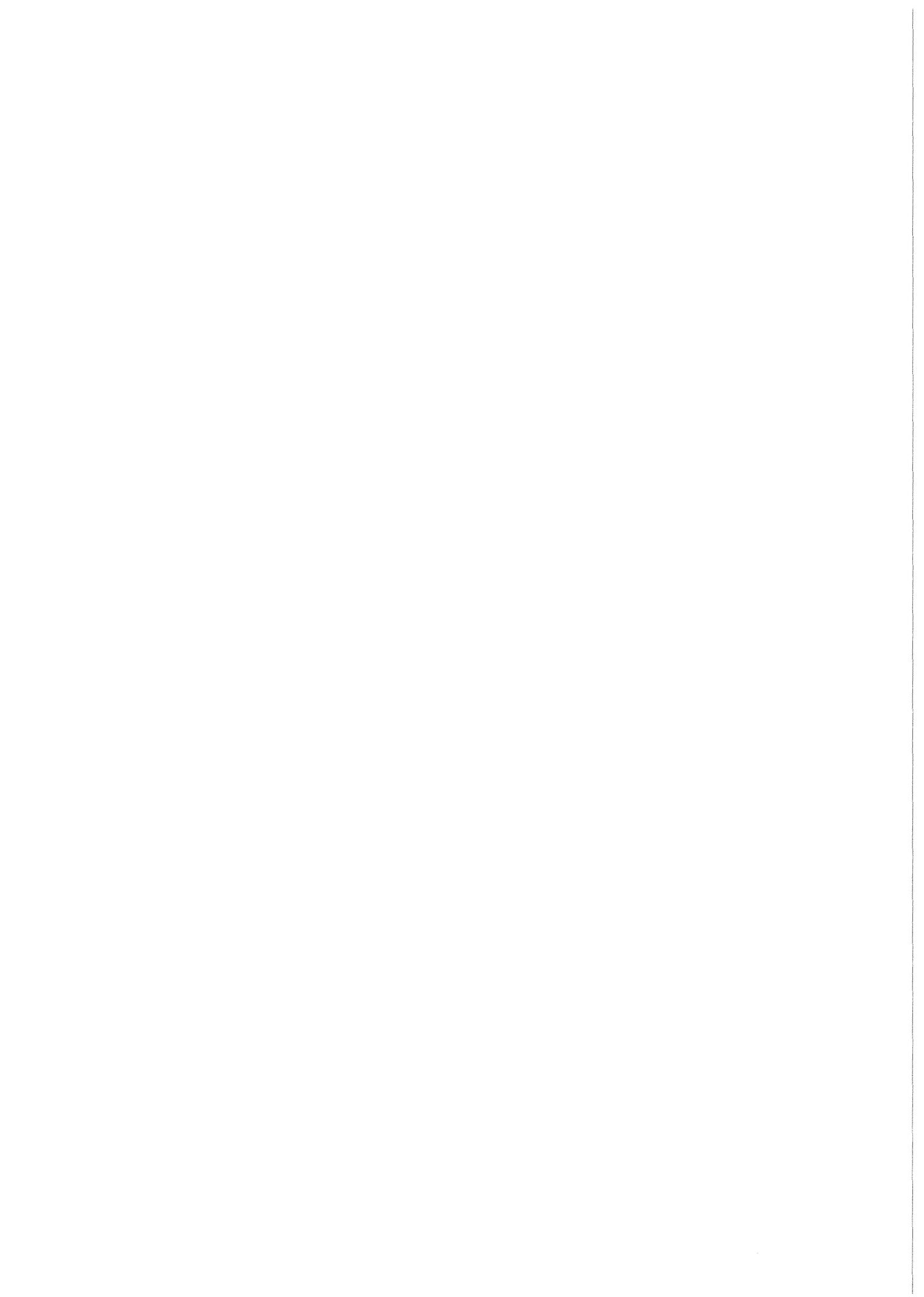


KfK 3847
Februar 1985

Analyse von Phänomenen der Hüllrohrbewegung; Anwendung des CMOT-II-Codes auf Hüllenschmelzexperimente

P. Henkel
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik
Projekt Schneller Brüter

Kernforschungszentrum Karlsruhe



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik
Projekt Schneller Brüter

KfK 3847

Analyse von Phänomenen der Hüllrohrbewegung;
Anwendung des CMOT-II-Codes auf Hüllenschmelzexperimente

Peter Henkel

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Büroexemplar Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH	Nr. 1
---	----------

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

An Hand mehrerer 'out-of-pile'-Experimente zum Hüllrohrverhalten unter LOF-ähnlichen Störfallbedingungen wird auf wichtige Phänomene der Hüllrohrdynamik eingegangen. Diese lassen sich durch den Bewegungsmodus in Phänomene der Filmströmung sowie Tropfenströmung gliedern. Entsprechend werden zunächst die Gleichungen des Filmströmungsmodelles diskutiert und neuere Ansätze für die verschiedenen Wechselwirkungsterme vorgestellt. Aus einer linearisierten Störungsentwicklung des Filmgleichungssystems folgt schließlich, daß sowohl sogenannte dynamische als auch Kontinuitäts-Wellenlösungen existieren. Besonders der zweite Wellentypus ist geeignet, um einige Aspekte der großen Störwellen zu beschreiben, die auch in den oben angesprochenen Experimenten beobachtet werden. Im Zusammenhang mit dem Auftreten von Wellen wird ferner auf das Versprühen des Hüllrohres ('entrainment') eingegangen, und es werden Versprühraten sowie Impulsverlustraten spezifiziert. Es schließt sich eine Diskussion der Tropfenströmung an, die insbesondere auch die Wiedieranlagerungsraten der Tropfen an umgebende Strukturen anspricht. Schließlich werden mehrere Nachrechnungen der oben genannten Experimente vorgestellt, die mit einer weiterentwickelten Version des CMOT-Codes durchgeführt wurden und in denen die im theoretischen Teil dargelegten Überlegungen berücksichtigt sind. Der Vergleich mit dem Experiment hinsichtlich typischer Zeitskalen der Hüllrohrbewegung, der Zweiphasen-Druckverluste sowie der Hüllrohrverteilung bei Versuchsende ergibt ein befriedigendes Resultat.

Analysis of Clad Motion Phenomena; Application of the CMOT-II-Code to
Clad Melting Experiments

Abstract

To the purpose of several out-of-pile experiments concerning clad behaviour under LOF-like accident conditions important phenomena of clad dynamics are discussed. These can be classified by the mode of motion into phenomena of film motion as well as droplet motion. Correspondingly the equations of the film model are discussed first and recent modifications of different interaction terms are presented. A linear perturbation expansion of the film motion equations indicates the existence of so-called dynamical as well as continuity waves. Especially the second wave type seems to represent some aspects of the massive disturbance waves which are also observed in the experiments mentioned above. In the context of wave appearance some details of clad dispersal (entrainment) are presented and entrainment rates as well as momentum transfer rates are specified. A discussion of some droplet flow characteristics follows which also includes droplet deposition rates on surrounding structures. Finally, several recalculations of the experiments mentioned above are presented which have been done with an improved version of the CMOT-code including the considerations presented in the theoretical part. The comparison with experiment in regard to typical time scales of clad motion, two phase pressure drops and final clad distribution leads to a satisfactory result.

INHALT

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Erläuterung der Experimente	2
3. Das physikalische Modell der Hüllrohrbewegung	7
3.1 Das Filmmodell	7
3.1.1 Die Zweiphasenschubspannung τ_i	9
3.1.2 Die Wandschubspannung τ_w	15
3.1.3 Die Wärmeströme	19
3.1.4 Die Gleichungen der Gasströmung	20
3.1.5 Diskussion der Grundgleichungen	21
3.2 Das 'entrainment'-Modell	29
3.2.1 Wellenphänomene der Filmströmung	29
3.2.2 Mögliche Mechanismen für das Versprühen einer Filmströmung	33
3.2.3 Kriterien für das Versprühen einer Filmströmung	36
3.2.4 Versprührate und Impulsverlustrate	41
3.2.5 Zur Dynamik der Tropfen; Wiedieranlagerungsraten	44
3.2.6 Versprühen bei schlechter Benetzung	47
4. Vergleich der experimentellen mit den numerischen Ergebnissen	50
4.1 Typische Zeitskalen der Hüllrohrbewegung	50
4.2 Druckverlust der Zweiphasenströmung	52
4.3 Nachuntersuchung der Teststrecke	58
5. Zusammenfassung und Ausblick	63
6. Nomenklatur	64
7. Literatur	68
Anhang A1: Wärmeübergang zwischen zwei Temperaturebenen	73
Anhang A2: Radiale Geschwindigkeitskomponente der Tropfen	76

1. Einleitung

Während eines Kühlmittelverluststörfalles ist das Verhalten der Brennstabhülle von weitreichender Bedeutung. Neben der direkten Beeinflussung der Reaktivitäts- und Temperaturverteilung im Reaktorkern können sich bildende Stahlblockaden im oberen oder unteren Blanket den Kühlkanal versperren und dadurch eine mögliche Austragung des Brennstoffs aus dem Kernbereich behindern sowie die Nachwärmeabfuhr erschweren. Die frühe Hüllrohrbewegung setzt somit wichtige Randbedingungen für den weiteren Störfallablauf. Insbesondere bei Reaktoren mit kleinen positiven Voidkoeffizienten (z. B. in heterogenen oder kleinen Kernen) spielt die Hüllrohrdynamik eine Rolle, da sie im wesentlichen unabhängig von der Brennstoffbewegung stattfindet. Anders ist es bei Reaktoren mit relativ hohen positiven Voidwerten (z. B. dem SNR-300). Hier ist es wahrscheinlich, daß sowohl Hüllrohr als auch Brennstoff ohne große Zeitverzögerung schmelzen und eine gekoppelte Bewegung ausführen /2/. Wegen der weitreichenden Bedeutung der Hüllrohrdynamik besteht ein fortgesetztes Interesse an einem detaillierten Verständnis der wesentlichen Phänomene. Diesem Ziele dienen auch die im nächsten Kapitel näher erläuterten 'out-of-pile'-Modellexperimente von Casal /3/, die die Störfallsituation simulieren sollen. Bei diesen Versuchen wird eine Sn/Bi-Legierung von einem Heizstab abgeschmolzen und zur Wechselwirkung mit einer Argongasströmung gebracht. Eine Hochfrequenzkamera beobachtet die Zweiphasenströmung, während an vier Positionen der resultierende Druckabfall registriert wird. Parallel zu den experimentellen Arbeiten wurden mit einer weiterentwickelten Version des CMOT-Codes (clad-motion), /1,4/ Vergleichsrechnungen durchgeführt. Daraus resultierten eine Reihe von Modifikationen des Rechenprogrammes CMOT. Am wesentlichsten erscheint die Betrachtung einer möglichen Dispersion des Hüllrohres und den Übergang zu einer Tropfenströmung ('entrainment'). Dieser Aspekt wird bei der Darstellung des physikalischen Modelles weiter ausgeführt werden. Schließlich sollen die Rechnungen mit den experimentellen Daten verglichen werden.

2. Erläuterung der Experimente

Die detaillierte Beschreibung der Experimente wird an anderer Stelle erfolgen /5/. Es sollen deshalb nur diejenigen Punkte genannt werden, die für das Verständnis der folgenden Seiten wesentlich sind. Den experimentellen Aufbau zeigt Abbildung 1.

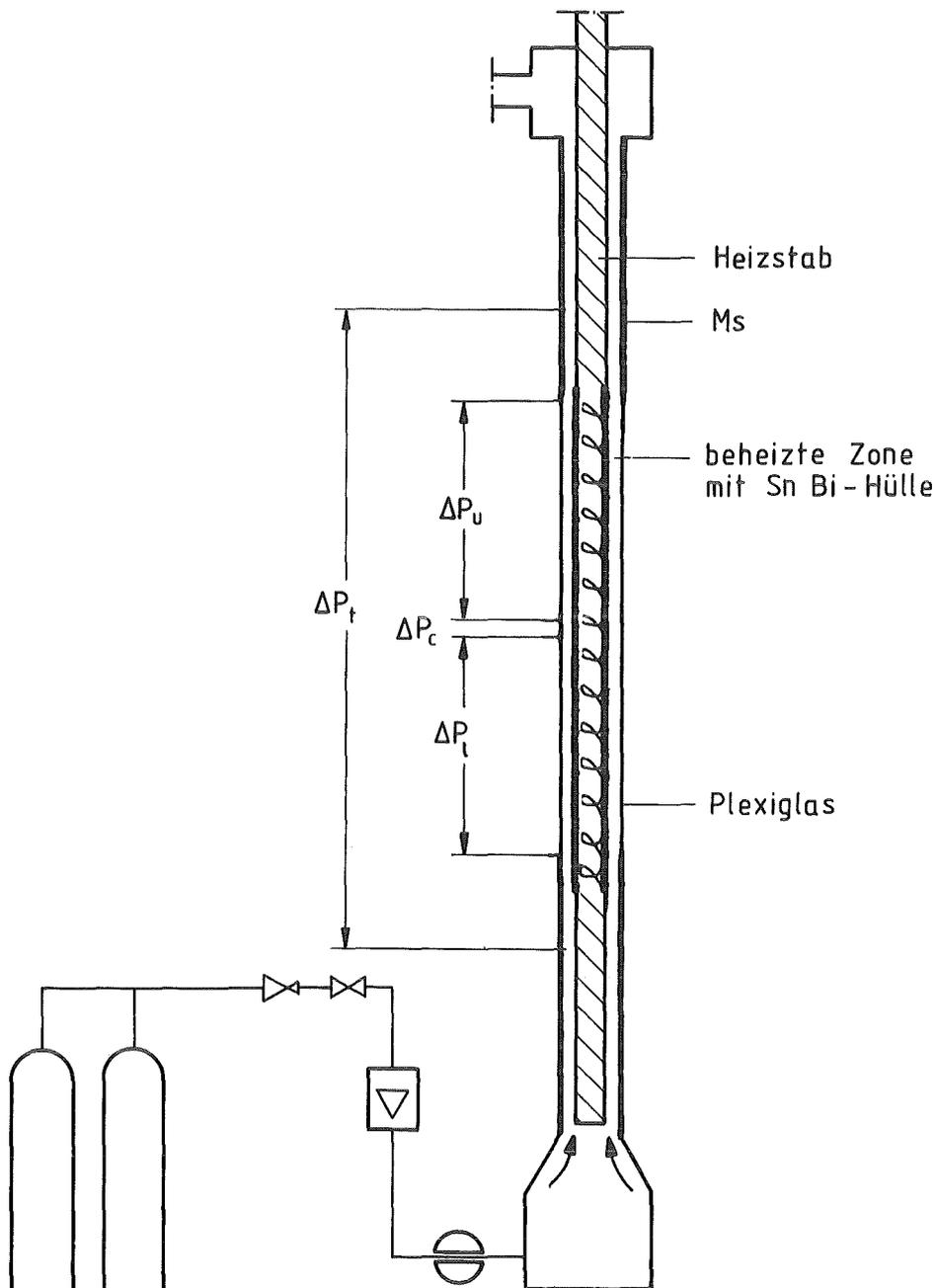


Abb. 1: Schematische Skizze des Teststandes der Hüllenschmelzexperimente

Die Teststrecke besteht aus einem Heizstab, der konzentrisch in ein Plexiglasrohr eingebracht ist. Der Stab ist mit einem Sn-Bi-(57/43%) Eutektikum beschichtet, das elektrisch abgeschmolzen werden kann. Argongas strömt durch den von Rohr und Stab gebildeten Ringraum. An vier Positionen werden Druckverluste gemessen. Eine Hochfrequenzkamera beobachtet die sich entwickelnde Zweiphasenwechselwirkung zwischen Schmelze und Gas.

Während der Versuchsserie wurden im wesentlichen zwei Parameter geändert:

- die Benetzungsverhältnisse zwischen Schmelze und Heizstaboberfläche. Besteht die Heizstaboberfläche aus Stahl, liegt schlechte Benetzung vor. Wurde dagegen eine dünne Kupferschicht aufgetragen, liegt gute Benetzung vor.
- der Gasdurchsatz durch Erhöhen des Eingangsdruckes.

Die wesentlichen experimentellen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Bei schlechter Benetzung und etwas höheren Gasdurchsätzen neigt das Hüllrohr dazu, vollständig zu versprühen. Es lagert sich auf dem Plexiglasrohr wieder ab. Charakteristisch ist, daß kein Restfilm auf dem Heizstab zurückbleibt. Bei geringen Durchsätzen ($u_g \sim 7$ m/sec) erscheint die Bewegung wie das reibungslose Abgleiten eines Mantels. In diesen Fällen versprüht das Hüllrohr nicht, sondern führt eine homogene Abwärtsbewegung aus. Anders ist das Erscheinungsbild bei guter Benetzung. Es bildet sich eine Filmströmung aus, die i. a. mit dem Auftreten von großen Störwellen verbunden ist. Besonders bei höheren Gasdurchsätzen ($u_g \gtrsim 17$ m/sec) können Tropfen von den Wellenkämmen losgelöst werden ('entrainment'). Diese werden axial und radial beschleunigt und lagern sich ebenfalls auf dem Plexiglasrohr ab. Es bleibt ein Restfilm auf dem Heizstab haften.
- Durch Variation des Gasdurchsatzes können im Falle guter Benetzung mehrere Strömungsbereiche durchlaufen werden. Es sind dies:
 - gegensinnige Strömung von Schmelze und Gas (bei kleinen Durchsätzen),
 - gleichsinnige (aufwärtsgerichtete) Strömung beider Phasen (bei hohen Durchsätzen),
 - stagnierende Filmströmung ('flooding', bei mittleren Durchsätzen).

Im letzten Fall bilden sich große Wellen, die auf Grund ihres verstärkten Impulsaustausches mit der Gasströmung aufwärts transportiert werden. Gleichzeitig fließt ein dünner Rieselfilm längs der Heizstaboberfläche nach unten ab, sammelt sich und bildet eine neue Welle. Dieser Vorgang wiederholt sich mehrmals, so daß der Nettomaterialtransport gering ist.

- Kennzeichnend für die drei Strömungsbereiche sind unterschiedlich starke Wechselwirkungen beider Phasen. Diese hängen eng mit der Oberflächenwelligkeit der Schmelze zusammen. Quantitativ werden sie durch die sogenannten Reibbeiwerte ausgedrückt. An Hand der Versuche konnten die in der Literatur angegebenen Relationen überprüft werden.

Die experimentellen Ergebnisse lassen sich in folgende Punkte gliedern:

- die Materialtransportraten des Hüllrohres, wie sie aus den Filmaufnahmen und Druckverlustkurven folgen. Daraus sind Rückschlüsse auf die Strömungsgeschwindigkeiten möglich.
- die Druckverlustmessungen an vier Positionen. Hier spiegeln sich Hüllrohr- und Gasdynamik wider.
- der Endzustand der Teststrecke. Man erhält Aussagen über die Dimensionen von partiellen oder eventuell totalen Blockaden.

Zum Verständnis der Versuche und ihrer Beziehung zu den realen Verhältnissen im Reaktor ist der Vergleich einiger Stoffgrößen der Materialpaare Argon/Sn-Bi und Natriumdampf/Stahl hilfreich. Die angegebenen Daten sind nur Richtwerte. Man erkennt, daß, abgesehen vom Schmelzpunkt, die Eigenschaften von flüssigem Stahl durch die Sn/Bi-Legierung in etwa angenähert werden, daß jedoch Argon natürlicherweise nicht die guten thermischen Eigenschaften von Natriumdampf besitzt. Dies ist ein Nachteil bei der Beurteilung thermophysikalischer Vorgänge, sollte aber bei rein fluiddynamischen Fragestellungen keine Beschränkung sein.

Tabelle 1: Vergleich verschiedener Stoffgrößen der Materialpaare Argon/Sn-Bi und Natriumdampf/Stahl

Größe	Argon	Natriumdampf	Sn-Bi	Stahl
Dichte ρ (g/cm ³)	$1.68 \cdot 10^{-3}$ (1 bar, 20°C)	$\sim(5-10) \cdot 10^{-4}$ (2.7 bar, 10 ³ °C)	8.5	7.2
Viskosität (g/cm sec)	$2.184 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$	$2.465 \cdot 10^{-2}$	$(6.4-1.6) \cdot 10^{-3}$
Wärmekapazität c_p ($\frac{Ws}{g^{\circ}K}$)	0.522 (1 bar, 27°C)	2.113 (2 bar, 1220°C)	0.1925	0.69
Wärmeleitfähigkeit λ ($\frac{W}{cm^{\circ}K}$)	$1.77 \cdot 10^{-5}$	0.5	0.267	0.36
Oberflächenspannung σ_v (g/sec ²)	-	-	411	750 (2000°C)
Schmelzpunkt (°C)	-	-	138	1385
Prandtl-Zahl	0.68	0.64	-	-

Im folgenden sollen nicht alle Experimente Casals /3/ besprochen werden. Es werden in erster Linie nur diejenigen Versuche betrachtet, für die gute Benetzung zwischen Schmelze und Heizstab gegeben ist. Der Grund für diese Beschränkung liegt darin, daß bei schlechter Benetzung die Hülle fast vollständig versprüht und die Vorgänge mit dem aktuellen Modell der Hüllrohrbewegung, das wesentlich auf einer Filmströmung basiert, nicht modellierbar sind. Es werden jedoch an passender Stelle auch Überlegungen angestellt, wie das Modell auf Fälle mit schlechter Benetzung erweitert werden kann. Falls es nicht ausdrücklich anders gesagt wird, setzen nun alle nachfolgenden Ausführungen gute Benetzung zwischen Schmelze und Heizstab voraus.

3. Das physikalische Modell der Hüllrohrbewegung

Im folgenden soll das Hüllrohrbewegungsmodell nur soweit erläutert werden, als es den Rahmen der Darstellung in /1/ übersteigt. Es wird zunächst auf das Filmströmungsmodell und die Spezifikation einiger wichtiger Terme eingegangen. Daran schließt sich eine kurze Diskussion der Grundgleichungen an. Neue Aspekte treten durch die 'entrainment'-Thematik auf. Es werden Überlegungen zum 'entrainment'-Prozeß dargestellt, sowie einige Phänomene der kombinierten Gas-Tropfenströmung diskutiert.

3.1 Das Filmmodell

Charakteristisch für das Filmmodell ist die Behandlung der Hüllrohrbewegung als Filmströmung längs der Oberfläche eines Brenn- oder Heizstabes. Die zylindersymmetrische Geometrie als auch die axial gerichtete Gasströmung prägen dabei eine Hauptströmungsrichtung auf, so daß die Hüllrohrdynamik im wesentlichen eindimensional verläuft. Radiale Geschwindigkeitskomponenten spielen nur bei sehr welligen Filmen eine Rolle, wenn die Wellenlänge vergleichbar mit der Filmdicke wird. Dabei sind die radialen Strömungskomponenten an der Filmoberfläche maximal, während sie an der Wandseite des Filmes verschwinden. Die folgende kinematische Bedingung verknüpft die Geschwindigkeiten an der Filmoberfläche (radial v_i und axial u_i) mit der Filmdicke h

$$\begin{aligned} v_i &= \partial_t h + u_i \partial_z h \\ &\approx \partial_t h + u \partial_z h \approx h \partial_z u \end{aligned} \quad (1)$$

u ist die mittlere axiale Filmgeschwindigkeit. Gravierende Geschwindigkeitsänderungen treten längs einer Wellenlänge auf. Es gilt deshalb

$$\frac{v_i}{u} \approx \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

Für langwellige Störungen verläuft also die Filmströmung im wesentlichen eindimensional. Insbesondere die Arbeiten von Telles, Chu und Dukler /6,7,8/ haben gezeigt, daß die Filmströmung dabei ein Zweiwellensystem darstellt.

Damit ist gemeint, daß massive Störwellen existieren, die einen Großteil der Flüssigkeit transportieren und deren Wellenlängen mehrere Zentimeter betragen können. Daneben gibt es aber auch sogenannte Kapillarwellen, die auf der Oberfläche des Filmes propagieren und deren Wellenlängen sehr kurz sein können ($\lambda \lesssim h$). Diese Oberflächenwellen tragen zum Materialtransport der Filmströmung nur sehr unwesentlich bei und brauchen deshalb im Filmgleichungssystem nicht berücksichtigt werden. Wohl aber können die Kapillarwellen eine wichtige Rolle beim Ablösen von Tropfen aus der Filmoberfläche ('entrainment') spielen. Dann können auch große radiale Geschwindigkeitskomponenten auftreten, die jedoch der Tropfenströmung zuzurechnen sind. Für die Erfassung globaler Materialtransportraten der Filmströmung ist somit eine eindimensionale Beschreibung ausreichend. Es treten darin folgende Kräfte auf:

- Gravitation im terrestrischen Schwerfeld, (g),
- Beschleunigung im Druckgradientenfeld, ($\partial_z P_1$),
- Beschleunigung durch Scherkräfte, wie sie an den Phasengrenzflächen zum Brenn- oder Heizstab bzw. zur Gasströmung hin auftreten, (τ_w, τ_i),
- Impulsverlust durch 'entrainment', ($E u_e$).

Mit den unabhängigen Variablen A (Strömungsquerschnittsfläche), u (mittlere axiale Geschwindigkeit) und e (Enthalpie pro Masseneinheit) lauten die Bilanzgleichungen der Filmströmung:

Masse:

$$\rho_1 = \text{const.}$$

$$\partial_t A + \partial_z A u = - E, \quad E > 0 \quad (3)$$

E : reduzierte Tropfenversprührate ('entrainment'-Rate), $[E] = \text{cm}^2/\text{s}$

axialer Impuls:

$$\partial_t A u + \partial_z A u^2 = -A(g + \frac{1}{\rho_1} \partial_z p_1) + \frac{1}{\rho_1} (2\pi r_i \tau_i - 2\pi r_w \tau_w) - E \cdot u_e \quad (4)$$

$P_1 \approx P_g$ (P_g : Druck der Gasphase)

r_w, r_i : Radien der Filmminnen- und außenseite

Enthalpie:

$$\partial_t A_e + \partial_z A_{ue} = \frac{1}{\rho_l} (2\pi r_i q_i - 2\pi r_w q_w) - E \cdot e \quad (5)$$

q_w, q_i : Wärmeströme an der Filminnen- und außenseite

Das obige Gleichungssystem entspricht bis auf zwei Punkte formal der Formulierung in Ref. /1/:

- Der konvektive Term in der Impulsgleichung enthält keinen Faktor '0.6' mehr.
- Durch das Versprühen des Filmes ('entrainment') treten zusätzliche Quellterme auf.

Wesentliche Unterschiede treten dagegen bei der Spezifikation der physikalischen Terme τ_i , τ_w , q_i , q_w , E , u_e auf. Darauf soll im folgenden näher eingegangen werden.

3.1.1 Die Zweiphasenschubspannung τ_i

In einer eindimensionalen Beschreibung sind die Schubspannungen an der Filminnen- und außenseite die einzigen Repräsentanten des neunkomponentigen Schub- und Spannungstensors. Macht man den üblichen Newton'schen Ansatz

$$\tau_i = \mu_l \frac{\partial u_z}{\partial r} / r=r_i \quad (6)$$

so benötigt man für eine exakte Berechnung das Geschwindigkeitsprofil. Wegen der Komplexität der Wellenphänomene an der Grenzfläche zum Gas ist dieses i. a. nicht bekannt, so daß man auf empirische Relationen angewiesen ist /10/:

$$\tau_i = \frac{1}{8} f_i \rho_g |u_g - u| \cdot (u_g - u) \quad (6a)$$

Die komplexe Physik des Impulstransfers zwischen beiden Phasen verbirgt sich in dem sogenannten Reibbeiwert f_i . Für eine glatte Fläche gilt /10/:

$$f_i = f_o = 0.316 \cdot Re_g^{-1/4} \quad (7)$$

Re_g : Gas-Reynoldszahl

Besteht eine Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen, so ist die Grenzfläche zwischen ihnen i. a. instabil, und es bilden sich Wellen verschiedener Wellenlängen. Eine solche Instabilität ist z. B. auch die Kelvin-Helmholtz-Instabilität, bei der der Druckunterschied normal zur Oberfläche durch die Oberflächenspannung nicht mehr egalisiert werden kann. Es bilden sich die bereits genannten Kapillarwellen, die schnell anwachsen und eventuell zu großen Störwellen transformieren. In diesen Fällen ist der Impulstransfer wesentlich erhöht, und es gilt dann:

$$f_i = f_o \cdot \psi_i \quad (8)$$

ψ_i ist der Wellenmultiplikator. Er hängt stark von den individuellen Charakteristiken der Oberfläche ab und insbesondere auch vom Strömungsbereich.

Dementsprechend lassen sich mehrere Ansätze in der Literatur finden:

- Für die gleichgerichtete Strömung beider Phasen gibt Wallis /10/ folgenden Ausdruck an:

$$\psi_i = 1 + 300 \frac{\delta}{d_{h_i}}, \quad \begin{array}{l} \delta : \text{Filmdicke} \\ d_{h_i} : \text{hydraulischer Durchmesser} \end{array} \quad (9)$$

Für hohe Gasreynoldszahlen ($Re_g \gtrsim 5 \cdot 10^4$) finden Henstock und Hanratty /11/

$$\psi_i = 1 + 1400 \cdot F$$

$$F = \frac{\gamma(Re_1)}{Re_g^{0.90}} \frac{v_1}{v_g} \frac{\rho_1}{\rho_g} \quad (9a)$$

$$\gamma(Re_1) = \left\{ (0.707 \cdot Re_1^{0.5})^{2.5} + (0.0379 \cdot Re_1^{0.9})^{2.5} \right\}^{0.4}$$

$$Re_1 = \frac{4 \cdot u \cdot \delta}{v_1}$$

Beide Ansätze finden Verwendung. Die Rechnungen deuten an, daß die Wallis-Beziehung bis nahe zur Strömungsumkehr ('flooding') brauchbar ist, während

die zweite Formel nur bei hohen Gasdurchsätzen (z. B. $u_g = 81$ m/sec) befriedigende Ergebnisse liefert.

- Im Bereich stagnierender Filmströmung gibt Grolmes /12/ folgende Beziehung an:

$$\psi_i = 1 + 33\,333 \frac{\delta^2}{(\mu_1/\mu_r)^{0.44}}, \quad \delta [\text{cm}] \quad (9b)$$

$$\mu_r = 4.3737 \cdot 10^{-4} \text{ g/cm sec}$$

Sie hat den Nachteil, dimensionsbehaftet zu sein, hat sich aber bei den Rechnungen bewährt. Eventuell kann man auch bei auftretenden Diskrepanzen auf die Wallisbeziehung zurückgreifen.

- Im Bereich gegensinniger Strömung beider Phasen findet Feind /13/

$$f_i = \frac{120}{D^{5/3}} + \frac{0.14}{D^{1/5}} \quad (9c)$$

$$D = c \frac{\text{Re}_g}{\text{Re}_1^n} \left(\frac{\rho_1}{\rho_g}\right)^{2/5} \left(\frac{\mu_g}{\mu_1}\right)^{2/3} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{1/2}$$

$$\text{Re}_1 \leq 40 \quad c = 1.31 \quad n = 1/4$$

$$\text{Re}_1 \geq 40 \quad c = 4.76 \quad n = 3/5$$

$$\text{Re}_L = \frac{u\delta}{\nu_1}$$

- Erstarrt die Schmelze wieder in kalten Bereichen des Brenn- oder Heizstabes, so hat die Oberfläche oftmals eine bizarre Gestalt. In diesen Fällen wird die Wallisbeziehung benutzt, indem die Filmdicke durch eine mittlere Rauigkeitshöhe ersetzt wird. Analog wird auch für eine durch Ablagerungen extrem aufgerauhte Plexiglaswand eine erhöhte Reibung für die Gasströmung berechnet (siehe Gl. (13a), Reibbeiwert f_t).

Eine wichtige Korrektur zu den oben angegebenen Reibbeiwertrelationen ist nötig, falls die Strömung wesentlich instationär verläuft wie z. B. kurz nach Überschreiten der Liquidustemperatur. Die Schmelze wird beschleunigt, es bildet sich das Geschwindigkeitsprofil aus, das letztendlich zu den Wellenphänomenen führt. Erst allmählich wird sich der Wellenmultiplikator entwickeln und wesentlich von eins unterscheiden. Setzt man nun versuchsweise die anfängliche Filmdicke z. B. in die Wellenmultiplikator-Relation nach Wallis (s. Gl. 9) ein, so würde diese gleich zu Anfang, instantan mit dem Durchschmelzen der Hülle, eine wellige und aufgeraute Oberfläche signalisieren. Dies ist aber nicht realistisch. Ein Ausweg, der sich bei den Nachrechnungen bewährt hat, bietet sich an, wenn man die Filmdicke in einem effektiven Sinne interpretiert. Faßt man die Filmdicke als Maß für die Rauigkeit der Filmoberfläche auf, die wiederum wesentlich durch die Einwirkung der Zweiphasenschubspannung beeinflusst wird, so ist eine charakteristische Rauigkeitshöhe auch durch die Eindringtiefe der Zweiphasenschubspannung gegeben. Während der Anlaufphase gilt ja approximativ folgende Diffusionsgleichung für die Schubspannung τ :

$$\partial_t \tau = v_1 \partial_r^2 \tau \quad (10)$$

$$\tau(r_i, t) = \tau_i, \quad \text{mit der Lösung}$$

$$\tau(r, t) = \tau_i \cdot \operatorname{erfc} \frac{r_i - r}{2\sqrt{v_1 t}}$$

Die komplementäre Errorfunktion erfc fällt steil ab. Für $\Delta l = r_i - r = 2\sqrt{v_1 t}$ gilt $\operatorname{erfc}(1) \approx 0.1573$. Nimmt man die Strecke Δl als Eindringtiefe, so läßt sich eine effektive Filmdicke durch das Minimum der Penetrationsstrecke Δl und der geometrischen Filmdicke δ gewinnen:

$$\delta_{\text{eff}} = \min(\delta, 2\sqrt{v_1 t})$$

Die Rechnungen zeigen, daß mit dieser Modifikation ein Teil der instationären Vorgänge erfaßt werden kann. Insbesondere bei den Druckverlustberechnungen hat sich die neue Interpretation der Filmdicke bewährt.

Eine weitere Modifikation ist nötig, wenn neben der Gas- auch eine Tropfenströmung vorliegt. Der Einfluß der Tropfen kann im Sinne eines homogenen Strömungsmodells durch folgende verallgemeinerte Begriffsbildungen erfaßt werden /10/:

$$\rho_H = \alpha \cdot \rho_g + (1-\alpha)\rho_d \quad (11)$$

$$G_H = \rho_g \cdot \alpha u_g + \rho_d \cdot (1-\alpha)u_d$$

$$u_H = G_H / \rho_H$$

$$Re_H = \frac{d_{h,i} |G_H|}{\mu_g}$$

- α : volumetrische Gaskonzentration im Referenzvolumen
- u_g : mittlere axiale Gasgeschwindigkeit
- u_d : mittlere axiale Tropfengeschwindigkeit
- ρ_g : Dichte der Gasphase
- ρ_d : Dichte der Tropfen
- μ_g : dynamische Viskosität des Gases

Die Ansätze für die Zweiphasenschubspannung behalten ihre formale Gestalt, alle gasspezifischen Variablen werden durch die entsprechenden Größen des homogenen Strömungsmodells ersetzt:

$$\tau_i = \frac{1}{8} \cdot f_i (Re_H) \cdot \rho_H \cdot |u_H - u| \cdot (u_H - u) \quad (12)$$

Diese Vorgehensweise ist analog zu Wallis /10/.

Der in den obigen Ausdrücken verwendete hydraulische Durchmesser $d_{h,i}$ wird im Falle einer Ringkanalströmung mit Hilfe der sogenannten $\tau=0$ -Linie definiert /14/. Längs dieser Linie verschwindet die Schubspannung der Gasströmung, so daß keine Reibung auftritt. Abbildung 2 verdeutlicht die Situation.

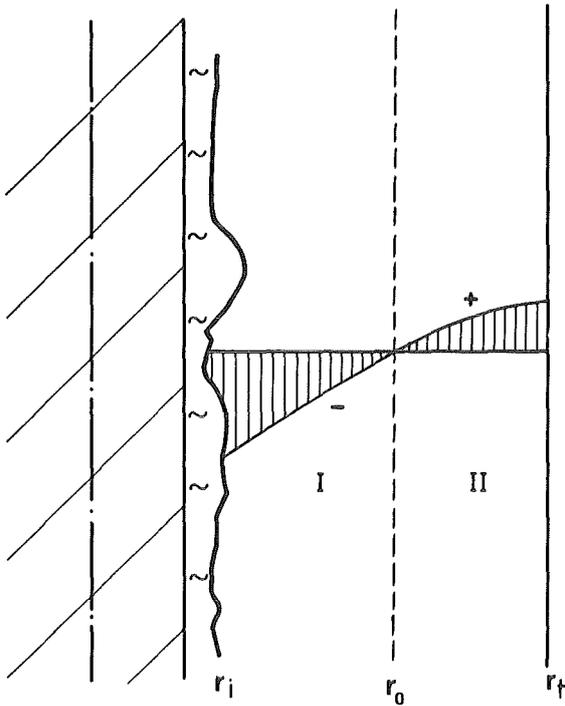


Abb. 2: Lage der ' $\tau=0'$ -Linie in der Kanalströmung

Die Linie r_0 teilt den Gasraum in zwei Zonen I und II auf, in denen bei Vernachlässigung radialer Druckgradienten der axiale Druckabfall gleich ist. Da längs der ' $\tau=0'$ -Linie keine Reibung auftritt, gilt für den Druckabfall in Zone I

$$\Delta P_I / \Delta z = \frac{1}{2} f_i \rho_H u_r^2 / d_{h_i} \quad (13)$$

$$d_{h_i} = \frac{4\pi(r_o^2 - r_i^2)}{2\pi r_i}$$

$$u_r^2 = |u_H - u| (u_H - u)$$

Ebenso folgt für Zone II:

$$\Delta P_{II} / \Delta z = \frac{1}{2} f_t \rho_H u_r^2 / d_{h_t} \quad (13a)$$

$$d_{h_t} = \frac{4\pi(r_t^2 - r_o^2)}{2\pi r_t}$$

f_i und f_t sind die für die Flächen $r=r_i$ und $r=r_t$ gültigen Reibbeiwerte, d_{h_i} und d_{h_t} die hydraulischen Durchmesser der Zonen I und II. Die Bedingung

$$\Delta P_I = \Delta P_{II} \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{2} f_i \rho_H u_r^2 / d_{h_i} = \frac{1}{2} f_t \rho_H u_r^2 / d_{h_t} \quad (13b)$$

ist eine Bestimmungsgleichung für den Radius r_o . Mit ihm können dann die beiden hydraulischen Durchmesser d_{h_i} und d_{h_t} berechnet werden. Im allgemeinen werden jedoch die Reibbeiwerte f_i und f_t selbst vom hydraulischen Durchmesser abhängen, so daß das Verfahren eine Iteration erfordert, die jedoch schnell konvergiert. Mit der Kenntnis von r_o kann schließlich der durch die Reibung an den Grenzflächen der Kanalströmung verursachte Druckabfall berechnet werden. Die Verwendung zweier Durchmesser im Falle einer Ringkanalströmung erlaubt erst die sinnvolle Übertragung von Ergebnissen, die ursprünglich für eine Rohrströmung gewonnen wurden.

3.1.2 Die Wandschubspannung τ_w

Neben der durch die Gasströmung ausgeübten Scherkraft beeinflusst die Schubspannung an der Oberfläche des Brenn- oder Heizstabes am nachhaltigsten die Filmströmung. Sie rührt ebenfalls vom Spannungstensor her. Im Falle einer laminaren Strömung mit angenähert parabolischem Geschwindigkeitsprofil läßt sie sich direkt berechnen. Folgendes Profil erfüllt die nötigen Randbedingungen:

$$u_z(r, z, t) = \alpha \left\{ 1 - \left(\frac{r_i - r}{r_i - r_w} \right)^2 \right\} + \frac{\tau_i}{2\mu_1 r_i} (r^2 - r_w^2) \quad (14)$$

$$\alpha = \left\{ 6(r_i + r_w)u(z, t) - \frac{3\tau_i}{2\pi r_i \mu_1} (r_i + r_w)A \right\} / (5r_i + 3r_w)$$

und

$$u_z(r_w, z, t) = 0$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = \tau_i$$

$$\int_{r_w}^{r_i} 2\pi r u_z dr = Au(z, t)$$

Gegenüber Ref. /1/ treten zusätzliche Terme auf, die den Einfluß der Zweiphasenschubspannung berücksichtigen. Für die Wandschubspannung folgt nun:

Laminare Strömung:

$$\tau_w = g_1 \cdot u - g_2 \cdot \tau_i \quad (15)$$

$$g_1 = \frac{12(r_w + r_i)}{(5r_i + 3r_w)\delta} \mu_1, \quad g_2 = \frac{r_w}{r_i} \left\{ 3 \frac{(r_i + r_w)^2}{(5r_i + 3r_w)r_w} - 1 \right\}$$

Für kleine Filmdicken ergibt sich schließlich

$$\tau_w = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{16}{Re_1} \right) \frac{1}{2} \rho_1 u |u| - \frac{1}{2} \frac{r_w}{r_i} \tau_i \quad (15a)$$

$$Re_1 = \frac{4\delta u}{\nu_1}$$

Der erste Term entspricht bis auf den Vorfaktor dem Fall einer laminaren Rohrströmung. Das zweite Glied berücksichtigt die Fähigkeit des viskosen Filmes, die vom Gas ausgeübte Schleppekraft auch auf andere Flächen zu übertragen.

Bei höheren Filmreynoldszahlen wird die Strömung turbulent. Feind /13/ hat als kritische Reynoldszahl den Wert $Re_{cr} = \left(\frac{u\delta}{\nu_1} \right)_{cr} = 400$ angegeben. Bei turbulenter Strömung bildet sich in Wandnähe eine dünne Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit steil abfällt. Außerhalb dieser Schicht nimmt das Profil einen logarithmischen Verlauf, bis der Einfluß der Gasströmung anfängt zu dominieren. Wegen des steilen Geschwindigkeitsgefälles an der Wand ist die Reibung wesentlich größer als im laminaren Fall. Nach Schlichting /15/ kann man unter Vernachlässigung der Krümmung der Wand schreiben:

Turbulente Strömung:

$$\tau_w = \frac{0.0128}{Re_\theta^{1/4}} \cdot \rho_1 |u| u \quad (15b)$$

Re_θ ist dabei die mit der Impulsverlustdicke θ gebildete Reynoldszahl:

$$\text{Re}_\theta = \frac{u\theta}{v_1} \quad (16)$$

Die Impulsverlustdicke ist eine charakteristische Größe der Grenzschicht. Mit Hilfe des Impulssatzes für die ebene Grenzschichtströmung läßt sich für sie eine Differentialgleichung gewinnen /15/:

$$\frac{\tau_w}{\rho_1} = \frac{d}{dz} (u^2\theta) + \delta^* u \frac{du}{dz} \quad (17)$$

δ^* ist dabei die Verdrängungsdicke mit ähnlich charakteristischer Bedeutung für die Grenzschicht wie θ . Unter vereinfachenden Annahmen gibt Schlichting /15/ folgende analytische Lösung an:

$$\theta \cdot \text{Re}_\theta^{1/4} = u^{-4} \cdot (c_1 + \frac{5}{4} \cdot 0.0128 \cdot \int_{z_u}^z u^4 dz) \quad (18)$$

c_1 erhält man dabei durch Anpassung an die laminare Grenzschicht am Umschlagspunkt z_u . Gl. (18) wurde für die ebene Plattenströmung abgeleitet. Bei den Nachrechnungen der Versuche von Casal /3/ lagen ähnlich einfache geometrische Verhältnisse vor, so daß Gl. (18) verwendet werden konnte. Bei komplizierteren Verhältnissen bleibt der Ansatz nach Gl. (15b) zwar gültig, die Impulsverlustdicke ist dann aber nicht mehr durch Gl. (18) gegeben. Man kann sich aber an den Verhältnissen der turbulenten Rohrströmung orientieren, wo gilt:

$$\tau_w = 0.316 \cdot \text{Re}_1^{-1/4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \rho_1 |u| u \quad (15c)$$

Wären Gl. (15b) und (15c) äquivalent, so würde folgende Beziehung zwischen θ und δ gelten:

$$\theta = 0.0441 \cdot \delta \quad (19)$$

Die Verwendung einer Impulsverlustdicke im Zusammenhang mit dem Impulssatz der Grenzschichtströmung erlaubt jedoch eine flexiblere Handhabung der turbulenten Wandschubspannung. Für spezielle Fälle lassen sich unter Umständen genauere Beziehungen als Gl. (15c) finden.

Eine weitere Komplikation tritt auf, wenn die Strömung über wiedererstartete Schmelze führt. Der Untergrund kann dann sehr unregelmäßig sein, so daß sich eine Rauigkeitsströmung einstellt. Nach Schlichting /15/ sollte gelten:

Rauigkeitsströmung:

$$\tau_w = c_f \cdot \frac{1}{2} \rho_l |u|u \quad (15d)$$

$$c_f = (2.87 + 1.58 \cdot \log_{10} Z/k_s)^{-2.5}$$

Z bedeutet den Abstand von der ersten Rauigkeitsstelle. k_s ist eine äquivalente Sandrauigkeit. Tritt eine extreme Rauigkeitsstelle auf, wie z. B. bei schroffen Ecken an den Rändern der Schmelzzone, so wird c_f auf einen hohen Wert gesetzt (z. B. $c_f = 0.5$).

Grundlegend andere Verhältnisse liegen bei schlechter Benetzung von Schmelze und Untergrund vor. In diesem Fall kann die wirkliche Kontaktfläche sehr viel kleiner sein als die maximal mögliche. Timsit /16/ betrachtet die Topologie der Mikrorauigkeiten und zeigt, daß die flüssige Phase Menisken zwischen den einzelnen Erhebungen ausbildet und bei nicht zu hohen Drücken nicht in die Täler eindringt. Es ist dann zu erwarten, daß die Wandschubspannung wesentlich reduziert wird. Quantitative Angaben liegen dem Autor jedoch nicht vor.

3.1.3 Die Wärmeströme

Ein wichtiger Aspekt der Hüllrohrdynamik ist durch das Ausfrierverhalten der Schmelze gegeben. Dadurch werden wesentlich die Dimensionen einer partiellen oder totalen Blockade beeinflusst mit all den Konsequenzen für den weiteren Verlauf des Störfalles. Einen großen Einfluß übt dabei der radiale Wärmestrom an der Filminnenseite aus, der Wärme aus der heißen Schmelze in den kalten Bereich des Trägerstabes transportiert. Für ihn lautet ein üblicher Ansatz

$$q_w = \kappa_w (T_f - T_c) \quad (20)$$

T_f ist die mittlere Temperatur der Schmelze, T_c eine Referenztemperatur im Inneren des Stabes und κ_w der Wärmeübergangskoeffizient. Es wird im folgenden der Fall betrachtet, daß T_c die Temperatur des kalten und noch intakten Hüllrohres ist und eine Schicht heißer Schmelze darüberliegend Wärme in den kalten Bereich abgibt. Um κ_w zu bestimmen, wird sodann ein Modellproblem analytisch gelöst, das den Wärmeübergang zwischen zwei Temperaturebenen betrachtet. Der Bereich der kalten Temperatur wird dabei als einseitig unendlich ausgedehnt betrachtet. Es werden ferner konstante Stoffdaten für beide Temperaturzonen verwendet. Die Details der Rechnung sind im Anhang A1 wiedergegeben. Das Ergebnis lautet

$$\kappa_w = \sqrt{\frac{\rho_1 c_p \lambda}{\pi D t}} \quad (21)$$

Dabei sind ρ_1 die Dichte, λ die Wärmeleitfähigkeit und c_p die Wärmekapazität des Hüllrohres. Dt ist das betrachtete Zeitintervall.

Die Gleichungen (20) und (21) definieren den radialen Wärmestrom zwischen heißer Schmelze und kaltem Trägerstab. Die im Zeitraum Dt transportierte Energie variiert dabei mit $Dt^{1/2}$.

Ein analoger Ansatz zu Gl. (20) gilt natürlich auch im Bereich der Heizzone, wo das Hüllrohr durch den Heizstab aufgeheizt wird. Da jedoch die Temperaturen der Schmelze an sechs Positionen gemessen wurden, wurde auf eine detaillierte Temperaturberechnung verzichtet und der zeitliche Temperaturgradient von

$$\frac{dT_f}{dt} / \text{exp.} = 108 \frac{^{\circ}\text{K}}{\text{sec}} \quad (26)$$

direkt zur Temperaturintegration verwendet.

Es bleibt noch, den Wärmestrom aus der Schmelze in den Kühlkanal anzugeben. Er ist durch

$$q_i = \kappa_i (T_g - T_f) \quad (27)$$

definiert. T_g ist die mittlere Temperatur der Gasströmung und κ_i der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Schmelze und Gasströmung. κ_i folgt dabei aus der Nusseltzahl,

$$Nu = \frac{\kappa_i \cdot d_{hi}}{\lambda_g}, \quad (28)$$

für die gilt:

$$Nu = 0.024 \cdot Re_g^{0.8} \cdot Pr^{0.45} \quad (28a)$$

λ_g ist die Wärmeleitfähigkeit des Gases, und Pr bedeutet die Prandtl-Zahl.

3.1.4 Die Gleichungen der Gasströmung

Die Beschreibung der Gasströmung ist auf einem einfachen Niveau gehalten. Aufgrund des signifikanten Dichteunterschiedes zwischen Gas und Fluid folgt die Gasströmung geometrischen Änderungen, wie sie durch die Filmströmung vorgegeben werden, sehr rasch. Über die interessierenden Zeiträume hinweg ist die Strömung daher im wesentlichen stationär. Ferner können Dichteänderungen in der Argongasströmung vernachlässigt werden, da die Machzahl klein ist ($c = 307$ m/sec, $M \lesssim 0.26$) und die Aufheizung längs des Strömungskanals gering ist. Somit lauten die Grundgleichungen:

$$\rho_g = \text{const.}$$

$$\frac{d}{dz} A_g u_g = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{\rho_g} \frac{dp_g}{dz} = \frac{1}{A_g} \frac{d}{dz} A_g u_g^2 - g - \frac{1}{2} f_i u_g^2 / d_{hi} - \frac{1}{2} k u_g^2 \quad (30)$$

Der Druckverlust berücksichtigt die Einflüsse von Konvektion, Gravitation und Reibung an Berandungen. Der letzte Term gibt den Druckverlust an, der

durch die irreversible Umverteilung der Gasströmung bei plötzlichen Änderungen der Kanalgeometrie entsteht. Es gilt nach Galan Erro /17/:

$$k = \left(1 - \frac{A_{g-}}{A_{g+}}\right)^2 \quad \text{für Expansionen ,} \quad (31)$$

$$k = \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2 ,$$

$$c = 0.63 + 0.37 \cdot \left(\frac{A_{g-}}{A_{g+}}\right)^3 \quad \text{für Kontraktionen .}$$

A_{g+} , A_{g-} sind der größere bzw. kleinere Strömungsquerschnitt bei den Kanaländerungen. In der Strömungsquerschnittsfläche wird ferner berücksichtigt, daß sich die Gasströmung hinter einer Kontraktion erst allmählich wieder anlegt. Nach Hütte /18/ ist hierzu ein Wegstück der Länge des vierfachen Durchmessers des Endquerschnitts nötig.

3.1.5 Diskussion der Grundgleichungen

Ein typisches Phänomen der Hüllrohrbewegung ist das Auftreten von Wellen. Diese tragen wesentlich zum Materialtransport bei. Auch sind sie Voraussetzung für das Versprühen des Filmes ('entrainment'). Im folgenden sollen die Grundgleichungen in eine kompaktere Form gebracht werden, und dann eine lineare Wellengleichung abgeleitet werden. Lösungen sind sowohl dynamische Wellen als auch sogenannte Kontinuitätswellen. Bei abwärts fließenden Filmen sind letztere auch als 'roll waves' bekannt.

Das Gleichungssystem soll für den Grenzfall verschwindender Krümmung des Trägerpins niedergeschrieben werden. Die Variable A geht dann in die Filmdicke h über. Tritt zunächst kein Versprühen des Filmes auf, so folgt aus Gl. (3) und (4):

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_z hu &= 0 \\ \rho_1 (\partial_t hu + \partial_z hu^2) &= -h(\rho_1 g + \partial_z p_1) + \tau_i - \tau_w \end{aligned} \quad (32)$$

mit $p_1 = p_g + \sigma \partial_z^2 h$

und $\frac{\partial p_g}{\partial z} = -\rho_g g - \frac{4}{d_{h_i}} \tau_i + \rho_g u_g^2 \frac{1}{h_g} \partial_z h$

h_g ist die Breite des Gaskanals, $\sigma \partial_z^2 h$ der Kapillardruck. Irreversible Druckverluste werden vernachlässigt.

Die Impulsgleichung läßt sich nun schreiben

$$\rho_1 (\partial_t u + u \partial_z u) = \check{g} + f(u, h) + f_V \partial_z h - \sigma \partial_z^3 h \quad (33)$$

mit $\check{g} = -g(\rho_1 - \rho_g)$

$$f(u, h) = \frac{1}{h} (\tau_i + \frac{4h}{d_{h_i}} \tau_i - \tau_w)$$

$$f_V = -\rho_g u_g^2 / h_g$$

f_V samt ρ_g , u_g , h_g werden im folgenden als konstant angesehen.

Eine lineare Störungsentwicklung um den homogenen stationären Gleichgewichtszustand

$$u = 0, \quad h = h_0, \quad f + \check{g} = 0 \quad \text{liefert}$$

$$\partial_t h' + h_0 \partial_z u' = 0$$

$$\rho_1 \partial_t u' = f_u u' + f_h \cdot h' + f_V \partial_z h' - \sigma \partial_z^3 h' \quad (33a)$$

Dabei sind die fluktuierenden Variablen wie folgt definiert:

$$h = h_0 + h', \quad u = u'$$

f_u , f_h sind die partiellen Ableitungen von $f(u, h)$.

Durch Elimination von u' folgt

$$\rho_1 \partial_t^2 h' - f_u \partial_t h' + h_o f_h \partial_z h' + h_o f_v \partial_z^2 h' - \sigma h_o \partial_z^4 h' = 0 \quad (34)$$

Mit den Definitionen

$$u_w = - h_o \frac{f_h}{f_u}$$

$$c = \left(- \frac{h_o}{\rho_1} f_v \right)^{1/2}$$

$$B = - \frac{f_u}{\rho_1}$$

ergibt sich schließlich die lineare Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_z^2) h' + B (\partial_t + u_w \partial_z) h' - \frac{\sigma h_o}{\rho_1} \partial_z^4 h' = 0 \quad (34a)$$

Der erste Differentialoperator beschreibt dynamische Wellen, die sich beidseitig mit den Geschwindigkeiten $\pm c$ ausbreiten, der zweite dagegen Kontinuitätswellen, die sich mit der Geschwindigkeit u_w fortpflanzen. B ist eine Dämpfungskonstante, die üblicherweise positiv ist. Als Lösungen kommen Ausdrücke der Form

$$h' = h_1 e^{at} e^{i\omega(t-z/v)} \quad (35)$$

in Frage. Einsetzen in Gl. (34a) liefert

$$a = \frac{B}{2} \left(\frac{u_w}{v} - 1 \right), \quad (35a)$$

sowie die Dispersionsrelation

$$- \frac{\sigma h_o}{\rho_1} \frac{\omega^4}{v^4} + \omega^2 \left(\frac{c^2}{v^2} - 1 \right) + \frac{B^2}{4} \left(\frac{u_w^2}{v^2} - 1 \right) = 0 \quad (35b)$$

Oszillatorische Lösungen existieren nur, falls $\omega^2 > 0$. Diese Forderung stellt eine Bedingung an die möglichen Wellengeschwindigkeiten v dar, so daß nur für

$$v^2 < u_w^2 \quad \text{und} \\ u_w^2 < v^2 < c^2 - B \sqrt{\sigma h_o / \rho_1} \quad (36)$$

Wellenlösungen existieren. Die Stabilität dieser Wellen wird dabei ganz durch das Verhältnis u_w/v bestimmt. Für $a > 0$ wachsen die Amplituden an, und die Wellen sind instabil. $a < 0$ deutet gedämpfte Wellen an. Ist $B=0$ und $v^2 < c^2$, so liegen ungedämpfte dynamische Wellen vor. Für diese gilt $w^2 = \rho_1 / \sigma h_o \cdot (c^2 v^2 - v^4)$. Andererseits erzwingen sehr nieder frequente Wellen $v^2 \approx u_w^2$. Diese Wellen pflanzen sich ebenfalls ungedämpft ($a \approx 0$) als Kontinuitätswellen fort.

Eine etwas andere Situation stellt sich dar, wenn man die Oberflächenspannung vernachlässigt. Die Bedingung $\omega^2 \geq 0$ erfordert dann, daß v^2 zwischen u_w^2 und c^2 liegt. Wenn u_w^2 größer als c^2 ist, ist $|u_w/w|$ größer als eins, so daß diese Wellen bei gleichsinniger Ausbreitungsrichtung anwachsen. Die Stabilität der Strömung ist also ganz durch die relative Größe der Kontinuitäts- und dynamischen Wellengeschwindigkeiten gegeben.

Zur Bestimmung der Größen u_w und B muß die Funktion $f(u, h)$ spezifiziert werden. Vernachlässigt man die Abhängigkeit der Zweiphasenschubspannung von u , so kann man schreiben:

$$\tau_i = \tau_i^0 + \tau_i^1 \cdot h \quad (37)$$

Die Wandschubspannung soll nur für die beiden Fälle der laminaren und turbulenten Strömung betrachtet werden. Das parabolische Geschwindigkeitsprofil liefert für $r_i \approx r_w$

$$\tau_w = 3\mu_1 \frac{u}{h} - \frac{1}{2} \tau_i \quad (\text{laminare Strömung}), \quad (38)$$

während im Falle turbulenter Strömung angenähert gilt

$$\tau_w = ct \cdot \frac{1}{2} \rho_1 |u| u \quad (\text{turbulente Strömung}) \quad (38a)$$

ct bedeutet eine Konstante ($ct \approx 0.005$).

Damit folgt

$$f = \begin{cases} \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} \tau_i + \frac{4h}{d_{h_i}} \tau_i - 3\mu_1 \frac{u}{h} \right) & \text{laminar} \\ \frac{1}{h} \left(\tau_i + \frac{4h}{d_{h_i}} \tau_i - \frac{1}{2} \text{ct}\rho_1 |u| \right) & \text{turbulent} \end{cases} \quad (39)$$

$$f_u = \begin{cases} -3\mu_1 / h^2 & \text{laminar} \\ -\text{ct}\rho_1 |u| / h & \text{turbulent} \end{cases} \quad (40)$$

$$f_h = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\tau_i^0}{h^2} + \frac{4}{d_{h_i}} \tau_i^1 + 6\mu_1 \frac{u}{h^3} & \text{laminar} \\ -\frac{\tau_i^0}{h^2} + \frac{4}{d_{h_i}} \tau_i^1 + \frac{1}{2} \text{ct}\rho_1 |u| / h^2 & \text{turbulent} \end{cases} \quad (41)$$

$$u_w = \begin{cases} 2u - \frac{\tau_i^0}{2\mu_1} \cdot h + \frac{4}{3} \frac{\tau_i^1}{\mu_1} \frac{h^3}{d_{h_i}} & \text{laminar} \\ \frac{1}{2} u - \frac{\tau_i^0}{\text{ct}\rho_1 |u|} + \frac{4}{3} \frac{\tau_i^1}{\text{ct}\rho_1 |u|} \frac{h^2}{d_{h_i}} & \text{turbulent} \end{cases} \quad (42)$$

Die durch die Zweiphasenschubspannung bedingten Terme egalisieren sich im wesentlichen. Läßt man sie beiseite und beachtet ferner, daß das gewählte Koordinatensystem die stationäre Filmgeschwindigkeit zum Verschwinden bringt, so erhält man nach Rücktransformation die für fallende Filme üblichen Relationen /10/:

$$U_w = u + u_w = \begin{cases} 3 u & \text{laminar} \\ 3/2 u & \text{turbulent} \end{cases} \quad (42a)$$

Für die dynamische Wellengeschwindigkeit ergibt sich weiterhin

$$c = \left(\frac{\rho_g}{\rho_1} u_g^2 \frac{h}{h_g} \right)^{1/2} \quad (43)$$

Ebenso findet man B zu

$$B = \begin{cases} 3\nu_1/h^2 & \text{laminar} \\ ct|u|/h & \text{turbulent} \end{cases} \quad (44)$$

Die obige Diskussion zeigt, daß das linearisierte Filmgleichungssystem sowohl dynamische als auch Kontinuitätswellen beschreibt. Beide Wellentypen sind in einem eindimensionalen Modell möglich. Da dynamische Wellen durch einen Differentialoperator zweiter Ordnung beschrieben werden, breiten sich diese Wellen beidseitig aus. Kontinuitätswellen dagegen propagieren nur in eine Richtung, da sie durch einen Differentialoperator erster Ordnung beschrieben werden. Diese Eigenschaft bringt sie in Verbindung zu den experimentell beobachteten massiven Störwellen, die ebenfalls nur in eine Richtung propagieren. Wegen der Größe der Störwellen ist sicher die Massenerhaltung eine wichtige Bedingung, die direkt auf eine Erhaltungsgleichung führt, die Differentialausdrücke erster Ordnung enthält. Somit ist zu erwarten, daß lineare Kontinuitätswellen eine erste Approximation zu den Störwellen darstellen. Eine Verfeinerung dieses Gedankens erhält man, wenn man auf eine konstante Wellengeschwindigkeit verzichtet, und anders als in der linearisierten Näherung eine nichtlineare Wellengleichung betrachtet. Diese folgt aus der Kontinuitätsgleichung, sobald eine feste Beziehung zwischen der Filmgeschwindigkeit u und der Filmdicke h besteht. Es soll also angenommen werden, daß die Impulsgleichung der Filmströmung auf eine einfache Relation

$$u = u(h) \quad (45)$$

führt. Eine solche Beziehung gilt z. B. für einen abwärts fließenden laminaren Film im eingelaufenen Zustand, wo nach Ref. /10/ gilt

$$u(h) = - \frac{1}{3\mu_1} \{g(\rho_1 - \rho_g)h^2\} \quad (45a)$$

Durch einfache Manipulationen ergibt sich nun aus der Kontinuitätsgleichung, daß

$$\partial_t h + \partial_z hu = \partial_t h + (u+h\partial_h u)\partial_z h = 0 \quad (46)$$

ist. Bestimmt man $\partial_h u$ aus Gl. (45a), so folgt die nichtlineare Wellengleichung

$$\partial_t h - c(h) \partial_z h = 0 \quad (46a)$$

$$c(h) = \frac{1}{\mu_1} g(\rho_1 - \rho_g) \cdot h^2 \quad (47)$$

Dabei ist $c(h)$ die Wellengeschwindigkeit, die nun selbst von der Filmdicke h abhängt. Je größer h ist, desto schneller propagieren die entsprechenden Amplituden. Anders als bei konstanter Wellengeschwindigkeit verändern sich nun die Wellenprofile, und es ist möglich, daß sich Wellen brechen. Dieser Zustand ist erreicht, wenn die räumlichen Gradienten sehr steil werden und im Grenzfall unendlich groß werden. Es ist klar, daß unter diesen extremen Bedingungen eine einfache Beziehung nach Gl. (45a) ihre Gültigkeit verliert, jedoch hat jede Nichtlinearität die Tendenz, zu steilen Gradienten zu führen. Ändert man nun Gl. (45a) ab, indem man auch einen Diffusionsterm oder höhere Ableitungen zuläßt, so erhält man aus der Literatur bekannte Gleichungen wie die Burger-Gleichung oder die Korteweg-de Vries-Gleichung /19/. Diese beschreiben sehr verschiedenartige und komplexe Wellenphänomene. Eine interessante Variante sind die Soliton-Wellen, die ohne Formänderung propagieren /20,21,22,23/. In diesem Falle balancieren sich gerade nichtlineare und Diffusionseffekte. Alle diese Wellengleichungen können als mehr oder weniger fortentwickelte Approximationen zu den experimentell beobachteten Wellen wie z. B. auch den massiven Störwellen bei Filmströmungen betrachtet werden. Die lineare Wellengleichung (34a) ist dabei nur eine erste Näherung an allgemeinere nichtlineare Gleichungen für die Filmströmung /20,21/.

Das Problem der Störwellen wurde mit einiger Ausführlichkeit behandelt, da diese offensichtlich eine Rolle beim Versprühen des Filmes spielen. Häufig wird bei den Versuchen Casals /3/ beobachtet, daß Tropfen von den Wellen-

kämmen der Störwellen abgelöst werden oder ganze Teile der Störwelle versprühen. Diese Vorgänge scheinen zusätzlich auch einen weiteren Wellentypus, die Kapillarwellen, zu involvieren. Diese sind Oberflächenwellen, die auch auf dem Rücken der Störwellen vorkommen. Kapillarwellen sind zweidimensionale Wellen, bei denen die Oberflächenspannungskraft die harmonische Wellenbewegung induziert. Solche Kapillarwellen können auf Grund der Kelvin-Helmholtz-Instabilität instabil werden und eventuell zerstäuben ('entrainment') /24/. Die Störwellen liefern dabei gerade die notwendige Flüssigkeitsmenge, die über den Instabilitätsmechanismus versprühen kann. Eine ausführlichere Diskussion dieser Phänomene soll dem nächsten Kapitel vorbehalten bleiben. Es werden dann auch Versprühraten ('entrainment'-Raten) sowie die durch das Versprühen bedingten Impulsverlustraten ('entrainment'-Geschwindigkeit u_e) spezifiziert. Mit den in den Abschnitten 3.1.1 bis 3.1.4 dargelegten Ansätzen sind die Gleichungen des Filmmodelles für den Fall vollständig, daß kein Versprühen des Filmes auftritt.

3.2 Das 'entrainment'-Modell

3.2.1 Wellenphänomene der Filmströmung

Das Versprühen großer Teile eines Filmes ('entrainment') ist eng mit den charakteristischen Wellenstrukturen einer Filmströmung verknüpft. Es ist deshalb für das Verständnis des Versprühvorganges vorteilhaft, die elementaren Wellenerscheinungen einer Filmströmung besser zu verstehen. Mit Hilfe der Filmaufnahmen, die von den Versuchen Casals /3/ gemacht wurden, ist leider eine quantitative Auswertung der Filmströmung und insbesondere der Phasengrenzfläche kaum möglich, da die Phasengrenze nicht deutlich zu identifizieren ist. Es gibt jedoch experimentelle Arbeiten anderer Autoren /6,7,8/ zum Verhalten welliger Filme bei Einfluß einer Gasströmung, die zu Ergebnissen führen, die zumindest qualitativ auch für die Versuche Casals /3/ bestätigt werden können. Auf diese Arbeiten soll im folgenden näher eingegangen werden. Die Experimente basieren im wesentlichen auf der präzisen Messung der Filmdicke mittels einer elektrischen Leitfähigkeitsmessung. Dadurch kann die Struktur der Filmoberfläche sehr genau verfolgt werden. Als strömendes Fluid wird dabei Wasser verwendet, das an zwei parallelen Wänden abwärts fließt. Gleichzeitig wird ein Luftstrom gleichgerichtet mit der Filmströmung nach unten geführt. Die Ergebnisse dieser Arbeiten von Telles, Chu und Dukler /6,7,8/ können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Die Filmströmung ist ihrem Wesen nach stochastisch. Hierzu geben einmal die durch die Gasströmung eingebrachten Fluktuationen Anlaß, aber auch ein System ohne Gasphase hat keine glatte Oberfläche, sondern unregelmäßige Wellenstrukturen auf der Oberfläche. Da die Filmströmung stochastisch ist, sind die Begriffsbildungen der Statistik geeignete Grundlagen für die Analyse der experimentellen Ergebnisse. Demzufolge stellen die obigen Autoren ihre Daten in Form von spektralen Dichten und Wahrscheinlichkeitsverteilungen dar. Diesen entnehmen sie Mittelwerte und mittlere Schwankungsquadrate und vergleichen diese mit theoretischen Vorhersagen.

- Die Filmströmung stellt ein Zweiwellen-System dar. Es gibt große Störwellen, die einen beträchtlichen Teil der Flüssigkeit transportieren. Diese behalten ihre Form und Geschwindigkeit im wesentlichen bei. Solche Störwellen propagieren unabhängig von einander und sind im allgemeinen deutlich von einander getrennte Wellenphänomene. Der Abstand zwischen ihnen ist eine zu-

fällige Größe. Daneben gibt es auf der gesamten Oberfläche des Filmes kleine Kapillarwellen, die schon nach kurzen Distanzen wieder ihre Identität verlieren. Sie werden stetig von neuem erzeugt. Eventuell wachsen sie auch an und werden als Tropfen abgerissen /24/.

- Die vielen experimentellen Daten führen zu folgendem qualitativem Bild der Filmströmung, das in Abb. 3 schematisch dargestellt ist:

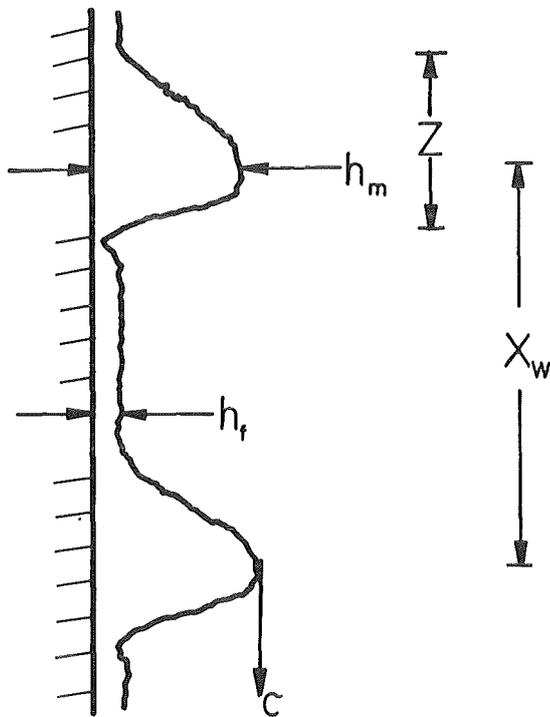


Abb. 3: Schematische Skizze der welligen Filmströmung

Typische Größen skalieren dabei wie folgt:

Höhe dünner Film h_f	:	1E	$((2-3.5) \cdot 10^{-2} \text{ cm})$
Wellenberghöhe h_m	:	5E	$(\sim 0.1 \text{ cm})$
Breite des Wellenhügels Z	:	50E	$((1.3-7.) \text{ cm})$
Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Wellenhügeln X_w	:	$\sim 100E$	(25 cm)
Wellengeschwindigkeit c	:		$(11-33 \text{ cm/sec})$

- Das Wellenprofil der Störwellen kann mit Hilfe der ersten beiden Glieder einer Gram-Carlier-Reihe approximiert werden:

$$h(z) = h_f + m_0 Z_0(z/Z) + m_1 Z_1(z/Z) \quad (48)$$

$$Z_0(z/Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (z/Z)^2\right)$$

$Z_i(z/Z)$: i -te Ableitung von Z_0

Die Größen h_f , m_0 und m_1 sind Entwicklungskoeffizienten und werden zusammen mit Z über verschiedene Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion bestimmt. Gl. (48) stellt also das Profil einer mittleren Welle dar (Ensemble-Mittelung). Die Profile sind asymmetrisch, da die Wellenfront steiler abfällt als der Wellenrücken. Weiterhin gibt es einen kleinen Einbruch vor der Wellenfront. Diese Eigenschaften sind in Übereinstimmung mit den visuellen Beobachtungen der Autoren von /6,7,8/.

Nachdem bereits im vorigen Kapitel detaillierter auf die großen Störwellen eingegangen worden ist, sollen im folgenden einige Charakteristiken der Kapillarwellen näher betrachtet werden. Ihr Entstehungsmechanismus kann mit der Kelvin-Helmholtz-Instabilität erklärt werden /25-30/. Die destabilisierende Kraft rührt dabei von der Relativgeschwindigkeit der flüssigen und gasförmigen Phase her. Besteht eine kleine Störung, so führt die Relativgeschwindigkeit zu Druckdifferenzen über der Oberfläche, so daß sich über einem Wellenberg ein Unterdruck und in einem Wellental ein Überdruck bildet. Diese Druckvariationen finden auch in der Welle statt, indem sich in einem Wellenberg ein Überdruck und in einem Wellental ein Unterdruck einstellt. Nun liegt also an der Oberfläche eine Druckdifferenz an, die durch die Oberflächenspannung balanciert werden muß:

$$p_l - p_g = \sigma \cdot \chi \quad (49)$$

χ ist dabei die Krümmung der Oberfläche. Ist dies nicht im ausreichenden Maß der Fall, entwickelt sich eine Instabilität. Die Viskosität ist dabei keine stabilisierende Kraft, sondern wirkt sich nur auf kritische Wellenlängen und Anwachsraten aus. Neben vielen anderen Autoren haben auch Tatterson /31/ und Taylor /26/ diese Instabilität berechnet.

Nach Taylor /26/ ist die am schnellsten anwachsende Wellenlänge λ_m durch

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} = \rho_g u_g^2 \frac{\zeta(\theta)}{\sigma} \quad (50)$$

gegeben. Dabei ist $\zeta(\theta)$ eine schwache Funktion von

$$\theta = \frac{\rho_1}{\rho_g} \frac{\sigma^2}{\mu_1^2 u_g^2}, \quad \zeta(\theta) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\theta^{-0.3}} \quad (51)$$

Hewitt /25/ findet für den Fall verschwindender Viskosität

$$k_m \approx \frac{1}{2} (u_g - u)^2 \frac{\rho_g}{\sigma} \quad (52)$$

Für die am schnellsten anwachsende Wellenlänge kann man nach Taylor auch eine Anwachsrate angeben: Sie ist proportional zu

$$e_m^{\alpha t} \quad \text{mit} \quad (53)$$

$$\alpha_m = 2\rho_g u_g^3 \left(\frac{\rho_g}{\rho_1}\right)^{1/2} \cdot \frac{\zeta_m(\theta)}{\sigma}$$

$$\zeta_m(\theta) \approx \frac{0.192}{1+\theta^{-0.5}} \quad (54)$$

Nimmt man typische Werte des bei den Versuchen Casals /3/ überdeckten Parameterbereiches an, so folgt für die am schnellsten anwachsenden Kapillarwellen:

$$3 \cdot 10^{-2} \text{ cm} > \lambda_m < 3 \cdot 10^{-1} \text{ cm} \quad (55)$$

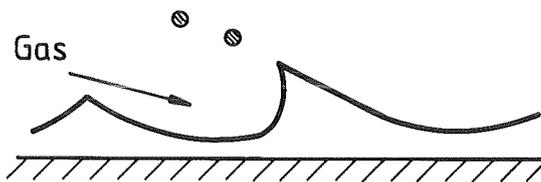
Diese Wellenlängen sind wesentlich kleiner als die Breite der Störwellen ($\lambda_v > 1.3 \text{ cm}$). Es ist somit gut möglich, daß diese Wellen auch auf den Kämmen der massiven Störwellen vorhanden sind. Nach Beobachtungen von Woodmansee /24/ sind es gerade diese Oberflächenwellen, die wesentlich zum 'entrainment' beitragen. Darauf soll bei den anschließend zu besprechenden Mechanismen für das Versprühen einer Filmströmung näher eingegangen werden.

3.2.2 Mögliche Mechanismen für das Versprühen einer Filmströmung

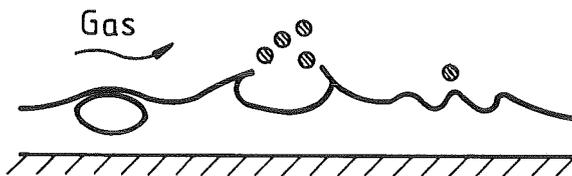
Nach den eingehenden Untersuchungen von Ishii und Grolmes /33/ gibt es mindestens fünf Mechanismen, die für das Versprühen eines Filmes ('entrainment') verantwortlich sein können. Diese sind in Abb. 4 als Fälle (1-5) schematisch dargestellt. Einen weiteren Mechanismus deutet Woodmansee /24/ auf Grund direkter visueller Beobachtungen an. Dieser basiert auf der Kelvin-Helmholtz-Instabilität kleiner Kapillarwellen und ist als Fall 6 (a-c) in Abb. 5 schematisch skizziert. Liegt schlechte Benetzung zwischen Schmelze und Trägerstab vor, so scheinen andere Mechanismen als die obigen zu dominieren. Darauf soll gesondert in einem nachfolgenden Abschnitt eingegangen werden. An dieser Stelle werden nur diejenigen Fälle besprochen, die typisch sind beim Vorliegen einer Filmströmung.



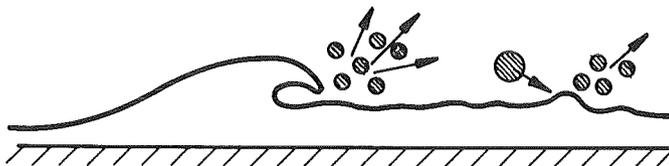
Fall 1:
'Roll wave'



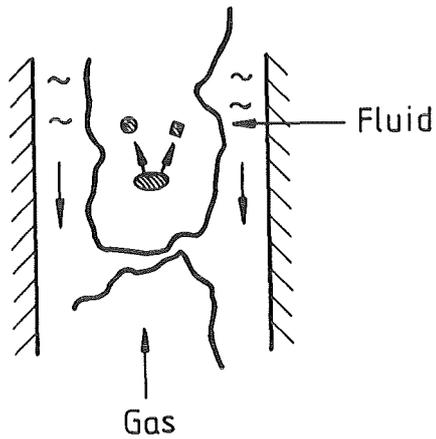
Fall 2:
'wave undercut'



Fall 3:
'bubble burst'

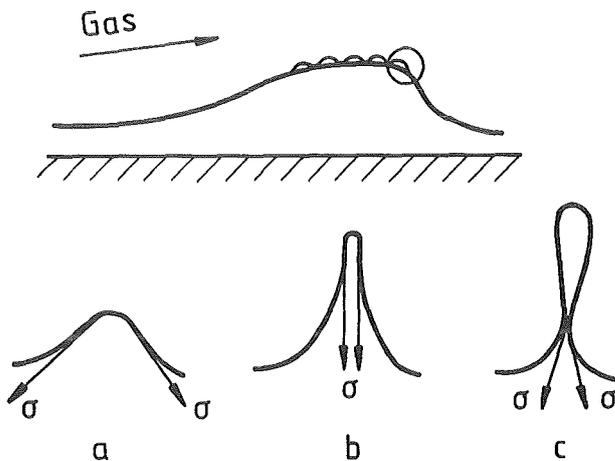


Fall 4:
'Liquid impingement'



Fall 5:
'Liquid bulge
disintegration'

Abb. 4: 'entrainment'-Mechanismen nach Ishii und Grolmes /33/



Fall 6:
'Kelvin-Helmholtz-
instability'
a-c: 'Destabilization
of a capillary
wave'

Abb. 5: 'entrainment'-Mechanismus nach Woodmansee /24/

Im Fall 1 wird Fluidmasse durch die Scherkräfte des Gases von der Oberfläche der großen Störwellen abgetrennt. Es muß dabei die restaurierende Kraft der Oberflächenspannung überwunden werden.

Im Fall 2 unterläuft die Gasströmung eine Welle und löst dadurch Tropfen ab.

Der Fall 3 zeigt eine Blase, die in der Filmströmung gefangen ist und durch das Platzen ebenfalls Tropfen auslöst.

Wenn eine Welle sich bricht oder andere Fluidpartikel auf die Filmoberfläche auftreffen, können durch den Aufprall Tropfen entstehen.

Der fünfte Fall zeigt eine enge Kanalströmung, wo es durch das Auftreten von Wellen zu einer Brückenbildung kommt. Der Staudruck des Gases führt dann zur Dispersion der Brücke. Diese Situation kann besonders für enge Kanäle wie z. B. die Reaktorkühlkanäle relevant sein. Liegt eine stagnierende Filmströmung vor,

ist das Entstehen solcher Brücken wahrscheinlich, da dieser Strömungsbereich sehr instabil ist und das Entstehen großer Wellen induziert.

Der in Fall 6, (a-c), skizzierte Mechanismus betrachtet kleine Kapillarwellen, die sich auf dem Rücken einer großen Störwelle gebildet haben und auf Grund der Kelvin-Helmholtz-Instabilität instabil werden. Sie wachsen an und können sich u. U. so stark verformen, daß zunächst der in Bild (b) gezeigte metastabile Zustand entsteht. Führen die normalen Druckgradienten zu einer weiteren Verformung, wie in Bild (c) angedeutet wird, so nimmt der Einfluß der Oberflächenspannungskräfte stetig ab, so daß schließlich die destabilisierte Welle abreißen kann. Woodmansee /24/ beschreibt diesen Vorgang auf Grund direkter visueller Beobachtungen wie folgt: "However, most of the droplet removal is observed to occur by the rapid acceleration, lifting and subsequent shattering of ripples present in the roll wave structure. These unstable ripples appear behind the front of the roll waves."

Die obigen Ausführungen zeigen ein Spektrum möglicher Mechanismen für das Versprühen einer Filmströmung auf. Welcher Mechanismus tatsächlich unter gegebenen experimentellen Bedingungen dominiert, ist eine offene Frage. Ishii und Grolmes /33/ ziehen schließlich per Postulat nur die Fälle 1 und 2 in die engere Betrachtung. Es ist jedoch zu erwarten, daß in den engen Reaktorkühlkanälen die in Fall 5 illustrierte Dispersion einer Brücke ein wichtiger Mechanismus für das Versprühen des Hüllrohres darstellt. Für die Versuche Casals /3/ gibt es einen experimentellen Hinweis, der besonders das Versprühen durch Kapillarwellen favorisiert. Es wird häufig beobachtet, daß sich die abgelösten Tropfen rasch wieder an der gegenüberliegenden Plexiglaswand anlagern und nicht aus der Teststrecke ausgetragen werden. Diese Tatsache bedeutet, daß die Tropfen eine nicht unerhebliche radiale Geschwindigkeit besitzen können. Solch eine Geschwindigkeitskomponente, die normal zur Filmoberfläche gerichtet ist, folgt nun auf recht natürliche Weise aus der Kelvin-Helmholtz-Instabilität, wo der Tropfenabriß durch normal gerichtete Druckgradienten ermöglicht wird. Eine Abschätzung dieser radialen Geschwindigkeit wird im Anhang A2 gegeben. Die resultierenden Residenzzeiten der Tropfen in der Gasströmung sind kurz und durchaus im Rahmen der durch die Filmaufnahmen erwarteten Werte. Es gibt ferner Arbeiten anderer Autoren /31,32/, die den Tropfenabriß auf Grund der Kelvin-Helmholtz-Instabilität betrachten und in diesem Rahmen das resultierende Tropfenspektrum mit Erfolg korrelieren können. Im folgenden wird nun so verfahren, daß sich die Diskussion auf die

Fälle 1, 2 und 6 beschränkt. Die anderen Fälle scheiden aus, weil dem Autor scheint, daß sie in den Versuchen Casals /3/ keine dominante Rolle gespielt haben. Die Fälle 1 und 2 werden ferner mehr der Vollständigkeit halber behandelt und weil sich ähnlich einfache 'entrainment'-Kriterien ergeben wie in Fall 6. Für viele der Versuche Casals /3/ insbesondere bei höheren Gasdurchsätzen scheint das Versprühen durch Kapillarwellen der dominante 'entrainment'-Mechanismus zu sein. Es sollen nun im folgenden verschiedene Kriterien für das Versprühen einer Filmströmung betrachtet werden.

3.2.3 Kriterien für das Versprühen einer Filmströmung

An einer Phasengrenzfläche wie der zwischen einer Film- und Gasströmung treten sowohl Scher- als auch Druckkräfte auf. Daneben gibt es noch die Oberflächenspannungskräfte, die tangential zur Phasengrenzfläche gerichtet sind. Der in Abb. 4 als Fall 1 dargestellte 'entrainment'-Mechanismus betrachtet das Abscheren von Flüssigkeitsschichten durch die hohen Scherkräfte der Gasströmung. Dabei müssen die restaurierenden Kräfte der Oberflächenspannung überwunden werden /33/. Abb. 6 verdeutlicht die Situation.

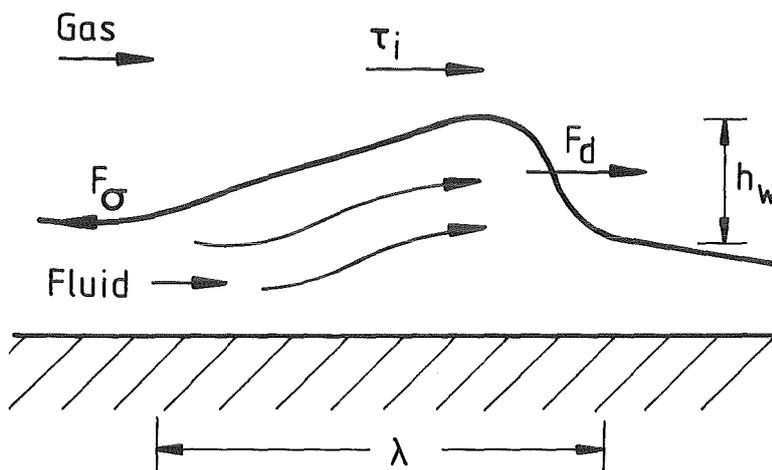


Abb. 6: 'entrainment' durch Scherkräfte

Teile der Störwelle können abgeschert werden, falls die Scherkraft (F_d) die Oberflächenspannungskraft (F_σ) überwiegt:

$$F_d > F_\sigma \quad (56)$$

Mit den Ansätzen

$$F_d = \lambda \cdot h_w \cdot \frac{1}{2} c_d \cdot \rho_g \cdot u_r^2, \quad 10 \leq Re_w \leq 5 \cdot 10^5, \quad Re_w = \rho_g u_r h_w / \mu_g$$

$$F_\sigma = \lambda \cdot c_s \cdot \sigma$$

folgt schließlich

$$We = \rho_g \cdot u_r^2 \cdot \frac{h_w}{\sigma} > 2 \cdot \frac{c_s}{c_d} \quad (56a)$$

Dabei bedeuten λ die Länge und Breite (normal zur Zeichnungsebene) der Störwelle, h_w die Wellenberghöhe, c_d der sogenannte 'drag'-Koeffizient der Welle, ρ_g die Gasdichte, u_r die Relativgeschwindigkeit beider Phasen, σ die Oberflächenspannung und c_s der Formfaktor der Welle. Gl. (56a) besagt, daß 'entrainment' möglich wird, falls die Weberzahl We einen kritischen Wert $We_{cr} = 2 \cdot c_s / c_d$ überschreitet. Ishii und Grolmes spezifizieren die Koeffizienten zu

$$c_d \approx 1.0 \quad (\text{sehr unregelmäßig geformtes Teilchen})$$

$$c_s \approx 0.77 \quad (\text{Grundform der Welle hat die Gestalt einer Halbellipse}),$$

so daß die kritische Weberzahl

$$We_{cr} = 2.54 \quad (\text{Abb. 5, Fall 1}) \quad (57)$$

folgt. Dies ist ein sehr kleiner Wert, der durch den hohen 'drag'-Koeffizienten bedingt ist. Die Autoren von Ref. /33/ betrachten dabei offensichtlich die Welle als ein sehr unregelmäßig geformtes Teilchen und beziehen sich auf eine Arbeit von Brodkey /34/. Andererseits erhält man höhere kritische Weberzahlen, wenn man die an der Welle angreifenden Scherkräfte kleiner ansetzt.

Nach Ishii und Grolmes /33/ ist der Abschermechanismus nur wirksam, wenn die Filmreynoldszahlen ($Re_1 = 4 \cdot u \cdot h / \nu_1$) größer als 160 sind. Bei kleineren Filmreynoldszahlen postulieren sie, daß der dominante 'entrainment'-Mechanismus durch das Unterlaufen einer Welle gegeben ist. Dies ist in Abb. 4 als Fall 2 dargestellt. Die Dispersion der Welle erfolgt dabei analog zum Tropfenzerlegungsmodell von Hinze /36/. Diese Annahme führt direkt auf ein Weberzahlkriterium:

$$We = \frac{\rho_g u^2 \cdot h}{\sigma} \geq We_{cr} \quad (\text{Abb. 4, Fall 2}) , \quad (58)$$

wobei diesmal die Weberzahl mit der gesamten Filmdicke h gebildet wird. Die in diesem Fall zu benutzende kritische Weberzahl We_{cr} ist umstritten. Nach Messungen von van Rossum /37/ sollte sie 17 betragen. Andererseits gibt Hinze /36/ an, daß Tropfen bei einer kritischen Weberzahl von 12 zerfallen, wenn sie plötzlich einer Gasströmung ausgesetzt werden. Dagegen zerfallen fallende Tropfen erst bei Weberzahlen von 22.

Um auch ein 'entrainment'-Kriterium für den als Fall 6 dargestellten Kelvin-Helmholtz-Mechanismus zu finden, soll die metastabile Situation in Abb. 7 betrachtet werden.

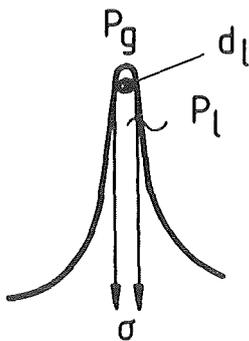


Abb. 7: Instabile Kapillarwelle

Die sich verformende Kapillarwelle wird dabei als ein Ligament mit dem Durchmesser d_l aufgefaßt. Normal zur Oberfläche liegt eine Druckdifferenz $\Delta p = p_l - p_g$ an, die in Abb. 7 gerade noch durch die Oberflächenspannungskräfte (σ) balanciert werden kann. Jede weitere Verformung des Ligamentes, wie in Bild 6c von Abb. 5 gezeigt, mindert den Einfluß der Oberflächenspannungskräfte, und der Tropfenabriß wird schließlich möglich. Eine statische Kräftebilanz für Abb. 7 liefert

$$\frac{1}{2} \pi d_1^2 \Delta p = \pi d_1 \sigma \quad (59)$$

Eine genauere Bestimmung der Druckdifferenz Δp erfordert die Lösung einer Orr-Sommerfeld-Differentialgleichung sowohl für die Gas- als auch Fluidströmung /25,30/. Die Ergebnisse sind komplex, so daß sowohl die Autoren von Ref. /24/ und /32/ einfache Näherungen angeben:

$$\Delta p = \rho_g (u_g - c)^2 \cdot k \cdot h_w \cdot \psi \left(h_w, k, \frac{h_w}{d_h} \right) \quad (60)$$

Dabei bedeutet k die Wellenzahl der das Ligament produzierenden Kapillarwelle und c ihre Wellengeschwindigkeit. ψ ist ein Korrekturfaktor, der selbst von Wellenberghöhe der Kapillarwelle h_w , Wellenzahl k und hydraulischem Durchmesser abhängt. Unter vereinfachten Bedingungen (vernachlässigbare Viskositäten, kleine Amplituden, große Wellenlängen) findet Hewitt /25/ für die Strömung eines Rieselfilmes längs einer Rohrwand

$$\Delta p = \rho_l (u - c)^2 \frac{1}{2} k^2 \bar{h} h_w + \rho_g (u_g - c)^2 k h_w$$

Im allgemeinen ist der Beitrag des ersten Termes klein, so daß Gl. (60) folgt, falls $\psi \approx 1$ gilt. Setzt man Gl. (60) mit $\psi = 1$ in Gl. (59) ein und vernachlässigt ferner den Unterschied zwischen der Wellengeschwindigkeit c und der Filmgeschwindigkeit u , so folgt wiederum ein Weberzahl-Kriterium:

$$We = \rho_g (u_g - u)^2 \frac{h_w}{\sigma} \geq \frac{2}{k \cdot d_1} \quad (61)$$

Die kritische Weberzahl hängt von der Wellenzahl k und dem Ligamentdurchmesser d_1 ab. Dabei liegt es nahe, den Ligamentdurchmesser mit dem mittleren Durchmesser d_{10} der gebildeten Tropfen zu identifizieren. Nach den Arbeiten von Tatterson et al. /32/ und Ref. /41/ gilt:

$$d_1 \approx d_{10} = 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\sigma d_h}{\frac{1}{2} \rho_g u_g^2 \cdot f_o} \right) \quad (62)$$

f_0 ist der Reibbeiwert ohne Film. Approximiert man ihn durch $f_0 \approx 5 \cdot 10^{-3}$, so folgt

$$d_1 \approx 4.8 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{u_g} \cdot \left(\frac{\sigma d_h}{\rho_g} \right)^{1/2} \quad (62a)$$

Es bleibt, die Wellenzahl k zu spezifizieren. Hier gibt es zwei Möglichkeiten, die sich in der Berücksichtigung der Filmdicke unterscheiden. Bei dicken Filmen ist zu erwarten, daß diejenigen Wellenlängen sich ausbilden, für die die Anwachsrate maximal ist. Nach Hewitt /25/ gilt

$$k = k_m = \frac{1}{2} \rho_g (u_g - u)^2 / \sigma \quad (63)$$

Andererseits argumentieren Tatterson et al. /32/, daß bei dünnen Filmen ($\delta \approx$ kapillare Wellenlänge) diejenige Wellenlänge zum Versprühen führt, die mit der mittleren Filmdicke \bar{h} skaliert:

$$k = 1/\bar{h} \quad (63a)$$

Der Grund ist, daß bei dünnen Filmen die Energiedissipation für alle anderen Wellenlängen größer ist /27/.

Benutzt man die Ansätze für den Ligamentdurchmesser d_1 nach Gl. (62a) und für die Wellenzahl k nach Gl. (63) bzw. (63a), so folgt für die kritische Weberzahl

$$We_{cr} = \frac{2}{k \cdot d_1} = \begin{cases} 83.3 \cdot \frac{1}{Re_g} \cdot \left(\frac{\sigma d_h}{\rho_g v_g^2} \right)^{1/2} & \text{dicke Filme} \quad (66) \\ 41.6 \cdot \frac{\bar{h}}{d_h} \cdot Re_g \left(\frac{\rho_g v_g^2}{\sigma d_h} \right)^{1/2} & \text{dünne Filme} \quad (67) \end{cases}$$

Sie hängt von weiteren dimensionslosen Kenngrößen ab, wobei die Abhängigkeiten für dicke und dünne Filme sehr verschieden sind. Die Unterschiede rühren von den unterschiedlichen Ansätzen für die Wellenzahl k her (Gl. (63), (63a)). Setzt man typische Werte der Parameter ein, wie sie bei den Versuchen Casals /3/ vorlagen ($Re_g \sim (2-6) \cdot 10^4$, $\sigma = 411 \text{g/sec}^2$, $\rho_g \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{g/cm}^3$, $d_h \sim 1 \text{cm}$, $\bar{h} \sim 10^{-2} \text{cm}$, $v_g \sim 0.13 \text{cm}^2/\text{sec}$), so folgen kritische Weberzahlen, die

bei dicken Filmen zwischen 4.7 und 12.6, bei dünnen Filmen zwischen 5.4 und 14.6, also allgemein zwischen 4 und 15 liegen.

Die obigen Überlegungen weisen deutlich auf die Bedeutung der Weberzahl im Zusammenhang mit dem Versprühen einer Filmströmung hin. Offensichtlich ist die kritische Weberzahl keine Konstante, sondern hängt vom betrachteten Mechanismus und den Strömungsverhältnissen ab. Es ist somit zu erwarten, daß in einem verallgemeinerten 'entrainment'-Kriterium auch andere Kennzahlen wie die Reynoldszahlen von Gas und Film berücksichtigt werden müssen. Da jedoch dem Autor eine solche Korrelation nicht bekannt ist, wird einfachheitshalber eine konstante kritische Weberzahl benutzt. Die numerischen Anwendungen zeigen befriedigende Ergebnisse, wenn man

$$We_{cr} = 10 \quad (68)$$

setzt. Es ist jedoch wünschenswert, in einem verbesserten 'entrainment'-Kriterium weitere Kenngrößen der Film- und Gasströmung zu berücksichtigen.

3.2.4 Versprührate und Impulsverlustrate

Zur Vervollständigung des Filmgleichungssystems (Gl. (3-5)) müssen noch die Versprührate E ('entrainment'-Rate) sowie der durch das Versprühen bedingte Impulsverlust $E \cdot u_e$ spezifiziert werden. Zur Bestimmung der Versprührate E kann man dabei auf zwei Arten vorgehen. Eine Möglichkeit ist, empirische 'entrainment'-Korrelationen zu verwenden. Diese haben oft den Nachteil, nur für bestimmte Stoffpaare und geometrische Bedingungen gültig zu sein. So fassen Whalley und Hewitt /44/ ihre Ergebnisse an einem Wasser/Luft-System in einer Versprührate zusammen, in der die Kenngröße S der korrelierende Parameter ist. In der hier gebräuchlichen Nomenklatur lautet die Versprührate

$$E(W.H.) = \alpha(S) \cdot \frac{\tau_i \cdot v_1}{\sigma} \cdot 2\pi r_i \quad (69)$$

$$S = \frac{\tau_i \cdot h}{\sigma} \quad (70)$$

S setzt die Schleppkräfte des Gases (τ_1) ins Verhältnis zur Oberflächenspannung (σ). h ist die Filmdicke, ν_1 die kinematische Viskosität des Filmes. Beachtet man die Ansätze Gl. (6a) und (7) für die Zweiphasenschubspannung τ_1 , so erkennt man, daß S eine ähnliche Bedeutung wie die Weberzahl hat. Die Funktion $\alpha(S)$ wird von den Autoren /44/ nur als Kurve angegeben. α ist monoton wachsend und nimmt für $S = 0.5$ den konstanten Wert $\alpha \approx 7.0$ an. Die Streuung der Daten um diese Kurve ist erheblich. Vergleichsrechnungen mit einer Versprührate nach Gl. (69) zeigen nun, daß damit für die Versuche Casals /3/ die experimentelle Versprührate wesentlich unterschätzt wird. Dies mag daran liegen, daß bei dem Stoffpaar Sn/Bi-Argon andere Einflüsse dominieren als bei Wasser/Luft.

Um nun die hohen experimentellen Versprühraten zu simulieren, wird anders verfahren. In Anlehnung an die Vorstellungen, die beim Versprühen von instabilen Kapillarwellen entwickelt wurden, (s. Abb. 5, Fall 6 (a-c)) wird das Weberzahlkriterium so aufgefaßt, daß es das Anwachsen der Wellenamplitude der Kapillarwellen nur bis auf eine kritische Größe h_{cr} erlaubt. Diese ist durch

$$h_{cr} = \frac{We_{cr} \cdot \sigma}{\rho_g u_r^2} \quad (71)$$

gegeben. Wächst die Amplitude über diesen kritischen Wert hinaus an, so werden die Kapillarwellen instabil, reißen ab und können als Tropfen weiter transportiert werden. Da es numerisch wünschenswert ist, den Versprühvorgang in einem Rechenzyklus abzuschließen, wird E so bestimmt, daß (in Zylinderkoordinaten)

$$E \cdot Dt_n = \pi(r_i^2 - r_{av}^2) \quad (72)$$

ist. Dt_n ist dabei der numerische Zeitschritt, in dem der Versprühvorgang abgeschlossen wird. r_i gibt den Radius an, der zur Filmoberfläche führt. r_{av} spezifiziert denjenigen Radius, der zu einer mittleren Filmdicke korrespondiert, über der sich die Kapillarwellen erheben. r_{av} wird dabei durch Mittelung von r_i über drei benachbarte Maschen bestimmt. Voraussetzung für das Versprühen ist jedoch, daß die Wellenamplitude größer als der kritische Wert ist:

$$h_w = r_i - r_{av} > h_{cr} \quad (72a)$$

Eine Versprührate nach Gl. (72) ist nicht physikalisch zu interpretieren, sondern als pragmatische Festsetzung aufzufassen. Mit Gl. (72) können die offensichtlich vorliegenden hohen Versprühraten bei den Versuchen Casals /3/ simuliert werden. Ferner lehnen sich die Vorstellungen, die zu der obigen Versprührate geführt haben, an visuelle Beobachtungen an, die z. T. selbst an Hand der Filmaufnahmen oder aber durch andere Autoren /24/ an entsprechenden Versuchen gemacht wurden. Ein physikalisches Zeitmaß für den Versprühvorgang kann man jedoch durch die Anwachsrate der Kapillarwelle auf Grund der Kelvin-Helmholtz-Instabilität /26/ angeben. Nach Gl. (54) ist das Zeitmaß durch

$$\tau_E = \frac{1}{\alpha_m} = \frac{\sigma}{2\rho_g u^3 g \zeta_m(\theta)} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_g}^{1/2} \quad (73)$$

gegeben.

Eine völlig andere Situation liegt bei schlechten Benetzungsverhältnissen vor. Dann versprüht i. a. die gesamte Hülle, ohne daß ein Restfilm auf dem Stab zurückbleibt. Ein solcher Vorgang kann mit den bisherigen Modellvorstellungen nicht beschrieben werden.

Zur vollständigen Beschreibung des Versprühvorganges muß auch die Impulsverlustrate für die Filmströmung angegeben werden. Der Impulsverlust ist nach Gl. (4) durch $E \cdot u_e$ gegeben. Die 'entrainment'-Geschwindigkeit u_e ist dabei wie folgt definiert:

$$u_e = \frac{1}{E \cdot dt} \int_{r_e}^{r_i} 2\pi r u_z(r, z, t) dr \quad (74)$$

$$r_e = r_i \sqrt{1 - E dt / \pi r_i^2}$$

dt ist ein infinitesimales Zeitintervall und u_z das radiale Geschwindigkeitsprofil der Filmströmung. Das Profil soll wieder parabolisch angenommen werden, die Krümmung des Stabes jedoch vernachlässigt werden. Dann erfüllt

$$\ddot{u}_z(y) = \frac{1}{\mu_1} \left\{ (\tau_i + \gamma^* h) y - \frac{\gamma^*}{2} y^2 \right\} \quad (75)$$

alle nötigen Randbedingungen. y ist die Abstandskoordinate von der Staboberfläche und γ^* eine verallgemeinerte Gravitationskonstante. Sie ist durch

$$\gamma^* = -g \cdot \rho_1 - \partial p_1 / \partial z \quad (76)$$

gegeben. Nimmt man an, daß die versprühende Masse gering ist, so ist u_e im wesentlichen gleich der Oberflächengeschwindigkeit, und es gilt dann

$$u_e = \frac{h}{\mu_1} \tau_i + \frac{1}{2} \frac{\gamma^* h^2}{\mu_1} \quad (74a)$$

Mit den Gl. (72) und (74a) sind die durch das Versprühen bedingten Terme des Filmgleichungssystems definiert. Zusammen mit den in Abschnitt 3.1 gegebenen Ansätzen ist damit das Filmgleichungssystem vollständig.

3.2.5 Zur Dynamik der Tropfen; Wiederanlagerungsraten

Die Experimente Casals /3/ zeigen, daß die abgelösten Tropfen i. a. eine radiale wie axiale Geschwindigkeitskomponente besitzen. Im Anhang A2 wird eine Abschätzung der radialen Geschwindigkeit unter der Annahme gegeben, daß sich die Tropfen über die Kelvin-Helmholtz-Instabilität bilden. Es ergeben sich radiale Anfangsgeschwindigkeiten von (32-54) cm/sec. Bleiben diese Geschwindigkeiten im wesentlichen konstant, so folgen bei einem hydraulischen Durchmesser von $d_h \sim 1$ cm Residenzzeiten der Tropfen in der Gasströmung von

$$\Delta t_R \approx (9-16) \text{ msec} \quad (77)$$

Dieser Wert liegt im Rahmen der durch die Filmaufnahmen deduzierten Zeiten. Während dieser Zeitspanne fliegen die Tropfen zur Plexiglaswand (s. Abb. 1) und lagern sich dort ab. Die radiale Bewegung scheint dabei im wesentlichen eine Trägheitsbewegung zu sein. Ähnliche Beobachtungen haben auch andere Autoren gemacht /45,46/. Daß die radiale Bewegung im wesentlichen ungebremst erfolgt, zeigt folgende Überlegung. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 30$ cm/sec und einem Tropfendurchmesser von $d = 5 \cdot 10^{-3}$ cm beträgt die Reibungskraft

$$F_R = - \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Gamma \cdot \frac{1}{2} \rho_g v^2 \quad (78)$$

Γ ist ein Reibfaktor, der von der Reynoldszahl des Tropfens ($Re_d = d \cdot v / \nu_g \approx 1.5$) abhängt. Bei nicht zu großen Geschwindigkeitsänderungen bleibt Γ im wesentlichen konstant und wird hier nach Ref. /35/ auf $\Gamma = 15$ festgesetzt. Damit ergibt sich die Bremsbeschleunigung zu

$$\frac{dv}{dt} \approx -K \cdot v^2, \quad (79)$$

$$K = \frac{3 \cdot \Gamma \cdot \rho_g}{4 \cdot d \cdot \rho_d} \approx 0.675$$

Die radiale Geschwindigkeit variiert somit wie

$$v(t) = \frac{v_o}{Kv_o t + 1} \quad (80)$$

Fliegen die Tropfen eine Zeitspanne $\Delta t_R = 9 \cdot 10^{-3}$ sec und haben sie eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_o = 30$ cm/sec, so folgt

$$\frac{v(t=\Delta t_R)}{v_o} = 0.85 \quad (81)$$

Die Tropfen werden also während ihres Fluges nicht wesentlich abgebremst. Andererseits kann man auch zeigen, daß Tropfen von der Größe $d = 5 \cdot 10^{-3}$ cm kaum mit den turbulenten Wirbeln der Gasströmung wechselwirken. Damit eine effektive Wechselwirkung stattfinden kann, muß der Tropfendurchmesser kleiner sein als die kleinste signifikante Wellenlänge der Turbulenz. Ein Maß hierfür ist die Kolmogorov-Länge /38/:

$$\eta = (v_g^3 / \epsilon)^{1/4} \quad (82)$$

ϵ ist die Energiedissipationsrate pro Masseneinheit und nach Ref. /49/ durch

$$\epsilon \sim w^3 / l \quad (83)$$

gegeben. w ist eine Geschwindigkeit, die mit der Schubspannungsgeschwindigkeit skaliert

$$w \sim \sqrt{\tau_i / \rho_g} \sim 10^{-1} \cdot u_g \quad (84)$$

l ist ein Längenmaß für die Turbulenzwirbel und kann nach Messungen von Martin und Johanson /50/ an einer Wasserströmung durch ein Rohr (Radius R) durch

$$l = R \cdot 5.028 \cdot 10^{-4} \cdot Re_g^{0.509} \quad (85)$$

approximiert werden /38/. Setzt man $R \sim 0.5$ cm, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} \eta &\sim Re_g^{-5/8} \\ &\sim (1-2) \cdot 10^{-3} \text{ cm} \end{aligned} \quad (82a)$$

für typische Gasreynoldszahlen zwischen $(2-6) \cdot 10^4$. Man erkennt, daß Tropfen von der Größe $5 \cdot 10^{-3}$ cm deutlich zu groß sind, um effektiv mit den turbulenten Wirbeln zu wechselwirken. Somit muß man die radiale Bewegung der Tropfen als eine geradlinige Trägheitsbewegung auffassen, die von der Stelle des Versprühens bis zur Anlagerungsstelle führt. Andere Modelle, die von einer Diffusionsbewegung der Tropfen im turbulenten Strömungsfeld der Gasströmung ausgehen /38-40,47,48/, sind hier nicht anwendbar, da die Tropfen zu groß sind.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen nun, daß auf Grund der Trägheitsbewegung der Tropfen eine enge Korrelation zwischen Wiederanlagerungsraten (auf dem Plexiglasrohr) und Versprühraten besteht. Da die Flugdauer der Tropfen bis zur Wiederanlagerung (Residenzzeit in der Gasströmung) kurz ist, kann in einer ersten Näherung die Wiederanlagerung als instantan verknüpft mit dem Versprühvorgang angesehen werden. Da die Tropfen auch ein axiales Stück aufwärts fliegen, wird festgesetzt

$$D_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n E_{i-j} \quad (86)$$

D_i ist die Wiederanlagerungsrate in Masche i, E_{i-j} die Versprührate in Masche i-j und $n \cdot \Delta z$ (Δz : Maschenweite) gibt das durchflogene Wegstück an. n ist eine Eingabegröße. Eine Wiederanlagerungsrate nach Gl. (86) bedeutet, daß die

Tropfenkonzentration in der Gasströmung verschwindet. Es wird also darauf verzichtet, die Tropfenströmung wirklich zu modellieren, sondern es wird nur der Effekt erfaßt, daß das Versprühen der Hülle zu einer Umverteilung führt, die nicht mit einer Filmströmung beschreibbar ist. Das Aufrauhen der Plexiglaswand durch erstarrende Tropfen hat jedoch empfindliche Auswirkungen auf den Druckverlust der Gasströmung. Mit der Spezifikation der Wiederanlagerungsrate ist die Behandlung der Tropfendynamik abgeschlossen.

3.2.6 Versprühen bei schlechter Benetzung

Es sollen noch einige kurze Bemerkungen zum Versprühen der Hülle bei schlechten Benetzungsverhältnissen an der Heizstaboberfläche angefügt werden. In diesen Fällen wird beobachtet, daß sich die gesamte Hülle vom Heizstab löst, entweder abwärts gleitet oder bei höheren Gasdurchsätzen ($u_g \gtrsim 10$ m/sec) radial versprüht und sich auf der gegenüberliegenden Plexiglaswand (s. Abb. 1) ablagert. Es bleibt kein Restfilm auf dem Heizstab zurück. Dabei tritt das Versprühen kurz nach der Aufrauung der Filmoberfläche ein. Dies legt den Schluß nahe, daß ebenfalls Druckkräfte an der Phasengrenzfläche zwischen Schmelze und Gasströmung für das Versprühen verantwortlich sind. Das Druckgefälle kann dabei auch thermodynamisch durch die Aufheizung der Schmelze bedingt sein. Nimmt man nun an, daß sich ein Wellenberg gebildet hat (s. Abb. 4 und 6)

$$h(z) = h_f + h_w \cdot \sin kz, \quad 0 \leq kz \leq \pi, \quad (87)$$

so balanciert die Oberflächenspannung das Druckgefälle zwischen Fluid und Gas

$$\Delta p = p_l - p_g = \sigma k^2 \cdot h_w \cdot \sin kz \quad (88)$$

Die Oberflächenspannungskraft greift dabei an dem Basisfilm h_f an. Dieser wiederum besitzt bei schlechter Benetzung nur eine geringe Haftung an seinen Untergrund, so daß die Oberflächenspannungskraft von keinem stabilen Körper aufgenommen wird. Folglich bewegt sich die gesamte Hülle im Druckfeld Δp .

Die obigen Überlegungen sollen nun noch etwas quantifiziert werden. Das zunächst unbekannte Druckgefälle wird durch die Angabe der Dimensionen des

Wellenberges (h_w und k) spezifiziert. Geht man wieder auf Zylinderkoordinaten zurück, so lautet die radial gerichtete Druckkraft auf einen Wellenberg:

$$F_p = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sigma k^2 h_w \sin kz \cdot 2\pi r_i dz \quad (89)$$

$$r_i = r_w + h(z)$$

r_w : Radius zur Filminnenseite

Sie weist vom Wellenberg weg in die Gasströmung. Die Integration ergibt

$$F_p = 4\pi\sigma k h_w r_b + \pi^2 \sigma k h_w^2 \quad (90)$$

$$r_b = r_w + h_f$$

Die obige Druckkraft wird zu einer Beschleunigung führen, sobald die Adhäsionskräfte an der Heizstaboberfläche überwunden werden können. Dann haben diese jedoch keinen Einfluß mehr auf die Beschleunigung. Die zu bewegende Masse des Wellenberges folgt bei Vernachlässigung des Basisfilmes h_f zu

$$M = \frac{\rho_1}{\sigma k^2} (4\pi\sigma k h_w r_b + \frac{\pi^2}{2} \sigma k h_w^2) \quad (91)$$

Vernachlässigt man ferner Scherkräfte, so lautet die Beschleunigung B

$$B = \frac{F_p}{M} = \frac{\sigma k^2}{\rho_1} \cdot G(r_b/h_w) \quad (92)$$

$$G = 1 + \frac{1}{1 + \frac{8r_b}{\pi h_w}}$$

G beschreibt die Geometrie der Welle und ist für $h_w \ll r_b$ etwa 1. Benutzt man dieses Ergebnis und läßt die Beschleunigung über eine Strecke Δr wirken, so folgt für die Endgeschwindigkeit v_0

$$v_o = k \cdot \sqrt{\frac{2\sigma\Delta r}{\rho_1}} \quad (93)$$

Setzt man $k = 3 \text{ cm}^{-1}$, $\sigma = 411 \text{ g/sec}^2$, $\rho_1 = 8.5 \text{ g/cm}^3$ und $\Delta r = 0.1 \text{ cm}$ (eine Wellenberghöhe), so folgt schließlich der Wert

$$v_o \approx 10 \text{ cm/sec} \quad (93a)$$

Bis zur Wiederanlagerung vergehen bei einem hydraulischen Durchmesser von $d_h \sim 1 \text{ cm}$ etwa 50 msec. Dieser Wert erscheint etwas zu hoch im Vergleich zum Experiment, gibt aber die Größenordnung richtig wieder.

4. Vergleich der experimentellen mit den numerischen Ergebnissen

Im folgenden sollen sechs der Casal-Experimente besprochen werden, die sich allesamt durch gute Benetzung an der Filminnenseite auszeichnen. Die Auswahl erfolgte so, daß ein großer Bereich von Gasgeschwindigkeiten (6,95-81 m/sec) überdeckt wurde. Dadurch tritt sowohl gegensinnige als auch gleichgerichtete Zweiphasenströmung auf. Ebenso stellt sich bei einer mittleren Gasgeschwindigkeit von ~ 23 m/sec eine stagnierende Filmströmung ein, die die typischen Merkmale dieses Strömungsbereiches zeigt: große Störwellen werden wegen ihres erhöhten Impulsaustausches mit der Gasströmung aufwärts transportiert, verflachen dort und fließen als dünner Rieselfilm wieder abwärts. Aufgrund der breiten Spanne von Gasgeschwindigkeiten werden auch recht verschiedene Filmgeschwindigkeiten erreicht. Diese dokumentieren sich deutlich in den typischen Transportraten, die für das Austragen der Hülle aus dem Schmelzbereich nötig sind. Darauf wird in einem ersten Teil des Vergleichs näher eingegangen. Anschließend sollen verschiedene Druckverlustnachrechnungen vorgestellt werden. Sie geben recht detaillierte Hinweise auf die Strömungsvorgänge. Schließlich werden die im Experiment und in der Nachrechnung erreichten Endzustände verglichen. An vier exemplarischen Fällen wird die transiente Entwicklung der Hüllrohrbewegung aufgezeigt.

Die Versuche Casals /3/ mit schlechten Benetzungsverhältnissen an der Heizstaboberfläche entziehen sich bisher einer Nachrechnung, da in diesen Fällen die Dynamik des Hüllrohres im Prinzip zweidimensional ist und mit einem Filmmodell nicht modellierbar ist. Dagegen reichen die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Modellvorstellungen, die wesentlich auf einem Filmmodell der Hüllrohrbewegung basieren, aus, um die Versuche bei guten Benetzungsverhältnissen an der Heizstaboberfläche numerisch zu simulieren. Dies wird durch die nachfolgend zusammengestellten Ergebnisse dokumentiert.

4.1 Typische Zeitskalen der Hüllrohrbewegung

Tabelle 2 zeigt typische Zeitdauern der Hüllrohrbewegung. Diese geben indirekt Aufschluß über die mittleren Filmgeschwindigkeiten, die sich bei den entsprechenden Gasdurchsätzen einstellen. Obwohl die Versuche Casals /3/ an einer 1-Stab-Geometrie durchgeführt wurden und die Übertragung der Zeitskalen auf die Bündelgeometrie schwierig ist, geben sie doch wichtige Hinweise auf mögliche Materialtransportraten des Hüllrohres während eines LOF-Störfalles. Es muß jedoch beachtet werden, daß die Abschätzung der Zeitdauern, in denen

das Hüllrohr aus dem Schmelzbereich ausgetragen wird, etwas willkürlich ist. Wie die Filmaufnahmen zeigen, bleibt oftmals ein Restfilm ($\delta \sim 10^{-3}$ cm) auf der Heizfläche zurück, der sich noch etwas bewegt, aber sicher keinen relevanten Beitrag zum Hüllrohrtransport liefert. Ebenso geben die Druckverlustmessungen einen Hinweis auf das Ende der Materialbewegungen, lassen aber auch einen Ermessungsspielraum zu. In diesem Sinne sind die zweizahligen Angaben in Tabelle 2 zu verstehen. Innerhalb dieser Genauigkeitsgrenzen kann jedoch eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung festgestellt werden. Dies ist ein wesentliches Ergebnis in bezug auf Reaktorstörfallanalysen. Über einen großen Bereich von Gasgeschwindigkeiten hinweg werden die Hüllrohrmaterialtransportraten und damit wesentliche Phänomene der Hüllrohrbewegung selbst richtig beschrieben. Die Gründe für die Übereinstimmung liegen bei den verwendeten Reibbeiwertrelationen und insbesondere bei der Benutzung einer effektiven Filmdicke während der instationären Anlaufphase. Dadurch wird die Zeitabhängigkeit der sich entwickelnden Welligkeit des Filmes besser als ursprünglich erfaßt.

Tabelle 2: Vergleich typischer Zeitskalen der Hüllrohrbewegung

Gas flow rate (m ³ /h)	Gas velocity (cm/sec)	$\Delta t_{\text{exp.}}$ (sec)	$\Delta t_{\text{theoret.}}$ (sec)
6	695	0.8 - 1.0	0.9 - 1.1
20	$2.3 \cdot 10^3$	>5.0	>5.0
25	$2.9 \cdot 10^3$	1.0	1.0
30	$3.5 \cdot 10^3$	1.0 - 1.3	1.1 - 1.3
35	$4.2 \cdot 10^3$	1.1	1.0 - 1.1
60	$8.1 \cdot 10^3$	0.3 - 0.4	0.3 - 0.4

Einen weiteren deutlichen Einfluß übt auch die durch die Viskosität bedingte Schubspannung an der Heizstoberfläche aus. Sie beeinflusst das Geschwindigkeitsprofil und folglich die Transportraten. Insbesondere bei turbulenter Strömung bleiben die Geschwindigkeiten begrenzt, und die Transportraten rücken in den richtigen Bereich. Führt die Strömung über einen rauhen Untergrund oder über singuläre Hindernisse, so begrenzt eine hohe Wandreibung nach Gleichung (15d) den Materialfluß. Dies ist bei der Ausbildung von Blockaden wichtig. Ebenso wird auch die Impulsbilanz des Filmes nachhaltig durch den 'entrainment'-Prozeß beeinflusst.

Denn es ist möglich, daß die 'entrainment' Geschwindigkeit das Doppelte der mittleren Filmgeschwindigkeit beträgt. Betrachtet man den Impulsverlust durch 'entrainment' ($E u_e$) im Verhältnis zum Impulsgewinn durch die Wechselwirkung mit der Gasströmung (τ_i), so folgt

$$\frac{\Delta p_e}{\Delta p_i} = \frac{E \cdot u_e \cdot \rho_l \cdot \Delta z \Delta t}{2\pi r_i \cdot \tau_i \cdot \Delta z \Delta t}$$

$$\approx \frac{\delta_e u_e \rho_l}{\frac{1}{8} f_i \rho_g u_r^2} \approx 0.2$$

für einen typischen Fall. Dabei ist $E = 2\pi r_i \cdot \delta_e$ gesetzt worden. 'entrainment' reguliert also den Impulstransfer zwischen den Phasen.

4.2 Druckverlust der Zweiphasenströmung

Druckverluste werden an insgesamt vier Positionen gemessen, wie es in Abbildung 1 angedeutet ist. Die Interpretation der Ergebnisse ist jedoch oftmals sehr schwierig, weil durch das teilweise Versprühen des Filmes Störungen der Messungen auftreten. Besonders die drei Druckverlustmessungen im Schmelzbereich können durch sich wieder anlagernde Tropfen verfälscht werden, wenn dabei Bohrungen in der Plexiglaswand, die für die Druckmessung vorgesehen sind, teilweise oder ganz überdeckt werden. Dieser Effekt kann bei den integralen Druckverlustmessungen über die gesamte Teststrecke ausgeschlossen werden, da hier die Bohrungen durch die Tropfen nicht erreichbar sind. Jedoch innerhalb der Schmelzzone war es Casal /3/ nicht möglich, diesen durch das 'entrainment' bedingten Effekt zu diskriminieren. In diesen Fällen ist der Vergleich mit den Nachrechnungen schwierig zu werten, da die Messungen verfälscht sein können. Deshalb werden im folgenden hauptsächlich die totalen Druckverluste längs der gesamten Teststrecke zum Vergleich herangezogen. Die Darstellung geschieht in dimensionsloser Form, in dem zunächst der Druckverlust in einen äquivalenten Reibbeiwert konvertiert wird,

$$L = \frac{2 \cdot d_h \cdot \Delta p}{\rho_g u_g^2}$$

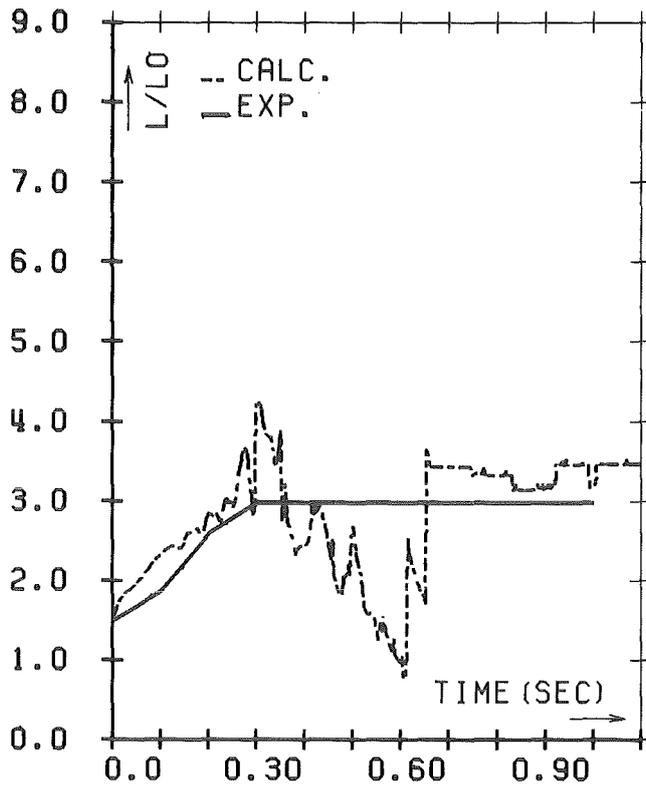
$$d_h = \frac{4\pi(r_t^2 - r_{i_0}^2)}{2\pi(r_t + r_{i_0})}$$

$r_{i_0} = r_i$ (ungestörte Geometrie),

r_i, r_t siehe Abb. 2

und schließlich das Verhältnis des transienten (L) zum anfänglichen Reibbeiwert (L_0) dargestellt wird. Ergänzend zu den Abbildungen werden die Art des Druckverlustes (siehe Abb. 1), die Gasgeschwindigkeit sowie die bei der Nachrechnung verwendete Reibbeiwertrelation (ψ_1 , s. Gl. (8-9c)) angegeben. Die Abbildungen (8-13) zeigen nun den Vergleich mehrerer experimenteller und theoretischer Druckverlustkurven. Folgende Punkte lassen sich festhalten:

- Die integralen Druckverluste können i.a. recht gut mit dem einfachen Modell nachgerechnet werden. Die Abweichungen liegen zum großen Teil im Rahmen der experimentell erzielbaren Reproduzierbarkeit. Ein Beispiel hierfür zeigt Abbildung (14), wo bei nominell gleichen äußeren Bedingungen die Wiederholung eines Versuches mit $60 \text{ m}^3/\text{h}$ -Durchsatz die beiden Druckverlustkurven 1 und 2 lieferte.
- Bei Druckverlusten über kürzere Meßstrecken treten größere Abweichungen auf, wie Abbildung (15) für einen Fall zeigt, wo kein 'entrainment' auftritt. Offensichtlich wird dann die eindimensionale und achsensymmetrische Beschreibung den komplexen Strömungsvorgängen nicht mehr gerecht. Die reale Strömung ist nicht zylindersymmetrisch, sondern hat einen statistisch unregelmäßigen Charakter. Insbesondere die verschiedenen Wellenphänomene sind zu komplex, um mit dem einfachen Modell wirklich erfaßt werden zu können.

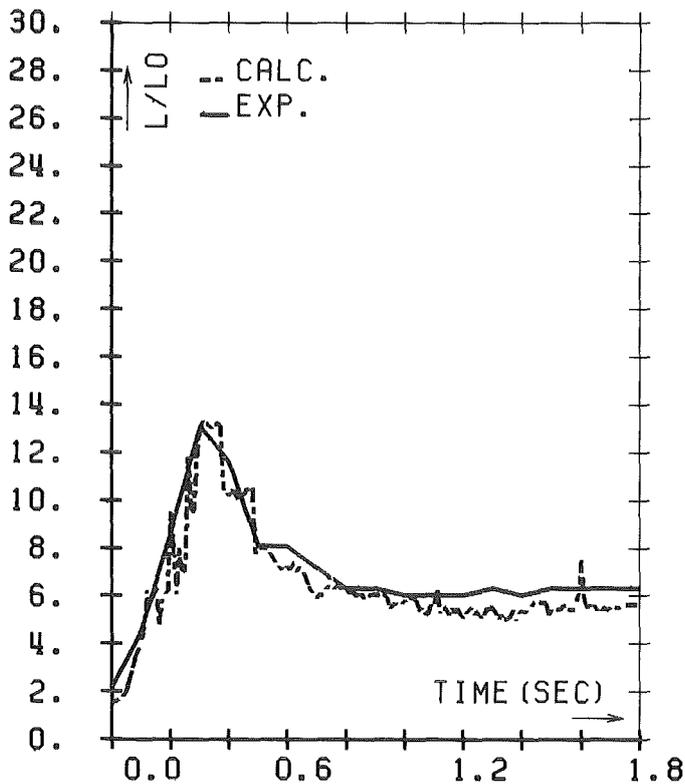


Druckverlust Δp_t

$u_g = 6,95$ m/sec

Reibbeiwert nach Feind /13/

Abb. 8: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve bei einer Gasgeschwindigkeit von 6,95 m/sec

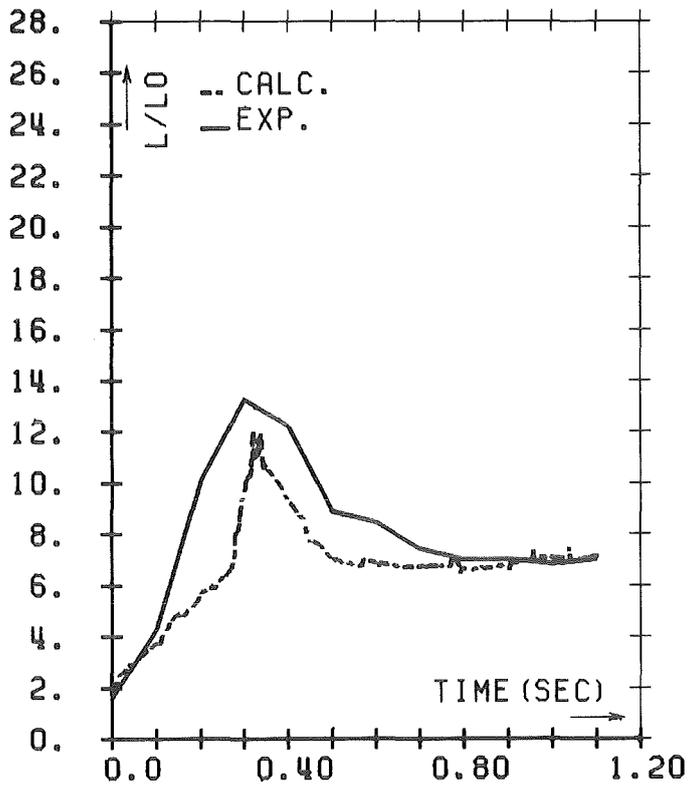


Druckverlust Δp_t

$u_g = 29$ m/sec

Reibbeiwert nach Grolmes /12/

Abb. 9: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve bei einer Gasgeschwindigkeit von 29 m/sec

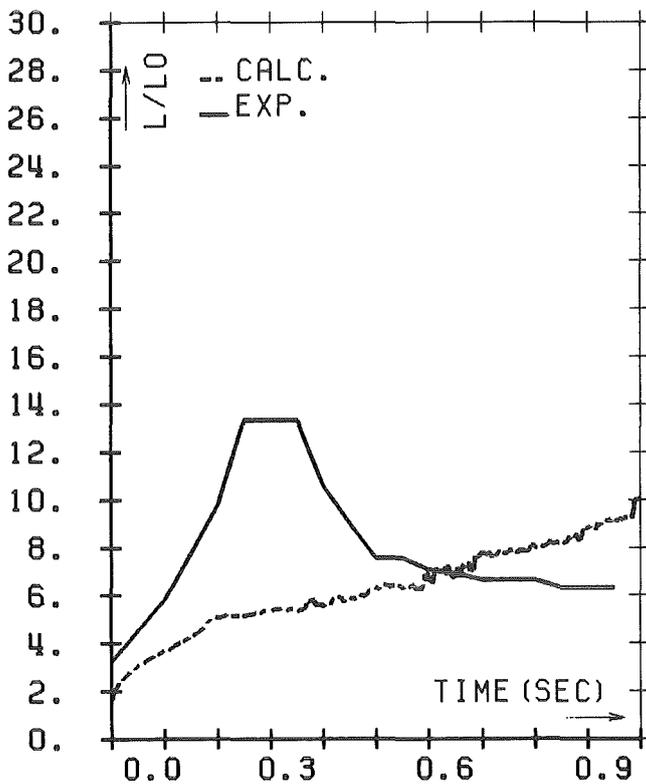


Druckverlust Δp_t

$u_g = 35$ m/sec

Reibbeiwert nach Wallis /10/

Abb. 10: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve bei einer Gasgeschwindigkeit von 35 m/sec

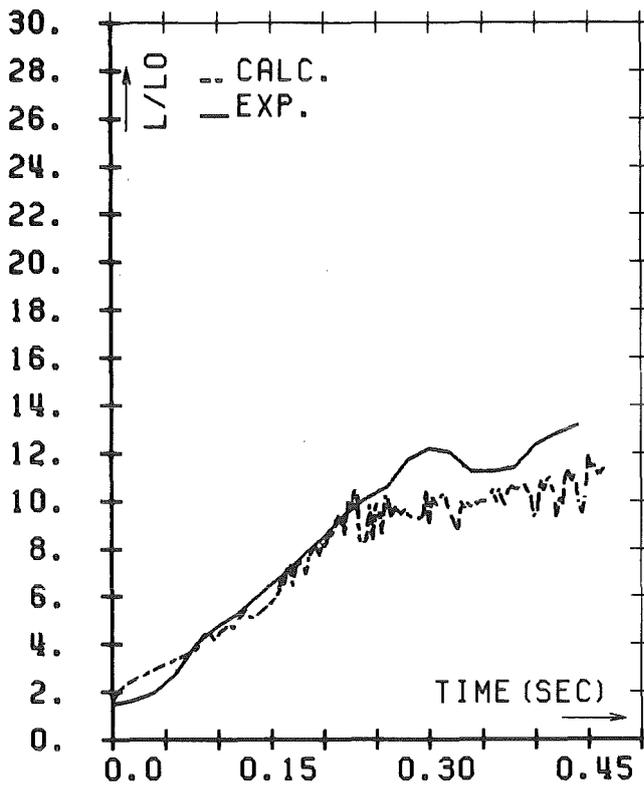


Druckverlust Δp_t

$u_g = 42$ m/sec

Reibbeiwert nach Wallis /10/

Abb. 11: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve bei einer Gasgeschwindigkeit von 42 m/sec

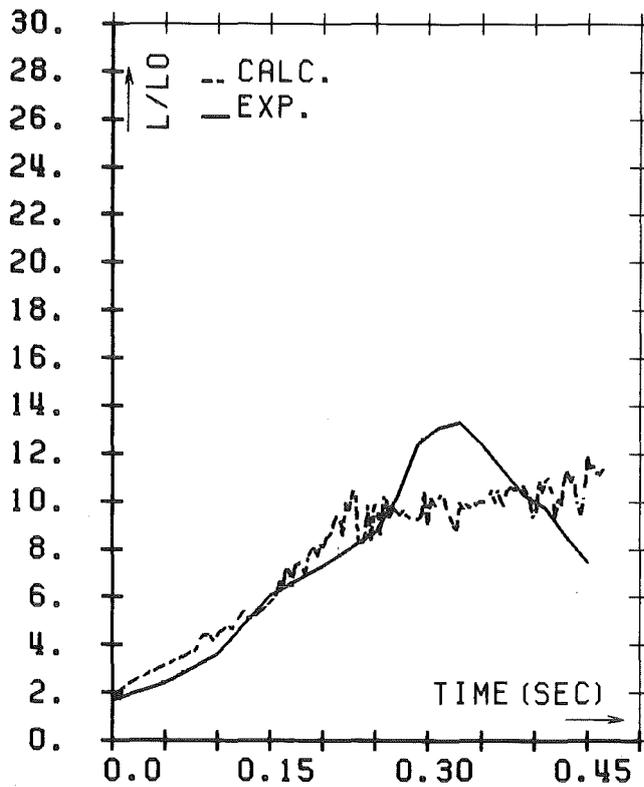


Druckverlust Δp_t

$u_g = 81$ m/sec

Reibbeiwert nach Wallis /10/

Abb. 12: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve bei einer Gasgeschwindigkeit von 81 m/sec (1. Experiment)



Druckverlust Δp_t

$u_g = 81$ m/sec

Reibbeiwert nach Wallis /10/

Abb. 13: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve bei einer Gasgeschwindigkeit von 81 m/sec (2. Experiment)

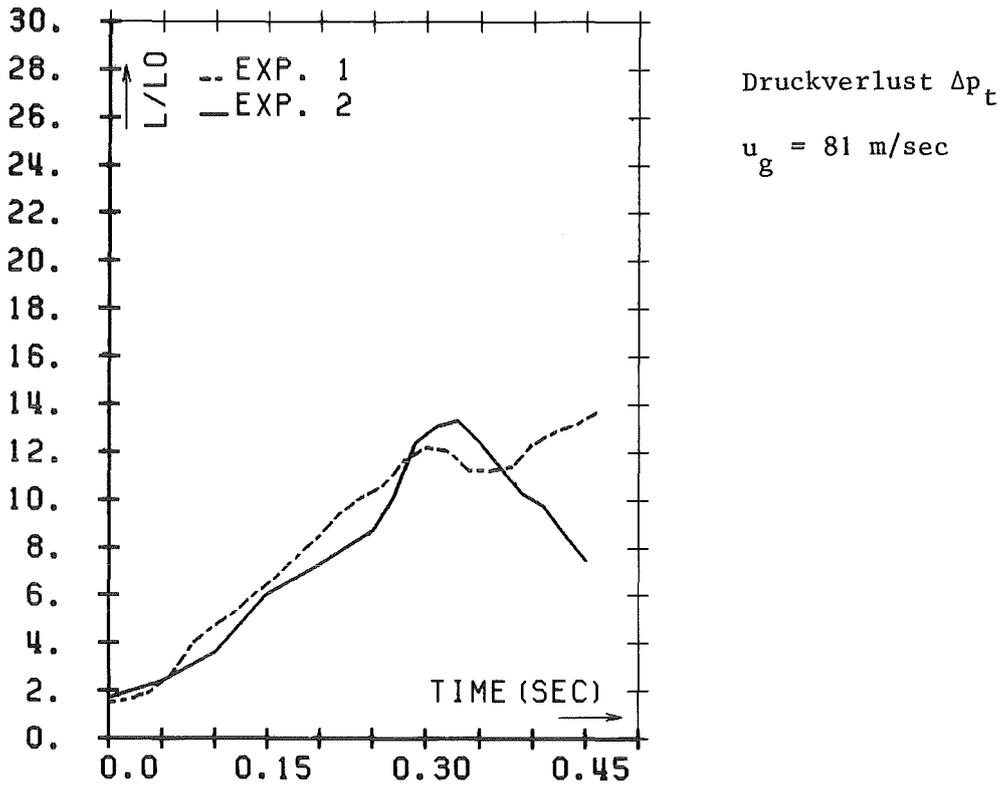


Abb. 14: Vergleich zweier experimenteller Druckverlustkurven bei nominell gleichen äußeren Bedingungen (Gasgeschwindigkeit: 81 m/sec)

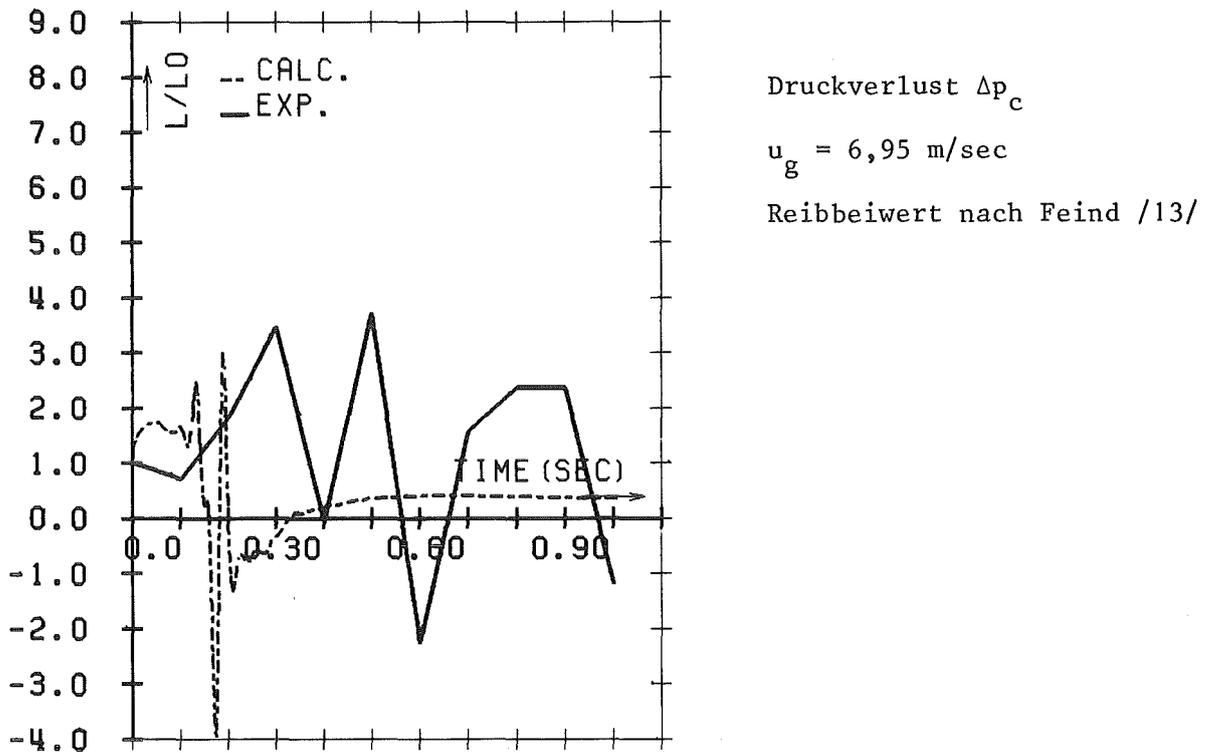


Abb. 15: Experimentelle und theoretische Druckverlustkurve über eine kurze Meßstrecke ($\sim 1 \text{ cm}$) (Gasgeschwindigkeit 6,95 m/sec)

- Die sich in der Gasströmung einstellende Druckverteilung folgt im wesentlichen aus Reibungsdruckverlusten an der welligen Filmoberfläche sowie an der durch abgelagerte Tropfen aufgerauhten Plexiglaswand. Die Tropfen können eine äußerst unregelmäßige und z.T. bizarre Oberfläche ausbilden, die einen hohen Reibungsdruckverlust verursacht. Dies zeigt sich im Experiment dadurch, daß der Druckverlust am Ende des Versuches nicht wie der seinen Anfangswert annimmt, sondern nicht selten mehrere Größenordnungen höher ist. Der Versprühvorgang schlägt sich also deutlich in den Druckverlusten nieder.
- Einen weiteren wesentlichen Beitrag liefert der konvektive Term, wenn größere Störungen der Kanalgeometrie vorliegen. Es ist sogar möglich, daß Druckverluste egalisiert werden und der Druck in Strömungsrichtung ansteigt. Dann nehmen die Plot-Daten negative Werte an, wie es Abbildung (15) zeigt.

4.3 Nachuntersuchung der Teststrecke

Die nach Versuchsende vorliegende Hüllrohrmaterialverteilung wurde hinsichtlich folgender Punkte untersucht

- Prozentuale Verteilung des geschmolzenen Hüllrohrs auf dem oberen und unteren Kaltende, der Heizzone sowie dem Plexiglasrohr,
- Länge und Höhe der partiellen Blockaden auf den Kaltenden.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefaßt. Man erkennt, daß die globale Tendenz der Verteilung, insbesondere die Ausbildung der partiellen Blockaden auf dem oberen und unteren Kaltende, gut reproduziert wird. Auch können mit dem hier benutzten Weberzahlkriterium für das Versprühen des Filmes die z. T. hohen Versprühraten erreicht werden. Dadurch wird ein wichtiger Aspekt der Hüllrohrbewegung richtig beschrieben.

Tabelle 3: Nachuntersuchung der Teststrecke

Gas flow rate (m ³ /h)	Upper cold end (%)	Heated zone (%)	Lower cold end (%)	Tube wall (%)	Length of the partial blockage (cm)	Height of the partial blockage (cm)
	exp. cal.	exp. cal.	exp. cal.	exp. cal.	exp. cal.	exp. cal.
6	0 0	0 0	100 100	0 0	8.8 ^a 15.	0.4 0.3.
20	20 10	30 20	0 20	50 50	- 5./9.	- 0.08/0.1
25	60 50	20 10	0 0	20 40	7. 6.	0.10 0.10
30	80 50	0 0	0 0	20 50	9.5 7.	0.11 0.10
35	- 30	- 0	- 0	- 70	- 6.	- 0.15
60 ^b	40 40	0 0	0 0	60 60	13.5 11.	0.042 0.045
60 ^c	40 30	0 0	0 0	60 70	13.5 10.0	0.042 0.038

^a Der Wert ist zweifelhaft, da experimentelle Unregelmäßigkeiten auftraten

^b Rechnungen mit der Formel von Henstock-Hanratty (s. Gl. (9a))

^c Rechnungen mit der Formel von Wallis (s. Gl. (9))

Die Hüllrohrverteilung wird wesentlich durch folgende Einflußgrößen bestimmt:

- Die Scherkräfte der Gasströmung bestimmen Strömungsrichtung und zum großen Teil auch die Geschwindigkeiten der Schmelze. Dadurch werden Lage und Dimension der partiellen Blockaden präfixiert. Totale Blockaden bilden sich nicht, da die Geometrie nicht reaktortypisch ist, sondern etwa einen Faktor 2 zu breit ist.
- Bei höheren Gasgeschwindigkeiten ($u_g \gtrsim 17$ m/sec) kann das Hüllrohr auf Grund seiner Wechselwirkung mit der Gasströmung versprühen. Die abgelösten Tropfen haben eine radiale Geschwindigkeitskomponente und lagern sich infolge ihrer Trägheitsbewegung wieder auf dem Plexiglasrohr ab. Die Verteilung der Tropfen auf dem Plexiglasrohr wird dabei wesentlich durch die Versprühraten längs der Schmelzzone bestimmt. Der prozentuale Anteil der versprühten Tropfen kann sehr hoch sein, wie die fünfte Spalte von Tabelle 3 zeigt.

- Die Dimension der partiellen Blockaden ist ein Ergebnis des Wechselspiels von Wärmekonvektion und radialer Wärmeleitung in den Trägerstab. Die Konvektion wird dabei wesentlich durch die Wandschubspannung beeinflusst, die im Falle eines rauhen Untergrundes groß ist und die Strömung hemmt. Ferner kann auch das Versprühen des Filmes an solchen Stellen die Blockadebildung nachhaltig beeinflussen. Tropfenabriß wird dabei durch die sehr hohen Gasgeschwindigkeiten bei Verengung des Strömungsquerschnittes möglich, wobei eine hohe Wandschubspannung gerade das Material zum Versprühen liefert. Zur Illustration zeigen abschließend die Abbildungen (16-19) vier Beispiele der Hüllrohrbewegung. Es treten dabei die drei typischen Strömungsbereiche der gleich- und gegensinnigen Strömung beider Phasen sowie der stagnierenden Filmströmung auf. Die Abbildungen zeigen eine Hälfte des Querschnitts durch den Heizstab und den Strömungskanal der Argongasströmung. Die waagrecht schraffierten Teile bedeuten festes Hüllrohr, die unschraffierten dagegen geschmolzenes Hüllrohr, das sich längs des Heizstabes oder über erstarrtes Hüllrohr bewegt. Versprühte Fragmente, die sich auf der Plexiglaswand angelagert haben, sind schräg schraffiert angegeben. Jede Abbildung zeigt vier Zeitpunkte der Hüllrohrbewegung.

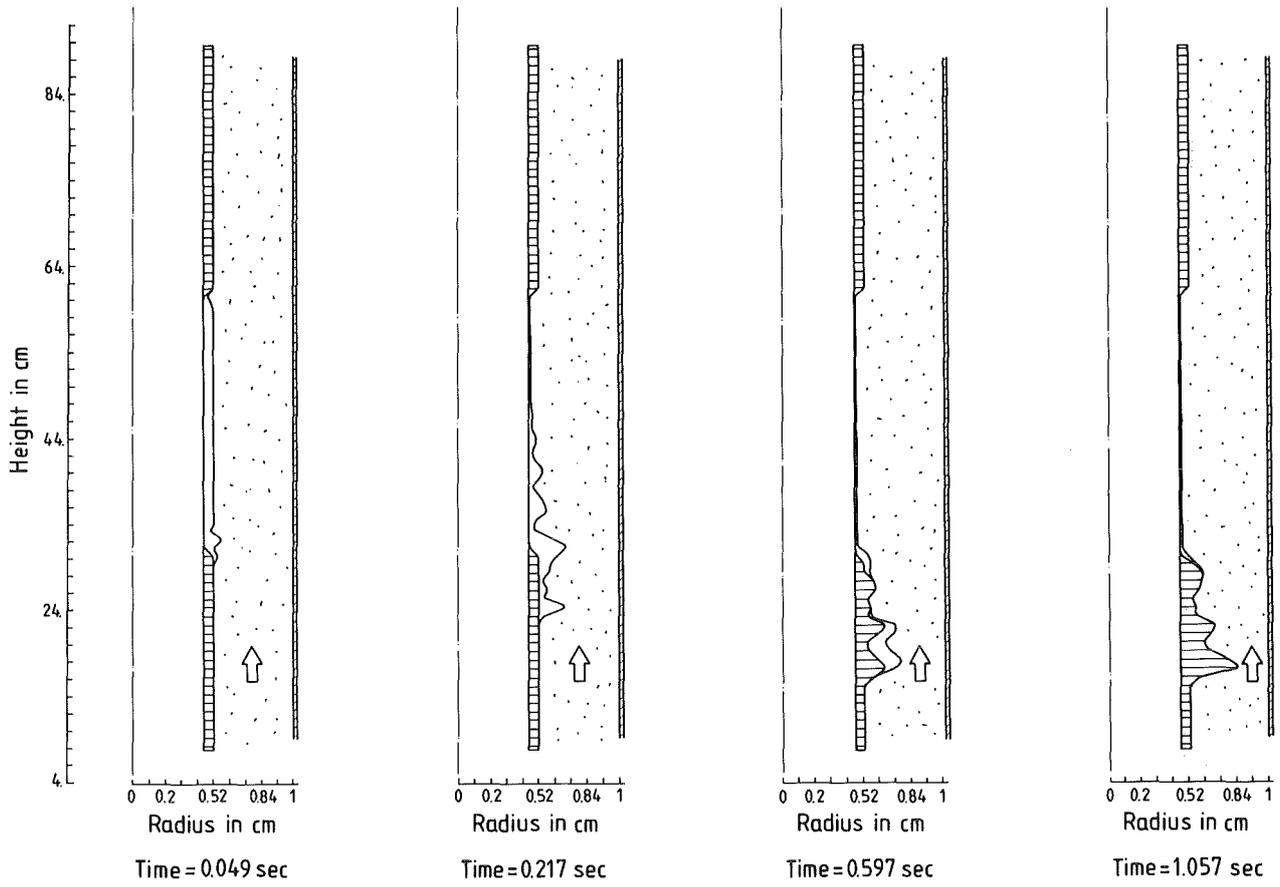


Abb. 16: Hüllrohrbewegung bei einer Gasgeschwindigkeit von 6,95 m/sec (gegenseinnige Strömung beider Phasen)

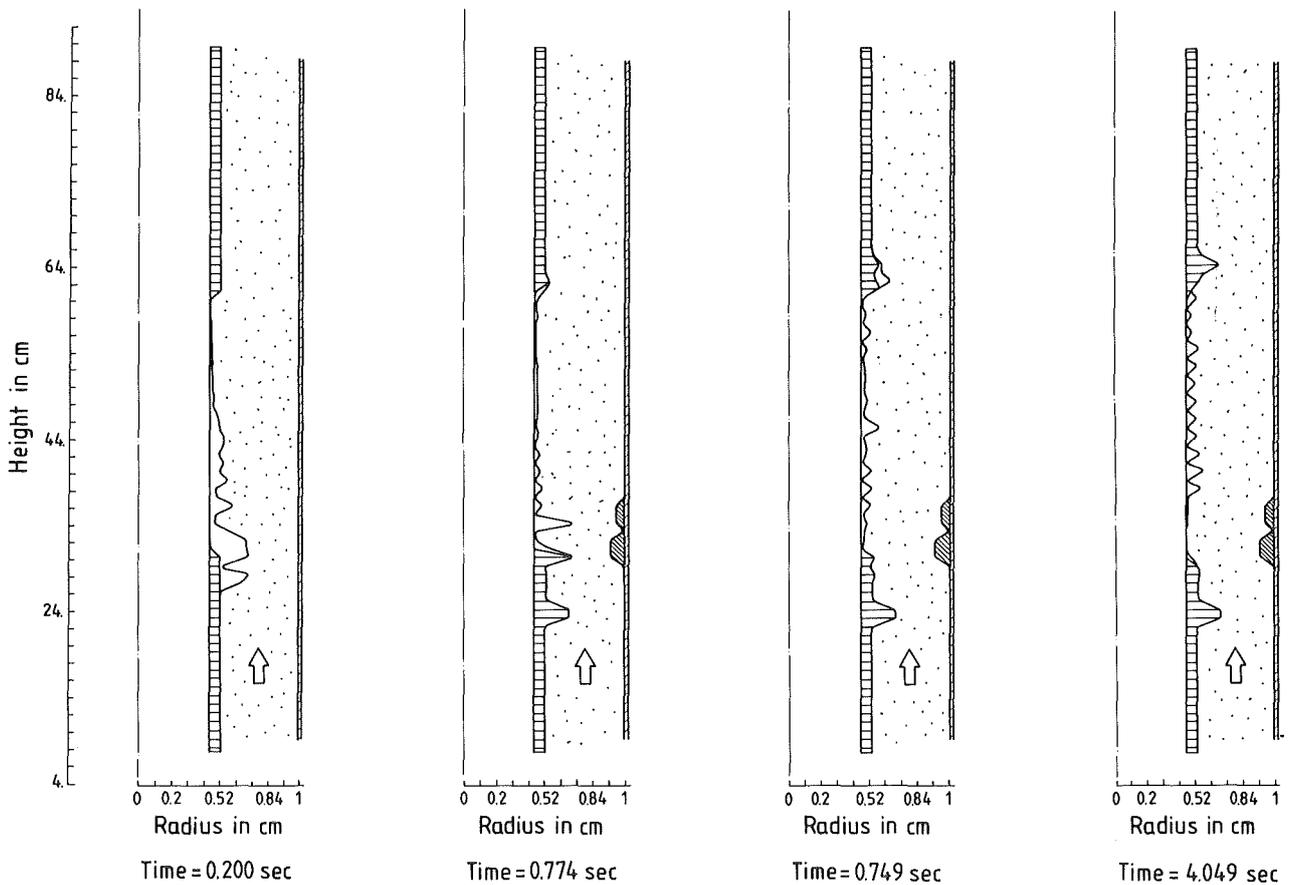


Abb. 17: Hüllrohrbewegung bei einer Gasgeschwindigkeit von 23 m/sec (stagnierende Filmströmung)

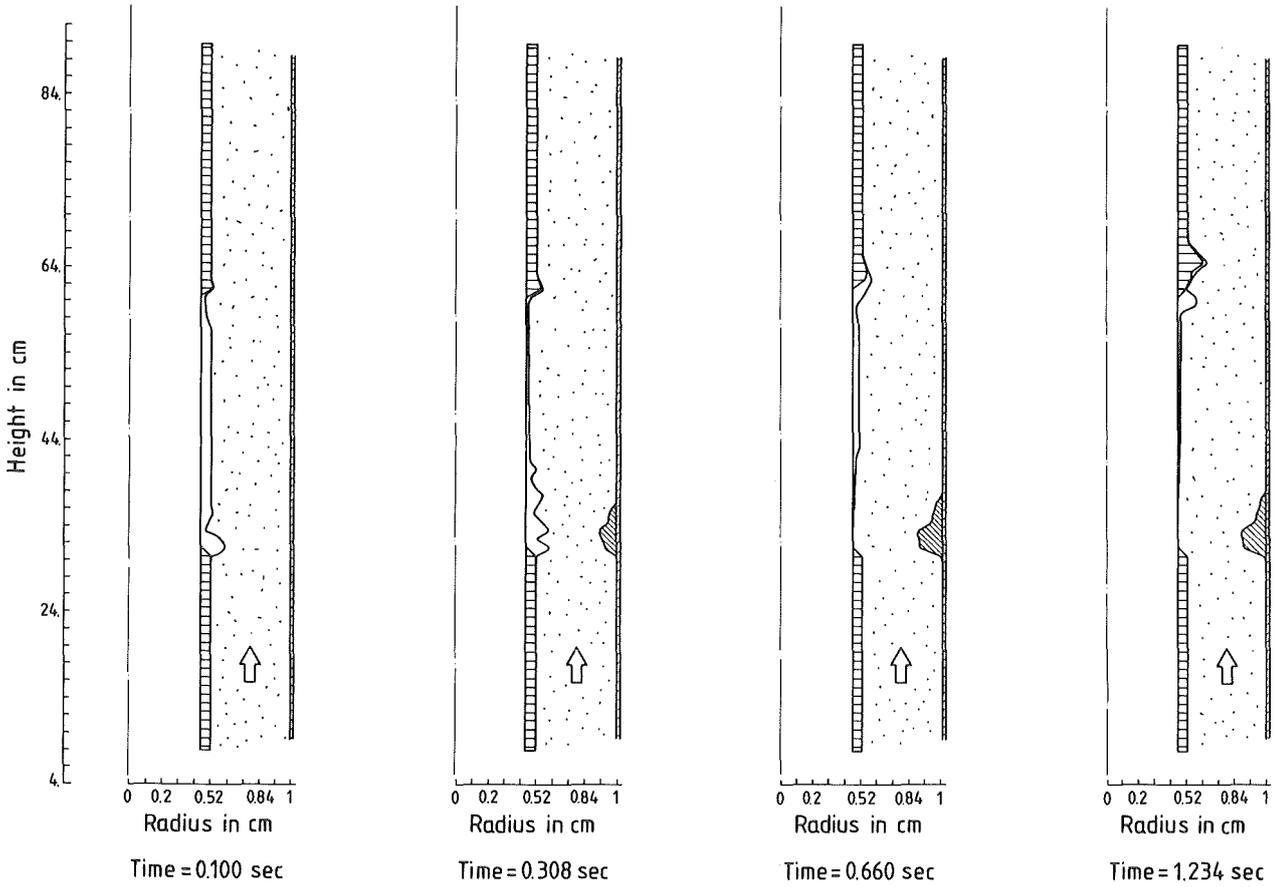


Abb. 18: Hüllrohrbewegung bei einer Gasgeschwindigkeit von 29 m/sec (gegensinnige und gleichsinnige Strömung beider Phasen)

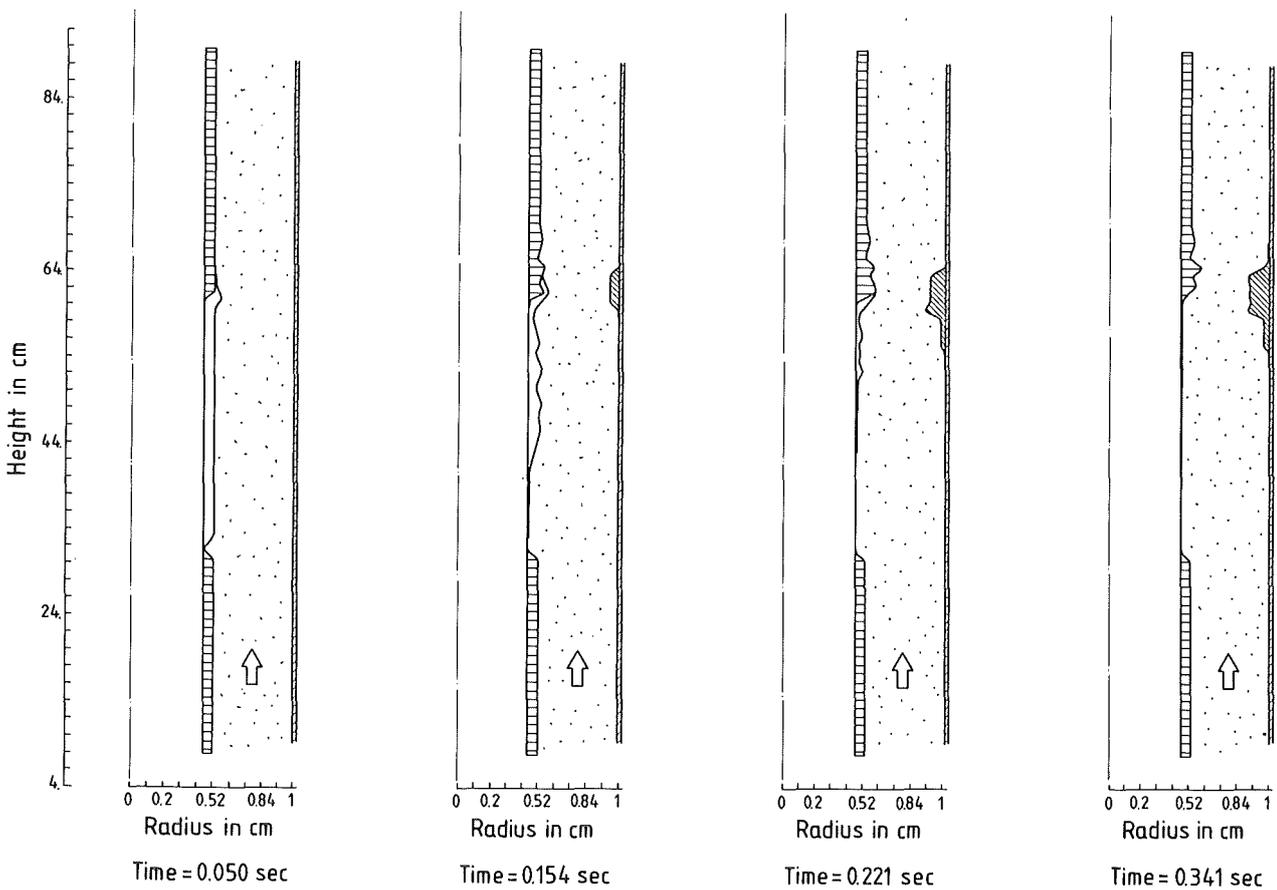


Abb. 19: Hüllrohrbewegung bei einer Gasgeschwindigkeit von 81 m/sec (gleichsinnige Strömung beider Phasen)

5. Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem vorgestellten Modell der Hüllrohrbewegung konnten sechs 'out-of-pile'-Experimente bei guten Benetzungsverhältnissen zwischen Schmelze und Stab mit Erfolg nachgerechnet werden. Die für die Austragung der Schmelze aus dem Heizbereich nötigen Zeiten und damit die im zeitlichen Mittel vorliegenden Filmgeschwindigkeiten können gut reproduziert werden. Ebenso werden i. a. integrale Druckverluste über die gesamte Teststrecke befriedigend wiedergegeben. Bei kürzeren Meßstrecken treten jedoch Abweichungen auf, die auf vereinfachte Modellierung der komplexen Strömungsvorgänge zurückzuführen sind. Die globale Hüllrohrverteilung bei Versuchsende kann jedoch wieder befriedigend simuliert werden. Da unter Reaktorstörfallbedingungen zu erwarten ist, daß bei Temperaturen um den Schmelzpunkt des Hüllrohres ($T_{SP} \approx 1385^{\circ}C$) die Benetzungseigenschaften des Stahles auf Brennstoff mäßig sind /51/, bedarf es weiterer Entwicklungsarbeiten, um auch eine Tropfen- oder 'slug'-Strömung modellieren zu können. Das Verhalten der versprühenden Fragmente wird dabei nachhaltig durch den Versprühprozeß selbst bestimmt. Dieser wiederum scheint eng mit den charakteristischen Wellenstrukturen der Filmströmung verknüpft zu sein. Durch den Einfluß der Gasströmung ist ein Film auf vielerlei Weise instabil, wobei die verschiedenen Wellenphänomene auf einer komplexen Physik basieren. Sie folgen i. a. keiner linearen Gleichung mehr, sondern sind wesentlich durch die Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen bestimmt. Ein befriedigendes Modell des Versprühvorganges sollte eine Verbindung knüpfen zwischen den elementaren Wellenerscheinungen eines Filmes und den charakteristischen Eigenschaften der versprühenden Teile.

6. Nomenklatur

A	$[\bar{\text{cm}}^2\bar{]}/$	Strömungsquerschnittsfläche des flüssigen Hüllmaterials, $A = \pi(r_i^2 - r_w^2)$
A_g	$[\bar{\text{cm}}^2\bar{]}/$	Strömungsquerschnittsfläche der Gasphase, $A_g = \pi(r_t^2 - r_i^2)$
B	$[\bar{\text{cm}}/\text{sec}^2\bar{]}/$	radiale Beschleunigung der Tropfen
c	$[\bar{\text{cm}}/\text{sec}\bar{]}/$	Wellengeschwindigkeit
c_p	$[\bar{\text{Ws}}/\text{g}^{\circ}\text{K}\bar{]}/$	spezifische Wärme des Hüllmaterials
D_i	$[\bar{\text{cm}}^2/\text{sec}\bar{]}/$	reduzierte Tropfenablagerungsrate in Masche i
Dt_n	$[\bar{\text{sec}}\bar{]}/$	numerischer Zeitschritt
d	$[\bar{\text{cm}}\bar{]}/$	Tropfendurchmesser
d_{h_i}, d_{h_t}	$[\bar{\text{cm}}\bar{]}/$	hydraulische Durchmesser (s. Abb. 2)
d_l	$[\bar{\text{cm}}\bar{]}/$	Ligamentdurchmesser (s. Abb. 8)
e	$[\bar{\text{Ws}}/\text{g}\bar{]}/$	Enthalpie pro Masseneinheit
E	$[\bar{\text{cm}}^2/\text{sec}\bar{]}/$	reduzierte 'entrainment'-Rate
f_i	$[\bar{-}\bar{]}/$	Zweiphasen-Reibbeiwert
f_0	$[\bar{-}\bar{]}/$	Reibbeiwert einer glatten Fläche
f_t	$[\bar{-}\bar{]}/$	Reibbeiwert der Rohrwand (s. Abb. 1)
g	$[\bar{\text{cm}}/\text{sec}^2\bar{]}/$	Gravitationsbeschleunigung
h	$[\bar{\text{cm}}\bar{]}/$	Filmdicke bei ebener Geometrie

\bar{h}	$[\bar{\text{cm}}]$	gemittelte Filmdicke
h_w	$[\bar{\text{cm}}]$	Wellenberghöhe (s. Abb. 6)
h_f	$[\bar{\text{cm}}]$	Dicke des Basisfilmes
k	$[\bar{1}/\text{cm}]$	Wellenzahl
P	$[\bar{\text{dyn/cm}^2}]$	Druck
q_w	$[\bar{\text{W/cm}^2}]$	Wärmestromdichte an der Filminnenseite
q_i	$[\bar{\text{W/cm}^2}]$	Wärmestromdichte an der Filmaußenseite
Re	$[\bar{-}]$	Reynoldszahl
r_w	$[\bar{\text{cm}}]$	Radius der Filminnenseite
r_i	$[\bar{\text{cm}}]$	Radius der Filmaußenseite
r_o	$[\bar{\text{cm}}]$	Radius der $\tau=0$ -Linie
r_t	$[\bar{\text{cm}}]$	Radius der Rohrwand
T	$[\bar{^\circ\text{K}}]$	Temperatur
TF	$[\bar{^\circ\text{K}}]$	Temperatur der geschmolzenen Hülle
TC	$[\bar{^\circ\text{K}}]$	Temperatur der ungeschmolzenen Hülle
t	$[\bar{\text{sec}}]$	Zeitvariable
u	$[\bar{\text{cm/sec}}]$	mittlere Filmgeschwindigkeit
u_z	$[\bar{\text{cm/sec}}]$	radiales Profil der Filmströmung
u_r	$[\bar{\text{cm/sec}}]$	Relativgeschwindigkeit

u_w	$[\text{cm/sec}]$	Wellengeschwindigkeit
u_g	$[\text{cm/sec}]$	mittlere Gasgeschwindigkeit
u_d	$[\text{cm/sec}]$	axiale Tropfengeschwindigkeit
u_i	$[\text{cm/sec}]$	axiale Filmgeschwindigkeit an der Grenzfläche zur Gasphase
u_e	$[\text{cm/sec}]$	'entrainment'-Geschwindigkeit
v	$[\text{cm/sec}]$	Wellengeschwindigkeit
v	$[\text{cm/sec}]$	radiale Geschwindigkeit der Tropfen
v_i	$[\text{cm/sec}]$	radiale Filmgeschwindigkeit an der Grenzfläche zur Gasphase
We	$[-]$	Weberzahl
ω	$[\text{1/sec}]$	Frequenz
y	$[\text{cm}]$	radiale Abstandskoordinate
z	$[\text{cm}]$	axiale Koordinate
α	$[-]$	volumetrische Gaskonzentration ('void fraction')
α_m	$[\text{1/sec}]$	Anwachsrate nach $e^{\alpha_m t}$
δ^*	$[\text{cm}]$	"Verdrängungsdicke" einer Grenzschicht
θ	$[\text{cm}]$	"Impulsverlustdicke" einer Grenzschicht
δ	$[\text{cm}]$	Filmdicke bei Zylindergeometrie, $\delta = r_i - r_w$

λ	$[\bar{W}/\text{cm}^{\circ}\text{K}\bar{}]$	Wärmeleitfähigkeit des Hüllmaterials
λ_m	$[\bar{\text{cm}}\bar{}]$	Wellenlänge von Kapillarwellen, m: maximale Anwachsrates
ϕ_1	$[\bar{^\circ}\bar{}]$	Ablösewinkel beim Tropfenabriß (s. Abb. 8)
κ_w	$[\bar{W}/\text{cm}^2\text{C}\bar{}]$	Wärmeübergangszahl an der Filminnenseite
κ_i	$[\bar{W}/\text{cm}^2\text{C}\bar{}]$	Wärmeübergangszahl an der Filmaußenseite
ψ_i	$[\bar{-}\bar{}]$	Zweiphasen-Wellenmultiplikator
μ_1	$[\bar{\text{g}}/\text{cmsec}\bar{}]$	dynamische Zähigkeit des Hüllmaterials
ν_1	$[\bar{\text{cm}}^2/\text{sec}\bar{}]$	kinematische Zähigkeit des Hüllmaterials
μ_r	$[\bar{\text{g}}/\text{cmsec}\bar{}]$	Referenzzähigkeit, $\mu_r = 4.3737 \cdot 10^{-4} [\bar{\text{g}}/\text{cmsec}\bar{}]$
ρ	$[\bar{\text{g}}/\text{cm}^3\bar{}]$	Dichte
τ_w	$[\bar{\text{g}}/\text{cmsec}^2\bar{}]$	Wandschubspannung an $r = r_w$
τ_i	$[\bar{\text{g}}/\text{cmsec}^2\bar{}]$	Zweiphasenschubspannung an $r = r_i$
τ	$[\bar{\text{g}}/\text{cmsec}^2\bar{}]$	Schubspannung innerhalb des Filmes
σ	$[\bar{\text{dyn}}/\text{cm}\bar{}]$	Oberflächenspannung des Hüllmaterials

Bedeutung der Indizes

d :	Tropfen
e :	'entrainment'
f :	Film
g :	Gas
i :	Grenzfläche zur Gasphase (interface)
l :	Liquid
w :	Wellen
w :	Grenzfläche zum Heiz- oder Brennstab

7. Literatur

- /1/ G. Angerer, Modelltheoretische Untersuchungen des Abschmelz- und Wiedererstarrungsvorgangs von Brennstabhüllen während Störfällen in schnellen natriumgekühlten Reaktoren, KfK 2662, 1978
- /2/ P.Royl, Untersuchungen zu Kühlmitteldurchsatzstörfällen im abgebrannten Mark 1A-Kern des Kernkraftwerks Kalkar, KfK 2845, 1979
- /3/ V.Casal, Experimental Investigation of Clad Motion in LMFBR, Proceedings of the L.M.F.B.R. Safety Topical Meeting, Vol IV, 271, Lyon (1982)
- /4/ P.Henkel, Numerical Simulation of Model Experiments With the CMOT-Code, Proceedings of the L.M.F.B.R. Safety Topical Meeting, Vol II, 77, Lyon (1982)
- /5/ V.Casal, persönliche Mitteilung
- /6/ A.S.Telles, A.E. Dukler, Statistical Characteristics of Thin, Vertical, Wavy, Liquid Films, Ind. Eng. Chem. Fundam. 9, 412-21 (1970)
- /7/ K.J.Chu, A.E.Dukler, Statistical Characteristics of Thin, Wavy Films: II. Studies of the Substrate and its Wave Structure, AICHE J. 20, 695-706 (1970)
- /8/ K.J.Chu, A.E.Dukler, Statistical Characteristics of Thin, Wavy Films: III. Structure of the Large Waves and Their Resistance to Gas Flow, AICHE J. 21, 583-93 (1975)
- /9/ V.G.Levich, Physicochemical Hydrodynamics, Prentice-Hall, New Jersey, 1962
- /10/ G.B.Wallis, One-dimensional Two-phase Flow, McGraw Hill Book Company, NY (1969)

- /11/ W.H.Henstock, T.J.Hanratty, Interfacial Drag and Film Height in Annular Flows, AICHE J., 22, 990 (1976)
- /12/ M.A. Grolmes et al., Flooding Correlation for Sodium and Cladding Motion in Subassembly Voiding, Trans. Am. Nucl. Soc. 18, 209, 1974
- /13/ K.Feind, Strömungsuntersuchungen bei Gegenstrom von Rieselfilmen und Gas in lotrechten Rohren, VDI-Forschungsheft 481, VDI-Verlag, Düsseldorf 1960
- /14/ K.Maubach, Reibungsgesetze turbulenter Strömungen in geschlossenen glatten und rauhen Kanälen von beliebigem Querschnitt, Diss. Univ. Karlsruhe 1969, KfK Ext. 4/69-22
- /15/ H.Schlichting, Grenzschichttheorie, Verlag G.Braun, Karlsruhe, 1958
- /16/ R.S.Timsit, The True Area of Contact at a Liquid Metal-solid Interface, Appl. Phys. Lett., Vol 40, Nr. 5, 1982
- /17/ J.M.Galan ERRO, Modèle de fusion, mouvement et relocalisation de gaine faisant suite à une réduction de débit du circuit de refroidissement dans un réacteur à neutrons rapides refroidi au sodium, Thèse Docteur-Ingenieur, L'Université de Provence Aix-Marseille 1, 1980.
- /18/ Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, Theoretische Grundlagen I, 28. Auflage, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin (1955)
- /19/ G.B.Whitham, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, NY, 1974
- /20/ V.Ye. Nakoryakov, S.V.Aleskseyenko, Waves on a Film Flowing Down an Incline, Fluid Mechanics 10, Nr. 3, 18-33, 1981
- /21/ O.Yu.Tsveldub, Steady-State Traveling Waves on a Vertical Liquid Film, Fluid Mechanics 10, Nr.3, 1-17, 1981

- /22/ J.Topper, T.Kawahara, Approximate Equations for Long Nonlinear Waves on a Viscous Fluid, J.Physical Society of Japan 44, No.2, 663-666, 1978
- /23/ B.J.Benney, A.C.Newell, The Propagation of Nonlinear Wave Envelopes, J. Math. Phys. 46, 133-139, 1967
- /24/ D.E.Woodmansee, T.J.Hanratty, Mechanism for the Removal of Droplets from a Liquid Surface by a Parallel Air Flow, Chem. Eng. Sci. 24, 299-307, 1969
- /25/ G.F.Hewitt, N.S.Hall-Taylor, Annular Two-Phase Flow, Pergamon Press, 1970
- /26/ G.I.Taylor, Generation of Ripples by Wind Blowing Over a Viscous Fluid, The Scientific Papers of Sir G.I. Taylor, III, 244, 1963, Cambridge University Press
- /27/ L.S.Cohen, T.J.Hanratty, Generation of Waves in the Concurrent Flow of Air and a Liquid, AICHE J. 11, No.1, 138-144, 1965
- /28/ J.W.Miles, On the Generation of Surface Waves by Shear Flows, J.Fluid Mech., 3, 185, (1957)
- /29/ T.B.Benjamin, J.Fluid Mech.6, 161 (1959)
- /30/ M.K.Smith, S.H.Davis, The Instability of Sheared Liquid Layers, J.Fluid Mech.121, 187-206, 1982
- /31/ D.F.Tatterson, Rates of Atomization and Drop Size in Annular Two-phase Flow, Ph.D.-Thesis, University of Illinois, 1974
- /32/ D.F.Tatterson, J.C.Dallmann, T.J. Hanratty, Drop Sizes in Annular Gas-Liquid Flows, AICHE J. 23, No.1, 68-76, 1977
- /33/ M.Ishii, M.A. Grolmes, Inception Criteria for Droplet Entrainment In Two-Phase Concurrent Film Flow, AICHE J, 21, No.2, 308-318, 1975
- /34/ R.S.Brodkey, The Phenomena of Fluid Motions, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967)

- /35/ R.B.Bird, W.E.Stewart, E.N.Lightfoot, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, 1960
- /36/ J.O.Hinze, Fundamentals of the Hydrodynamic Mechanism of Splitting in Dispersion Processes, AIChE J. 1, No. 3, 289-294, 1955
- /37/ J.J. van Rossum, Experimental Investigation of Horizontal Liquid Films, Chem. Eng. Sci. 11, 35 (1959)
- /38/ E.N. Ganić, R.Mastanaiah, Investigation of Droplet Deposition From a Turbulent Gas Stream, Int. J. Multiphase Flow, Vol.7, 401-422, 1981
- /39/ M.W. Reeks, G.Skyrme, The Dependence of Particle Deposition Velocity on Particle Inertia in Turbulent Pipe Flow, J.Aerosol Sci.7, 485-495,(1976)
- /40/ P.Hutchinson, G.F.Hewitt, Deposition of Liquid or Solid Dispersions from Turbulent Gas Streams: a Stochastic Model, Chem. Eng. Sci.26, 419-439, (1971)
- /41/ M.Ishii, I.Kataoka, Interfacial Transfer in Annular Dispersed Flow, Advances in Two-Phase Flow and Heat Transfer 1, 93, (1983)
- /42/ S.A.Krzeczkowski, Measurement of Liquid Droplet Disintegration Mechanisms, Int. J. Multiphase Flow 6, 227-239, 1980
- /43/ O.G.Engel, Fragmentation of Water in the Zone Behind of Air Shock, J.Res. Nat. Bureau of Standard 60, 245-249, (1958)
- /44/ P.B.Whalley, G.F.Hewitt, The Correlation of Liquid Entrainment Fraction and Entrainment Rate in Annular Two-Phase Flow, UKAEA report no. AERE-R-9187, (1978)
- /45/ P.S.Andersen, J.Würtz, Adiabatic Steam-Water Annular Flow in an Annular Geometry; Int. J. Multiphase Flow 7, 235-239 (1981)
- /46/ P.B.Whalley, G.F.Hewitt, J.W.Terry, Photographic studies of Two-Phase Flow Using a Parallel Light Technique, AERE-R-9389, (1979)

- /47/ L.B.Cousins, G.F.Hewitt, Liquid Phase Mass Transfer in Annular Two-Phase Flow: Radial Liquid Mixing, AERE-R-5693, (1968)
- /48/ P.Hutchinson, P.B.Whalley, G.F.Hewitt, Transient Flow Redistribution in Annular Two-Phase Flow, Int. J. Multiphase Flow 1, 383-393 (1974)
- /49/ H.Tennekes, J.L.Lumley, A First Course in Turbulence, MIT-Press, Cambridge, (1972)
- /50/ G.Q.Martin, L.N.Johanson, Turbulence Characteristics of Liquids in Pipe Flow, AIChE J. 11, 29-33 (1965)
- /51/ R.W.Ostensen, W.F.Murphy, B.J.Wrona, L.W.Deitrich, J.C.Florek, Intrusion of Molten Steel into Cracks in Solid Fuel in a Transient-Undercooling Accident in a Liquid-Metal Fast Breeder Reactor, Nucl. Techn. 36, 200-214, (1977)

Anhang A1: Wärmeübergang zwischen zwei Temperaturebenen

Es wird im folgenden die Wärmeleitungsgleichung für die in Abb. 20 dargestellte anfängliche Temperaturverteilung gelöst.

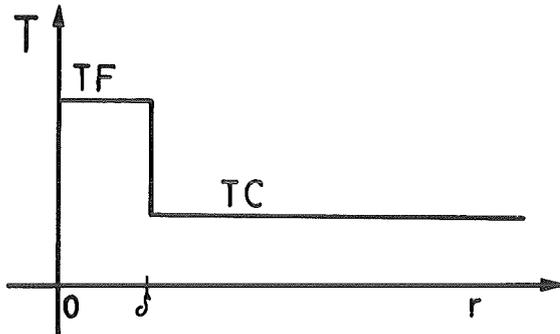


Abb. 20 : Anfangsverteilung der Temperatur

Die höhere Temperatur T_F korrespondiert dabei zu geschmolzenem Hüllrohr der Dicke δ , das Wärme in den Stab abgibt. Dieser befindet sich anfangs auf der Temperatur T_C und soll in diesem Modellfall unendlich ausgedehnt sein. Es soll ferner angenommen werden, daß der Stab ebenfalls aus Hüllrohr besteht, und die Stoffdaten der heißen und kalten Zone konstant sind. Tatsächlich besteht der Stab, beginnend bei $r = \delta$, zunächst aus einer Schicht Hüllrohr (Dicke $5 \cdot 10^{-2}$ cm) und anschließend aus einem massiven Kernrohr aus Stahl. Da der Wärmeübergang an $r = \delta$ nur in einer kleinen Umgebung die Temperaturen beeinflusst, bleibt die Zone aus Stahl ohne Einfluß darauf. Ebenso sind die Temperaturvariationen der Stoffdaten des Hüllrohres vernachlässigbar, so daß die Annahme konstanter Stoffdaten für die heiße und kalte Zone gerechtfertigt ist. Ferner wurde aus Gründen der Einfachheit der Darstellung der Ursprung des Koordinatensystems, der üblicherweise auf der Symmetrieachse des Heizstabes liegt, an den Rand der heißen Zone (Filmaußenrand) verlegt. Es ist somit die Gleichung

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$T(r, t=0) = \begin{cases} TF & r \leq \delta \\ TC & r > \delta \end{cases} \quad A1.2$$

zu lösen. ρ , c_p und λ bedeuten die Dichte, die Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit des Hüllrohres. Die Lösung zu obigem Modellproblem lautet

$$T(r, t) = TC + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta T \cdot \int_{\frac{r-\delta}{\sqrt{4t'}}}^{\frac{r+\delta}{\sqrt{4t'}}} e^{-\zeta^2} d\zeta \quad A1.3$$

$$\Delta T = TF - TC$$

$$t' = \frac{t \cdot \lambda}{\rho c_p}$$

Für eine typische thermodynamische Zeitspanne

$$t \sim \frac{\rho c_p \delta^2}{\lambda} \quad A1.4$$

ist das Integral nur für $r \leq 2\delta$ wesentlich von Null verschieden. Die Vereinfachung eines unendlich ausgedehnten homogenen Stabes ist daher gerechtfertigt. Der Wärmestrom an der Stelle $r = \delta$ folgt nun zu

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\delta} \quad A1.5$$

$$= \frac{\lambda \cdot \Delta T}{\sqrt{4\pi t'}} \{1 - e^{-\delta^2/t'}\},$$

die pro Zeiteinheit Dt und Flächeneinheit transportierte Energie lautet

$$\bar{q}_w = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} q_w(t) dt \quad \text{A1.6}$$

$$= \Delta T \sqrt{\frac{\rho c \lambda}{\pi \Delta t}} \left\{ 1 - e^{-\frac{\delta^2 \rho c}{\lambda \Delta t}} \right\} + \frac{\Delta T}{\Delta t} \rho c_p \delta \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\delta^2 \rho c}{\lambda \Delta t}}$$

Für Zeitschritte $\Delta t \leq \Delta t_{th} = \frac{\rho c \delta^2}{\lambda}$ gilt approximativ

$$\bar{q}_w = \kappa_w \cdot \Delta T \quad \text{A1.7}$$

$$\kappa_w = \sqrt{\frac{\rho c \lambda}{\pi \Delta t}}$$

Dies ist das gesuchte Resultat. Die numerischen Zeitschritte sind dabei aus Konvergenz- und Stabilitätsgründen des numerischen Verfahrens tatsächlich immer kleiner als Δt_{th} . Es soll noch angemerkt werden, daß man für $\Delta t = \frac{\rho c \delta^2}{\pi \cdot \lambda}$ den üblichen Ansatz

$$\bar{q}_w = \lambda \frac{\Delta T}{\delta} \quad \text{A1.8}$$

findet.

Anhang A2: Radiale Geschwindigkeitskomponente der Tropfen

Es wird im folgenden die radiale Geschwindigkeit der Tropfen unter der Annahme abgeschätzt, daß sich die Tropfen auf Grund der Kelvin-Helmholtz-Instabilität (s. Abb. 5, Fall 6 (a-c)) bilden. Die radiale Beschleunigung (als auch die Destabilisierung der Kapillarwelle) erfolgt durch die Druckvariationen über einer Welle. Die Umströmung eines Wellenberges führt in der Gasphase zu einem Unterdruck, während gleichzeitig im Wellenberg ein Überdruck herrscht /25/. Diese Druckdifferenz destabilisiert die Kapillarwelle, sie verformt sich und reißt schließlich ab. Dabei wird die Kapillarwelle mehrere Stadien der Verformung bis zum Abriß durchlaufen. Dies ist in Abb. 21 (b-d) schematisch dargestellt und ist in Zusammenhang zu Abb. 5, Fall 6 (a-c) zu sehen.

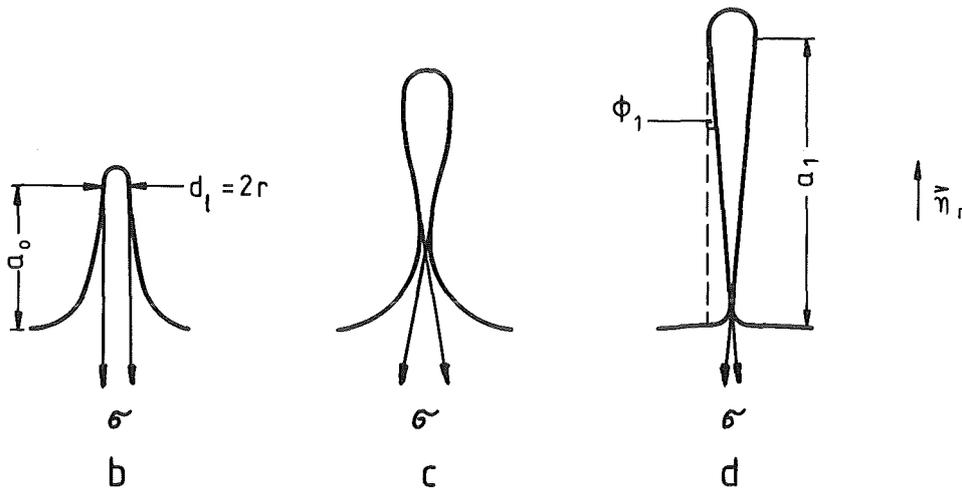


Abb. 21 (b-d): Modell der Tropfenbildung aus einer instabilen Kapillarwelle

Die Berechnung einer radialen Geschwindigkeit beruht nun darauf, Modellannahmen über die geometrische Gestalt der sich verformenden Welle zu machen. An Hand der geometrischen Vorstellungen werden dann die treibenden Druckkräfte sowie die Oberflächenspannungskräfte abgeschätzt. Bild b zeigt nun eine instabile Kapillarwelle, die sich zu einem Ligament verformt hat. Dieses soll aus einem Zylinder der Länge a_0 mit dem Durchmesser d_1 sowie einer Halb-

kugel bestehen. Es wird nun angenommen, daß das Ligament dadurch abreißt, daß sich der Zylinder durch die radiale Beschleunigung schließlich in einen Kegel transformiert wie es in Abb. 21 d dargestellt ist. Der Durchmesser der Halbkugel soll während der Beschleunigungsphase unverändert bleiben, genauso wie die Masse des sich verformenden Ligamentes. Es findet also kein Zustrom von Flüssigkeit aus der Filmströmung statt. Dann erfordert die Massenerhaltung, daß

$$a_1 = 3a_0 \quad \text{und} \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{d_1}{6a_0}\right) \quad \text{A2.1}$$

ist. Die an der Halbkugel angreifenden Druckkräfte sind normal zur Oberfläche gerichtet und führen zu einer resultierenden Druckkraft in radialer Richtung. Für diese gilt:

$$F_p = \pi d_1 \sigma \vec{n}_r \quad \text{A2.2}$$

Da die Halbkugel ihre Form nicht verändern soll, bleiben die beschleunigenden Druckkräfte konstant. Dagegen nimmt der Einfluß der Oberflächenspannungskräfte auf die radiale Bewegung stetig ab. Da die Oberflächenspannung tangential zur Ligamentoberfläche gerichtet ist, ist die Komponente in Richtung \vec{n}_r durch

$$F_\sigma = -\pi d_1 \sigma \cos\phi \cdot \vec{n}_r \quad \text{A2.3}$$

gegeben. Der Winkel ϕ ändert sich stetig von 0 bis ϕ_1 . Wird ϕ_1 erreicht, so reißt das Ligament ab. Die resultierende Kraft, die das Ligament beschleunigt, folgt nun zu

$$F = \pi d_1 \sigma (1 - \cos\phi) \cdot \vec{n}_r \quad \text{A2.4}$$

Die zu beschleunigende Masse bleibt nach Voraussetzung konstant und beträgt

$$M = \rho_1 \frac{1}{4} \pi d_1^2 \left(\frac{1}{3} d_1 + a_0\right) \quad \text{A2.5}$$

Damit ergibt sich die Beschleunigung zu

$$B(t) = b(1 - \cos\phi) \quad \text{A2.6}$$

$$b = \frac{4\sigma}{\rho_1 d_1 \left(\frac{1}{3} d_1 + a_0 \right)}$$

Ändert sich der Winkel ϕ linear mit der Zeit

$$\phi(t) = \phi' \cdot t, \quad t \leq t_1 \quad (\text{Zeitpunkt des Abrei\ssens}) \quad \text{A2.7}$$

$$\phi(t_1) = \phi_1,$$

so folgt für die radiale Geschwindigkeit v

$$v(t) = b \left(t - \frac{1}{\phi'} \sin\phi \right) \quad \text{A2.8}$$

$$v(t_1) = v_0 = b \left(t_1 - \frac{1}{\phi'} \sin\phi_1 \right)$$

Der Zeitpunkt des Abrei\ssens t_1 und ϕ' folgen aus der Tatsache, da\ss das Ligament bis zum Abri\ss eine Strecke von $2a_0$ zurücklegt (die Zylinderhöhe a_0 geht in die Kegelhöhe $3a_0$ über). Für das zurückgelegte Wegstück gilt

$$\Delta r(t) = \frac{b}{\phi'^2} \left(\frac{1}{2} \phi^2 + \cos\phi - 1 \right) \quad \text{A2.9}$$

Da

$$2a_0 = \frac{b}{\phi'^2} \left(\frac{1}{2} \phi_1^2 + \cos\phi_1 - 1 \right) \quad \text{A2.10}$$

ist, ergibt sich ϕ' zu

$$\phi' = \left\{ \frac{b}{2a_0} \left(\frac{1}{2} \phi_1^2 + \cos\phi_1 - 1 \right) \right\}^{1/2} \quad \text{A2.11}$$

und t_1 zu

$$t_1 = \phi_1 / \phi'.$$

Damit folgt für die radiale Geschwindigkeit v_0 des Ligamentes beim Abrei\ss

$$v_o = \sqrt{2a_o \cdot b} \frac{\phi_1 - \sin\phi_1}{\left(\frac{1}{2}\phi_1^2 + \cos\phi_1 - 1\right)^{1/2}} \quad \text{A2.12}$$

Zur Berechnung von v_o müssen noch die Größen d_1 und a_o spezifiziert werden. Dabei soll d_1 nach Gl. (62a) durch

$$d_1 = 0.048 \left(\frac{\sigma d_h}{\rho_g u_g^2} \right)^{1/2} \quad \text{A2.13}$$

gegeben sein. a_o wird aus dem Weberzahlkriterium bestimmt und soll gleich der kritischen Wellenamplitude h_{cr} (s. Gl. (71)) sein.

$$a_o = \frac{We_{cr} \sigma}{\rho_g u_r^2} \quad \text{A2.14}$$

Damit sind alle Faktoren bekannt, um b und ϕ_1 zu bestimmen. Für $u_g \approx u_r$ und $\frac{1}{3} d_1 \ll a_o$ folgt schließlich

$$\sqrt{2a_o \cdot b} \approx 12.9 \cdot \left(\frac{\rho_g u_g^2 \cdot \sigma}{d_h \cdot \rho_1^2} \right)^{1/4} \quad \text{A2.15}$$

Setzt man ferner einfachheitshalber den Ablösewinkel $\phi_1 \approx 10^0$, so erhält man

$$v_o = 1.84 \cdot \left(\frac{\rho_g u_g^2 \sigma}{d_h \rho_1^2} \right)^{1/4} \quad \text{A2.16}$$

Für typische Werte der einzelnen Größen ($\rho_g \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{g/cm}^3$, $\sigma = 411 \text{g/sec}^2$, $d_h \sim 1 \text{cm}$, $\rho_1 = 8.5 \text{g/cm}^3$, $u_g \sim (3-8) \cdot 10^3 \text{cm/sec}$) resultieren radiale Geschwindigkeiten zwischen 32 cm/sec und 54 cm/sec.