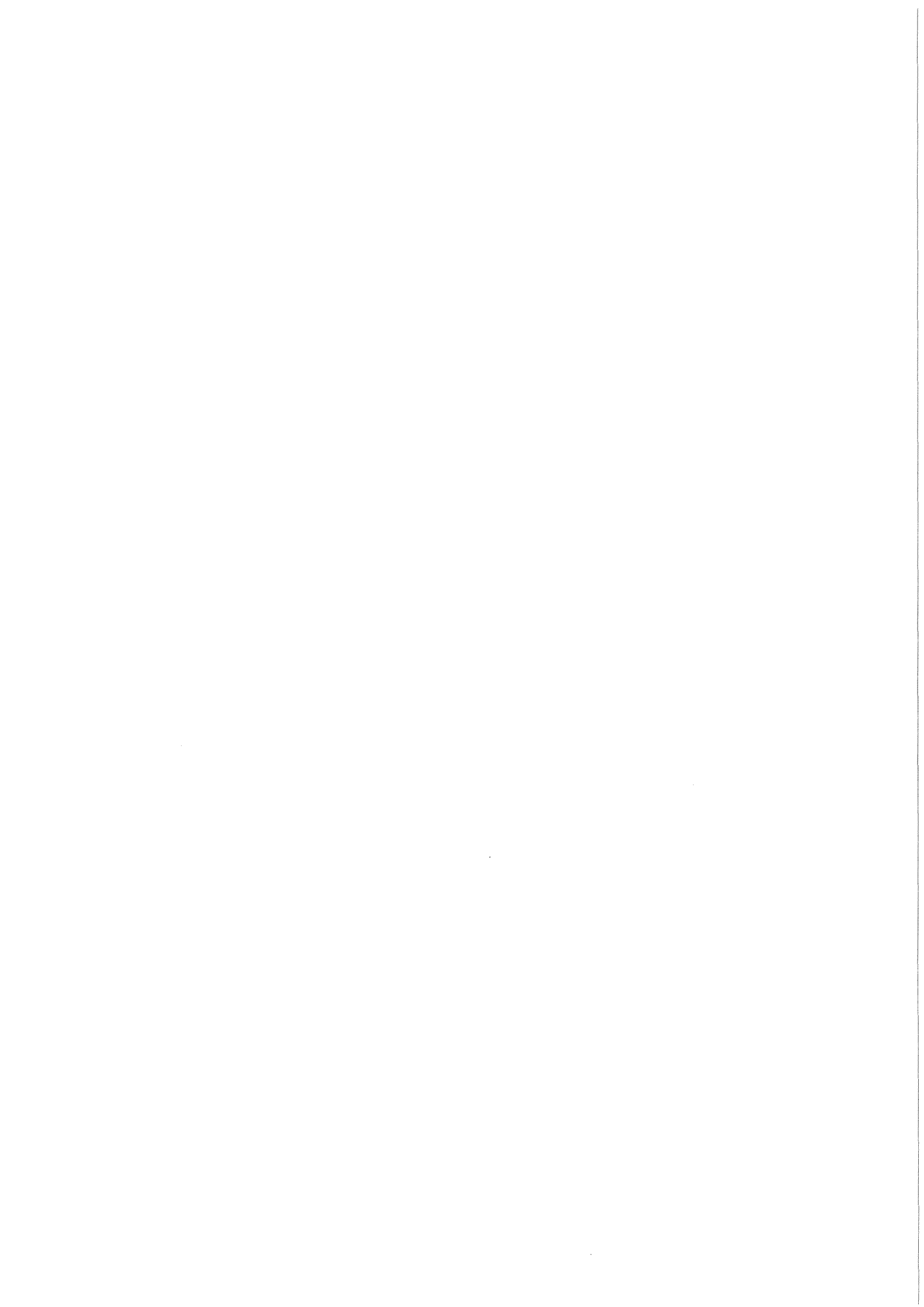


KfK 3787
September 1984

**Stochastische Kurzzeit- und
Langzeitmodelle für die
Freisetzung von radioaktivem Jod
in der Abgasreinigungsstrecke
PASSAT**

H. Wenzelburger, P. Zinterhof
Institut für Datenverarbeitung in der Technik

Kernforschungszentrum Karlsruhe



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Datenverarbeitung in der Technik

KfK 3787

Stochastische Kurzzeit- und Langzeitmodelle für die
Freisetzung von radioaktivem Jod in der
Abgasreinigungsstrecke PASSAT

H. Wenzelburger

P. Zinterhof^{*)}

^{*)} Universität Salzburg

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Dieser Bericht enthält eine Reihe von Einzelarbeiten, in denen versucht wird, ein stochastisches Modell für die Abgasreinigungsstrecke PASSAT zu entwerfen. Dies geschieht, um vorhersagen zu können, mit welchen Mengen an radioaktivem Jod in welchen Zeiten die Umwelt belastet wird.

Eine derartige Aussage können wir kurzfristig nur über eine Theorie erhalten, da es bei dem heutigen hohen Stand der Sicherheitstechnik Jahrzehnte dauern würde, bis wir diese über Messungen bekommen würden.

Aufgrund unserer Systemanalyse gehen wir davon aus, daß in PASSAT im Mittel ungefähr einmal in zehn Jahren ein Störfall von zehn Stunden Dauer stattfindet, in dem mehr radioaktives Jod freigesetzt wird als im Normalbetrieb.

Zunächst entwickelten wir ein allgemeines stochastisches Modell. Sehr bald erwies es sich aber als zweckmäßig, dieses für den ersten und beliebig viele Störfälle unterschiedlich zu detaillieren.

So entstanden einerseits die "Kurzzeit"-Modelle für den ersten Störfall und die "Langzeit"-Modelle für einen beliebig vorgegebenen Zeitraum $(0, t)$.

Prinzipiell lassen sich für die Freisetzung in PASSAT sowohl simulative als auch analytische Modelle konstruieren. Im Laufe der Untersuchungen stellte sich jedoch heraus, daß für konkrete Zahlenangaben analytische Modelle praktikabler sind als Monte-Carlo-Simulationen. D.h. aber nicht, daß wir bei Problemstellungen dieser Art ganz auf die Monte-Carlo-Simulation verzichten sollten. In unserem Fall hat die Monte-Carlo-Simulation es erst ermöglicht, die ursprünglichen Ansätze so zu vereinfachen, daß aufwendige analytische Rechnungen vermieden wurden.

Die "Kurzzeit"-Modelle lassen sich mit einer einzigen Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisieren, der Verteilung $P\{C_1 \leq z\}$ der im ersten Störfall freigesetzten Schadstoffmenge C_1 . Diese ergibt sich aus einer Transformation $(T_i, i=1, 2, \dots, k) \rightarrow C_1$ der zufälligen Lebensdauern T_i der relevanten Komponenten von PASSAT.

Für die "Langzeit"-Modelle, die im Prinzip die "Kurzzeit"-Modelle enthalten, müssen jedoch Familien von Verteilungen $\{P\{C(t) \leq z\}, t \in R\}$, d.h. stochastische Prozesse betrachtet werden. Dabei ist $C(t)$ die im Zeitintervall $(0, t)$ angesammelte Menge von Schadstoff.

Allen hier vorgestellten "Langzeit"-Modellen der PASSAT liegen Markoff-Erneuerungsprozesse mit Kostenfunktionen zugrunde, bei denen die Freisetzung die Rolle von Kosten übernimmt. Dabei mußte die in der Literatur vorhandene Theorie von linearen auf monotone Kostenfunktionen erweitert und ein numerisches Verfahren entwickelt werden, um konkrete Zahlenwerte zu erhalten.

Das neue numerische Verfahren besteht auf bestmöglichen zahlentheoretischen und mehrdimensionalen Integrationsmethoden, mit denen die auftretenden zweidimensionalen Laplace-Stieltjes Transformierten invertiert werden.

Stochastic Short-term and Long-term Models Describing
Radioactive Iodine Release from the PASSAT Offgas Cleaning
Facility

Abstract

This report comprises a number of individual research activities aimed at conceiving a stochastic model of the PASSAT offgas cleaning facility with a view to predicting which amounts of radioactive iodine will burden the environment at which times.

Such a statement can be obtained in the short run via a theory only because, given the advanced status of safety engineering, it would take several decades to make available the respective measured values.

Based on our systems analysis we assume that in PASSAT on the average one accident of ten hours duration will occur approximately once in a decade in which more radioactive iodine will be released than in normal operation.

In a first step we developed a general stochastic model. However, it appeared useful very early in this effort to work out different degrees of detail for the first and any number of accidents.

In this way the "short-term" models were elaborated for the first accident and the "long-term" models for any period of time determined in advance $(0,t)$.

In principle, both simulative and analytical models can be composed to describe the release from PASSAT. However, it became evident in the course of the studies that analytical models can be more conveniently handled than Monte Carlo

simulations if concrete numbers are in hand. But this does not mean that we should completely do without Monte Carlo simulations to solve this type of problems. In our case it was actually the Monte Carlo simulation which enabled us to simplify the original setups in such a way that expensive analytical calculations were avoided.

The "short-term" models can be characterized by a single probability distribution, the distribution $P\{C_1 < z\}$ of the amount of pollutants C_1 released in the first accident. It is the result of a transformation $(T_i, i = 1, 2, \dots, k) \rightarrow C_1$ of the stochastic lifetimes T_i of the relevant PASSAT components.

Regarding the "long-term" models which, in principle, include the "short-term" models, families of distributions $\{P\{C(t) < z\}, t \in R\}$, i.e., stochastic processes, must be considered. $C(t)$ is the amount of pollutant accumulated in the time interval $(0, t)$.

All "long-term" models of PASSAT presented here are based on Markoff renewal processes with cost functions in which the release adopts the role of costs. The theory proposed in the literature had to be extended from linear to monotonous cost functions and a numerical technique had to be developed in order to obtain concrete numerical values.

The new numerical method consists of best possible number-theoretical and multi-dimensional integration methods by which the two-dimensional Laplace-Stieltjes transforms obtained can be inverted.

Inhaltsverzeichnis

	Seiten
1. Zur stochastischen Modellierung des ersten Störfalls in der Abgasreinigungsstrecke einer Wiederaufarbeitungsanlage (WAA) (H. Wenzelburger)	1
2. A stochastic model for the release of radioactive iodine in the dissolver offgas unit PASSAT ¹⁾ (H. Wenzelburger)	19
3. Ein Erneuerungsprozess mit deterministischen Abfolge der Zustände (P. Zinterhof)	29
4. The formula of Takács for the down-time in an alternating renewal process as a special case in Zinterhofs' generalization ¹⁾ (H. Wenzelburger)	37
5. Markoff-Erneuerungsprozesse mit allgemeinen Kostenfunktionen (P. Zinterhof)	49
6. Eine zahlentheoretische Methode zur Numerik der Markoff-Erneuerungsprozesse (P. Zinterhof)	75
7. Einige konkrete analytische Markoff-Erneuerungsmodelle für die langfristige Freisetzung von radioaktivem Jod in der Abgasreinigungsstrecke einer Wiederaufarbeitungsanlage (WAA) (H. Wenzelburger)	161

ZUR STOCHASTISCHEN MODELLIERUNG DES ERSTEN STÖRFALLS IN DER ABGAS- REINIGUNGSSTRECKE EINER WIEDERAUFARBEITUNGSANLAGE (WAA)

Heinz Wenzelburger, Karlsruhe

1. Einführung

Ausgangspunkt für diesen Beitrag war die Frage, wie in der Abgasreinigungsstrecke einer WAA unerwünscht freigesetzte Mengen an radioaktivem Jod vorhergesagt werden können.

Bereits eine oberflächliche Systemanalyse der Karlsruher Versuchsanlage PASSAT ergab, daß dies nur über ein stochastisches Modell möglich ist. Denn die in der PASSAT freigesetzten Schadstoffmengen hängen nicht nur von deterministischen, sondern ganz wesentlich auch von stochastischen Vorgängen ab. Dabei wirkt sich auf die Modellierung erschwerend aus, daß in der PASSAT die Freisetzung von Jod eine nichtlineare Funktion der Zeit ist.

Für die Praxis ist nicht nur wichtig, wie sich die Anlage kurzfristig, sondern auch wie sie sich mittel- und langfristig verhält. Dabei interessiert beim Kurzzeitverhalten im wesentlichen die Verteilung $P\{C_1 \leq z | A_k\}$ der im sog. ersten Störfall freigesetzten Schadstoffmenge C_1 , wenn dieser vom Typ A_k ist; beim Langzeitverhalten dagegen die Verteilung $P\{C(t) \leq z\}$ der im beliebig vorgegebenen Zeitintervall $(0, t)$ freigesetzten kumulativen Schadstoffmenge $C(t)$.

Wir behandeln hier lediglich das Kurzzeitverhalten der PASSAT, d.h. eine für den ersten Störfall typische Verteilung $P\{C_1 \leq z | A_k\}$, die wir simulativ bestimmen. Fragen, die mit dem theoretisch sehr viel schwierigeren Langzeitverhalten der PASSAT zusammenhängen, werden in /3/ auf der Basis von Markoff-Erneuerungsprozessen diskutiert.

2. Freisetzungsfunktion C_1 des Störfalls EH_2 vor EH_1

Das Abgas, das in einer WAA im Auflöser für die Brennstäbe entsteht, enthält sowohl gasförmige radioaktive Spaltprodukte als auch radioaktive Tröpfchen- und Feststoffaerosole. Wegen ihrer Radiotoxizität müssen diese Stoffe aus dem Abgas soweit als möglich entfernt werden.

Für die Jodreinigung genügt es, das in Abb. 1 gezeigte vereinfachte Fließschema der PASSAT zugrunde zu legen /2/.

In diesem wird der Abgasstrom über zwei Erhitzer EH_1 und EH_2 auf ein

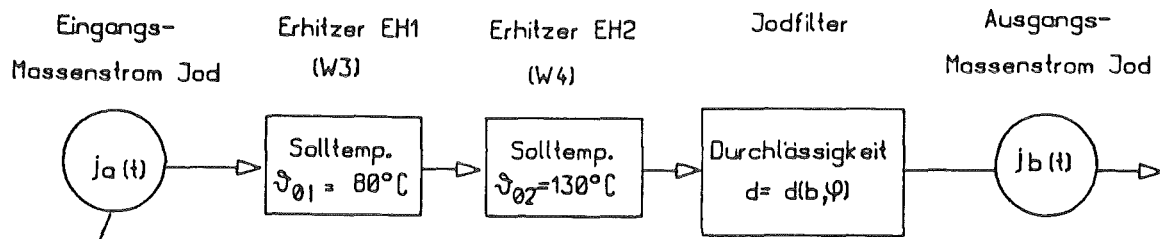


Abb. 1

Taupunkt $\Theta_k = 30^\circ$

Jodfilter geleitet, das umso weniger Jod adsorbiert, je geringer dessen Restbett-Tiefe und je größer die relative Feuchte des Abgases ist. Die relative Feuchte nimmt zu, wenn mindestens einer der beiden Erhitzer ausfällt und dadurch die Temperatur des Abgases im Jodfilter unter ihren Sollwert sinkt. Der Erhitzer EH_1 ist redundant. Er gehört zur Aerosol- und nicht zur Jodrückhaltung und wurde in unser System einbezogen, weil er den Erhitzer EH_2 bis zu einem gewissen Grad zu ersetzen vermag.

Unter den im Fließschema der Abb. 1 denkbaren Störfällen kann im Störfall " EH_2 zeitlich vor EH_1 ausgefallen" (= Ereignis A_{21}) am meisten Jod freigesetzt werden. Dies tritt immer dann ein, wenn innerhalb der Reparaturdauer des Erhitzers EH_2 (Solltemperatur 130°C) von rund 8 Stunden auch noch der Erhitzer EH_1 (Solltemperatur 80°C) ausfällt. In dieser Situation kann die Temperatur des Abgases unter dessen Taupunkt absinken und alle Feuchtigkeit im Jodfilter kondensieren.

Der Erhitzer EH_2 ist so in seiner Wärmekapazität ausgelegt, daß die Temperatur des Abgases im Jodfilter kaum unter ihren Sollwert sinkt, wenn der Erhitzer EH_1 allein ausfällt. Darum wird im Störfall EH_1 vor EH_2 (= Ereignis A_{12}) im Mittel etwas weniger Jod als im Störfall A_{21} freigesetzt.

Wir quantifizieren nun die bisher vorwiegend qualitativen Betrachtungen, ohne auf alle Details einzugehen. Bei den wichtigsten Größen geben wir in Klammern ungefähre Zahlenwerte an.

Sei $j_a(t)$ [kg/Std] der im Abgas enthaltene Massenstrom an radioaktivem Jod, wenn dieser zum Zeitpunkt t auf das Jodfilter trifft und sei ferner $d(t)$ die Durchlässigkeit ($0 \leq d \leq 1$) des Jodfilters zum Zeitpunkt t . Dann wird im Jodfilter der Eingangsmassenstrom $j_a(t)$ ($1,6 \cdot 10^{-2}$ kg/Std) an radioaktivem Jod auf den Ausgangsmassenstrom

$$j_b(t) = d(t) \cdot j_a(t) \quad \left[\text{kg/Std} \right] \quad (1)$$

reduziert. (Im Normalbetrieb ist je nach Betriebsstrategie $10^{-7} < \bar{d} < 10^{-3}$!!).

Nach Ausweis der Experimente hängt die Durchlässigkeit $d = d(b(t), \phi(t))$ des Jodfilters von dessen Beladung $b(t)$ mit Jod und der relativen

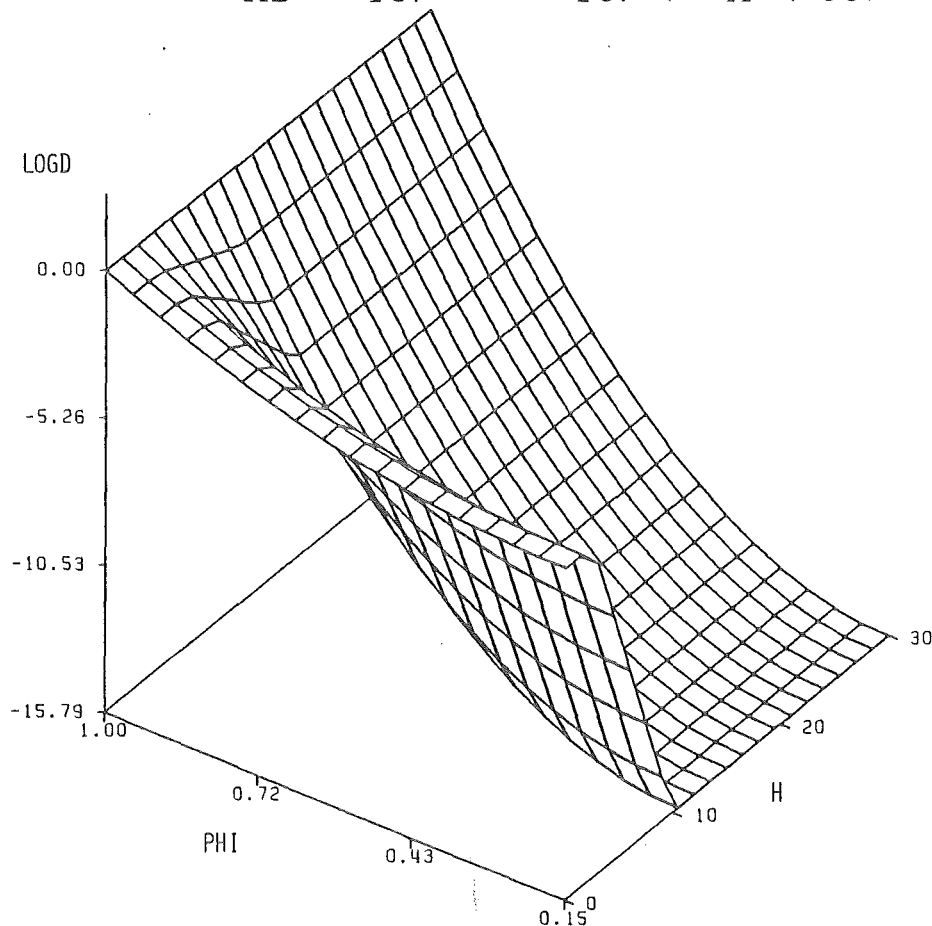
Feuchte $\phi(t)$ des Abgases am Ort des Jodfilters ab. Sie ist um so größer, je größer die Beladung des Filters bzw. je größer die relative Feuchte des Abgases ist. In Abb. 2 ist ein Fit für die experimentell gemessene Durchlässigkeits"fläche" dargestellt, wobei anstelle der Beladung $b(t)$ die Bettiefe (= "Rest"-Bettiefe!)

$$h(t) = h_{\max} (1 - b(t)/B) \quad [\text{cm}], \quad 0 \leq h \leq h_{\max} \quad (2)$$

($h_{\max} = 60$ cm, apparative Konstante) aufgetragen ist.

$$\text{LOG}_e D(H, \text{PHI}) = HD * (\text{PHI} - 1) * (A + B * (\text{PHI} - 1))$$

$$\begin{aligned} HD &= 2.5 & 0 &\leq H < 2.5 \\ HD &= H & \text{FUER} & 2.5 \leq H < 10. \\ HD &= 10. & & 10. \leq H < 60. \end{aligned}$$



$$A = 3.751, \quad B = 2.185$$

DURCHLAESSIGKEITSFLAECHE

Abb. 2

Die im Filter von dessen Inbetriebnahme an absorbierte Menge an Jod (= Beladung) ist eine lineare Funktion in der Zeit t

$$b(t) = b_0 + b_1 t \quad [\text{kg}], \quad 0 < t \leq \tau_f \quad (3)$$

Das Filter wird ausgewechselt, wenn dessen maximal zulässige Beladung $B = b_0 + b_1 \tau_f$ ($b_0 = 0$; $b_1 = 1,6 \cdot 10^{-2}$ kg/Std; $\tau_f = 752$ Std, Standzeit des Filters) erreicht ist.

Die relative Feuchte $\phi(t)$ ist eine Funktion der (Celsius)-Temperatur $\theta(t)$ des Abgases ($\theta_k = 30^\circ\text{C}$, $\theta_{\max} = 130^\circ\text{C}$)

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \theta \leq \theta_k \\ \left[p(\theta_k) / p(\theta) \right] & \text{für } \theta_k \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{cases} \quad (4)$$

wobei θ_k die Temperatur der vollständigen Kondensation des im Abgas enthaltenen Wasserdampfes und $p(\theta)$ der Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei der Temperatur θ ist. In dem für die Anlage relevanten Temperaturbereich $\theta_k \leq \theta \leq \theta_{\max}$ approximieren wir den Sättigungsdruck des Wasserdampfes mit der Formel von Clausius/Clapeyron, was

$$\ln p(\theta) = - 5,07 \cdot 10^3 / T + 13,62, \quad T := 273,15 + \theta \quad (5)$$

ergibt.

Im bestimmungsgemäßen Betrieb ist die Temperatur des Abgases konstant, d.h. $\theta(t) = \theta_{\max}$. Im Störfall A_{21} ist dagegen $\theta(t)$ eine Funktion, die stückweise aus drei Exponentialfunktionen $\theta_i(t)$ mit verschiedenen Zeitkonstanten zusammengesetzt ist. Dies wird in Abb. 3 illustriert.

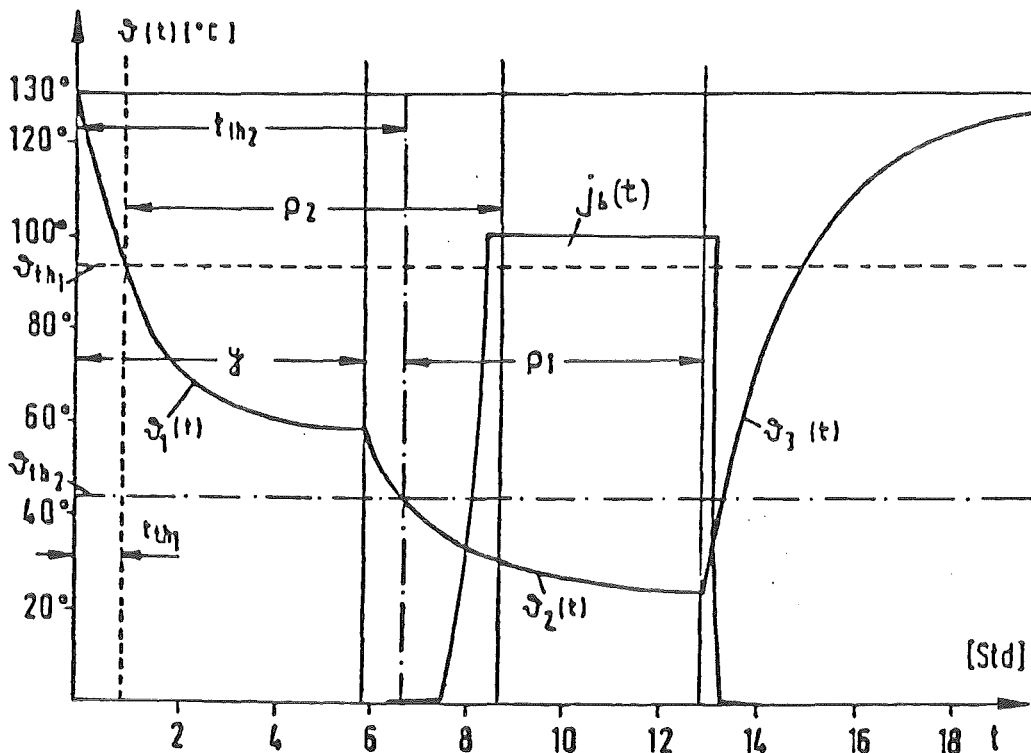


Abb. 3

Man beachte, daß in diesem Beispiel EH_2 bei $t=0$ und EH_1 bei $t=y$ ausfällt und die Anlage bei $t = t_{th2} + \rho_1$ wieder angefahren wird, nachdem beide Erhitzer repariert sind. Außerdem ist zu ersehen, wie in diesem Störfall der Ausgangsmassenstrom $j_b(t)$ von einem minimalen ($= 2,1 \cdot 10^{-9}$ kg/Std) auf einen maximalen Wert ($= j_a(t) = 1,6 \cdot 10^{-2}$ kg/Std) ansteigt und wieder abfällt.

Die im ersten Störfall vom Typ A₂₁ freigesetzte Schadstoffmenge c₁ (Freisetzungsfunktion) erhalten wir, wenn wir den Ausgangsmassenstrom j_b(t) vom Störfallbeginn zur Zeit t=x bis zum Störfallende t=x+Δx integrieren

$$c_1 = \int_x^{x+\Delta x} j_b(t) \cdot dt = \int_0^{\Delta x} d(b(x+t), \theta(t)) \cdot j_a(x+t) \cdot dt \quad (6)$$

Das Störfallende t=x+Δx definieren wir als den Zeitpunkt, in dem der Ausgangsmassenstrom j_b(t) nahezu den Wert erreicht hat, den er im Normalbetrieb besitzt.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß c₁ = c₁(x,y) bzw. c₁ = c₁(h,y), wobei h(x) = h_{max} [1 - (x mod τ_f) / τ_f] die Bettiefe des Jodfilters zum Zeitpunkt x des Ausfalls des Erhitzers EH₂ ist. In Abb. 4 ist ein Ausschnitt aus der Funktion c₁(h,y) dargestellt. Dazu wurde in (6) numerisch integriert.

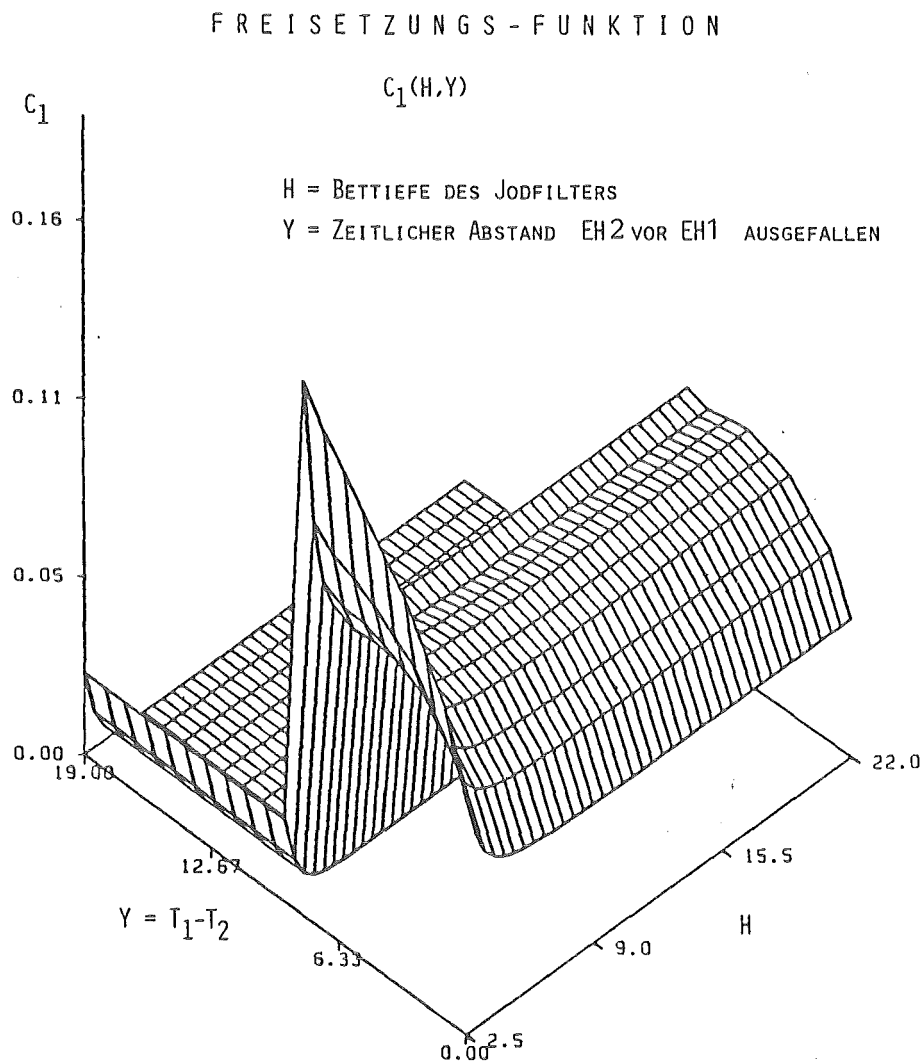


Abb. 4

Die Parameter x (bzw. h) und y sind die einzigen zufälligen Variablen in der Freisetzungsfunktion. Sie hängen lediglich von den Lebensdauern T_i der Erhitzer EH_i ($i=1,2$) ab. Die Bettiefe h bleibt in c_1 deterministisch, wenn wir jeweils zu Störfallbeginn das Filter wechseln.

Um deutlich zu kennzeichnen, daß c_1 mit x (bzw. h) und y auch zufällig wird, schreiben wir anstelle von $c_1=c_1(x,y)$ den Ausdruck $C_1=C_1(X,Y)$ gemäß der oft gebrauchten Konvention, für alle deterministischen Variablen kleine und alle zufälligen Variablen große Buchstaben zu benutzen.

2. Die Verteilung $P\{C_1 \leq z \mid A_{21}\}$ im ersten Störfall

Alle unsere probabilistischen Folgerungen basieren, anders als bei der Freisetzungsfunktion auf einer einzig Beziehung, der gemeinsamen Lebensdauerdichte der beiden Erhitzer

$$\begin{aligned} P\{t_1 < T_1 \leq t_1+dt_1, t_2 < T_2 \leq t_2+dt_2\} &= f_{T_1 T_2}(t_1, t_2) dt_1 \cdot dt_2 \\ &= \lambda_1 \cdot \exp(-\lambda_1 t_1) \cdot dt_1 \cdot \lambda_2 \cdot \exp(-\lambda_2 t_2) \cdot dt_2 \quad (7) \end{aligned}$$

Da in der Freisetzungsfunktion $C_1(X,Y)$ die zufälligen Variablen X und Y vorkommen, wobei nun allgemeiner X den Eintritt des Störfalls A_{12} oder A_{21} markiere, transformieren wir zunächst $(T_1, T_2) \rightarrow (X, Y)$ mit $X = \min(T_1, T_2)$, $Y = T_1 - T_2$. Das ergibt nach einiger Rechnung die Dichte

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) \cdot dx \cdot dy &= P\{x < X \leq x+dx, y < Y \leq y+dy\} \\ &= P\{x < X \leq x+dx\} \cdot P\{y < Y \leq y+dy\} \quad (8) \end{aligned}$$

mit

$$P\{x < X \leq x+dx\} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)x) \cdot dx, \quad 0 < x < \infty \quad (9)$$

$$P\{y < Y \leq y+dy\} = \left[1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 \right]^{-1} \cdot \begin{cases} \exp(+\lambda_2 y) \cdot dy & -\infty < y < 0 \\ \exp(-\lambda_1 y) \cdot dy & 0 < y < \infty \end{cases} \quad (10)$$

Nach einem Satz von Ferguson /1/, p 1204 ist, damit X und Y wie in (8) stochastisch unabhängig sind, notwendig und hinreichend, daß T_1 und T_2 Exponentialdichten haben. Ansonsten sind X und Y stochastisch abhängig.

Um die Transformation $(X,Y) \rightarrow C_1(X,Y)$ analytisch durchzuführen, ist einiger Rechenaufwand notwendig. Wir können jedoch die k -ten Momente von C_1 angeben, ohne die Dichte $f_{C_1}(z) \cdot dz$ explizit benutzen zu müssen.

Es ist

$$E(C_1^k) = \int_0^{\infty} z^k \cdot f_{C_1}(z) \cdot dz = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} c_1^k(x,y) \cdot f_{XY}(x,y) \cdot dx \cdot dy \quad (11)$$

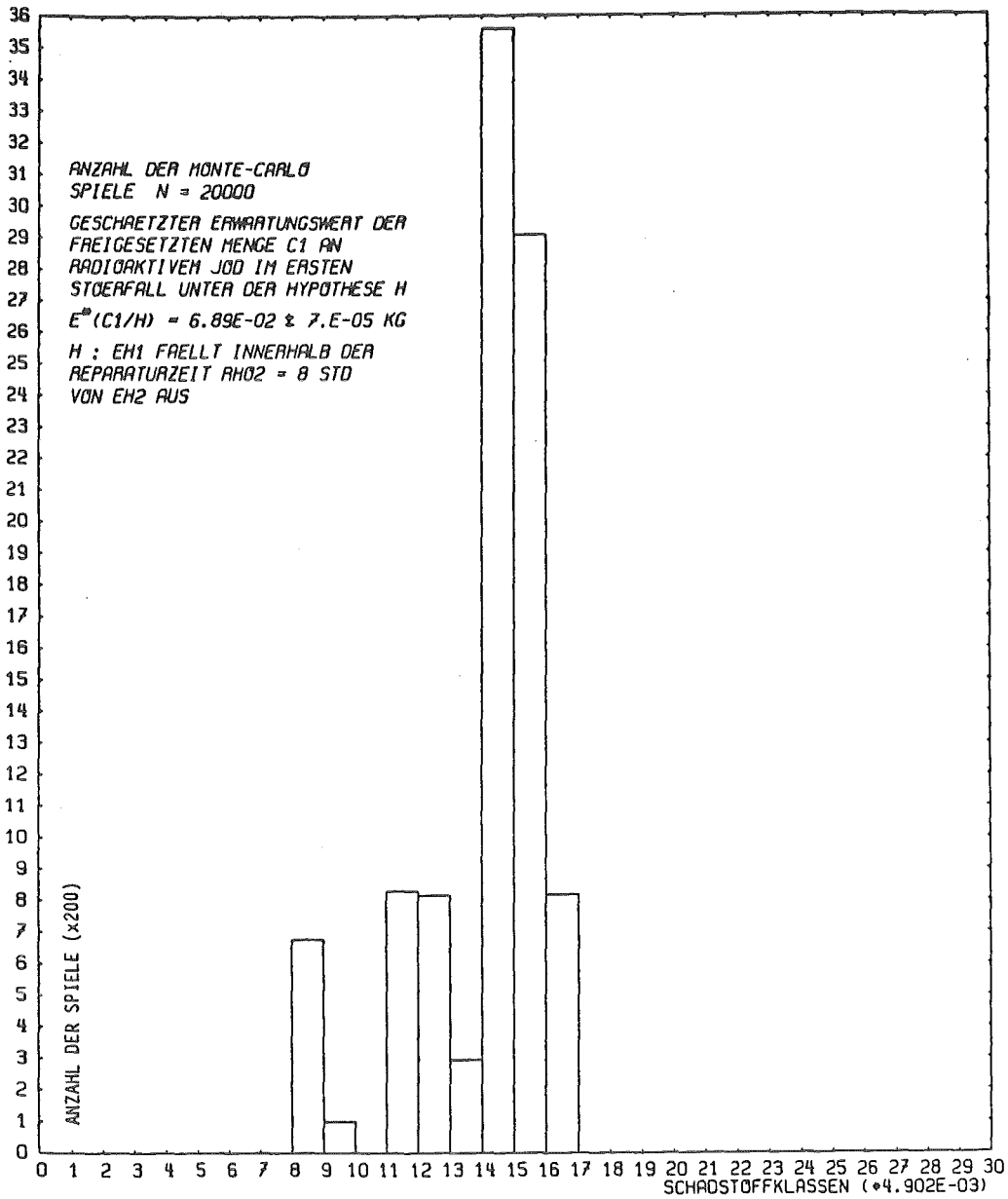


Abb. 5

In der Dichte (8) sind noch sowohl der Störfall A_{12} als auch der Störfall A_{21} enthalten! Sie lassen sich wie folgt "separieren":

$$E(C_1^k) = P\{A_{12}\} \cdot E(C_1^k | A_{12}) + P\{A_{21}\} \cdot E(C_1^k | A_{21}) \quad (12)$$

Dabei ist

$$P\{A_{12}\} = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2), \quad P\{A_{12}\} + P\{A_{21}\} = 1 \quad (13)$$

und

$$E(C_1^k | A_{12}) = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=-\infty}^0 c_1^k(x, y) \cdot f_{XY}(x, y | A_{12}) \cdot dx \cdot dy \quad (14)$$

mit

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < 0$$

$$f_{XY}(x, y | A_{12}) \cdot dx \cdot dy = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)x) \cdot \lambda_2 \cdot \exp(+\lambda_2 y) \cdot dx \cdot dy \quad (15)$$

und analog dazu $E(C_1^k | A_{21})$.

Verwenden wir in $f_{XY}(x, y | A_{21})$ anstelle der Lebensdauer T_2 des Erhitzers EH_2 die Bettiefe H des Jodfilters zum Zeitpunkt $X=T_2$ des Ausfalls von

EH_2 , so läßt sich wegen $H = h_{\max} \left[1 - (X \bmod \tau_f) / \tau_f \right]$ zeigen, daß

$$f_{HY}(h, y | A_{21}) \cdot dh \cdot dy = \frac{\frac{\tau_f}{h_{\max}} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \exp \frac{\tau_f}{h_{\max}} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (h_{\max} - h)}{\exp \tau_f (\lambda_1 + \lambda_2) - 1} dh \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \cdot dy,$$

$$0 \leq h \leq h_{\max}, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (16)$$

Wir können über $f_{XY}(x, y | A_{21})$ oder besser noch über $f_{HY}(h, y | A_{21})$ die Verteilung $P\{C_1 \leq z | A_{21}\}$ bzw. deren Mittelwert und Streuung simulieren. Dazu sind wegen (16) Zufallszahlen (p, q) aus einer Gleichverteilung

$(0, 1)$ gemäß

$$h_p = h_{\max} - \frac{h_{\max}}{\tau_f (\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \ln \left[1 - p (1 - e^{-\tau_f (\lambda_1 + \lambda_2)}) \right] \quad (17)$$

$$y_q = - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \left[1 - q \cdot (1 - e^{-\lambda_1 \cdot \rho_2}) \right]$$

zu transformieren. Jedes Paar (h_p, y_q) führt zu einer Realisation $c_1(h_p, y_q)$ von $C_1(H, Y)$. Für $\tau_f \approx 10^3$ Std und $\lambda_i \approx 10^{-6}$ Std⁻¹, $i=1, 2$ ist H mit guter Näherung gleichverteilt.

Abb. 5 zeigt eine Simulation der bedingten Verteilung $P\{C_1 \leq z | A\}$ mit $A = \{0 < Y \leq \rho_2\}$, d.h. der innerhalb der Reparaturzeit ρ_2 von EH_2 freigesetzten Schadstoffmenge C_1 . Die Verteilung $P\{C_1 \leq z | A\}$ ist signifikant nicht unimodal.

In bestimmungsgemäßen Betrieb ist die mittlere Freisetzungsrate von radioaktivem Jod $\xi = 2,1 \cdot 10^{-9}$ ($3,4 \cdot 10^{-6}$) kg/Std, wenn das Filter bei $h = 10$ (2,5) cm ausgewechselt wird. Im Störfall A, der nach (10) nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $P\{0 < Y \leq \rho_2\} = (\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)) \cdot (1 - \exp(-\lambda_1 \cdot \rho_2)) \approx 8,4 \cdot 10^{-6}$ eintritt, schätzen wir aus der obigen Simulation eine mittlere Freisetzungsrate von $\eta \approx 8,6 \cdot 10^{-3}$ kg/Std.

Literatur

/1/ Ferguson, T.S.

A Characterization of the Exponential Distribution.
Ann. Math. Statist. 35, 1199-1207 (1964).

/2/ Wenzelburger, H.; Nagel, K.

Ein neues zeitabhängiges stochastisches Modell zur Risikoanalyse der Abgasstrecke PASSAT. KfK, Karlsruhe, Jahresbericht 1982 des PNS, KfK-3350, 4500(1-29), (1983).

/3/ Zinterhof, P.

Analytische Markoff-Erneuerungsmodelle zum Problem der Schadstoff-freisetzung in Wiederaufarbeitungsanlagen (WAA).

Votr. Jahrestag. DGOR, Mannheim 1983.

Anhänge

Vorbemerkung zu den Betriebs- und Wartungsstrategien

Welche Menge an radioaktivem Jod in PASSAT freigesetzt werden kann, hängt ganz wesentlich von der gewählten Betriebs- und Wartungsstrategie ab.

So gibt es z. B. eine Art der Auflösung für die Brennstäbe, bei der die Erzeugung von Jod eine deutliche Spitze erreicht (Batchbetrieb) und eine andere, bei der sie nahezu konstant bleibt (Säurezudosierung).

Außerdem kann die Auflösung zeitlich kontinuierlich oder mit (regelmäßigen) Unterbrechungen erfolgen, wobei während den Unterbrechungen kein radioaktives Jod erzeugt wird.

Wir legen in dieser Arbeit eine Betriebs- und Wartungsstrategie zugrunde, bei der die freigesetzte Menge an radioaktivem Jod an der oberen Grenze liegt: kontinuierliche Auflösung und tur-nusgemäßer Filterwechsel.



Anhang 1

Zur relativen Feuchte des Abgasstroms in der PASSAT

1.1 Definition der Feuchte

Die relative Feuchte ϕ des Abgasstroms in der PASSAT wird im wesentlichen dadurch bestimmt, daß dieser ein Wasserdampf-Luftgemisch ist. Daher gilt für dessen relative Feuchte, wenn wir die in der Meteorologie übliche Definition benutzen und mit $p^D(\theta)$ den Partialdruck und mit $p_S^D(\theta)$ den Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei der Temperatur θ bezeichnen

$$\phi(\theta) = p^D(\theta) / p_S^D(\theta) . \quad (\text{A1-1})$$

Ist nun unter den gegebenen thermodynamischen Bedingungen

$$p^D(\theta) = p^D(\theta_K) = p_S^D(\theta_K) = \text{konst.} , \quad (\text{A1-2})$$

wobei θ_K die Temperatur des Gemisches ist, bei der alle Feuchtigkeit kondensiert ist, so tritt anstelle von (A1-1)

$$\phi(\theta) = p_S^D(\theta_K) / p_S^D(\theta) , \quad \theta_K \leq \theta \leq \theta_{\text{max}} . \quad (\text{A1-3})$$

Natürlich ist die relative Feuchte $\phi(\theta)$ nur in einem Temperaturbereich definiert, in dem Wasserdampf vorhanden ist.

Für unsere Zwecke genügt es, den Sättigungsdruck des Wasserdampfes gemäß der Beziehung von Clausius/Clapeyron

$$\ln p_S^D(\theta) = 13,62 - 5,07 \cdot 10^3 / (273,1 + \theta) \quad (\text{A1-4})$$

zu approximieren, wobei wir die Koeffizienten 13,62 und $5,07 \cdot 10^3$ über einen L_2 -Fit aus den betreffenden Zahlenwerten in einer Wasserdampf-tafel ermittelt haben.

1.2 Herleitung der Beziehung $p^D(\theta) = \text{konst.}$

Sei bei der Temperatur des Taupunkts θ_K der Gesamtdruck des Gemisches $p_O(\theta_K)$ und seien $p^L(\theta_K)$, $p^D(\theta_K)$ die betreffenden Partialdrucke der Luft (O_2 und N_2) und des H_2O -Dampfes, dann gilt nach dem Dalton'schen Gesetz

$$p_O(\theta_K) = p^D(\theta_K) + p^L(\theta_K) \quad . \quad (A1-5)$$

Erwärmen wir nun den Abgasstrom bei konstantem Druck $p_O(\theta_K)$, so ist

$$p_O(\theta) = p^D(\theta) + p^L(\theta) = p_O(\theta_K) \quad . \quad (A1-6)$$

Da beide Komponenten dem idealen Gasgesetz gehorchen, d.h.

$$p^D(\theta) \cdot V = m^D \cdot R^D \cdot T \quad (A1-7)$$

$$p^L(\theta) \cdot V = m^L \cdot R^L \cdot T$$

und dasselbe Volumen V haben, erhalten wir

$$\frac{p^D(\theta)}{p^L(\theta)} = \frac{m^D R^D}{m^L R^L} = \text{konst.} \quad , \quad (A1-8)$$

also

$$\frac{p^D(\theta)}{p^L(\theta)} = \frac{p^D(\theta_K)}{p^L(\theta_K)} \quad . \quad (A1-9)$$

Aus (A1-6) und (A1-9) folgt

$$p^D(\theta) = p_O(\theta) - p^L(\theta) = p_O(\theta_K) - \frac{p^L(\theta_K)}{p^D(\theta_K)} \cdot p^D(\theta) \quad ,$$

oder

$$p^D(\theta) = \frac{p_O(\theta_K)}{1 + p^L(\theta_K)/p^D(\theta_K)} = p^D(\theta_K) \cdot \frac{p_O(\theta_K)}{p^D(\theta_K) + p^L(\theta_K)} \quad . \quad (A1-10)$$

Dabei wird im letzten Ausdruck wegen (A1-5) der zweite Faktor gleich 1, mithin

$$p^D(\theta) = p^D(\theta_K) \quad . \quad (A1-11)$$

Schließlich gilt per def. $p^D(\theta_K) = p_S^D(\theta_K)$, womit (A-2) bewiesen ist.

Anhang 2

Herleitung der Dichte $f_{XY}(x,y)$ Gl(8)

Die Dichte $f_{XY}(x,y)$ folgt aus der gemeinsamen Lebensdauerdichte $f_{T_1 T_2}(t_1, t_2)$ der beiden Erhitzer, wenn wir $(T_1, T_2) \rightarrow (X = \min(T_1, T_2), Y = T_1 - T_2)$ transformieren.

Fall $T_1 - T_2 < 0$: EH1 vor EH2

Wählen wir

$$\left. \begin{array}{l} u = t_1 \\ v = t_1 - t_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{<====>} \\ t_1 = u \\ t_2 = u - v \end{array} \quad , \quad (A2-1)$$

so erhalten wir mit der Jakobischen Determinante

$$J_{<} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} & \frac{\partial u}{\partial t_2} \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} & \frac{\partial v}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad (A2-2)$$

den Anteil

$$\begin{aligned} f_{UV}(u,v) \cdot du \cdot dv &= |J_{<}| \cdot f_{T_1 T_2}(u, u-v) \cdot du \cdot dv \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (u-v)} \cdot du \cdot dv \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left[(\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) u} \cdot du \right] \cdot \left[\lambda_2 e^{+\lambda_2 v} \cdot dv \right] , \quad (A2-3) \\ &\quad 0 < u < \infty, \quad -\infty < v < 0 \end{aligned}$$

der Gesamtdichte ($u=x, v=y$).

Fall $T_1 - T_2 > 0$: EH2 vor EH1

Der andere Anteil ergibt sich aus

$$\left. \begin{array}{l} u = t_2 \\ v = t_1 - t_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{<====>} \\ t_1 = u + v \\ t_2 = u \end{array} \quad , \quad J_{>} = -1 \quad (A2-4)$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 f_{UV}(u,v) \cdot du \cdot dv &= |J_{>}| \cdot f_{T_1 T_2}(u+v, u) \cdot du \cdot dv \\
 &= \lambda_1 e^{-\lambda_1(u+v)} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} \cdot du \cdot dv \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left[(\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)u} \cdot du \right] \cdot \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1 v} \cdot dv \right] \quad . \quad (A2-5) \\
 &\quad 0 < u < \infty, \quad 0 < v < \infty .
 \end{aligned}$$

Aus (A2-3) und (A2-5) folgt unmittelbar, wenn wir über die entsprechenden Bereiche von u und v integrieren

$$P\{A_{12}\} = P\{EH1 \text{ vor } EH2\} = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (A2-6)$$

$$P\{A_{21}\} = P\{EH2 \text{ vor } EH1\} = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2) \quad .$$

Daher können wir die Dichte $f_{XY}(x, y)$ gemäß

$$\begin{aligned}
 f_{XY}(x, y) \cdot dx \cdot dy &= P\{A_{12}\} \cdot f_{XY}(x, y_2 | A_{12}) \cdot dx \cdot dy_2 \\
 &\quad + P\{A_{21}\} \cdot f_{XY}(x, y_1 | A_{21}) \cdot dx \cdot dy_1 \quad (A2-7)
 \end{aligned}$$

zerlegen, wobei mit $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$

$$\begin{aligned}
 f_{XY}(x, y_2 | A_{12}) &= \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2} \cdot dy_2 \\
 &\quad 0 < x < \infty, \quad -\infty < y_2 < 0 \quad (A2-8)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 f_{XY}(x, y_1 | A_{21}) &= \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} \cdot dy_1 \\
 &\quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y_1 < \infty \quad (A2-9)
 \end{aligned}$$

zu setzen ist.

Anhang 3

Herleitung der Dichte $f_{HY}(h, y | A_{21})$ Gl(16)

Wenn wir nicht zu Störfallbeginn das Jodfilter wechseln, hängt die Freisetzung im ersten Störfall auch von der Restbett-Tiefe h des Jodfilters ab. Dabei ist die Restbett-Tiefe h nach Gl(2) und (3) Funktion des Eintrittzeitpunkts x des ersten Störfalls. Es gilt insbesondere während der Standzeit τ_f des "ersten" Jodfilters

$$h(x) = h_{\max} \left(1 - \frac{x}{\tau_f} \right), \quad 0 < x \leq \tau_f \quad (A3-1)$$

und daher ganz allgemein während der Standzeit eines "beliebigen" Jodfilters

$$h(x) = h_{\max} \left(1 - \frac{x - \left[\frac{x}{\tau_f} \right] \cdot \tau_f}{\tau_f} \right), \quad 0 < x < \infty \quad (A3-2)$$

$[x]$ ganzer Anteil von x , z.B. $[2,71] = 2$.

Die gesuchte Dichte $f_{HY}(h, y | A_{21})$ erhalten wir nunmehr aus der Wahrscheinlichkeit (vgl. A2-9)

$$f_{XY}(x, y | A_{21}) \cdot dx \cdot dy = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \cdot dx \cdot dy, \quad \lambda := \lambda_1 + \lambda_2 \quad (A3-3)$$

und der zweidimensionalen Variablentransformation

$$(X, Y) \rightarrow \left(H = h_{\max} \left(1 - \frac{X - \left[\frac{X}{\tau_f} \right] \cdot \tau_f}{\tau_f} \right), \quad Z = Y \right) \quad (A3-4)$$

Wegen der zahlentheoretischen Funktion $[\cdot]$ ist diese Transformation ein wenig knifflig. Sie läßt sich jedoch leicht bewerkstelligen, wenn wir den folgenden Satz aus /4/ verwenden:

Satz

Sei die Verteilung $F_{XY}(x, y)$ absolut stetig (keine Punkt- oder Linien-"Massen") mit der Dichte $f_{XY}(x, y)$ und

$$\left. \begin{aligned} U &= \phi(X, Y) \\ V &= \psi(X, Y) \end{aligned} \right\} \quad (A3-5)$$

eine Variablentransformation mit den Jakobischen Determinante

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

dann haben wir, um die transformierte Dichte $f_{UV}(u,v)$ berechnen zu können, alle Lösungen (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots$ des Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} u &= \phi(x,y) \\ v &= \psi(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (A3-6)$$

zu ermitteln. Kennen wir diese, so ist

$$f_{UV}(u,v) = \sum_{i=1}^n \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|}, \quad (A3-7)$$

wobei n endlich oder (abzählbar) unendlich sein kann.

Hat (A3-5) für ein Paar (x_0, y_0) keine reelle Lösung, so ist dort

$$f_{UV}(u,v) = 0 \quad \square \quad (A3-8)$$

In unserem Fall lauten die Transformationsgleichungen ($u=h, v=z$)

$$\left. \begin{aligned} h &= h_{\max} \cdot \left(1 - \frac{x - \left[\frac{x}{\tau_f} \right] \cdot \tau_f}{\tau_f} \right) \\ z &= y \end{aligned} \right\}$$

oder äquivalent dazu

$$\left. \begin{aligned} h &= h_{\max} \cdot \left(1 - \frac{x - k \cdot \tau_f}{\tau_f} \right) \\ z &= y \end{aligned} \right\}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (A3-9)$$

wobei k je nach dem Wert von x zu wählen ist.

Es ist unmittelbar zu sehen, daß (A3-9) durch die Wertepaare

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \tau_f \left[(k+1) - \frac{h}{h_{\max}} \right] \\ y &= z \end{aligned} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A3-10})$$

befriedigt wird. Diese ergeben unabhängig von k für die Jakobische Determinante

$$J(x_k, y) = \begin{vmatrix} -\frac{h_{\max}}{\tau_f} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h_{\max}}{\tau_f} \quad . \quad (\text{A3-11})$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Daher erhalten wir für die gesuchte Dichte

$$\begin{aligned} f_{HY}(h, y | A_{21}) &= \frac{\tau_f}{h_{\max}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_{XY} \left(\tau_f \left[(k+1) + \frac{h}{h_{\max}} \right], y | A_{21} \right) \\ &= \frac{\tau_f}{h_{\max}} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot \exp \left(-\lambda \tau_f \left[(k+1) - \frac{h}{h_{\max}} \right] \right) \cdot \lambda_1 \exp(-\lambda_1 y) \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \cdot \frac{\lambda \tau_f}{h_{\max}} \exp \left(+\lambda \tau_f \left(\frac{h}{h_{\max}} - 1 \right) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda \tau_f} \right)^k \\ &= \frac{\alpha \cdot e^{+\alpha h}}{e^{+\alpha h_{\max} - 1}} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}, \quad \alpha := \frac{\lambda \cdot \tau_f}{h_{\max}}, \end{aligned} \quad (\text{A3-12})$$

$0 < h \leq h_{\max}, \quad 0 < y < \infty.$

Dabei ist zu beachten, daß in (A3-12) die Restbett-Tiefe H rückwärts läuft.

Aus (A3-12) ist unmittelbar zu entnehmen, daß die Zufallsveränderlichen H (Restbett-Tiefe) und Y (Eintrittszeitpunkt des Ausfalls von EH1) stochastisch unabhängig sind. D.h.

$$f_{HY}(h, y | A_{21}) \cdot dh \cdot dy = f_H(h | A_{21}) \cdot dh \cdot f_Y(y | A_{21}) \cdot dy \quad (\text{A3-13})$$

mit

$$f_H(h | A_{21}) \cdot dh = \frac{\alpha \cdot e^{\alpha h}}{e^{\alpha h_{\max} - 1}} dh, \quad 0 < h \leq h_{\max}, \quad (\text{A3-14})$$

$$f_Y(y|A_{21}) \cdot dy = \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 y} dy, \quad 0 < y < \infty. \quad (\text{A3-15})$$

Führen wir nun anstelle der rückwärtslaufenden Restbett-Tiefe H die vorwärtslaufende (verbrauchte) Bett-Tiefe

$$\hat{H} = h_{\max} - H$$

ein, so müssen wir überall, wo die Dichte $f_H(h|A_{21})$ auftritt, diese durch die Dichte

$$f_{\hat{H}}(\hat{h}|A_{21}) = \frac{\alpha e^{-\alpha \hat{h}}}{1 - e^{-\alpha \hat{h}}}, \quad 0 < \hat{h} < h_{\max} \quad (\text{A3-16})$$

ersetzen.

Literatur

/4/ Papoulis, A

Probability, random variables and stochastic processes.

McGraw Hill, New York (1965).

A STOCHASTIC MODEL FOR THE RELEASE OF RADIOACTIVE IODINE IN THE DISSOLVER OFFGAS CLEANING UNIT PASSAT ¹⁾

Heinz Wenzelburger
Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Postfach 3640, D-7500 Karlsruhe 1, West Germany

ABSTRACT

We present a stochastic model of PASSAT for the first failure. From the known failure modes the power supply causes the strongest release of radioactive iodine. We calculate the probability distribution of this release for a typical operation- and maintenance strategy. Due to the extreme conditions under which an increased release takes place, this distribution is far away from a normal one.

1. INTRODUCTION

In the dissolver offgas cleaning unit PASSAT there is essentially one reason for all failures which renders an increased release of radioactive iodine: too much relative humidity of the offgas. This can be explained as follows. The offgas is cleaned from radioactive iodine by using a filter. This filter adsorbs iodine with Ag-impregnated silicagel by means of chemisorption at a working temperature of 130°C. If a failure in the PASSAT facility causes the offgas to cool down, there will be an increased release of iodine because of growing relative humidity. In particular the iodine filter will be completely permeable if the temperature of the offgas is below its dew point which is, in the present design, about 30°C.

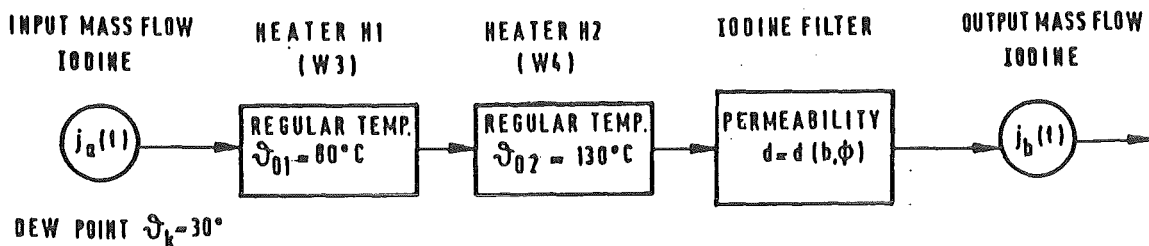


Fig.1

We are modelling a system with two heaters (cf. fig. 1) which adjust the temperature of the offgas as required by the HEPA and iodine filters. Concerning iodine adsorption the heater H1 is redundant. A failure with increased release of iodine only happens if both heaters fail within the period in which a charge of fuel elements is dissolved, a process which cannot be immediately stopped for technological reasons.

¹⁾ Prepared for International Meeting Fuel Reprocessing and Waste Management, August 26-29, 1984 / Jackson, Wyoming (USA) .

There are three causes for failure of both heaters in the critical time period: failure of heater H1 preceding failure of H2 (= mode 1), failure of heater H2 preceding failure of H1 (= mode 2) and failure of power supply (= mode 3) corresponding to a simultaneous failure of both heaters. Since in the failure modes 1 and 2 the sequence and the time difference of the failures are essential, they cannot be represented by means of a structure function as usually done by fault tree analysis. In a more detailed analysis, we would have to consider 3! failure modes of the type 123, 132, ..., etc., whereas e.g. 132 denotes failure of heater H1 preceding failure of power supply preceding failure of heater H2.

Now we give a crude estimation of which one of the failure modes causes the strongest release of radioactive iodine. We assume that the lifetimes of the two heaters H1 and H2 (indices 1,2) and of the power supply (index 3) are exponentially distributed and are mutually statistically independent. Let their failure rates be $\lambda_1 = \lambda_2 (\approx 10^{-5} [\text{hr}^{-1}])$ and $\lambda_3 (\approx 10^{-6} [\text{hr}^{-1}])$. Then the probability for the failure mode i , provided it is already known that a failure occurred, is $\lambda_i / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $i=1,2,3$.

Besides this probability, there is a second one which affects modes 1 and 2 : the probability for a failure of both heaters within the period $\rho = 8[\text{hrs}]$ of dissolving. Since the exponential distribution is memoryless this probability is $(1 - \exp(-\lambda_2 \cdot \rho))$, if heater H1 has failed first, and similarly for mode 2. Therefore under the condition that a failure occurred, the probability for failure mode 3 is $\lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 4.8 \cdot 10^{-2}$ and the probability for failure mode 1 is $(\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \cdot (1 - \exp(-\lambda_2 \rho)) \approx \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \rho / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 3.81 \cdot 10^{-5}$. This means that the probability for the occurrence of mode 3 is about three orders of magnitude higher than for modes 1 and 2 respectively.

Since the release in mode 1 or 2 is at most one order of magnitude higher than in mode 3, mainly failure mode 3 contributes to the average amount of released radioactive iodine, whereas mode 1 and 2 may be neglected.

Until now we discussed a stochastic model for the release in the first failure. In practice it is also important to know the release in an arbitrary chosen time interval $(0, t)$. However, such an analysis is much more complicated since we have to evaluate not only a few probability distributions of the type

$P\{C_1 \leq z\}$, whereas $C_1 :=$ release in the first failure,

but a family of probability distributions (= stochastic process)

$\{P\{C(t) \leq z\}, t \in \mathbb{R}\}$, whereas $C(t) :=$ cumulated release in the time interval $(0, t)$.¹

In this paper we restrict our analysis to the first failure, presenting an analytical model for a typical operation and maintenance strategy.

2. DETERMINISTIC PART OF THE MODEL

PASSAT is designed to reduce the input mass flow $j_a(t)$ [kg/hr] of iodine impinging on the iodine filter at time t to the output mass flow

$$j_b(t) = d(t) \cdot j_a(t), \quad 0 \leq d(t) \leq 1. \quad (2-1)$$

Thereby the permeability of the iodine filter $d(t) = d(\phi(t), b(t))$ depends on two parameters: the relative humidity $\phi(t)$ of the offgas and the charge $b(t)$ of the iodine filter. The degree of permeability is proportional to the charge of the filter as well as to the relative humidity. The filter will be replaced if its maximum permissible charge is reached. We remark that a certain operation strategy can be selected in which the charge of the iodine filter is immaterial in case of failure.

Under regular operation conditions the permeability of the iodine filter is nearly constant, whereas $d(t) = \bar{d} < 10^{-7}$. However, the experimental data for $d(t)$ are so uncertain that the 95% confidence region includes one order of magnitude.

In case of failure we can use a step function to describe the behaviour of the permeability near the dew point of the offgas. When the temperature of the offgas reaches its dew point, the permeability jumps from \bar{d} to 1. A close system analysis showed that in the given scenario the step function provides a good approximation for the permeability. In fact, using the step function there is a maximum difference of 5% in the accumulated release of iodine during a failure.

This model of PASSAT is based on an operation strategy for the reprocessing plant in which one charge of fuel elements is processed within $\tau = 24$ hours. A working cycle $(0, \tau)$ consists of a period $(0, \tau_a)$, $\tau_a = 8$ [hrs], in which the fuel elements are dissolved in nitric acid and of a period (τ_a, τ) in which the uranium and plutonium are extracted from the fuel elements.

We assume that radioactive iodine is only produced during the period $(0, \tau_a)$ of dissolving. In the period of dissolving nitric acid will be added from time to time in order to keep the mass flow of iodine $j_o = 0.129/8$ [kg/hr] as constant as possible. Hence in a working cycle we have the following input mass flow of radioactive iodine:

$$j_a(t) = \begin{cases} j_o & \text{for } 0 < t \leq \tau_a \\ 0 & \text{for } \tau_a < t \leq \tau \end{cases} \quad (2-2)$$

2.1 Failure mode 3 "power supply failed first"

If the power supply fails within a working cycle at time x , the temperature $\theta(t)$ of the offgas at the iodine filter drops according to measurements in a pilot facility as follows:

$$\theta(t) = \begin{cases} u+v & \text{for } 0 < t \leq x \\ u+v \cdot \exp(-\kappa \cdot (t-x)) & \text{for } x < t \leq \tau \end{cases} \quad (2-3)$$

$$\text{with } u = 24 \text{ [}^\circ\text{C]}, v = 106 \text{ [}^\circ\text{C]}, \kappa = 0.51 \text{ [hr}^{-1}\text{]} \cdot 2$$

Release only takes place, if x is in the period $(0, \tau_a)$ of dissolving, whereas according to (2-3) a certain time

$$t_{\downarrow}(0) := t_K^{-x} = -\frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{\theta_K^{-u}}{v} \right] = 5.631 \text{ [hrs]} \quad (2-4)$$

passes, until the temperature of the offgas is below its dew point $\theta_K = 30^\circ\text{C}$ and full release abruptly starts. Hence increased release only takes place in a certain time interval $(0, y_m)$ during the period $(0, \tau_a)$ of dissolving, whereas $y_m = \tau_a - t_{\downarrow}(0) = 2.369 \text{ [hrs]}$.

We now select a repair strategy which gives us an upper bound of the release of radioactive iodine and also is mathematically convenient.

Repair strategy

- (i) Failure mode "power supply failed first" in $(0, \tau_a)$ will not be discovered before an increased release has started.
- (ii) Repair will last at least until the end of the period $(0, \tau_a)$ of dissolving and at most until the end of period (τ_a, τ) of processing.

In failure mode 3 this repair strategy with the assumptions made above will yield the accumulated amount of radioactive iodine (cost function)

$$c(x) = \begin{cases} (\bar{d} \cdot j_o) \cdot t_{\downarrow}(0) + j_o(y_m - x) & 0 < x \leq y_m \\ (\bar{d} \cdot j_o) \cdot (\tau_a - x) & \text{for } y_m < x \leq \tau_a, \\ 0 & \tau_a < x \leq \tau \end{cases} \quad (2-5)$$

with the mean permeability \bar{d} at regular operation in $(0, \tau_a)$.

Due to (2-5) for a failure not only an increased but also a regular release is taken into account. Thus in (2-5) for $0 < x \leq y_m$ the term $(\bar{d} \cdot j_o) \cdot t_{\downarrow}(0) = (\bar{d} \cdot j_o) \cdot (\tau_a - y_m)$ represents the regular part and the term $j_o(y_m - x)$ the increased part of the release in $(0, \tau_a)$. Since $(\bar{d} \cdot j_o) \cdot t_{\downarrow}(0) \ll j_o(y_m - x)$ we take for the following considerations only the larger term.

2.2 Failure modes "heater Hi failed first", $i=1,2$

The system analysis of this class of failure modes is more complicated than of the class "power supply failed first". Evidently here the sequence of failures is important. I.e. we have to consider the failure modes 123, 132, 213 and 231, which can be merged to obtain 12 and 21. Note that failure mode 123 reduces to 12 with failure rates λ_1 and λ_2 , since a failure of the power supply is without consequences for the defect heaters. Similarly, the failure mode 132 reduces to 12 with failure rates λ_1 and λ_3 , since the failure of the power supply has the same consequence as a failure of heater H2. Using the selected repair strategy we may neglect these failure modes as already shown in the introduction.

3. STOCHASTIC PART OF THE MODEL

The following theory is based on the joint density for the lifetimes of the two heaters and the power supply for which we assume

$$f_{T_1 T_2 T_3}(t_1, t_2, t_3) \cdot dt_1 \cdot dt_2 \cdot dt_3 := P\{t_1 < T_1 \leq t_1 + dt_1, \dots, t_3 < T_3 \leq t_3 + dt_3\}$$

$$= \lambda_1 \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot t_1) \cdot dt_1 \cdot \lambda_2 \cdot \exp(-\lambda_2 \cdot t_2) \cdot dt_2 \cdot \lambda_3 \cdot \exp(-\lambda_3 \cdot t_3) dt_3, \quad (3-1)$$

$$\lambda_1 = 7.0 \cdot 10^{-6} [\text{hr}^{-1}], \quad \lambda_2 = 7.5 \cdot 10^{-6} [\text{hr}^{-1}], \quad \lambda_3 = 6.85 \cdot 10^{-7} [\text{hr}^{-1}].$$

I.e. the life times T_1 and T_2 of the two heaters H1 and H2 and the life time T_3 of the power supply are exponentially distributed and are mutually statistically independent.

3.1 Conditional distribution for time X "power supply failed first"

The beginning of a first failure on the full time scale $(0, \infty)$ is at

$$U = \text{Min}(T_1, T_2, T_3), \quad (3-2)$$

where any of the three failure modes is possible. The probability distribution for U follows from

$$P\{U > t\} = P\{T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t\} = \exp(-\lambda_1 t) \cdot \exp(-\lambda_2 t) \cdot \exp(-\lambda_3 t), \quad (3-3)$$

yielding

$$P\{0 < U \leq u\} = 1 - \exp(-\lambda \cdot u), \quad 0 < u < \infty \quad (3-4)$$

$$\text{with } \lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Since the reprocessing plant is processed periodically we are not interested in the density of time U in $(0, \infty)$ but in that of the corresponding time X in a working period $(0, \tau)$. For the event $\{0 < X \leq x\}$ it is immaterial in which working period the first failure begins. This yields

$$P\{0 < X \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{k\tau < U \leq k\tau + x\} \quad (3-5)$$

and from (3-4) we obtain

$$\begin{aligned} P\{0 < X \leq x\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda \cdot (k \cdot \tau)} - e^{-\lambda \cdot (k \cdot \tau + x)} \right) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda \cdot x} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda \tau} \right)^k = \frac{1 - e^{-\lambda \cdot x}}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}}, \quad 0 < x \leq \tau. \end{aligned} \quad (3-6)$$

Using (3-1) the distribution (3-6) may be decomposed according to

$$P\{0 < X \leq x\} = \sum_{k=1}^3 P\{X = T_k\} \cdot P\{X \leq x | X = T_k\}, \quad (3-7)$$

$$\text{whereas } P\{X = T_k\} = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad k=1, 2, 3 \quad (3-8)$$

$$\text{and } P\{X \leq x | X = T_k\} = \frac{1 - e^{-\lambda \cdot x}}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}}, \quad 0 < x \leq \tau.$$

Since (3-1) is symmetric the three conditional distributions $P\{X \leq x | X = T_k\}$ all look the same.

The densities of $P\{X \leq x | X=T_k\}$ are respectively

$$f_X(x|X=T_k) \cdot dx = P\{x < X \leq x+dx | X=T_k\} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}} \cdot dx, \quad k=1,2,3. \quad (3-9)$$

3.2 Calculation of the probabilities $P\{X=T_k\}$, $k=1,2,3$

It is obvious that

$$P\{X=T_3\} = P\{T_3 < T_1 < T_2\} + P\{T_3 < T_2 < T_1\}, \quad (3-10)$$

where e.g. $P\{T_3 < T_1 < T_2\}$ can be calculated from

$$P\{u < T_3 \leq u+du, v < T_1 - T_3 \leq v+dv, w < T_2 - T_1 \leq w+dw\} \\ 0 < u < \infty, 0 < v < \infty, 0 < w < \infty.$$

This probability follows from the joint density (3-1) by means of a variable transformation $(T_1, T_2, T_3) \rightarrow (U = T_3, V = T_1 - T_3, W = T_2 - T_1)$ i.e.

$$\left. \begin{array}{l} u = t_3 \\ v = t_1 - t_3 \\ w = t_2 - t_1 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} t_1 = u+v \\ t_2 = u+v+w \\ t_3 = u \end{array} \right\}, \quad (3-11)$$

where the Jacobian is $J = 1$.

We obtain

$$\begin{aligned} & P\{u < T_3 \leq u+du, v < T_1 - T_3 \leq v+dv, w < T_2 - T_1 \leq w+dw\} \\ &= |J| \cdot f_{T_1 T_2 T_3}(u+v, u+v+w, u) \cdot du \cdot dv \cdot dw \\ &= \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1(u+v)} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2(u+v+w)} \cdot \lambda_3 \cdot e^{-\lambda_3 u} \cdot du \cdot dv \cdot dw \\ &= \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \lambda e^{-\lambda u} \cdot du \cdot \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} v} \cdot dv \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 w} \cdot dw, \end{aligned} \quad (3-12)$$

$$\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_{12} := \lambda_1 + \lambda_2.$$

Hence

$$\begin{aligned} P\{T_3 < T_1 < T_2\} &= \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \int_{w=0}^{\infty} |J| \cdot f_{T_1 T_2 T_3}(u+v, u+v+w, u) \cdot du \cdot dv \cdot dw \\ &= \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned} \quad (3-13)$$

and if we interchange the indices 1 and 2

$$P\{T_3 < T_2 < T_1\} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3-14)$$

Finally we have for $k=3$ and similarly for $k = 1, 2$

$$P\{X=T_k\} = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad k=1,2,3. \quad (3-15)$$

3.3 Conditional distribution of the released amount C of radioactive iodine for failure mode 3

In this section we derive the conditional distribution of the amount C released during a failure of power supply using the special repair strategy discussed in 2.1. Considering this case, C depends only on a single random variable X, which is the beginning of failure mode 3 in (0, τ). Hence we obtain our conditional distribution from the density (3-9) via a variable transformation $X \rightarrow C(X)$ according to (2-5).

There are three regions which contribute to the distribution $P\{0 < C \leq c | H_3\}$, $H_3 := \{\text{power supply failed first}\} = \{X = T_3\}$:

i) Contribution from region $0 < X \leq y_m$

$C(X) = j_o \cdot (y_m - X)$ in $0 < X \leq y_m$ yields for the event

$$\{0 < C(X) \leq c\} = \{0 < j_o \cdot (y_m - X) \leq c\} = \{y_m - c/j_o \leq X \leq y_m\},$$

hence by (3-9)

$$\begin{aligned} P\{0 < C(X) \leq c | 0 < X \leq y_m\} &= \int_{y_m - c/j_o}^{y_m} f_X(x | H_3) \cdot dx \\ &= \frac{e^{-\lambda \cdot y_m}}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}} \cdot \left[e^{+\lambda \cdot c/j_o} - 1 \right], \quad 0 < c \leq j_o \cdot y_m. \end{aligned} \quad (3-16)$$

ii) Contribution from region $y_m < X \leq \tau_a$

In the same way $C(X) = \xi \cdot (\tau_a - X)$, $\xi := \bar{d} \cdot j_o$ in $y_m < X \leq \tau_a$ yields for the event

$$\{0 < C(x) \leq c\} = \{0 < \xi \cdot (\tau_a - X) \leq c\} = \{\tau_a - c/\xi \leq X \leq \tau_a\},$$

hence by (3-9)

$$\begin{aligned} P\{0 < C(x) \leq c | y_m < X \leq \tau_a\} &= \int_{\tau_a - c/\xi}^{\tau_a} f_X(x | H_3) \cdot dx \\ &= \frac{e^{-\lambda \cdot \tau_a}}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}} \left[e^{+\lambda \cdot c/\xi} - 1 \right], \quad 0 < c \leq \xi \cdot (\tau_a - y_m). \end{aligned} \quad (3-17)$$

iii) Contribution from region $\tau_a < X \leq \tau$

In this region, the processing period, no pollutant will be released because of $C(X) = 0$ in $\tau_a < X \leq \tau$. Its corresponding probability (atom!) is

$$P\{C(X) = 0 | \tau_a < X \leq \tau\} = P\{C = 0 | H_3\} = \int_{\tau_a}^{\tau} f_X(x | H_3) \cdot dx = \frac{e^{-\lambda \cdot \tau_a} - e^{-\lambda \tau}}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}} \cdot \quad (3-18)$$

The distribution $P\{0 \leq C \leq c | H_3\}$ we are looking for, is in the regions $0 \leq c \leq \xi(\tau_a - y_m)$ and $\xi(\tau_a - y_m) < c \leq j_o \cdot y_m$ analytically different. To the region $0 \leq c \leq \xi(\tau_a - y_m)$ contributes not only the atom from region (iii) but also the probabilities from region i) and ii) because of $\xi(\tau_a - y_m) < j_o \cdot y_m$. From this we obtain the distribution

$$G^{(3)}(c) := P\{0 \leq C \leq c | H_3\} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\lambda \cdot \tau_a} \left[e^{+\lambda \cdot c / \xi} - e^{-\lambda \cdot (\tau - \tau_a)} \right] - e^{-\lambda \cdot y_m} \left[e^{+\lambda \cdot c / j_o} - 1 \right] \\ \left[e^{-\lambda \cdot y_m} - e^{-\lambda \cdot \tau} \right] + e^{-\lambda \cdot y_m} \left[e^{+\lambda \cdot c / j_o} - 1 \right] \end{array} \right. \quad (3-19)$$

for $0 \leq c \leq \xi(\tau_a - y_m)$ and $\xi \cdot (\tau_a - y_m) < c \leq j_o \cdot y_m$ respectively.

Since $\lambda \cdot a \ll 1$ ($a = y_m, \tau, c/j_o$), (3-19) may be approximated by ($\xi := \bar{d} \cdot j_o$)

$$P\{0 \leq C \leq c | H_3\} = \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} (1 + \bar{d}) \frac{c}{\xi}, \quad 0 \leq c \leq \xi \cdot (\tau_a - y_m) \\ \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \left[(\tau_a - y_m) + \frac{c}{j_o} \right], \quad \xi \cdot (\tau_a - y_m) < c \leq j_o \cdot y_m \end{array} \right. \quad (3-20)$$

It is easy to calculate the first two moments of the distribution (3-20) with their approximations following from $y_m < \tau_a$ and $\bar{d} \ll 1$:

$$E(C | H_3) = \frac{1}{2} \frac{\tau_a}{\tau} \cdot \left[\bar{d} \cdot \left(1 - \frac{y_m}{\tau_a}\right)^2 + \left(\frac{y_m}{\tau_a}\right)^2 \right] \cdot (j_o \tau_a) \approx \frac{y_m}{\tau} \cdot \left[\frac{1}{2} j_o \cdot y_m \right] \quad (3-21)$$

$$E(C^2 | H_3) = \frac{1}{3} \frac{\tau_a}{\tau} \cdot \left[\bar{d}^2 \cdot \left(1 - \frac{y_m}{\tau_a}\right)^3 + \left(\frac{y_m}{\tau_a}\right)^3 \right] \cdot (j_o \tau_a)^2 \approx \frac{y_m}{\tau} \cdot \left[\frac{1}{3} (j_o \cdot y_m)^2 \right] \quad (3-22)$$

Finally (3-21) and (3-22) yield

$$E(C | H_3) \pm D(C | H_3) = \left[\frac{1}{2} \frac{y_m}{\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \frac{y_m}{\tau}\right) \cdot \frac{y_m}{\tau}} \right] \cdot (j_o y_m) \quad (3-23)$$

The given approximations for the first two moments may be derived from the following obvious considerations. Since the failure rates λ_i ($i=1,2,3$) are very small, the beginning of a failure at time X in $(0, \tau)$ is almost uniformly distributed. We therefore conclude that the probability for an increased release is y/τ because it only can take place in the time interval $(0, y)$. This yields the first factor in (3-21) and (3-22) respectively. Assuming that an increased release C is uniformly distributed in $(0, j_o \cdot y_m)$ the first two moments about the point zero are the second factor in (3-21) and (3-22) respectively.

3.4 Unconditional distribution of the released amount C of radioactive iodine for the first failure

If all three failure modes contribute a comparable amount to a release, the unconditional distribution of the release C in the first failure is of the following form:

$$G(c) := P\{0 < C < c\} = \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} G^{(k)}(c) . \quad (3-24)$$

Since in our scenario the amount of the release of the failure modes 1 and 2 is much smaller than that of failure mode 3 we put it exactly to zero. This trick allows us to replace the terms for $k = 1, 2$ by

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} G^{(1)}(c) + \frac{\lambda_2}{\lambda} G^{(2)}(c) = 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda}, \quad \lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (3-25)$$

which is a part of the atom of the distribution $G(c)$ at the point $c = 0$:

$$G(0) = P\{C = 0\} = 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda} \frac{\tau_a}{\tau} . \quad (3-26)$$

We calculate the absolutely continuous part of $G(c)$ from (3-20):

$$P\{z < C < z + dz\} = \frac{\lambda_3}{\lambda \cdot \tau} \begin{cases} (1 + \bar{d}) \frac{dz}{\xi} & 0 < z < \xi(\tau_a - y_m) \\ \frac{dz}{j_o} & \xi(\tau_a - y_m) < z < j_o \cdot y_m \end{cases} . \quad (3-27)$$

Hence $G(c)$ has as mean value and standard deviation:

$$E(C) \pm D(C) = \left[1 \pm \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\tau}{y_m} \frac{\lambda}{\lambda_3} - 1} \right] \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda} \cdot \frac{y_m}{\tau} \left[\frac{1}{2} j_o \cdot y_m \right] . \quad (3-28)$$

4. NUMERICAL RESULTS FOR THE FIRST FAILURE

All numerical results have been calculated using the following constants:

period of working $\tau = 24$ [hrs] , period of dissolving $\tau_a = 8$ [hrs] , period

of increased release $y_m = 2.37$ [hrs], input mass flow of iodine $j_0 = 1.61 \cdot 10^{-2}$ [kg/hr], permeability of the iodine filter during regular operation $\bar{d} = 5.4 \cdot 10^{-8}$, failure rates $\lambda_1 = 7.0 \cdot 10^{-6}$ [hr⁻¹] (heater H1), $\lambda_2 = 7.5 \cdot 10^{-6}$ [hr⁻¹] (heater H2), $\lambda_3 = 6.85 \cdot 10^{-7}$ [hr⁻¹] (power supply).

4.1 Conditional distribution of the released amount of radioactive iodine for H_3 (= "power supply failed first")

Maximum amount of released iodine

$$3.82 \cdot 10^{-2} \text{ [kg]}.$$

Mean value and standard deviation

$$E(C|H_3) + D(C)|H_3 = 1.89 \cdot 10^{-3} + 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]}.$$

Confidence regions of the distribution (3-20)

$$P\{0 < C < 3.00 \cdot 10^{-10}\} = 0.681, \quad P\{0 < C < 4.90 \cdot 10^{-8}\} = 0.900,$$

$$P\{0 < C < 1.89 \cdot 10^{-2}\} = 0.950, \quad P\{0 < C < 3.44 \cdot 10^{-2}\} = 0.990.$$

4.2 Unconditional distribution of the released amount of radioactive iodine for the first failure

Probability for no release

$$P\{C = 0\} = 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda} \frac{\tau_a}{\tau} = 0.985.$$

Mean value and standard deviation

$$E(C) + D(C) = 8.50 \cdot 10^{-5} + 1.469 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]}.$$

Confidence regions of the distribution (3-26/7)

$$P\{0 < C < 2.35 \cdot 10^{-9}\} = 0.990, \quad P\{0 < C < 4.91 \cdot 10^{-9}\} = 0.996,$$

$$P\{0 < C < 1.24 \cdot 10^{-2}\} = 0.997, \quad P\{0 < C < 2.97 \cdot 10^{-2}\} = 0.999.$$

The above distributions come very close to step functions and are clearly far away from normal distributions. Therefore it is not possible to characterize them sufficiently by their means and standard deviations. Using confidence regions this difficulty will not arise. Moreover, it is not feasible to handle this kind of distribution by simulation techniques.

REFERENCES

1. P. Zinterhof, "Markoff-Erneuerungsprozesse mit allgemeinen Kostenfunktionen", this report.
2. K. NAGEL and J. FURRER, "Zeitabhängige Modellierung einer Jodsorptionsfilterstrecke," KfK Rep. 3544, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1983).

Ein Erneuerungsprozess mit deterministischer
Abfolge der Zustände

Peter Zinterhof

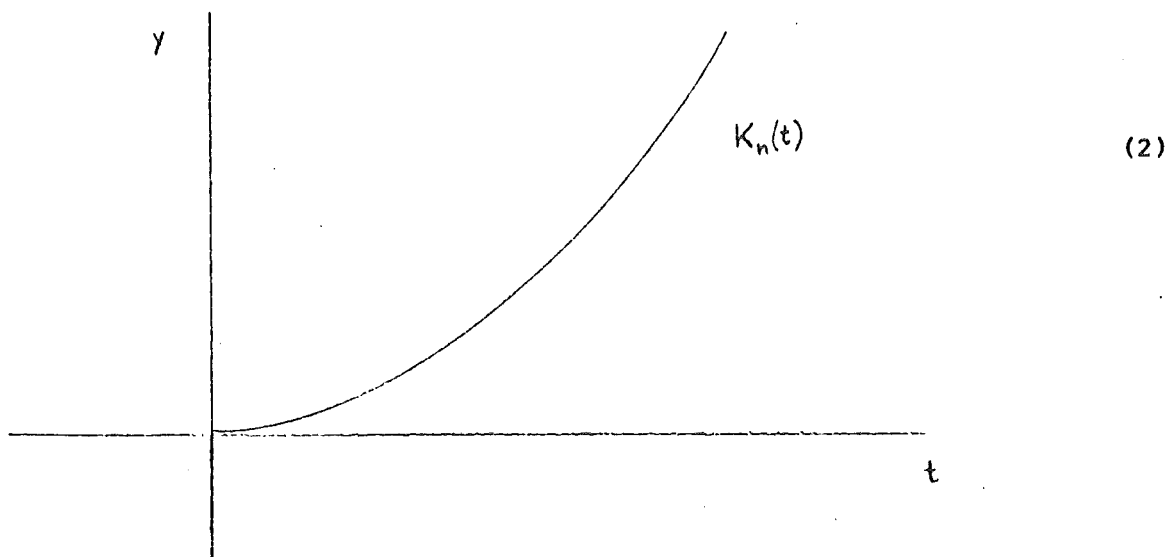
In der klassischen Erneuerungstheorie werden Systeme untersucht, die einen einzigen Zustand haben und dessen Dauer eine zufällige Variable ist. Hier interessiert vorwiegend die Anzahl der Erneuerungen in einem vorgegebenen Zeitintervall $[0, t]$. Diese Anzahl von Erneuerungen in einem vorgegebenen Zeitbereich ist ebenfalls eine Zufallsveränderliche. Die Erneuerungszeitpunkte liefern einen Punktprozeß, der im Falle unabhängig identisch exponential verteilter Lebensdauern ein Poissonprozeß ist. Falls das System zwei Zustände annehmen kann, die man z.B. mit "up" and "down" bezeichnet, spricht man im Falle der Unabhängigkeit der aufeinanderfolgenden sich abwechselnden Betriebsdauern ("up") und Ausfallsdauern ("down") von einem alternierenden Erneuerungsprozeß. Bei einem alternierenden Prozeß interessiert etwa die Wahrscheinlichkeit $k(t)$, daß der Prozeß sich zum Zeitpunkt t im Zustand "up" befindet. Diese zeitabhängige Wahrscheinlichkeit $k(t)$ heißt Bereitschaftskoeffizient. Die kumulative Betriebsdauer ("up-time") im Zeitintervall $[0, t]$ ist ebenfalls eine im Zentrum des Interesses stehende Zufallsvariable. Selbst unter sehr einfachen Annahmen über die Verteilung der Betriebs- und Ausfallsdauern ist die Bestimmung der Verteilung der kumulativen Betriebsdauern nicht einfach. Diese Verteilung ist selbst im Falle, daß die Verweilzeitverteilungen in den einzelnen Zuständen elementare Funktionen sind, sehr oft nicht mehr durch elementare Funktionen ausdrückbar. Die alternierenden Erneuerungsprozesse haben ungeachtet ihrer großen theoretischen und praktischen Bedeutung den Nachteil, daß man mit ihnen nur Systeme beschreiben kann, die zwei Zustände annehmen können. Für viele praktische Zwecke ist folgendes Modell nützlich:

Das System nimmt höchstens abzählbar viele Zustände an und die Verweildauern in den einzelnen Zuständen sind voneinander unabhängig. Darüber hinaus ist die Abfolge der Zustände in diesem Modell als deterministisch angenommen. Ein solches Modell eignet sich z.B. im Gegensatz zu den alternierenden Erneuerungsprozessen sehr gut, um Alterungsprozesse, Einbrennvorgänge, Systemverbesserungen nach Reparaturen, u.a.m. zu beschreiben, da sich die Verweilzeitverteilungen epochenweise ändern können, solange nur die deterministische Abfolge der Zustände erhalten bleibt. Wir bezeichnen wegen der deterministischen Abfolge der Zustände die höchstens abzählbar vielen auftretenden Zustände mit $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Die zufällige Verweilzeit des Prozesses im n -ten Zustand bezeichnen wir mit τ_n . Seien die Verteilungsfunktionen $D^{(n)}(t)$ von τ_n als bekannt vorausgesetzt:

$$P \{ \tau_n \leq t \} = D^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Wir nehmen weiters an, daß im n -ten Zustand des Systems Kosten entstehen. Diese Kosten (Freisetzungen) hängen vom Zustand n ab und werden aus physikalisch einsichtigen Gründen als monoton wachsend in der Zeit des Zustandes n betrachtet. Wir bezeichnen diese zeitabhängigen und zustandsabhängigen Kosten mit $K_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$

Die Situation wird in (2) veranschaulicht:



Da die Verweildauer des Systems im n -ten Zustand eine Zufallsvariable τ_n ist, ist der Vektor $(\tau_n, K_n(\tau_n))$ ein zufälliger Vektor in der Ebene. Dieser Zufallsvektor hat die Besonderheit, daß alle seine Realisierungen auf der Kurve $(t, K_n(t)), t \geq 0$, liegen. Er ist also auf die Menge $\{(t, K_n(t)), t \geq 0\}$ konzentriert. Diese Punktmenge der Ebene hat jedoch das ebene Maß Null. Dies bedeutet, daß das Verteilungsmaß des Zufallsvektors $(\tau_n, K_n(\tau_n))$ auf eine zweidimensionale Lebesguesche Nullmenge konzentriert ist. Das Verteilungsmaß des Vektors $(\tau_n, K_n(\tau_n))$ sei mit $\Delta^{(n)}(t, y) = P\{\tau_n \leq t, K_n(t) \leq y\}$ bezeichnet. $\Delta^{(n)}(t, y)$ ist also im Sprachgebrauch der Maßtheorie ein singuläres Maß. $\Delta^{(n)}(t, y)$ läßt sich jedoch unter Kenntnis der Verteilung $D^{(n)}(t)$ und der Kostenfunktion $K_n(t)$ leicht bestimmen:

$$\Delta^{(n)}(t, y) = D^{(n)}(\min(t, K_n^{-1}(y))) \quad (3)$$

Hier bedeutet $K_n^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von $K_n(t)$. Da $K_n(t)$ nicht stetig zu sein braucht, wird wie üblich festgelegt, daß $K_n^{-1}(y)$ in sinngemäßer Weise konstant ist, wo $K_n(t)$ einen Sprung macht, und daß $K_n^{-1}(y)$ einen Sprung macht, wo $K_n(t)$ konstant ist. Genaueres findet man bei Renyi [3], insbesondere im Kapitel IV, p 146. Für den Begriff des singulären Maßes sei der Leser auf das Buch von Halmos [2] verwiesen. Wir geben noch den Begriff der Faltung von zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

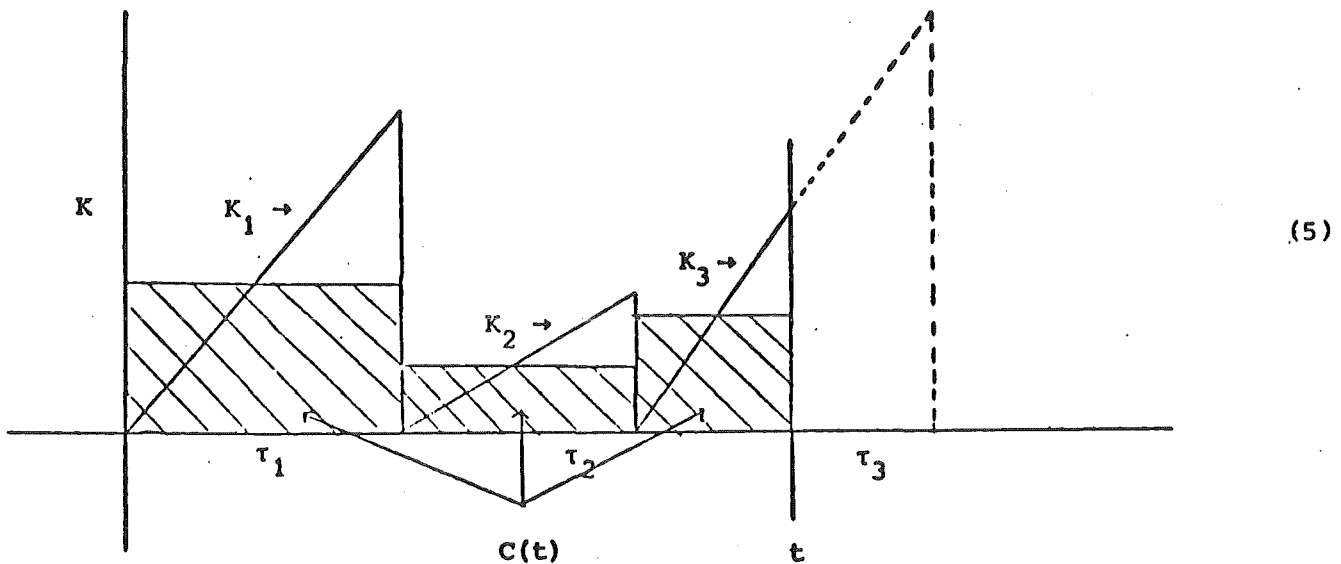
$$A(t, y) ** B(t, y) = \int_0^t \int_0^y A(t-\tau, y-\eta) dB(\tau, \eta) \quad (4)$$

Das Integral in (4) ist als zweidimensionales Stieltjesintegral zu verstehen. Wir betrachten nun wieder den Zufallsprozess, der in der Abfolge der Zustände $1, 2, 3, 4, \dots$, besteht und bei dem in der zufälligen Verweildauer τ_n Kosten $K_n(\tau_n)$ anfallen.

Wir sehen hier zunächst bewußt, von einer "Bedeutung" der Zustände etwa als Betriebs- oder Ausfallzustände ab. Nur soviel: Ist identisch in t

$$D^{(n)}(t) = D^{(m)}(t)$$

für $n \equiv m \pmod{2}$, hat man offensichtlich einen klassischen Erneuerungsprozeß vor sich. Eine wesentliche Annahme ist die, daß in jedem Zustand n gemäß $K_n(t)$ freigesetzt wird, und dies nicht nur in den Endpunkten der Verweildauer im n -ten Zustand ($n = 1, 2, 3, \dots$), sondern im ganzen Zeitbereich. (5) verdeutlicht die Situation:



Wir interessieren uns für die Verteilung der kumulativen Freisetzungsmenge $C(t)$ im Zeitbereich von 0 bis t , unter der naheliegenden Voraussetzung, daß die Reihe $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n + \dots$ fast sicher divergiert. t fällt fast sicher ins Innere einer Zustandsdauer τ_n , falls die $D^{(n)}(t)$ nicht entartet sind, was wir annehmen wollen. Es gilt also fast sicher

$$t < \tau_1 \text{ oder } \tau_1 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1} \quad (6)$$

Die kumulative Freisetzungsmenge schreibt sich also als

$$K_1(t) = C(t) \quad \text{für } t < \tau_1 \quad (7)$$

oder als

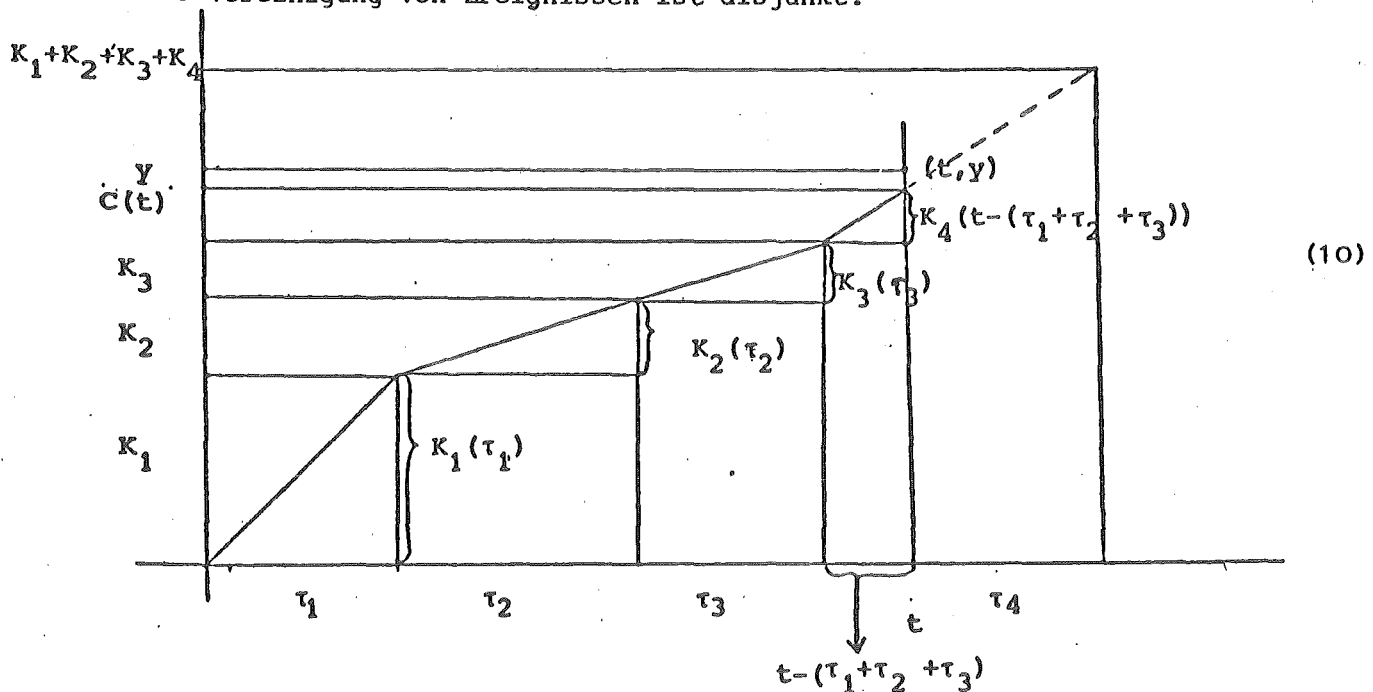
$$K_1(\tau_1) + K_2(\tau_2) + \dots + K_n(\tau_n) + K_{n+1}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_n)) \quad (8)$$

für $\tau_1 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1}$. Demgemäß gilt für das interessierende Ereignis $\{C(t) \leq y\}$:

$$\{C(t) \leq y\} = \{t < \tau_1, K_1(t) \leq y\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_1 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1},$$

$$K_1(\tau_1) + \dots + K_n(\tau_n) + K_{n+1}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_n)) \leq y\} \quad (9)$$

Diese Vereinigung von Ereignissen ist disjunkt.



(10)

Die Realisierung des Prozesses $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ gehört genau dann zum Ereignis $\{C(t) \leq y\}$, wenn der zweidimensionale Prozeß

$(\tau_1, K_1(\tau_1)) + (\tau_2, K_2(\tau_2)) + \dots + (\tau_n, K_n(\tau_n)) + \dots$ das Rechteck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,y)$, (t,y) , $(t,0)$ längs der Ordinate von $(t,0)$ nach (t,y) verläßt.

Für die Berechnung von $P\{C(t) \leq y\}$ betrachten wir

$$\Delta^{(n)}(t, y) = P\{\tau_n \leq t, K_n(\tau_n) \leq y\} \quad (11)$$

$\Delta^{(n)}(t, y)$ ist auf $y = K_n(t)$ konzentriert. Wir setzen weiter

$$\Delta_n(t, y) = \Delta^{(1)}(t, y) ** \Delta^{(2)}(t, y) ** \dots \Delta^{(n)}(t, y) \quad (12)$$

Dann gilt für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} &P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1}, C(t) \leq y\} = \\ &P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1}, K_1(\tau_1) + \dots + K_n(\tau_n) + K_{n+1}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_n)) \leq y\} = \\ &P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1}, K_1(\tau_1) + \dots + K_n(\tau_n) \leq y - K_{n+1}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_n))\} = \\ &P(A_n). \end{aligned} \quad (13)$$

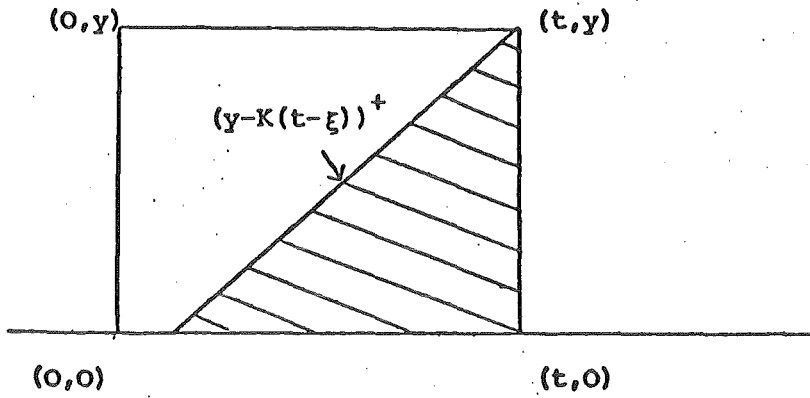
Sei noch $\max(0, y - K_{n+1}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_n))) = (y - K_{n+1}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_n)))^+$ gesetzt.

Dann gilt

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \int_{\xi=0}^t (y - K_{n+1}(t - \xi))^+ \int_{\eta=0}^{\xi} P\{\xi < \tau_1 + \dots + \tau_n \leq \xi + d\xi, \eta < K_1(\tau_1) + \dots + K_n(\tau_n) \leq \eta + d\eta, \\ &\tau_{n+1} > t - \xi\} = \int_0^t (y - K_{n+1}(t - \xi))^+ \int_0^{\xi} (1 - D^{(n+1)}(t - \xi)) d\Delta_n(\xi, \eta) = \\ &= \int_0^t (1 - D^{(n+1)}(t - \xi)) (y - K_{n+1}(t - \xi))^+ \Delta_n(d\xi, d\eta). \end{aligned}$$

(14)

Der Integrationsbereich wird in (15) veranschaulicht:



(15)

Es gilt noch

$$P(A_0) = P\{t < \tau_1, K_1(t) \leq y\} = \begin{cases} 1-D^{(1)}(t) & \text{für } K_1(t) \leq y \\ 0 & \text{für } K_1(t) > y \end{cases} \quad (16)$$

Wenn wir mit $\Delta_0(\xi, \eta)$ das auf $(0,0)$ konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaß verstehen, so gilt

$$P(A_0) = \int_0^t \int_0^{(t-\xi)^+} (y-K_1(t-\xi))^+ (1-D^{(1)}(t-\xi)) d\Delta_0(\xi, \eta) \quad (17)$$

Also gilt unter den Modellannahmen schließlich

$$P\{C(t) \leq y\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(t-\xi)^+} (y-K_{n+1}(t-\xi))^+ (1-D^{(n+1)}(t-\xi)) d\Delta_n(\xi, \eta) \quad (18)$$

Der Vorteil von Formel (18) ist u.a. in folgenden Punkten zu sehen:

- 1) Viele klassische Ergebnisse über Verweilzeiten sind erhalten.
- 2) Bei der stochastischen Modellierung vieler praktischer Systeme durchläuft das System eine oft endliche Zahl von Zuständen deren Abfolge deterministisch ist, aber deren Dauer gemäß einer Verteilung oder einer Anzahl von zustands-abhängigen Verteilungen zufällig ist. Hier braucht man nicht die wesentlich kompliziertere Theorie der Semimarkoff-Prozesse, sondern kann mit den Methoden, die zur Formel (18) führten die Eigenheiten des speziellen Modells oft einfacher und besser und durchsichtiger modellieren.

3) Es fällt auf, daß die Formel (18) formal als Verteilung des Integrals über einen Pfad in einem sehr allgemeinen Semimarkoff-Prozeß elementar, d.h. bzw. ohne Verwendung der Laplace-Stieltjes-Transformation, darstellt. (18) kann also grundsätzlich zur elementaren Behandlung von Semimarkoff-Prozessen herangezogen werden.

Literaturverzeichnis:

- [1] CINLAR Erhan: Introduction to Stochastic Processes.
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1975)
- [2] HALMOS Paul R.: Measure Theory. D. van Nostrand Company, Inc.
Princeton, New Jersey, (1950)
- [3] RENYI A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung: Mit einem Anhang über
Informationstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin, (1973)

THE FORMULA OF TAKACS FOR THE DOWN-TIME IN AN ALTERNATING RENEWAL PROCESS AS A SPECIAL CASE IN ZINTERHOF'S GENERALIZATION ¹⁾

Heinz Wenzelburger

0. INTRODUCTION

We consider a system which changes after the n th sojourn time T_n from state n to state $n+1$ where the costs $K_n(T_n)$ are associated with T_n . The costs $K_n(t)$ are assumed to be monotone increasing implying that the derivatives $K'_n(t) = d K_n(t)/dt$ exist almost everywhere. We further assume that the system has at most a countable number of states which may be occupied in an arbitrary but deterministic sequence. The sojourn time distribution $D^{(k)} := P \{T_k \leq t\}$ of the k th sojourn time T_k can be identical to that one of the k' th sojourn time $T_{k'}$, ($k \neq k'$).

Referring to cumulative costs $C(t)$ for such systems, P. Zinterhof (1983) proved the following

Theorem

Let $D^{(n)}(t)$ be stochastically independent and non-degenerate distributions of the n th sojourn time T_n in a renewal process, where the states succeed deterministically and the corresponding cost functionals $K_n(T_n)$ are monotone increasing. Then the distribution of the cumulative costs $C(t)$ in the time interval $(0, t]$ is given by

$$P \{C(t) \leq z\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n), \tag{1}$$

where

$$P(A_0) = P \{t < T_1, K_1(t) \leq z\} = \begin{cases} 1 - D^{(1)}(t) & \text{for } K_1(t) \leq z \\ 0 & \text{for } K_1(t) > z \end{cases} \tag{2}$$

and

¹⁾ Prepared for DSOR, Karlsruhe 1983 as "Derivation of the distribution of the cumulative linear costs in an alternating renewal process from the corresponding distribution with monotone costs in a generalized one".

$$P(A_n) = \int_0^t [1 - D^{(n+1)}(t-u)] \int_0^{v_n(u)} \Delta_n(du, dv), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

In particular

$$v_n(u) := \max(0, z - K_{n+1}(t-u)),$$

$$\begin{aligned} \Delta_n(t, z) &:= P \left\{ \sum_{i=1}^n T_i \leq t; \sum_{j=1}^n K_j(T_j) \leq z \right\} \\ &= \Delta^{(1)}(t, z) ** \Delta^{(2)}(t, z) ** \dots ** \Delta^{(n)}(t, z), \end{aligned} \quad (4)$$

and

$$\Delta^{(n)}(t, z) := P \{ T_n \leq t, K_n(T_n) \leq z \} = D^{(n)}(\min(t, K_n^{-1}(z))), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(t, z) &:= \Delta^{(1)}(t, z) ** \Delta^{(2)}(t, z) = \int_0^t \Delta^{(1)}(t-u, z - K_2(u)) \cdot \\ &\cdot dD^{(2)}(u) \quad \text{with } t_0 = \min(t, K_2^{-1}(z)). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6)$$

In the special case of an alternating renewal process where two states (e.g. system intact, failed) change deterministically and the costs are proportional to time, i.e. we have

$$\begin{aligned} D^{(1)}(t) &= F(t), \quad K_1(t) = \xi t, \\ D^{(2)}(t) &= G(t), \quad K_2(t) = \eta t, \quad \xi < \eta \end{aligned} \quad (7)$$

and

$$D^{(m)}(t) = D^{(n)}(t), \quad K_m(t) = K_n(t) \text{ for } n = m \text{ (modulo 2)},$$

the above theorem reduces to the following corollary (see Takács (1957), Wenzelburger (1983)) if we assume that the process is starting at $t = 0$ in state 1 (system intact):

Corollary

$$P \{ C(t) \leq z; \xi < \eta \} = \sum_{j=0}^{\infty} [F_j(\tau) - F_{j+1}(\tau)] G_j(\kappa), \quad (8)$$

$$F_{j+1} = F * F_j; \quad G_{j+1} = G * G_j; \quad F_1 := F, \quad G_1 := G;$$

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}; \quad G_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases};$$

$$\xi t \leq z \leq \eta t; \quad \kappa(a,b) := \frac{b-\xi a}{\eta-\xi}; \quad \tau(a,b) := \frac{\eta a-b}{\eta-\xi};$$

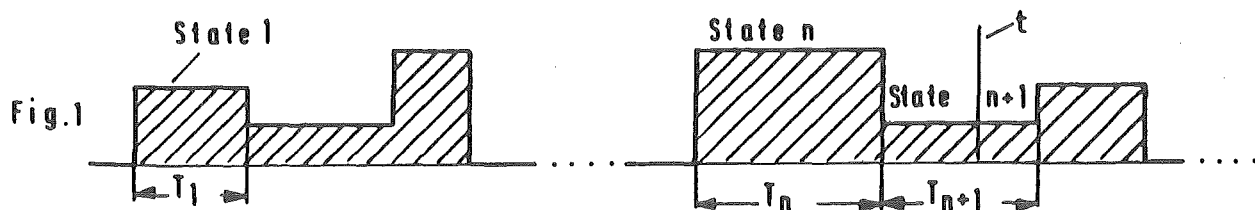
$$\kappa(a,b) + \tau(a,b) = a; \quad \kappa := \kappa(t,z); \quad \tau := \tau(t,z) \quad \blacksquare$$

The distribution in the corollary possesses the single atom $P\{C(t) = \xi t; \xi < \eta\} = 1-F(t)$. In case $\xi > \eta$ (see Wenzelburger (1983)) this atom moves from the left to the right border of the distribution.

The purpose of this paper is to show that in fact the corollary follows from the theorem. We prove this assertion in two steps. In the first step (I) we calculate the probabilities $P_I(A_n) := P(A_n)$ under the special assumptions (7) using the method of n -dimensional geometry (Kendall (1961)). Summation of these probabilities leads to a new proof of the formula (8) of Takács. In the second step (II) we calculate the same quantities $P_{II}(A_n) := P(A_n)$ using the theorem of Zinterhof thus proving $P_I(A_n) = P_{II}(A_n)$. Moreover it has been shown with the calculation of $P_{II}(A_n)$ how the distribution of the cumulative costs can be obtained from Zinterhof's result, if the monotone cost functional is explicitly given.

1. CALCULATION OF THE PROBABILITIES $P_I(A_n)$

Consider a realization of our renewal process and an arbitrary time t which is in the $n+1$ st sojourn time T_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$).



If this time is in the first sojourn time T_1 the cumulative costs are

$$C_0(t) = K_1(t), \quad 0 \leq t < T_1 \tag{1}$$

otherwise

$$C_n(t) = \sum_{i=1}^n K_i(T_i) + K_{n+1}(t - \sum_{i=1}^n T_i), \quad \sum_{i=1}^n T_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} T_i. \tag{2}$$

From these expressions we obtain with the special assumptions (0-7)

$$C_0(t) = \xi t, \quad 0 \leq t < T_1 \tag{3}$$

$$C_n(t) = \begin{cases} \eta t + (\xi - \eta) \sum_{i=1}^m T_{2i-1}, & n = 2m-1 \quad t \text{ in down-state} \\ \xi t + (\eta - \xi) \sum_{i=1}^m T_{2i}, & n = 2m \quad t \text{ in up-state} \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Let be

$$A_0 = \{t < S_1, K_1(t) \leq z\}$$

$$A_n = \{S_n \leq t < S_{n+1}, C_n(t) \leq z\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

where $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$, $n \geq 1$ and $S_0 = 0$, then $\{A_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$

is a decomposition of the event $\{C(t) \leq z\}$ into a complete system of mutually exclusive events A_k . This decomposition is quite general.

Defining the following random sums with odd (uneven) and even indices for the sojourn times T_n respectively

$$U_0 = E_0 = 0; \quad U_m = \sum_{i=1}^m T_{2i-1}, \quad E_m = \sum_{i=1}^m T_{2i}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

and applying the special assumptions (O-7), this system of events reduces to

$$\left(\kappa := \frac{z - \xi t}{\eta - \xi}; \quad \tau := \frac{\eta t - z}{\eta - \xi} \Rightarrow \kappa + \tau = t \right)$$

$$A_0 = \{t < U_1, \xi t \leq z\}$$

$$A_{2m-1} = \{U_m + E_{m-1} \leq t < U_m + E_{m-1} + T_{2m}, \tau \leq U_m\}$$

$$A_{2m} = \{U_m + E_m \leq t < U_m + E_m + T_{2m+1}, E_m \leq \kappa\} \quad (7)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

All random variables in the events A_{2m-1} and A_{2m} respectively are mutually stochastically independent, since $\{T_i\}$ is an independent sequence of random variables. Note that some of the following conclusions are based on this fact.

From the probabilities $P(A_{2m})$ and $P(A_{2m+1})$ in

$$P\{C(t) \leq z\} = \sum_{m=0}^{\infty} [P(A_{2m}) + P(A_{2m+1})] \quad (8)$$

we consider only the $P(A_{2m-1})$ in some detail, the $P(A_{2m})$ can be calculated similarly.

1.1 Probabilities $P_I(A_{2m-1})$

We will not discuss the problem in full generality (Stieltjes measures) but assume all distributions of T_i ($i = 1, 2, \dots$) as absolutely continuous. We note that the distributions of the random variables U_m and E_m can be represented as convolutions

$$\begin{aligned} P\{U_m \leq x\} &= F * F * \dots * F(x) = : F_m(x) \\ P\{E_m \leq x\} &= G * G * \dots * G(x) = : G_m(x) \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

and that the random variable T_{2m} has the distribution $P\{T_{2m} \leq x\} = G(x)$. Therefore we may transform the random variables in $P\{A_{2m-1}\}$ according to

$$\left. \begin{aligned} u &= u_m \\ v &= e_{m-1} \\ w &= e_{m-1} + t_{2m} \end{aligned} \right\} \text{ or } \left. \begin{aligned} u_m &= u \\ e_{m-1} &= v \\ t_{2m} &= w - v \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

respectively with a Jacobian

$$J = \left| \frac{\partial(u_m, e_{m-1}, t_{2m})}{\partial(u, v, w)} \right| = 1.$$

The original domain of integration (cf. especially Eq. (7))

$$\left. \begin{aligned} 0 &< u + v \leq t < u + w; \quad \tau \leq u; \\ 0 &\leq u < \infty; \quad 0 \leq v < \infty; \quad 0 \leq w < \infty; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

is transformed via

$$\left. \begin{aligned} v &\leq t - u < w; \quad \tau \leq u; \\ 0 &\leq u; \quad 0 \leq v; \quad 0 \leq w < \infty; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

into

$$\tau \leq u \leq t; \quad 0 \leq v \leq t - u; \quad t - u < w < \infty. \quad (13)$$

Thus we have for the "density" to obtain $P\{A_{2m-1}\}$

$$\begin{aligned} f(u_m, e_{m-1}, t_{2m}) \, du_m \cdot de_{m-1} \cdot dt_{2m} &= f_m(u_m) \cdot g_{m-1}(e_{m-1}) \cdot g(t_{2m}) \cdot \\ du_m \cdot de_{m-1} \cdot dt_{2m} &= 1 \cdot f_m(u) \cdot g_{m-1}(v) \cdot g(w - v) \cdot du \cdot dv \cdot dw \end{aligned} \quad (14)$$

giving

$$\begin{aligned} P_I(A_{2m-1}) &= \int_{u=\tau}^t \int_{v=0}^{t-u} \int_{w=t-u}^{\infty} f_m(u) \cdot g_{m-1}(v) \cdot g(w-v) \cdot du \cdot dv \cdot dw \\ &= \int_{u=\tau}^t \int_{v=0}^{t-u} f_m(u) \cdot g_{m-1}(v) [1 - G((t-u) - v)] \, du \cdot dv \end{aligned}$$

$$= \int_{u=\tau}^t f_m(u) \cdot G_{m-1}(t-u) du - \int_{u=\tau}^t f_m(u) G_m(t-u) du \quad (15)$$

Substituting $u' = t-u$ in the integral Eq. (15), bearing in mind $\kappa + \tau = t$, we finally get

$$P_I(A_{2m-1}) = \int_0^{\kappa} [G_m(u) - G_{m-1}(u)] d_u F_m(t-u), \quad m = 1, 2, \dots \quad (16)$$

In the special case $m = 1$ we put

$$G_0(u) := 0 \text{ for } u \leq 0 \text{ and } G_0(u) := 1 \text{ for } u > 0$$

thus

$$P_I(A_1) = \int_0^{\kappa} [1-G(u)] f(t-u) du = \int_{\tau}^t f(u) [1-G(t-u)] du. \quad (17)$$

1.2 Probabilities $P_I(A_{2m})$

With the same method as in paragraph 1.1 we obtain

$$P_I(A_{2m}) = \int_0^{\kappa} [F_m(t-u) - F_{m+1}(t-u)] d_u G_m(u), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

In order that $P_I(A_0) = 1-F(t)$ is contained in (18), we define $F_0(u) := 0$ for $u < 0$ and $F_0(u) := 1$ for $u \geq 0$. Then we have

$$dF_0(u) = 0, \quad u \geq 0; \quad dG_0(u) = \delta(u) \cdot du, \quad n \geq 0, \quad (19)$$

where $\delta(u)$ is Dirac's delta function. We finally get

$$P_I(A_0) = \int_0^{\kappa} [1-F(t-u)] \delta(u) \cdot du = 1-F(t) \quad (20)$$

1.3 A new proof of the formula of Takács

Summing up the probabilities from Eqs. (16) and (18) we have

$$P\{C(t) \leq z\} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\kappa} \left[[F_m(t-u) \cdot dG_m(u) + G_{m+1}(u) \cdot dF_{m+1}(t-u)] - [F_{m+1}(t-u) \cdot dG_m(u) + G_m(u) \cdot dF_{m+1}(t-u)] \right] \quad (21)$$

Due to

$$d[F_{m+1}(t-u) \cdot G_m(u)] = F_{m+1}(t-u) \cdot dG_m(u) + G_m(u) \cdot dF_{m+1}(t-u) \quad (22)$$

the second term of Eq. (21) is a total differential. Adding an "appropriate" zero using our definition of F_0 and G_0 , the first term is a total

differential too:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [F_m(t-u) \cdot dG_m(u) + G_{m+1}(u) \cdot dF_{m+1}(t-u)] + G_0(u) \cdot dF_0(t-u) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} d [F_m(t-u) \cdot G_m(u)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Hence

$$\begin{aligned} P \{C(t) \leq z\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_0^k d[F_j(t-u) \cdot G_j(u)] - \int_0^k d[F_{j+1}(t-u) \cdot G_j(u)] \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} [F_j(t-\kappa) - F_{j+1}(t-\kappa)] G_j(\kappa) \end{aligned} \quad (24)$$

which is the formula of Takács (cf. corollary Eq.(0-8)).

2. CALCULATING THE PROBABILITIES $P(A_n)$ ACCORDING TO ZINTERHOF'S THEOREM

2.1 Overview

Before going into details we sketch how Zinterhof's theorem may be used to get the probabilities $P(A_n)$. First we need the measures $\Delta_n(u, v)$,

which are

$$\Delta_n(u, v) = \int_0^{\kappa^*(u, v)} \phi(u-x) \cdot dG_m(x) + \int_{\kappa^*(u, v)}^{v/\eta} \phi\left(\frac{v-\eta x}{\xi}\right) dG_m(x), \quad (1)$$

where

$$\kappa^*(u, v) := \frac{v-\xi u}{\eta-\xi}, \quad \phi := \begin{cases} F_m & n = 2m \\ F_{m+1} & n = 2m+1 \end{cases} \quad \text{for } m = 1, 2, \dots$$

if we observe the special assumptions (0-7). Note that the special cases $n = 0, 1$ (cf. Eqs.(21), (25)) are not included in Eq.(1). But see paragraph 2.4 .

By means of the measures $\Delta_n(u, v)$ we can perform the integration with respect to the variable v in the double-integral (0-3). The result is

$$\begin{aligned} \int_{v=0}^{v_n(u)} \Delta_n(du, dv) &= du \cdot \int_{v=0}^{v_n(u)} \frac{\partial^2 \Delta_n(u, v)}{\partial u \cdot \partial v} dv = du \cdot \frac{\partial \Delta_n(u, v)}{\partial u} \Big|_0^{v_n(u)} \\ &= du \cdot \int_0^{x_n} \frac{\partial \phi(u-x)}{\partial u} dG_m(x), \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$v_n(u) = \begin{cases} z - \xi(t-u) \\ z - \eta(t-u) \end{cases}; \quad x_n = \begin{cases} \kappa \\ u-\tau \end{cases}; \quad \text{for } n = \begin{matrix} 2m \\ 2m+1 \end{matrix}, \quad m = 1, 2, \dots$$

From Eq. (2) we obtain $P(A_n)$, $n = 2, 3, \dots$ via the integration with respect to the variable u , proving $P_{II}(A_n) = P_I(A_n)$.

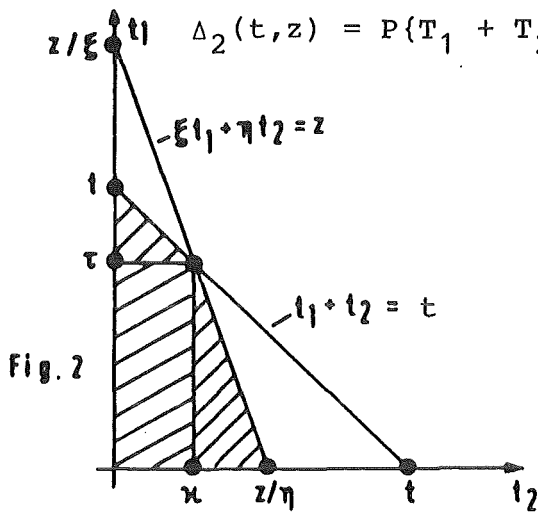
2.2 The Measures $\Delta_n(u, v)$

Using the method of n -dimensional geometry (Kendall(1961)) we can calculate the measures $\Delta_{2m}(u, v)$, $m = 2, 3, \dots$ similar to the measure $\Delta_2(u, v)$ and the measures $\Delta_{2m+1}(u, v)$ similar to the measure $\Delta_3(u, v)$. In the

special case $\Delta_2(u, v)$

we proceed in the following manner. According to Eq. (0-4) we have

$$z/\xi \quad \Delta_2(t, z) = P\{T_1 + T_2 \leq t; \xi T_1 + \eta T_2 \leq z\}. \quad (3)$$



We obtain this probability integrating the density $f(t_1) \cdot g(t_2)$ over the domain (cross-hatched polygon in Fig.2)

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t_1 + t_2 &\leq t \\ 0 \leq \xi t_1 + \eta t_2 &\leq z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$0 \leq t_1 < \infty; \quad 0 \leq t_2 < \infty.$$

Hence

$$\Delta_2(t, z) = \int_{t_2=0}^{\kappa(t, z)} \int_{t_1=0}^{t-t_2} f(t_1) \cdot g(t_2) dt_1 \cdot dt_2 + \int_{t_2=\kappa(t, z)}^{z/\eta} \int_{t_1=0}^{(z-\eta t_2)/\xi} f(t_1) \cdot g(t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^{\kappa(t, z)} F(t-x) \cdot dG(x) + \int_{\kappa(t, z)}^{z/\eta} F\left(\frac{z-\eta x}{\xi}\right) dG(x) \quad (5)$$

giving $\Delta_2(u, v)$ if we replace t by u and z by v .

General cases $\Delta_{2m}(u, v)$ and $\Delta_{2m+1}(u, v)$

For

$$\Delta_{2m}(t, z) = P\left\{ \sum_{i=1}^{2m} T_i \leq t; \sum_{i=1}^{2m} K_i(T_i) \leq z \right\} \quad (6)$$

we have, denoting by $U_m := \sum_{i=1}^m T_{2i-1}$ and by $E_m := \sum_{i=1}^m T_{2i}$,

$$\left. \begin{aligned} T_1 + T_2 + \dots + T_{2m} &= t \\ \xi T_1 + \eta T_2 + \dots + \eta T_{2m} &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} U_m + E_m &= t \\ \xi U_m + \eta E_m &= z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

So in Eq. (5) the integration domain Eq. (4) is to be replaced by

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq u_m + e_m &\leq t \\ 0 \leq \xi u_m + \eta e_m &\leq z \end{aligned} \right\} , \quad \left. \begin{aligned} 0 \leq u_m &< \infty \\ 0 \leq e_m &< \infty \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

and the density $f(t_1) \cdot g(t_2)$ by $f_m(u_m) \cdot g_m(e_m)$. Hence it follows

$$\text{(cf. } \Delta_2(u, v)) \quad \Delta_{2m}(u, v) = \int_0^{\kappa(u, v)} F_m(u-x) \cdot dG_m(x) + \int_{\kappa(u, v)}^{v/\eta} F_m\left(\frac{v-\eta x}{\xi}\right) dG_m(x) \quad (9)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

and similarly $\Delta_{2m+1}(u, v)$, now integrating the density $f_{m+1}(u_{m+1}) \cdot g_m(e_m)$ over the domain

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_{m+1} + e_m \leq t \\ 0 \leq \xi u_{m+1} + \eta e_m \leq z \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq u_{m+1} < \infty \\ 0 \leq e_m < \infty \end{array} \right\} \quad (10)$$

2.3 Inside and outside integrals

To calculate the inside integral in Eq.(0-3) we partially differentiate the measure $\Delta_n(u, v)$ with respect to u , giving

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_n(u, v)}{\partial u} &= \int_0^{\kappa^*} \frac{\partial \phi(u-x)}{\partial u} dG_m(x) \\ &+ \frac{\partial \kappa^*}{\partial u} \cdot \phi(u-\kappa^*) \cdot g_m(\kappa^*) - \frac{\partial \kappa^*}{\partial u} \cdot \phi\left(\frac{v-\eta \cdot \kappa^*}{\xi}\right) \cdot g_m(\kappa^*), \end{aligned} \quad (11)$$

where $\kappa^* := \kappa(u, v)$.

Taking $\frac{\partial \Delta_n(u, v)}{\partial u}$ between the "limits" 0 and $v_n(u)$, we get

$$\begin{aligned} \int_{v=0}^{v_n(u)} \Delta_n(du, dv) &= du \cdot \left. \frac{\partial \Delta_n(u, v)}{\partial u} \right|_0^{v_n(u)} = du \left[\int_0^{x_n} \frac{\partial \phi(u-x)}{\partial u} dG_m(x) \right. \\ &\left. - \frac{\xi}{\eta-\xi} g_m(x_n) \left[\phi(u-x_n) - \phi\left(\frac{v_n-\eta x_n}{\xi}\right) \right] - 0 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Thereby we used

$$x_n = \begin{cases} \kappa(u, z-\xi(t-u)) = (z-\xi(t-u)-\xi u)/(\eta-\xi) = \kappa & \text{for } n = 2m \\ \kappa(u, z-\eta(t-u)) = (z-\eta(t-u)-\xi u)/(\eta-\xi) = u-\tau & \text{for } n = 2m+1 \end{cases} \quad (13)$$

and

$$\kappa(u, 0) = -\frac{\xi}{\eta-\xi} u < 0, \text{ since } \eta-\xi > 0, \xi > 0, \text{ and } dG_m(x) = 0 \text{ for } x < 0.$$

Due to

$$\frac{v_n-\eta x_n}{\xi} = \begin{cases} u-\kappa & n = 2m \\ \tau & n = 2m+1 \end{cases} \text{ for } m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

the expression (12) reduces to

$$\int_{v=0}^{v_n(u)} \Delta_n(du, dv) = du \int_0^{x_n} \frac{\partial \phi(u-x)}{\partial u} dG_m(x). \quad (15)$$

From the outside integrals in

$$P_{II}(A_{2m}) = \int_{u=0}^t [1-F(t-u)] \left\{ \int_{x=0}^{\kappa} \frac{\partial F_m(u-x)}{\partial u} dG_m(x) \right\} du \quad (16)$$

$$P_{II}(A_{2m+1}) = \int_{u=0}^t [1-G(t-u)] \left\{ \int_{x=0}^{u-\tau} \frac{\partial F_{m+1}(u-x)}{\partial u} dG_m(x) \right\} du \quad (17)$$

$m = 1, 2, \dots$

we treat only the case $n = 2m$ in some detail.

Changing the order of integration in the double-integral Eq.(16) (allowed since the integration limits are fixed) and noting $f_m(u-x) = 0$ for $u < x$ we have

$$P_{II}(A_{2m}) = \int_{x=0}^{\kappa} \int_{u=x}^t [1-F(t-u)] f_m(u-x) \cdot g_m(x) dx du. \quad (18)$$

Now by substituting $x = v'$, $u = u' + v'$, the old domain of integration is transformed into a new one according to

$$\left. \begin{array}{l} x \leq u \leq t \\ 0 \leq x \leq \kappa \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} v' \leq u' + v' \leq t \\ 0 \leq v' \leq \kappa \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq u' \leq t-v' \\ 0 \leq v' \leq \kappa \end{array} \right\} \quad (19)$$

giving

$$\begin{aligned} P_{II}(A_{2m}) &= \int_{v'=0}^{\kappa} \int_{u'=0}^{t-v'} [1-F(t-u'-v')] f_m(u') \cdot g_m(v') du' dv' \\ &= \int_{v'=0}^{\kappa} \left[F_m(t-v') - \int_{u'=0}^{t-v'} F([t-v']-u') \cdot f_m(u') du' \right] g_m(v') dv' \\ &= \int_0^{\kappa} [F_m(t-u) - F_{m+1}(t-u)] d_u G_m(u), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

A comparison of the last Eq. with Eq.(1-18) shows that $P_{II}(A_{2m}) = P_I(A_{2m})$ for $m = 1, 2, \dots$

2.4 Special cases $P_{II}(A_0)$, $P_{II}(A_1)$

According to our special assumptions (o-7) the inequality $\xi t \leq z \leq \eta t$ holds for all A_n if $C(t) \leq z$ and $t \geq 0$. Hence always $K_1(t) = \xi t \leq z$ and

$$P_{II}(A_0) = P\{t < T_1; K_1(t) \leq z\} = P\{t < T_1\} = 1-F(t). \quad (21)$$

To calculate the probability $P_{II}(A_1)$ we need the measure

$$\begin{aligned} \Delta_1(t, z) &= \Delta^{(1)}(t, z) = P\{T_1 \leq t; K_1(T_1) \leq z\} \\ &= P\{T_1 \leq t, \xi T_1 \leq z\} = F(t) \cdot U_0(z - \xi t) + F(z/\xi) \cdot U_0(\xi t - z). \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$U_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Obviously it is not sufficient to put for the step function $U_0(x)$ a simple "one". Only then with U_0 there is

$$\frac{\partial \Delta_1(u, v)}{\partial u} \cdot du = U_0(v - \xi u) \cdot dF(u) + o \quad \text{for } u \geq 0, \quad (23)$$

implying

$$\int_{v=0}^{v_1(u)} \Delta_1(du, dv) = du \left[\frac{\partial \Delta_1(u, v)}{\partial u} \right] \Big|_0^{z - \eta(t-u)} = U_0(z - \eta t + (\eta - \xi)u) \cdot dF(u)$$

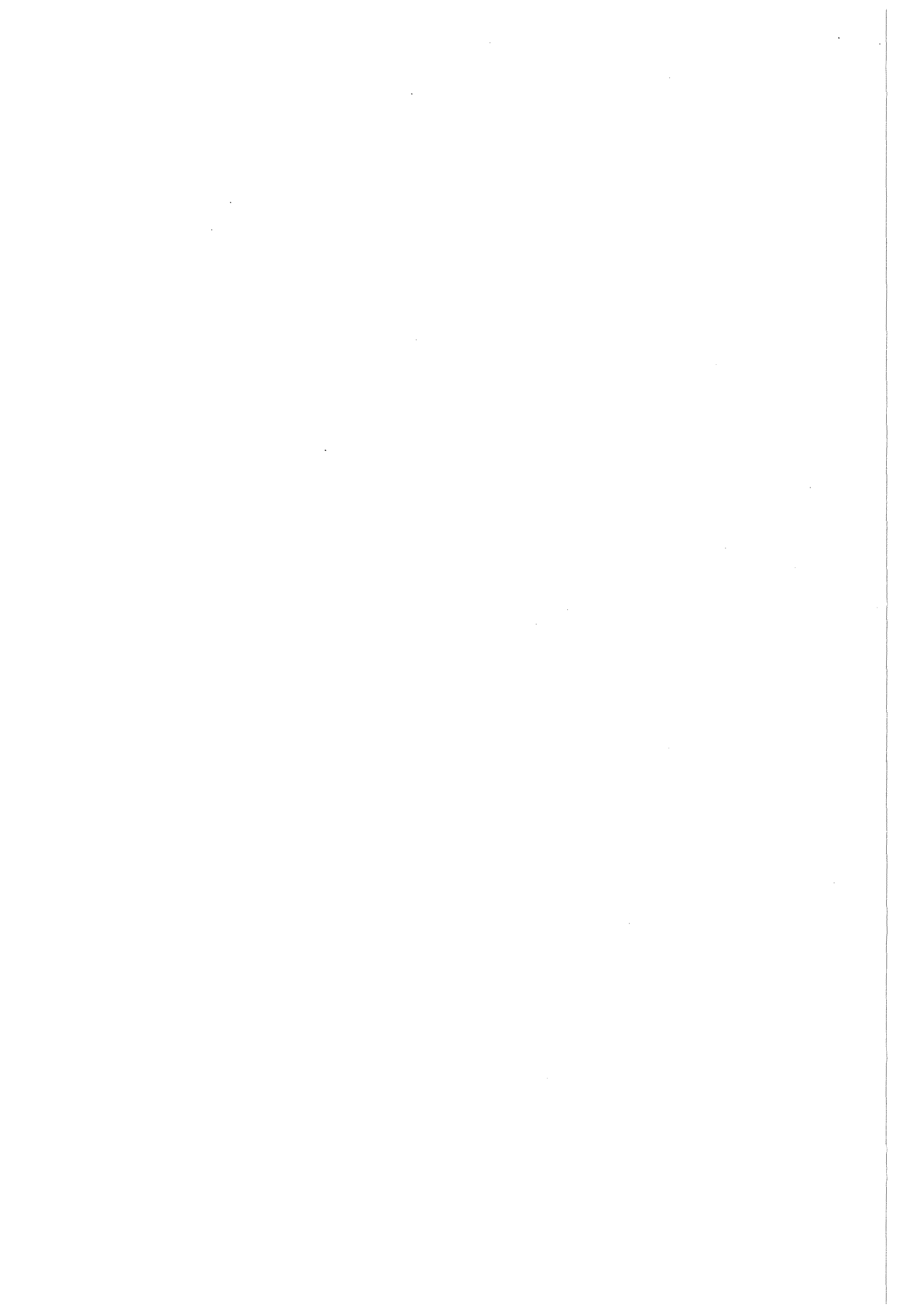
$$= U_0(u - \tau) \cdot dF(u) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq u < \tau \\ dF(u) & \text{for } \tau \leq u < t \end{cases}, \quad (24)$$

from which finally follows

$$P_{II}(A_1) = \int_{\tau}^t [1 - G(t-u)] \cdot dF(u) = \int_0^{\kappa} [G(u) - 1] \cdot d_u F(t-u). \quad (25)$$

REFERENCES

- M.G. Kendall, A course in the geometry of n dimensions, (Charles Griffin, London, 1961).
- L. Takács, On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8, 1957, p 169-191.
- H. Wenzelburger, Erneuerungsprozesse mit linearen Kostenfunktionen, 1983, unpublished.
- P. Zinterhof, The distribution of costs in Markov renewal processes, 1983, these proceedings.



Markoff-Erneuerungsprozesse mit allgemeinen Kostenfunktionen (Definition, Bestimmung der Kostenverteilungsfunktion)

Peter Zinterhof

Bei der stochastischen Analyse von vermaschten Filtersystemen und der Erstellung von adäquaten mathematischen Modellen sind Methoden aus der Theorie der Markoff-Erneuerungsprozesse heranzuziehen. Die zur Verfügung stehende Literatur reicht jedoch bei weitem nicht aus, um die praktisch vorkommenden Systeme adäquat zu modellieren, da in der Praxis sehr komplizierte Kostenfunktionen nicht linearer Bauart für die einzelnen Zustände, derer das System fähig ist, vorkommen. Es ist daher nötig, die Theorie der Markoff-Erneuerungsprozesse (MEP) auf den Fall auszuweiten, daß die Kostenfunktionen (Emissionsfunktionen) in sehr allgemeiner (nicht linearer) Art von den Verweildauern in den Zuständen abhängen. Aus methodischen und auch praktischen Gründen wird in zwei Schritten vorgegangen.

1. Es wird ein Markoff-Erneuerungsprozeß betrachtet, sodaß in jedem seiner Zustände Kosten anfallen, die monoton wachsend von der Dauer des Zustandes abhängen. Die Verteilung der Kosten, die bis zum Zeitpunkt t anfallen, wird berechnet.
2. Wegen der Eigenheiten der zu modellierenden Abgasreinigungsstrecken treten Systemzustände auf, bei denen die Kosten (Emissionen) zusätzlich von zufälligen Größen abhängen. Eine adäquate Beschreibung des Sachverhaltes erfordert die Betrachtung von Markov-Erneuerungsprozessen mit zufälligen Kostenfunktionen und die Bestimmung der entsprechenden Verteilungsfunktionen. 2) erweitert offensichtlich 1). Die zusätzliche Behandlung der spezielleren Situation 1) (die ja für sich schon sehr weit geht) ist auch aus algorithmischen Gründen nützlich und erleichtert das Verständnis von 2).

Um sich auf das wesentliche konzentrieren zu können, setzen wir die Terminologie von Çinlar ([8] Kap. 10) und McLean-Neuts [34] und Pyke [51] voraus und betrachten einen Markoff-Erneuerungsprozeß mit m Zuständen.

$$\left\{ (J_n, X_n), n=0, 1, 2, \dots \right\} \quad (1)$$

und setzen

$$P\left\{ J_n = k, X_n \leq x \mid J_{n-1} = j \right\} = Q_{jk}(x), \quad (2)$$

$$n=1, 2, 3, \dots; j, k=1, \dots, m$$

$$Q_{jk}(+\infty) = P_{jk}, \sum_{k=1}^m P_{jk} = 1 \quad (3)$$

Falls sich nun der Markov-Erneuerungsprozeß die Zeitdauer t im Zustand i befindet, mögen in dieser Zeit Kosten (Emissionen) von

$$K_i(t) \quad (4)$$

entstehen, wobei $K_i(t)$ sinnvollerweise als nicht negativ und monoton wachsend in t zu betrachten ist. Da nach (2) die Verweilzeitverteilungen (Belegungen) noch vom nächsten Zustand abhängen, kann man, falls gewünscht oder einfach aus formalen Symmetriegründen, die Kostenfunktionen nicht nur vom momentanen Zustand i , sondern auch vom nächsten möglichen Zustand j abhängen lassen:

$$K_{ij}(t) \quad (5)$$

Seien nun $I(t)$ die Gesamtkosten, die in $[0, t]$ auflaufen. $I(t)$ ist eine Zufallsvariable, deren Verteilung bestimmt werden soll. Sei $R(y:t)$ die Verteilung von $I(t)$:

$$R(y:t) = P\left\{ I(t) \leq y \right\} \quad (6)$$

Seien $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ Zustände des Markov-Erneuerungsprozesses, also $1 \leq \alpha_k \leq n$, $k=1, \dots, n$. Sei $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ ein Pfad mit n Schritten und

$$S_{jk}(n) = \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_0 = j, \alpha_n = k \right\} \quad (7)$$

die Menge aller Pfade mit n Übergängen und Anfangszustand $J_0 = j$ und Endzustand $J_n = k$. Sei $I_{jk}(n:t)$ die Einschränkung des Funktionals $I(t)$ auf den Bereich $S_{jk}(n)$. Dann gilt

$$I_{jk}(n:t) = K_{j\alpha_1}(\tau_0) + K_{\alpha_1\alpha_2}(\tau_1) + \dots + K_{\alpha_n k}(t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})) \quad (8)$$

auf dem Pfad $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_0 = j, \alpha_n = k$. In diesem Modell entstehen also zu jedem Zeitpunkt Kosten (Emissionen); die letzte Kostenfunktion ist bei den bisherigen Ausnahmen unbestimmt, da ja der Zustand x , der auf den letzten Zustand k des Pfades folgt, unbestimmt ist. In vielen praktischen Aufgaben wird jedoch die Kostenfunktion $K_{\alpha\beta}(t)$ nur vom gegenwärtigen Zustand und nicht von einem präsumptiven Zustand β abhängen, was die weiteren Überlegungen etwas vereinfacht. Wir führen wegen der praktischen Zielsetzungen die Überlegungen in diesem Sinne weiter und setzen noch

$$H_j(x) = \sum_{k=1}^m Q_{jk}(x) \quad (9)$$

$H_j(x)$ ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der Zeit x eine Zustandsänderung auftreten wird. Im Rahmen der MEP ist es nicht ausgeschlossen, daß sofort wieder derselbe Zustand angenommen wird. Pfade (j, j) können also mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten, oder was äquivalent ist, $Q_{jj}(x)$ ist nicht notwendigerweise identisch Null. Dies ist eine wesentliche Abweichung gegenüber klassischen Erneuerungsprozessen mit zwei Zuständen.

Zu (8) gehört auf $S_{jk}(n)$ eine Massenbelegung

$$R_{jk}(y, n; t) = P \left\{ J_n = k, I_{jk}(n; t) \leq y \mid J_0 = j, I(0) = 0 \right\}. \quad (10)$$

Sei $A(\alpha_0, \tau_0; \alpha_1, \tau_1; \alpha_2, \tau_2; \dots; \alpha_n, \tau_n)$ das Ereignis, daß das System (der MEP) zuerst in α_0 die Dauer τ_0 , dann in α_1 die Dauer τ_1 usw. verweilt, um schließlich für die Dauer τ_n in α_n zu verweilen. Sei weiters $A(\alpha_0, \tau_0; \dots; \alpha_{n-1}, \tau_{n-1}; \alpha_n, \tau_n \geq t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1}))$ das Ereignis, daß das System (der MEP) die Zustände $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ mit den Dauern τ_0, \dots, τ_n annimmt, wobei allerdings der Zustand α_n zum Zeitpunkt t andauert. Wir betrachten nun das Ereignis

$$B(j, k, n, t, y) = A(\alpha_0, \tau_0; \dots; \alpha_{n-1}, \tau_{n-1}; \alpha_n, \tau_n \geq t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1}) \mid \alpha_0 = j) \\ \cap \left\{ C(t) = K_j(\tau_0) + K_{\alpha_1}(\tau_1) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) + K_k(t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})) \leq y \right\}, \quad (11)$$

daß nämlich der n -te Zustand $\alpha_n = k$ über den Zeitpunkt t hinausreicht und die Gesamtkosten $C(t) \leq y$ sind auf dem Pfad $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ unter der Bedingung $\alpha_0 = j$. Also gilt nach (8)

$$\left\{ C(t) \leq y \right\} \cap S_{jk}(n) = \left\{ I_{jk}(n; t) \leq y \right\} = \bigcup_{S_{jk}(n)} B(j, k, n, t, y) \quad (12)$$

Für eine feste Zustandsabfolge $\alpha_0 = j, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = k$ gilt

$$P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n, C(t) \leq y \right\} = \\ P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n, K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) \leq \right. \\ \left. \leq y - K_{\alpha_n}(t - (\tau_1 + \dots + \tau_{n-1})) \right\} \quad (13)$$

Hier wurde also vorausgesetzt, daß die Kosten, die in einem Zustand entstehen, nur vom Zustand selbst und seiner betrachteten Dauer abhängen, also z. B.

nicht von den Vorzuständen oder nachfolgenden Zuständen abhängen. Gemäß (14) der Arbeit "Ein Erneuerungsprozeß mit deterministischer Abfolge der Zustände" (siehe Kapitel 3 dieses Berichts) gilt wegen der Unabhängigkeit der τ_0, τ_1, \dots

$$P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n, C(t) \leq y \right\} =$$

$$\int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_{\alpha_n} (t-\xi))^+} P \left\{ \xi < \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq \xi + d\xi, \eta < K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) \leq \eta + d\eta, \right.$$

$$\left. \tau_n > t - \xi \right\} = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_{\alpha_n} (t-\xi))^+} (1-H_{\alpha_n}(t-\xi)) \Delta_{n-1}(d\xi, d\eta) \quad (14)$$

Es ist $\alpha_0 = j, \alpha_n = k$ und es bezeichnet gemäß (9)

$$1-H_{\alpha_n}(t-\xi) = P \left\{ \tau_n > t - \xi \right\}$$

und

$$\Delta_{n-1}(d\xi, d\eta) = P \left\{ \xi < \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq \xi + d\xi, \eta < K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) \leq \eta + d\eta \right\} \quad (15)$$

Zur näheren Bestimmung der Δ_{n-1} notieren wir gemäß (2)

$$P(\tau_0 \leq \xi, J_1 = \alpha_1 \mid J_0 = \alpha_0 = j) = Q_{j\alpha_1}(\xi)$$

$$P(\tau_1 \leq \xi, J_2 = \alpha_2 \mid J_1 = \alpha_1) = Q_{\alpha_1\alpha_2}(\xi) \quad (16)$$

\cdot
 \cdot
 \cdot
 \cdot
 \cdot
 \cdot

$$P(\tau_{n-1} \leq \xi, J_n = \alpha_n = k \mid J_{n-1} = \alpha_{n-1}) = Q_{\alpha_{n-1}k}(\xi)$$

Sind $1 \leq \alpha, \beta \leq m$ Zustände des MEP und sei

$$\Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta) = P\left\{\tau_{n-1} \leq \xi, K_{\alpha}(\tau_{n-1}) \leq \eta, J_n = \beta \mid J_{n-1} = \alpha\right\} \quad (17)$$

die bedingte zweidimensionale Verteilung des Verweilzeit-Kosten-Vektors des betrachteten MEP. Dann gilt wegen (3) aus Kapitel 3 (bzw. in ganz analoger Schlußweise) und wegen (16) und wegen der Monotonie der Kostenfunktionen und der Massenbelegungen

$$\begin{aligned} \Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta) &= P\left\{J_n = \beta, \tau_{n-1} \leq \xi, \tau_{n-1} \leq K_{\alpha}^{-1}(\eta) \mid J_{n-1} = \alpha\right\} = \\ &= \int_0^{\min(\xi, K_{\alpha}^{-1}(\eta))} dQ_{\alpha, \beta}(x) = \min\left(\int_0^{\xi} dQ_{\alpha, \beta}(x), \int_0^{K_{\alpha}^{-1}(\eta)} dQ_{\alpha, \beta}(x)\right) = \\ &= Q_{\alpha, \beta}(\min(\xi, K_{\alpha}^{-1}(\eta))) \end{aligned} \quad (18)$$

Dies ist also die Stelle, an der konkrete Daten in das Modell einfließen, nämlich konkrete Verweilzeitaussagen und Kosten-(Emissions-)-Daten und -Funktionen. Dann gilt für (15) unter Ausnützung der Unabhängigkeitsvoraussetzungen und der zweidimensionalen Faltung

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(\xi, \eta) &= \Delta_{n-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \xi, \eta) = P\left\{\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq \xi, \right. \\ &K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) \leq \eta \left. \right\} = \Delta^{(\alpha_0, \alpha_1)}(\xi, \eta) ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\xi, \eta) ** \dots \\ &\dots ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, \alpha_n)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (19)$$

Dies schreibt sich unter Verwendung von (18) unter Benützung der letzten Formel auch:

$$\Delta_{n-1}(\xi, \eta) = Q_{\alpha_0, \alpha_1}(\min(\xi, K_{\alpha_0}^{-1}(\eta))) \cdots Q_{\alpha_{n-1}, \alpha_n}(\min(\xi, K_{\alpha_n}^{-1}(\eta))) \quad (20)$$

Wir rufen wieder die Zustandsabfolge $\alpha_0=j, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n=k$ in Erinnerung.

Dann gilt für diesen Pfad nach (14) und (19)

$$P \left\{ \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \dots + \tau_n, C(t) \leq y \right\} =$$

$$\int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \Delta^{(j, \alpha_1)} \cdots \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)} \cdot (d\xi, d\eta) \quad (21)$$

und für die Verteilung $R_{jk}(y, n:t)$ von $I_{jk}(n:t)$ (definiert in (8) und (10)):

$$R_{jk}(y, n:t) = \sum_{S_{jk}(n)} \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \Delta^{(j, \alpha_1)} \cdots \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)} \cdot (d\xi, d\eta) \quad (22)$$

Durch Vertauschen von Summe und Integral folgt sofort

$$R_{jk}(y, n:t) = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \left(\sum_{S_{jk}(n)} \Delta^{(j, \alpha_1)} \cdots \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)} \right) \cdot (d\xi, d\eta) \quad (23)$$

Wir betrachten gesondert den Ausdruck

$$\sum_{S_{jk}(n)} \Delta^{(j, \alpha_1)} ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)} ** \dots ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)} =: \Delta_{jk}^{(n)} \quad (24)$$

Führen wir für Matrizen $(A_{jk})_{m \times m}$ und $(B_{jk})_{m \times m}$ von Funktionen von zwei Veränderlichen in naheliegender Weise ein Faltungsprodukt ein

$$(A_{jk})_{m \times m} ** (B_{jk})_{m \times m} = \left(\sum_{\ell=1}^m A_{j\ell} ** B_{\ell k} \right)_{m \times m} \quad (25)$$

so ist offenbar unter sinngemäßer Verwendung von Faltungspotenzen von Matrizen

$$(\Delta_{jk}^{(n)}) = (\Delta_{jk})_{m \times m} ** n \quad (26)$$

und (23) vereinfacht sich zu

$$R_{jk}(y, n; t) = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \Delta_{jk}^{(n)}(d\xi, d\eta) \quad (27)$$

Da die Pfadmengen $S_{jk}(n)$ bei verschiedenen n disjunkte Ereignisse darstellen, gilt nach (6), (8), (10)

$$\begin{aligned} R_{jk}(y; t) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_{jk}(y, n; t) = \\ &= \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{jk}^{(n)}(d\xi, d\eta) \right) \quad (28) \end{aligned}$$

Dies ist bereits ein wichtiges Ergebnis, das wegen der allgemeinen Voraussetzungen der bloßen Monotonie der Kostenfunktionen wesentlich über McLean-Neuts [34] und die Ergebnisse bei Çınlar [9] über Funktionale auf Semi-markovprozessen hinausgeht. Erst in dieser Allgemeinheit lassen sich viele

Fragen über das Verhalten von Barrierensystemen, speziell in Abgasreinigungsstrecken adäquat formulieren und auch beantworten.

Wie bei McLean - Neuts gilt natürlich weiter

$$R_j(y:t) = \sum_{k=1}^m R_{jk}(y:t) \quad (29)$$

$$R(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j R_j(y:t) \quad (30)$$

Hier ist (a_1, \dots, a_m) die Anfangsverteilung der Zustände. Damit ist das erste Ziel, die Verteilung der Kosten (29), (30), die bis zum Zeitpunkt t erwachsen, zu bestimmen, unter der allgemeinen Voraussetzung monotoner Kostenfunktionen (d. h. positiver Raten) auf allgemeinen MEP elementar, (d. h. ohne Verwendung von Funktionaltransformationen) erreicht.

Die Matrix von Massenbelegungen in der Ebene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{jk}^{(n)} \right)_{m \times m} =: X(\xi, \eta) \quad (31)$$

ist gemäß (26) eine "geometrische" Reihe von *-Faltungspotenzen von Matrizen von Maßen und muß traditionellerweise als "Erneuerungsfunktion" des Prozesses bezeichnet werden. Um zu einer gewohnten Erneuerungsgleichung zu gelangen, bezeichnen wir mit

$$U_{m \times m} = (U_{jk})_{m \times m} \quad (32)$$

die Matrix von Massenbelegungen $U_{jk}(\xi, \eta)$ mit

$$U_{jk}(\xi, \eta) = \delta_{jk} \quad (33)$$

Für $j=k$ ist also $U_{jk}(\xi, \eta)$ die Verteilungsfunktion des auf $\xi=\eta=0$ konzentrierten Wahrscheinlichkeitsmaßes, für $j \neq k$ ist die Gesamtmasse gleich Null.

$U_{m \times m}$ ist natürlich auch als "nullte" Faltungspotenz von $X(\xi, \eta)$ zu sehen.

Wegen der Reihendarstellung (31) gilt

$$X(\xi, \eta) ** (\Delta_{jk})_{m \times m} + U_{m \times m} = X(\xi, \eta) \quad (34)$$

Dies ist eine Integralgleichung für matrizenwertige Funktionen vom Faltungstyp auf der Basis von Stieltjes-Integralen. Wenngleich also die Wahrheit in diesem praktisch wichtigen Fall nicht gerade auf trivial formulierbare Resultate führt, muß doch gesagt werden, daß in vielen praktischen Fällen die konkrete Auswertung praktisch möglich erscheint, da ja gute Verfahren für Integralgleichungen vorhanden sind und sich praktisch oft Vereinfachungen ergeben, da die Matrizen oft schwach besetzt sein werden. Auch reduziert die Existenz von Dichten der Übergangswahrscheinlichkeiten $Q_{jk}(x)$ und die Stetigkeit der Kostenfunktionen die Stieltjes-Integrale auf gewöhnliche Integrale.

Man kann natürlich delayed-processes und den stationären Fall auch auf diese Weise behandeln, wie überhaupt die Einführung monotoner Kostenfunktionen eine Unzahl von Anwendungen in der Theorie und Praxis der Zufallsprozesse erlaubt.

Wir wollen diesen Aspekt zunächst hier nicht weiter verfolgen, sondern die Resultate mit Hilfe der zweidimensionalen Laplace-Stieltjes-Transformation für den Fall von $m=2$ Zuständen hinschreiben. Für eine beliebige Anzahl m von Zuständen gilt nach (34) unter Anwendung der Laplace-Stieltjes-Transformation

$$\tilde{X}(u, v) \cdot (\tilde{\Delta}_{jk})_{m \times m} + I_{m \times m} = \tilde{X}(u, v) \quad (35)$$

Daraus folgt sofort

$$\tilde{X}(u, v) = (I_{m \times m} - (\tilde{\Delta}_{jk})_{m \times m})^{-1} \quad (36)$$

Für $m=2$ ist

$$\tilde{X}(u, v) = \frac{1}{(1-\tilde{\Delta}_{11})(1-\tilde{\Delta}_{22}) - \tilde{\Delta}_{21}\tilde{\Delta}_{12}} \begin{pmatrix} 1-\tilde{\Delta}_{22} & -\tilde{\Delta}_{21} \\ -\tilde{\Delta}_{12} & 1-\tilde{\Delta}_{11} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Durch Rücktransformation von (37) läßt sich $X(\xi, \eta)$ bestimmen, daß sich nach (28) ergibt:

$$R_{jk}(y:t) = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) X_{jk}(d\xi, d\eta) \quad (38)$$

Weiters gilt nach (29) für $m=2$

$$R_j(y:t) = R_{j1} + R_{j2} = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_1(t-\xi))^+} (1-H_1(t-\xi)) X_{j1}(d\xi, d\eta) + \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_2(t-\xi))^+} (1-H_2(t-\xi)) X_{j2}(d\xi, d\eta) \quad (39)$$

Die Verteilung der Gesamtkosten $R(y:t)$ bestimmt sich gemäß (30).

Bevor wir den in der Einleitung angekündigten zweiten Teil behandeln, sind einige Ausführungen zur Motivation angebracht. Bei der Modellierung einer Abgasreinigungsstrecke mit zwei Filtern erscheint es zweckmäßig, folgende Systemzustände zu betrachten, wobei wir hier einige physikalisch-technisch relevanten

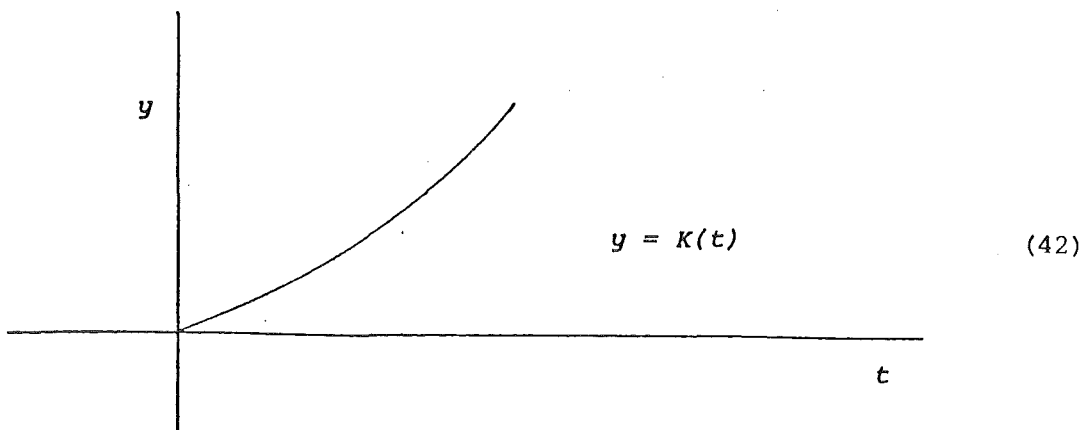
Merkmale, die sich aber leicht berücksichtigen lassen, vernachlässigen:

1. Beide Filter $F1$ und $F2$ sind intakt: Zustand $Z1$
 2. $F1$ fällt vor $F2$ aus: Zustand $Z2$
 3. $F2$ fällt vor $F1$ aus: Zustand $Z3$
 4. $F1$ fällt aus, $F2$ bleibt intakt: Zustand $Z5$
 5. $F2$ fällt aus, $F1$ bleibt intakt: Zustand $Z4$
 6. $F1$ und $F2$ fallen gleichzeitig aus: Zustand $Z6$
- (40)

Aus technischen Gründen ist die Schadstoffemission (Kostenfunktion) abhängig von der Zustandsdauer und nicht linear, in der Praxis sogar recht kompliziert, aber hinreichend genau beschreibbar. Dazu kommt noch, daß bei den Zuständen $Z2$ und $Z3$ der zeitliche Abstand der beiden Ausfallereignisse, der selbst eine Zufallsvariable ist, einen wesentlichen Einfluß auf die Gestalt der Kosten-(Emissions-)funktion hat. Das bedeutet, daß man nicht nur die Zeitdauer der Einzelzustände des Markov-Erneuerungsprozesses, sondern auch die Kosten selbst bei gegebener Dauer τ des Zustandes als zufällig ansehen muß. Bisher hatten wir stets eine zufällige Dauer τ eines Zustandes und eine deterministische Kostenfunktion $K(t)$, sodaß sich der zufällige Vektor $(\tau, K(\tau))$ im ersten Quadranten gemäß

$$P \left\{ \tau \leq \xi, K(\tau) \leq \eta \right\} = \Delta(\xi, \eta) \quad (41)$$

verteilt, wobei das Verteilungsmaß $\Delta(\xi, \eta)$ wegen der deterministischen Kostenfunktion $K(t)$ auf den Graphen $y=K(t)$ konzentriert war.



Bereits für die Zustände Z2 und Z3 ist diese Annahme inadäquat, da ja die Kosten (Emissionen) vom zufälligen zeitlichen Abstand der beiden Anfallsereignisse abhängen, dieser zusätzliche zufällige Einfluß jedoch wahrscheinlichkeitstheoretisch aus den technisch-physikalischen Gegebenheiten bestimmbar ist. Es ist daher (41) zu ersetzen durch

$$P \left\{ \tau \leq \xi, K \leq \eta \right\} = \Delta(\xi, \eta), \quad (43)$$

wobei nun $\Delta(\xi, \eta)$ eine zunächst beliebige Verteilung des Vektors (τ, K) im ersten Quadranten bedeutet und τ die Dauer des Zustandes und K die Höhe seiner Kosten bedeutet. So einfach diese notwendige Verallgemeinerung auch ist, verursacht sie dennoch bei der Bestimmung der Verteilungsfunktion der Schadstoffemission des Zeitintervalles $[0, t]$ Schwierigkeiten, sodaß wir zu einer oft angewendeten und oft auch sachlich nötigen Modifikation des Modells greifen: Es werde für dieses Modell angenommen, daß die Schadstoffemission jeweils am Ende eines Zustandes vor sich geht. Sei also in diesem Sinn $I(t)$ die Emission bis zum Zeitpunkt t , $I_{jk}(n:t)$ die Einschränkung des Functionals auf die Pfadmenge $S_{jk}(n)$ gemäß (7) und (8), wobei gilt wie (7)

$$S_{jk}(n) = \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid (\alpha_0 = j, \alpha_n = k) \right\}, \quad (44)$$

während (8) zu modifizieren ist:

$$I_{jk}(n:t) = K_{\alpha_0} + K_{\alpha_1} + \dots + K_{\alpha_{n-1}} \quad (45)$$

Sei wieder analog zu (10) aber mit anderer Bedeutung von $I_{jk}(n:t)$

$$R_{jk}(y, n:t) = P \left\{ J_n = k, I_{jk}(n:t) \leq y \mid J_0 = j, I(0) = 0 \right\} \quad (46)$$

und $A_0(\alpha_0, \tau_0; \alpha_1, \tau_1; \dots; \alpha_n, \tau_n \geq t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1}))$ das Ereignis, daß der MEP

die Zustände $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ für die Dauer τ_0, \dots, τ_n annimmt, wobei zum Zeitpunkt t der Zustand α_n noch andauert. Wir betrachten nun in ähnlicher Weise zu (11) das Ereignis

$$B(j, k, n, t, y) = A(\alpha_0, \tau_0; \dots; \alpha_{n-1}, \tau_{n-1}; \alpha_n, \tau_n \geq t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1}) \mid \alpha_0 = j, \alpha_n = k) \cap \left\{ C(t) = K_j + K_{\alpha_1} + \dots + K_{\alpha_{n-1}} \leq y \right\} \quad (47)$$

Also gilt in diesem Modell

$$\left\{ C(t) \leq y \right\} \cap S_{jk}(n) = \left\{ I_{jk}(n:t) \leq y \right\} = \bigcup_{S_{jk}(n)} B(j, k, n, t, y) \quad (48)$$

Für eine feste Zustandsfolge $\alpha_0 = j, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = k$ gilt

$$P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n, C(t) \leq y \right\} = \quad (49)$$

$$P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n, K_{\alpha_0} + K_{\alpha_1} + \dots + K_{\alpha_{n-1}} \leq y \right\}$$

Um nun die Wahrscheinlichkeiten (49) zu berechnen, definieren wir den folgenden verallgemeinerten Semimarkovkern analog zu (16) und (17), jedoch wesentlich allgemeiner

$$\Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta) = P \left\{ \tau_{n-1} \leq \xi, K_{\alpha} \leq \eta, J_n = \beta \mid J_{n-1} = \alpha \right\} \quad (50)$$

für $n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \xi, \eta < +\infty, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m$

Der Unterschied gegenüber (17) ist darin zu sehen, daß der Kern (17) aus dem klassischen Semimarkovkern (16) und den Kostenfunktionen $K_{\alpha}(t)$ hergeleitet wurde, während im verallgemeinerten Kern (50) $\Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta)$ als Kern, in dem alle Modelleigenschaften (wie Verweildauern, zufällige Emissionen etc.) enthalten sind, vorgegeben ist.

Aus (40) gewinnen wir jedoch den eingebetteten klassischen Semimarkov-Prozeß zurück durch

$$Q_{\alpha\beta}(\xi) = P \left\{ \tau_{n-1} \leq \xi, K_{\alpha} < +\infty, J_n = \beta \mid J_{n-1} = \alpha \right\} = \\ = \Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, +\infty), \quad (51)$$

sodaß auch hier analog zu (9)

$$H_{\alpha}(x) = \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x) \quad (52)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der Prozeß innerhalb der Zeit x vom gegenwärtigen Zustand α aus eine Zustandsänderung erfährt, wobei das unmittelbare Wiederauftreten von α im Modell zunächst nicht ausgeschlossen ist.

Wir kommen nun zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der $B(j, k, n, t, y)$ in Analogie zu (21) längs eines Pfades $(\alpha_0 = j, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, k)$

$$P(B(j, k, n, t, y)) = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^y P \left\{ \xi < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} \leq \xi + d\xi, \eta < K_{\alpha_0} + \dots + K_{\alpha_{n-1}} < \right. \\ \left. \leq \eta + d\eta, \tau_n > t - \xi, \alpha_n = k \right\} = \quad (53) \\ = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^y (1 - H_k(t - \xi)) (\Delta^{(j, \alpha_1)} ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)} ** \dots ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)}) (d\xi, d\eta)$$

In Analogie zu (22) gilt

$$\hat{R}_{jk}(y, n:t) = P \left\{ I_{jk}(n:t) \leq y \right\} = P \left\{ C(t) \leq y, S_{jk}(n) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 P \left\{ \bigcup_{S_{jk}^{(n)}} B(j, k, n, t, y) \right\} = \\
 = \sum_{S_{jk}^{(n)}} \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^y (1-H_k(t-\xi)) (\Delta^{(j, \alpha_1)} \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)} \dots \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)}) (d\xi, d\eta)
 \end{aligned} \tag{54}$$

Wir verwenden sinngemäß (24), (25), (26), (27) und erhalten analog

$$\Lambda R_{jk}^{(n)}(y, n: t) = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^y (1-H_k(t-\xi)) \Delta_{jk}^{(n)}(d\xi, d\eta) \tag{55}$$

Es ist nötig, auf zwei Dinge hinzuweisen:

1. Die $\Delta_{jk}^{(n)}$ haben in (55) wegen (43) eine viel allgemeinere Bedeutung als die entsprechenden $\Delta_{jk}^{(n)}$ aus (27), die aus den spezielleren $\Delta^{(\alpha, \beta)}$ aus (18) hervorgingen.
2. Der Integrationsbereich (55) ist wegen des gegenüber (27) geänderten Modells im allgemeinen größer als dort, sodaß wegen (27, (55)

$$\Lambda R_{jk}^{(n)}(y, n: t) \leq R_{jk}^{(n)}(y, n: t) \tag{56}$$

gilt. Diese Abschätzung ist auch anschaulich klar, da ja infolge der Modellannahmen, die (27) zugrunde liegen, auch in unvollendeten Zustandsperioden Kosten (Emissionen) entstehen, während das Modell, welches auf (55) führt, davon ausgeht, daß nur in beendeten Zuständen Kosten (Emissionen) auftreten. Daher kann die Wahrscheinlichkeit (27) wegen der genannten Zusatzeigenschaft des Modelles in (27) nicht größer sein als die Wahrscheinlichkeit (55), wo diese Bedingung eben nicht auftritt.

Entsprechend zu (28) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Lambda R_{jk}(y:t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda R_{jk}(y,n:t) = \\ &= \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^y (1-H_k(t-\xi)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{j,k}^{(n)}(d\xi, d\eta) \right) \end{aligned} \quad (57)$$

und weiter entsprechend zu (29), (30)

$$\sum_{k=1}^m \Lambda R_{jk}(y:t) = \Lambda R_j(y:t) \quad (58)$$

$$\sum_{j=1}^m a_j \Lambda R_j(y:t) = \Lambda R(y:t) \quad (59)$$

für die letztlich gewünschte Verteilung $\Lambda R(y:t)$ des Kostenfunktional $I(t)$ im vorliegenden Modell.

Für die Ausweitung dieses Modelles ist als größtes Teilproblem die Berechnung der unendlichen Reihe von Faltungspotenzen von Verteilungen aus (57) durchzuführen. Ganz offensichtlich genügt diese Reihe der Integralgleichung (44) bzw. nach zweidimensionaler Laplace-Transformation dem linearen Gleichungssystem im Laplace-Bereich (45). Auf eine Wiederholung von Details kann wegen der großen Analogie verzichtet werden. Es soll nur bemerkt werden, daß die auftretenden Matrizen von Funktionen, sei es im Laplace- oder Originalbereich, im allgemeinen dünn besetzt sind, da ja das Modell von der physikalisch-technischen Motivation her so beschaffen ist, daß in vielen praktischen Anwendungen die Störfälle so definiert sein werden, daß auf jeden Störfall fast sicher der bestimmungsgemäße Betriebszustand folgt, das System also in einem sehr starken Sinne regenerativ ist!

Zum Abschluß soll noch gezeigt werden, wie man den Fall behandeln kann, daß in jedem Zeitpunkt der Lebensdauer eines Zustandes Kosten (Emissionen) entstehen, wobei die Kosten in nicht deterministischer Weise von der laufenden Zeit des Zustandes abhängen. Im ersten Modell dieses Exposées war ja ange-

nommen worden, daß die Kosten in deterministischer Weise von der laufenden Zeit des Zustandes abhängen und die Verweildauern selbst einem Semimarkovprozeß genügen. Im zweiten Modell sind die Voraussetzungen über die Verteilung der Verweilzeiten und die Verteilung der Kosten sehr viel milder, es wird ja, abgesehen vom Vorliegen eines MEP, nur die Kenntnis der gemeinsamen Verteilung der zufälligen Verweilzeiten und der Kosten vorausgesetzt. Um Aussagen über die Verteilung der im Intervall $[0, t]$ entstehenden Kosten unter Berücksichtigung auch des zum Zeitpunkt t nicht abgeschlossenen Zustandes zu erhalten, müssen gegenüber dem Modell 2. dieser Darstellung zusätzliche Informationen einfließen, die jedoch allgemeiner sein müssen, als die des Modelles 1., da ja, wie gesagt, in vielen interessanten Fällen die Kosten bzw. Kostenraten nicht deterministisch von der laufenden Zeit des jeweils aktuellen Zustandes abhängen. Um konkret zu werden, sei der MEP in $[0, t]$ im Zustand $\alpha, 1 \leq \alpha \leq m$, und seien $K_\alpha(t)$ die Gesamtkosten, die bis t aufgelaufen sind, wobei zugelassen ist, daß $K_\alpha(t)$ für jedes $t \geq 0$ eine Zufallsvariable ist, die allerdings mit wachsendem t wachsend sein wird. Im Unterschied zu Modell 1. und Formel (17) und Modell 2. und dort Formel (50) bezeichnen wir für die Modellierung des beschriebenen MEP

$$\Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta, t) = P \left\{ \tau_{n-1} \leq \xi, K_\alpha(t) \leq \eta, J_n = \beta \mid J_{n-1} = \alpha \right\} \quad (60)$$

In diesen verallgemeinerten Kern gehen also neben den üblichen Semimarkoveigenschaften auch die Verteilungen der Kosten in Abhängigkeit von der laufenden Zeit t des Zustandes α ein. Zur Illustration sei bemerkt: Für $t \geq \tau_{n-1}$ fallen in einer vorliegenden Realisierung des Zustandes α natürlich keine zusätzlichen Kosten an, da ja diese Realisierung α für $t \geq \tau_{n-1}$ als beendet anzusehen ist. Deshalb geht im Modell 1. für $t \rightarrow \infty$ die Massenbelegung (60) in (17) über und in Modell 2. geht für $t \rightarrow \infty$ (60) in (50) über.

Wir betrachten nun wieder den Pfad $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, $\alpha_0 = j$, $\alpha_n = k$, analog zu (7) und das Kostenfunktional nach (8)

$$I_{jk}(n:t) = K_j(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) + K_k(t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})) \quad (61)$$

In den Kern (60) ist ein MEP nach 2. eingebettet gemäß

$$Q_{\alpha\beta}(x) = \Delta^{(\alpha, \beta)}(x, \infty, t), \quad (62)$$

sodaß auch analog zu (9)

$$H_j(x) = \sum_{k=1}^m Q_{jk}(x) \quad (63)$$

definiert ist. Weiters betrachten wir die Ereignisse (11) und (12). In Analogie zu (9) bzw. (63) benötigen wir die Wahrscheinlichkeit

$$P \left\{ \tau_n > t - \xi, K_{\alpha_n}(t - \xi) \leq y - \eta, J_{n+1} \text{ beliebig} \mid J_n = \alpha_n \right\} \quad (64)$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} & P \left\{ \tau_n > t - \xi, K_{\alpha_n}(t - \xi) \leq y - \eta, J_{n+1} \text{ bel.} \mid J_n = \alpha_n \right\} + \\ & P \left\{ \tau_n \leq t - \xi, K_{\alpha_n}(t - \xi) \leq y - \eta, J_{n+1} \text{ bel.} \mid J_n = \alpha_n \right\} = \\ & = P \left\{ K_{\alpha_n}(t - \xi) \leq y - \eta, J_{n+1} \text{ bel.} \mid J_n = \alpha_n \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^m \Delta^{(\alpha_n, k)}(\infty, y - \eta, t - \xi) \end{aligned} \quad (65)$$

Daraus folgt für (64) mit (60)

$$\begin{aligned} & P \left\{ \tau_n > t - \xi, K_{\alpha_n}(t - \xi) \leq y - \eta, J_{n+1} \text{ bel.} \mid J_n = \alpha_n \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^m \left(\Delta^{(\alpha_n, k)}(\infty, y - \eta, t - \xi) - \Delta^{(\alpha_n, k)}(t - \xi, y - \eta, t - \xi) \right) \end{aligned} \quad (66)$$

(66) ist die sinngemäße Verallgemeinerung für $1 - H_j(x)$ nach (63) unter Einbeziehung der zeitabhängigen zufälligen Kosten.

Mit diesen Hilfsmitteln können wir die Verteilung der Kostenfunktionale bestimmen. Analog zu (13) haben wir

$$P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n, K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{\alpha_n} (t - (\tau_1 + \dots + \tau_n)) \leq y \} = \\
 & \int_{\eta=0}^y \int_{\xi=0}^t P \left\{ \tau_n > t - \xi, K_{\alpha_n} (t - \xi) \leq y - \eta, J_{n+1} \text{ bel.} \mid J_n = \alpha_n \right\} \cdot \\
 & \cdot P \left\{ \xi < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} \leq \xi + d\xi, \eta < K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) \leq \eta + d\eta \right\}
 \end{aligned} \tag{67}$$

Die erste Wahrscheinlichkeit nach dem Integralzeichen wurde in (66) bestimmt. Für die zweite Wahrscheinlichkeit nach dem Integralzeichen gilt auch wegen der Bemerkung nach (60)

$$P \left\{ \tau_\alpha \leq \xi, K_\alpha(\tau_\alpha) \leq \eta, \beta \mid \alpha \right\} = \Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta, \infty) \tag{68}$$

und also analog zu (19)

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \xi < \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} \leq \xi + d\xi, \eta < K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) \leq \eta + d\eta \right\} = \\
 & (\Delta^{(\alpha_0, \alpha_1)}(\xi, \eta, \infty) ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\xi, \eta, \infty) ** \dots ** \Delta^{(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})}(\xi, \eta, \infty)) (d\xi, d\eta)
 \end{aligned} \tag{69}$$

Mit (66) und (69) ergibt sich aus (67) mit $\alpha_0 = j, \alpha_n = k$

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_n, K_{\alpha_0}(\tau_0) + \dots + K_{\alpha_{n-1}}(\tau_{n-1}) + \right. \\
 & \left. + K_{\alpha_n} (t - (\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})) \leq y \right\} = \\
 & \int_{\eta=0}^y \int_{\xi=0}^t \left(\sum_{\ell=1}^m \Delta^{(\alpha_n, \ell)}(\infty, y - \eta, t - \xi) - \Delta^{(\alpha_n, \ell)}(t - \xi, y - \eta, t - \xi) \right) \cdot \\
 & \cdot (\Delta^{(\alpha_0, \alpha_1)}(\xi, \eta, \infty) ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\xi, \eta, \infty) ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, \alpha_n)}(\xi, \eta, \infty)) (d\xi, d\eta) \tag{70}
 \end{aligned}$$

Dies ist die Verteilung des Kostenfunctionals $I_{j,k}(n:t)$ nach (8) in dem wesentlich allgemeineren Modell mit zufälligen zeitabhängigen Kosten und zwar längs des speziellen Pfades ($\alpha_0 = j, \alpha_1, \dots, \alpha_n = k$). Weiters ergibt sich analog zu (23), aber natürlich wesentlich allgemeiner, für R_{jk} :

$$\begin{aligned}
 R_{jk}(y, n: t) &= \int_{\eta=0}^y \int_{\xi=0}^t \left(\sum_{\ell=1}^m \Delta^{(k, \ell)}(\infty, y-\eta, t-\xi) - \Delta^{(k, \ell)}(t-\xi, y-\eta, t-\xi) \right) \cdot \\
 &\cdot \sum_{S_{jk}^{(n)}} \left(\Delta^{(j, \alpha_1)}(\xi, \eta, \infty) ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\xi, \eta, \infty) ** \dots ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)}(\xi, \eta, \infty) \right) \cdot \\
 &\cdot (d\xi, d\eta) = \\
 &= \sum_{S_{jk}^{(n)}} \left(\sum_{\ell=1}^m \Delta^{(k, \ell)}(\infty, y, t) - \Delta^{(k, \ell)}(t, y, t) \right) ** \Delta^{(j, \alpha_1)}(t, y, \infty) ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t, y, \infty) ** \\
 &** \dots ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)}(t, y, \infty) \tag{71}
 \end{aligned}$$

$R_{jk}(y, n: t)$ ist also als Faltungsprodukt für diesen allgemeinen MEP dargestellt. Man muß hier in (71) gemäß (60) sorgfältig die Stelle der Argumente t, y, ∞ berücksichtigen. Daß in der Formel (23) an entsprechender Stelle eine unvollständige Faltung über einen Teilbereich des Rechtecks $[0, t] \times [0, y]$ ist, rührt natürlich daher, daß das entsprechende Maß auf einen Teilbereich wegen der in diesem Modell verwendeten speziellen Voraussetzungen über die Kostenfunktionen konzentriert ist.

Allgemeiner als in (28), aber mit analogen Überlegungen gilt mit (71)

$$\begin{aligned}
 R_{jk}(y: t) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_{jk}(y, n: t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^m \Delta^{(k, \ell)}(\infty, y, t) - \Delta^{(k, \ell)}(t, y, t) \right) \\
 &** \sum_{S_{jk}^{(n)}} \left(\Delta^{(j, \alpha_1)}(t, y, \infty) ** \Delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t, y, \infty) ** \dots ** \Delta^{(\alpha_{n-1}, k)}(t, y, \infty) \right) \tag{72}
 \end{aligned}$$

Wir übernehmen die Bezeichnung (24) und die zugrundeliegenden Faltungspotenzen von Matrizen und erhalten sinngemäß

$$R_{jk}(y: t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^m \Delta^{(k, \ell)}(\infty, y, t) - \Delta^{(k, \ell)}(t, y, t) \right) ** \Delta_{jk}^{(n)}(t, y, \infty) \tag{73}$$

Analog zu (29) und (30) haben wir natürlich auch hier

$$R_j(y:t) = \sum_{k=1}^m R_{jk}(y:t) \quad (74)$$

$$R(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j R_j(y:t) \quad (75)$$

für die gewünschten Verteilungen des Kostenfunktional.

Die in (73) auftretende "geometrische" Reihe von Faltungspotenzen ("Erneuerungsfunktion") wird man mit der Methode der Integralgleichungen vom Faltungstyp bzw. mit Laplace-Transformation behandeln. Da dies schon vorher sinngemäß unter spezielleren Modellannahmen gezeigt wurde, genügt hier der Hinweis. Ein Großteil der hier gemachten Feststellungen ist wesentlich allgemeiner, als bei Pyke [51], [52] Anisimow [2], Pyke und Schaufele [50]. Da das Kostenfunktional wegen der Annahme eines eingebetteten MEP sich als Summe gewisser Zufallsvariablen, die u. a. und zustandsweise identisch verteilt sind, darstellen läßt, ist eine asymptotische Normalverteilung der Kosten mit $t \rightarrow \infty$ zu erwarten. Der Beweis wird hier nicht erbracht, da er sehr kompliziert zu sein scheint. In der Praxis wird man die Momente wohl besser aus den Verteilungen (73), (74), (75) numerisch berechnen. Falls die Anzahl der Zustände m groß ist, werden natürlich die Matrizenoperationen und die Integralgleichungen aufwendiger. In den Fällen jedoch, die zur Formulierung der hier dargestellten Methoden motivierten, sind die auftretenden Matrizen $(\Delta^{(j,k)}(x,y,t))_{m \times m}$ dünn besetzt, da ja nur wenige Zustände ineinander übergehen können.

Viele technische Systeme von großem Interesse kennen einen bestimmungsgemäßen Zustand 1 und nicht bestimmungsgemäße Zustände $2, 3, \dots, m$, sodaß jeder nicht bestimmungsgemäße Zustand β , $2 \leq \beta \leq m$, fast sicher in 1 übergeht und nur 1 in einem nichtbestimmungsgemäßen Zustand β übergeht. Die

zugehörige Matrix Δ (der Kern des Prozesses) hat dann die einfache Bauart,

$$\begin{pmatrix}
 0 & \Delta^{(1,2)}(x,y,t), \dots, \Delta^{(1,m)}(x,y,t) & & & & \\
 \Delta^{(2,1)}(x,y,t) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \Delta^{(3,1)}(x,y,t) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\
 \Delta^{(m,1)}(x,y,t) & 0 & & & & & 0
 \end{pmatrix} = \Delta \quad (76)$$

die sich natürlich wesentlich leichter als eine voll besetzte Matrix behandeln läßt. Der spontane und in der klassischen Erneuerungstheorie sich aufdrängende Versuch, den eingebetteten zweistufigen Erneuerungsprozeß ("Betrieb" = 1, "Störung" = $\{ 2, \dots, m \}$) zu betrachten, liefert Aussagen über Verweilzeiten, Verfügbarkeiten, etc., aber keine so präzisen Aussagen über Kostenverteilungen. Der Weg ist natürlich gut und gangbar, wenn man vereinfachen muß oder sehr rasch Ergebnisse leichter Art braucht. In diesem Falle hat man denjenigen zweidimensionalen Kern zu betrachten, der sich auf die beiden Zustandsklassen

$$\begin{aligned}
 B &= \{ \text{Betriebszustände} \} \\
 S &= \{ \text{Störfälle} \}
 \end{aligned} \quad (77)$$

bezieht:

$$\Delta^{(B,S)}(x,y,t) = P \left\{ \tau_{n-1} \leq x, K_B(t) \leq y, J_n = S \mid J_{n-1} = B \right\}$$

$$\Delta^{(S,B)}(x,y,t) = P \left\{ \tau_{n-1} \leq x, K_S(t) \leq y, J_n = B \mid J_{n-1} = S \right\} \quad (78)$$

In diesem Falle lassen sich die zweidimensionalen Matrizen leicht handhaben und man kommt wegen der leichten expliziten formalen Invertierbarkeit von 2×2 Matrizen zu übersichtlichen Formeln expliziter Gestalt, wie sie aus der klassischen Theorie der alternierenden Prozesse geläufig sind. Die hier resultierenden Formeln sind natürlich wesentlich allgemeiner als die klassischen reinen Verweilzeitverteilungen. Die aus dem Ansatz (77), (78) mit $m=2$ fließenden Formeln haben den Typ (39), sollen jedoch hier nicht bis ins Detail verfolgt werden.

Wir wollen die Betrachtungen mit einer grundsätzlichen Bemerkung über Semimarkovprozesse abschließen. Alle Resultate über Semimarkovprozesse hängen ganz wesentlich von der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der zukünftigen Zustände von den vergangenen Zuständen ab, wie ja sehr gut bekannt ist. Diese Voraussetzung gibt dann auch die Möglichkeit, die Kostenverteilungen durch $**$ -geometrische Reihen darzustellen. Die Unabhängigkeit von Ereignissen ist eine starke Voraussetzung (die in der Praxis sehr häufig erfüllt ist), die auch klar definiert ist.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (79)$$

Die Abhängigkeit, wo eben

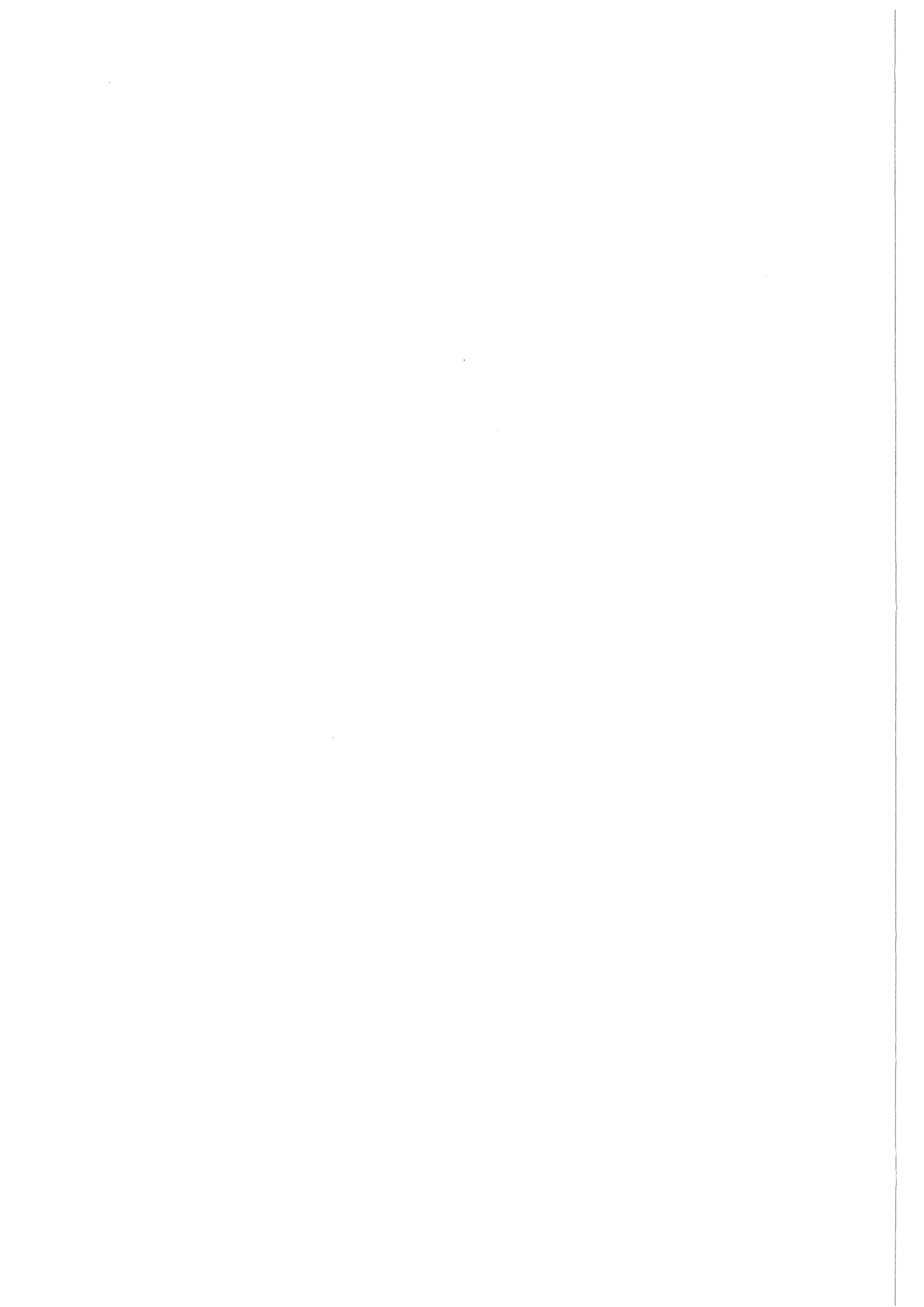
$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \quad (80)$$

ist, läßt naturgemäß ein viel breiteres Band an Möglichkeiten, diese zu quantifizieren, zu. Falls nun in einem Prozeß (mit endlich vielen Zuständen etwa) die Abfolge der Zustände nicht markov'sch ist, also die Zukunft des Prozesses von der Vergangenheit und nicht nur von der Gegenwart abhängt, wird das Gebiet der Semimarkovprozesse wesentlich verlassen. Vom rein

mathematischen Standpunkt bietet dies überhaupt keine Probleme, auch in diesem Falle die Verteilung der Kostenfunktionale zu bestimmen, falls nur die entsprechenden gemeinsamen Verteilungen bekannt sind, also die Abhängigkeiten bekannt sind. Falls diese nicht bekannt sind, hört sich natürlich jede Berechnung auf, da ja dann die nötigen Informationen überhaupt fehlen. Beim Verlassen des Semimarkov-Modells muß man natürlich im allgemeinen gefaßt sein, keine klassischen asymptotischen Aussagen mehr zu erhalten. Das Problem der nicht semimarkov-Modelle liegt also nicht sosehr auf der mathematischen Seite, sondern auf der Seite der Empirie, nämlich die entsprechenden Ausgangsverteilungen aus den Systemeigenschaften zu gewinnen. Falls dies einigermaßen zufriedenstellend gelingt und die Abhängigkeiten im System ausreichend präzisiert sind, ist die Erstellung eines exakten mathematischen Modelles kein Problem.

Literaturverzeichnis

Siehe "Eine zahlentheoretische Methode zur Numerik der Markoff-Erneuerungsprozesse" (Kapitel 6) .



Eine zahlentheoretische Methode zur Numerik
der Markoff-Erneuerungsprozesse

Peter Zinterhof

Inhaltsverzeichnis

	Seiten
§1 Vorwort	79
§2 Zusammenfassung und Ziele	85
§3 Die zweidimensionale Laplace-Stieltjes-Transformation im Bereich der Markoff-Erneuerungsprozesse	91
§4 Die Momente der Kostenverteilung und das asymptotische Verhalten der Kostenverteilungsfunktion	97
§5 Zahlentheoretische Methoden zur Numerik der Markoff- Erneuerungsprozesse	105
§6 Numerische Erfahrungen	125
§7 Zusammenstellung der maßgeblichen Rechenvorschriften nebst Beweisen und genauen Literaturhinweisen	131
§8 Literaturführer	149
§9 Literaturverzeichnis	151

§ 1 VORWORT

Die am KFK durchgefuehrten Systemanalysen zeigten, dass analytische Freisetzungsmodelle fuer PASSAT mit den Hilfsmitteln und im Bereich der Markov-Erneuerungsprozesse mit monotonen Kostenfunktionen zu erstellen sind (siehe [66], [68]).

Das Freisetzungsverhalten von PASSAT wird durch das Verhalten im bestimmungsgemaessen Zustand und in den nichtbestimmungsgemaessen Zustaenden der Anlage bestimmt. Die Verweilzeitverteilungen und die Freisetzungsfunktionen (Kostenfunktionen) werden zusammen mit den Uebergangswahrscheinlichkeiten der Zustaende bei PASSAT wesentlich durch das stochastische Ausfallsverhalten der Erhitzersysteme und das daraus resultierende Verhalten der Filter determiniert. In [72], [73], [74], [76] wurden auf der Basis der am KFK durchgefuehrten Systemanalysen und auf Anregung durch das KFK eine Reihe von analytischen Modellen unterschiedlichen Detaillierungsgrades fuer das Freisetzungsverhalten von PASSAT vorgestellt. Alle diese Modelle sind im Gebiet der Markov-Erneuerungs-Prozesse (M. E. P.) mit monotonen Kostenfunktionen angesiedelt. Dass die Kostenfunktionen (bei PASSAT: Freisetzungsfunktionen) monoton wachsend sind, bedarf aus physikalischen Gruenden keiner naeheren Ausfuehrung. Markov-Erneuerungsprozesse sind Zufallsprozesse mit (hier) endlich vielen Zustaenden, wo die Verweilzeitverteilungen in den einzelnen Zustaenden nicht davon abhaengen, wann und zum wievielten Mal der Zustand angenommen wird und wo

die Uebergangswahrscheinlichkeiten der Zustände nicht von der fruheren Abfolge der Zustände abhaengt. Fuer eine genaue Definition der M.E.P. siehe Cinlar [8]. In Zinterhof [76] wurde eine Reihe von Verallgemeinerungen angegeben, die es zum Beispiel ermoeglichen, Alterungsvorgaenge oder gegen- teilige Phaenomene, wie die Ueberwindung von Kinderkrank- heiten, modellmaessig zu erfassen, was ja im klassischen M.E.P. zunaechst nicht der Fall ist.

Hauptziel dieser nicht-simulativen Modellierung ist die analytische Bestimmung der Verteilungsfunktion der im Inter- vall $[0, t]$ freigesetzten Stoffmenge in Abhaengigkeit vom Startzustand bei $t=0$. Falls bei $t=0$ ein Stoerfall vorliegt, wird fuer kleine t die Freisetzungsverteilung in $[0, t]$ durch diesen (ersten) Stoerfall dominiert. Dieser erste Stoerfall ist bekanntlich von grosser Bedeutung und er ist auch in die allgemeine Theorie eingebettet. Nichtsdestoweniger bedarf er ausfuehrlicher systemanalytischer Betrachtungen, die am KFK durchgefuehrt wurden. Die ausgearbeitete analytische Theorie zielt darueber hinaus auf das Langzeit- verhalten von PASSAT ab und ist nicht auf diese Anlage beschraenkt.

Im Folgenden sollen die verwendeten mathematischen Vor- stellungen unter Vermeidung komplizierter Formalismen erlaeutert werden:

Der Prozess habe m Zustände $1, 2, 3, \dots, m$. Sei

$$Q_{ik}(t), \quad i, k = 1, \dots, m$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Verweilzeit des Prozesses im Zustand i höchstens t beträgt und der nächste Zustand der Zustand k ist. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{ik}(t)$ enthalten also die Verweilzeitverteilungen in den Zuständen und die Übergangswahrscheinlichkeiten. Man fasst nun die $Q_{ik}(t)$ zu einer Matrix $Q(t) = (Q_{ik})_{m \times m}$ zusammen. $Q(t)$ heisst der (Markov-Erneuerungs-)Kern des Prozesses und ist aus der Systemanalyse vorgegeben.

In jedem Zustand i wirkt eine Kostenfunktion $K_i(t)$. Von besonderem Interesse fuer das Studium des Prozesses ist die Funktion

$$H_i(t) = Q_{i1}(t) + Q_{i2}(t) + \dots + Q_{im}(t)$$

$H_i(t)$ ist offenbar die Wahrscheinlichkeit dafuer, dass innerhalb der Zeitspanne der Laenge t vom Zustand i aus eine Zustandsaenderung erfolgt. Die Groesse $1 - H_i(t)$, die Wahrscheinlichkeit dafuer, dass innerhalb t keine Aenderung des Zustandes i erfolgt, hat allgemeine Bedeutung fuer die M.E.P. und eine spezielle Bedeutung fuer die Berechnung der gesuchten Verteilung der Freisetzungen (Kosten) im Intervall $[0, t]$. Wir bezeichnen diese Verteilungsfunktion mit $R(y; t)$. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafuer an, dass im Zeitintervall $[0, t]$ die im Ablauf des Zufallsprozesses freigesetzte Stoffmenge den Wert y nicht ueberschreitet.

Fuer die Berechnung von $R(y; t)$ muessen alle moeglichen Zustandsabfolgen in $[0, t]$ beruecksichtigt werden. Dafuer wird zunaechst $R(y; t)$ bestimmt. $R_{jk}(y; t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafuer, dass ausgehend vom Zustandsbeginn

des Zustandes j bei $t=0$ der Prozess nach einer endlichen Anzahl von Zustandsuebergaengen sich zum Zeitpunkt t im Zustand k befindet und die bis dahin freigesetzte Stoffmenge den Wert y nicht ueberschreitet. Die Groesse

$$R_j(y:t) = R_{j1}(y:t) + R_{j2}(y:t) + \dots + R_{jm}(y:t)$$

gibt dann die Wahrscheinlichkeit dafuer an, dass sich ausgehend vom Zustand i bei $t=0$ der Prozess zum Zeitpunkt t nach beliebig endlich vielen Zustandsuebergaengen in einem beliebigen Zustand befindet und die bis dahin freigesetzte Stoffmenge den Wert y nicht ueberschreitet. Die Verwandtschaft von $H_j(t)$ und $R_j(y:t)$ ist offenkundig. Ist (a_1, a_2, \dots, a_m) die Anfangsverteilung der Zustaende bei $t=0$, so ist

$$R(y:t) = a_1 R_1(y:t) + \dots + a_m R_m(y:t)$$

die gesuchte Verteilung. In der Praxis wird der Vektor der Anfangsverteilung (a_1, a_2, \dots, a_m) sehr haeufig genau eine Eins und sonst lauter Nullen enthalten, da man in der Praxis oft von einem festen Zustand j bei $t=0$ ausgehen wird.

In Kenntnis des analytischen Ausdrucks fuer die gesuchte Verteilung $R(y:t)$ lassen sich die Momente der Verteilung und das asymptotische Verhalten studieren.

Wir kommen nun nach der ueberblicksweisen Darstellung der analytischen Modellierungsverfahren zum Hauptziel des Berichtes, dem numerischen Verfahren zur Berechnung der

Freisetzungsverteilung $R(y:t)$. Die numerische Berechnung von $R(y:t)$ führt auf die Lösung eines m -dimensionalen Systems von Integralgleichungen, wobei die Integrationen zweidimensionale Stieltjesintegrationen vom Faltungstyp sind. Das Problem wird durch Laplace-Stieltjestransformation in ein äquivalentes Problem der Lösung eines m -dimensionalen linearen Gleichungssystems für die gesuchten Laplace-Stieltjestransformierten übergeführt. Die Lösung des algebraischen Gleichungssystems ist numerisch wenig problematisch. Die Hauptarbeit ist bei der numerischen Inversion der zweidimensionalen Laplace-Stieltjestransformation. Diese wird durch die Tatsache wesentlich erleichtert, dass die Laplacetransformierten von Verteilungsfunktionen analytische Funktionen (hier biholomorphe Funktionen) sind, obwohl die entsprechenden Verteilungsfunktionen selbst in einfachen Fällen nicht einmal absolut stetig zu sein brauchen. Die bekannten Methoden zur numerischen Laplace-Inversion sind eindimensional und machen von hier nicht erfüllten Glattheitsvoraussetzungen Gebrauch. Die hier vorgeschlagene Methode wertet das zweidimensionale Umkehrintegral nach einer konformen Abbildung der Integrationsvariablen auf den Einheitskreis (Dizylinder) durch zahlentheoretische Integrationsmethoden aus. Diese zahlentheoretischen Methoden liefern bereits im hier vorliegenden zweidimensionalen Fall (und auch in höherdimensionalen Fällen) der Konvergenzgeschwindigkeit nach bestmögliche Verfahren, die bereits im vorliegenden Fall wesentlich besser sind als die klassischen Integrationsmethoden. Die in diesem Bericht verwendeten Stützstellen

fuer die auftretenden zweidimensionalen Integrationen beruhen auf zahlentheoretischen Eigenschaften der Fibonacci-zahlen $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, f(n-1)+f(n-2), \dots$, und sind im Zweidimensionalen optimal. Analoge Verfahren fuer den hoeherdimensionalen Fall sind bekannt. Diese Integrationsverfahren haben noch den Vorzug, leicht codierbar zu sein. Es liegen umfangreiche und guenstige numerische Erfahrungen fuer die bei PASSAT technisch relevanten Markov-Erneuerungsprozesse und fuer allgemeinere Prozesse vor, sodass die numerischen Verfahren eine weit ueber PASSAT hinausgehende Anwendbarkeit besitzen.

§ 2 ZUSAMMENFASSUNG UND ZIELE

Es wurden folgende Ziele gesteckt:

1)

Entwicklung von Methoden zur numerischen Auswertung der bereits erstellten Markoff-Erneuerungsmodelle mit monotonen Kostenfunktionen fuer PASSAT. Die Methode soll es ermoeglichen, in einem Modell mit mindestens drei Zustaenden zu einem beliebigen Zeitpunkt t die Wahrscheinlichkeitsverteilung der freigesetzten kumulativen Schadstoffmenge oder zumindest deren Mittelwert und Streuung zu berechnen.

2)

Ausarbeitung der asymptotischen Verteilung der kumulativen Freisetzungsmenge fuer die obigen M.E.P. (=Markov-Erneuerungsprozess) mit der Bewertung der Geschwindigkeit der Konvergenz gegen die Grenzverteilung.

3)

Algorithmische Beschreibung der erarbeiteten Verfahren zur Erleichterung der Erstellung eines Codes.

4)

Didaktische Aufarbeitung der bisher erreichten Resultate. Diese Zusammenfassung soll zeigen, wie die gesteckten Ziele erreicht wurden und dass die entwickelten Methoden wesentlich weiter reichen als zunaechst abgesehen werden konnte.

Wir fassen zunaechst die Methoden zu 1) zusammen:

ad 1)

Die gesuchte Verteilung der bis zum Zeitpunkt t

anfallenden Kosten (Freisetzung in Passat) ist durch

$$R(y:t) = P\{C(t) \leq y\} \quad (1)$$

gegeben. $C(t)$ sind die kumulativen Kosten im Intervall $[0, t]$.

Es gilt

$$R(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j R_j(y:t) \quad (2)$$

$$R_j(y:t) = \sum_{k=1}^m R_{jk}(y:t) \quad (3)$$

$$R_{jk}(y:t) = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_k(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{jk}^{(n)}(d\xi, d\eta) \quad (4)$$

- Zugrundegelegt wurde ein Markov-Erneuerungsprozess (M. E. P.) mit m Zuständen (m beliebig endlich). Eingangsgroessen sind
- die Anzahl m der Zustände
 - die Kostenfunktionen $K_i(t)$, in den Zuständen $1 \leq i \leq m$
 - der Kern des M. E. P.

$$\left(Q_{ik}(t) \right)_{m \times m} = Q(t)$$

Der Kern Q beschreibt die Verweilzeitverteilungen in den einzelnen Zuständen zusammen mit den Uebergangswahrscheinlichkeiten.

- die Anfangsverteilung der Wahrscheinlichkeiten fuer das Eintreten der einzelnen Zustände

$$(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Diese Groessen muessen im Rahmen einer Systemanalyse bestimmt werden. Die Funktionen $\Delta_{jk}^{(n)}$ und H_k bestimmen sich definitionsmaessig folgendermassen daraus:

$$H_k(t) = \sum_{j=1}^m Q_{jk}(t) \quad (5)$$

$$\Delta_{jk}(x,y) = Q_{jk}(\min(x, K^{-1}(y))) \quad (6)$$

Die Funktionen $\Delta_{jk}^{(n)}$ definieren wir als die Elemente der n-ten **Stieltjes Faltungspotenz Δ^{**n} von $\Delta(x,y) = (\Delta_{jk}(x,y))_{m \times m}$. Das Problem der Bestimmung der Verteilung $R(y:t)$ reduziert sich auf die Berechnung der Matrizenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{**n} = \chi \quad (7)$$

Durch Laplace-Stieltjes-Transformation des Problems erhaelt man im Laplace-Bereich die Loesung

$$\tilde{\chi} = \tilde{\Delta} \cdot (E - \tilde{\Delta})^{-1}, \quad (E = (\delta_{ik})_{m \times m}) \quad (8)$$

Durch numerische Ruecktransformation von $\tilde{\chi}$ nach den Methoden des § 5, § 6 erhaelt man χ , sodass die Bestimmung von $R_{jk}(y:t)$ auf einfache numerische Integrationsprozesse zurueckgefuehrt ist.

Es muss hier festgehalten werden, dass bei der bisherigen Analyse des

Systems PASSAT sich die Matrix $\tilde{\Delta}(u,v)$ der Laplace-Transformierten der Kosten-Verweilzeitverteilungen als elementar in dem Sinne, dass alle auftretenden Funktionen aus rationalen Funktionen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind, erwiesen haben. Die entwickelten zahlentheoretischen Verfahren lassen beliebig viele Zustände zu. Die Genauigkeit der Laplace-Umkehrformel hängt nicht von der Anzahl der Zustände ab. Für grössere Anzahlen von Zuständen spielt der Rechenaufwand für die Inversion der $m \times m$ Matrizen nach (8) eine Rolle. Dieser Aufwand betrifft allerdings nicht die zahlentheoretische Umkehrformel an sich. Praktische Grenzen werden also von der Anzahl der Zustände wegen der grossen Anzahl von Matrizen-Inversionen gesetzt. Im Bereich von etwa fünf Zuständen sind die Matrixoperationen unproblematisch, sodass für diese Zustandsanzahlen faktisch keine Einschränkungen entstehen.

Da nun aus dem analytischen Modell die Verteilung $R(y:t)$ numerisch bestimmbar ist, ist es leicht möglich, die Momente von $R(y:t)$ numerisch zu bestimmen:

$$M_n(t) = n \int_0^{\infty} y^{n-1} (1-R(y:t)) dy \quad (9)$$

Das Integral ist stets ein eigentliches Integral, da die in $[0, t]$ freigesetzte Menge wegen der stückweisen Linearität der Kostenfunktion eine von t linear abhängige Grösse nicht überschreiten kann. So sind also $R(y:t)$

und saemtliche Momente fuer beliebige Zeitpunkte t und beliebige Anzahlen m der Zustaende bestimmbar.

ad 2)

In § 4 wird festgestellt, dass die Verteilung $R(y;t)$ fuer $t \rightarrow \infty$ asymptotisch normal verteilt ist.

Fuer die Bewertung der Konvergenzgeschwindigkeit sind grundsuetzliche Informationen ueber den Prozess noetig. Aus den konkreten Informationen der Systemanalyse der PASSAT folgt, dass im Falle der PASSAT eine exponentielle Konvergenz vorliegt. In § 4 wurde auch eine allgemeinere Quantifizierung der Konvergenzrate vorgenommen.

ad 3)

Der Bericht enthaelt saemtliche Rechenvorschriften mit Ein- und Ausgabe-Groessen. Insbesondere werden die neu entwickelten zahlentheoretischen Verfahren methodisch ausfuehrlich dargestellt und auch die Stuetzknoten und Hilfsfunktionen explizit angegeben. Es wurden auch ueber die formulierten Aufgaben hinaus umfangreiche numerische Tests durchgefuehrt und zwar fuer Verteilungen, die aufgrund der Systemanalyse der PASSAT relevant sind.

Der § 5 enthaelt eine Reihe von Erfahrungen und Erfahrungen ueber die numerischen Prozesse.

ad 4)

Der Bericht ist auf eine didaktische Aufbereitung des Materials hin ausgerichtet. Insonderheit enthaelt der § 3 eine breite Darstellung der relevanten Aussagen ueber Funktionaltransformation von zweidimensionalen Verteilungen, wie sie hier benoetigt werden.

§ 3 DIE ZWEIDIMENSIONALE LAPLACE-STIELTJES-TRANSFORMATION
IM BEREICH DER M. E. P.

Die klassische Laplace-Transformation (Doetsch [12])

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (10)$$

ist wohlbekannt und hat eine Reihe von wichtigen Anwendungen in der Stochastik und in den Ingenieurwissenschaften. Sie ist jedoch nicht ausreichend, um die bei den M.E.P. mit Kostenfunktionen auftretenden Probleme zu lösen, da hier die gemeinsame Verteilung von Kosten und Lebensdauern von Zuständen eingeht. Selbst im stochastisch sehr einfachen Fall, dass die Lebensdauern exponentiell verteilt, also absolut stetig sind, und die Kostenfunktionen linear, also mathematisch ueberaus einfach sind, ist die gemeinsame Verteilung bei weitem nicht absolut stetig. Es gilt sogar bei dieser absolut stetigen Verteilung, dass fast ueberall im Lebesgue'schen Sinne die Ableitungen existieren und diese Null sind. Man kann also bereits in diesem sehr einfachen und praktisch haeufig auftretenden Fall nicht auf zweidimensionale Stieltjes-Integrale verzichten. Sind $F(x,y)$ und $G(x,y)$ die Verteilungsfunktionen zweier unabhaengiger Zufallsvektoren im ersten Quadranten, so ist

$$H(x,y) = F(x,y)**G(x,y) = \int_0^x \int_0^y F(x-\xi,y-\eta) dG(\xi,\eta) \quad (11)$$

die durch die zweidimensionale Stieltjes-Faltung erklarte Verteilungsfunktion

der Summe der beiden unabhängigen Zufallsvektoren. Im Falle der Absolutstetigkeit der Verteilungen existieren die Dichten

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad , \quad g(x,y) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

und die Verteilung $H(x,y)$ hat die Dichte

$$h(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(x-\xi, y-\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x,y) ** g(x,y) \quad (13)$$

Jedenfalls ist die Faltung kommutativ. Eines der wirksamsten Hilfsmittel der Stochastik sind die charakteristischen Funktionen von Zufallsvariablen. Betrachten wir zuerst den eindimensionalen Fall. Hat eine Zufallsvariable die Verteilungsfunktion $F(x)$, so heisst ihre Fouriertransformierte

$$\varphi_F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \quad (14)$$

charakteristische Funktion. Es gilt: Der Faltung von Verteilungen entspricht die Multiplikation der charakteristischen Funktionen:

$$\varphi_F(t) \cdot \varphi_G(t) = \varphi_{F*G}(t) \quad (15)$$

Da in unserem Falle die Lebensdauer und die Kosten nicht negativ sind, ist $dF(x) = 0$ fuer $x < 0$.

Wir drehen nun die t -Ebene um den Winkel $-\pi/2$ und erhalten fuer nicht negative Zufallsvariablen die Laplace-Stieltjes-Transformierte mit den neuen Variablen t statt x und s statt it :

$$LS(F(t)) = \int_0^{\infty} e^{-ts} dF(t) = \tilde{f}(s) \quad (16)$$

Falls die Verteilung $F(x)$ absolut stetig ist, erhaelt man mit $f(t) = F'(t)$

$$LS(F(t)) = \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt = \bar{f}(s) \quad (17)$$

Auch hier gilt natuerlich der Faltungssatz

$$LS(F*G) = LS(F) \cdot LS(G) \quad (18)$$

Durch partielle Integration laesst sich die Laplace-Stieltjes-Transformation auf eine gewoehnliche Laplace-Transformation zurueckfuehren:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) = s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt - F(0) \quad (19)$$

Erwaehenswert ist in diesem Zusammenhang der Differentiationssatz:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt - F(0) \quad (20)$$

Der Zusammenhang mit (19) ist offensichtlich. Fuer die gebraeuchlichen Techniken ueber Laplace-Transformierte sei auf die Lehrbuchliteratur verwiesen (Doetsch [11], [12]). An dieser Stelle ist insbesondere zu erwaehnen, dass die bei den M. E. P. der PASSAT auftretenden Verteilungen so beschaffen sind, dass die Laplace-Stieltjestransformation explizit als analytische Ausdruecke berechenbar sind. Das numerische Problem, das sich bei der Verwendung der

Fourier- oder Laplace-Transformationen stellt, ist das Umkehrproblem:

Ist eine Laplace-Stieltjes-Transformierte gegeben, so ist die entsprechende Verteilungsfunktion zu bestimmen. Es sei vorangestellt, dass

Verteilungsfunktionen stets von endlicher Variation sind (Natanson [41]). Ist

$f(s)$ die Laplace-Stieltjes-Transformierte von $F(t)$, dann ist $f(s)$ analytisch in $\text{Re}(s) \geq x_0$ und ist V.P. (Valeur Principal, Valor principalis) der Cauchy'sche Hauptwert, so gilt fuer $x \geq x_0$ und $t > 0$

$$\frac{F(t^+) + F(t^-)}{2} = \text{V.P.} \frac{1}{2\pi i} \int_{s=x-i\infty}^{s=x+i\infty} \frac{e^{ts}}{s} f(s) ds \quad (21)$$

Fuer $t < 0$ verschwindet der Hauptwert. [12], [13]

Es ist klar, dass die Auswertung dieses Hauptwertes nicht gerade ein einfaches numerisches Problem darstellt. Die Situation wird noch erschwert dadurch, dass die Probleme tatsaechlich nicht eindimensional sondern zweidimensional sind. Um die Dinge formal nicht bis zum "Aeussersten" zu treiben, wollen wir zunaechst voraussetzen, dass die zweidimensionale Verteilung $F(t_1, t_2)$ stetig ist. Das bedeutet natuerlich noch lange nicht, dass $F(t_1, t_2)$ absolut stetig und also das unbestimmte Integral ihrer Dichte ist. Sei nun $f(s_1, s_2)$ die Laplace-Stieltjes-Transformierte von $F(t_1, t_2)$

$$f(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-s_1 t_1 - s_2 t_2) dF(t_1, t_2) \quad (22)$$

Und sei $f(s_1, s_2)$ in $\text{Re}(s_1) \geq x_1^0, \text{Re}(s_2) \geq x_2^0$ regulaer. Dann gilt die Umkehrformel fuer $x_1 \geq x_1^0 > 0, x_2 \geq x_2^0 > 0$

$$F(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{s_1=x_1-i\infty}^{s_1=x_1+i\infty} \int_{s_2=x_2-i\infty}^{s_2=x_2+i\infty} \exp(s_1 t_1 + s_2 t_2) \cdot \frac{f(s_1, s_2)}{s_1 \cdot s_2} ds_1 ds_2 \quad (23)$$

Wenngleich diese Formel, die sich von den Umkehrformeln der gewoehnlichen Laplace-Transformation unterscheidet, formal nicht gerade einfach ist, ist sie dennoch die Ausgangsbasis fuer rasch konvergente numerische Prozesse. Es ist an dieser Stelle angebracht, etwas ueber die zugrunde liegenden heuristischen Ideen zu sagen: Der Integrationsbereich ist als kartesisches Produkt zweier Gerader nicht kompakt. Es ist das Ziel, den Integrationsbereich unter Erhaltung des Integrals auf einen kompakten Bereich zu transformieren und zwar moeglichst so, dass die transformierten Integranden und Differentiale auf periodische Funktionen fuehren.

Die Methode besteht nun darin, dass man die Halbebenen $\text{Re}(s_1) \geq 0, \text{Re}(s_2) \geq 0$ durch eine gebrochen-lineare Transformation auf die Einheitskreisscheiben abbildet [28]:

$$w_1 = (s_1 - 1)/(s_1 + 1), \quad w_2 = (s_2 - 1)/(s_2 + 1) \quad (24)$$

Wegen der Kreisverwandtschaft dieser Abbildungen geht die Gerade

$s_1 = x_1 + iy_1$ und die Gerade $s_2 = x_2 + iy_2$ in den Kreis

$$w_1 = x_1/(1+x_1) + \exp(-i\varphi_1)/(1+x_1), w_2 = x_2/(1+x_2) + \exp(-i\varphi_2)/(1+x_2) \quad (25)$$

ueber. Wenn y_1, y_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ laeuft, durchlaufen φ_1, φ_2 die volle Periode von 0 bis 2π und die Differentiale transformieren sich durch

$$s_{1/2} = x_{1/2} - i (1+x_{1/2}) \sin \varphi_{1/2} / (1 - \cos \varphi_{1/2}) \quad (26)$$

$$ds_{1/2} = (i \cdot (1+x_{1/2}) / (1 - \cos \varphi_{1/2})) \cdot d\varphi_{1/2} \quad (27)$$

Dadurch ist die Periodisierung des Problems gelungen. Auf die resultierenden Integrale periodischer Funktionen von zwei Veraenderlichen koennen sehr schlagkraeftige Verfahren der Zahlentheorie angewendet werden. Diese Verfahren sind in § 5, § 6 ausfuehrlicher beschrieben. Die Verfahren beruhen auf tieferliegenden Saetzen der Kettenbrueche, der Diophantischen Gleichungen und Ungleichungen und der Theorie der algebraischen und transzendenten Zahlen. Erste numerische Experimente rechtfertigen die verwendeten Methoden sehr gut.

§ 4 DIE MOMENTE DER KOSTENVERTEILUNG UND DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DER KOSTENVERTEILUNG

Sei wieder $R(y; t) = P\{C(t) \leq y\}$ die Verteilungsfunktion der im Zeitintervall $[0, t]$ anfallenden kumulativen Kosten $C(t)$ des zugrunde gelegten (Markov-Erneuerungs-) Prozesses. Es sei der Kuerze halber auf die Reihendarstellung (2 - 4) fuer $R(y; t)$ verwiesen. Zur Berechnung der n-ten Momente von $R(y; t)$ sei auf folgenden allgemeinen Sachverhalt hingewiesen: Sei $F(x)$ die Verteilungsfunktion einer nicht negativen Zufallsveraenderlichen. Falls das n-te Moment existiert, gilt die Ueberlegung

$$\begin{aligned}
 M_n &= \int_0^{\infty} x^n dF(x) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^n d(1-F(x)) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x^n(1-F(x))]_0^t - \int_0^t (1-F(x))nx^{n-1} dx = \\
 &= n \int_0^{\infty} (1-F(x))x^{n-1} dx
 \end{aligned} \tag{28}$$

Insbesondere erhaelt man fuer die ersten beiden Momente der Kostenverteilung $R(y; t)$:

$$M_1 = \int_0^{\infty} (1-R(y; t)) dy \tag{29}$$

$$M_2 = 2 \int_0^y y(1-R(y; t)) dy \tag{30}$$

Es ist zu beachten, dass die Momente von $R(y; t)$ natuerlich vom Zeitintervall $[0, t]$, also von t , abhaengen. Die zunaechst uneigentlichen Integrale (29) und (30) fuer die Momente sind in den praktisch oft auftretenden Faellen des Vorliegens deterministische Kostenfunktionen der einzelnen Zustaeude im allgemeinen eigentliche Integrale, da in diesen Faellen fuer ein $Y(t) < \infty$ auch $P\{C(t) > y(t)\} > 0$ ist. Ohne zusaetzliche Informationen ueber die Kostenfunktionale und die Gestalt der Verweildauerverteilungen lassen sich wegen der Allgemeinheit des vorliegenden Modells naturgemaess keine Aussagen ueber das asymptotische Verhalten des Prozesses fuer $t \rightarrow \infty$ machen. Unter realistischen Annahmen ueber die Freisetzungsfunktionen und Lebensdauerverteilungen in der PASSAT kann man jedoch einige grundsaeztliche Aussagen ueber die Asymptotik machen:

Zunaechst sei ein Markov-Erneuerungskern (siehe 32), wie er aus den Annahmen ueber das stochastische Verhalten der Erhitzer folgt, beschrieben. Fuer die Terminologie sei auf Pyke [53] verwiesen.

Der Prozess habe m Zustaeude, der Kern werde mit

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & \dots & Q_{1m}(t) \\ Q_{m1}(t) & \dots & Q_{mm}(t) \end{pmatrix} \quad (31)$$

beschrieben.

$$Q_{ik}(x) = P\{\tau_{n-1} < x, J_n = k \mid J_{n-1} = i\}$$

Die Systemanalyse der PASSAT zeigt, dass $Q_{ik}(x)$ eine mathematische recht

angenehme Struktur hat; $Q_{ik}(x)$ hat im wesentlichen jeweils eine verschobene Exponentialverteilung

$$Q_{ik}(x) = P_{ik} \begin{pmatrix} 0 & : 0 \leq x < x_{ik}^{(0)} \\ \lambda_{ik} e^{-\lambda_{ik}(x-x_{ik}^{(0)})} & : x \geq x_{ik}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Die Kostenfunktionale in den einzelnen Zuständen werden zunächst als stückweise lineare Funktionen der Lebensdauern der Zustände angenommen. Für den Kern $\Delta(x,y)$ gemäss (33) (vgl. Zinterhof [76], p 65, Gl (50))

$$\Delta(x,y) = \begin{pmatrix} \Delta_{11}(x,y) & \dots & \Delta_{1n}(x,y) \\ \Delta_{n1}(x,y) & \dots & \Delta_{nn}(x,y) \end{pmatrix} \quad (33)$$

gilt dann analog für den Übergang von Zustand i nach Zustand k

$$\Delta_{ik}(x,y) = P\{\tau_{n-1} \leq x, K_i(\tau_{n-1}) \leq y, J_{n-1} = i \mid J_n = k\} \quad (34)$$

$\Delta_{ik}(x,y)$ strebt wegen (32) exponentiell gegen P_{ik} für $t \rightarrow \infty$. Man sieht für die zweidimensionale Laplace-Stieltjes-Transformierte von $\Delta_{ik}(x,y)$ sofort ein, dass

$$\bar{\Delta}_{ik}(u,v) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-(xu+yv)) d\Delta_{ik}(x,y) = P_{ik} \frac{\lambda_{ik}}{(1+u+K_i v)} \exp(-ux_{ik}^0) \quad (35)$$

Da an dieser Stelle das Interesse an der Asymptotik besteht, nehmen wir unter Berufung auf die Verschiebungssätze für die Laplace-Transformation alle $x_{ik}^{(0)} = 0$ an. Zur Bestimmung der gewünschten Verteilungsfunktion muss man, wie schon mehrfach erläutert wurde, das System von Integralgleichungen

$$\chi = \Delta + \Delta **\chi \quad (36)$$

lösen, also im Bildbereich der zweidimensionalen Laplace-Transformation, das Gleichungssystem

$$\tilde{\chi} = \tilde{\Delta} + \tilde{\Delta} \cdot \tilde{\chi} \quad (37)$$

lösen:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\Delta} \cdot (E - \tilde{\Delta})^{-1} \quad (38)$$

Die Matrix $(E - \tilde{\Delta}(u,v))$ ist aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen für $\text{Re}(u) \geq 0$, $\text{Re}(v) \geq 0$ immer invertierbar, da ja $(E - \tilde{\Delta}(u,v))^{-1}$ die zweidimensionale Laplace-Transformierte einer Matrix von Massebelegungen ist. Da die $\tilde{\Delta}_{ik}(u,v)$ gemäß (35) vom Typ $(1+u+K_i v)^{-1}$ sind, ist $\tilde{\chi}_{ik}(u,v)$ eine rationale Funktion in eben diesen Größen:

$$\tilde{\chi}_{ik} = \sum_1 \frac{A_l}{(1+u+K_{il} v)^{a_l}} \quad (39)$$

Also haben die dazugehörigen Originalfunktionen $\chi_{ik}(x,y)$ ebenfalls exponentiellen Charakter. Dieser Sachverhalt lässt sich etwas aufwendiger auch im Originalbereich verbleibend nachweisen, da die Faltung von Erlangverteilungen (die ja Faltungspotenzen von Exponentialverteilungen sind) ebenfalls eine

Linearkombination von Erlangverteilungen ergibt. Wir verwenden nun die Formeln (63), (64), (65) aus der Arbeit (Zinterhof [76] p 68/9) "Markoff-Erneuerungsprozesse mit allgemeinen Kostenfunktionen". Dort wurden die

$$\Delta^{(\alpha, \beta)}(x, y, t) = P \{ \tau_\alpha \leq x, K_\alpha(t) \leq y, J_n = \beta \mid J_{n-1} = \alpha \} \quad (40)$$

eingefuehrt. Es gilt nach (63), (64), (65) dieser Arbeit

$$R(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j R_j(y:t) \quad (41)$$

$$R_j(y:t) = \sum_{k=1}^m R_{jk}(y:t) \quad (42)$$

$$R_{jk}(y:t) = \sum_{l=1}^m (\Delta^{(k,l)}(\infty, y, t) - \Delta^{(k,l)}(t, y, t)) \cdot \chi_{jk}(t, y) \quad (43)$$

Nun wurde gerade gezeigt, dass die $\chi_{ik}(t, y)$ ein exponentielles Verhalten fuer $t \rightarrow \infty$ aufweisen. Da der Kern des betrachteten M. E. P. aus Exponentialfunktionen aufgebaut ist, konvergiert die Differenz $\Delta(\infty, y, t) - \Delta(t, y, t)$ fuer $t \rightarrow \infty$ ebenfalls exponentiell fuer jedes y . Also konvergiert unter den vorausgesetzten Modellannahmen die Familie von Verteilungsfunktionen

$$R(y:t) = P \{ C(t) \leq y \} \quad (44)$$

fuer jedes y und $t \rightarrow \infty$ exponentiell. Diese Aussage ist wichtig und

nuetzlich. Analoges gilt fuer die Momente $M_1(t)$ und $M_2(t)$: Es ist bekannt (McLean - Neuts [34]), dass bei konstanten Kostenraten in M.E.P. die kumulativen Kosten fuer $t \rightarrow \infty$ normal verteilt sind. Die Formel fuer die asymptotischen Groessen ist naturgemaess kompliziert und sagt nichts ueber die Konvergenzgeschwindigkeit aus. Die Kernaussage bei McLean - Neuts ist jedenfalls: Es existieren die Limiten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_1(t)/t = M_1 \quad (45)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_2(t)/t^2 = M_2 \quad (46)$$

Und $R(y:t)$ ist fuer $t \rightarrow \infty$ asymptotisch normalverteilt mit den Momenten

$$M_1(t) \sim t \cdot M_1, \quad M_2(t) \sim t^2 \cdot M_2. \quad \text{Unsere zusaetzliche quantitative}$$

Aussage ist die folgende:

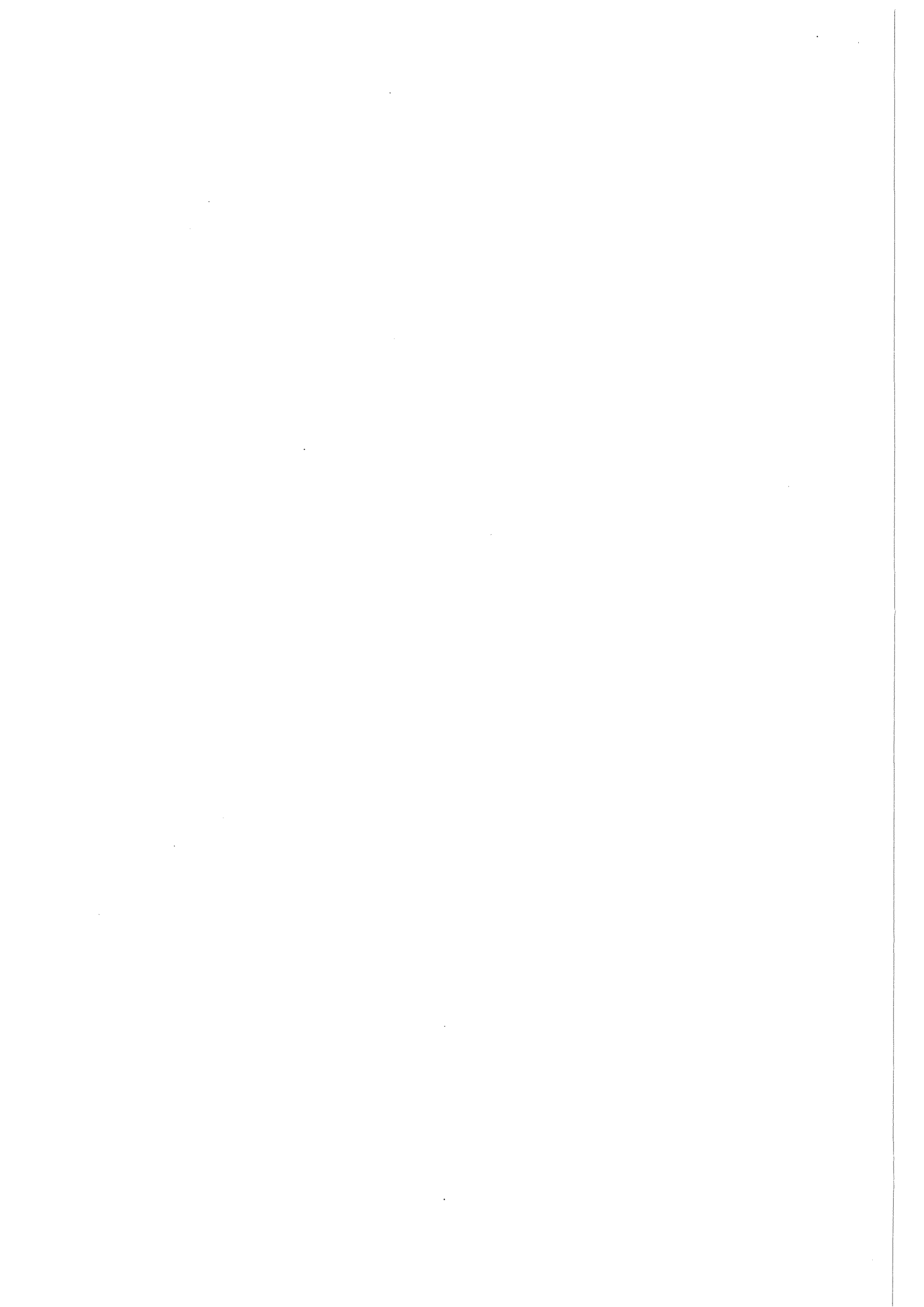
$$M_1(t) = \int_0^{\infty} (1-R(y:t))dy = M_1 \cdot t + O(t \cdot e^{-d \cdot t}) \quad (47)$$

$$M_2(t) = 2 \int_0^{\infty} y(1-R(y:t))dy = M_2 \cdot t^2 + O(t^2 \cdot e^{-d \cdot t}) \quad (48)$$

Dies gilt wegen des in t exponentiellen Verhaltens von R . Dabei ist d die kleinste im M.E.P. auftretenden Ausfallrate. Es ist als praktisch aussichtslos zu bezeichnen, rasch einigermaßen scharfe Konstanten fuer die O -Abschaetzungen abzuleiten. In der Praxis empfiehlt es sich viel mehr, $M_1(t)$ fuer einige groessere t -Werte zu bestimmen bis $M_1(t)/t$ hinreichend stationaer ist.

Aus der Abschaetzung (47) ist ersichtlich, dass dies bei etwa

$t \sim \ln c/d$ eintreten wird, wenn man M_1 bis auf einen Fehler der
Groessenordnung ϵ approximieren will.



§ 5 ZAHLENTHEORETISCHE METHODEN ZUR NUMERIK VON M. E. P.

Wir legen zur Beschreibung der Verfahren und fuer die Festlegung des Prozesses zunaechst gemaess (34) dieses Berichtes den verallgemeinerten M. E. P. mit dem Kern

$$\Delta^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta, t) = P \{ \tau_{n-1} \leq \xi, K_{\alpha}(t) \leq \eta, J_n = \beta \mid J_{n-1} = \alpha \} \quad (49)$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, m$$

fest. Der M. E. P. hat also m Zustaeude, und es entstehen im Zustand α bis zum Zeitpunkt t des Zustandes zufaellige Kosten $K_{\alpha}(t)$, die zusammen mit der Lebensdauer τ_{n-1} des Zustandes α , gemaess $\Delta^{(\alpha, \beta)}$ verteilt sind. Es gilt fuer die Verteilungsfunktion $R(y:t)$ der kumulativen Kosten $C(t)$,

$$R(y:t) = P \{ C(t) \leq y \} \quad (50)$$

$$R(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j R_j(y:t) \quad (51)$$

$$R_j(y:t) = \sum_{k=1}^m R_{jk}(y:t) \quad (52)$$

und

$$R_{jk}(y:t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m (\Delta^{(k, l)}(\infty, y, t) - \Delta^{(k, l)}(t, y, t)) \right) ** \quad (53)$$

** $\Delta_{jk}^{(n)}(t, y, \infty)$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ die Anfangsverteilung der Zustände ist. Hier bezeichnen die $\Delta_{jk}^{(n)}(\xi, \eta, t)$ die Elemente der n-ten Faltungspotenz der $m \times m$ Matrix

$$\Delta^{**n}(\xi, \eta, t) = (\Delta_{jk}^{(n)}(\xi, \eta, t))_{m \times m}$$

Die zweidimensionale Faltung zweier Matrizen A und B von Verteilungsfunktionen schreibt sich als

$$A^{**}B = \left(\sum_{l=1}^m A_{jl}^{**} B_{lk} \right)_{m \times m} \quad (55)$$

wobei

$$A_{jl}^{**}(x, y) B_{lk}(x, y) = \int_0^x \int_0^y A_{jl}(\xi, \eta) B_{lk}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \quad (56)$$

ist. Wir wollen nun unser Augenmerk auf die Lösung von Systemen von **-Integralgleichungen vom Faltungstyp konzentrieren. Eine Inspektion der obigen Formel von $R_{jk}(y:t)$, (53) (54) zeigt, dass die Matrix $\chi(y:t) = (R_{jk}(y:t))_{m \times m}$ der gesuchten Verteilungen $R_{jk}(y:t)$ einem System von **-Integralgleichungen vom Typ

$$\chi = E + \chi^{**}\Delta \quad (57)$$

genuegt. Offensichtlich ist die Reihe (53) fuer die $R_{jk}(y:t)$ gerade die Komponente (j,k) der Neumann'schen Reihe des Problems (57). Das klassische eindimensionale und univariate Analogon im Sinne der Riemann-Integrale zum System $x = \Delta + x ** \Delta$ ist

$$x(t) = h(t) + \int_0^t x(t-\tau) \delta(\tau) d\tau \quad (58)$$

mit bekannten Funktionen $h(t)$ und $\delta(t)$. Diese Integralgleichungen treten z. B. bei der Berechnung der Bereitschaftskoeffizienten von alternierenden Prozessen auf. Die zusaetzlichen Erschwernisse bei der Loesung von $x = \Delta + x ** \Delta$ sind 1) Die Integrationen sind zweidimensionale Stieltjesintegrationen 2) Das Problem ist m -dimensional, wobei in der Praxis oft $m > 2$ ist. Bei der Loesung der eindimensionalen klassischen Volttergleichung $x = h + x * \delta$ verwendet man oft mit Erfolg die Laplace-Transformation. Eines der dabei auftretenden Probleme ist, dass die Ruecktransformation der Loesung

$$\tilde{x}(s) = \tilde{h}/(1-\tilde{\delta}) \rightarrow x(t)$$

oft nur mehr numerisch gelingt. Es ist in vielen Faellen moeglich, die Laplace-Transformierte der Loesung des Systems

$$X = \Delta + X ** \Delta$$

zu bestimmen, sodass sich das numerisch anspruchsvollere Problem der numerischen Ruecktransformation der zweidimensionalen Laplace-Transformierten ergibt. Die Laplace-Transformierte $\tilde{X}(u,v)$ im Sinne der zweidimensionalen Laplace-Stieltjes-Transformation der Loesung $X(x,y)$ erhaelt man offenbar aus

$$X = \tilde{\Delta} + \tilde{X} \cdot \tilde{\Delta} \quad (59)$$

durch

$$\tilde{\chi} = \tilde{\Delta} \cdot (E - \tilde{\Delta})^{-1} \quad (60)$$

Aus dem Element $\tilde{\chi}_{jk}(u, v)$ der Matrix $\tilde{\chi}(u, v)$ erhaelt man durch formale Ruecktransformation mit dem komplexen Umkehrintegral das Element $\chi_{jk}(x, y)$ des Originalbereiches:

$$\chi_{jk}(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{u_0 - i\infty}^{u_0 + i\infty} \int_{v_0 - i\infty}^{v_0 + i\infty} \exp(xu + yv) \tilde{\chi}_{jk}(u, v) du dv \quad (61)$$

Setzen wir $u = \sigma_1 + i\tau_1$, $v = \sigma_2 + i\tau_2$, σ_1, σ_2 fix, so erhaelt man formal:

$$\chi_{jk}(x, y) = \frac{\exp(x\sigma_1 + y\sigma_2)}{(2\pi)^2} \int_{\tau_1 = -\infty}^{\tau_1 = +\infty} \int_{\tau_2 = -\infty}^{\tau_2 = +\infty} \exp(i(\tau_1 x_1 + \tau_2 y)) \tilde{\chi}_{jk}(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2 + i\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (62)$$

Auf die Konvergenzfragen kann hier nicht eingegangen werden, es muss auf die Literatur und hier besonders auf die Monographien von Doetsch (12) verwiesen werden. Das uneigentliche Doppelintegral (62) fuer $\chi_{jk}(x, y)$ ist nun numerisch auszuwerten, wobei man sich die Funktionswerte $\tilde{\chi}_{jk}(u, v)$ aus der Gleichung $\tilde{\chi} = \tilde{\Delta} (E - \tilde{\Delta})^{-1}$ beschafft. Wir betrachten nun den Naeherausdruck

$$I_{jk}(T, x, y) = \int_{-T}^T \int_{-T}^T \exp(i(x\tau_1 + y\tau_2)) \tilde{\chi}_{jk}(\delta_1 + i\tau_1, \delta_2 + i\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (63)$$

Offensichtlich gilt

$$\chi_{jk}(x,y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\exp(i\delta_1 x + i\delta_2 y)}{(2\pi)^2} I_{jk} \quad (64)$$

Die numerische Auswertung von Doppelintegralen ist mit konventionellen Methoden oft schwierig und langwierig.

Wir verwenden deshalb zahlentheoretische Methoden, die gegenüber klassischen Integrationsmethoden eine Reihe von Vorteilen haben.

Ein wesentlicher Vorteil ist, dass die Konvergenzgeschwindigkeit im wesentlichen dimensionsunabhängig ist. Vor der Anwendung dieser Methoden muss das Prinzip dargestellt werden:

Betrachten wir zunächst das Problem der numerischen Integration von periodischen Funktionen von zwei Veränderlichen mit der einfachen Methode des arithmetischen Mittels:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) - R_N \quad (65)$$

Es zeigt sich, dass bei guter Wahl der Stützstellen

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, (x_1^{(N)}, x_2^{(N)})$$

die Ergebnisse wesentlich besser als mit klassischen Methoden sind, und dass das Finden guter Integrationsknoten auf nicht triviale zahlentheoretische Probleme führt. Setzen wir voraus, dass f eine absolute konvergente Fourierreihe besitzt

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \hat{f}(m_1, m_2) \exp(2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)) \quad (66)$$

Geben wir nun die Stuetzstellen $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, (x_1^{(N)}, x_2^{(N)})$ vor. Dann gilt mit der bekannten $'$ -Konvention, die den Summationsindex $(0,0)$ auslaesst:

$$R_N(f) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \hat{f}(m_1, m_2) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp(2\pi i(m_1 x_1^{(k)} + m_2 x_2^{(k)})) \quad (67)$$

Es ist unmittelbar einzusehen:

- 1) $R_N(f)$ wird umso kleiner sein, je kleiner die Fourierkoeffizienten \hat{f} sind und je rascher die \hat{f} verschwinden, je glatter also $f(x_1, x_2)$ ist.
- 2) $R_N(f)$ haengt ganz wesentlich ab vom Verhalten der trigonometrischen Summen:

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp(2\pi i(m_1 x_1^{(k)} + m_2 x_2^{(k)})) \quad (68)$$

Das Verhalten von trigonometrischen Summen wird in der analytischen Zahlentheorie studiert. Wir geben ohne Beweise (Korobow [30] p 23), die groesstenteils aufwendig sind, einige Abschaetzungen an, wobei wir voraussetzen, dass $f \in E_2^\alpha(\mathbb{C})$ ist, d. h.

$$|\hat{f}(m_1, m_2)| \leq \frac{C}{\| (m_1, m_2) \|^{\alpha}} \quad (69)$$

Hier ist $\| (m_1, m_2) \| = \bar{m}_1 \bar{m}_2$, $\bar{m} = \max(1, |m|)$. $f(x_1, x_2)$ ist z. B. aus der Klasse $E_2^\alpha(\mathbb{C})$ wenn die Ableitungen bis zur Ordnung α existieren und durch c beschaenkt sind.

- 1) Betrachten wir die Fibonacci-Folge

$$f_0 = 1, f_1 = 1, \dots, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$$

Setzen wir $a = f_{n-1}, N = f_n$

Die Tabelle gibt die ersten 39 Fibonacci-Zahlen an:

n	f	n	f	n	f	n	f
*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
1	1	11	89	21	10946	31	1346269
2	1	12	144	22	17711	32	2178309
3	2	13	233	23	28657	33	3524578
4	3	14	377	24	46368	34	5702887
5	5	15	610	25	75025	35	9227465
6	8	16	987	26	121393	36	14930352
7	13	17	1597	27	196418	37	24157817
8	21	18	2584	28	317811	38	39088169
9	34	19	4181	29	514229	39	63245986
10	55	20	6765	30	832040		

Fuer die Quadraturmethode

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}, \frac{a \cdot k}{N}\right) - R_N$$

gilt

$$R_N = O\left(\left(\frac{\log N}{N}\right)^\alpha\right) \tag{70}$$

Das Ergebnis ist nicht mehr wesentlich zu verbessern, da es stets

ein $f_0(x_1, x_2) \in E_2^\alpha(C)$ gibt mit (Korobow [30], p 45)

$$R_N(f_0) \geq \frac{C'}{N^\alpha} \quad (71)$$

2) Seien $\theta_1 = \exp(r_1)$, $\theta_2 = \exp(r_2)$, $r_1 \neq r_2$, $r_i \neq 0$ rational.

Dann gilt fuer die Quadraturmethode

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N \cdot t} \rho_{N,k}^{(t)} f(k\theta_1, k\theta_2) - R_N \quad (72)$$

mit den durch

$$\left(\sum_{k=1}^N z^k \right)^t \equiv \sum_{k=1}^{N \cdot t} \rho_{N,k}^{(t)} z^k \quad (73)$$

definierten Gewichten $\rho_{N,k}^{(t)}$ die Abschaetzung

$$R_N(f) = O(N^{\epsilon-\alpha}), \epsilon > 0. \quad (74)$$

Diese Abschaetzung gilt ueberhaupt fuer fast alle Vektoren (θ_1, θ_2) . Dies sollte allerdings nicht sofort dazu verleiten, von den ueblichen Kongruenzgeneratoren erzeugte Zufallszahlen zu verwenden, da es theoretische und vor allem praktische Befunde gibt, dass diese Zufallszahlen wesentlich schlechter funktionieren als etwa die Fibonacci-Gitter oder die Gitter $(ne^{r_1}, ne^{r_2}, \dots, \dots)$ modulo 1! Dies laesst sich bereits im eindimensionalen Fall numerisch zeigen. Die Knoten fuer die Integration werden umso besser sein,

je regelmaessiger die Knoten im Integrationsbereich verteilt sind, je naeher also die empirische Verteilungsfunktion den Knoten der Gleichverteilung ist. Die aus der Probabilistik gut bekannte Kolmogoroff-Distanz der empirischen Verteilungsfunktion der Knoten und der Gleichverteilung heisst in der Zahlentheorie Diskrepanz D_N :

$$D_N = \sup_{I=[a,b]} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N C_{[a,b]}(x_k) - (b-a) \right| \tag{75}$$

D_N ist ein uebliches Mass fuer die Guete der Gleichverteilung einer Folge (Kuipers - Niederreiter [32]). Die Tabelle gibt fuer die eindimensionale Folge $x_k = 1/2_N + (k-1)/N$, $k=1, \dots, N$, die Folge $x_k = k(\sqrt{5}-1)/2$ die bestmoeglich vom Typ $k.\theta$, $k=1,2, \dots, \infty$, ist, und fuer eine Folge x_k aus einem Standardkongruenzgenerator. Die faktische Berechnung der D_N ist fuer groessere N recht aufwendig, zur Illustration reicht jedoch der eindimensionale Fall bei maessigen N aus. Im mehrdimensionalen Fall verschaerft sich die Situation drastisch.

Tabelle DN fuer die Folgen k/N , Random und $k.\theta$

N=TB1	TB 2	TB 3	TB 4
*****	*****	*****	*****
2	.25	.56118	.38197
4	.125	.46987	.23607

8	.0625	.19545	.11803
16	.03125	.17805	.062306
32	.015625	.14055	.0446
64	.0078125	.065183	.028975
128	.0039063	.03556	.014374
256	.0019531	.03171	.0065617
512	9.7656E-4	.026432	.0036043
1024	4.8828E-4	.034123	.0018453
2048	2.4414E-4	.015278	.0010019
4096	1.2207E-4	.010319	6.0073E-4
8192	6.1035E-5	.0087536	3.6459E-4
16384	3.0518E-5	.0083839	1.5326E-4

TB1: Anzahl N der Folgenglieder

TB4: D_N fuer die beste Folge $1/2N + (k-1)/N$, $k=1, \dots, N$

TB2: D_N fuer einen ueblichen Zufallsgenerator

TB3: D_N fuer die Folge $\{k \theta\}$, $k=1, \dots, N$

$$\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$$

Fuer die numerische Inversion der Laplace-Transformation benoetigen wir jedoch Verfahren, die fuer im allgemeinen nicht periodische Funktionen wirksam sind und auf $[-T, T] \times [-T, T]$ operieren. Die lineare Transformation von $[0, 1] \leftrightarrow [-T, T]$ sei ausgefuehrt, sodass nur mehr das schwierigere Problem der Periodisierung des Integranden unter Beibehaltung des Wertes des Integrals bleibt. Das Problem besteht im wesentlichen darin, bei der Periodisierung

nicht nur das Integral zu erhalten, sondern auch die Ableitungen zu periodisieren, um höhere Glattheit zu erreichen.

Das Problem der vollen Periodisierung ist als gelöst zu betrachten.

Wir geben drei der nützlichsten Verfahren (Korobow [30] p. 52) an:

1) Offensichtlich gilt im eindimensionalen Fall in $[0,1]$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x)}{2} dx$$

Diese Transformation leistet eine Periodisierung von $f(x)$

Die analoge zweidimensionale Transformation ist in $[0,1] \times [0,1]$

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \frac{1}{4} (f(x_1, x_2) + f(x_1, 1-x_2) + f(1-x_1, x_2) + f(1-x_1, 1-x_2)) \quad (76)$$

2) Sei

$$\psi(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2} x, \quad \psi'(x) = \frac{\pi}{2} \sin \pi x$$

Wir betrachten die Periodisierungsvorschrift

$$f(x_1, x_2) \rightarrow f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} x_1, \sin^2 \frac{\pi}{2} x_2\right) \sin \pi x_1 \cdot \sin \pi x_2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \quad (77)$$

Die Periodisierungen 1) und 2) beruecksichtigen die Glattheit $\alpha = 2$.

Oft soll jedoch fuer eine raschere Konvergenz der Quadraturprozesse eine vorhandene hoehere Glattheit α ausgenuetzt werden. Wir geben dafuer eine Methode.

3) Diese Methode benuetzt Eigenschaften der Euler'schen Beta-Integrale, Sei

$$\phi_\alpha(x) = (2\alpha-1) \binom{2\alpha-2}{\alpha-1} \int_0^x [t(1-t)]^{\alpha-1} dt$$

Man prueft leicht nach, dass

$$\phi_\alpha(0) = 0, \phi_\alpha(1) = 1, \phi_\alpha^{(n)}(0) = \phi_\alpha^{(n)}(1) = 0 \quad \text{für} \quad n=1, 2, \dots, \alpha-1$$

ist. Die dazu gehoerige Periodisierungstransformation ist dann

$$f(x_1, x_2) \rightarrow f(\phi_\alpha(x_1), \phi_\alpha(x_2)) (2\alpha-1) \binom{2\alpha-1}{\alpha-1} [x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2)]^{\alpha-1} \quad (78)$$

Fuer die Praxis ausreichend sind meist

$$\phi_1(x) = \int_0^x dt = x \quad (79)$$

$$\phi_2(x) = 6 \int_0^x t(1-t) dt = 3x^2 - 2x^3 \quad (80)$$

$$\phi_3(x) = 30 \int_0^x [t(1-t)]^2 dt = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 \quad (81)$$

$$\phi_4(x) = 7 \binom{6}{3} \int_0^x [t(1-t)]^3 dt = 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7 \quad (82)$$

Die allgemeine Struktur dieser Periodisierungsverfahren ist also

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(\phi(x_1), \phi(x_2)) \phi'(x_1) \phi'(x_2) dx_1 dx_2 \quad (83)$$

Fuer die numerische Inversion der Laplace-Transformation haben wir aber Integrale vom Typ

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = I_T \quad (84)$$

auszuwerten, wobei $g(\tau_1, \tau_2)$ nicht periodisch zu sein braucht. Um das Integrationsgebiet $[-T, T] \times [-T, T]$ in $[0, 1] \times [0, 1]$ ueberzufuehren, ist die Transformation in (84)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2 T(x_1 - 0.5) = 2 T x_1 - T, \quad d\tau_1 = 2T dx_1 \\ \tau_2 &= 2 T(x_2 - 0.5) = 2 T x_2 - T, \quad d\tau_2 = 2T dx_2 \end{aligned} \quad (85)$$

noetig:

$$I_T = 4 T^2 \int_0^1 \int_0^1 g(2T(x_1 - \frac{1}{2}), 2T(x_2 - \frac{1}{2})) dx_1 dx_2 \quad (86)$$

Wir verwenden nun eine dieser Periodisierungen $x \rightarrow \phi(x)$ und erhalten

$$I_T = 4 T^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(2 T(\phi(x_1^{(k)}) - \frac{1}{2}), 2 T(\phi(x_2^{(k)}) - \frac{1}{2})) \phi'(x_1^{(k)}) \phi'(x_2^{(k)}) + O(T^2 \frac{k^\alpha N}{N^\alpha}) \quad (87)$$

Wir erhalten fuer die gesuchten Funktionen $\chi_{jk}(x, y)$ aus GI (62) den Naeherausdruck

$$\chi_{jk}(T, x, y) = \frac{\exp(x\sigma_1 + y\sigma_2)}{(2\pi)^2} \int_{\tau_1=-T}^{\tau_1=T} \int_{\tau_2=-T}^{\tau_2=T} \exp(i(x\tau_1 + y\tau_2)) \tilde{\chi}_{jk}(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2 + i\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (89)$$

und nach Anwendung der Quadraturmethode (87) fuer I_T die folgende Methode zur numerischen Ruecktransformation der Laplace-Transformierten

$$\chi_{jk}(T, x, y) = \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \exp(x\sigma_1 + y\sigma_2) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp [i \{x 2T(\phi(\tau_1^{(k)}) - \frac{1}{2}) + y 2T(\phi(\tau_2^{(k)}) - \frac{1}{2})\}]. \quad (90)$$

$$\cdot \tilde{\chi}_{jk}(\sigma_1 + i 2T(\phi(\tau_1^{(k)}) - \frac{1}{2}), \sigma_2 + i 2T(\phi(\tau_2^{(k)}) - \frac{1}{2})). \phi'(\tau_1^{(k)}) \cdot \phi'(\tau_2^{(k)})$$

Eingangsgroessen sind:

- 1) Die L-Transformierte wird an N Stellen der Ebene benoetigt
- 2) Diese Stellen $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k), \dots, (u_N, v_N)$ werden durch

$$u_k = 2 T(\tau_k^{(1)} - \frac{1}{2}), v_k = 2 T(\tau_k^{(2)} - \frac{1}{2}) \quad (91)$$

aus einer entsprechenden zahlentheoretischen Folge

$$(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)}), k = 1, \dots, N$$

erhalten. Geeignet sind hier z. B. die Fibonacci Folgen

$$\left(\frac{k}{N}, \frac{a \cdot k}{N}\right), k = 1, 2, \dots, N$$

3) Die Wahl der Intervallaenge $2T$. Hier sind generelle Aussagen schwer moeglich, da die optimale Wahl von T vom speziellen funktionentheoretischen Verhalten der biholomorphen Funktion $\tilde{\chi}_{jk}(u, v)$ abhaengt. Dieses Verhalten haengt von der Gestalt der Eingangsverteilung ab. Die Wahl von T ist auch bei den klassischen Verfahren der numerischen Inversion der eindimensionalen Laplace-Transformation ein wesentlicher Punkt, der aus der konkreten Fragestellung heraus entschieden werden muss.

4) Von Bedeutung ist auch die Wahl der periodisierenden Funktionen. Da die Laplace-Transformierten im Inneren des Definitionsgebiet biholomorph sind, koennen grundsatzlich die Ableitungen beliebig hoher Ordnung α periodisiert werden und zwar durch alleinige Wahl einer geeigneten Periodisierungsfunktion $\phi(\tau)$, die nur von α und nicht von der Laplace-Transformation abhaengt. Es ist nicht oekonomisch, die Ordnung α der Periodisierung zu hoch zu treiben, da der numerische Aufwand mit α waechst, wie auch die Konstanten in den entsprechenden O-Abschaetzungen wachsen werden.

Die numerischen Experimente zeigten, dass dieses Verfahren eine den angegebenen Abschaetzungen entsprechende Konvergenz besitzt. Ein Nachteil dieses Verfahrens und auch des entsprechenden eindimensionalen klassischen Verfahrens ist es, dass man sich bei der Ruecktransformation auf die Funktionswerte eines kompakten Teilbereiches (bei uns $[-T, T] \times [-T, T]$) der Ebene beschraenkt.

Wir verringern den durch diese Einschraenkung entstehenden Informationsverlust durch folgenden funktionentheoretischen Kunstgriff:

Die gebrochen lineare Abbildung $w=(z-1)/(z+1)$ bildet die rechte Halbebene der z -Ebene auf den Einheitskreis $|w| < 1$ ab. Die Umkehrabbildung dazu ist ersichtlich die Funktion $z=(1+w)/(1-w)$. Die gebrochen linearen Abbildungen sind kreisverwandt. Das Bild der Geraden $z=x+iy$ unter der Abbildung $w=(z-1)/(z+1)$ ist der Kreis der w -Ebene (siehe [28]).

$$K_x : w = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} e^{-i\varphi} \quad (93)$$

Dabei wird beim Durchlaufen von $y : -\infty < y < +\infty$ die Kreisperipherie $0 < \varphi < 2\pi$ durchlaufen und wir erhalten in natuerlicher Weise die Parametrisierung der Geraden

$$z = x + i y, \quad -\infty < y < \infty$$

$$z = x - i (1+x) \frac{\sin \varphi}{1-\cos \varphi} \quad (94)$$

Weiters gilt

$$dz = i \frac{(1+x)}{1-\cos\varphi} d\varphi \quad (95)$$

Bezeichnen wir nun mit V.P. den Hauptwert eines Integrals (Valeur Principal), so transformiert sich die eindimensionale komplexe Umkehrformel nach Doetsch [12], p 170, 191 gemaess:

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{V.P.} \frac{1}{2\pi i} \int_{z=x-i\infty}^{z=x+i\infty} \exp(z.t) F(z) dz = \\ &= \text{V.P.} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \exp(t(x-i(1+x)\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi})) \cdot F(x-i(1+x)\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}) \cdot i \frac{(1+x)}{1-\cos\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^1 \exp(t(x-i(1+x)\frac{\sin 2\pi\varphi}{1-\cos 2\pi\varphi})) \cdot F(x-i(1+x)\frac{\sin 2\pi\varphi}{1-\cos 2\pi\varphi}) \frac{(1+x)}{1-\cos 2\pi\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (96)$$

Das zweidimensionale Analogon schreibt sich demgemaess:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{z_1=x_1-i\infty}^{z_1=x_1+i\infty} \int_{z_2=x_2-i\infty}^{z_2=x_2+i\infty} \exp(z_1 t_1 + z_2 t_2) F(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \exp(t_1(x_1-i(1+x_1)\text{ctg}\pi\varphi_1) + t_2(x_2-i(1+x_2)\text{ctg}\pi\varphi_2)) \cdot (1+x_1)(1+x_2) \cdot \\ &\cdot F(x_1-i(1+x_1)\text{ctg}\pi\varphi_1, x_2-i(1+x_2)\text{ctg}\pi\varphi_2) \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{\sin^2 \pi\varphi_1 \sin^2 \pi\varphi_2} \end{aligned} \quad (97)$$

Diese auf einer natuerlichen konformen Abbildung beruhende Umkehrformel hat den Vorzug, dass der Integrationsbereich beschraenkt ist und der Integrand

periodisch ist. Man sieht auch rasch folgendes ein: Wenn $F(z_1, z_2)$ die Laplace 2-transformierte eines Markov-Erneuerungsproblems ist, wo die Ausgangsverteilungen verschobene Faltungspotenzen von Exponentialverteilungen oder Mischungen davon sind, gilt

$$F(z_1, z_2) = O((1+|z_1|)(1+|z_2|)^{-2}) \quad (98)$$

oder oft sogar eine analoge Abschätzung fuer die Ableitungen von $F(z_1, z_2)$. Dies zieht augenscheinlich entsprechende Glattheitsbedingungen fuer den Integranden in (97) nach sich, da ja, was die Differenzierbarkeit betrifft, der einzige kritische Punkt der Punkt $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = 2\pi$ ist, der wegen der Transformationsformel

$$z = x - i(1+x)\operatorname{ctg}\pi\varphi, \quad (99)$$

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

den Punkten $y = -\infty$ bzw. $y = +\infty$ entspricht. Und dort verhaelt sich $F(z_1, z_2)$ hinreichend differenzierbar aufgrund der Voraussetzungen ueber den M.E.P. Die nun folgende numerische Auswertung des Umkehrintegrals hat gegenueber der Approximation (90) den grossen Vorteil, dass die gesamte Information, die in der Laplace-Transformation steckt ausgenutzt werden kann. Um diese Information auch in Konvergenzgeschwindigkeit umzusetzen, muss noch bedacht werden: Der Integrand in (97) hat sich zwar als periodisch und stetig in φ_1, φ_2 herausgestellt, zumindest bei den ueblichen Kernen von Markoff-Erneuerungsprozessen. Auch existieren bei $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1$ unter diesen Voraussetzungen die einseitigen Ableitungen. Diese muessen bekanntlich trotz der Periodizitaet der Funktion selbst nicht periodisch sein, was das Konvergenzverhalten der Quadraturprozesse empfindlich stoeren kann. Es ist

daher zweckmaessig, ein Periodisierungsverfahren $\phi(\cdot)$ der passenden Ordnung α zu verwenden: Es gilt dann wegen (83) in abgekuerzter Schreibweise

$$f(t_1, t_2) = \int_0^1 \int_0^1 G(t_1, t_2, x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 G(t_1, t_2, x_1, x_2, \phi(\tau_1), \phi(\tau_2)) \phi'(\tau_1) \phi'(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (100)$$

Dabei ist der transformierte Integrand

$$G(t_1, t_2, x_1, x_2, \phi(\tau_1), \phi(\tau_2)) \phi'(\tau_1) \phi'(\tau_2) \quad (101)$$

bis zur Ableitung der Ordnung $\alpha-1$ periodisch und hat somit eine rasch konvergierende Fourierreihe. Diese Tatsache, dass

$$G(t_1, t_2, x_1, x_2, \phi(\tau_1), \phi(\tau_2)) \phi'(\tau_1) \phi'(\tau_2)$$

aus $E_2^\alpha(C(t_1, t_2, x_1, x_2))$ ist, fuehrt zu rasch konvergenten Quadraturverfahren, wie anfangs ausgefuehrt wurde. Es ist leicht zu ueberlegen, dass die Konstante $C(t_1, t_2, x_1, x_2)$ von N unabhængig und in kompakten Bereichen $0 \leq t_i < T_i < \infty$, $0 < x_i \leq x_i \leq y_i < \infty$ beschaenkt ist. Es ergibt sich somit z. B. fuer die Fibonacci-Knoten $(\frac{k}{N}, \frac{a \cdot k}{N})$ die ausgezeichnete Abschaetzung

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N G(t_1, t_2, x_1, x_2, \psi(\frac{k}{N}), \psi(\frac{a \cdot k}{N})) \cdot \psi'(\frac{k}{N}) \psi'(\frac{a \cdot k}{N}) + R_N \quad (102)$$

mit

$$R_N = O\left(\frac{k^\alpha N}{N^\alpha}\right) \quad (103)$$

Die klassischen Verfahren liefern selbst im eindimensionalen Falle im besten Fall der optimalen Wahl der Methode im guenstigen Fall

$$R_N = O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \quad (104)$$

Die meisten Verfahren erreichen dieses Optimum jedoch nicht. Die klassischen Verfahren, angewendet auf die zweidimensionale Ruecktransformation liefern nichts besseres als

$$R_N = O\left(\frac{1}{\sqrt{N^\alpha}}\right) \quad (105)$$

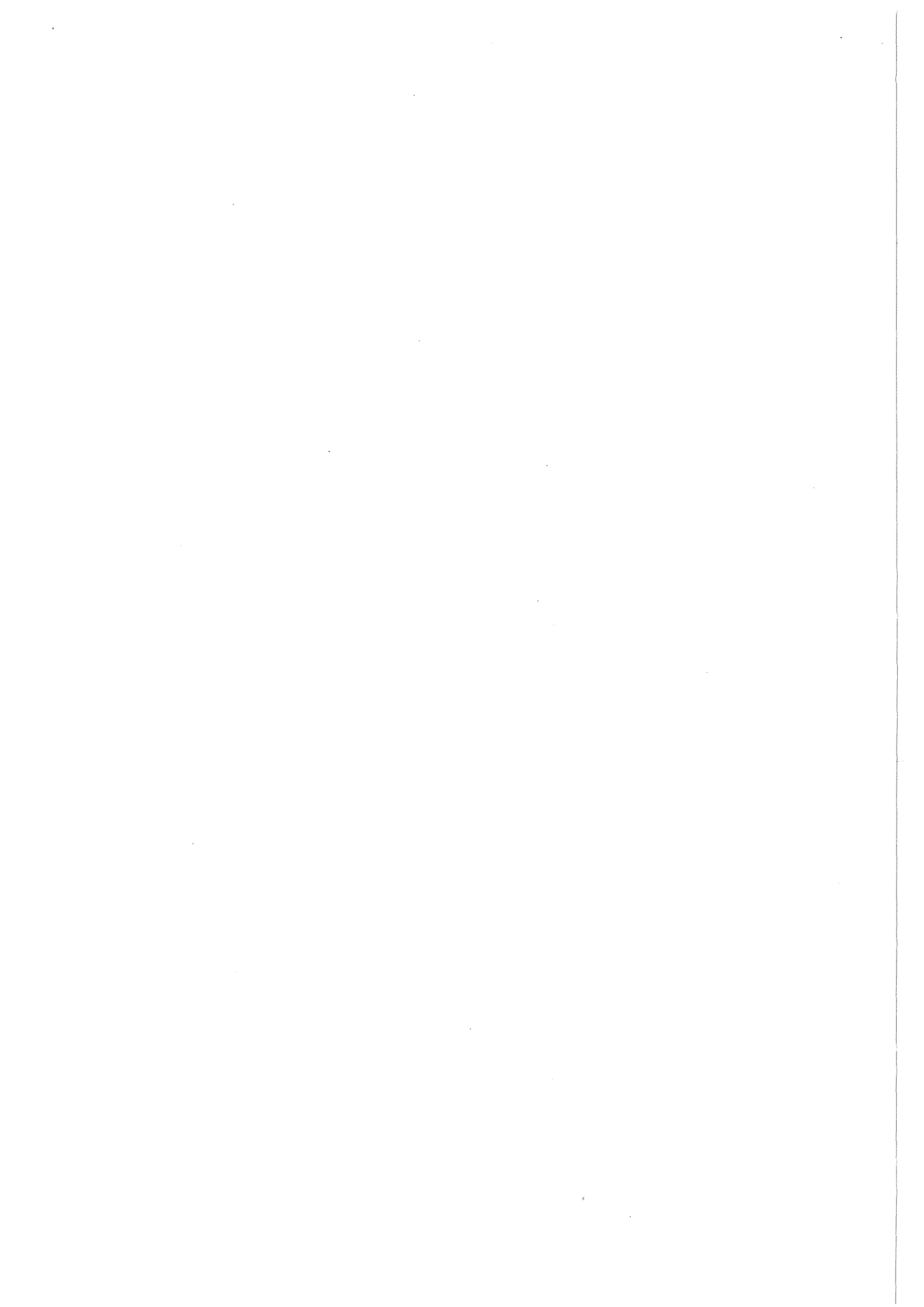
Dies ist naturgemaess viel schlechter als die zahlentheoretische Methode ist. Numerische Experimente erhaerten diesen theoretischen Befund. Damit ist es moeglich, in sehr vielen praktisch relevanten Faellen, wo naemlich die Kerne von Exponentialverteilungen herruehren, die dazugehoerigen Integralgleichungssysteme des M.E.P. vom *-Faltungstyp

$$X = \Delta + X^{**} \Delta \quad (106)$$

durch numerische Inversion der Laplace-Transformation

$$\tilde{X} = \tilde{\Delta} \cdot (E - \tilde{\Delta})^{-1} \quad (107)$$

numerisch zu loesen. Es ist dabei allerdings klar, dass die Anzahl der Zustaende wegen der groesseren Anzahl von Inversionen von $m \times m$ Matrizen eine grosse Rolle spielt, was den Rechenzeitverbrauch betrifft. Nun beschreibt die Loesung X unmittelbar die Verteilung der Kosten im M.E.P. oder X gestattet, diese Verteilung durch Quadraturen zu bestimmen. Das bedeutet also, dass die gewuenschte Verteilung $R(y;t)$ an einem willkuerlichen gegebenen Satz von Stuetzstellen y_1, y_2, \dots, y_n $y_i \in \mathbb{R}^+$ numerisch berechnet werden kann. Die Berechnung der Momente der Ordnung α ist dann numerisch kein Problem.



§ 6 NUMERISCHE ERFAHRUNGEN

Die im KFK durchgefuehrten Systemanalysen (Wenzelburger [68]) zeigten, dass die zweidimensionalen Verweilzeit-Freisetzungsverteilungs-Funktionen in den fuer die computergestuetzte Modellierung der PASSAT relevanten Faellen nicht absolut stetig sind. Dies hat die Konsequenz, dass das zu loesende Integralgleichungssystem vom zweidimensionalen Stieltjes-Faltungstyp lauter singulaere Masse enthaelt und daher nicht auf ein gewoehnliches Integralgleichungssystem zurueckgefuehrt werden kann. Die zahlentheoretischen Prozesse aus § 5 konvergieren fuer beliebige Masse, also auch fuer singulaere. Dieser Umstand muss besonders hervorgehoben werden, da die herkoemmlichen Verfahren auf glatte, absolut stetige, Verteilungen und Prozesse zugeschnitten sind. Es sind also auch Spruenge (Dirac'sche Deltas) grundsaeztlich zugelassen. Die Konvergenzgeschwindigkeit leidet natuerlich unter eventuell vorhandenen Unstetigkeiten der Verteilung etwas. Die numerische Loesung des Problems der Bestimmung der Freisetzungsverteilungsfunktion gliedert sich in drei Probleme:

- 1) Die Laplace-Transformation der Ausgangsverteilungen des Kernes mit Freisetzungsfunktionen (Kostenfunktionen)
- 2) Das Invertieren von vielen Matrizen
- 3) Die numerische Ruecktransformation der Laplace-Stieltjes-Transformierten einer Massenverteilung.

Das Problem 1) ist aufgrund der vorliegenden Systemanalysen als geloest zu betrachten, da die Verweilzeit- und Kostenverteilungen des Prozesses hinreichend genau analytisch modellierbar sind und die Laplacetransformierten Elementartranszendente sind. Das Problem 2) ist grundsaeztlich ein Standardproblem der Matrizennumerik. Die Inversion der Matrix $(E - \bar{\Delta})$ erfordert fuer kleine Werte der Argumente der Laplace-Transformierten

$\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_{jk})_{m \times m}$ besondere Umsicht und Einsicht in die zugrundeliegenden mathematischen Prozesse. Jedenfalls sind diese Prozesse auf der genannten Basis sicher beherrschbar. Das Problem 3) erfordert die grösste Aufmerksamkeit. Wenngleich die Abschaetzungen des § 5, § 6 sehr erfolgversprechend sind, ist es dennoch noetig, umfangreiche numerische Experimente zu machen. Es wurde der eindimensionale Fall mit Hilfe der Methode der konformen Abbildung numerisch ausfuehrlich studiert. Wir geben in diesem eindimensionalen Fall die Resultate fuer das Mass $d(1-\exp(-t))$ an. Die Verteilungsfunktion ist $F(t) = 1-\exp(-t)$ fuer $t \geq 0$ und es ist $F(t) = 0$ fuer $t < 0$. Die numerische Wirksamkeit der Methode zeigt sich auch bei grossen t -Werten und bei negativen t -Werten, da man ja im ersten Fall "fast asymptotische Aussagen" gewinnen moechte, etwa in t -Bereichen, die um eine Groessenordnung oder mehr ueber dem Erwartungswert liegen. Im zweiten Fall sehr kleiner negativer t -Werte muss der numerische Inversionsprozess sicher die Tatsache, dass fuer $t < 0$ $F(t) = 0$ ist, wiedergeben. Um die Probleme zu beleuchten, sei daran erinnert, dass die Dichte $F'(t)$ bei $t=0$ unstetig ist und einen Sprung der Hoehe 1 macht. Die gewaehlte Verteilung $F(t) = 1-\exp(-t)$ fuer $t \geq 0$ und $F(t) = 0$ fuer $t < 0$ ist eine klassische Verteilung, die nach Anwendung von Verschiebungssaetzen auch bei den Lebensdauerverteilungen der Erhitzer vorkommt. Es wurden numerische Experimente zur Inversion der Laplace-Stieltjes-Transformation im Bereich $[-T, T]$, $T=10$ gemacht. $T=10$ ist der 10fache Erwartungswert der Verteilung und es ist $F(10) = 9.999955 \cdot 10^{-1}$. Verwendet wurde kein Periodisierungsverfahren fuer die Ableitungen. Fuer die Integration auf dem zweidimensionalen Torus wurde die 15te Fibonacci Zahl $N=610$ und $a=377$ verwendet. Die Rechenzeit war bemerkenswert kurz. Da die response-time unterhalb der Minutengrenze lag, wurde auf eine genaue Bestimmung der Rechenzeit verzichtet. Die folgende Tabelle zeigt einige Resultate. Der Fehler ist nur selten bei 3 %, sonst durchwegs wesentlich kleiner.

Tabelle: N=610

t		Fehler
0.1		0.0063
0.5		0.0044
1.0		0.0101
1.5		0.0085
2.0		7.915E-5
2.5		0.00724
3.0		0.01
3.5		0.0065
4.0		8.5E-5
4.5		0.0096
5.0		0.0031
5.5		0.0057
6.0		0.0041
6.5		0.0027
7.0		0.023
7.5		0.026
8.0		0.0011
8.5		0.0062
9.0		0.0050
10.0		0.0105

t		Abs. Fehler
-0.1		7.892E-5
-0.5		1.678E-4
-1.0		8.23E-4
-1.5		-0.001002
-2.0		-2.315E-5
-2.5		8.719E-4
-3.0		0.00145
-3.5		
-4.0		-2.045E-4
-4.5		-0.00104
-5.0		-9.238E-5
-10.0		0.00113

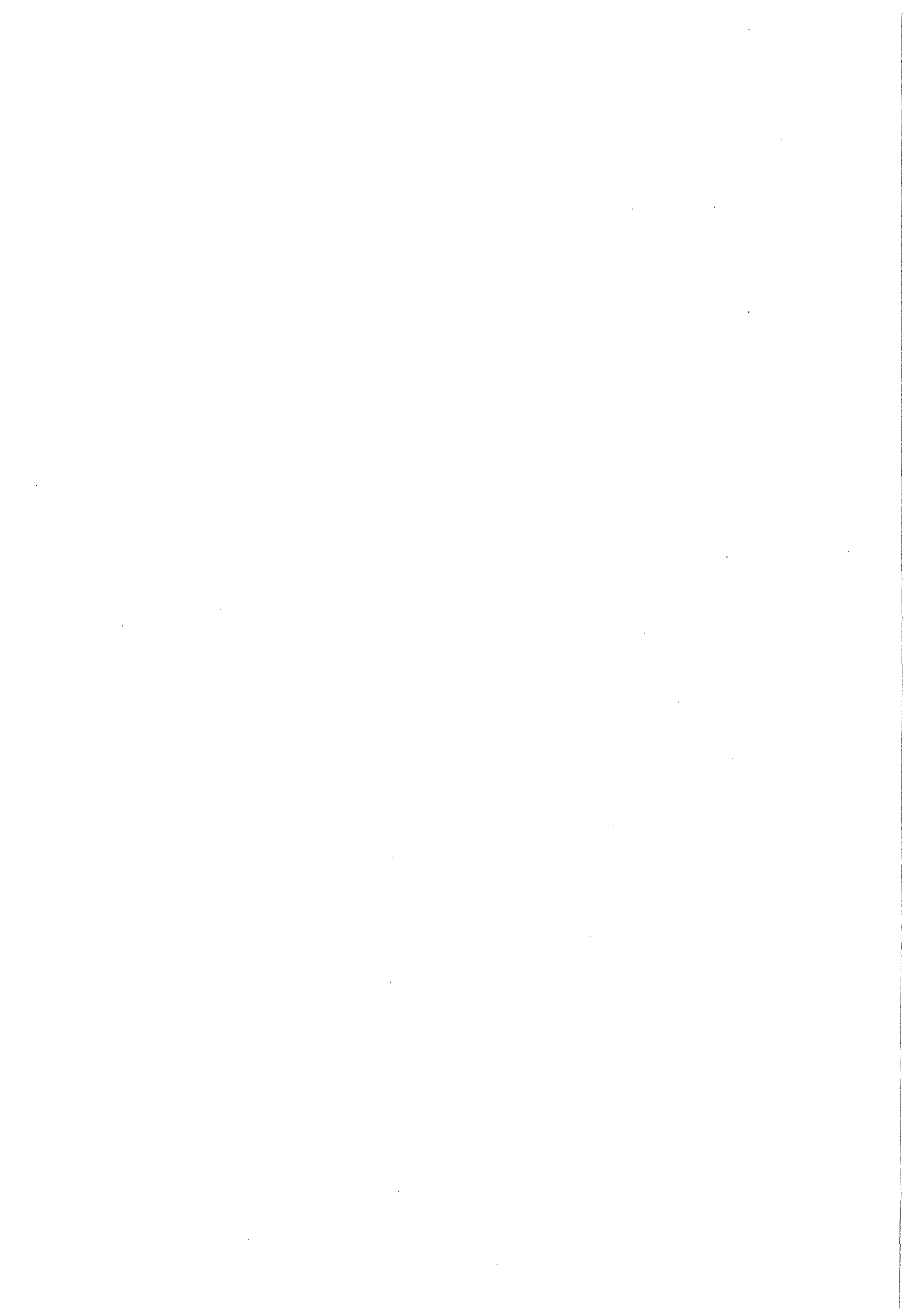
Diese numerischen Ergebnisse sind sehr befriedigend und enthalten keine Ausreisser. Zu erwarten war ja eine Groessenordnung des Fehlers von schlechtenfalls $1/N$. Dies stimmt fuer das verwendete $N=610$ mit den numerischen Befunden ueberein. Mit Periodisierungsverfahren wird die Situtation noch besser. Zur weiteren Illustration sei festgehalten:

Fuer $N=6765$ und $t=10$ ist der rel. Fehler = 0,00017

Fuer dasselbe $N=6765$ und $t=-10$ ist der absolute Fehler

$2.24E-4$. Die theoretisch vorhergesagte Konvergenzgeschwindigkeit von $O(1/N)$ (ohne Periodisierungsverfahren) trifft also hier zu.

Im zweidimensionalen Fall wurde die Methode der Euler-Fibonacci-Gitter auf die Integration im Bereich $[-20, 20] \times [-20, 20]$ gemäss (90) angewendet. Fuer $N=6765$, der 20ten Fibonacci-Zahl, und $a=4181$, der 19ten Fibonacci-Zahl ergibt sich ein Fehler im Prozentbereich. Auffaellig ist auch hier die Uebereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen eines Fehlers von der Ordnung $\ln N/N=0.0130037$. Bei diesen Experimenten im zweidimensionalen Bereich wurde die einfachere Methode (90) verwendet. Bei der Verwendung der theoretisch wesentlich besseren Methode (102) sind numerisch auch wesentlich guenstigere Resultate zu erwarten. Testfunktion war die Laplace-Stieltjes-Transformierte der zweidimensionalen Exponentialverteilung $F(x,y) = 1 - \exp(-(x+y))$. Mit der Methode der konformen Abbildung wurden ebenfalls numerische Tests durchgefuehrt. Bei einer Periodisierung der Ordnung 2 wurde $F(\tau_1, \tau_2) = 1 - \exp(-(\tau_1 + \tau_2))$ als Inverse ihrer Laplace-Stieltjes-Transformierten fuer $T_1=10$ $T_2=10$ also im Bereich der zehnfachen Erwartung dieser Verteilung, mit einem Fehler von nur 2 % bestimmt. Fuer negative T_1 oder T_2 arbeitet die Methode auch im Zweidimensionalen mit einem Fehler der Groessenordnung $1.E-5$. Dies ist umso bemerkenswerter, als die Dichte der Verteilung fuer $T_1=0$ oder $T_2=0$ unstetig ist. Verwendet wurde als Integrationsgitter das Gitter zur 19ten Fibonacci-Zahl. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass bei diesen numerischen Tests die Ordnung $\alpha=1$ ueberraschenderweise gleich gute Ergebnisse lieferte wie $\alpha=2$. Jedenfalls erweist sich die Methode als wirksam fuer die Numerik der M.E.P.



§ 7 ZUSAMMENSTELLUNG DER MASSGEBLICHEN RECHENVORSCHRIFTEN
NEBST BEWEISEN UND LITERATURHINWEISEN

In diesem § werden die fuer die praktische Implementierung des Verfahrens massgeblichen Rechenvorschriften ausfuehrlich dargestellt und breit begruendet. Das numerische Verfahren zerfaellt in drei Teile, wie bereits festgestellt wurde.

- 1) Die Laplace-Stieltjes-Transformation des Erneuerungskernes.
- 2) Die Summation der Neumannschen Reihe im Laplace-Bereich.
- 3) Die numerische Inversion der Laplacetransformation mit Bestimmung der Freisetzungverteilungsfunktion.

Diese drei Punkte werden zusammen mit den mathematischen Hintergruenden und den Literaturzitataten gemeinsam abgehandelt, da die Codierung der Verfahren auf diese Weise sehr erleichtert wird.

ad 1) Ausgangsbasis ist der Markov-Erneuerungskern des Prozesses:

$$Q_{ik}(x) = P\{\tau_{n-1} \leq x, J_n = k \mid J_{n-1} = i\} \quad (108)$$

Die Kostenfunktionen in den einzelnen Zustaenden, $K_i(t)$, haengen deterministisch von der Zeit des Zustand ab. Fuer die gemeinsame Verteilung der Lebensdauer und der Kosten gilt daher

$$\begin{aligned} \Delta_{ik}(t,y) &= P\{\tau_{n-1} \leq t, K_i(\tau_{n-1}) \leq y, J_n = k \mid J_{n-1} = i\} = \\ &= \begin{cases} Q_{ik}(K_i^{-1}(y)) & : y \leq K_i(t) \\ Q_{ik}(t) & : y \geq K_i(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (109)$$

Die Masseverteilung $\Delta_{ik}(t,y)$ ist also auf $y=K_i(t)$ konzentriert und deshalb gilt fuer die zweidimensionale Laplace-Stieltjes-Transformation einer solchen Masseverteilung

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-(ut+vy)) \Delta_{ik}(dt,dy) = \int_0^{\infty} \exp(-(ut+K_i(t)v)dQ_{ik}(t)) = \tilde{\Delta}_{ik}(u,v) \quad (110)$$

Dies ist also die Rechenvorschrift, um aus dem Element $Q_{ik}(t)$ des Markov-Erneuerungskernes und der Kostenfunktion $K_i(t)$ die gemeinsame Verteilung Δ_{ik} und vor allem mit Hilfe der eindimensionalen Laplace-Stieltjes-Transformation die zweidimensionale Laplace-Stieltjes-Transformierte $\tilde{\Delta}_{ik}(u,v)$ zu erhalten.

Dabei ist fuer die praktische Arbeit festzustellen:

ad1) Eindimensionale Laplace-Stieltjes-Transformationen lassen sich stets auf eindimensionale Laplace-Transformationen zurueckfuehren (siehe Doetsch [15] p 67 ff).

Der Beweis beruht im wesentlichen auf partieller Integration des eindimensionalen Laplace-Stieltjes-Integrales und soll hier nicht wiederholt werden, da er leicht zugaenglich ist. Zum besseren Verstaendnis des Prinzipes machen wir jedoch die Rechnung fuer den fuer PASSAT wichtigen exemplarischen Fall einer exponentiellen Lebensdauerverteilung und linearer Kosten:

Sei $Q(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ die Lebensdauerverteilung eines Zustandes und sei $y = K \cdot t$ die Kostenfunktion. Dann ist

$Q(t)$ absolut stetig mit der Dichte $q(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$.

Es ist dann offensichtlich nach elementarer Rechnung

$$\tilde{\Delta}(u,v) = \int_0^{\infty} \exp(-(u \cdot t + K \cdot t \cdot v)) dQ(t) = \int_0^{\infty} \exp(-(u + K \cdot v)t) \lambda \exp(-\lambda t) dt = \lambda / (\lambda + u + K \cdot v) \quad (111)$$

Diese Rechnung beruht auf der gewöhnlichen eindimensionalen Laplace-Transformation. Wir führen nun die Rechnung ein zweites Mal durch, um die Rückführung der Laplace-Stieltjes-Transformation auf eine Laplace-Transformation praktisch zu demonstrieren:

Sei wieder $Q(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $K(t) = K \cdot t$. Es ist

$Q(0) = 0$. Dann gilt mit partieller Stieltjes-Integration:

$$\int_0^{\infty} \exp(-(u+Kv)t) dQ(t) = \exp(-(u+Kv)t) Q(t) \Big|_0^{\infty} -$$

$$- \int_0^{\infty} Q(t) d(\exp(-(u+Kv)t)) = Q(0) + (u+Kv) \int_0^{\infty} Q(t) \exp(-(u+Kv)t) dt =$$

$$= (u+Kv) \int_0^{\infty} (1 - \exp(-\lambda t)) \exp(-(u+Kv)t) dt = \tag{112}$$

$$= (u+Kv) [1/(u+Kv) - 1/(\lambda+u+Kv)] = \lambda/(\lambda+u+Kv)$$

Damit ist diese Technik der Rückführung auf ein gewöhnliches Laplace-Integral erläutert. Diese Technik ist ersichtlich vor allem dann sehr wertvoll, wenn $Q(t)$ Atome hat!

Da dieses Beispiel fuer PASSAT besondere Bedeutung hat, seien noch zwei Tatsachen festgehalten: Die Methode laesst sich unmittelbar auf die bei PASSAT auftretenden stueckweise linearen Kostenfunktionen anwenden. Zweitens treten in der Praxis und auch bei PASSAT (Exponential-)Verteilungen mit einer Zeitverschiebung im Ausmass a auf. Hier muss dann der Verschiebungssatz (Doetsch "Anleitung" [11], p 35) angewendet werden und es folgt unmittelbar

$$\tilde{\Delta}(u,v) = \exp(-a(u+K \cdot v)) \cdot \lambda/(\lambda+u+K \cdot v) \tag{113}$$

Dieser Algorithmus gilt natuerlich auch fuer stueckweise lineare Kostenfunktionen und auch fuer beliebige monotone Kostenfunktionen.

Fuer die praktische Arbeit mit Laplace- und Laplace-Stieltjes-Transformationen sei ausdruuecklich auf die Werke von Doetsch und Oberhettinger-Badii (siehe Literaturverzeichnis) hingewiesen, wo die noetigen Dinge lehrbuchartig dargestellt sind und sich auch umfangreiche Tabellen finden. Damit sind die massgeblichen Rechenvorschriften beschrieben und zitiert, um 1) besonders fuer PASSAT zu bewaeltigen.

ad2) Die Rechenvorschriften zur Summation der Neumann'schen Reihe im Laplace-Bereich werden beschrieben wie folgt: Es liege der gemaess 1) erhaltene zweidimensionale Kern

$$\Delta(t,y) = (\Delta_{ik}(t,y))_{m \times m} \quad (114)$$

und auch der Laplace-Stieltjes-transformierte Kern

$$\tilde{\Delta}(u,v) = (\tilde{\Delta}_{ik}(u,v))_{m \times m} \quad (115)$$

vor. Zur Bestimmung der Verteilung der kumulativen Kosten bis zum Zeitpunkt t , $P\{C(t) \leq y\}$, ist die Reihe von zweidimensionalen Faltungspotenzen

$$\Delta + \Delta^{(**)2} + \dots + \Delta^{(**)n} + \dots \quad (116)$$

zu summieren (siehe Zinterhof [76]). Dies fuehrt im Laplace-Bereich auf die Summation der Reihe

$$\tilde{\chi}(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}^n(u,v) \quad (117)$$

Konvergenzbereich und Analytizitätsbereich ist mindestens der Bereich $\text{Re}(u) > 0, \text{Re}(v) > 0$. Die Funktionentheorie der Laplace-Transformierten ist ausführlich bei Doetsch ("Handbuch" [13]) und Voelker-Doetsch [65] dargestellt. Für die weiteren Berechnungen muss $\tilde{\chi}(u,v)$ an einer beliebigen Stelle (u,v) des Bereiches $\text{Re}(u) > 0, \text{Re}(v) > 0$ zur Verfügung stehen. Die Rechenvorschrift dafür ist die folgende: Sei E die Einheitsmatrix. Dann ist:

$$\tilde{\chi}(u,v) = \tilde{\Delta}(u,v) \cdot (E - \tilde{\Delta}(u,v))^{-1} \quad (118)$$

Der Beweis für die Invertierbarkeit von $E - \tilde{\Delta}(u,v)$ in $\text{Re}(u) > 0, \text{Re}(v) > 0$ ist einfach:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}^{(**)n} = \chi \quad (119)$$

konvergiert als Neumann'sche des Zufallsprozesses und genügt dem System von Integralgleichungen

$$\chi ** \tilde{\Delta} + \tilde{\Delta} = \chi \quad (120)$$

und die Lösung ist eindeutig. Also ist im Laplace-Bereich

$$\tilde{\chi} \cdot \tilde{\Delta} + \tilde{\Delta} = \tilde{\chi} \quad (121)$$

eindeutig als lineares Gleichungssystem lösbar für $\text{Re}(u) > 0, \text{Re}(v) > 0$. Was zu zeigen war. Auf das numerische Invertieren von Matrizen braucht nicht eingegangen zu werden, da es für die hier

benoetigten Dimensionen (=Zustandszahlen) von etwa $m=5$ softwaremaessig unproblematisch ist. Da das Invertieren von Matrizen in den ueblichen Paketen fuer Technik und Naturwissenschaften als Routine und sogar in vielen Sprachen bereits als Befehl vorhanden ist, ist die angegebene Rechenvorschrift im Sinne der Informatik als Algorithmus wohl definiert.

ad 3) Wir geben nun die Rechenvorschriften fuer die numerische Inversion der Laplace-Transformierten. in 2) wurde die Rechenvorschrift zur Bestimmung von $\tilde{X}(u,v)$, $\text{Re}(u) > 0$, $\text{Re}(v) > 0$ festgelegt. Zur Bestimmung von $X(t,y)$ verwenden wir die folgende zweidimensionale Version der Umkehrformel:

$$X(t,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{z_1=x_1-i\infty}^{z_1=x_1+i\infty} \int_{z_2=x_2-i\infty}^{z_2=x_2+i\infty} \exp(tz_1+yz_2) \frac{\tilde{X}(z_1,z_2)}{z_1 z_2} dz_1 dz_2 \quad (122)$$

Klassischer Bestand dazu findet sich bei Doetsch, was die Laplace-Transformation betrifft und in sehr schoener Darstellung bei Renyi ([55]), dort allerdings fuer die ueberaus nahe verwandte Fourier-Transformation im Kapitel ueber charakteristische Funktionen. Die Terme $1/Z_1$ und $1/Z_2$ ruehren daher, dass grob gesprochen, die Laplace-Stieltjes-Transformierte die gewoehnliche Laplace-Transformierte der "formalen Ableitung" ist und das Original der Funktion und nicht das der Ableitung dieser Funktion zu berechnen ist. Es ist wichtig darauf hinzuweisen, dass $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ beliebig ist. Fuer eine gute Konvergenz der numerischen Prozesse wird ueber x_1, x_2 noch zu verfuegen sein. Wie schon in § 5 dargestellt, wird die Transformation

$$z_1 = x_1 - i (1+x_1) \text{ctg } \varphi_1/2 \quad (123)$$

$$z_2 = x_2 - i (1+x_2) \text{ctg } \varphi_2/2 \quad (124)$$

$$dz_1 = i \frac{(1+x_1)}{2 \sin^2 \varphi_1/2} d\varphi_1 \quad (125)$$

$$dz_2 = i \frac{(1+x_2)}{2 \sin^2 \varphi_2/2} d\varphi_2 \quad (126)$$

ausgefuehrt und $\varphi_1 \rightarrow 2\pi \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 2\pi \varphi_2$ durchgefuehrt.

Diese Variablentransformationen fuehren unmittelbar zur Formel

$$\chi(t,y) = \int_0^1 \int_0^1 \exp(tz_1(\varphi_1) + yz_2(\varphi_2)) \frac{\tilde{\chi}(z_1(\varphi_1), z_2(\varphi_2))(1+x_1)(1+x_2) d\varphi_1 d\varphi_2}{z_1(\varphi_1) \cdot z_2(\varphi_2) \cdot 4(\sin\pi\varphi_1 \cdot \sin\pi\varphi_2)^2} \quad (127)$$

Der Integrand ist in den beiden Variablen φ_1 und φ_2 periodisch mit der Periode 1, aber bei 0 und 1 im Allgemeinen nicht definiert. Wir bezeichnen nun der Kuerze halber den Integranden in (127) mit $G(\varphi_1, \varphi_2)$. Es gilt offenbar

$$\chi(t,y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} G(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (128)$$

Es wird ausdruecklich festgehalten, dass $G(\varphi_1, \varphi_2)$ im Inneren des Einheitsquadrates analytisch, also beliebig oft differenzierbar, also stetig, also in jedem kompakten Teilrechteck des Inneren des Einheitsquadrates eigentlich Riemann-integrierbar ist. Wir schraenken nun die Funktion $G(\varphi_1, \varphi_2)$ auf $[\epsilon, 1-\epsilon] \times [\epsilon, 1-\epsilon]$ ein und fuehren nach Korobow [30] p. 60 ff. die Periodisierung der Ordnung $\alpha \gg 1$ durch:

Rechenvorschrift: Sei

$$\psi_{\alpha}(x) = (2\alpha - 1) C^{\alpha-1} \int_0^x [t(1-t)]^{\alpha-1} dt \quad (129)$$

$$\psi'_{\alpha}(x) = (2\alpha - 1) C^{\alpha-1} [x(1-x)]^{\alpha-1} \quad (130)$$

Bemerkung: In der Praxis ist meist $\alpha \leq 4$ ausreichend.

Rechenvorschrift: Setze

$$\varphi_1 = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha(\tau_1) \quad (131)$$

$$\varphi_2 = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha(\tau_2) \quad (132)$$

$$d\varphi_1 = (1-2\varepsilon)\phi'_\alpha(\tau_1)d\tau_1 \quad (133)$$

$$d\varphi_2 = (1-2\varepsilon)\phi'_\alpha(\tau_2)d\tau_2 \quad (134)$$

Diese Transformation liefert eine volle Periodisierung des Integrationsproblems im Sinne von Korobow [30] p. 52 ff, wobei im gegenstaendlichen Fall wegen der Analytizitaet des Integranden α beliebig sein kann. Durch die Variablentransformation der vollen Periodisierung (bei Korobow werden weitere Methoden diskutiert) transformiert sich das Problem wie folgt:

Rechenvorschrift:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} G(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 &= \chi_\varepsilon(t, y) = \\ &= (1-2\varepsilon)^2 \int_0^1 \int_0^1 G(\varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha(\tau_1), \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha(\tau_2)) \phi'_\alpha(\tau_1) \phi'_\alpha(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (135)$$

Bemerkung: Der Integrand auf der rechten Seite von (135) ist aus der Klasse E_2^α im Sinne von Korobow [30] p. 29 ff und Hua-Wang [25] p. 113 ff.

Rechenvorschrift: Sei $f_0 = 0, f_1 = 1, \dots, f_k = f_{k-1} + f_{k-2}, \dots, k \geq 2, N = f_k, a = f_{k-1}$

Sei $\{x\}$ Bruchteil von x .

Dann gilt der Satz (Bahvalov [3]): Ist $f(x_1, x_2) \in E_2^\alpha(C)$

so ist

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}\right) + O\left(\frac{k^\alpha}{N^{\alpha-1}}\right) \quad (136)$$

Satz (Korobow [30] p. 49): Ist $f(x_1, x_2) \in E_2^\alpha$ und $n \geq 1$

so gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (137)$$

Bemerkung: Die beiden Prozeduren (136) und (137) sind im Grad ihrer praktischen Eignung z. B. abhaengig davon, ob der Prozessor z. B. array- oder schleifenorientiert ist, wieviel reales oder virtuelles Memory zur Verfuegung ist.

Es resultieren die Rechenvorschriften:

I)

$$X_\varepsilon^{(N)}(\xi, \eta) = \frac{(1+x_1)(1+x_2)(1-2\varepsilon)^2}{N} \sum_{k=1}^N \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(k)}) \cdot \frac{\tilde{X}(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})}{z_1^{(k)} z_2^{(k)}} \cdot \frac{\delta^{(k)}(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)})}{4(\sin \pi \varphi_1^{(k)} \sin \pi \varphi_2^{(k)})^2} \quad (138)$$

mit

$$\varphi_1^{(k)} = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha\left(\frac{k}{N}\right) \quad (139)$$

$$\varphi_2^{(k)} = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha\left(\frac{a \cdot k}{N}\right) \quad (140)$$

$$z_1^{(k)} = x_1 - i(1+x_1)\operatorname{ctg} \pi\varphi_1^{(k)} \quad (141)$$

$$z_2^{(k)} = x_2 - i(1+x_2)\operatorname{ctg} \pi\varphi_2^{(k)} \quad (142)$$

II)

$$\chi_\varepsilon^{(N)}(\xi, \eta) = \frac{(1+x_1)(1+x_2)(1-2\varepsilon)^2}{n^2} \sum_{k,l=1}^n \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_1^{(l)}),$$

$$\cdot \frac{\tilde{\chi}\left(\frac{z_1^{(k)}}{z_1^{(l)}}, \frac{z_2^{(1)}}{z_2^{(1)}}\right)}{z_1^{(k)} \cdot z_2^{(1)}} \cdot \frac{\delta(k,l)\left(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(1)}\right)}{4 (\sin \pi\varphi_1^{(k)} \cdot \sin \pi\varphi_2^{(1)})^2} \quad (143)$$

mit

$$\varphi_1^{(k)} = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha\left(\frac{k}{N}\right) \quad (144)$$

$$\varphi_2^{(1)} = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\phi_\alpha\left(\frac{1}{N}\right) \quad (145)$$

$$z_1^{(k)} = x_1 - i(1+x_1)\operatorname{ctg} \pi\varphi_1^{(k)} \quad (146)$$

$$z_2^{(1)} = x_2 - i(1+x_2)\operatorname{ctg} \pi\varphi_2^{(1)} \quad (147)$$

$$\delta(k,l) = \phi_\alpha'\left(\frac{k}{N}\right) \cdot \phi_\alpha'\left(\frac{1}{N}\right) \quad (148)$$

1) Bemerkung:

Die Methode I liefert einen Quadraturfehler $O(\ln^\alpha N/N^\alpha)$,

Die Methode II liefert einen solchen der Ordnung $O(1/n^\alpha)$.

2) Bemerkung:

$x_1 > 0, x_2 > 0$ sind so zu wählen, dass die Variation im Sinne von Hardy und Krause (Hua-Wang [25], p. 99 ff) des Integranden

klein bleibt. Die Wahl $x_1 = 1/\xi$, $x_2 = 1/\eta$ hat sich praktisch meist als nuetzlich erwiesen. Diese Wahl ist durch das Verhalten der partiellen Ableitungen von $\exp(\xi z_1 + \eta z_2)$ motiviert.

3) Bemerkung:

Methode I stellt $\chi_e'(\xi, \eta)$ dar als

$$\chi_e^{(N)}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(k)}) \rho_k \quad (149)$$

wo die ρ_k von ξ und η unabhaengig sind. Methode II liefert analog

$$\chi_e^{(N)}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(l)}) \rho_{k,l} \quad (150)$$

mit von ξ und η unabhaengigen Gewichten $\rho_{k,l}$.

4) Bemerkung:

Wegen der Analytizitaet des Integranden sind alle seine Ableitungen jeweils auf kompakten Teilen der (ξ, η) -Ebene beschaenkt. Also konvergieren die $\chi_e^{(N)}(\xi, \eta)$ und $\chi_e^{(n)}(\xi, \eta)$ gleichmaessig auf kompakten Teilen der (ξ, η) -Ebene.

5) Bemerkung:

Die Umkehrformel und die verwendeten numerischen Quadraturmethoden sind lineare Operatoren auf den entsprechenden Funktionenraeumen. Dies bedeutet, dass die Umkehrformel in ihrer exakten Fassung und auch die numerischen Naeherungsprozesse fuer polymorphe Sprachkonzepte (objekt- oder array-orientierte Prozessoren) besonders geeignet sind und den heute interessanten informatischen Konzepten entgegen kommen. Fuer eine Uebersicht dazu sei auf Harland [23] verwiesen. Die praktische Implementierung der Verfahren durch den Autor des Berichtes macht von dieser array-orientierten Struktur des Verfahrens

ausgiebigen Gebrauch.

6) Bemerkung:

Fuer die Anwendung der dargestellten Verfahren ist eine geeignete Wahl der Groesse ϵ wichtig. Diese Frage haengt eng mit dem Verhalten von Laplace-Stieltjes-Transformierten im Unendlichen zusammen. Eng verwandt damit ist der Ideenkreis um das Lemma von Riemann-Lebesgue fuer die Fourier- und Laplace-Transformation. Klassischer Bestand dazu findet sich bei Doetsch bei einigen Gelegenheiten, insbesondere im Doetsch "Handbuch I" ([15], p 162 ff).

Die Fragen sind jedoch keinesfalls abgeschlossen und sind in der modernen harmonischen Analyse von grossem Interesse. Hier sei nur auf die rezente Arbeit von Lyons [33] verwiesen, wo auch die grosse Bedeutung der Gleichverteilung (Weyl-Verteilung) von Folgen, also die zahlentheoretischen Methoden, klar ersichtlich ist. Es ist auch klar, dass "universelle" Aussagen ueber die Wahl von ϵ nicht moeglich sind, und dass auch scharfe Aussagen auf Funktionenklassen technisch aufwendig sind. Fuer die Bedienung von Codes sind solche tiefliegende theoretische Aussagen aber wohl auch nicht noetig, es genuegen viel mehr rasch einsehbare Aussagen ueber den Einfluss der Wahl von ϵ in (128) auf die Genauigkeit des Resultates.

Gemaess (123) haben wir

$$z = x - i(1+x)\text{ctg } x\varphi \quad (151)$$

Die Wahl von ϵ in (128) ist also gleichbedeutend mit der Wahl von

$$T = (1+x) \text{ctg } x\epsilon \quad . \quad \text{Wir betrachten als wichtigsten Fall den}$$

Fall linearer Kosten und exponentiell verteilter Lebensdauern.

Ist K die Kostenrate und λ die entsprechende Ausfallrate, so gilt

(112):

$$\tilde{\Delta}(u,v) = \lambda/(\lambda+u+Kv) \quad (152)$$

Sei $u = x_1 + iy_1, v = x_2 + iy_2$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{x_1 - i\infty}^{x_1 + i\infty} \int_{x_2 - i\infty}^{x_2 + i\infty} \frac{\exp(tu + yv)}{u \cdot v} \tilde{\chi}(u, v) \, du \, dv = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{x_1 - iT}^{x_1 + iT} \int_{x_2 - iT}^{x_2 + iT} \frac{\exp(tu + yv)}{u \cdot v} \tilde{\chi}(u, v) \, du \, dv + R_T \end{aligned} \quad (153)$$

Wir schätzen nun R_T als Funktion von T ab:

Es gilt in $\operatorname{Re}(u) > 0, \operatorname{Re}(v) > 0$

$$\tilde{\chi} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}^n = O((1+y_1+y_2)^{-1}) \quad (154)$$

wobei die O -Konstante von x_1, x_2, K, λ abhaengt.

Also ist

$$R_T = O \left(\int_B \int \frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)(1+y_1+y_2)} \, dy_1 \, dy_2 \right) \quad (155)$$

wobei $B = \{(y_1, y_2), \max(|y_1|, |y_2|) \geq T\}$ ist und

die O -Konstante zusaetzlich noch von t, y abhaengt. Eine

elementare Rechnung zeigt:

$$\int_B \int \frac{dy_1 \, dy_2}{(1+y_1)(1+y_2)(1+y_1+y_2)} = O \left(\frac{\ln(1+T)}{1+T} \right) \quad (156)$$

Also gilt fuer $T \rightarrow \infty$

$$R_T = O \left(\frac{\ln T}{T} \right) \quad (157)$$

Wenn wir den Fehler R_T gemass der Formel (157), $z = x - i(1+x) \operatorname{ctg} \pi \varphi$

(151) auf ε beziehen wollen, erhalten wir wegen $\operatorname{ctg} \varepsilon \sim 1/\varepsilon$

die Abschaetzung

$$R_\epsilon = O(\epsilon | \ln \epsilon |) \quad (158)$$

Es faellt sofort auf, dass die Abschaetzung nicht auf den Fall exponentiell verteilter Zeiten und linearer Kosten beschaenkt ist, sondern, dass die wesentliche Voraussetzung, im asymptotischen Verhalten von χ (siehe (154)) steckt. Bei der praktischen Verwendung der Algorithmen war $\epsilon \sim 10^{-2}$ guenstig.

Wir schreiten nun fort in der Beschreibung der Algorithmen:

Gemaess Formel (4) ist

$$I = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-k(t-\xi))^+} (1-H(t-\xi)) \chi(d\xi, d\eta) \quad (159)$$

auszuwerten. Zur Verfuegung steht $H(\xi)$ nach (5). Der Kern Q von PASSAT besteht aus Exponentialverteilungen mit oder ohne Time-Lag und linearen Kombinationen davon. $\chi(d\xi, d\eta)$ steht exakt nicht zur Verfuegung, jedoch stehen Naeherungen $\chi_\epsilon(d\xi, d\eta)$ zur Verfuegung gemaess (138) oder (143):

$$\chi_\epsilon(d\xi, d\eta) = \sum_{k=1}^N \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(k)}) z_1^{(k)} z_2^{(k)} p_k d\xi d\eta \quad (160)$$

beziehungsweise alternativ:

$$\chi_\epsilon(d\xi, d\eta) = \sum_{k, l=1}^n \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(l)}) z_1^{(k)} z_2^{(l)} p_{k, l} d\xi d\eta \quad (161)$$

Wir erhalten nun fuer I aus (159) unmittelbar den Naeherungsausdruck

$$I_\epsilon = \sum_{k=1}^N z_1^{(k)} z_2^{(k)} p_k \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{\eta=(y-k(t-\xi))^+} (1-H(t-\xi)) \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(k)}) d\xi d\eta \quad (162)$$

beziehungsweise alternativ:

$$I_e = \sum_{k=1}^n z_1^{(k)} z_2^{(1)} \rho_{k;1} \int_0^t (y-k(t-\xi))^+ \int_0^{\xi} (1-H(t-\xi)) \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(1)}) d\xi d\eta \quad (163)$$

Die beiden Formeln (162) und (163) sind Rechenvorschriften des Verfahrens und Bestandteil des Algorithmus. Die Integrale in (162) und (163) koennen mit Standardverfahren eindimensionaler Art numerisch ausgewertet werden. Diese Reduktion auf eine eindimensionale Integration ist moeglich, da der Integrand nur von der Integrationsvariablen ξ abhaengt. Wegen der oben erwaehten Besonderheit des Kernes Q von PASSAT, die vielen technischen Anlagen zukommt, koennen die Integrale in (162) und (163) elementar und analytisch ausgewertet werden, was eine weitere bedeutende Rechenzeitersparnis bedeutet:

Da der Kern Q aus Exponentialverteilungen mit Zeitverschiebung linear kombiniert ist, genuegt es zur Erleichterung der Erstellung eines Codes, Integrale des Types

$$J = \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-k(t-\xi))^+} \exp(a(t-\xi)) \exp(\xi z_1 + \eta z_2) d\xi d\eta \quad (164)$$

analytisch auszuwerten. I_e ist dann aus Integralen vom Typ J additiv zusammengesetzt. Es gilt nach dem Satz von Fubini, der aus einem beliebigen Lehrbuch der modernen Integralrechnung bezogen werden kann, die Rechenvorschrift:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\xi=0}^t \exp(a(t-\xi)) \exp(\xi z_1) \cdot \int_{\eta=0}^{(y-k(t-\xi))^+} \exp(\eta z_2) d\eta d\xi = \\ &= \int_{\xi=0}^t \exp(a(t-\xi)) \exp(\xi z_1) (\exp((y-k(t-\xi))^+ z_2) - 1) \frac{d\xi}{z_2} \end{aligned} \quad (165)$$

Wir setzen der Kuerze halber $z = \max(0, t-y/K)$ und erhalten sofort:

$$J = \frac{\exp(at)}{z_2} (\exp((y-kt)z_2) \cdot \frac{1}{(-a+Kz_2+z_1)} (\exp((-a+Kz_2+z_1)t) - \exp((-a+Kz_2+z_1)z) - \frac{1}{(-a+z_1)} (\exp((-a+z_1)t) - \exp((-a+z_1)z))) \quad (166)$$

Diese Darstellung von J durch elementare Funktionen hat also zur Folge, dass unter Annahme der oben genannten Modellvorstellungen fuer den Kern Q die in (162) auftretenden Integrale elementar analytisch auswertbar sind, sodass I_e selbst ein analytischer Ausdruck ist. Somit ergibt sich fuer die Naehung $R_e(y:t)$ zu $R(y:t)$ gemuess (1), (2), (3), (4) der Ausdruck

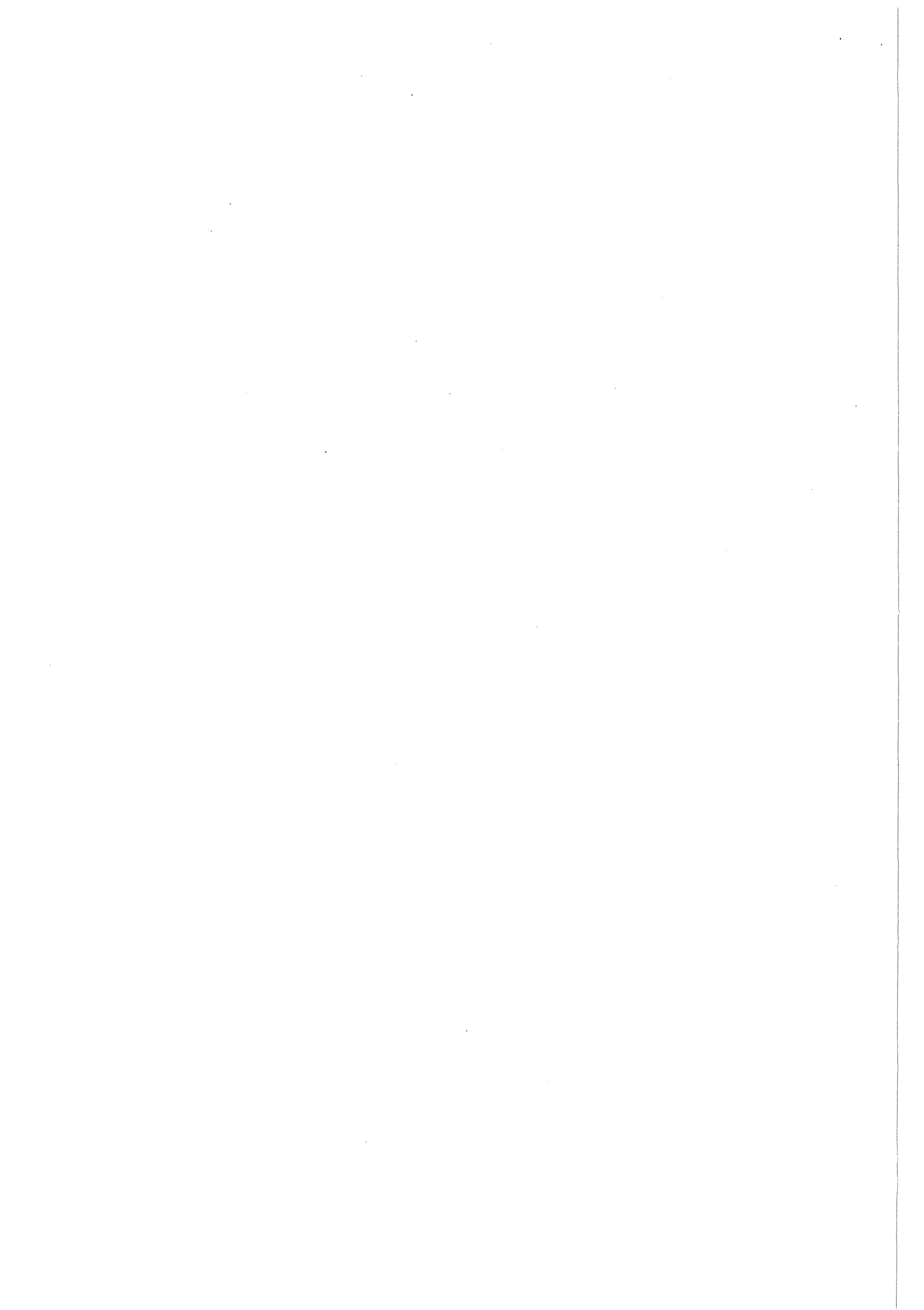
$$R_e(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{k=1}^m (1-H_k(t))(y \cdot GE \cdot K_j t) + \sum_{k=1}^N \rho_{k,1} z_1^{(k)} z_2^{(k)} \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_j(t-\xi))} (1-H_k(t-\xi)) \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_1^{(k)}) d\xi d\eta \quad (167)$$

bzw. fuer das Verfahren (163) alternativ

$$R_e(y:t) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{k=1}^m (1-H_k(t))(y \cdot GE \cdot K_j t) + \sum_{k,1=1}^n \rho_{k,1} z_1^{(k)} z_2^{(1)} \int_{\xi=0}^t \int_{\eta=0}^{(y-K_j(t-\xi))^+} (1-H_k(t-\xi)) \exp(\xi z_1^{(k)} + \eta z_2^{(1)}) d\xi d\eta \quad (168)$$

Dabei ist m die Anzahl der Zustaende und (a_1, \dots, a_m) die

Anfangsverteilung der Zustände. Wenn der Zustand 1 der bestimmungsgemäße Zustand ist, werden die Berechnungen meist für $(a_1, \dots, a_m) = (1, 0, \dots, 0)$ durchgeführt werden. Die in den Formeln (167) bzw. (168) auftretenden Integrale sind nach den oben geeigneten Vorschriften auszuwerten, sodass die Rechenvorschriften vollständig wiedergegeben sind und eine Codierung leicht möglich ist. Also ist der gesamte Rechenablauf in seinen am Beginn dieses § festgelegten Schritten vollständig dargestellt.



§ 8 LITERATURFÜHRER

Die Arbeit berührt im wesentlichen die Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie, stochastische Prozesse, Zahlentheorie (Zahlentheoretische Methoden in der Numerik) und Funktionaltransformationen.

Der kleine Literaturführer gibt einführende Werke in die von der Arbeit berührten Gebiete an:

1. Für die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und weiterführende Fragen sind folgende Bücher empfehlenswert:

- 1) A. Renyi: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mit einem Anhang über Informationstheorie).
- 2) Feller I. und II.: An Introduction to Probability Theory and Its Application.
- 3) Papoulis: Probability, Random Variables and Stochastic Processes.

Für die Stochastischen Prozesse ist die Lektüre von Doob sicher empfehlenswert. Wesentliche und leicht erreichbare Modellvorstellungen sind bei Erhan Cinlar: Introduction to stochastic processes, zu finden. Das Buch ist auch sehr gut zu lesen. Als Einführung in die Zahlentheorie ist nach wie vor das berühmte Werk von Hardy und Wright: An Introduction to the Theory of Numbers sehr zu empfehlen.

Für die zahlentheoretischen Methoden in der numerischen Mathematik ist in erster Linie das Buch von N.M. Korobow: Anwendung zahlentheoretischer Methoden auf Probleme der Numerischen Mathematik, empfehlenswert, welches allerdings leider nur auf russisch vorhanden ist.

Weiters zu empfehlen sind die Bücher von Hua Loo Keng und Wang Yuan: Applications of Number Theory to Numerical Analysis, und Kuipers - Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences.

Interesse verdient auch der Ergebnisband von S.K. Zaremba: Application of Number Theory to Numerical Analysis.

Für Funktionaltransformation sind die berühmten Standardwerke von Doetsch und Co-Autoren maßgeblich: Die Zweidimensionale Laplace-Transformation, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation, Handbuch der Laplace-Transformation I, Handbuch der Laplace-Transformation II, Handbuch der Laplace-Transformation III, wo auch ausführliche Verfahrensvorschriften und Tabellen vorhanden sind.

Wichtig sind auch die Bücher von Widder: The Laplace-Transform und An Introduction to Transform Theory, F. Oberhettinger und R.P. Soni: Tables of Laplace-Transforms und Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.

Die gesamten Werke sind eine sehr gute Basis für das Verständnis der Methoden, es ist aber sicherlich nicht nötig, die genannten Standardwerke aus selbständigen Fachgebieten in Vollständigkeit heranzuziehen. Die genannte Literatur wurde vor allem im Hinblick auf ihre Lesbarkeit (auch auszugsweise Lesbarkeit) ausgewählt und die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

§ 9 LITERATURVERZEICHNIS

1. ALBERT Arthur: Infinitesimal Generator of Markov Processes.
The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 63,
p. 727 - 753, (1962)

2. ANISIMOV V.V.: Limit Theorems for Semi-Markov Processes with a
Countable Set of States. Soviet Mathematics Vol. 11,
No. 4, Russian Original TOM 196, (Juli, August 1970)

3. BAHVALOV N.S.: Approximate computation of multiple integrals.
Vestnik Moskow Univ., Ser.Mat.Meh.Astr.Fiz.Him., 4,
3 - 18, (1959)

4. BARLOW Richard E., PROSCHAN Frank, HUNTER Larry C.:
 Mathematical Theory of Reliability. The SIAM Series
in Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc.,
New York - London - Sydney, Third Printing, (1967)

5. BELLMAN Richard, KALABA Robert, SHIFFMAN Bernard:
 A Numerical Inversion of the Laplace Transform.
The RAND Corporation, RM-3513-ARPA, No. 189 - 61
April, (1963)

6. BELLMAN R.E., KAGIWADA H.H., KALABA R.E., PRESTRUD M.C.:
 Invariant Imbedding and Time-Dependent Transport
Processes. Modern Analytic and Computational Methods
in Science and Mathematics. American Elsevier
Publishing Company, Inc., New York, (1964)

7. ÇINLAR Erhan: Decomposition of a Semi-Markov Process under a State
Dependent. Rule Vol. 15, No. 2. in: SIAM J. Appl.
Math., p. 252 - 263, March (1967)

8. CINLAR Erhan: Introduction to Stochastic Processes.
Prentice-Hall, In., Englewood Cliffs, New Jersey,
(1975)
9. CINLAR Erhan: Markov Renewal Theory. Advances in Appl.
Probability, Vol. 1, p. 123 - 187, (1969)
10. COX D.R.: Renewal Theory. John Wiley & Sons, New York,
(1962)
11. DOETSCH Gustav: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-
Transformation und der Z-Transformation.
R. Oldenbourg Verlag, München - Wien, (1967)
12. DOETSCH Gustav: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-
Transformation. Dritte Auflage. Birkhäuser Verlag,
Basel - Stuttgart, (1976)
13. DOETSCH Gustav: Handbuch der Laplace-Transformation, III.
Mathematische Reihe, Bd. 19. Birkhäuser Verlag,
Basel u. Stuttgart, (1956)
14. DOETSCH Gustav: Handbuch der Laplace-Transformation, II.
Mathematische Reihe, Bd. 15. Birkhäuser Verlag,
Basel u. Stuttgart, (1955)
15. DOETSCH Gustav: Handbuch der Laplace-Transformation, I.
Mathematische Reihe, Bd. 14. Birkhäuser Verlag,
Basel, (1950)
16. DOOB J.L.: Stochastic Processes. John Wiley & Sons, Inc.,
Canada, (1953)

17. DYNKIN E.B., YUSHKEVICH A.A.:
Controlled Markov Processes. Springer Verlag,
(1979)

18. ESARY J.D., MARSHALL A.W., PROSCHAN F.:
Determining an Approximate Constant Failure Rate
for a System Whose Components Have Constant
Failure Rates. Document DI-82-0899, Boeing
Scientific Research Labs., Seattle, Washington,
(1969)

19. ESARY J.D., MARSHALL A.W., PROSCHAN F.:
Some Reliability Applications of the Hazard
Transform. Document DI-82-0805, Boeing Scientific
Research Labs., Seattle, Washington, (1968)

20. FELLER William:
An Introduction to Probability Theory and Its
Applications. Vol. 2, Second Edition. John Wiley
& Sons, Inc., (1971)

21. FERGUSON Thomas S.:
A Characterization of the Exponential Distribution.
Annals of Mathematical Statistics 35, University
of California, Los Angeles, (1964)

22. GNEDENKO B.W.:
Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie.
I., Akademie Verlag, Berlin, (1968)

23. HARLAND David M.:
Polymorphic programming languages. John Wiley
& Sons, Toronto, (1984)

24. HONIG G., HIRDES U.: A method for the numerical inversion of Laplace transforms. Algorithm 27, Journal of computational and applied mathematics, (1983)
25. HUA LOO Keng, WANG Yuan: Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer Verlag, (1981)
26. JEWELL William: Markov-Renewal Programming. I: Formulation, Finite Return Models; II: Infinite Return Models, Example. Operations Research, The Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 10, No. 6, p. 938 - 971, November, (1963)
27. KESTEN Harry: Occupation Times for Markov and Semi-Markov Chains. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 103, p. 82 - 112, April-June, (1962)
28. KNOPP Konrad: Funktionentheorie. Sammlung Goeschel Band, 668, Berlin, (1962)
29. KOENNE W., ZINTERHOF P.: Zuverlässigkeitstheoretische Analyse von Elektrizitätsversorgungssystemen. Schriftenreihe der TU Wien, Seite 1 - 120, Bd. 6, (1978)
30. KOROBOW N.M.: Anwendung zahlentheoretischer Methoden auf Probleme der Numerischen Mathematik. Fismatgis Verlag Moskau, (1963)
31. KOSLOW B.A., USCHAKOW I.A.: Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit für Ingenieure. Carl Hanser Verlag, München-Wien, (1979)

32. KUIPERS L., NIEDERREITER H.:
Uniform Distribution of Sequences. John Wiley & Sons,
U.S.A., (1974)
33. LYONS Russell:
Characterization of measures whose Fourier-Stieltjes
transforms vanish at infinity. Bulletin (New Series)
of the American Mathematical Society, Vol. 10, No. 1,
January, (1984)
34. McLEAN R.A., NEUTS M.F.: The Integral of a Step Function Defined on a Semi-
Markov-Process. SIAM J. Appl. Math., Vol. 15,
p. 726 - 737, (1967)
35. MESCHKOWSKI Herbert:
Mathematisches Begriffswörterbuch. Dritte erweiterte
Auflage. Bibliographisches Institut AG, Mannheim,
(1971)
36. NAAS Josef, SCHMID Hermann L.:
Mathematisches Wörterbuch. Akademie Verlag, Berlin,
(1967)
37. NAGEL K. et.al.:
Time-dependent analysis of dissolver off-gas
cleaning installations in a reprocessing plant.
17th DOE Nuclear Air Cleaning Conference,
Los Angeles, (1982)
38. NAGEL K., FURRER J.:
Zeitabhängige Modellierung einer Jodsorptions-
filterstrecke. KfK 3544, pp 1-23, Karlsruhe (1983)
39. NAGEL K., WENZELBURGER H., WEBER G., FENYI S.;
Anwendung eines Barrieremodells auf die Anlage
PASSAT. KfK 3250, Karlsruhe (1982)

40. NAKASHIMA Kyoichi: Methods for Determining Failure-Data Collection Scheme of System Components by Bayesian Technique. The Transactions of the IECE of Japan, Vol. E 65, No. 4, (1982)
41. NATANSON I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Akademie Verlag, Bd. 6, Berlin, (1961)
42. OBERHETTINGER Fritz, BADI Larry: Tables of Laplace Transforms. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg, (1973)
43. OBERHETTINGER F., MAGNUS W., SONI R.P.: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Bd. 52, Springer Verlag, (1966)
44. PAPOULIS Athanasios: Probability, Random Variables and Stochastic Processes McGraw Hill International Book Company, Tokio (1965)
45. PARRY G.W., WORLEDGE D.H.: The Downtime Distribution in Reliability Theory. Nuclear Engineering and Design 49, p. 295 - 302, (1978)
46. PARRY G.W., WORLEDGE D.H.: The Downtime Distribution in Reliability Theory. United Kingdom Atomic Energy Authority, Safety and Reliability Directorate, SRD R113, (1978)

47. PARRY G.W., WORLEDGE D.H.:
The Use of Regeneration Diagrams to Solve Component Reliability Problems. United Kingdom Atomic Energy Authority, Safety and Reliability Directorate, SRD R95, (August 1977)
48. PARRY G.W.:
Regeneration Diagrams. Synthesis and Analysis Methods for Safety and Reliability Studies, G. Apostolakis (editor), Plenum Press, New York (1980)
49. PETROV V.V.:
Sums of Independent Random Variables. Springer Verlag, (1975)
50. PYKE Ronald, SCHAUFLE Ronald:
Limit theorems for Markov Renewal Processes. The Annals of Mathematical Statistics, p. 1746 - 1764, Vol.35 (1964)
51. PYKE Ronald:
Markov Renewal Processes: Definition and Preliminary Properties, Ann. Math. Statist., Vol 32, p. 1232 - 1242, (1961)
52. PYKE Ronald:
Markov Renewal Processes with Finitely Many States. Ann. Math. Statist., Vol. 32, p. 1243 - 1259, (1961)
53. REINHARDT Fritz, SOEDER Heinrich:
Dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, Deutscher Taschenbuchverlag & Co, KG, München, (1974)
54. REINSCHKE K.:
Zuverlässigkeit von Systemen. Bd. 1, Systeme mit endlich vielen Zuständen, Theoretische Grundlagen der Technischen Kybernetik, VEB Verlag Technik, Berlin, (1973)

55. RENYI A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung: Mit einem Anhang über Informationstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1973)
56. SMITH T.H. et.al.: A risk-based fault tree analysis method for identification preliminary evaluation and screening of potential accidental release sequences in nuclear fuel cycle operation. Battelle Report, BNWL-1959, UC 70, (1976)
57. SMITH W.L.: On some General Renewal Theorems for Nonidentically Distributed Variables, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II, p. 467 - 514, (1961)
58. SMITH W.L.: Regenerative stochastic processes. Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 232, p. 6 - 31, (1955)
59. SMITH W.L.: Remarks on the paper "Regenerative stochastic processes". Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 256, p. 496 - 501, (1960)
60. SPRINGER M.D.: The Algebra of Random Variables. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, (1979)
61. STEGBUCHNER Hans: Zur numerischen Inversion von Laplace-Transformierten. Aplikace Matematiky, Vol. 26, pp. 1-12, Prag (1981)
62. STORCK H.: Eine Methode zur Probabilistischen Risikoanalyse unter Verwendung dynamischer Freisetzungsmodelle. Dissertation an der TU Berlin, (1980)

63. TAKACS L.: On a Sojourn Time Problem in the Theory of Stochasting Processes. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 93, p. 531 - 540, (1959)
64. TAKACS L.: On Certain Sojourn Time problems in the Theory of Stochastic Processes. Acta Math. Acad. Sci. Hung., Vol. 8, p. 161 - 191, (1957)
65. VOELKER D., DOETSCH G.: Die Zweidimensionale Laplace-Transformation, Mathematische Reihe, Bd. 12, Birkhäuser Verlag, (1950)
66. WENZELBURGER H., NAGEL K.: Eine neues zeitabhängiges stochastisches Modell zur Risikoanalyse der Abgasstrecke PASSAT. PNS Jahresbericht, KfK 3350, p 4500/1, Karlsruhe (1982)
67. WENZELBURGER H., ZINTERHOF P.: Über die Arbeitszeit und Ausfallszeit bei alternierenden Erneuerungsprozessen. Arbeitsbericht des Mathem. Instituts der Universität Salzburg, 4/1981, p. 87 - 92, (April 1981)
68. WENZELBURGER H.: Unveröffentlicher Bericht, Karlsruhe (1983)
69. ZAREMBA S.K.: Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Academic Press New York and London, (1972)

70. ZINTERHOF P.: Einige zahlentheoretische Methoden zur numerischen Quadratur und Interpolation. Aus den Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse, Abt. II, Bd. 177, Heft 1 - 3, (1968)
71. ZINTERHOF P., STEGBUCHNER H.: Trigonometrische Approximation mit Gleichverteilungsmethoden. Seite 273 - 289, Math. Hungarica, (1978)
72. ZINTERHOF P.:
73. ZINTERHOF P.:
74. ZINTERHOF P.:
- } Unveröffentlichte Arbeitsberichte, Karlsruhe (1982)
75. ZINTERHOF P.: Über einige Abschätzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungsmethoden. Sitzungsberichte der österr. Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Kl. Abt. II, 185, Seite 121 - 132, (1967)
76. ZINTERHOF P.: Unveröffentlichter Arbeitsbericht, Karlsruhe (1982)

Nachtrag :

77. TEUGELS J. L.: A Bibliography on Semi-Markov Processes. J. of Comp. and Appl. Math., Vol. 2, pp. 125-144, (1976)

EINIGE KONKRETE ANALYTISCHE MARKOFF-ERNEUERUNGSMODELLE FÜR DIE LANGFRISTIGE FREISETZUNG VON RADIOAKTIVEM JOD IN DER ABGASREINIGUNGSSTRECKE EINER WIEDERAUFARBEITUNGSANLAGE (WAA)

Heinz Wenzelburger, Karlsruhe

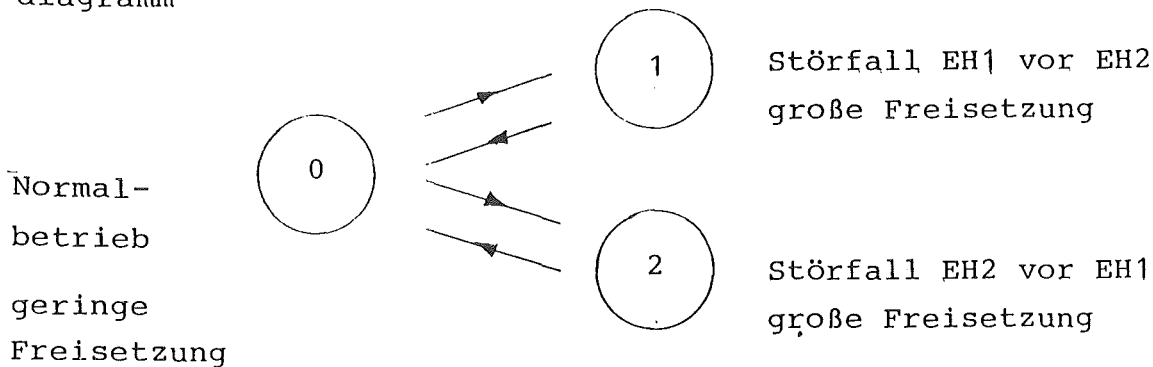
1. Einführung

In dem hier behandelten stochastischen Modell für die Abgasreinigungsstrecke PASSAT /1/ besteht ein Arbeitszyklus der Wiederaufarbeitungsanlage aus einer Auflöserperiode von 8 Stunden und einer Verarbeitungsperiode von 16 Stunden. In der Auflöserperiode wird eine Charge von Brennstäben in Salpetersäure aufgelöst und daraus in der Verarbeitungsperiode Uran und Plutonium extrahiert.

Nur wenn in der Auflöseperiode ein Störfall eintritt, in der beide Erhitzer von PASSAT ausfallen, kann mehr radioaktives Jod als im Normalbetrieb freigesetzt werden. Ein derartiger Störfall kann folgende Ursachen haben:

- (1) Erhitzer EH1 fällt vor EH2 aus (Defekt in den Erhitzersystemen),
- (2) Erhitzer EH2 fällt vor EH1 aus (Defekt in den Erhitzersystemen),
- (3) beide Erhitzer fallen gleichzeitig aus (Defekt im Netz).

Wir beschränken uns hier auf Modelle mit $m=3$ Zuständen und dem Zustandsdiagramm



Dabei interessieren wir uns weniger dafür, wie und wieviel radioaktives Jod in einem einzelnen Störfall ("Kurzzeit"-Modell) freigesetzt wird, als was diesbezüglich in mehr als einem Störfall geschieht ("Langzeit"-Modell).

Formal haben wir hierzu die Familie der Verteilungsfunktionen $\{P\{C(t) \leq z\}, t \in \mathbb{R}\}$ zu ermitteln, wobei $C(t)$ die im Zeitintervall $(0, t)$ kumulativ freigesetzte Menge an radioaktivem Jod bezeichnet.

Folgende Schritte sind notwendig, wenn wir solche Verteilungen unter der Annahme eines Markoff-Erneuerungsprozesses (=MEP) mit monotoner Kostenfunktion (Kosten = Freisetzung) konstruieren wollen:

a) Berechnung des gewöhnlichen (Semi-Markoff-)Kerns mit $m=3$ Zuständen

$$Q_{jk}(x) = P\{T_{n-1} \leq x, J_n = k | J_{n-1} = j\}, \quad 0 \leq j, k \leq m-1. \quad (1)$$

Dabei haben die Zufallsvariablen T_{n-1} (Verweilzeitdauer im Zustand j) und J_{n-1} (Zustand nach dem $(n-1)$ ten Übergang) die übliche Bedeutung.

b) Berechnung des verallgemeinerten Kern nach P. Zinterhof /1/

$$\Delta_{jk}(x, y) = P\{T_{n-1} \leq x, C_j(x) \leq y, J_n = k | J_{n-1} = j\}, \quad 0 \leq j, k \leq m-1. \quad (2)$$

Im Kern (2) wird vorausgesetzt, daß sich der MEP im Zeitintervall $(0, x)$ im Zustand j befindet, und darin die zufällige kumulative Freisetzung $C_j(x)$ beträgt. ($C(t)$ ist für den gesamten Prozess, $C_j(x)$ aber nur für den Zustand j definiert!).

Für $y \rightarrow \infty$ geht der verallgemeinerte (2) in den gewöhnlichen Kern (1) über.

c) Numerische Inversion der verallgemeinerten Erneuerungsfunktion

Startet die Anlage im Normalbetrieb (Zustand $j=0$), lautet die gesuchte Verteilung für die kumulative Freisetzung $C(t)$ zum Zeitpunkt t (siehe /1/)

$$P\{C(t) \leq z\} = \sum_{k=0}^{m-1} R_{0k}(z:t). \quad (3)$$

Hier ist

$$R_{jk}(z:t) = \int_{x=0}^t \int_{y=0}^{z_k} [1 - H_k(t-x)] \cdot \chi_{jk}(dx, dy), \quad (4)$$

wobei $z_k := \text{Max}(0, z - K_k(t-x))$.

Weiter gibt im Ausdruck (4)

$$H_k = \sum_{l=0}^{m-1} Q_{kl}(x) \quad (5)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß im Zeitintervall $(0, x)$ eine Zustandsänderung eintritt und

$$\chi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_{jk}^{(n)})_{m \times m}(x, y) \quad (6)$$

kann als verallgemeinerte Erneuerungsfunktion angesehen werden, in der über die zweidimensionalen Faltungspotenzen

$$\Delta_{jk}^{(n)}(x, y) = \sum_{l=0}^{m-1} \Delta_{jl}^{(n-1)} ** \Delta_{lk}(x, y) \quad (7)$$

summiert wird.

Die in $\chi(x,y)$ auftretende "geometrische Reihe" von Faltungspotenzen kann i.a. nur numerisch ausgewertet werden. Wir verwenden hierzu ein von P. Zinterhof stammendes Verfahren /1/, bei dem mit Hilfe von zahlen theoretischen Methoden die betreffende zweidimensionale Laplace-Stieltjes Transformierte $LS[\chi(x,y)]$ numerisch invertiert wird.

2. Gewöhnlicher Semi-Markoffkern der Modelle

Folgende Voraussetzungen, die sich aus der Systemanalyse für die PASSAT ergeben, vereinfachen unser Modell ganz erheblich:

- (i) Nahezu jedes Ende eines Arbeitszyklus ist für den stochastischen Prozess der Freisetzung ein Regenerationspunkt.
- (ii) Das Verhältnis der maximalen Dauer τ eines Störfalls zu der mittleren Dauer $(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ regulären Betriebs ist von der Größenordnung 1:3000 ($\tau = 24$ [Std] Dauer eines Arbeitszyklus, $\lambda_i \approx 7 \cdot 10^{-6}$ [Std⁻¹] Ausfallraten der Erhitzer).

Annahme (i) rechtfertigt einen MEP mit einem verallgemeinerten Kern (2) und Annahme (ii) erlaubt uns, die Verweilzeit in einem Störfall näherungsweise Null zu setzen.

Der Kern unserer Modelle

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} \cdot F_{01}(x) & p_{02} \cdot F_{02}(x) \\ 1 \cdot F_{10}(x) & 0 & 0 \\ 1 \cdot F_{20}(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

dessen Struktur aus dem Zustandsdiagramm folgt, enthält daher für den Übergang von Normalbetrieb zum Störfall EH1 vor EH2 bzw. EH2 vor EH1 die Verweilzeitverteilungen

$$F_{01}(x) = F_{02}(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda := \lambda_1 + \lambda_2, \quad 0 < x < \infty \quad (9)$$

und für die Rückkehr zum Normalbetrieb die Verweilzeitverteilungen (Stufenfunktion)

$$F_{10}(x) = F_{20}(x) = U_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Die Verweilzeitverteilungen $F_{0i}(y)$ sowie die nichttrivialen Werte $p_{0i} = \lambda_i / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $i=1,2$ der in $Q(x)$ eingebetteten Markoffkette ergeben sich aus der gemeinsamen Lebensdauerverteilung $P\{T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2\} = (1 - \exp(-\lambda_1 t_1)) \cdot (1 - \exp(-\lambda_2 t_2))$ der beiden Erhitzer.

3. Verallgemeinerter Semi-Markoffkern der Modelle

Wir betrachten ein Modell mit einer deterministischen und mit einer stochastischen Kostenfunktion (Kosten = Freisetzung).

3.1 Monotone deterministische Kostenfunktion

Für eine monotone Kostenfunktion $c_j(t)$ im Zustand j , die nur von der zufälligen Verweildauer T_{n-1} abhängt, gilt (Spezialfall von (2), siehe /1/)

$$\begin{aligned} \Delta_{jk}(x, y) &= P\{T_{n-1} \leq x, C_j(T_{n-1}) \leq y, J_n = k | J_{n-1} = j\} \\ &= Q_{jk}(\text{Min}(x, c_j^{-1}(y))) \end{aligned} \quad (11)$$

bzw. für deren Laplace-Stieltjes Transformation

$$\tilde{\Delta}_{jk}(u, v) := \text{LS} \left[\Delta_{jk}(x, y) \right] = \int_0^{\infty} e^{-(ux+vc_j(x))} dQ_{jk}(x) \quad (12)$$

Daher erhalten wir mit der linearen Kostenfunktion $c_0(x) = \xi \cdot x$ für den Normalbetrieb ($\xi = \bar{d} \cdot j_0$ Freisetzungsrates, \bar{d} mittlere Durchlässigkeit, j_0 Massenstrom des radioaktiven Jods) die Matrixelemente

$$\tilde{\Delta}_{ok}(u, v) = p_{ok} \int_0^{\infty} e^{-(ux+v\xi x)} dF_{ok}(x) = p_{ok} \frac{\lambda}{u+\xi v+\lambda}, \quad k=1,2 \quad (13)$$

und mit den konstanten Kostenfunktionen $c_j(x) = m_j$, $j=1,2$ für die beiden Störfälle die Matrixelemente

$$\tilde{\Delta}_{jo}(u, v) = \int_0^{\infty} e^{-(ux+vm_j)} dU_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-(ux+vm_j)} \delta(x) dx = e^{-m_j v} \quad (14)$$

Ob in unserer Anlage die Brennstäbe kontinuierlich oder periodisch aufgelöst werden, geht nach den Voraussetzungen in Abschnitt 2. nur in die Freisetzungsrates ξ bei Normalbetrieb ein ($\xi(\text{period.}) = \xi(\text{kontin.})/3$).

3.2 Stochastische Kostenfunktion

Ist die Kostenfunktion C_j im Zustand j stochastisch und statistisch unabhängig von der Verweildauer T_{n-1} , so tritt anstelle von (11) die Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta_{jk}(x, y) &= P\{T_{n-1} \leq x; C_j \leq y, J_n = k | J_{n-1} = j\} \\ &= Q_{jk}(x) \cdot G_j(y), \end{aligned} \quad (15)$$

wobei $G_j(y) := P\{C_j \leq y\}$ die Verteilung der im Zustand j freigesetzten Menge C_j an radioaktivem Jod ist.

Wie eine eingehende Analyse des "ersten" Störfalls ergibt, sind diese Verteilungen nahezu Stufenfunktionen. Dies rührt daher, daß nur sehr selten eine erhöhte Menge an radioaktivem Jod freigesetzt wird und dies nur in einem kleinen Zeitabschnitt $(0, y_m)$ eines Arbeitszyklus $(0, \tau)$. Die Verteilungen $G_j(y)$ bestehen näherungsweise sowohl im Störfall EH1 vor EH2 ($j=1$) als auch im Störfall EH2 vor EH1 ($j=2$) aus einem Atom für $C_j=0$

$$G_j(0) = P\{C_j=0\} = 1-\epsilon_j, \quad \epsilon_j \ll 1 \quad (16)$$

und dem absolut stetigen Teil

$$g_j(y) dy = (\epsilon_j / (j \cdot y_m)) \cdot dy, \quad j=1, 2 \quad (17)$$

Die entsprechenden Elemente des allgemeinen Kerns lauten daher im Laplace-Stieltjes Bereich

$$\Delta_{j0}(u, v) = \int_0^{\infty} e^{-ux} \cdot dU_0(x) \cdot \int_0^{j \cdot y_m} e^{-vy} \cdot dG_j(y) = \frac{\epsilon_j}{j \cdot y_m} \cdot \frac{1}{v} \left[1 - e^{-j \cdot y_m v} \right] \quad (18)$$

$j=1, 2$

$$(y_m = 2,37 \text{ [Std]}; \epsilon_1 = 5,86 \cdot 10^{-7}; \epsilon_2 = 1,70 \cdot 10^{-6}) \quad .$$

4. Erneuerungsfunktion des Prozesses

Nach (8) und (11) hat in unseren Modellen der verallgemeinerte Kern $\tilde{\Delta}$ die Struktur

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Daher lautet die Laplace-Stieltjes Transformierte $\tilde{\chi}(u, v)$ der zugehörigen verallgemeinerten Erneuerungsfunktion

$$\tilde{\chi} = \left[I_{3 \times 3} - (\tilde{\Delta}_{jk})_{3 \times 3} \right]^{-1} = \frac{1}{1-ac-bd} \begin{pmatrix} 1 & ab & b \\ c & 1-bd & bc \\ d & ad & 1-ac \end{pmatrix} \quad (20)$$

5. Einige numerische Ergebnisse

Wir geben drei typische Beispiele mit einer deterministischen Kostenfunktion, für die die Eingangsdaten aus der Systemanalyse von PASSAT entnommen sind. Die Ergebnisse (Diagramme) stammen aus einem Rechenprogramm, das von P. Zinterhof in "SPEAK EASY" geschrieben wurde.

In den Diagrammen aller drei Serien ist der jeweils k-te Sprung dem (k-1)ten Störfall zuzuordnen (k=1,2,...). Der erste Sprung gehört zum Normalbetrieb (=0ter Störfall). Bei diesem werden $\xi \cdot t$ [kg] radioaktives Jod im Zeitintervall (0,t) freigesetzt.

Wegen der Verweilzeit Null im Störfall und $\lambda_1 \approx \lambda_2$ tritt in den Diagrammen der ersten beiden Serien der k-te Sprung in guter Näherung bei der Wahrscheinlichkeit

$$P\{N(t) \leq k\} = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

auf (Poissonprozess, N(t) = Anzahl der Störfälle in (0,t)).

Serie 1

Normalbetrieb periodisch: Freisetzungsrates $\xi = 2,91 \cdot 10^{-10}$ [kg/Std] .
 Störfälle (maximale Freisetzung): $m_1 = m_2 = 3,8 \cdot 10^{-2}$ [kg] . Ausfallraten der Erhitzer $\lambda_1 = 7,0 \cdot 10^{-5}$ [Std⁻¹], $\lambda_2 = 7,5 \cdot 10^{-5}$ [Std⁻¹] .
 Mittlere Freisetzung bis zum ersten Störfall $E\left\{ \xi \cdot \text{Min}(T_1, T_2) \right\} = 2 \cdot 10^{-5}$ [kg] . Bei t=0,5 Jahren wird im Normalbetrieb $\xi \cdot t = 1,27 \cdot 10^{-6}$ [kg] radioaktives Jod freigesetzt. Da aber in einem Störfall $3,8 \cdot 10^{-2}$ [kg] freigesetzt wird (!), ist in den Diagrammen mit t>8 Jahren der erste Sprung nicht mehr zu erkennen.

Wahrscheinlichkeiten für den 0 bis k-ten Störfall für einige Zeitintervalle (0,t):

t = 0,5 Jahre
 $\xi t = 1,27 \cdot 10^{-6}$ [kg]

k-ter Störfall	0	1	2
P{N(t) ≤ k}	0,938	0,998	$1 - 4 \cdot 10^{-5}$

t = 8,0 Jahre
 $\xi t = 2,04 \cdot 10^{-5}$ [kg]

k-ter Störfall	0	1	2	3	4	5
P{N(t) ≤ k}	0,362	0,730	0,917	0,980	0,996	0,999

$t = 32,0$ Jahre
 $\xi \cdot t = 8,16 \cdot 10^{-5}$ [kg]

k-ter Störfall	0	1	2	3	4	5
$P\{N(t) \leq k\}$	0,017	0,087	0,229	0,421	0,616	0,775
	6	7	8	9		
	0,883	0,945	0,977	0,991		

Serie 2

Normalbetrieb periodisch: Freisetzungsrates $\xi = 2,91 \cdot 10^{-13}$ [kg/Std] ,
 Störfälle (Mittelwerte der Verteilung): $m_1 = 1,12 \cdot 10^{-8}$ [kg] , $m_2 =$
 $3,33 \cdot 10^{-8}$ [kg], λ_i wie in Serie 1. Mittlere Freisetzung bis zum ersten
 Störfall $E\{\xi \cdot \text{Min}(T_1, T_2)\} = 2 \cdot 10^{-8}$ [kg] . Bei $t=8$ Jahren wird im Nor-
 malbetrieb $\xi \cdot t = 2,04 \cdot 10^{-8}$ [kg], im Störfall aber nun $1,12 \cdot 10^{-8}$ bzw.
 $3,33 \cdot 10^{-8}$ [kg] radioaktives Jod freigesetzt. Daher ist in den Diagram-
 men mit $t \leq 128$ Jahren der erste Sprung erkennbar.

Die Wahrscheinlichkeiten für den 0 bis k-ten Störfall sind dieselben
 wie in Serie 1.

Serie 3

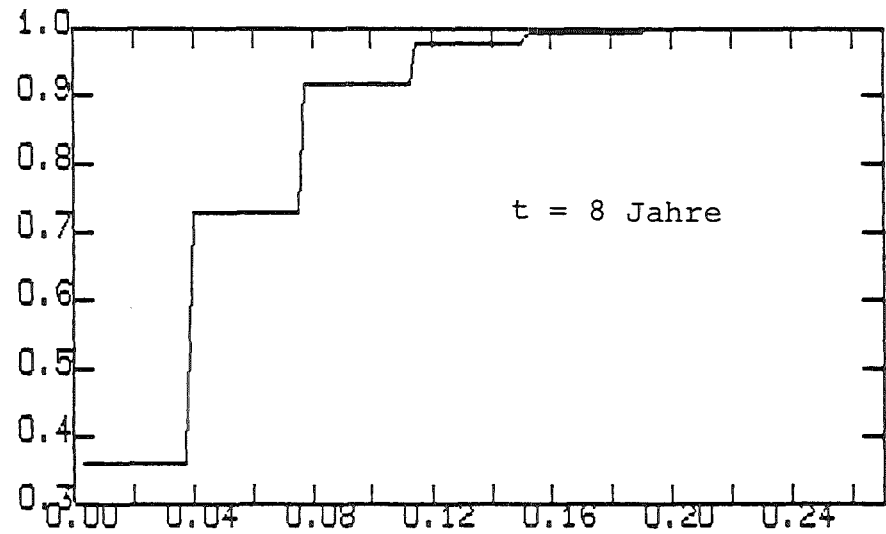
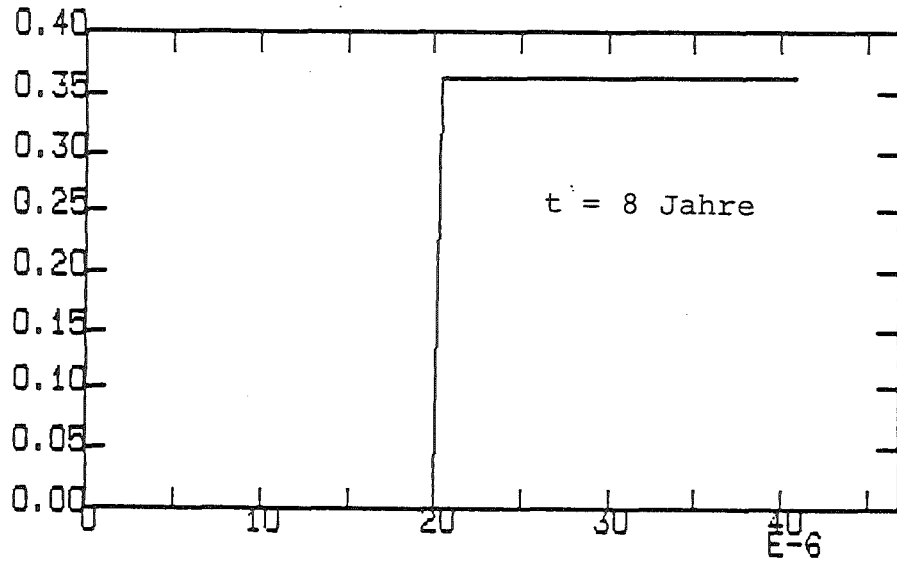
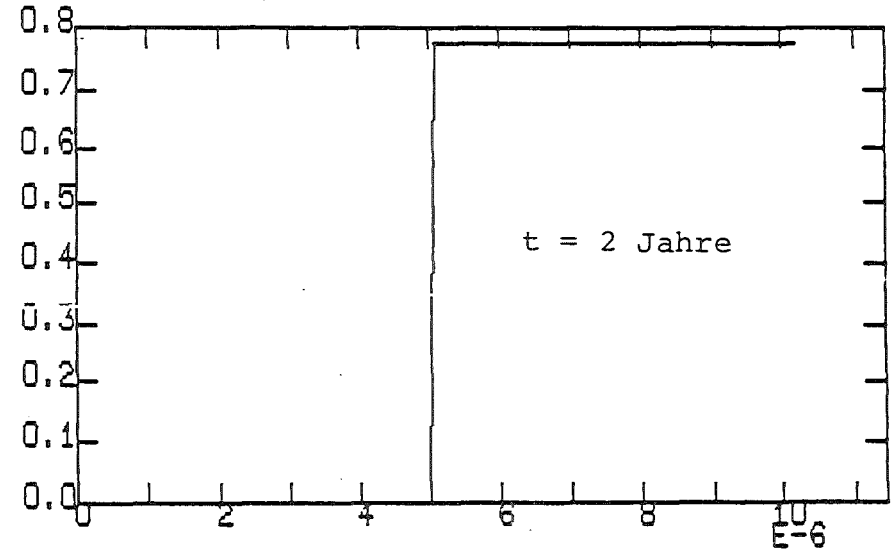
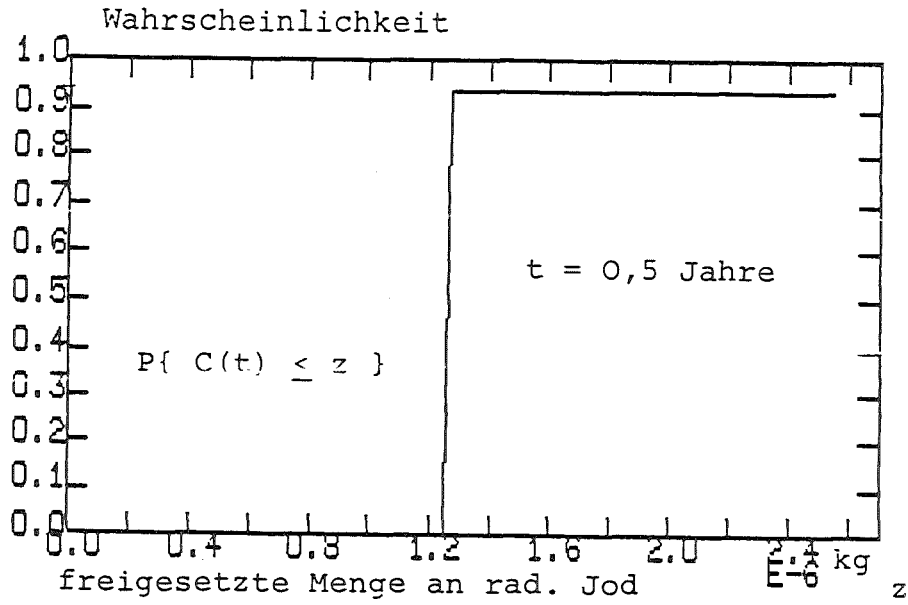
Alle Parameter wie in Serie 2, jedoch Freisetzungsrates $\xi = 2,91 \cdot 10^{-10}$ [kg] .
 Damit sind die Beiträge aus den Störfällen mit $\sim 10^{-8}$ [kg] gegen den Bei-
 trag aus der mittleren Freisetzung bis zum ersten Störfall
 $E\{\xi \cdot \text{Min}(T_1, T_2)\} = 2 \cdot 10^{-5}$ [kg] zu vernachlässigen. In den Diagrammen
 ist daher nur der erste Sprung (Normalbetrieb) bei ξt [kg] erkennbar.

Literatur

/1/ Zinterhof, P.

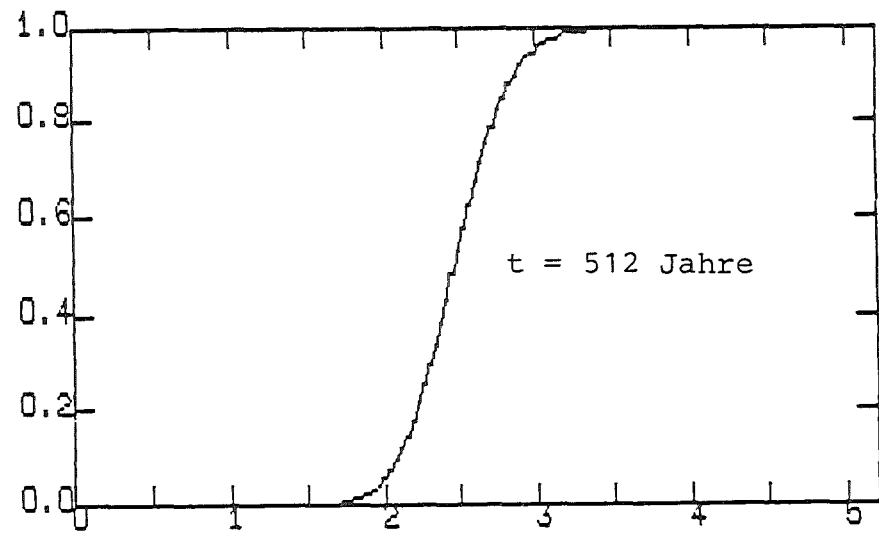
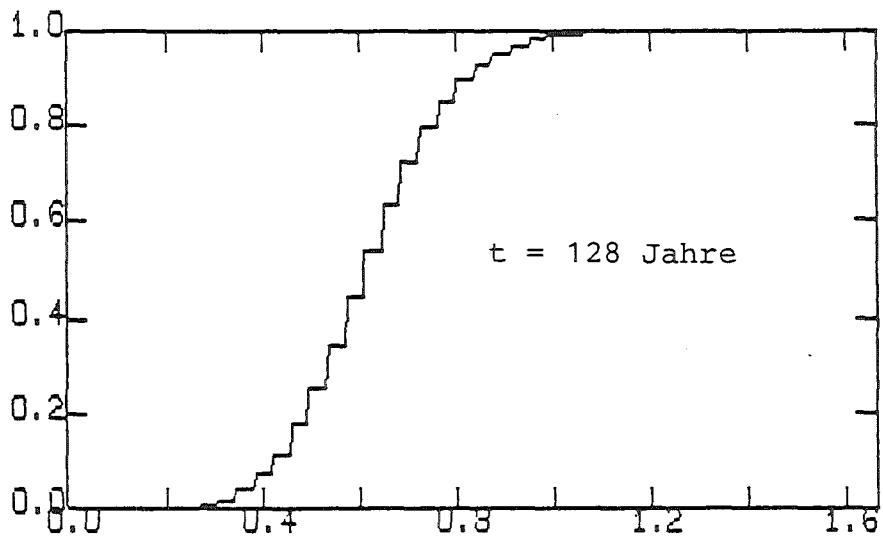
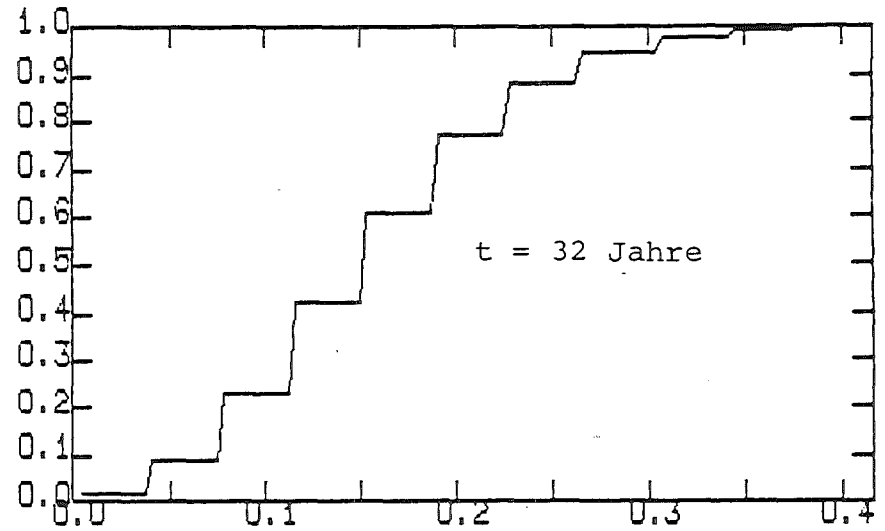
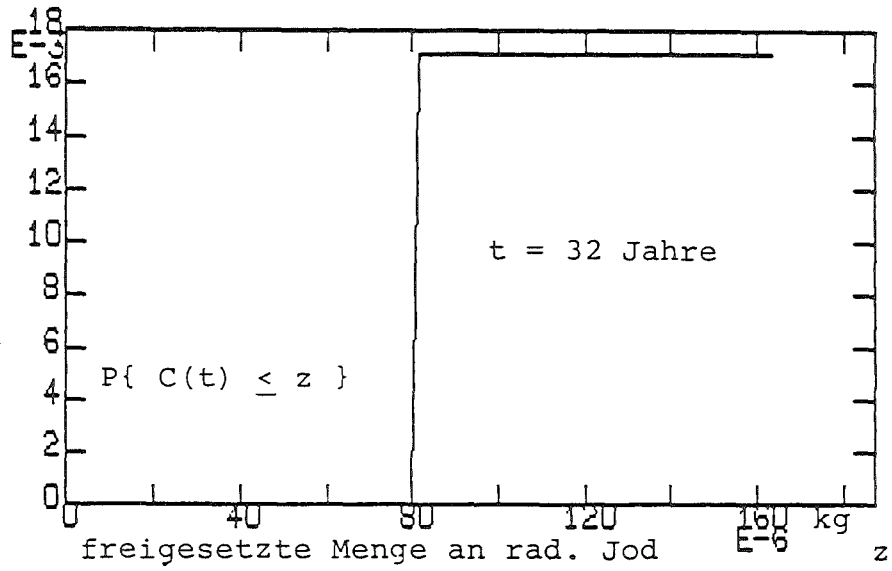
Markoff-Erneuerungsprozesse mit allgemeinen Kostenfunktionen, dieser
 Bericht.

S E R I E 1



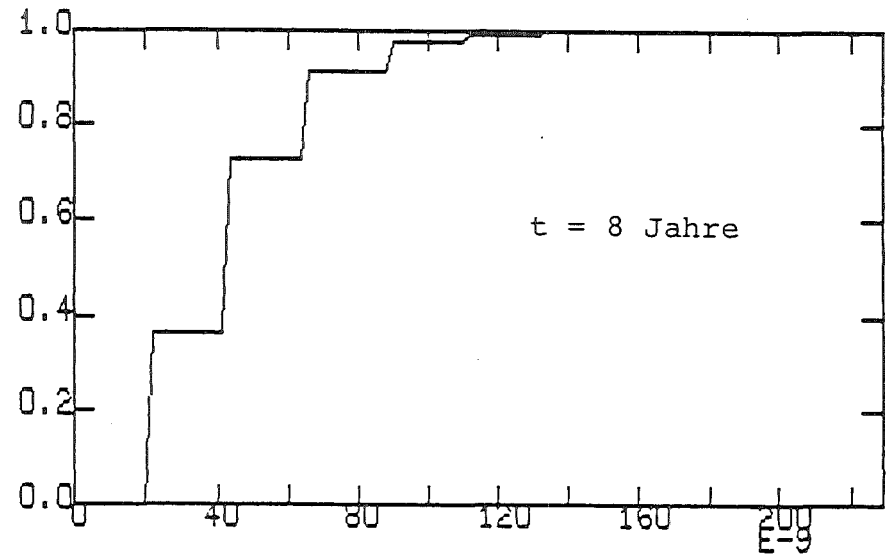
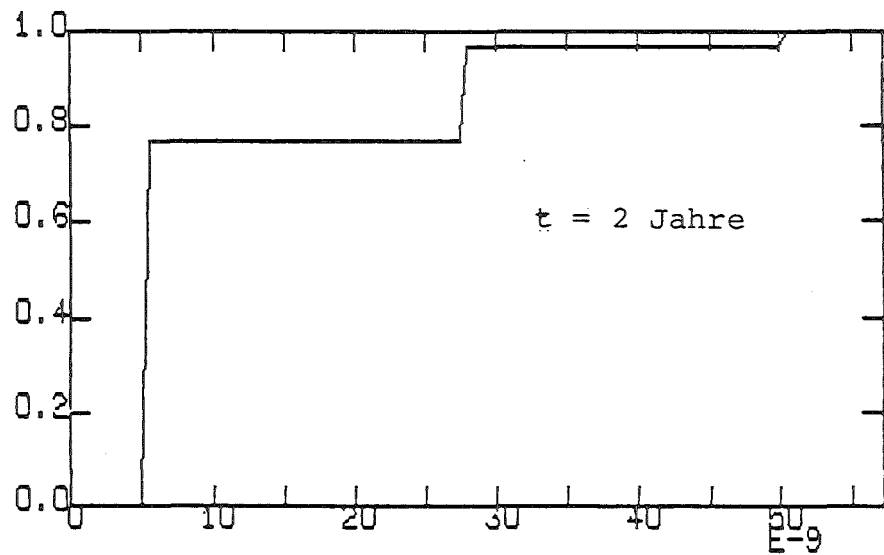
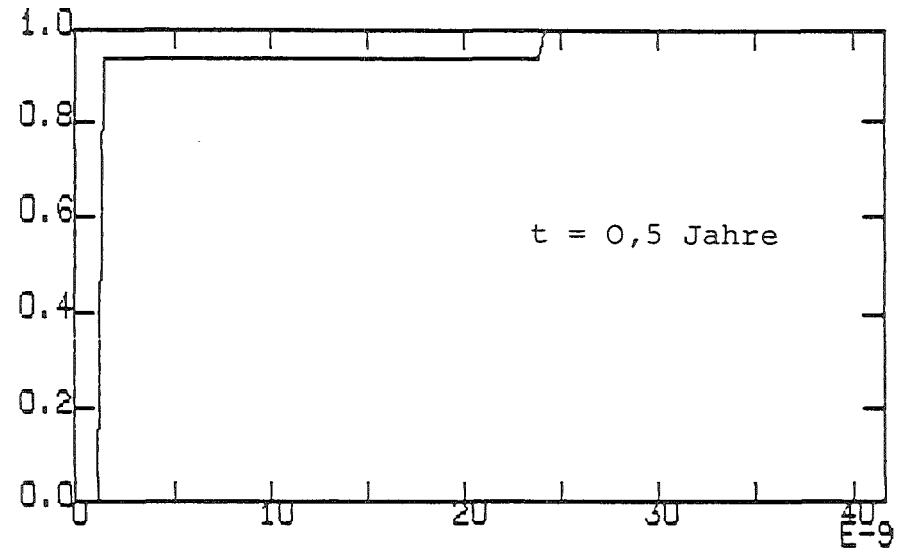
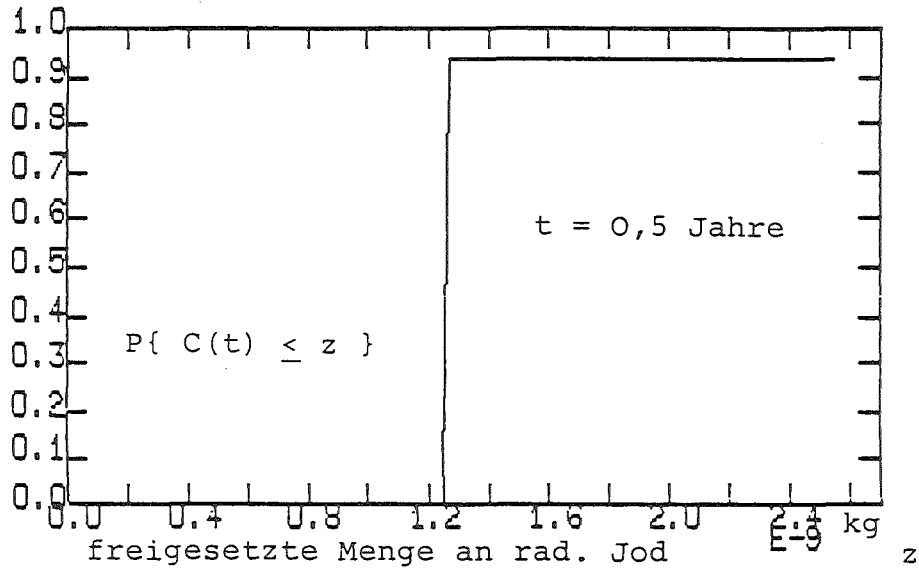
S E R I E 1

Wahrscheinlichkeit



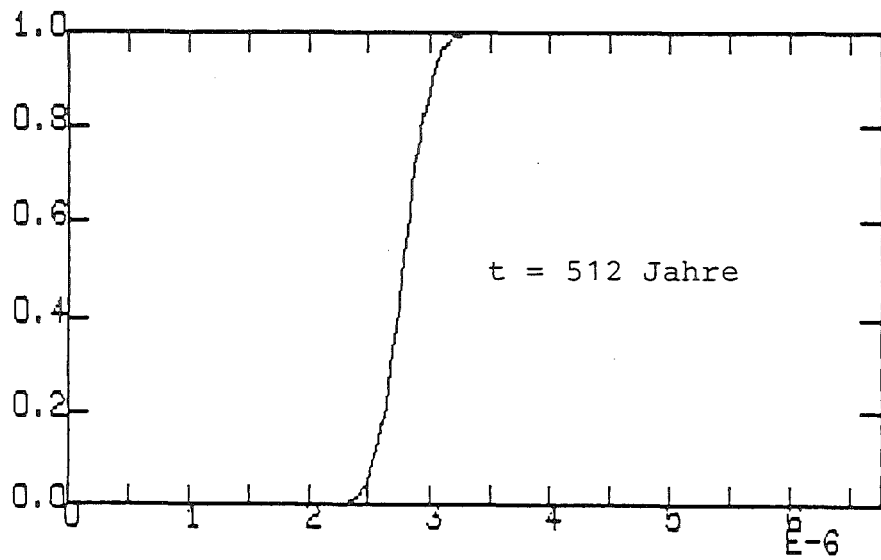
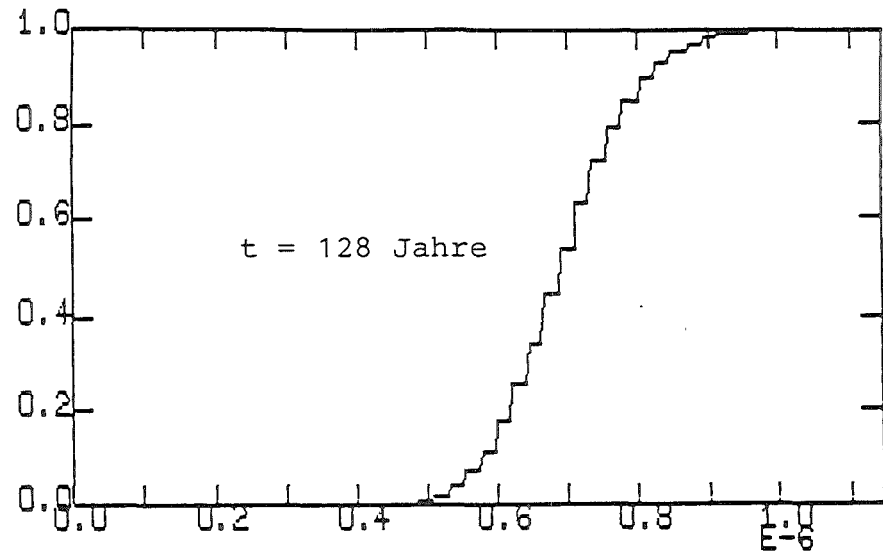
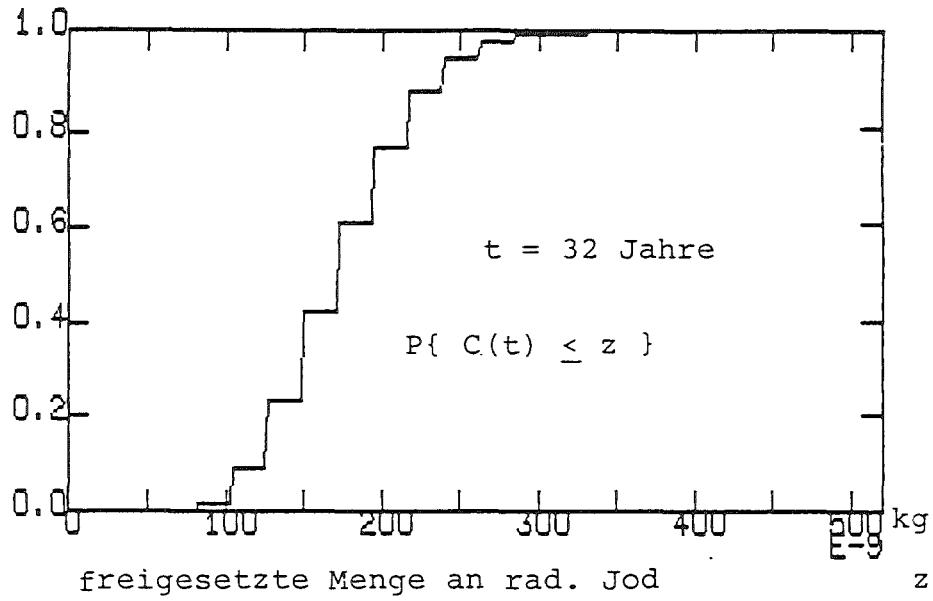
S E R I E 2

Wahrscheinlichkeit



S E R I E 2

Wahrscheinlichkeit



S E R I E 3

Wahrscheinlichkeit

