglich  $z$  über die Spalttiefe verbleibt wegen (2.3b)

$$v \cdot \int \nabla^2 u \, dz = v \cdot \nabla^2 \cdot U - \frac{v}{k} \cdot U .$$

Unter der zusätzlichen Annahme einer konstanten Temperatur über die Spalttiefe, d.h.  $T \neq T(z)$ , läßt sich das Gleichungssystem wie folgt darstellen, wobei wir wieder für die Geschwindigkeitskomponenten kleine Buchstaben verwenden:

$$f \frac{\partial u}{\partial t} + f^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \cdot f \nabla^2 u - \frac{v}{k} f \cdot u - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.4a)$$

$$f \frac{\partial v}{\partial t} + f^2 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = v \cdot f \nabla^2 v - \frac{v}{k} f \cdot v - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \alpha g (T - T_m) \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + f \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.4c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (2.4d)$$

Eine Mittelung durch Integration über die gesamte Spalttiefe und die Division durch  $d$  eliminiert nun die  $z$ -Abhängigkeit der Gleichungen. Es treten die Integrale

$$\bar{f} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} f(z) \, dz = 1 \quad \text{und}$$

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} [f(z)]^2 \, dz = 1,2$$

auf.

Damit erhalten die Trägheitsterme in den Impulsgleichungen den konstanten Vorfaktor 1,2. Dieser Wert unterscheidet sich nur sehr wenig vom Wert eins. Deshalb wurde er im Rahmen der ansonsten zu erwartenden Approximationsfehler in den Differenzgleichungen durch den Wert eins ersetzt. Die später beschriebenen Untersuchungen zeigen, daß die Trägheitsglieder bei dem hier untersuchten physikalischen Problem vernachlässigt werden können. Daher hat diese etwa willkürliche Anpassung an die Form der Beschreibung einer echt zweidimensionalen Strömung keinen Einfluß auf die erzielten Ergebnisse.

Unser Gleichungssystem lautet nun nach den bisherigen Annahmen und Vereinfachungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \nabla_{\ell}^2 u - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\nu}{k} u, \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \nabla_{\ell}^2 v - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\nu}{k} v + g\alpha(T - T_0), \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \nabla_{\ell}^2 T, \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.5d)$$

Durch die Integration sind mittlere Geschwindigkeiten über die gesamte Spalttiefe - also auch an den Seitenwänden - eingeführt worden. Dies bewirkt, daß neben den Newton'schen Reibungstermen  $\nu \cdot \nabla_{\ell}^2 u$  und  $\nu \cdot \nabla_{\ell}^2 v$ , welche das Erfüllen der Haftbedingung an den schmalen festen Rändern erlauben, zusätzliche Reibungsterme auftreten.

Es sind dies die Reibungsterme  $-\frac{\nu}{k} u$  in (2.4a) und  $-\frac{\nu}{k} v$  in (2.4b), die formal gleich aussehen wie im Darcy'schen Gesetz für poröse Medien, mit einem Wert von  $k = 1/12 d^2$ . Aufgrund dieser formalen Übereinstimmung kann eine Hele-Shaw-Zelle, falls man die Newtonschen Reibungsglieder vernachlässigt, - was in der vorliegenden Untersuchung nicht getan wird -, als poröses Medium mit der Permeabilität  $1/12 d^2$  angesehen werden, und alle zweidimensionalen Lösungen der Strömung im porösen Medium gelten auch für Hele-Shaw-Zellen.

Für den Druck führen entsprechende Überlegungen zu der Aussage, daß er quer über den Spalt konstant bleibt.

Wählt man als Längeneinheit die Höhe  $h$  der Hele-Shaw-Zelle, als Einheit für die Geschwindigkeiten  $\kappa/h$ , als Einheit für die Zeit  $h^2/\kappa$ , und  $\kappa^2/h^2$  als Einheit für  $\phi$ ,  $(T - T_0)/(T_u - T_0)$  als Einheit für die Temperatur, so erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} + Pr \cdot \nabla_{\ell}^2 \cdot u^* - Pr \cdot \left(\frac{h^2}{k}\right) u^* \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} + Pr \cdot \nabla_{\ell}^2 \cdot v^* - Pr \cdot \left(\frac{h^2}{k}\right) v^* + Pr \cdot Ra \cdot T^* \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \nabla^2 T^* \quad (2.6c)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (2.6d)$$

Die beiden dimensionslosen Kennzahlen Ra, Pr in diesen Gleichungen sind definiert als

$$Ra = \frac{\alpha \cdot g \cdot h^3 \cdot \Delta T}{\nu \cdot \kappa}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}.$$

Die Größe  $h^2/k = 12 (h/2)^2$  zeigt, daß das Verhältnis  $B = h/d$  ebenfalls eine dimensionslose, für das Problem typische Größe ist. Daneben spielt noch das Verhältnis von Höhe zu Breite  $\Lambda = h/b$  eine Rolle, so daß das betrachtete Problem insgesamt von den vier dimensionslosen Kenngrößen Ra, Pr,  $\Lambda = h/b$  und  $B = h/d$  abhängt.

Für die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) ist eine skalare Beziehung zur Berechnung des Druckes zweckmäßig. Durch eine partielle Differentiation von Gl. (2.5a) nach x und von Gl. (2.5b) nach y führt mit Gl. (2.5d) zu einer Poissongleichung für die Größe  $\phi$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial t} + \nu \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu}{k} D + g \alpha \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.7)$$

D ist eine abgekürzte Schreibweise für  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ . Diese Größe hat in den kontinuierlichen Gleichungen wegen (2.4c) immer den Wert Null. In den diskretisierten Gleichungen ist diese Forderung nicht immer erfüllbar. Aus diesem Grunde sind in (2.7) diese Terme mitaufgenommen worden.

Die Druckgleichung sowie die Bilanzgleichungen für Energie und Masse sind zu lösen. Dieses System partieller Differentialgleichungen mit den speziellen Rand- und Anfangsbedingungen löst das Program LEITH /7/.

## 2.2 Randbedingungen

Zur vollständigen Beschreibung des physikalischen Problems sind die Bedingungen für Geschwindigkeit und Temperatur an den Begrenzungsflächen festzulegen. Für die Geschwindigkeit muß an festen Rändern die Haftbedingung erfüllt sein:

$$\vec{v} = 0 \quad (2.8)$$

Dies ist für die großflächigen Ränder der Zelle durch die Form des Geschwindigkeitsansatzes (2.3) gewährleistet.

Für die Temperatur nimmt man gewöhnlich die idealisierten Bedingungen adiabate, isotherme oder perfekt wärmeleitende Ränder an. In der Anwendung liegen die Verhältnisse meist dazwischen. Die Idealfälle können im Experiment nur annähernd erreicht werden. In dieser Arbeit werden die schmalen Seitenwände, welche als Stege bezeichnet werden sollen, im allgemeinen als adiabat betrachtet, ebenso die großflächigen, breiten Seitenwände, Fenster genannt, bis auf eine Annahme, bei der sie als perfekt wärmeleitend angenommen werden. Die obere und untere Berandung werden als isotherm vorausgesetzt, wobei der untere Rand auf der höheren Temperatur  $T_u$  gehalten wird und der obere auf der niedrigeren Temperatur  $T_o$ .

Adiabater Rand bedeutet, daß kein Wärmestrom durch ihn hindurch fließt. Mathematisch formuliert, heißt das:

$$\partial T / \partial \vec{n} = 0, \quad (2.9)$$

$\vec{n}$  ist die Normalenrichtung zur Wand.

An perfekt wärmeleitenden Rändern sind gewöhnlich die Temperaturen fixiert. Für den am unteren Ende beheizten und am oberen Ende gekühlten Spalt mit ideal wärmeleitenden Seitenwänden bedeutet dies, daß sich in den Seitenwänden ein lineares Temperaturprofil einstellt. An den schmalen seitlichen Berandungen (Stegen) kann für die Gleichungen (2.4) eine beliebige Temperaturrandbedingung vorgegeben werden, während mit den Fenstern wegen der Annahme  $T \neq T(z)$  in (2.4) kein Wärmeaustausch möglich ist. Nachfolgend wird ein gegenüber (2.4) erweitertes Modell abgeleitet, bei dem die Temperatur eine parabolische z-Abhängigkeit hat, wobei die Temperatur auf dem Rand (Fenstern) festgehalten ist. Es gilt dort also

$$T(x, y, \pm \frac{d}{2}, t) = T_u + \frac{y}{h} (T_o - T_u) \stackrel{\text{def.}}{=} T_B(y) \quad (2.10)$$

Es liegt nun nahe, die Temperaturverteilung über den Spalt durch eine Kurve zweiter Ordnung zu approximieren, d.h. die Temperatur in der Form

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, t) + z T_1(x, y, t) + z^2 T_2(x, y, t) + O(z^3)$$

darzustellen. Die Anpassung dieser Reihenentwicklung an die Randbedingung ergibt die Beziehung

$$T(x, y, z, t) = T_B(y) + \left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right) T_2(x, y, t) + O(z^3) \quad (2.11)$$

Anstelle der lokal maximalen Temperatur  $T_2(x, y, t)$  kann auch die über den Spaltquerschnitt gemittelte Temperatur (Glieder der Ordnung  $\geq 3$  vernachlässigt)

$$\bar{T}(x, y, t) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} T(x, y, z, t) dz = T_B(y) - \frac{d^2}{6} T_2(x, y, t) \quad (2.12)$$

eingeführt werden.

Führt man nun  $T(x, y, z, t)$  in die dreidimensionalen Bilanzgleichungen für Impuls und Energie ein, mittelt die Differentialgleichungen über den Spaltquerschnitt und ersetzt schließlich  $T_2(x, y, t)$  durch  $\bar{T}$ , so erhält man für den Fall ideal leitender großflächiger Seitenwände das System.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u &= \nu \nabla^2 u - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\nu}{k} u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v &= \nu \nabla^2 v - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\nu}{k} v + g \alpha (\bar{T} - T_0), \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \kappa \nabla^2 \bar{T} + \frac{12}{d^2} \kappa (T_B - \bar{T}), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Durch diese Vorgehensweise ist die thermische Wechselwirkung zwischen Fluid und Seitenwänden durch eine lineare Ankopplung mit einem Wärmeübertragungskoeffizienten  $(12/d^2)\kappa$  an das in der Seitenwand vorgegebene Temperaturprofil erreicht.

Die mittlere Temperatur  $\bar{T}$  ist nun an die entsprechenden thermischen Randbedingungen der Spaltunter- und Oberseite so wie der schmalen seitlichen Stege anzupassen. Neben den Bedingungen an den Rändern des Konvektionsbereiches müssen Anfangsbedingungen für alle  $u$ ,  $v$  und  $\bar{T}$  vorgegeben werden.

## 2.3 Numerische Lösung

### 2.3.1 Differenzenverfahren

Zur Lösung aller Gleichungen wird ein Differenzenverfahren verwendet, d.h. die Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten approximiert. Zu diesem Zweck wird über den betrachteten Bereich ein rechtwinkliges, äquidistantes Maschennetz mit  $M$  Stützpunkten in  $x$ -Richtung und  $N$  Punkten in  $y$ -Richtung (siehe Abb. 4) gelegt. Dadurch sind die Maschenweiten  $\Delta x = (x_R - x_L)/M$  und  $\Delta y = (y_0 - y_u)/N$  festgelegt.

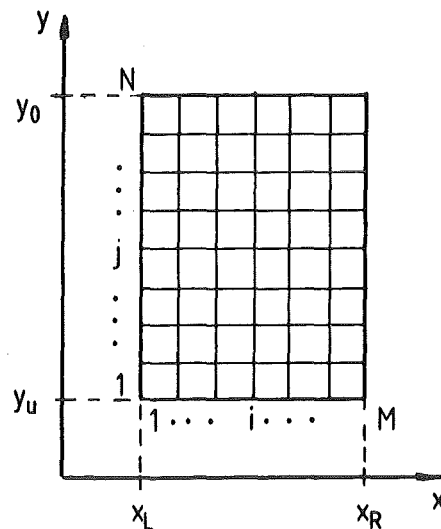


Abb. 4: Rechtwinkliges, äquidistantes Maschennetz

Als besonders geeignet erweist sich die Verwendung eines versetzten Maschennetzes ("staggered grid"), wobei diskrete Werte von Druck und Temperatur in den Maschenmittelpunkten, die Geschwindigkeiten jeweils in den Mitten der Maschenseiten angenommen werden, wie in Abbildung 5b dargestellt ist. Die örtliche Diskretisierung wird durch zwei Indizes  $i$  und  $j$  festgelegt, diskrete Zeitpunkte durch den oberen Index  $n$ . Die diskreten Zeitpunkte mit den oberen Indizes  $n$  und  $n+1$  unterscheiden sich um die Zeitschrittweite  $\Delta t$ . Mitten der Maschenseiten werden durch Indizes  $i \pm 1/2$  oder  $j \pm 1/2$  gekennzeichnet.

Die einzelnen Differentialquotienten werden durch geeignete Differenzenquotienten approximiert. Die Approximation der Gleichungen ist im Anhang zusammengestellt.



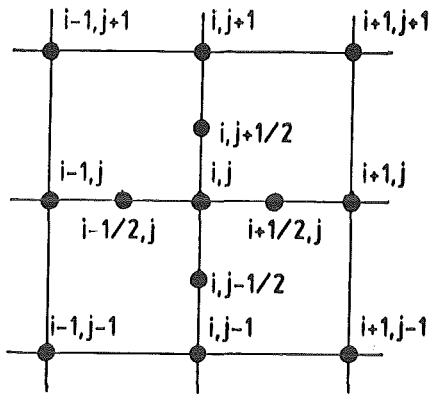


Abb. 5a: Koordinaten von Punkten im staggered grid

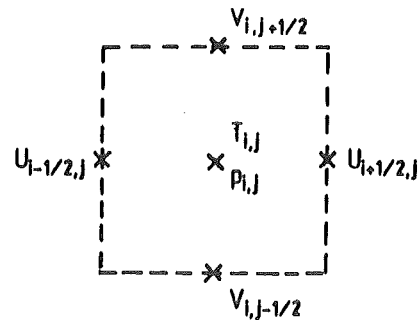


Abb. 5b: Örtliche Diskretisierung von T, p, u und v

### 2.3.2 Rechenprogramm LEITH

Zu den gegebenen Größen  $u$ ,  $v$  und  $T$  wird zu einem diskreten Zeitpunkt  $t$  in allen Maschenpunkten der Druck zum Zeitpunkt  $t+\Delta t/2$  durch die Lösung der Druckgleichung bestimmt. Danach werden zunächst  $u$  und  $v$  und dann  $T$  für  $t+\Delta t$  nach der Zwischenschrittmethode ("fractional time-step") in drei Einzelschritten neu berechnet. Der erste Schritt berechnet den konvektiven Transport in  $x$ -Richtung, der zweite den in  $y$ -Richtung und der dritte den viskosen Anteil des Transportes (diffusiver Term) und sonstige noch vorhandene Anteile.

Die konvektiven Terme werden mit einem Näherungsverfahren nach Leith /25/ berechnet. Zur Lösung der Druckgleichung wird der schnelle Löser PWSCRT für in Rechtecksgeometrien vorliegende Poissongleichungen /31/ benutzt. Zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  müssen  $u$ ,  $v$  und  $T$  in allen Punkten vorgegeben sein. Die Zeitschrittweite und die Anzahl der zu berechnenden Zeitschritte sind über die Programmeingabe festgelegt.

### 2.3.3 Numerische Stabilität

Da die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden, treten Rundungs- und Abbruchfehler auf, die von Maschenpunkt zu Maschenpunkt mit übernommen werden. Soll die Lösung der endlichen Differenzgleichungen eine hinreichend genaue Näherung der Lösung der Differentialgleichungen ergeben, so müssen mehrere Bedingungen erfüllt sein. Zum einen muß die Diskretisierung von Ort und Zeit genügend fein sein (Konsistenz der numerischen

Approximation), zum anderen muß das angewandte Verfahren numerisch stabil sein. Numerische Stabilität liegt dann vor, wenn der Häufungseffekt aller Rundungsfehler für unendlich kleine Maschen- und Zeitschrittweiten vernachlässigbar klein wird, d.h. die Differenz zwischen exakter Lösung und Näherung gegen null konvergiert.

Im Programm LEITH ist die Stabilität der konvektiven Terme gesichert, wenn für alle Punkte die Summe der Courantzahlen kleiner oder gleich eins ist:

$$c_x + c_y \leq 1 \quad \text{mit} \tag{2.14}$$
$$c_x = |u| \Delta t / \Delta x \quad \text{und} \quad c_y = |v| \Delta t / \Delta y$$

Die Stabilitätsbedingung für die diffusiven Terme lautet:

$$d^* \Delta t / (\Delta x^2 + \Delta z^2) \leq 1/2, \tag{2.15}$$

wobei die Diffusionskonstante  $d^*$  in den Impulsgleichungen die kinematische Zähigkeit und in der Energiegleichung die Temperaturleitzahl  $\kappa$  darstellt. Außerdem müssen die Bedingungen für die Maschen-Reynolds-Zahl

$$|u| \Delta x / d^* \leq 2 \quad \text{und} \tag{2.16}$$

$$|v| \Delta y / d^* \leq 2 \tag{2.17}$$

erfüllt sein. Im vorliegenden Anwendungsfall ist die Bedingung

$$v \Delta t / (x^2 + y^2) \leq 1/2 \tag{2.18}$$

dominant. Sie bestimmt die Wahl von Maschen- und Zeitschrittweite.

#### 2.3.4 Durchführung der Rechenläufe

Während eines Rechenlaufs werden die Maschen- und Zeitschrittweite, die Geometrie, die physikalischen Stoffgrößen  $\alpha$ ,  $\nu$  und  $\kappa$  sowie die Randbedingungen festgehalten. Variiert wird die Rayleigh-Zahl, was einer Veränderung der Temperaturdifferenz zwischen Unter- und Oberseite entspricht.

Beim Start eines Rechenlaufs muß ein definierter Anfangszustand über die Eingabe festgelegt sein. Der hier am häufigsten gewählte Anfangszustand ist: alle Geschwindigkeiten werden null gesetzt, ein lineares Temperaturprofil über die Höhe wird angenommen und eine punktförmige Temperaturstörung wird, z.B. im Punkt (5M/6, N/2) angebracht. Die Zeit für einen Rechenlauf ist fest vorzugeben. Ist nach der gewählten Anzahl von Zeitschritten das System noch nicht eingelaufen, d.h. ist noch kein stationärer oder im zeitlichen Mittel stationärer Zustand erreicht, so wird ein neuer Lauf durchgeführt, als dessen Anfangszustand der Endzustand des vorigen Laufes gewählt wird. Dieser Vorgang wird Restart genannt. Es erfolgen solange Restarts bei gleicher Rayleigh-Zahl, bis sich ein angestrebter Strömungszustand eingestellt hat. Der jeweilige stationäre bzw. im zeitlichen Mittel stationären Zustand bei fester Rayleigh-Zahl ist durch das Muster des Stromlinienfeldes (Anzahl und Form der Wirbel), die Nusselt-Zahl und bei instationärer Konvektion zusätzlich durch die Periodendauer gekennzeichnet. Die Strömungsform eines stationären oder im zeitlichen Mittel stationären Zustandes soll Mode genannt werden.

Mit diesem Endzustand für eine Rayleigh-Zahl kann nun ein Restart bei einer schwach veränderten Rayleigh-Zahl  $Ra + \Delta Ra$  erfolgen, was einer stetigen Temperaturerhöhung nahekommt. Restarts bei dieser neuen Rayleigh-Zahl sind nun wieder so häufig zu wiederholen, bis das System erneut eingeschwungen ist. Alle Aussagen in den nachfolgenden Abschnitten beziehen sich auf eingeschwungene Zustände. Einige Zustände benötigen jedoch derart lange Rechenzeiten, daß das Erreichen des eingeschwungenen Zustandes nicht immer abgewartet werden kann. In diesem Fall wird der Rechenlauf abgebrochen, sobald am typischen Verlauf der Nusselt-Zahlen über der Zeit erkannt werden kann, in welchen Zustand das System hineinfließt. Da sich das System bei zeitabhängiger Rechnung der angestrebten Lösung in Form einer zeitlichen Schwingung nähert, können die für sie charakteristischen Größen Nusselt-Zahl und Periodendauer durch Mittelung häufig in guter Näherung bestimmt werden, selbst wenn lokal die Zustandsgrößen noch nicht den endgültigen Zustand erreicht haben.

Die überwiegende Zahl der Rechenläufe wurde mit 9 Maschen in x-Richtung, 33 Maschen in y-Richtung und einer Zeitschrittweite von  $\Delta t = 1,5 \times 10^{-4}$  s durchgeführt. Diese Parameterwerte dienten als Basis beim Vergleich mit Rechnungen, bei denen Modellannahmen geändert wurden.

### 2.3.5 Auswertung der integralen Größen

Jede Konvektionsform hat eine für sie typische Wärmeübertragung. Sie wird gewöhnlich durch die Nusselt-Zahl charakterisiert. Die Nusselt-Zahl gibt die Vermehrung des Wärmeüberganges als Folge der Konvektion gegenüber reiner Wärmeleitung an. Im vorliegenden Fall wird der Gesamtwärmestrom bei Konvektion mit Hilfe eines Temperaturgradienten am Rande numerisch berechnet. Dieser wird, wie in Abb. 6 dargestellt, durch eine quadratische Approximation der Temperatur über drei nichtäquidistante Stützpunkte für jedes  $i$  berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{\text{unten}}^i &= (dT/dy)_{x=i \cdot \Delta x, y=0} / (\Delta T/h) , \\ \text{Nu}_{\text{oben}}^i &= (dT/dy)_{x=i \cdot \Delta x, y=h} / (\Delta T/h) . \end{aligned} \quad (2.19)$$

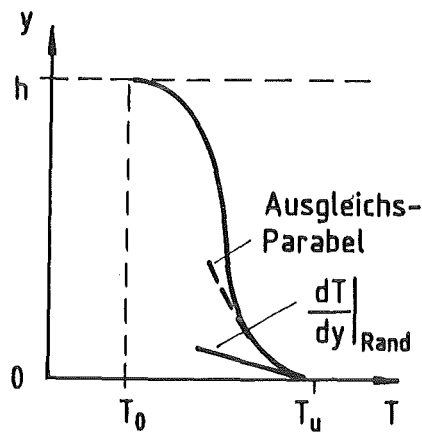


Abb. 6: Bestimmung des Temperaturgradienten am Rande

Arithmetische Mittelung über jeweils alle Punkte eines Randes ( $i = 1, \dots, M$ ) liefert mittlere untere und obere Nusselt-Zahlen:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{\text{unten}} &= 1/M \sum_{i=1}^M \text{Nu}_{\text{unten}}^i , \\ \text{Nu}_{\text{oben}} &= 1/M \sum_{i=1}^M \text{Nu}_{\text{oben}}^i . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da sich bei den oszillierenden Strömungsformen die Nusselt-Zahl zeitlich ändert, sich jedoch periodisch wiederholt, wird für Strömungen mit periodischem Charakter eine zeitlich gemittelte Nusselt-Zahl  $\text{Nu}$  angegeben. Zur exakten Ermittlung von  $\text{Nu}$  wäre eigentlich die Integration über eine Periode erforderlich. Zur Darstellung der einzelnen Tendenzen soll jedoch hier die grobe Näherung der arithmetischen Mittelung genügen:

$$\text{Nu} = 1/2 (\text{Nu}_{\text{max}} + \text{Nu}_{\text{min}}) . \quad (2.21)$$

In diesem Zusammenhang wird die Periodendauer  $\tau$  zweckmäßig mit der Diffusionszeit  $h^2/\kappa$  dimensionslos gemacht:

$$\tau^* = \frac{\kappa}{h^2} \cdot \tau . \quad (2.22)$$

Zur Charakterisierung der Strömungsformen werden die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder im Spalt zu festen Zeitpunkten grafisch dargestellt. Hierzu werden die Stromlinien der Geschwindigkeiten bzw. die Höhenlinien der Temperatur in gleichen, zeitlich aufeinanderfolgenden Abständen gezeichnet. Bei den instationären Strömungen gilt dies nur annähernd.

3. Ergebnisse, charakteristische Merkmale der Konvektionsströmungen

3.1 Adiabate Seitenwände

3.1.1 Diskussion der verschiedenen Strömungszustände (Moden)

Im folgenden sind noch einmal die Größen zusammengestellt, die in den beschriebenen Rechnungen fest gewählt sind. Die Prandlt-Zahl  $Pr$  hat einen festen Wert,  $Pr = 38.46$ , das Verhältnis A Höhe zu Breite ( $A = h/b$ ) hat den Wert 3,5, im Abschnitt 3.4 kommt der Wert  $A = 1,75$  ausnahmsweise vor. Das Verhältnis  $b = h/d$  (Höhe zu Tiefe) liegt immer bei 23,3.

Für die Geschwindigkeit ist an allen Rändern die Haftbedingung erfüllt. Am unteren Rand hat die Temperatur den Wert 1, am oberen Rand den Wert 0. Die schmalen seitlichen Berandungen (Stege) werden immer als adiabatisch vorausgesetzt. Die großflächigen seitlichen Berandungen (Fenster) werden meist ebenfalls adiabatisch angenommen, in Abschnitt 3.2 wird vorausgesetzt, daß sie perfekt wärmeleitend sind.

Der Übergang von reiner Wärmeleitung zu Konvektion tritt bei  $Ra = 1,0 \times 10^6$  auf. Erkennbar ist dies an der Abweichung der Isothermen vom waagerechten Verlauf. Es stellt sich der stationäre Grundmode 1 ein. Er wird von einer großen Konvektionsrolle gebildet, die sich über die gesamte Spaltgeometrie erstreckt. Die Rolle kann nach links oder nach rechts orientiert sein (s. Abb. 7), abhängig von der Zirkulationsrichtung des Fluids. Welche Orientierung sich einstellt, kann über die Anfangsbedingungen beeinflusst werden. Mode 1 wird als inversionssymmetrisch bezeichnet, weil das Stromlinienfeld punktsymmetrisch zur Mitte des Spaltes ist.

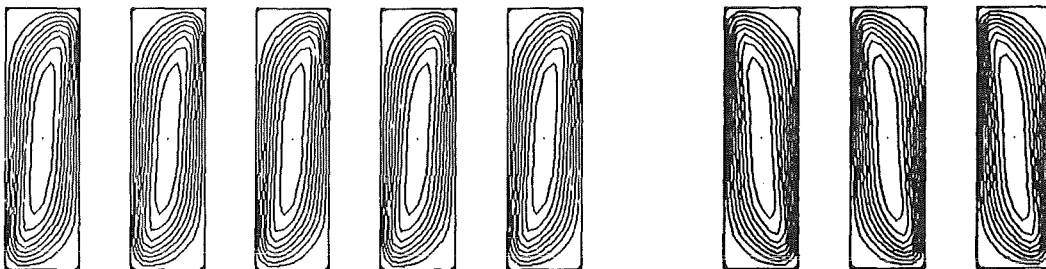


Abb. 7a: Mode 1, stationäre Einfachrolle, bei  $Ra=5,8 \times 10^6$ . Geschwindigkeitsfeld zu verschiedenen Zeiten.

Abb. 7b: Mode 1 mit umgekehrter Orientierung

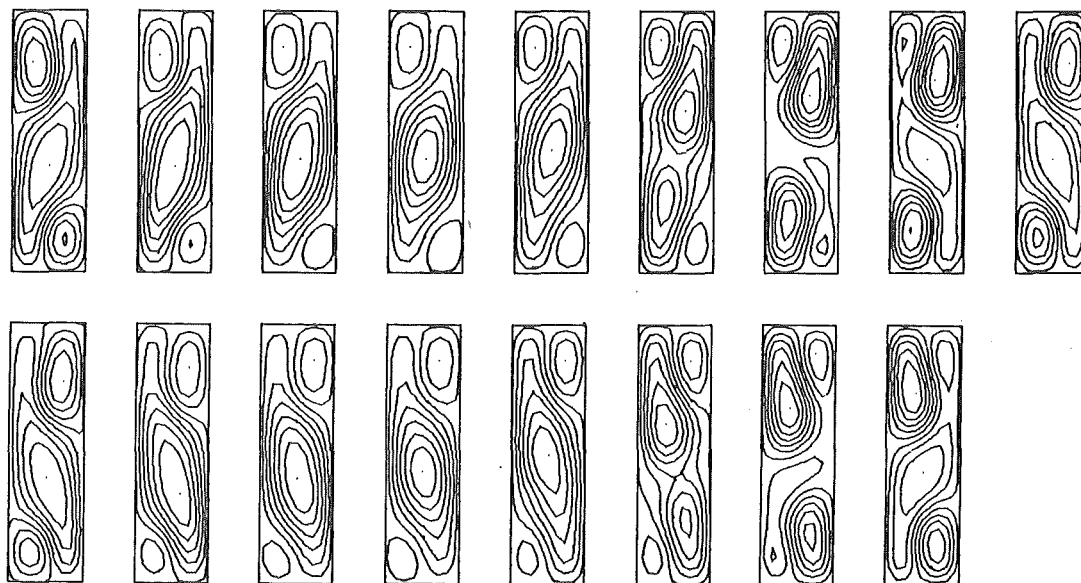


Abb. 8: Mode 2, Diagonalszillation bei  $Ra = 5,8 \times 10^6$ .  
Geschwindigkeitsfeld über etwa eine Periode.

Wird die Rayleigh-Zahl nun in kleinen Schritten  $\Delta Ra$  erhöht, so bleibt Mode 1 zunächst noch erhalten. Die Einfachrolle neigt sich jedoch immer mehr zu einer Seite, bis sie bei  $Ra = 5,9 \times 10^6$  instabil wird. Es stellt sich sprunghaft Mode 2 ein, eine instationäre, jedoch sich zeitlich periodisch wiederholende Strömung, die im weiteren als Diagonalszillation bezeichnet werden soll (Abb. 8). Sie ist charakterisiert durch eine große Diagonalrolle, die nach je einer halben Periode nach links oder nach rechts geneigt ist. In den Ecken befinden sich jeweils zwei kleinere Rollen.

Im vollständig eingeschwungenen Zustand ist auch Mode 2 inversionssymmetrisch. Zusätzlich ist er im zeitlichen Mittel symmetrisch zur vertikalen Mittelachse, d. h. das Stromlinienfeld nach einer halben Periode geht aus der ersten Hälfte durch Spiegelung an dieser Achse hervor. Bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl bleibt die Diagonalszillation noch über einen großen Bereich erhalten, wobei die Periodendauer der Oszillation abnimmt. Das Verhalten von Mode 2 bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl wurde nicht ermittelt.

Bei Erniedrigung der Rayleigh-Zahl, ausgehend von Mode 2 bei  $Ra = 7 \times 10^6$ , tritt ein Hysteresiseffekt auf, d. h. es stellt sich nun bei  $Ra = 5,9 \times 10^6$  nicht wieder der stationäre Mode 1 ein. Mode 2 bleibt vielmehr bis zu einem Wert der Rayleigh-Zahl  $Ra = 5,75 \times 10^6$  erhalten, bei dem dann - wiederum sprunghaft - eine andere Oszillationsform auftritt: Mode 3. Diese oszillierende Strömung ist durch eine große, unsymmetrische Rolle und eine kleinere,

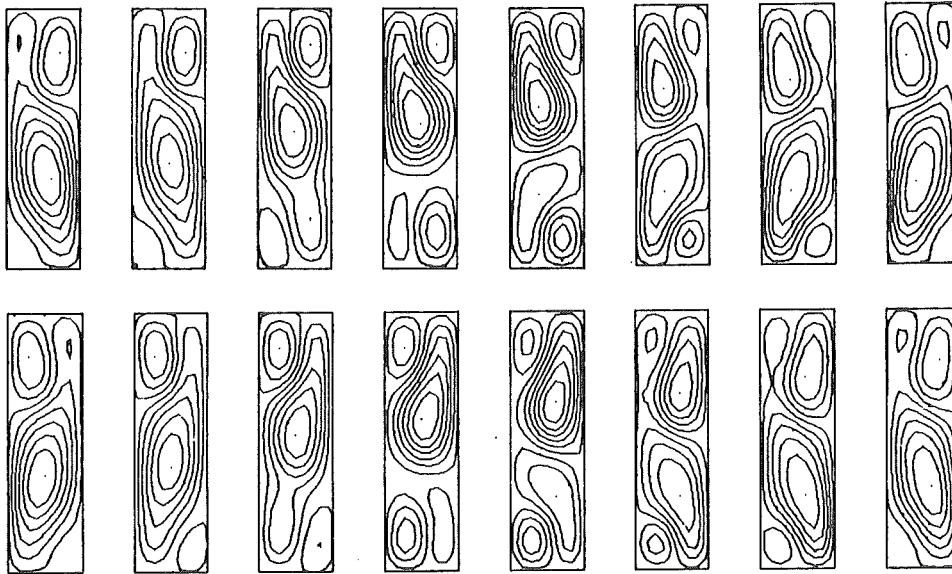


Abb. 9: Mode 3, Vertikaloszillation bei  $Ra = 5,8 \times 10^6$ .  
Geschwindigkeitsfeld über etwa eine Periode.

die sich periodisch wechselnd in der linken oder rechten unteren Ecke befindet, gekennzeichnet (Abb. 9). Sie ist im zeitlichen Mittel symmetrisch zur vertikalen Mittelachse und soll hier als Vertikaloszillation bezeichnet werden. Bei erneuter Erhöhung der Rayleigh-Zahl bleibt dieser Mode erhalten; die obere Grenze des stabilen Bereiches wurde nicht ermittelt.

Weitere Erniedrigung der Rayleigh-Zahl, nachdem sich Mode 3 eingestellt hatte,

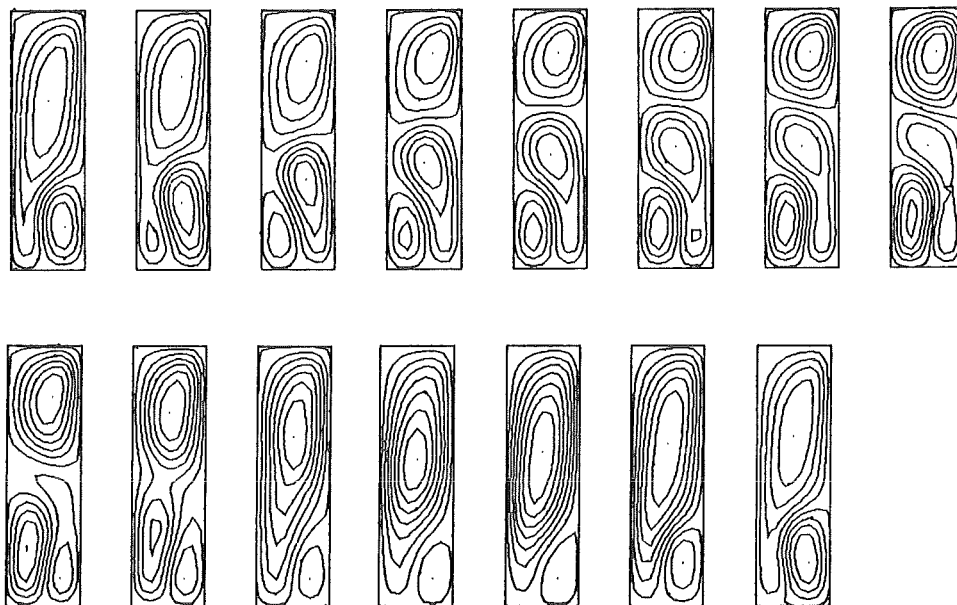


Abb. 10: Mode 4, unsymmetrische Oszillation bei  $Ra = 5,8 \times 10^6$ .  
Geschwindigkeitsfeld über etwa eine Periode.



führt bei  $Ra = 5,1 \times 10^6$  sprunghaft zu Mode 4. Es ist dies eine völlig un-symmetrische Oszillation, charakterisiert durch eine zeitweise auftretende Rolle wie in Mode 3, die jedoch stets nach einer Seite orientiert ist. (Abb. 10).

Bei erneuter Erhöhung der Rayleigh-Zahl wird auch Mode 4 über einen nicht ermittelten Bereich beibehalten.

Weitere Erniedrigung der Rayleigh-Zahl, ausgehend von Mode 4, führt bei  $Ra = 4,5 \times 10^6$  sprunghaft zu Mode 5, charakterisiert durch zwei übereinanderliegende Rollen, die periodisch wachsen und schrumpfen (Abb. 11). Wegen seiner zeitlichen Symmetrie zur horizontalen Mittelachse soll Mode 5 als Horizontal-  
oszillation bezeichnet werden.

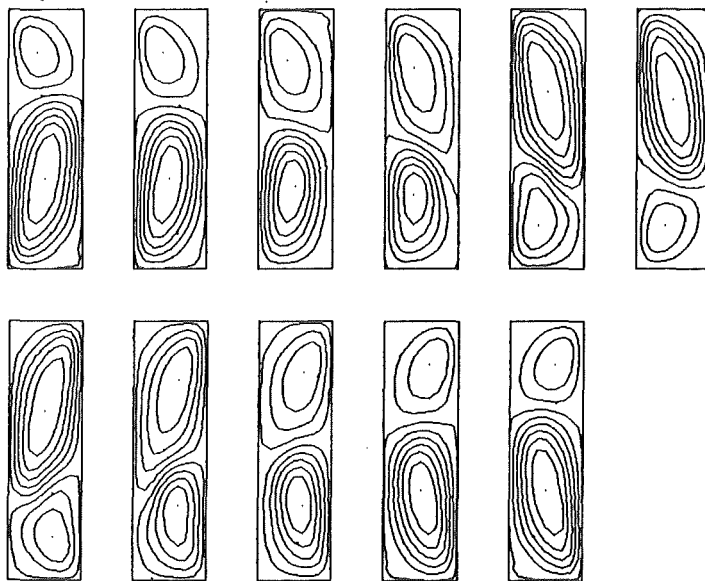


Abb. 11: Mode 5, Horizontaloszillation bei  $Ra = 5,8 \times 10^6$ .  
Geschwindigkeitsfeld über etwa eine Periode.

Erneute Erhöhung der Rayleigh-Zahl behält auch diesen Mode über einen nicht ermittelten Bereich bei. Bei Erniedrigung der Rayleigh-Zahl bleibt die Horizontaloszillation bis zu  $Ra = 4,0 \times 10^6$  stabil, wo sich, wiederum sprunghaft, der stationäre Mode 1 einstellt. Damit ist der Ausgangszustand der stationären Einfachrolle wieder erreicht, die Hystereseschleife also geschlossen. Abb. 12 zeigt in einer Zusammenfassung nochmals schematisch die Stabilitätsbereiche der einzelnen Moden.

Im folgenden werden die unterschiedlichen Lösungstypen in größerer Auflösung

noch einmal vorgestellt. Abgebildet sind jeweils die Geschwindigkeits- und die Temperaturfelder. Bei transienten Strömungen sind übereinander dargestellte Stromlinien- und Isothermenfelder dem gleichen Zeitpunkt zugeordnet.

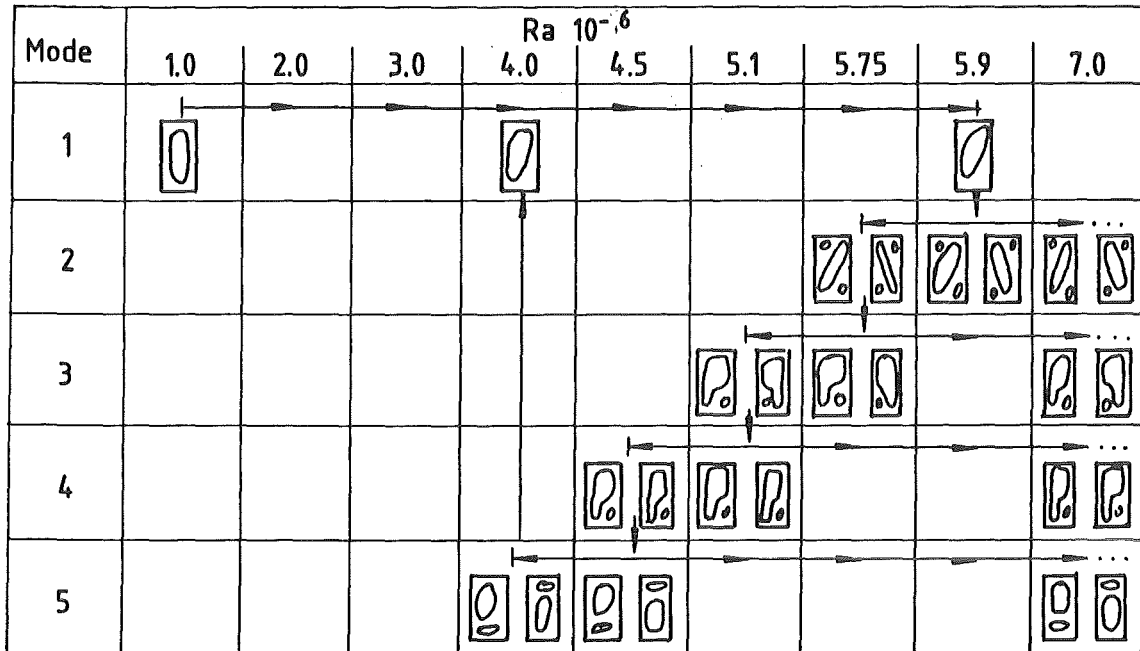


Abb. 12: Schematische Darstellung der Stabilitätsbereiche der verschiedenen Lösungstypen.

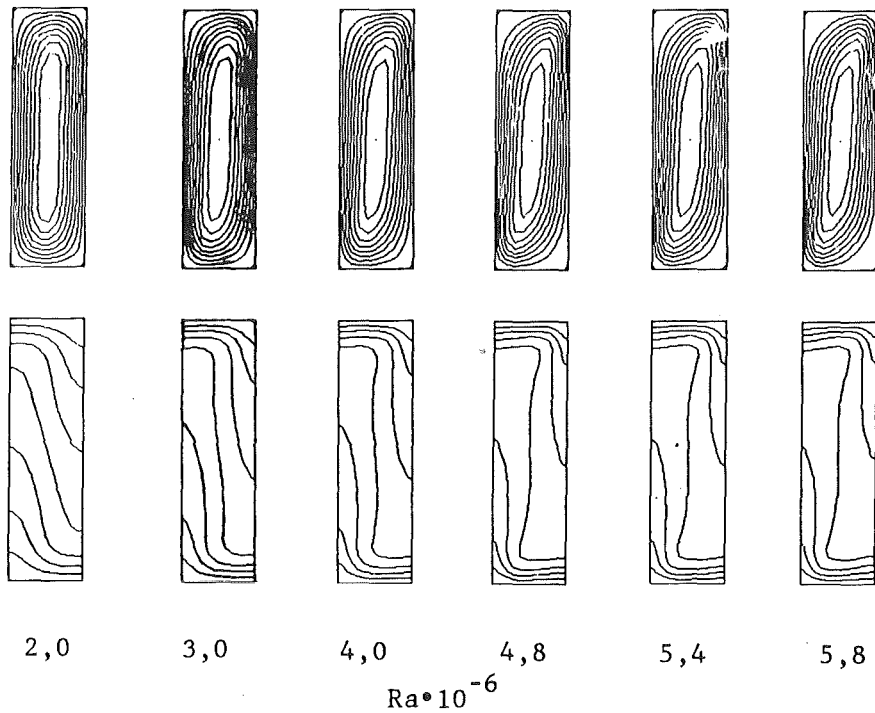


Abb. 13: Mode 1. Geschwindigkeitsfelder (oben) und Temperaturfelder (unten) für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

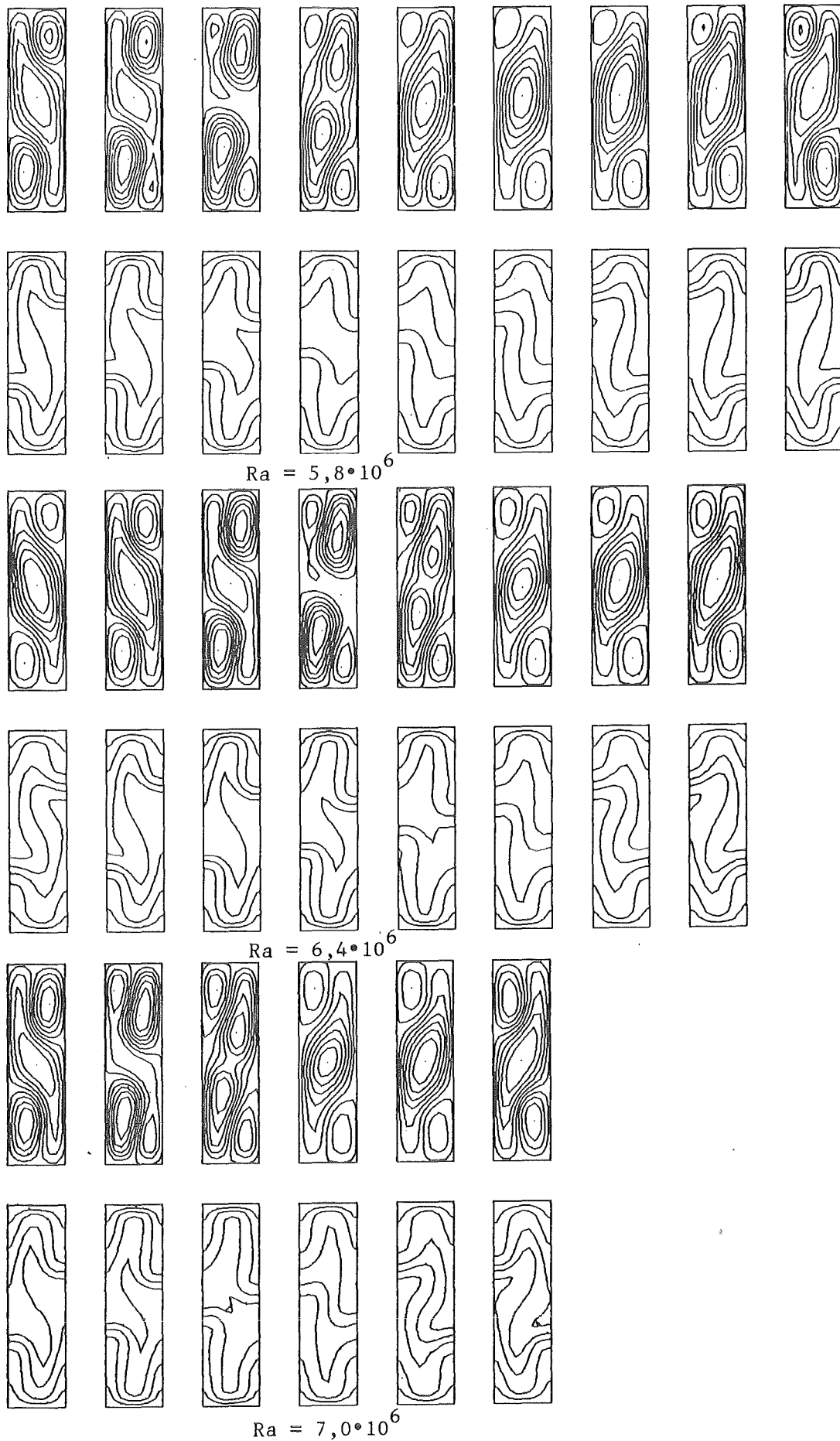


Abb. 14: Mode 2. Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld für verschiedene Rayleigh-Zahlen über jeweils eine halbe Periode.

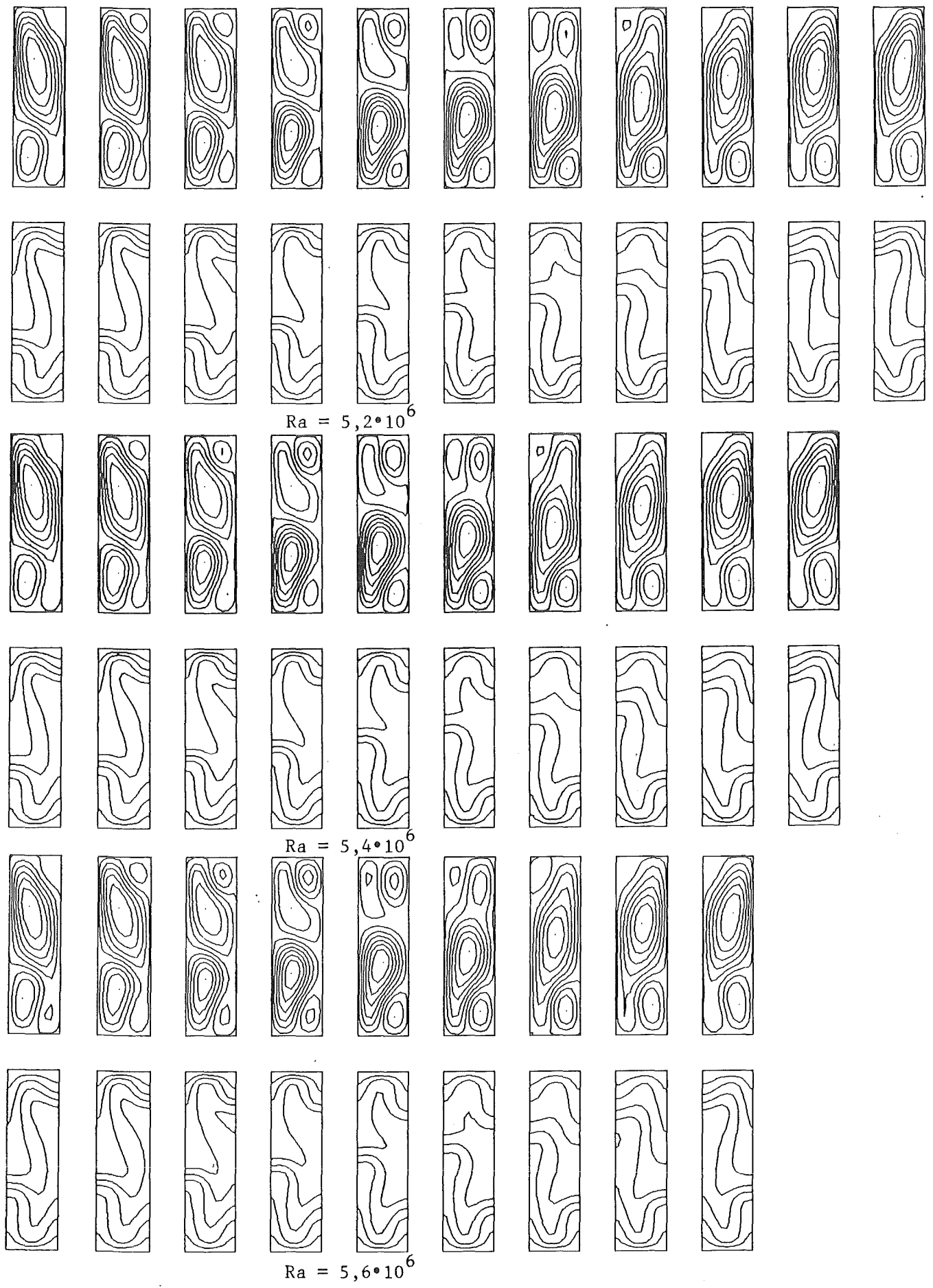


Abb. 15: Mode 3. Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld für verschiedene Rayleigh-Zahlen über jeweils etwa eine halbe Periode.

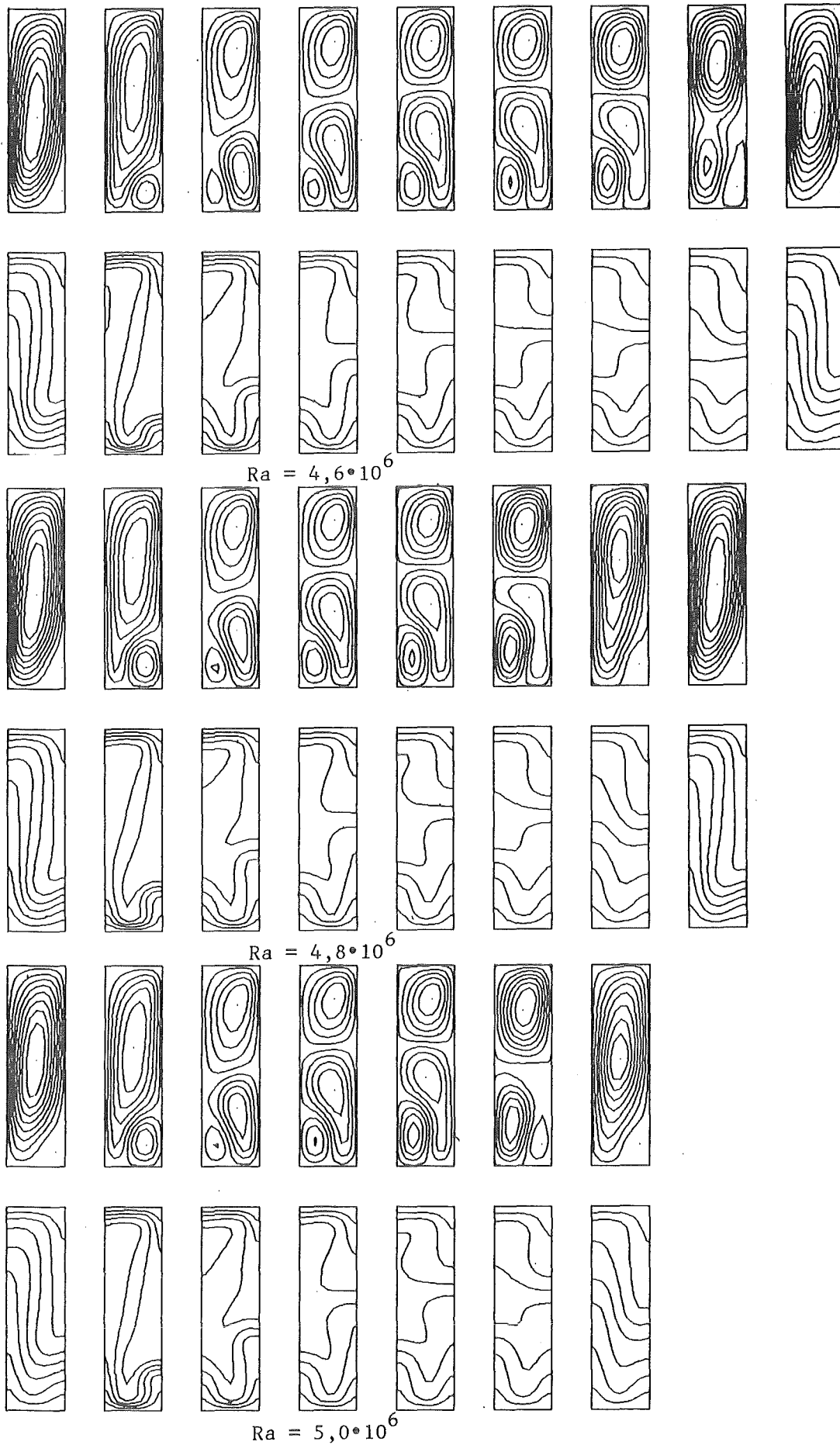


Abb. 16: Mode 4. Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld für verschiedene Rayleigh-Zahlen über jeweils etwa eine Periode.

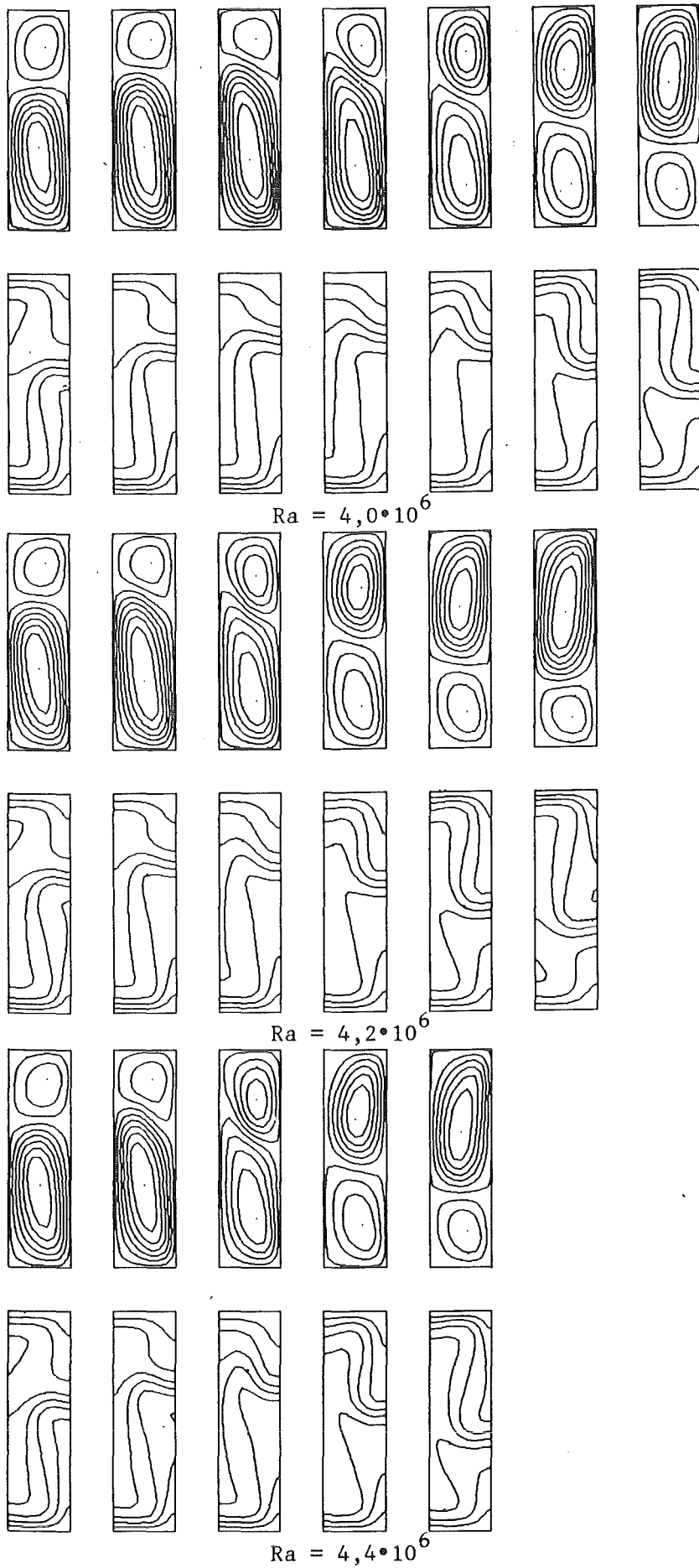


Abb. 17: Mode 5. Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld für verschiedene Rayleigh-Zahlen über jeweils etwa eine halbe Periode.

### 3.12 Quantitative Merkmale der verschiedenen Moden

Jeder Mode besitzt eine für ihn typische Wärmeübertragung und damit einen charakteristischen Verlauf der mittleren Nusselt-Zahlen bei Variation der Rayleigh-Zahl. Das folgende Diagramm (Abb. 18) gibt für eine feste Rayleigh-Zahl an, welche verschiedenen Zustände langfristig stabil sind.

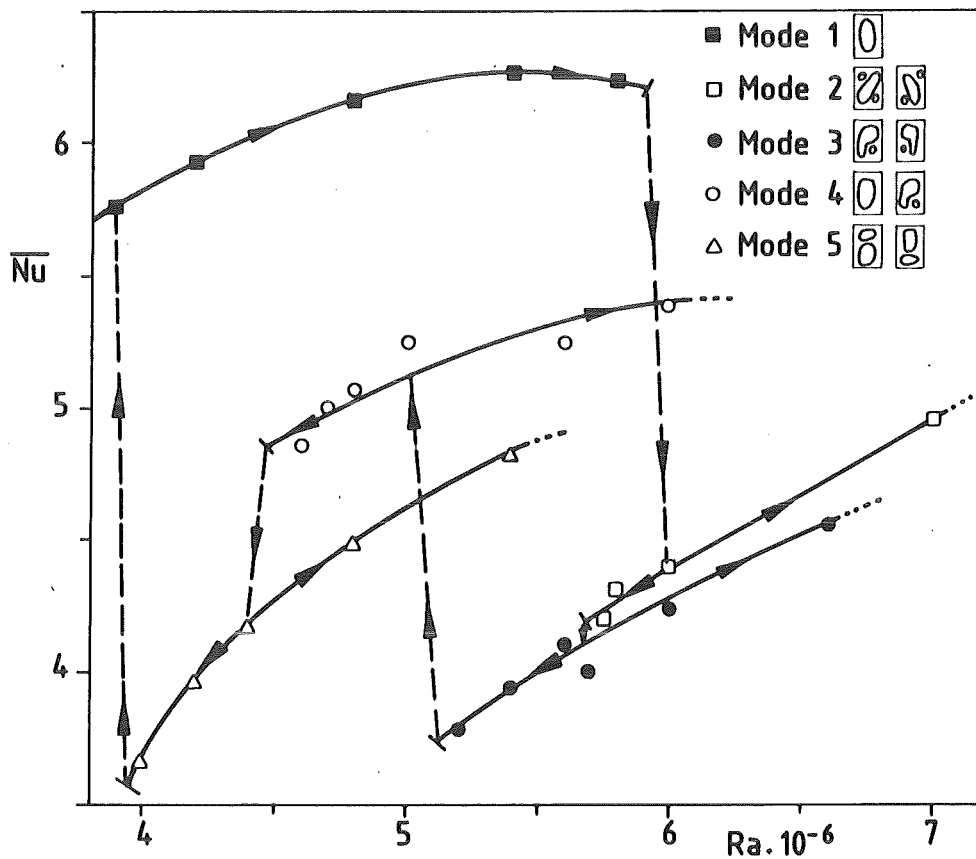


Abb. 18: Verlauf der mittleren Nusselt-Zahlen über der Rayleigh-Zahl im Grundversuch. Punkte sind numerische Ergebnisse, die Kurven sind angepaßt.

Wie aus Abb. 18 ersichtlich ist, zeigt Mode 1 die beste Wärmeübertragung. Dies ist einleuchtend, da die Zirkulation der stationären Einfachrolle über die gesamte Breite der Zelle und in die volle Höhe bis weit an die horizontalen Berandungen heran wirksam ist, so daß viel Wärme aus den unteren Schichten auf direktem Wege an den oberen Rand transportiert wird und umgekehrt kalte Flüssigkeit bis weit nach unten gelangt. Da es sich um den stationären Fall handelt, ändert sich das Strömungsmuster - und somit die Bedingung für den Wärmeaustausch - nicht. Die Nusselt-Zahlen aller oszillierenden Strömun-

gen liegen tiefer als bei Mode 1, da eine ständige Umstrukturierung des Strömungsmusters erfolgt und in Teilbereichen des Fluidkörpers die Wärmeübertragung in stärkerem Maße durch Wärmeleitung erfolgen muß.

Mode 4 hat zeitweise den Strömungscharakter von Mode 1 und ist daher zeitweise ähnlich effektiv bezüglich der Wärmeübertragung wie der Grundmode 1. Er hat die höchste mittlere Nusselt-Zahl der Oszillationen. Die nächstniedrigere mittlere Nusselt-Zahl besitzt Mode 5. Hier nehmen die Wirbel von der Breite her immer den vollen Raum ein, es besteht jeweils immer nur eine Temperaturgrenzschicht zwischen den beiden Wirbeln, in der die Wärmeübertragung weitgehend nur durch Wärmeleitung erfolgt. Mode 2 führt zu einer schlechteren Wärmeübertragung. Die große Rolle wird im Bereich der horizontalen beheizten Ränder immer durch zwei kleinere Wirbel eingenommen und weiterhin im Mittenbereich der Zelle zu einem bestimmten Zeitpunkt eingeschnürt und zerteilt. Außerdem wird ein beträchtlicher Teil der von den kleinen Rollen von der horizontalen Berandung aufgenommenen bzw. abgegebenen Wärme rezirkuliert und kann höchstens durch Wärmeleitung im Mittenbereich an das Fluid des großen Wirbels weitergegeben werden. Ähnliche Betrachtungen gelten auch für Mode 3, der die niedrigsten mittleren Nusselt-Zahlen besitzt.

Diese Rangfolge im Betrag der mittleren Nusselt-Zahlen ist eng korreliert mit der der maximalen Geschwindigkeitsbeträge der Moden. Integriert man diese maximalen Geschwindigkeitsbeträge über jeweils eine Periode, so ergibt sich bei konstanter Rayleigh-Zahl dieselbe Reihenfolge im Betrag, wie bei den Nusselt-Zahlen. Dies wird aus Abb. 19 ersichtlich.

Ein weiteres Charakteristikum der oszillierenden Strömungen ist die Periodendauer einer Schwingung. Nach einem Modell von Howard /9, 10, 12/ ist eine typische Abhängigkeit der Periodendauer von der Rayleigh-Zahl nach Beginn der Oszillationen, welche nach der Vorstellung von Howard durch eine Instabilität der Temperaturgrenzschichten verursacht werden, durch die Beziehung

$$\tau^* \sim Ra^n \quad \text{mit} \quad n \approx -2$$

für poröses Medium gegeben. Trägt man die dimensionslose Periodendauer der oszillierenden Moden des Grundversuchs über der Rayleigh-Zahl in einem doppellogarithmischen  $\tau^*$ -Ra-Diagramm auf (Abb. 20), so können Anfangssteigungen zwischen -3 und -5 abgelesen werden. Ob die Ursache des Instabilwerdens der



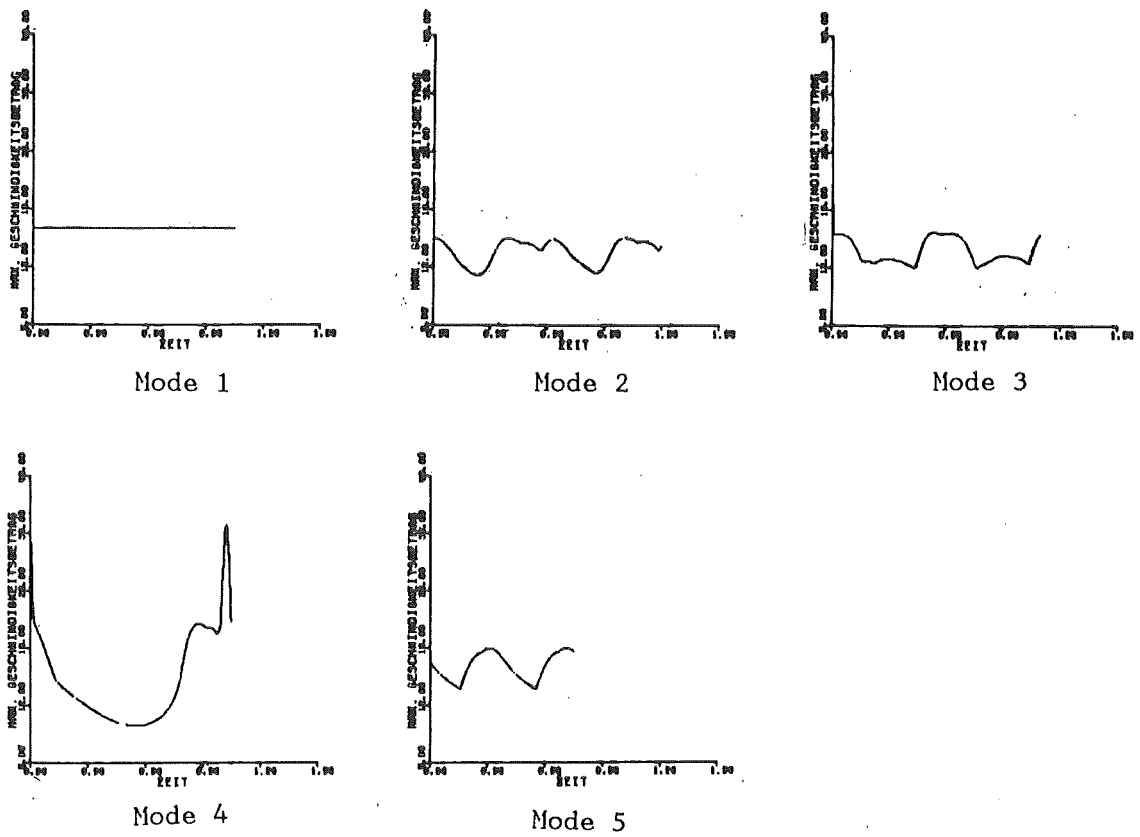


Abb. 19: Maximale Geschwindigkeitsbeträge der verschiedenen Moden über jeweils etwa eine Periode bei  $Ra = 5,8 \times 10^6$ .

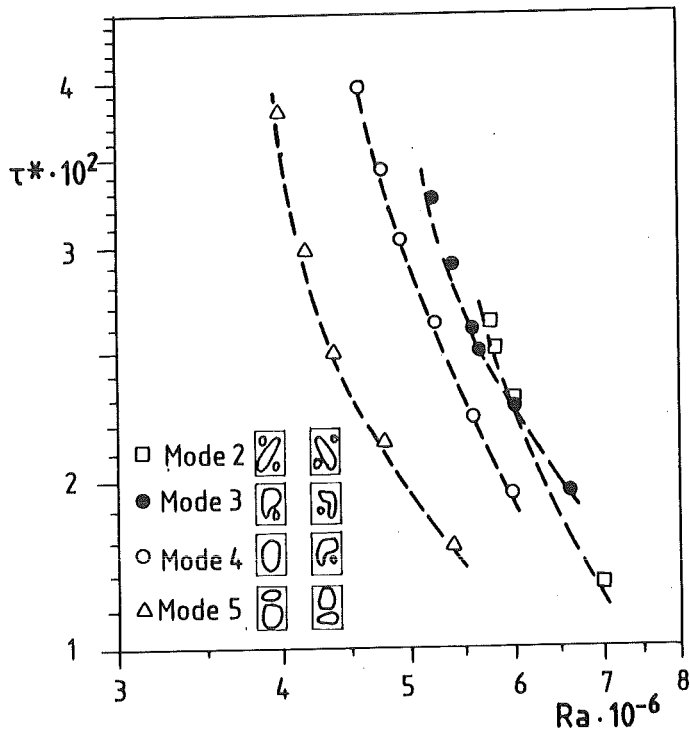


Abb. 20: Dimensionslose Periodendauer über der Rayleigh-Zahl.

stationären Strömung in einer Instabilität der thermischen Grenzschicht liegt, kann aufgrund dieses Ergebnisses nicht sicher geschlossen werden. Aufgrund einfacher Dimensionsbetrachtungen und des Howard'schen Modell müßte für den Hele-Shaw Spalt die Beziehung  $\tau \sim Ra^{-2}$  gelten (vgl. Koster /14/).

### 3.2 Isotherme Seitenwände

Koster führte seine Experimente mit Glasscheiben durch, deren thermische Ankopplung an das Fluid zwischen den beiden Idealfällen adiabater und perfekt wärmeleitender Seitenwände liegt. Um diesen experimentellen Fall einzugrenzen, soll nach dem adiabaten Fall nun ein anderer Extremfall, nämlich perfekt wärmeleitende breite Seitenwände (Fenster), untersucht werden. Die schmalen Seitenwände (Stege) sollen weiterhin adiabat und die Ober- und Unterseite des Fluidvolumens isotherm sein.

Das in Abschnitt 2.2 zusammengestellte Gleichungssystem (2.13) wurde mit einer Programmvariante gelöst. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Rechnungen sind die folgenden:

- In einem Rayleigh-Zahlbereich, in dem bei adiabaten Seiten die vielfältigen Strömungsformen auftreten, liegt bei perfekt wärmeleitenden Fenstern noch reine Wärmeleitung vor. Das Einsetzen der Konvektion liegt nun bei der kritischen Rayleigh-Zahl  $Ra = 5,2 \times 10^7$ .
- Der stationäre Mode 1 ist modifiziert (Abb. 21). Die parallel zur Spalthöhe orientierte Einfachrolle des Grundversuches ist hier zu einer Seite geneigt. Orientierung nach links oder nach rechts ist möglich (Abb. 22). Mit steigender Rayleigh-Zahl nimmt die Neigung der Rolle zu, in den diagonal gegenüberliegenden Ecken bilden sich kleine Wirbel aus.

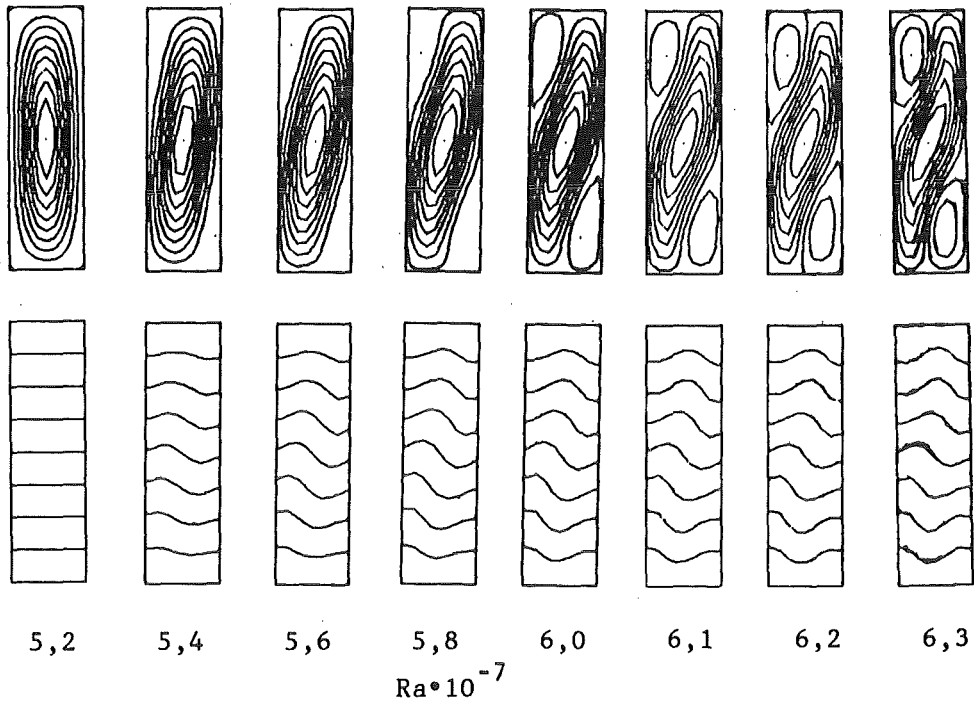


Abb. 21: Mode 1 bei perfekt wärmeleitenden Fenstern für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

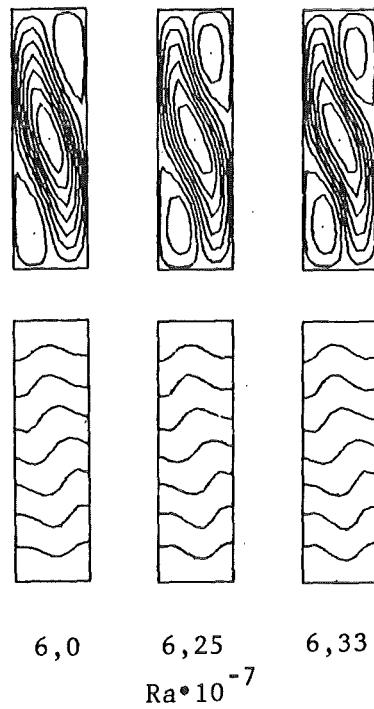


Abb. 22: Mode 1 mit umgekehrter Orientierung für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

- Mode 1 geht bei Vergrößerung der Rayleigh-Zahl bei  $Ra = 6,3 \times 10^7$  stetig in Mode 2 über, der den Charakter Diagonalszillation aufweist (Abbn. 23, 24).

Aufgrund der veränderten thermischen Randbedingung ist jedoch das Temperaturprofil stark verändert. Das Bereichsende der Diagonalszillation konnte bei der Wahl von  $9 \times 33$  Maschen wegen zu geringer Auflösung bei höheren Rayleigh-Zahlen nicht erfaßt werden. Abbildungen 23 und 24 zeigen für  $Ra = 6,4 \times 10^7$  und  $Ra = 6,8 \times 10^7$  die berechneten Strömungen.

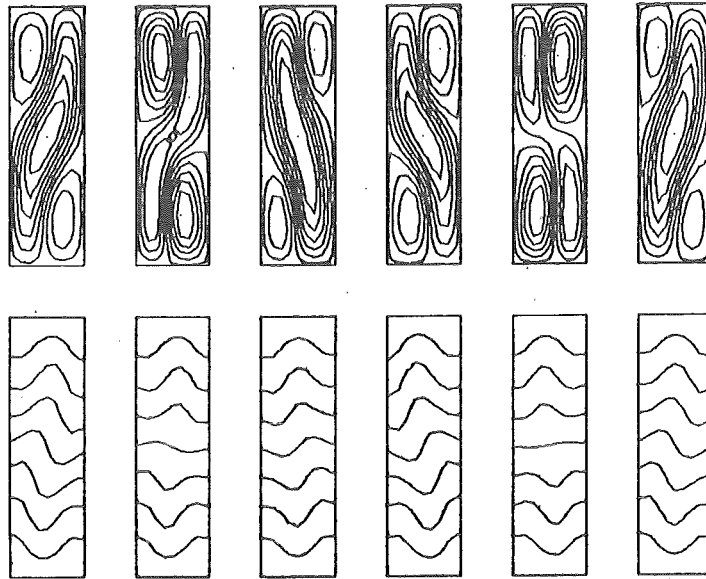


Abb. 23: Mode 2 bei  $Ra = 6,4 \times 10^7$  über etwa eine Periode.

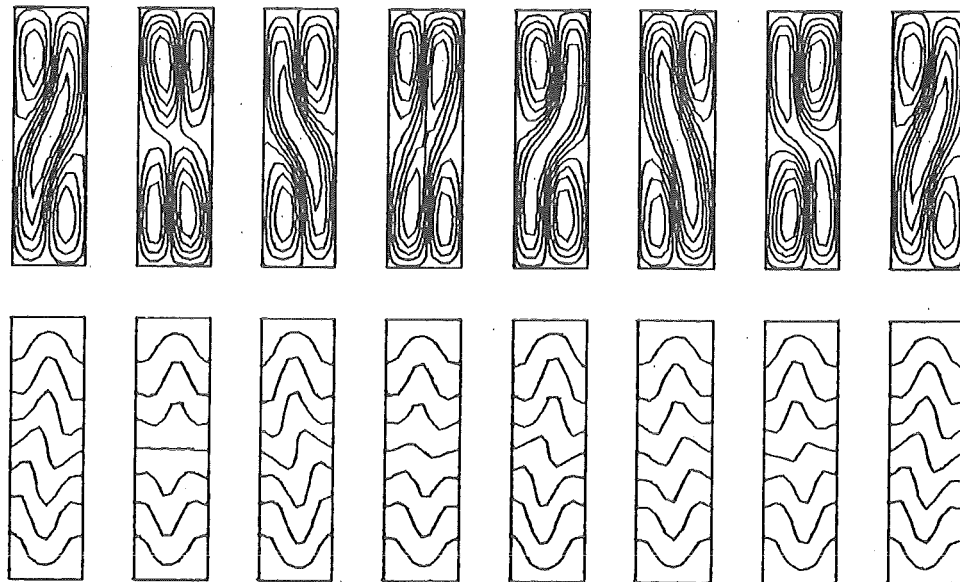


Abb. 24: Mode 2 bei  $Ra = 6,8 \times 10^7$  über etwa eine Periode.

- Die Moden 3, 4 und 5 des Grundversuches treten nicht wieder auf, auch nicht in modifizierter Form.

- Die stationäre Doppelrolle, Mode 6, tritt bei großen Sprüngen in der Rayleigh-Zahl über einen weiten Bereich auf. Zwei Richtungsorientierungen sind möglich (Abb. 25).

- Bei  $Ra = 5,65 \times 10^7$  geht Mode 6 sprunghaft (unstetig) in Mode 1 über.

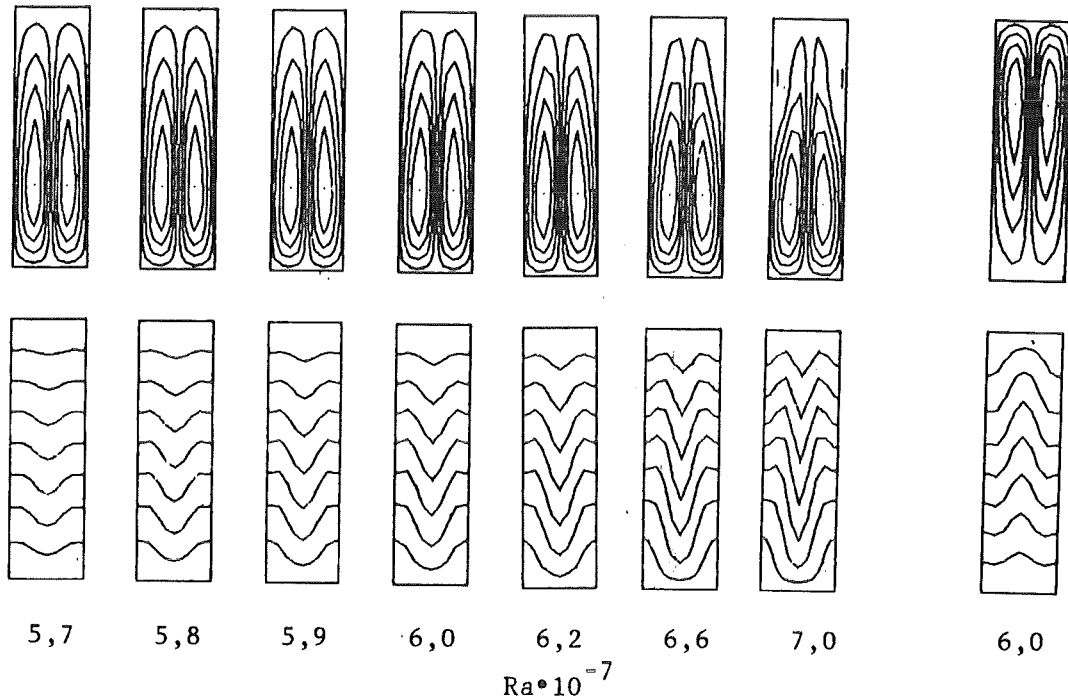


Abb. 25: Mode 6 (stationäre Doppelrolle) bei verschiedene Rayleigh-Zahlen.

Abbildung 26 zeigt die Rayleigh-Zahl-abhängigen Nusselt-Zahlen der nun auftretenden Moden.

Mode 6 erweist sich als besonders stabil. Im Übergangsbereich von Mode 1 zu Mode 2 stellt sich Mode 6 auch für kleine Rayleigh-Zahlsprünge ein, so daß die Moden 1 und 2 in diesem Bereich nur durch kleinste Variation der Rayleigh-Zahl (Größenordnung  $10^4$ ) erhalten werden können. Um dennoch einen größeren Rayleigh-Zahlbereich mit vertretbarem Aufwand überstreichen zu können, wird das im folgenden beschriebene Verfahren angewandt. Mit einer Programmvariante wird eine Zwangssymmetrisierung vorgenommen, die nur inversionssymmetrische Lösungen zuläßt. Dadurch wird Mode 6 ausgeschlossen. Mit dieser Variante kann nun ein größerer Rayleigh-Zahlsprung, ausgehend von Mode 1 oder 2, vorgenommen werden, ohne sofort in Mode 6 zu springen. Mit der Zwangssymmetrisierung wird bei der neuen Rayleigh-Zahl nun so lange weiterge-

rechnet, bis ein eingeschwungener Zustand von Mode 1 oder 2 erreicht ist. Nun wird die Zwangssymmetrisierung wieder aufgehoben, die eingestellten, relativ "schwach" stabilen Zustände bleiben erhalten.

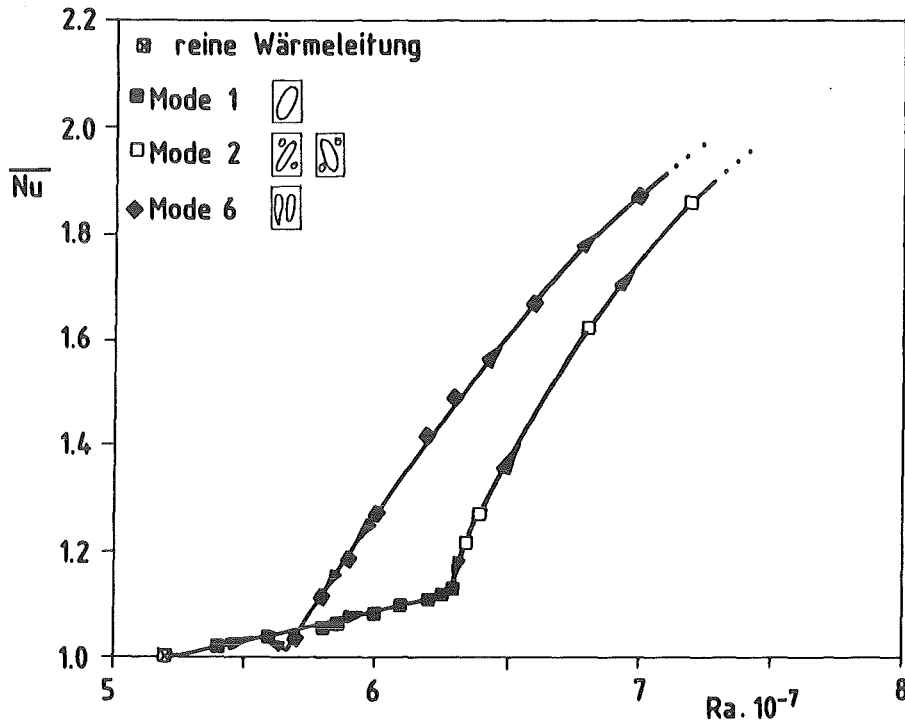


Abb. 26: Mittlere Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl.  
Perfekt wärmeleitende Fenster.

Bei Mode 6 weichen auch im Falle perfekt wärmeleitender Fenster die oberen und unteren Nusselt-Zahlen stark voneinander ab. Hier kann die Energieerhaltung dennoch gewährleistet sein, da Wärmefluß über die Fenster nun zulässig ist.

### 3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse für adiabate und perfekt wärmeleitende Seitenwände

Die zahlenmäßigen Resultate können wie folgt zusammengefaßt werden: Ein Vergleich der Ergebnisse mit Experimenten (Tabelle 1) zeigt, daß die Ergebnisse der idealen thermischen Randbedingungen, adiabat und perfekt wärmeleitend, die experimentellen Ergebnisse eingrenzen. Die Ursache der scheinbaren Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment liegen also in der unterschiedlichen Berücksichtigung der thermischen Wechselwirkung des Fluids mit den Fenstern.

Für den relativ kleinen untersuchten Bereich von Rayleigh-Zahlen, für den hier die Diagonaloszillation untersucht wurde, ergab sich als typischer Exponent  $n$  in der Relation  $\tau^* \sim Ra^{-n}$  für die dimensionslose Periodendauer  $\tau^*$  ein Wert von 3.

	Beginn der Konvektion	Beginn der Oszillation bei Erhöhung von $Ra$
Rechnung, adiabate Stege und Fenster	$1,0 \times 10^6$	$5,9 \times 10^6$
Experiment, Stege und Fenster aus Plexiglas		$2,78 \times 10^7$
Experiment, Stege aus Kupfer, Fenster aus Glas	$1,3 \times 10^7$	$4,9 \times 10^7$
Rechnung, Stege adiabatisch und Fenster perfekt wärme- leitend	$5,2 \times 10^7$	$6,3 \times 10^7$

Tab. 1: Vergleich theoretisch und experimentell ermittelter kritischer Rayleigh-Zahlen

Die Annahme adiabater Fenster und Stege unterschätzt den Einfluß der Seiten. Durch den Wärmefluß über die seitlichen Ränder wird die Strömung gedämpft, der Beginn der Konvektion zu höheren Rayleigh-Zahlen hin verschoben.

Bei den dimensionslosen Periodendauern für beginnende Oszillation ist das Ergebnis ähnlich. Auch hier werden die experimentell ermittelten Werte durch die Rechnungen eingegrenzt. Wie aus Tabelle 2 ersichtlich, nimmt die Periodendauer mit verbesserter Wärmeleitfähigkeit der Wände ab. Dies hat Koster /14/ experimentell bestätigt.

	dimensionslose Periodendauer $\tau^*$
Rechnung, adiabate Stege und Fenster	$2,62 \times 10^{-2}$
Experiment, Stege aus Kupfer, Fenster aus Glas	$3,05 \times 10^{-3}$
Rechnung, Stege adiabat und Fenster perfekt wärmeleitend	$5,00 \times 10^{-3}$

Tab. 2: Vergleich experimentell und theoretisch ermittelter dimensionsloser Periodendauern für beginnende Oszillation

Wie diese Ergebnisse zeigen, überschätzt die modellhafte Annahme perfekt wärmeleitender Fenster die thermische Wechselwirkung des Fluids mit der Be-  
randung. Die Annahme adiabater Seiten hingegen ist eine starke Unterschätzung  
des thermischen Einflusses. Der Realzustand liegt dazwischen. Dies könnte im  
mathematischen Modell durch die Einführung eines Faktors vor dem Wärmeüber-  
gangskoeffizienten berücksichtigt werden.

### 3.4 Ursachen für das Einsetzen der instationären Strömung

Es gibt mehrere Vorstellungen, die das Instabilwerden der stationären  
Strömung und das Auftreten von Oszillationen zu erklären versuchen. Das schon  
zitierte Modell von Howard sieht die Ursache dafür in einer Instabilität der  
oberen und unteren Temperatur-Grenzschicht. Dem Modell von Howard liegen die  
folgenden Vorstellungen zu Grunde:

Bei reiner Wärmeleitung liegt ein lineares Temperaturprofil über die Spalt-  
höhe vor. Die einsetzende Konvektion verformt nun das lineare Temperaturpro-  
fil zu einem S-Schlag-Profil mit steilen Gradienten in der Nähe der horizon-  
talen Ränder und einem Plateauverhalten im Mittenbereich. Je stärker die  
Konvektion, desto steiler ist der Temperaturgradient in der Wandnähe und umso  
mehr nimmt die Strömung Grenzschichtcharakter an. In der Zirkulationsströmung  
der Zelle werden heiße Teilchen vom unteren Rand nach oben befördert. Da im  
Randbereich die Strömungsgeschwindigkeit gering ist, wird zur Aufrechterhal-



tung dieses Zustandes durch Leitung aus dem Rand über die Dicke der Grenzschicht Wärme zugeführt. Für die Temperatur-Grenzschicht an den horizontalen Berandungen kann bei gegebenen Stoffdaten, Dicke der Grenzschicht und Temperaturdifferenz die Frage der Stabilität gestellt werden. Es wird nun angenommen, daß die horizontale Temperaturgrenzschicht oberhalb einer mit der Grenzschichtdicke gebildeten kritischen Rayleighzahl mit dem Wert  $10^3$  nicht mehr stabil sein kann. Diese Instabilität muß sich durch eine zeitliche Veränderung der Isothermen in Wandnähe bemerkbar machen. Eine charakteristische Zeit kann nun berechnet werden, die notwendig ist, um das durch das Abströmen heißer Teilchen gestörte Temperaturfeld wieder aufzubauen. Diese Zeit bestimmt möglicherweise die Periodendauer der Oszillationsbewegungen im Hele-Shaw-Spalt.

Wenn diese Vorstellung über die Instabilität der thermischen Grenzschicht richtig wäre, so müßte das instationäre Abfließen heißer Fluidteilchen aus der Grenzschicht durch eine Welligkeit der Isothermen in der Grenzschicht sichtbar sein. Koster konnte diese Welligkeiten in den Isothermen in einem Plexiglasbehälter mit dem Geometrieverhältnis Höhe: Breite von 1,7 : 1,0 sichtbar machen. Deutlich waren periodisch wandernde Wellen sichtbar. Für adiabate seitliche Berandungen sollten nun unter Verwendung der vollständigen Impulsgleichungen diese Welligkeiten der thermischen Grenzschicht auch im numerischen Experiment gezeigt werden, und zwar für den Hele-Shaw-Spalt mit dem Höhen- zu Breitenverhältnis 7:2. Untersucht wird die Diagonalszillation bei unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen mit einer sehr hohen örtlichen Diskretisierung durch die Verwendung eines Maschennetzes mit 36 x 129 Maschen. Dennoch wurde eine Welligkeit der Isothermen nicht sichtbar. Es war jedoch eine periodische Auf- und Abbewegung der Isothermen in der Nähe der Ecken zu beobachten. Dies deutet darauf hin, da bei dem schmalen Spalt der Effekt zu den vertikalen seitlichen Rändern hin verschoben auftritt.

Ein Aufzeichnen der lokalen Temperatur- und Geschwindigkeitssignale in der Nähe der Eckpunkte macht eine zeitliche Korrelation der Temperaturschwankungen sichtbar (Abb. 27a,b,c). Die Temperatursignale an allen vier Ecken sind etwa gleich, d.h. sie enthalten dieselben Frequenzen, lediglich die Höhen der Amplituden sind verschieden. Die Signale links unten und rechts oben, bzw. rechts unten und links oben sind jeweils phasengleich, bedingt durch die Inversionssymmetrie der Diagonalszillation. Zwischen den Signalen unten und

oben auf je einer Seite besteht eine Phasenverschiebung von einer halben Periode.

Wenn der Grund für das Nichtauftreten der Temperaturwellen tatsächlich eine zu geringe horizontale Erstreckung des Spaltes wäre, so müßte der Effekt bei Verbreiterung der Zelle auftreten. Die Rechnungen wurden daher für eine Hele-Shaw-Zelle mit dem Höhen- zu Breitenverhältnis 7:4, also der doppelten Breite des ursprünglichen Spaltes wiederholt. Startwert war die auf die neue Geometrie umgerechnete Lösung der Diagonalszillation aus dem Grundversuch. Welligkeiten in den Isothermen am oberen und unteren Rand sind nun deutlich sichtbar (Abb. 28). Diese Phänomene werden als eine Bestätigung der Vorstellung aufgefaßt, daß die Ursache für den Beginn der Oszillation im Auftreten einer Instabilität der horizontalen thermischen Grenzschicht liegt.

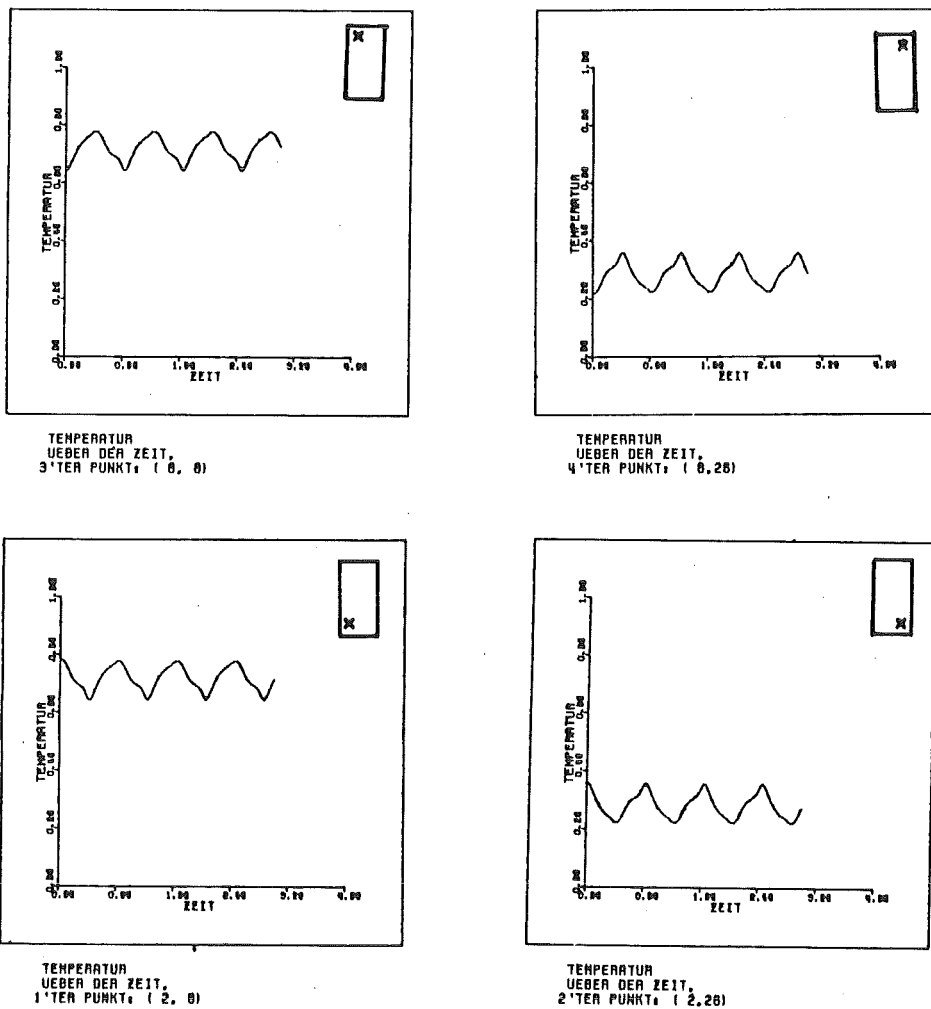
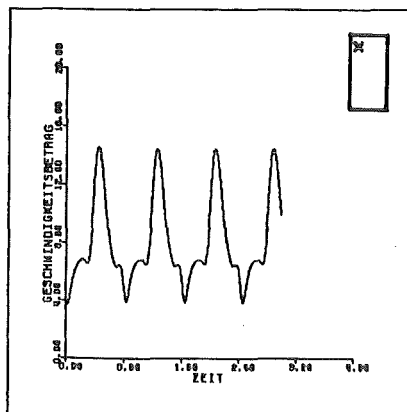
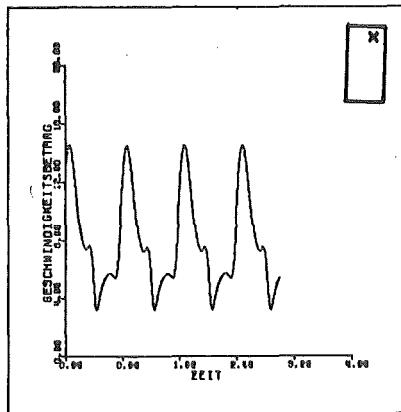


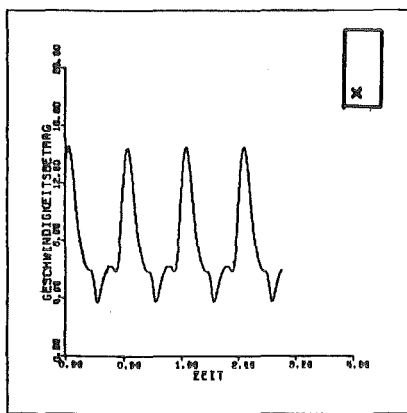
Abb. 27a: Lokale Temperatursignale über der Zeit in vier Eckpunkten.



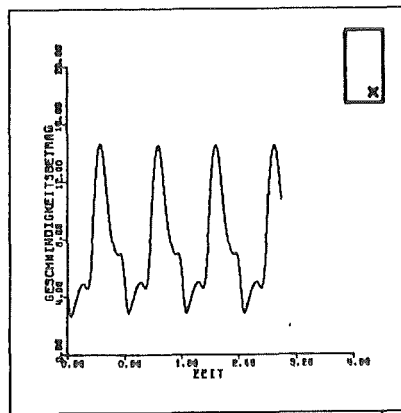
GESCHWINDIGKEITSBETRAG  
UEBER DER ZEIT,  
3'TER PUNKT: ( 0, 0)



GESCHWINDIGKEITSBETRAG  
UEBER DER ZEIT,  
4'TER PUNKT: ( 0,26)



GESCHWINDIGKEITSBETRAG  
UEBER DER ZEIT,  
1'TER PUNKT: ( 2, 0)



GESCHWINDIGKEITSBETRAG  
UEBER DER ZEIT,  
2'TER PUNKT: ( 2,26)

Abb. 27b: Lokale Geschwindigkeitssignale über der Zeit in vier Eckpunkten.

Rechnung für  $Ra = 7,0 \times 10^6$  mit  $18 \times 65$  Punkten.

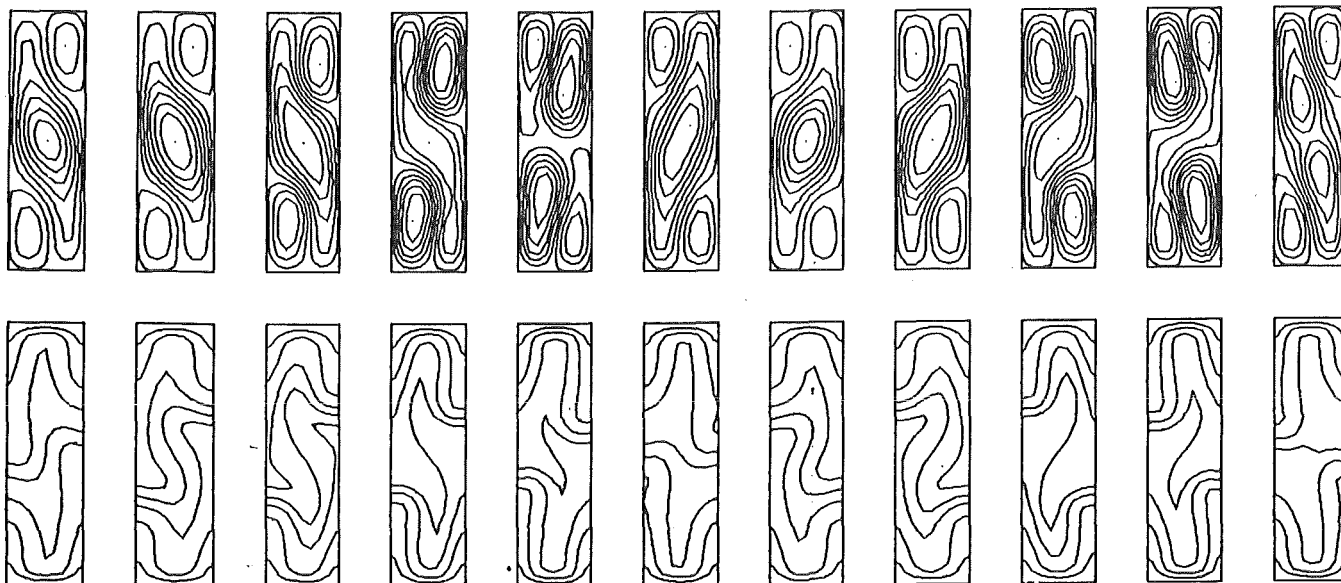


Abb. 27c: Zugehöriges Geschwindigkeits- und Temperaturfeld über eine Periode

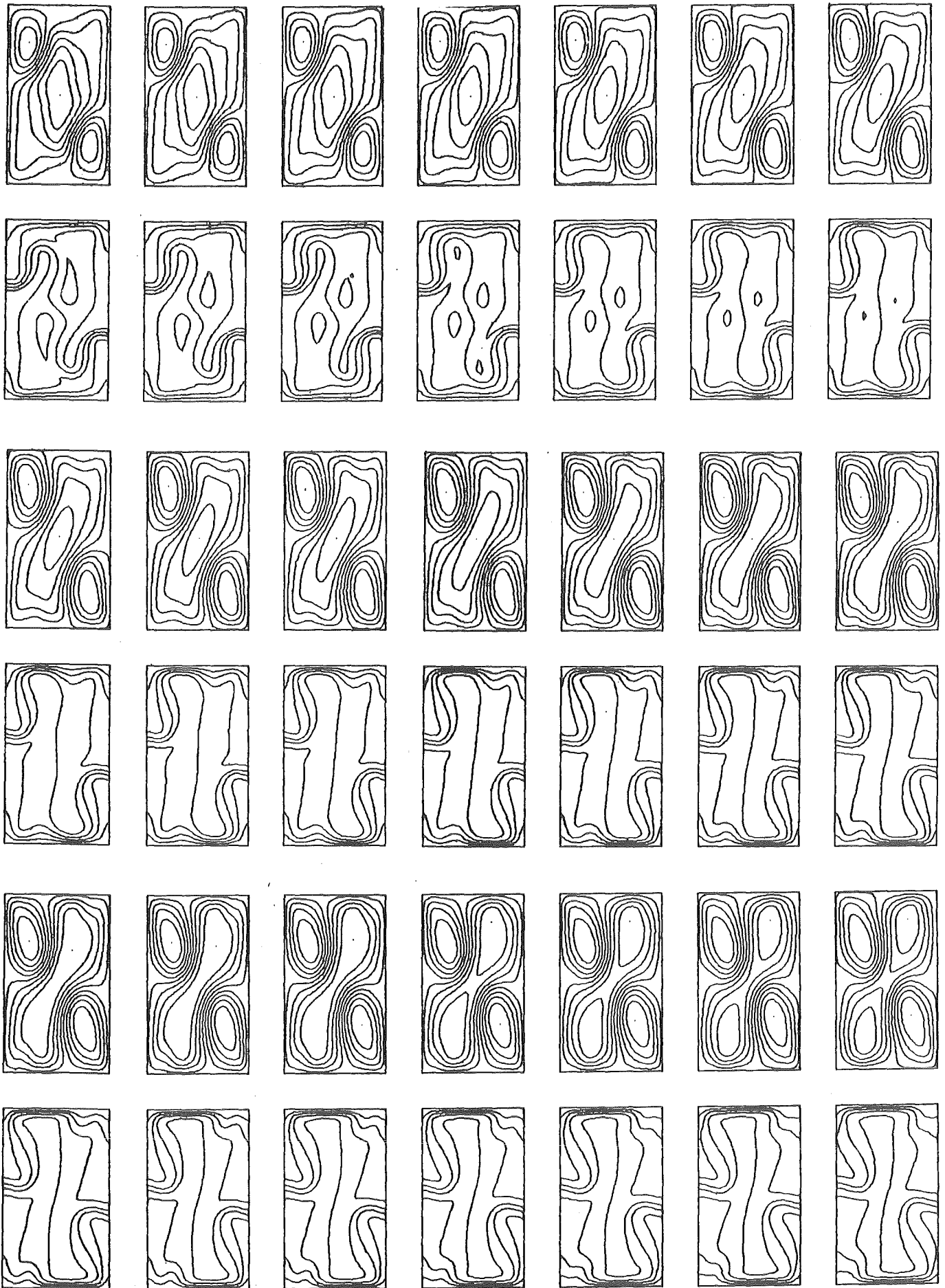


Abb. 28: Geschwindigkeits- und Temperaturfeld der Diagonalszillation bei dem Verhältnis Höhe:Breite = 7:4.

#### 4. Einfluß der physikalischen Parameter

##### 4.1 Trägheitsterme in den Impulsgleichungen

Um herauszufinden, welche Terme des zu lösenden Gleichungssystems dominant sind und welche vernachlässigt werden können, werden verschiedene Rechnungen durchgeführt. Dabei werden die Seitenwände jeweils als adiabatisch angenommen. Das Maschennetz  $9 \times 33$  und die Standardzeitschrittweite  $\Delta t$  werden verwendet. Jeweils unterschiedliche Terme werden sodann in den einzelnen Läufen vernachlässigt.

Im ersten Versuchslauf dieser Serie werden die Trägheitsterme in den Impulsgleichungen gestrichen. Das zu lösende Gleichungssystem ohne die schon zuvor formulierten Randbedingungen lautet in diesem Fall

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla_{\ell}^2 u - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\nu}{k} u \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \nabla_{\ell}^2 v - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\nu}{k} v + g \alpha (T - T_0) \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \nabla_{\ell}^2 T \quad (4.1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1d)$$

Diese Gleichungen werden ebenfalls mit dem Rechenprogramm LEITH gelöst. Zum einen wird früher von einem Startwert aus durch langsame Variation der Rayleigh-Zahl hochgerechnet, zum anderen werden auch alte Lösungen der ursprünglichen Rechnung unter Einschluß der Trägheitsterme mit dieser Variante neu gestartet und bis zum neuen eingeschwungenen Zustand weitergerechnet. Die Übergangs-Rayleigh-Zahlen für die Sprünge zwischen den Moden wurden hier nicht bestimmt. Folgende Ergebnisse konnten erarbeitet werden:

- Alle Konvektionsmoden können wiedergefunden werden. Es treten keine zusätzlichen Moden auf.
- Die Beträge der mittleren Nusselt-Zahlen weichen nur unwesentlich von denen der ursprünglichen Situation für die einzelnen Moden ab. Abweichungen in beide Richtungen treten auf (siehe Abb. 29).

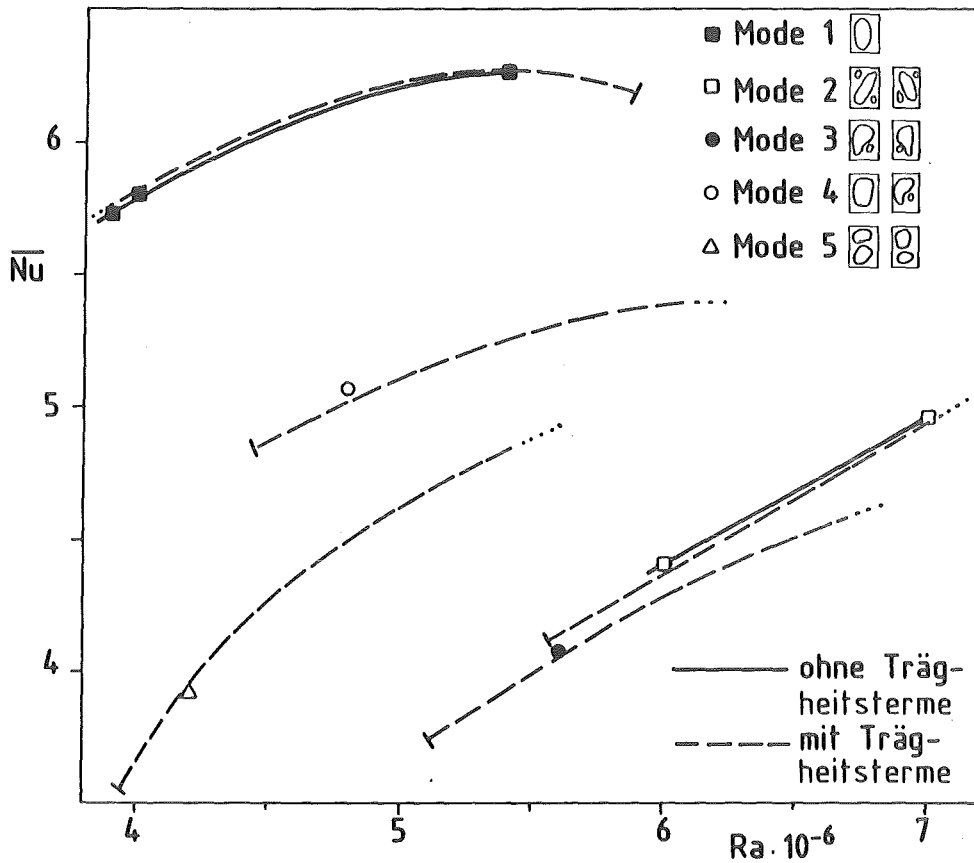


Abb. 29: Mittlere Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl. Vergleich der Grundrechnungen mit solchen mit Unterdrückung der Trägheitsterme in den Impulsgleichungen.

Diese Ergebnisse zeigen, daß der Einfluß der Trägheitsterme auf Strömungsform und Wärmeübertragung unwesentlich ist. Das bedeutet, daß die Trägheitsglieder in den Impulsgleichungen gestrichen werden können, ohne den physikalischen Sachverhalt der Lösungen grundlegend zu verändern. Diese Erkenntnis ist keineswegs überraschend, da es üblich ist, bei der numerischen Untersuchung von Strömungen in porösen Medien die Trägheitsglieder in den Impulsgleichungen zu vernachlässigen.

#### 4.2 Newton'scher Reibungsterm

In den Impulsgleichungen wird der Reibungsterm, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, in die Anteile "Newton'sche" und "poröse" Reibung zerlegt. In dieser Rechnung wird nun die Newton'sche Reibung null gesetzt, d.h. die Anteile der Reibung der Fluidschichten untereinander bezüglich der Flächenkoordinaten  $x, y$  und an den Stegen wird vernachlässigt. Die neuen Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{v}{k} u , \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{k} v + g \alpha (T - T_0) , \quad (4.2b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \nabla^2 T , \quad (4.2c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (4.2d)$$

Die Ergebnisse dieser Versuchsreihe:

- Nur die Moden 1 und 2 können wiedergefunden werden. Die nichtinversionssymmetrischen Moden 3, 4 und 5 treten nicht wieder auf.
- Mode 1 bleibt bis zu höheren Rayleigh-Zahlen erhalten als im Fall der Rechnungen mit Berücksichtigung der Newton'schen Reibungsterme. Der Beginn der Oszillation bei langsamer Erhöhung der Rayleigh-Zahl liegt nun bei dem höheren Wert  $Ra = 6,6 \times 10^6$  anstelle von  $Ra = 5,9 \times 10^6$  in der ursprünglichen Rechnung.
- Mode 1 geht nicht sprunghaft in Mode 2 über. Es findet vielmehr ein stetiger Übergang zu Mode 1a, einer oszillierenden Einfachrolle, statt. Die stationäre Einfachrolle beginnt bei  $Ra = 6,6 \times 10^6$  zu oszillieren, wobei sich die Rolle an den breiten Seiten periodisch einschnürt. Dieser Sachverhalt aus dem Geschwindigkeitsfeld ist in Abb. 30 ersichtlich. Das Bereichsende von Mode 1a kann wegen der unzureichenden Auflösung für hohe Rayleigh-Zahlen mit diesem Maschennetz nicht ermittelt werden.
- Mode 2 kann nur noch durch einen sehr großen Sprung in der Rayleigh-Zahl von Mode 1 aus oder durch Restart mit der Lösung des Modus 2 aus dem Grundversuch eingestellt werden. Die Grenzen des stabilen Existenzbereiches von Mode 2 wurden nicht ermittelt.

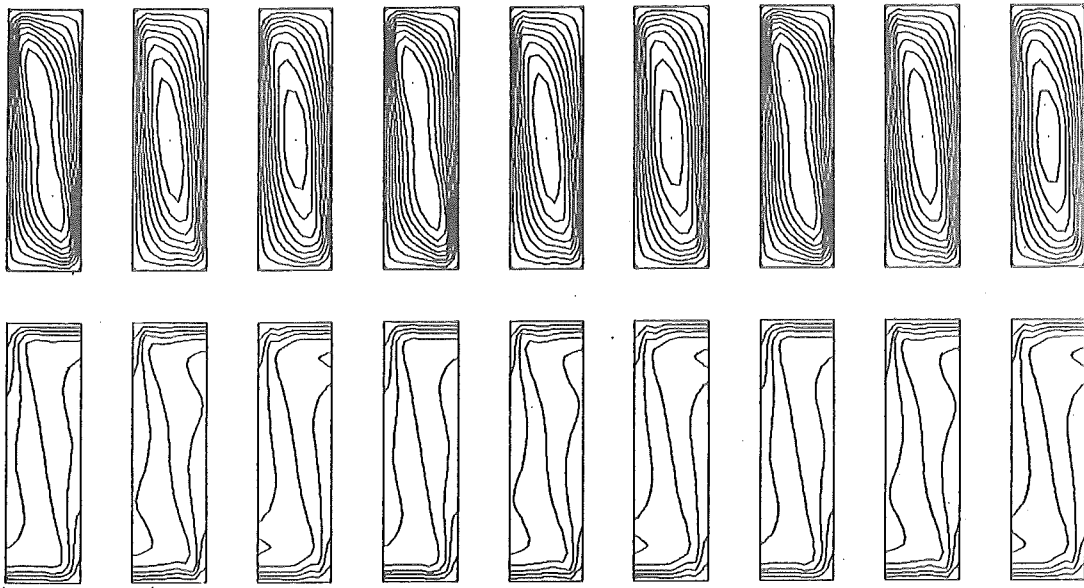


Abb. 30: Mode 1a (oszillierende Einfachrolle) bei  $Ra = 6,8 \times 10^6$  über etwa 3 Perioden. Geschwindigkeitsfeld über Temperaturfeld

- Das Strömungsmuster von Mode 2 ist hier etwas verändert. Die Diagonalszillation ist nun nicht mehr im zeitlichen Mittel symmetrisch, sie ist richtungsorientiert (Abb. 31).

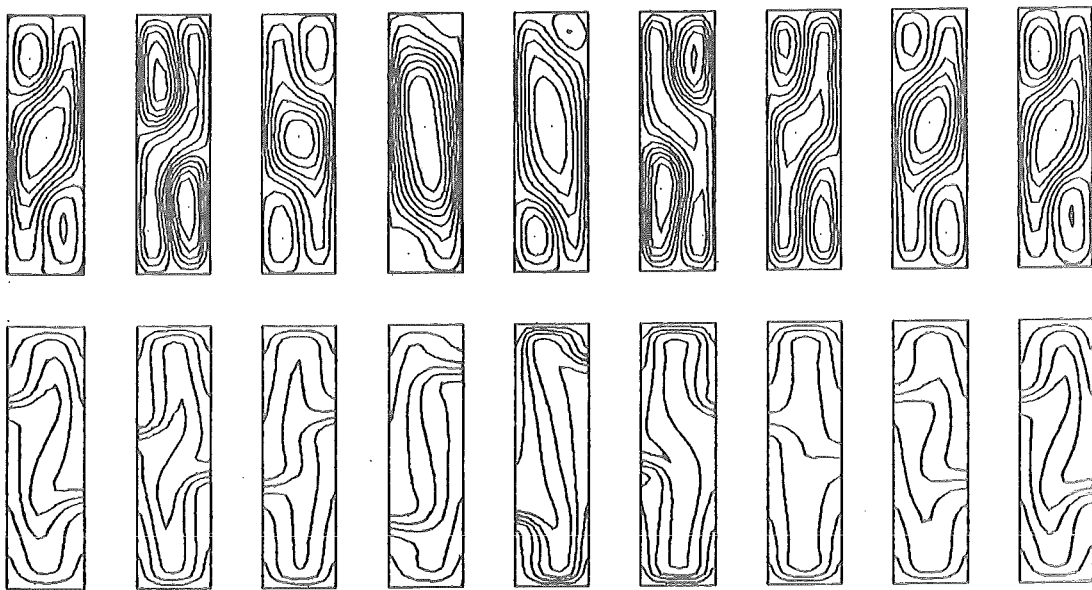


Abb. 31a: Mode 2 (Diagonalszillation) bei  $Ra = 6,0 \times 10^6$  über etwa eine Periode. Geschwindigkeitsfeld über Temperaturfeld.



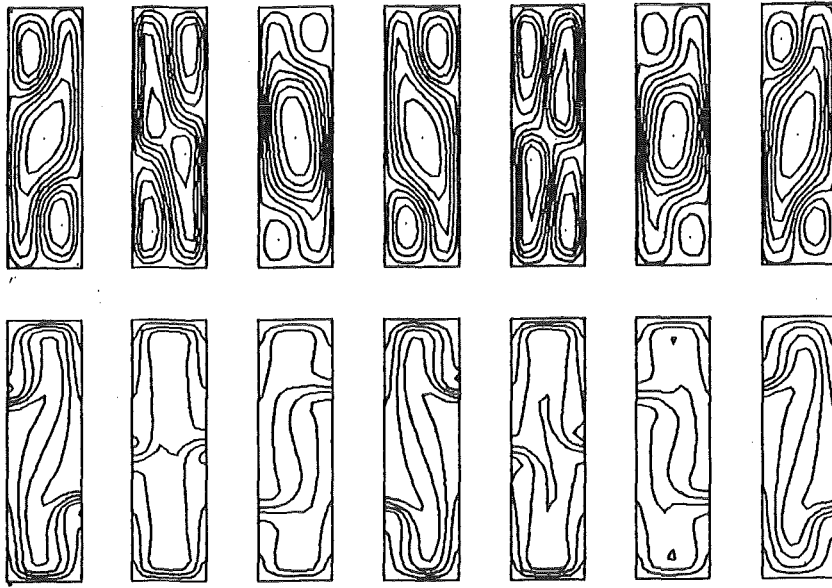


Abb. 31b: Mode 2 bei  $Ra = 7,0 \times 10^6$  über etwa eine Periode.

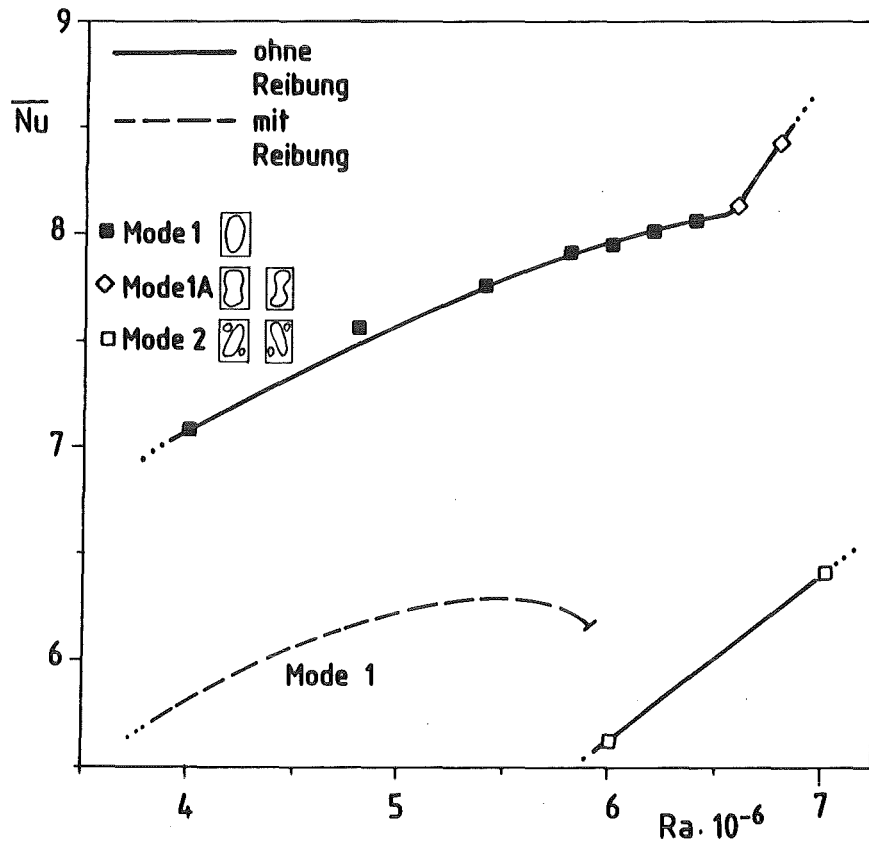


Abb. 32: Mittlere Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl. Vergleich zwischen den Grundrechnungen und solchen bei Vernachlässigung der Newton'schen Reibung.

- Die mittleren Nusselt-Zahlen liegen wesentlich höher als im Fall der ursprünglichen Modellgleichungen (Abb. 32). Der Grund dafür ist wahrscheinlich das Fehlen der Haftbedingung an den Seitenstegen des Spaltgefäßes. Dadurch werden höhere Geschwindigkeiten erreicht, außerdem kann die Strömung weiter in die Randzonen gelangen, wodurch ebenfalls der Wärmeaustausch verbessert wird.

Diese Ergebnisse zeigen, daß der Einfluß der Newton'schen Reibung bei der hier betrachteten schlanken Spaltgeometrie erheblich ist. Ihre Unterdrückung liefert stark veränderte Lösungen.

#### 4.3 Gleichungen nach dem Darcy-Gesetz

Unterdrückt man die Trägheitsterme in den Impulsgleichungen und den Newton'schen Reibungsanteil gleichzeitig, so erhält man die bekannten Darcy-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\nu}{k} u , \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\nu}{k} v + g \alpha (T - T_0) \quad (4.3b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \nabla^2 T , \quad (4.3c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (4.3d)$$

Die mit diesen Gleichungen durchgeführten Rechnungen brachten folgende Ergebnisse:

- Mode 1 und Mode 2 können wiedergefunden werden, jedoch auch hier bei höheren Rayleigh-Zahlen als im Grundversuch. Mode 2 ist richtungsorientiert (siehe Abb. 33).
- Die Moden 3, 4 und 5 treten nicht mehr auf.

- Der sprungartige Übergang von Mode 1 zu Mode 2 wird auch hier durch den kontinuierlichen Übergang zur oszillierenden Einfachrolle abgelöst. Mode 1a ist dem aus Kapitel 4.2 ähnlich (Abb. 34).
- Zusätzlich tritt ein weiterer Mode auf, die stationäre Doppelrolle (Mode 6). Es handelt sich um zwei schlanke Rollen, die parallel der Länge nach im Spalt liegen (Abb. 35).

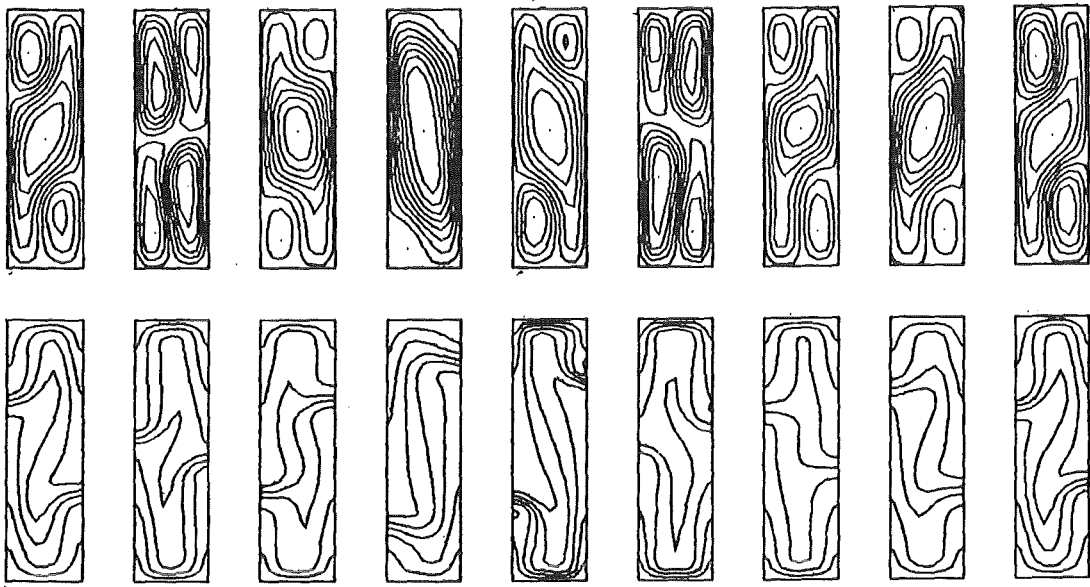
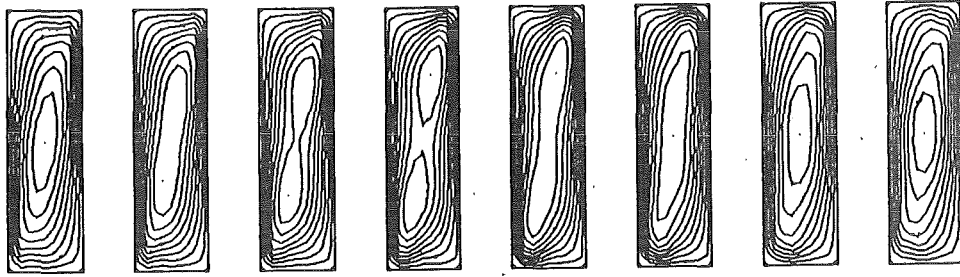
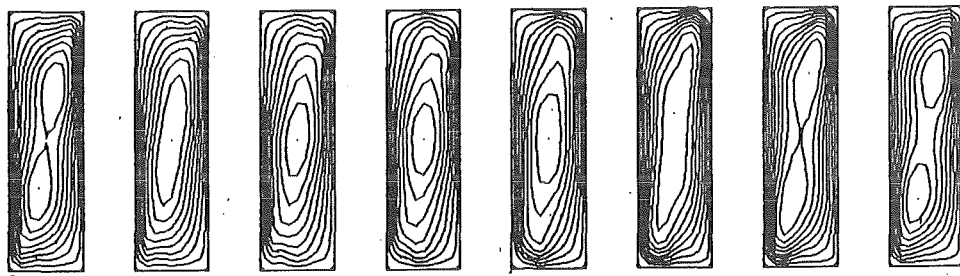
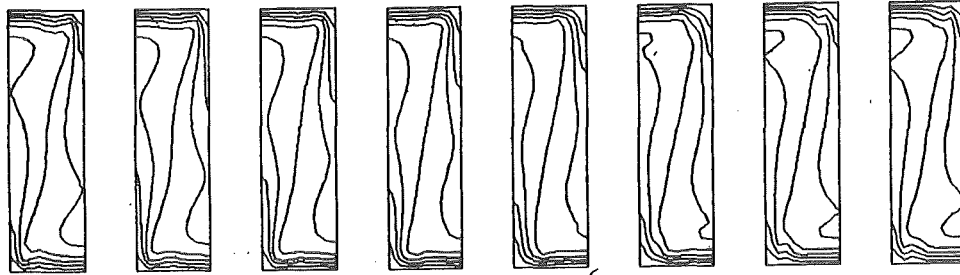


Abb. 33: Mode 2 bei  $Ra = 6,0 \times 10^6$ . Geschwindigkeitsfeld über Temperaturfeld.



$Ra = 7,0 \cdot 10^6$



$Ra = 7,4 \cdot 10^6$

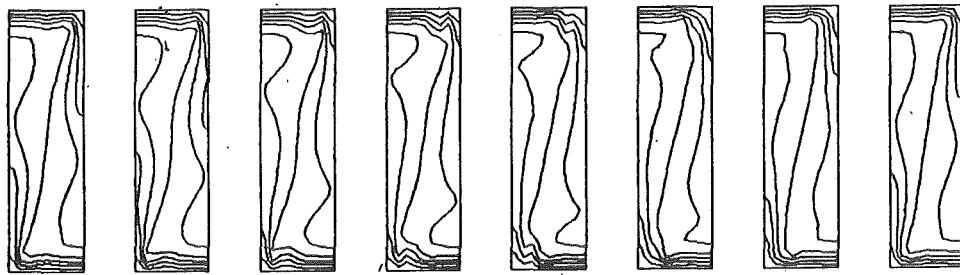


Abb. 34: Mode 1a (oszillierende Einfachrolle). Geschwindigkeitsfeld über Temperaturfeld.

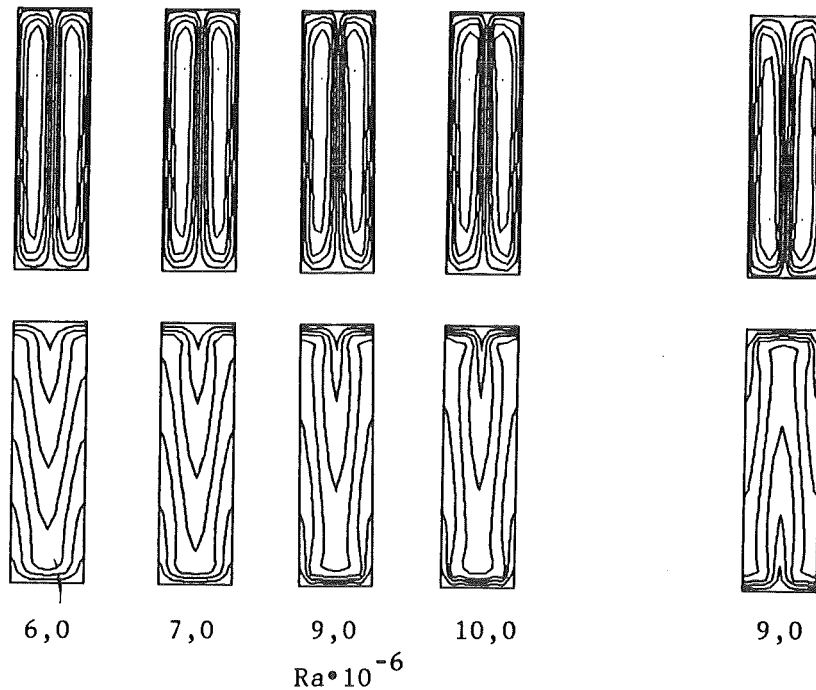


Abb. 35: Mode 6 (stationäre Doppelrolle) für verschiedene Rayleigh-Zahlen.  
Zwei Richtungsorientierungen sind möglich.

Bei der stationären Doppelrolle weichen die Nusselt-Zahlen, die über den unteren Rand gebildet werden, von denen über den oberen Rand bis zu Faktor 2 ab. Der Energieerhaltungssatz ist somit stark verletzt, da die Seiten adiabat angenommen sind, über sie also keine Wärme zu- oder abgeführt werden kann. Die Ursache für diese Inkonsistenz liegt in dem Sachverhalt, daß das Differenzverfahren nicht erhaltungstreu formuliert ist. Für diesen Mode ist daher das Programm überfordert, dieser Effekt ist also numerischer und nicht physikalischer Natur.

Der Existenzbereich der einzelnen Moden ist aus dem Nu-Ra-Diagramm (Abb. 36) ersichtlich.

Wie nach den Einzelergebnissen bei einer Unterdrückung der Newton'schen Reibung oder der Trägheitsterme zu erwarten war, führt die gleichzeitige Unterdrückung beider Terme zu einer Verstärkung der auftretenden Effekte. Die vollständigen Gleichungen (2.4) können bei der vorliegenden Geometrie nicht durch die einfacheren Darcy-Gleichungen ersetzt werden, ohne die physikalischen Verhältnisse grundlegend zu verändern. Die modellhafte Beschreibung des Experimentes von Koster unter Berücksichtigung der Newton'schen Reibung erscheint dagegen realistisch, da dabei, wie im Experiment, eine Vielfalt von Strömungsmustern auftritt.

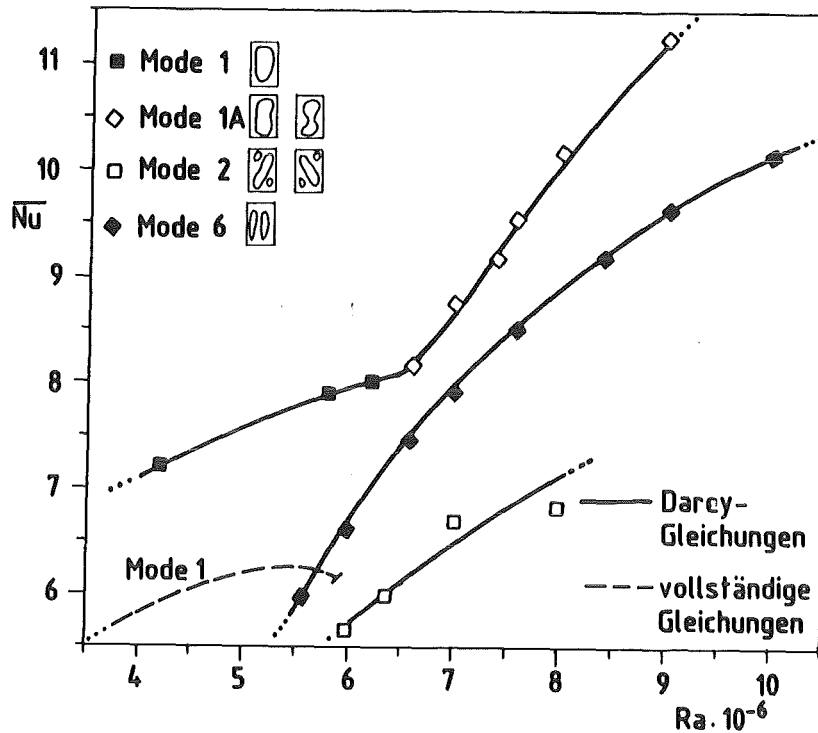


Abb. 36: Mittlere Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl. Vergleich der Versuche mit Verwendung der vollständigen Gleichungen (Grundversuch) und der Verwendung der Darcy-Gleichungen.

#### 4.4 Einfluß schwach unsymmetrischer thermischer Randbedingungen

In seinen Experimenten hatte Koster gefunden, daß bei den Diagonalszillationen in vielen Fällen die etwa auf halber Höhe liegende Austauschzone nach unten verschoben war. Dabei war es offen geblieben, ob diese Verschiebung eine Folge nicht vollständig realisierbarer thermischer Randbedingungen oder temperaturabhängiger Stoffwerte oder eine inhärente Eigenschaft der gefundenen Strömungen sei. Um die erstgenannte Möglichkeit zu überprüfen, wurden Rechnungen analog zu den Untersuchungen in Abschnitt 3.2 durchgeführt, bei denen das an den Fenstern anliegende Temperaturprofil nicht linear, sondern schwach parabolisch gewählt war bei ungeänderten Werten der Temperatur am unteren und oberen Rand. Die maximale Abweichung in halber Höhe war so, daß man dort eine Temperatur von  $0,48 ((T_u + T_o)/2)$  hatte. Das Ergebnis dieser Rechnungen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Die Isothermen werden nach unten hin stärker ausgebeult, die sogenannte mittlere Austauschzone wird jedoch nur geringfügig beeinflusst, sie bleibt im zeitlichen Mittel in halber Höhe der untersuchten Zelle. Abb. 37 zeigt das Ergebnis einer entsprechenden Rechnung für  $Ra = 6,4 \times 10^7$ .

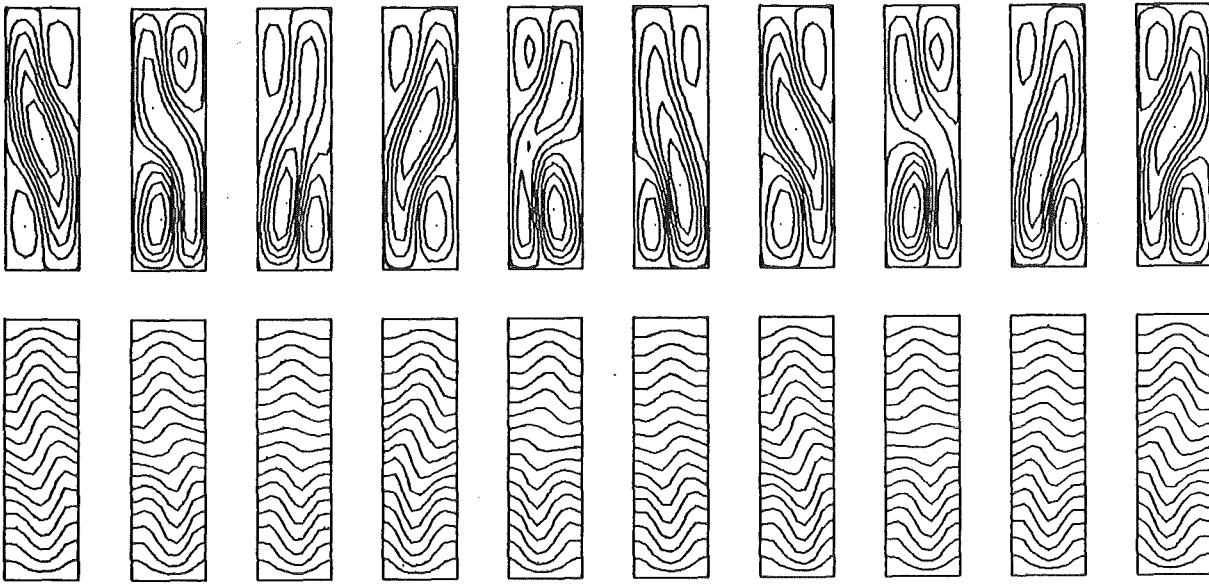


Abb. 37: Diagonaloszillation mit gestörtem linearem Temperaturprofil in den Fenstern,  $Ra = 6,4 \times 10^7$ .

## 5. Einfluß der numerischen Parameter

### 5.1 Einfluß der Zeitschrittweite

Wie aus den diskretisierten Gleichungen in Kapitel 2.3 ersichtlich ist, sind die Zeitschritte  $\Delta t$  und die Maschenweiten  $\Delta x$  und  $\Delta y$  numerische Einflußgrößen. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von diesen Größen muß untersucht werden.

Der Einfluß der gewählten Zeitschrittweite auf das Ergebnis ist von Bedeutung, da für die Variation der Maschenweite zur Einhaltung der numerischen Stabilitätsbedingungen  $\Delta t$  zwangsläufig in geeigneter Weise mitvariiert wird, sofern man bei großen Maschenweiten nicht mit unnötig langen Rechenzeiten arbeiten möchte.

Die vollständigen Gleichungen (2.6) werden für den Fall adiabater Seitenwände mit einem Maschennetz von  $9 \times 33$  Maschen gelöst, wobei jedoch die Zeitschrittweite variiert wurde. Folgende Ergebnisse konnten erarbeitet werden:

- die ohne Variation der Zeitschrittweite gefundenen Strömungsmuster bleiben alle erhalten, d.h. sie können für variiertes  $\Delta t$  wiedergefunden werden.
- Verkleinerung der Zeitschrittweite führt zu höheren Nusselt-Zahlen (siehe Abb. 38).

- alle Übergangs-Rayleigh-Zahlen werden zu kleineren Werten hin verschoben.
- es deutet sich in den Daten eine Konvergenz auf einen Grenzwert bei einer Reduzierung der Zeitschrittweite an.

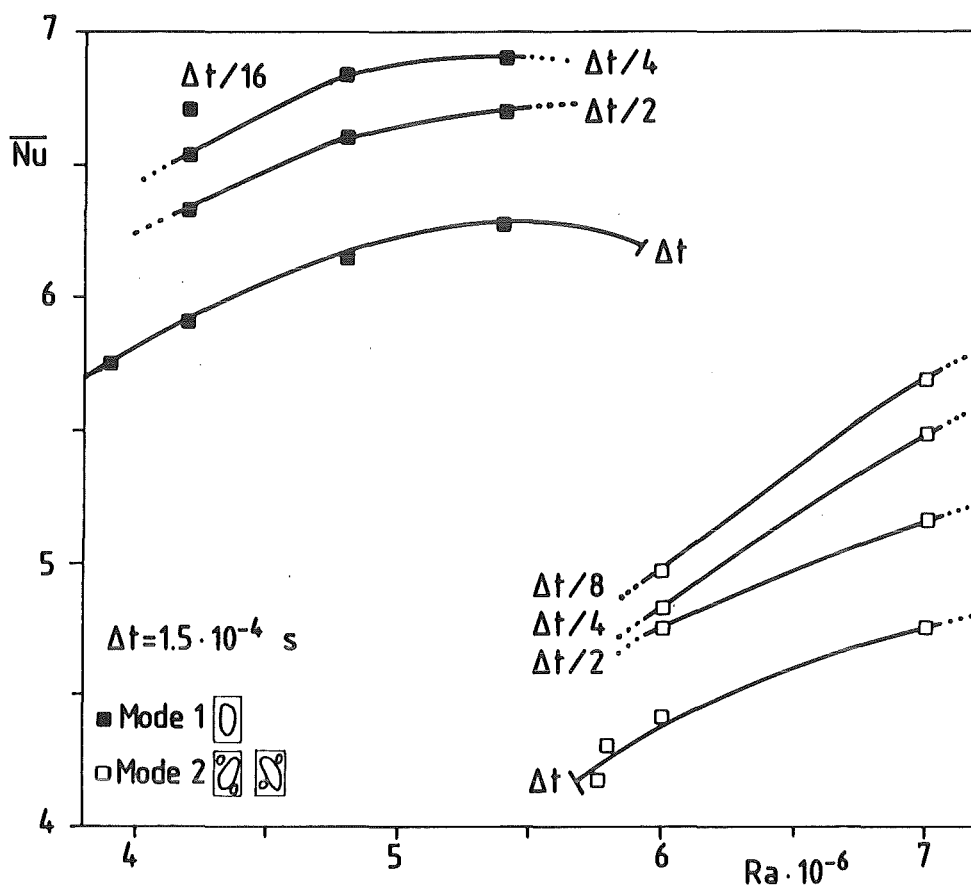


Abb. 38: Mittlere Nusselt-Zahl zweier Strömungsmuster über der Rayleigh-Zahl für verschiedene Zeitschrittweiten.  $\Delta t$  entspricht dem in den Grundrechnungen.

## 5.2 Einfluß des Maschenweite

Will man den Einfluß der Maschenweite unabhängig von dem der Zeitschrittweite untersuchen, so sollte wegen der Stabilitätsbedingungen das  $\Delta t$  des feinsten Maschennetzes gewählt werden. Dies führt zu sehr hohen Rechenzeiten. Untersucht wurde dieser Einfluß für die stationäre Einfachrolle (Mode 1) bei  $Ra = 4,2 \times 10^6$ . Die Verkleinerung der Maschenweite führte zu niedrigeren Nusselt-Zahlen (Abb. 39). Konvergenz scheint jedoch vorzuliegen, d. h. für sehr feine Maschennetze streben die numerischen Daten für die Nusselt-Zahl einem Grenzwert zu.



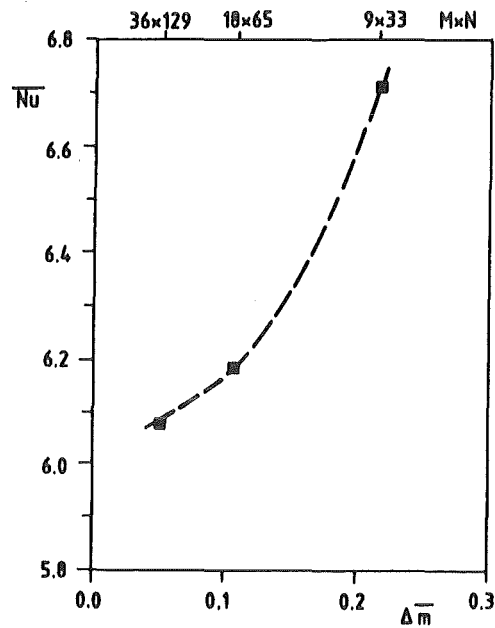


Abb. 39: Mittlere Nusselt-Zahl über der mittleren Maschenweite.

$$\Delta \bar{m} = (\Delta x + \Delta y)/2; \text{ Mode 1; } Ra = 4,2 \times 10^6.$$

### 5.3 Variation beider Einflußgrößen

Für das Maschennetz von 18x65 Maschen und der Zeitschrittweite  $\Delta t/4$  wird ein Versuchslauf wie für die Rechnungen in Kapitel 3.1 durchgeführt. Die Ergebnisse sind:

- Sämtliche Strömungsformen können wiedergefunden werden.
- Die Nusselt-Zahlen sind größer als bei der ursprünglichen Wahl der numerischen Parameter (s. Abb. 40), jedoch niedriger als für den Fall mit 9x33 Maschen und  $\Delta t/4$ .

Die kritische Rayleigh-Zahl für den Übergang von Mode 1 zur Diagonalszillation (Beginn der Oszillation) lag nun bei  $Ra = 5,3 \times 10^6$ , also um  $6 \times 10^5$  niedriger als bei der ursprünglichen Rechnung. Von Mode 2 aus stellte sich sofort die Horizontalszillation (Mode 5) ein und nicht Mode 3, da der Sprung in der Rayleigh-Zahl sehr groß war. Bei kleinerer Variation der Rayleigh-Zahl könnten Mode 3 und Mode 4 auch auf diesem Wege erzeugt werden. Hier wurde eine Interpolation der Lösungen der Moden 3 und 4 aus den Grundrechnungen von 9x33 auf 18x65 Maschen vorgenommen und damit weitergerechnet. Die Moden bleiben erhalten. Der Übergang von Mode 5 zum stationären Mode 1 zurück erfolgte

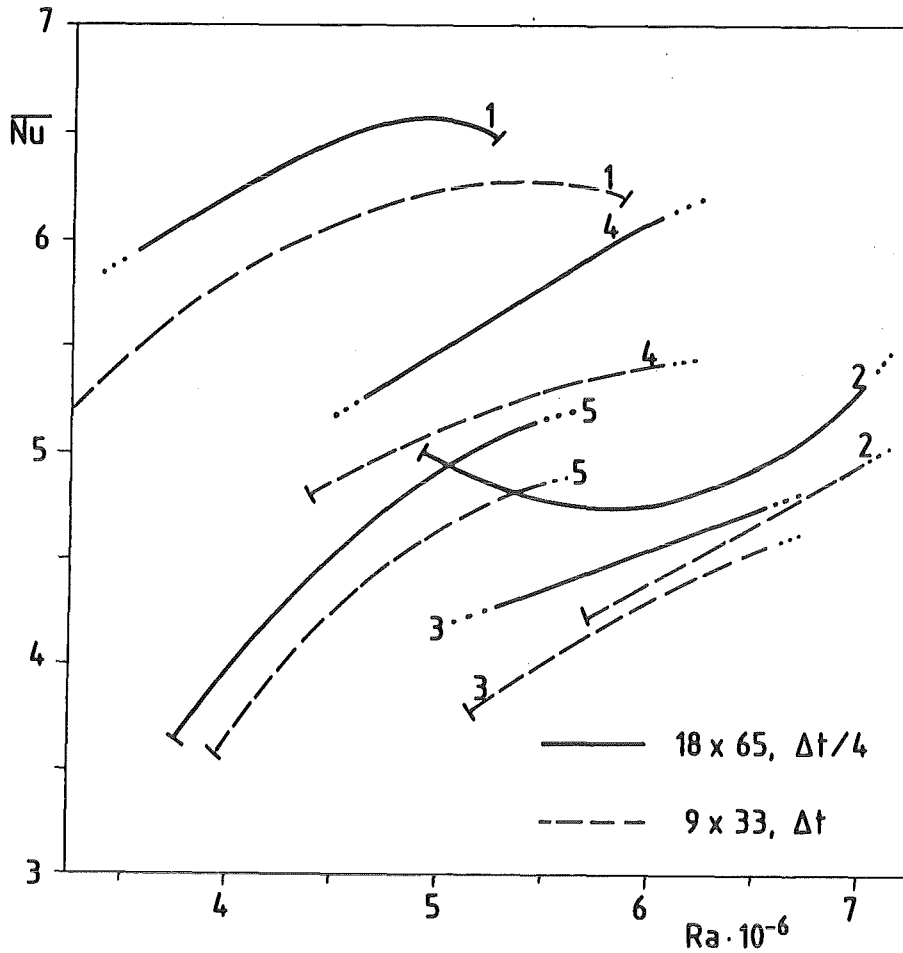


Abb. 40: Mittlere Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl. Vergleich des Grundversuchs (Abb. 18) mit dem Versuch mit 18x65 Maschen,  $\Delta t/4$ .

bei  $Ra = 3,7 \times 10^6$  gegenüber  $Ra = 4,0 \times 10^6$  beim Grundversuch. Diese Schleife ist in einem  $Nu$ - $Ra$ -Diagramm in Abb. 41 dargestellt.

Wählt man nun die Maschen- und Zeitschrittweite so, daß jeweils der numerische Stabilitätsparameter

$$\text{stab } 1 = \nu \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (5.1)$$

gleich groß ist, so zeigt die Kurve  $Nu$  nur über  $\Delta \bar{m}$  keinen monotonen Verlauf mehr, wie in Abb. 42 zu erkennen ist. Dies war zu erwarten, da die separaten Variationen der beiden Einflußgrößen zu gegenläufigen Effekten führen. Eine mögliche Erklärung dafür ist, daß der dominante Abbruchfehler des Differenzenverfahrens von der Ordnung  $\Delta \bar{m}^2 / \Delta t$  ist. Dies hat zur Konsequenz, daß immer weitere Verfeinerung von  $\Delta t$  und  $\Delta \bar{m}$  nicht zwangsläufig zu immer besseren Ergebnissen führen müssen. Es ist vermutlich so, daß es ein optimales Wertepaar  $(\Delta \bar{m}, \Delta t)$  gibt.

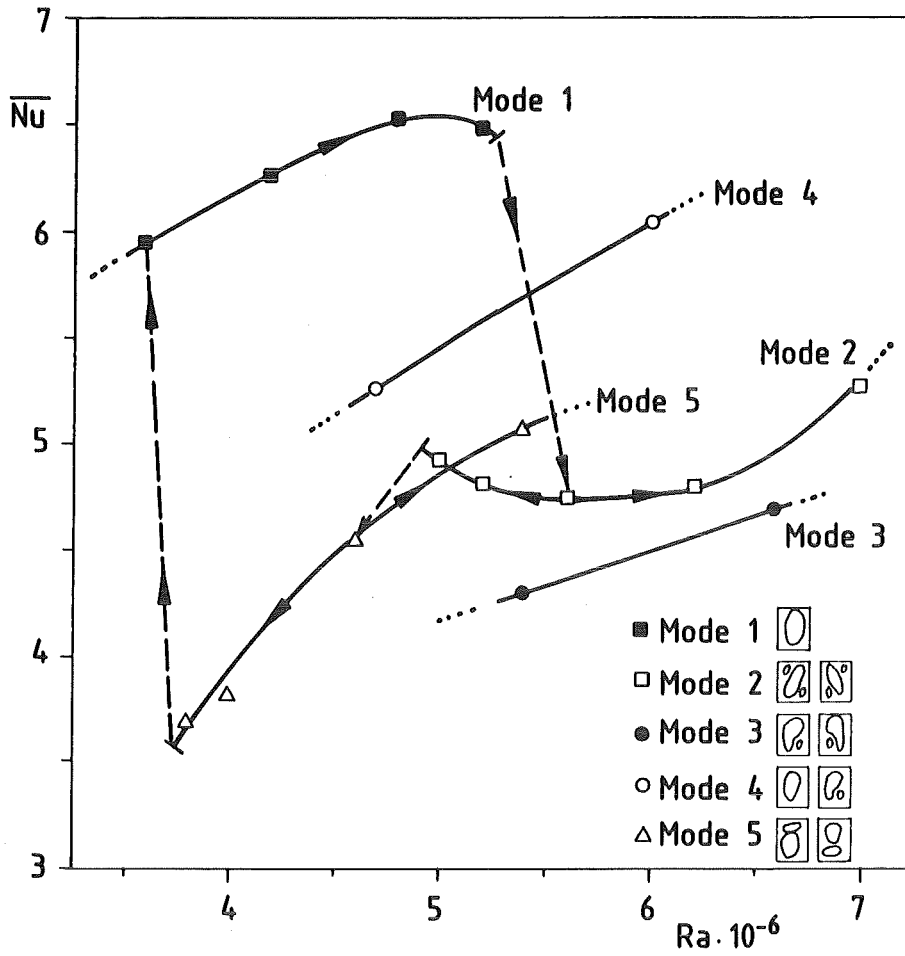


Abb. 41: Mittlere Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl.  
Versuch mit 18x65 Maschen.

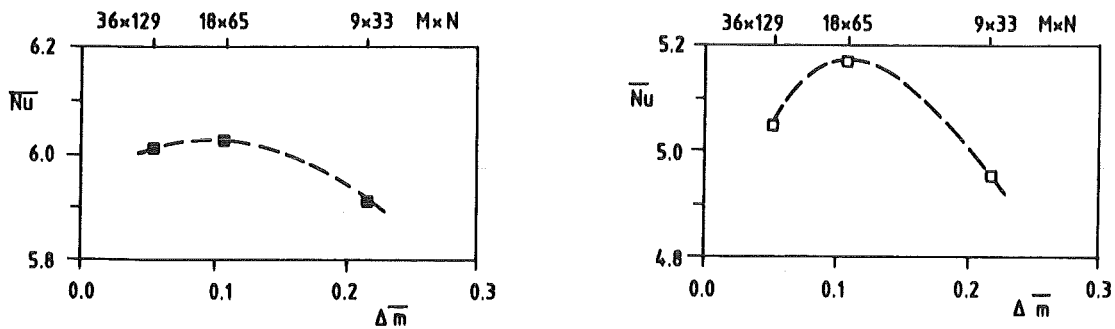


Abb. 42: Mittlere Nusselt-Zahl über mittlerer Maschenweite für  
Stab 1 = 0,24 = konstant.  
Links: Mode 1,  $Ra = 4,2 \times 10^6$ , Rechts: Mode 2,  $Ra = 7,0 \times 10^6$ .

## 6. Zusammenfassung

Experimente von Koster zur Naturkonvektion in schmalen Hele-Shaw-Zellen wurden mit einem bestehenden Rechenprogramm nachvollzogen. Die Überprüfung der Genauigkeit des Programmes in Abhängigkeit von numerischen Parametern und physikalischen Annahmen führte zu folgenden Ergebnissen:

Das Basismodell der Rechnungen, das einen konstanten Temperaturverlauf quer zum Spalt voraussetzt und somit keinen Wärmeaustausch mit den Fenstern zuläßt, ergibt eine Unterschätzung der experimentell ermittelten kritischen Rayleighzahlen (Einsetzen von Konvektion, Einsetzen von Oszillation) um etwa den Faktor 10 und eine Überschätzung der Periodendauern um den Faktor 5. Eine zusätzlich erstellte Variante des Programmes, die in erster Näherung einen Wärmeaustausch mit den Fenstern berücksichtigt, liefert, im Gegensatz zum Basismodell, eine Überschätzung der kritischen Rayleighzahlen und kleinere dimensionslose Periodendauern als die Experimente. Mit diesen beiden Modellannahmen werden die experimentellen Ergebnisse von Koster eingegrenzt. Da das modifizierte Wärmeübergangsmodell den tatsächlichen Wärmeaustausch mit den Fenstern überschätzt - es wird ein linearer Temperaturverlauf über die Höhe am Fensterrand und im Inneren ein parabolisches Temperaturprofil über die Tiefe angenommen - darf man davon ausgehen, daß mit einem geeignet angepaßten Wärmeübertragungskoeffizienten für den Wärmeaustausch zwischen Fluid und Fenster rechnerisch die experimentellen Ergebnisse von Koster auch quantitativ nachvollzogen werden können.

Mit weiteren Rechnungen konnten Vorstellungen über Ursachen für das Instabilwerden und Einsetzen instationärer Strömungen, die auf einem Modell von Howard basieren, erhärtet werden. Insgesamt bedarf jedoch dieser Fragenkreis noch weiterer Untersuchungen.

Bei der Abschätzung des Einflusses physikalischer Annahmen auf das verwendete Rechenmodell ergibt sich, daß man die Trägheitsglieder in den Impulsgleichungen vernachlässigen darf. Dagegen findet man, daß wegen der geringen Breite des Hele-Shaw-Spaltens die Newtonsche Reibung mit in Betracht gezogen werden muß. Ein Reibungsmodell, das allein auf dem Reibungsverlustgesetz von Darcy für Strömungen in porösen Körpern beruht, liefert eine von den Experimenten stark abweichende Phänomenologie. Beispielsweise findet man für eine solche

rein "poröse Reibung" keinen sprunghaften Übergang von stationärer zu oszillierender Konvektion.

Die Abhängigkeit der Rechenergebnisse von numerischen Parametern wie Feinheit des Maschennetzes oder Größe der Zeitschrittweite, zeigt einerseits bei Verfeinerung der Auflösung keine monotone Konvergenz in den Nusseltzahlen, andererseits bleiben die zu ein und derselben Rayleigh-Zahl gehörigen verschiedenen Strömungsformen im wesentlichen erhalten.

## 7. Anhang

### 7.1 Bezeichnungen

$b$	Breite
$h$	Höhe
$d$	Tiefe
$x, y, z$	Koordinaten
$x_R, x_L, y_O, y_u$	Koordinaten des Maschennetzes
$M, N$	Anzahl der Maschen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\Delta x, \Delta y$	Maschenweite in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\overline{\Delta m}$	arithmetisch gemittelte Maschenweite
$\vec{n}$	Normalenrichtung senkrecht zum Rand
$\vec{v}$	vektorielle Geschwindigkeit
$u, v, w$	Geschwindigkeitskomponenten
$U, V$	von $z$ unabhängige Geschwindigkeitskomponenten
$p$	Druck
$\phi$	Druck pro mittlere Dichte
$T$	Temperatur
$\Delta T$	Temperaturdifferenz zwischen oberer und unterer Berandung
$t$	Zeit
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$g$	Erdbeschleunigung
$\vec{k}$	Einheitsvektor in Richtung der Schwerkraft
$\rho$	Dichte
$\rho_m$	mittlere Dichte
$\nu$	kinematische Viskosität
$\alpha$	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\kappa$	Temperaturleitzahl
$Ra$	Rayleigh-Zahl
$Pr$	Prandtl-Zahl
$Nu$	Nusselt-Zahl
$Nu_{min}$	zeitlich minimale Nusselt-Zahl
$Nu_{max}$	zeitlich maximale Nusselt-Zahl
$Nu$	zeitlich gemittelte Nusselt-Zahl
$Stabl$	Stabilitätsparameter
$T_o$	Temperatur an der Oberseite
$T_u$	Temperatur an der Unterseite

$\tau$	Periodendauer
$\tau^*$	dimensionslose Periodendauer
$\Delta$	Differenz
$\partial$	partiell Differential
$\nabla^2$	Laplace-Operator
$\nabla_{\underline{x}}^2$	zweidimensionaler Laplace-Operator

## 7.2 Numerische Approximation des Gleichungssystems

Berechnung der Geschwindigkeiten zum Zeitschritt  $n+1$ .

Konvektive Anteile in  $x$ -Richtung:

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = U_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{1}{2} \left( U_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (U_{i+\frac{3}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n) \\ + \frac{1}{2} \left( U_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (U_{i+\frac{3}{2},j}^n + U_{i-\frac{1}{2},j}^n - 2 U_{i+\frac{1}{2},j}^n)$$

$$\hat{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \left( U_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n) \\ + \frac{1}{2} \left( U_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 2 V_{i,j+\frac{1}{2}}^n),$$

mit  $U_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} (U_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + U_{i+\frac{1}{2},j}^n + U_{i-\frac{1}{2},j+1}^n + U_{i-\frac{1}{2},j}^n)$

Konvektive Anteile in  $y$ -Richtung:

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{1}{2} \left( V_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) (U_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} - U_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2} \left( V_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 (U_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} + U_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n+1} - 2 U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}),$$

mit  $V_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{4} (V_{i,j-\frac{1}{2}}^n + V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n)$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2} \left( V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) (V_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} - V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2} \left( V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 (V_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} + V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1})$$



Diffusive Anteile:

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i-1,j}^n - \phi_{i,j}^n) - \frac{v}{k} \Delta t U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \\ + v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{i+\frac{3}{2},j}^{n+1} + U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - 2U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1})$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\phi_{i,j-1}^n - \phi_{i,j+1}^n) - \frac{v}{k} \Delta t V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + g \alpha \Delta t \frac{1}{2} (T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n) \\ + v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (V_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} + V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}) + v \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1})$$

Temperaturberechnung:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n - \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i+\frac{1}{2},j}^n) (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i+\frac{1}{2},j}^n) \right]^2 (T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n)$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{i,j-\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{1}{2}}^n) (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{i,j-\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{1}{2}}^n) \right]^2 (T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1})$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1} + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1}) \\ + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1})$$

Druckgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) + \frac{1}{\Delta y^2} (\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n - \phi_{i,j}^n) \\ &= - H_{i,j}^n + \frac{D_{i,j}^n}{\Delta t} + v(\text{sum 1} + \text{sum 2}) + A_{i,j}^n - \frac{v}{k} D_{i,j}^n \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} H_{i,j}^n &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (U_{i+1,j}^n)^2 + (U_{i-1,j}^n)^2 - 2(U_{i,j}^n)^2 \right] + \frac{1}{\Delta y^2} \left[ (V_{i,j+1}^n)^2 + (V_{i,j-1}^n)^2 - 2(V_{i,j}^n)^2 \right] \\ &+ \frac{2}{\Delta x \Delta y} \left[ (UV)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + (UV)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - (UV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - (UV)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n \right] \end{aligned}$$

mit

$$U_{i,j}^n = \frac{1}{2} (U_{i+\frac{1}{2},j}^n + U_{i-\frac{1}{2},j}^n)$$

$$V_{i,j}^n = \frac{1}{2} (V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i,j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$(UV)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} (U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + U_{i+\frac{1}{2},j}^n) (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{1}{2}}^n)$$

$$D_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x} (U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n) + \frac{1}{\Delta y} (V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$\text{sum 1} = \frac{1}{\Delta x^2} (D_{i+1,j}^n + D_{i-1,j}^n - 2D_{i,j}^n)$$

$$\text{sum 2} = \frac{1}{\Delta y^2} (D_{i,j+1}^n + D_{i,j-1}^n - 2D_{i,j}^n)$$

$$A_{i,j}^n = g \alpha \frac{1}{2\Delta y} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n)$$

8. Literatur

- /1/ Bénard, H.: Les tourbillons cellulaires dans nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent.  
Rev. Gen. Sci. Pur. Appl., 11, 1261-71, 1309-28, 1900.
- /2/ Catton, I.: Convection in a closed rectangular region. The onset of motion.  
Trans. A.S.M.E., J. Heat Transfer, Vol. 92, Ser. C, 186, 1970
- /3/ Davis, S.H.: Convection in a box: on the dependence of preferred wave-number upon the Rayleigh number at finite amplitude.  
J. Fluid Mech., Vol. 32, 619-624, 1968
- /4/ Davies-Jones, R.P.: Thermal convection in an infinite channel with no-slip sidewalls.  
J. Fluid Mech., Vol. 44, 695-704, 1971
- /5/ Frick, H.: Zellularkonvektion in Fluidschichten mit zwei festen seitlichen Berandungen.  
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1980
- /5a/ Frick, H., Clever, R.M.: Einfluß der Seitenwände auf das Einsetzen der Konvektion in einer horizontalen Flüssigkeitsschicht.  
ZAMP, Vol. 31, 502-513, 1980.
- /6/ Günther, C.: Zur Identifikation von Lösungsverzweigungen bei der Naturkonvektion in einer von unten beheizten, schmalen Hele-Shaw Zelle.  
Z. angew. Math. Mech. 62, T207-T209, 1982
- /7/ Günther, C.: Numerische Untersuchung der Naturkonvektion in einer von unten beheizten, schmalen Hele-Shaw-Zelle.  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 3142/81, 1981
- /8/ Hele-Shaw, H.S.: Investigation of the nature of surface resistance of water- and streamline motion under certain experimental conditions.  
Trans. Instn Naval Archit., Vol. 40, 21-46, 1898

- /9/ Horne, R.N., Caltagirone, J.-P.: On the evolution of thermal disturbances during natural convection in a porous medium.  
J. Fluid Mech., Vol. 100. Part 2, 385-395, 1980
- /10/ Horne, R.N., O`Sullivan, M.J.: Origin of oscillatory convection in a porous medium heated from below.  
Phys. Fluids, Vol. 21, No. 8, 1260-1264, Aug. 1978
- /11/ Horne, R.N., O`Sullivan, M.J.: Oscillatory convection in a porous medium heated from below.  
J. Fluid Mech., Vol. 66, Part 2, 339-352, 1974
- /12/ Howard, L.N.: Convection at high Rayleigh number.  
Proc. 11th Int. Congr. on Appl. Mech., München, H. Görtler, ed. Springer, 1109-1115, Berlin 1964
- /13/ Jeffreys, H.: The stability of a layer of fluid heated below.  
Phil. Mag., Vol. 2, 833-844, 1926
- /14/ Koster, J.N.: Freie Konvektion in vertikalen Spalten.  
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1980
- /15/ Koster, J.N., Müller, U.: Oscillatory convection in vertical slots.  
J. Fluid. Mech., Vol. 139, Part 2, 363-390, 1984
- /16/ Krishnamurti, R.: Some further studies on the transition to turbulent convection.  
J. Fluid Mech., Vol. 60, Part 2, 285-303, 1973
- /16a/ Kvernøld, O., Tyvand, P.A.: Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media.  
J. Fluid Mech., Vol. 11, 4, 609-624, 1979.
- /17/ Low, A.R.: On the criterion for stability of layer of viscous fluid heated from below.  
Proc. Roy. Soc., Part A, Vol. 125, 180-195, 1929

- /18/ Lyubimov, D.V., Putin, G.F., Chernatynskij, V.J.: On convective motions in a Hele-Shaw-cell.  
Sov. Phys. Dokl. Vol. 22, Part 7, July 1977
- /19/ Palm, E.: Nonlinear thermal convection.  
Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 7, 39-61, 1975
- /20/ Pellew, A., Southwell, R.V.: On maintained convective motion in a fluid heated from below.  
Proc. Roy. Soc., Part A, Vol. 176, 312-343, 1940
- /21/ Putin, G.F., Tkacheva, E.A.: Experimental investigation of supercritical convective motions in a Hele-Shaw-cell.  
Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti Gazi, Vol. 14, Part 1, 3-8, 1979
- /22/ Rabinovich, M.J.: Stochastic self-oscillations and turbulence.  
Sov. Phys. Usp., Vol. 21, Part 5, May 1978
- /23/ Rayleigh, Lord: On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside.  
Phil. Mag., Vol. 32, 529-546, 1916
- /24/ Richtmyer, R.D., Morton, K.W.: Difference methods for initial-value-problems.  
Interscience Publishers, New York - London - Sydney, 1967
- /25/ Roache, P.J.: Computational fluid dynamics.  
Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1972
- /26/ Schmidt, R.J., Saunders, D.A.: On the motion of a fluid heated from below.  
Proc. Roy. Soc., Part A, Vol. 166, 216-228, 1938
- /27/ Segel, L.A.: Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection.  
J. Fluid Mech., Vol. 38, 203-224, 1969

- /28/ Silveston, P.L.: Wärmedurchgang in waagrechten Flüssigkeitsschichten.  
Forsch. Ing. Wes., Vol. 24, 29-32, 59-69, 1958
- /29/ Smith, G.D.: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen.  
Vieweg, ISBN 3 528 08296 8, Braunschweig 1970
- /30/ Stork, K., Müller, U.: Convection in boxes; Experiments. J. Fluid Mech.  
54, 599-611, 1972.
- /31/ Swarztrauber, P., Sweet, R.: Efficient FORTRAN subprograms for the  
solution of elliptic partial differential equations.  
Tech. Note NCAR-TN/IA-109, National Center of Atmospheric Research, 1975
- /32/ Yih, C.S.: Fluid mechanics.  
West River Press, Ann Arbor, Michigan, corrected edition 1978
- /33/ Zierep, J.: Zur Theorie der Zellularkonvektion V., Zellularkon-  
vektionsströmungen in Gefäßen endlicher horizontaler Ausdehnung.  
Beitr. Phys. Atmos., Bd. 36, 70-76, 1963.