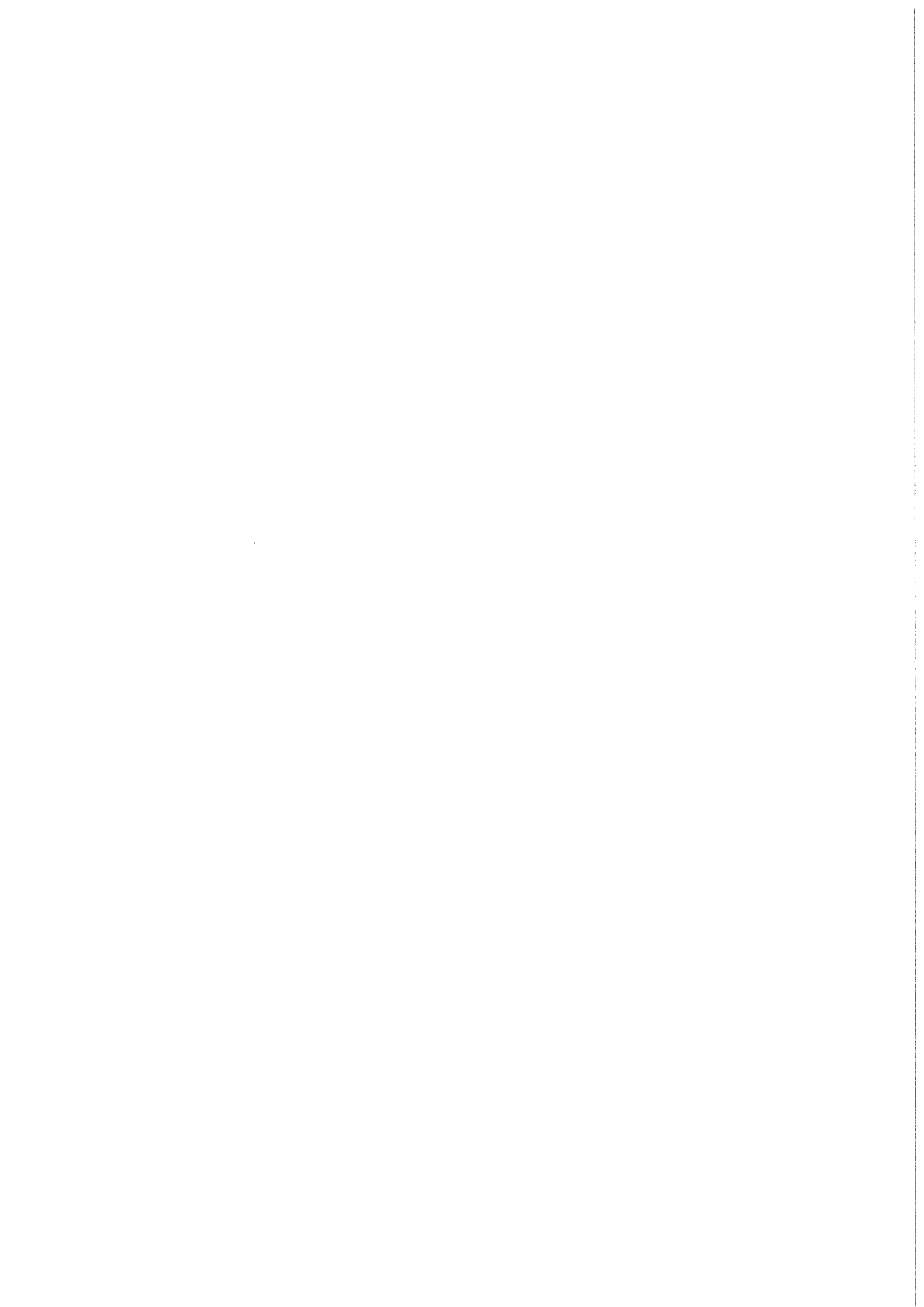


KfK 4015  
Dezember 1985

# **Bruchmechanische Kriterien für die instabile Rißausbreitung bei Wegregelung**

D. Munz, A. Brückner  
Institut für Material- und Festkörperforschung

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



K E R N F O R S C H U N G S Z E N T R U M K A R L S R U H E

Institut für Material- und Festkörperforschung

KfK 4015

Bruchmechanische Kriterien für die  
instabile Rißausbreitung bei Wegregelung

D. Munz, A. Brückner

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

## Bruchmechanische Kriterien für die instabile Rißausbreitung bei Wegregelung

Die Ausbreitung von Rissen in Bauteilen kann entweder unter Kraft- oder Wegregelung erfolgen. Bei Wegregelung erfolgt im allgemeinen zunächst eine stabile Rißausbreitung bei abnehmender Belastung, die bei einer kritischen Kraft in eine instabile Rißausbreitung übergeht. Das Einsetzen der instabilen Rißausbreitung ist abhängig vom Werkstoff, der Riß- und Bauteilgeometrie und der Steifigkeit bzw. Compliance des Belastungssystems. In diesem Bericht werden allgemeine Kriterien für den Zusammenhang zwischen Compliance und Rißgröße abgeleitet. Insbesondere werden die Beziehungen der linear-elastischen Bruchmechanik für flache und ansteigende Rißwiderstandskurven, die Gesetzmäßigkeiten der plastischen Instabilität und die Methoden des J-Integralverfahrens behandelt.

## Criteria for unstable crack extension under displacement control

Cracks in components can extend under load or displacement control. Under displacement control usually the cracks extend first stable under decreasing load and afterwards unstably. The critical load for the onset of unstable cracks extension is dependent on the material, the geometry of the crack and of the component and on the compliance of the loading system. In this report general criteria for the relation between compliance and cracks size are developed. In particular the relations for linear-elastic fracture mechanics for flat and rising crack growth resistance curves, the plastic instability criterion and the J-integral methods are discussed.

## Inhaltsverzeichnis

Seite

1.	Einleitung	1
2.	Linear-elastische Bruchmechanik	2
2.1	Flache Reißwiderstandskurve	3
2.1.1	F- $\Delta_C$ -Kurve	3
2.1.2	Instabilität bei Wegregelung	3
2.2	Ansteigende Reißwiderstandskurve	6
2.3	Kompliziertere Anordnungen	9
3.	Allgemeine Beziehungen für elastisch-plastisches Werkstoffverhalten	10
3.1	Generelles	10
3.2	Energiebetrachtung	12
4.	Plastische Grenzlast	15
5.	J-Integral-Verfahren	16
5.1	Allgemeine Beziehungen	16
5.2	$J_{Iapp1} \langle F, a \rangle$ nach EPRI-Handbook	20
5.3	J-Integral-Analyse nach Ernst et al. /3/	24
	Literatur	29
	Anhang	30
	Abbildungen	

## 1. Einleitung

Wird eine Probe oder ein Bauteil mit Riß verformt, so setzt bei einer bestimmten Belastung Rißverlängerung ein. Diese Verlängerung des Risses kann sofort instabil erfolgen, wobei die Rißgeschwindigkeit groß ist, und überschüssige Energie zur Verfügung steht, die sich nach dem vollständigen Bruch als kinetische Energie der Bruchstücke bemerkbar macht. Dieser instabilen Rißverlängerung kann eine stabile vorausgehen, die dadurch charakterisiert ist, daß sie durch Entlasten jederzeit wieder gestoppt werden kann.

Die Belastung, bei der instabile Rißverlängerung einsetzt, hängt vom Werkstoff, von der Bauteil- und Rißgeometrie, von der Steifigkeit des Belastungssystems und von der Art der Belastung ab. In dieser Arbeit wird die durch Abb. 1 schematisch dargestellte Konfiguration betrachtet. Sie besteht aus einer Probe bzw. einem Bauteil, an der die Kraft  $F$  angreift. Das Belastungssystem wird durch eine Feder symbolisiert. Dabei ist es gleichgültig, ob ein Teil des Bauteils zum Belastungssystem zugerechnet wird. Alle nachfolgenden Überlegungen können auf Belastungsfälle mit mehreren Einzelbelastungen übertragen werden. Nicht alle Systeme lassen sich auf das in Abb. 1 dargestellte Schema zurückführen. In Abschnitt 2.3 wird ein etwas komplizierteres System behandelt.

Die Gesamtverschiebung des Kraftangriffspunktes  $\Delta_G$  setzt sich zusammen aus der Verlängerung der Probe bzw. des Bauteils  $\Delta$  und der Verlängerung der Belastungseinrichtung  $\Delta_M$ . Die Probenverlängerung kann wiederum aufgeteilt werden in einen Anteil  $\Delta_0$ , den eine Probe ohne Riß haben würde und in einen Anteil  $\Delta_R$ , der durch den Riß hervorgerufen wird

$$\Delta_G = \Delta + \Delta_M = \Delta_0 + \Delta_R + \Delta_M \quad (1.1)$$

Es kann sinnvoll sein,  $\Delta_0$  und  $\Delta_M$  zu einer Größe  $\Delta_{M0}$  zusammenzufassen:

$$\Delta_G = \Delta_{M0} + \Delta_R \quad (1.2)$$

Bei der Art der Belastung wird zwischen Wegregelung und Kraftregelung unterschieden. Wird ein weggesteuerter Versuch durchgeführt und die Kraft in Ab-

hängigkeit von der Probenverlängerung  $\Delta$  gemessen, so kann ein stabiler Verlauf, wie er in Abb. 2 dargestellt ist, gemessen werden, wobei die Kraft nach Überschreiten eines Maximums abfällt. Dieser stabile  $F$ - $\Delta$ -Verlauf ist unabhängig von der Steifigkeit der Belastungseinrichtung. Bei Kraftregelung, wie sie z.B. bei einem Behälter unter Innendruckbelastung vorliegt, tritt instabile Reißverlängerung bei Erreichen der maximalen Kraft auf. Bei Wegregelung kann ebenfalls instabile Reißverlängerung auftreten. Die Kraft bzw. die Probenverlängerung, bei der dies auftritt, hängt aber im Gegensatz zur Instabilität bei Kraftregelung von der Steifigkeit des Belastungsterms ab. In diesem Bericht werden Zusammenhänge zwischen der Steifigkeit des Belastungssystems und der kritischen Belastung beim Auftreten instabiler Reißausbreitung hergeleitet.

## 2. Linear-elastische Bruchmechanik

Es wird angenommen, daß sich die Belastungsvorrichtung elastisch verhält und durch die Compliance  $C_M$  beschrieben wird:

$$C_M = \frac{\Delta_M}{F} \quad (2.1)$$

Auch  $\Delta_O$  und  $\Delta_R$  nehmen proportional zur Kraft zu und somit ist

$$\Delta_G = (C_O + C_R + C_M) F = (C_{M0} + C_R) F \quad (2.2)$$

$C_O$ ,  $C_M$  und  $C_{M0}$  sind unabhängig von der Reißlänge, während  $C_R$  von der Reißlänge abhängt.

Es wird nun eine Probe der Dicke  $B$  und der Breite  $W$  betrachtet und die bezogene Reißlänge

$$\alpha = \frac{a}{W} \quad (2.3)$$

eingeführt. Der Zusammenhang zwischen Kraft  $F$  und Spannungsintensitätsfaktor  $K$  läßt sich darstellen durch

$$K = \frac{F}{B\sqrt{W}} Y(\alpha), \quad (2.4)$$



wobei  $Y(\alpha)$  eine von der Probenform abhängige Funktion der Rißlänge ist. Für den Zusammenhang zwischen  $C_R$  und  $\alpha$  gilt dann

$$C_R = \frac{2}{EB} \int_0^{\alpha} Y^2 d\alpha \quad (2.5)$$

## 2.1 Fläche Rißwiderstandskurve

### 2.1.1 $F$ - $\Delta_G$ -Kurve

Es wird ein Werkstoff betrachtet, bei dem der Rißwiderstand während der Rißverlängerung konstant ist (Abb. 3):

$$R = G_{IR} = G_{Ic} = \text{const} \quad (2.6)$$

oder

$$K_{IR} = K_{Ic} = \text{const} \quad (2.7)$$

Dann folgt für die Kraft  $F$  während der Rißausbreitung aus Gl. (2.4)

$$F = \frac{K_{Ic} B\sqrt{W}}{Y(\alpha)} \quad (2.8)$$

Aus Gl. (2.2) folgt für die Gesamtverlängerung

$$\Delta_G = \left[ C_{Mo} + \frac{2}{EB} \int_0^{\alpha} Y^2 d\alpha \right] \frac{K_{Ic} B\sqrt{W}}{Y} \quad (2.9)$$

Gl. (2.8) und (2.9) liefern durch Eliminierung der Rißlänge  $\alpha$  einen Zusammenhang zwischen der Kraft  $F$  und der Gesamtverlängerung  $\Delta_G$  mit der Compliance als Parameter.

### 2.1.2 Instabilität bei Wegregelung

Die Bedingung für instabile Rißausbreitung bei Wegregelung kann auf verschiedene Weise formuliert werden:

a) Instabile Rißverlängerung tritt auf, wenn eine Zunahme der Rißlänge zu einer Abnahme der Gesamtverlängerung führt:

$$\frac{d\Delta_G}{da} < 0 \quad (2.10)$$

Aus Gl. (2.9) folgt dann

$$C_{Mo}^* > 2 \left[ \frac{Y^3}{Y'} - \int_0^\alpha Y^2 d\alpha \right] \quad (2.11)$$

Dabei ist  $C_{Mo}^*$  die dimensionslose Compliance, die definiert ist als

$$C_{Mo}^* = EBC_{Mo} \quad (2.12)$$

Gl. (2.11) liefert einen Zusammenhang zwischen der Rißlänge  $\alpha$  und der kritischen Compliance für das Auftreten instabiler Rißausbreitung.

Für eine Zugprobe mit Innenriß ist der  $C_{Mo}^*$ - $\alpha$ -Zusammenhang in Abb. 4 aufgetragen. Die  $Y(\alpha)$ -Funktion ist im Anhang 1 wiedergegeben. Mit zunehmender Rißlänge nimmt die notwendige Compliance, um instabile Rißausbreitung zu erhalten, zunächst zu, und nach Überschreiten eines Maximums wieder ab. In Abb. 5 sind Kraft-Verlängerungs-Diagramme für eine Rißlänge von  $\alpha = 0.1$  für drei verschiedene Compliance-Werte eingetragen. Dabei wurde die dimensionslose Kraft

$$F^* = \frac{F}{K_{Ic} B\sqrt{W}} \quad (2.13)$$

und die dimensionslose Verlängerung

$$\Delta_G^* = \frac{\Delta_G E}{K_{Ic} \sqrt{W}} \quad (2.14)$$

verwendet.

Für die kritische Compliance nach Gl. (2.11)  $C_{Mo}^* = 0,0232$  fällt die Kraft bei Erreichen von  $K_{Ic}$  senkrecht ab. Die Verlängerung  $\Delta_G$  nimmt dann aber

wieder zu. Für kleinere Compliance-Werte findet durchweg stabile Rißausbreitung unter zunehmender Verlängerung statt, während bei  $C_{Mo}^* > 0.0232$  die Verlängerung zunächst zurückgeht. Da es sich aber um Wegregelung handelt, fällt die Kraft plötzlich ab - der Riß breitet sich instabil aus. Unter Vernachlässigung der kinetischen Energie, die bei der instabilen Rißausbreitung entsteht, wird die Rißausbreitung wieder stabil, bei der in Abb. 5 eingezeichneten Kraft  $F_{st}^*$ .

- b) Die Instabilitätsbedingung kann auch aus einer Energiebilanz abgeleitet werden. Danach setzt instabile Rißverlängerung ein, wenn die während der Rißverlängerung frei werdende elastische Energie größer als die für die Rißausbreitung notwendige Energie ist. Dabei kann - da die Rißausbreitung spontan erfolgen soll - die Gesamtverlängerung nicht zunehmen und somit die äußere Kraft keine Arbeit leisten. Die Instabilitätsbedingung lautet daher

$$-\frac{1}{B} \frac{dU_{el}}{da} > G_{Ic}, \quad (2.15)$$

wobei

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}}{E'} \quad (2.16)$$

ist. Das negative Vorzeichen in Gl. (2.15) bedeutet, daß eine Abnahme der elastisch gespeicherten Energie einen positiven Beitrag für die Rißverlängerung liefert. Mit

$$U_{el} = \frac{1}{2} F \Delta_G = \frac{1}{2} F^2 (C_{Mo} + C_R) \quad (2.17)$$

ergibt sich

$$-\frac{1}{B} \frac{dU_{el}}{da} = F (C_{Mo} + C_R) \frac{dF}{da} + \frac{1}{2} F^2 \frac{dC}{da} \quad (2.18)$$

Aus Gl. (2.8) folgt

$$\frac{dF}{da} = - \frac{K_{Ic} B Y'}{\sqrt{W} Y^2} \quad (2.19)$$

Gl. (2.8), (2.15), (2.16), (2.18), (2.19) führen schließlich zu der bereits abgeleiteten Gl. (2.11).

c) Als weitere Instabilitätsbedingung kann geschrieben werden

$$\left(\frac{dG_I}{da}\right)_{\Delta_G} > 0, G_I = G_{Ic} \quad (2.20)$$

Dies bedeutet, daß bei einer Zunahme der Rißlänge bei konstant gehaltener Gesamtverlängerung die Energiefreisetzungsrage - d.h. die zur Rißverlängerung zur Verfügung stehende Energie - zunimmt. Aus

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} = \frac{F^2 Y^2}{E' B^2 W} = \frac{\Delta_G^2 Y^2}{E' B^2 W (C_{M_0} + C_R)^2} \quad (2.21)$$

folgt

$$\left(\frac{dG}{da}\right)_{\Delta_G} = \frac{\Delta_G^2}{E' B^2 W^2} \left[ \frac{2 Y Y'}{(C_{M_0} + C_R)^2} - \frac{4 Y^4}{(C_{M_0} + C_R)^3 EB} \right] = 0 \quad (2.22)$$

und somit wiederum Gl. (2.11).

In Abb. 6 ist die auf  $G_{Ic}$  bezogene Energiefreisetzungsrage für konstante Verlängerung  $\Delta_G^*$  gegen die Rißlänge für eine Compliance von  $C_{M_0}^* = 0.1$  aufgetragen. Für  $\Delta_G^* = 0.327$  berührt die Kurve die Rißwiderstandskurve ( $G/G_{Ic} = 1$ ) bei  $\alpha = 0.22$ . Damit Rißverlängerung bei größeren oder kleineren Rißlängen einsetzt, muß  $\Delta_G$  weiter erhöht werden. Bei  $\Delta_G^* = 0.4$  setzt z.B. Rißverlängerung bei einer Rißlänge von  $\alpha = 0.09$  ein. Der Riß springt instabil bis zu  $\alpha = 0.42$  (wieder unter Vernachlässigung von kinetischer Energie).

## 2.2 Ansteigende Rißwiderstandskurve

Bei einem Werkstoff mit ansteigender Rißwiderstandskurve nimmt  $G_{IR}$  bzw.  $K_{IR}$  mit zunehmender Rißverlängerung  $\Delta a$  zu:

$$K_{IR} = \sqrt{G_{IR} E'} = f \langle \Delta a \rangle = f \langle a - a_0 \rangle$$

Anstelle der Gl. (2.8) und (2.9) tritt jetzt

$$F = \frac{K_{IR} B/W}{Y} \quad (2.23)$$

$$\Delta_G = \left[ C_{Mo} + \frac{2}{EB} \int_0^{\alpha} Y^2 d\alpha \right] \frac{K_{IR} B/W}{Y} \quad (2.24)$$

Gl. (2.23) und (2.24) beschreiben impliziert die  $F-\Delta_G$ - Kurve mit  $C_{Mo}$  und der Anfangsrißlänge  $\alpha_0$  als Parameter.

Das Einsetzen instabiler Rißverlängerung kann wieder durch drei unterschiedlich formulierte Instabilitätsbedingungen ermittelt werden:

a)

$$\frac{d\Delta_G}{da} < 0 \quad (2.25)$$

Aus Gl. (2.24) folgt

$$C_{Mo}^* > 2 \left[ \frac{Y^3}{Y' - \frac{WY}{K_{IR}} \cdot \frac{dK_{IR}}{da}} - \int_0^{\alpha} Y^2 d\alpha \right] \quad (2.26)$$

Die kritische Compliance ist jetzt nicht mehr eine eindeutige Funktion der Rißlänge  $\alpha$ , sondern auch von der Anfangsrißlänge  $\alpha_0$ .

b)

$$-\frac{dU_{e1}}{Bda} > G_{IR} = \frac{K_{IR}^2}{E'} \quad (2.27)$$

c) Anstelle der Gl. (2.20) tritt jetzt

$$\left(\frac{\partial G_I}{\partial a}\right)_{\Delta_G} > \frac{dG_{IR}}{da}, \quad G_I = G_{IR} \quad (2.28)$$

Beide Gleichungen führen wiederum zu der durch Gl. (2.26) dargestellten Instabilitätsbedingung.

Als Beispiel ist in Abb. 7 für eine Zugprobe mit Innenriß  $C_{M0}^*$  gegen  $\alpha$  mit  $\alpha_0$  als Parameter aufgetragen. Für die Rißwiderstandskurve wurde der Verlauf

$$\begin{aligned} K_{IR} &= A(a^* + \Delta a)^{0.106} \\ &= AW^{0.106} (\alpha^* + \alpha - \alpha_0)^{0.106} \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit  $\alpha^* = 0.00216$

angenommen. Von Bedeutung ist dabei nur der ausgezogene Kurventeil. Der gestrichelte Teil gibt die Rißlänge wieder, bei der nach dem Auftreten der instabilen Rißverlängerung nochmals eine senkrechte Tangente der  $F-\Delta_G$ -Kurve auftritt (s. Abb. 9). Für  $\alpha_0 = 0.2$  ist die Compliance-Kurve noch einmal in Abb. 8 dargestellt. Zwischen  $\alpha_0 = 0.2$  und  $\alpha = 0.24$  ist keine Instabilität möglich, da in diesem Bereich die Kraft während der Rißverlängerung noch ansteigt. Ist  $C_{M0}^*$  kleiner als 0.42, dann ist die Rißverlängerung stabil bis zu  $\alpha$  von etwa 0.85, bei der Instabilität auftritt.

In Abb. 9 sind für  $\alpha_0 = 0.2$  Kraft-Verlängerungskurven für drei verschiedene Compliance-Werte aufgetragen. Die dimensionslosen Werte sind dabei definiert als

$$F^* = \frac{F}{A B W^{0.606}} \quad (2.30)$$

$$\Delta_G^* = \frac{\Delta_G E}{A \cdot W^{0.606}} \quad (2.31)$$

Auch hier wird deutlich, daß die Kraft beim Einsetzen der stabilen RiBverlängerung  $F_1^*$  und die maximale Kraft  $F_{\max}^*$  unabhängig von der Compliance ist. Bei  $C_{Mo}^* = 0.2$  tritt erst bei etwa  $\alpha = 0.9$  Instabilität auf, während bei  $C_{Mo}^* = 0.5$  kurz nach Überschreiten der maximalen Kraft instabile RiBverlängerung einsetzt.

### 2.3 Kompliziertere Anordnungen

In diesem Abschnitt werden zwei kompliziertere Anordnungen besprochen, wobei eine flache RiBwiderstandskurve angenommen wurde.

In Abb. 10a ist der Fall dargestellt, daß der Probe bzw. dem Bauteil eine zweite Komponente parallel geschaltet ist. Diese Komponente besitzt die Compliance  $C_{M1}$ . Die Gesamtkraft  $F$  teilt sich in die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  auf

$$F = F_1 + F_2 \quad (2.32)$$

Die Gesamtverschiebung  $\Delta_G$  ist für beide Komponenten gleich und somit

$$(C_{Mo} + C_R) F_1 = C_{M1} F_2 \quad (2.33)$$

Somit ist

$$F_1 = F \frac{C_{M1}}{C_{M1} + C_{Mo} + C_R} \quad (2.34)$$

$$F_2 = F \frac{C_{Mo} + C_R}{C_{M1} + C_{Mo} + C_R} \quad (2.35)$$

Aus

$$\Delta_G = (C_{Mo} + C_R) F_1 = (C_{Mo} + C_R) \frac{K_{Ic}}{B/W Y} \quad (2.36)$$

folgt die gleiche Instabilitätsbeziehung - Gl. (2.11) - wie bei Abschnitt 2.1.2. Dies bedeutet, daß die parallelgeschaltete Komponente das Instabili-

tätsverhalten bei Wegregelung nicht beeinflusst.

Ein zweites Beispiel ist in Abb. 10b dargestellt. Zu der parallelgeschalteten Komponente tritt noch eine weitere in Reihe mit der Compliance  $C_{M2}$ . Für die Gesamtverlängerung gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_G &= \Delta_1 + \Delta_2 \\
 &= (C_{Mo} + C_R) F_1 + C_{M2} F \\
 &= \left[ C_{Mo} + C_R + \frac{C_{M2}}{C_{M1}} (C_{M1} + C_{Mo} + C_R) \right] F_1 \\
 &= \left[ C_{Mo} + \frac{C_{M2}}{C_{M1}} (C_{M1} + C_{Mo}) + C_R \left( 1 + \frac{C_{M2}}{C_{M1}} \right) \right] \frac{K_{Ic} B\sqrt{W}}{Y} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Die Instabilitätsbedingung  $d\Delta_G/da = 0$  führt zu

$$C_{Mo} + \frac{C_{M2} \cdot C_{M1}}{C_{M1} + C_{M2}} > \frac{2}{EB} \left[ \frac{Y^3}{Y^1} - \int Y^2 d\alpha \right] \quad (2.38)$$

### 3. Allgemeine Beziehungen für elastisch-plastisches Werkstoffverhalten

#### 3.1 Generelles

Bei elastisch-plastischem Werkstoffverhalten kann die Verlängerung der Probe bzw. des Bauteils in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgeteilt werden

$$\Delta = \Delta_{el} + \Delta_{pl} = \Delta_o + \Delta_R + \Delta_{pl} \quad (3.1)$$



Für die Gesamtverlängerung gilt entsprechend

$$\Delta_G = \Delta_M + \Delta = \Delta_{Mo} + \Delta_R + \Delta_{pl}$$

Dabei ist  $\Delta_o$  wie bisher die elastische Verformung der Probe ohne Riß. Der plastische Anteil in Abhängigkeit von der Belastung kann experimentell ermittelt werden aus der Beziehung

$$\Delta_{pl} = \Delta_G - \Delta_{el} = \Delta_G - (C_{Mo} + C_R) F \quad (3.2)$$

Wird während des Versuches mehrmals entlastet, so ergibt sich die Zunahme der plastischen Verlängerung aus der bleibenden Verlängerung beim Entlasten (siehe Abb. 11).

Im folgenden wird angenommen, daß die plastische Verlängerung alleine auf den Riß zurückzuführen ist, d.h. ein Bauteil ohne Riß würde sich nur elastisch verformen.

Wird für eine Probe mit vorgegebener Anfangsrißlänge  $a_o$  ein Belastungsversuch durchgeführt und die Rißverlängerung gemessen, dann können folgende Zusammenhänge ermittelt werden, die unabhängig von der Compliance des Belastungssystems sind:

$$F - a$$

$$F - \Delta_{pl}, \quad F - \Delta_R$$

$$a - \Delta_{pl}$$

Aus diesen Zusammenhängen kann ohne die Anwendung irgend einer elasto-plastischen bruchmechanischen Vorstellung die kritische Compliance für instabile Rißausbreitung ermittelt werden.

Aus

$$\Delta_G = (C_{Mo} + C_R) F + \Delta_{pl} \quad (3.3)$$

und

$$\frac{d\Delta_G}{da} < 0$$

ergibt sich

$$C_{Mo}^* > \frac{\frac{2 F Y^2}{W} + E B \frac{d\Delta_{pl}}{da}}{\left| \frac{dF}{da} \right|} - 2 \int_0^\alpha Y^2 d\alpha \quad (3.4)$$

Die rechte Seite dieser Beziehung ist eine Funktion der Rißlänge bzw. der Rißverlängerung, die neben  $Y(\alpha)$  die Größen

$$F, \quad \frac{dF}{da}, \quad \frac{d\Delta_{pl}}{da}$$

enthält, deren Abhängigkeit von der Rißverlängerung einem Referenzversuch entnommen werden müssen. Somit kann mit Hilfe von Gl. (3.4) aus einem stabilen Versuch die kritische Compliance für Instabilität für die gleiche Anfangsrißlänge vorausgesagt werden, ohne daß irgend eine elasto-plastische bruchmechanische Theorie notwendig ist. Für eine Voraussage für andere Rißlängen oder andere Geometrien ist die Anwendung einer elasto-plastischen bruchmechanischen Theorie erforderlich.

Ist die Zunahme des plastischen Anteils der Verlängerung groß gegenüber der Änderung des elastischen, durch die Rißverlängerung hervorgerufenen Anteils, dann kann Gl. (3.4) zu

$$C_{Mo}^* > E B \frac{d\Delta_{pl}}{da} \quad (3.5)$$

vereinfacht werden.

### 3.2 Energiebetrachtung

Die Energiebilanz bei der Rißausbreitung wird zunächst für den linear-elastischen Fall anhand der Abb. 12 erläutert. Im Falle einer stabilen Rißverlängerung nimmt während einer infinitesimalen Rißverlängerung von  $a$  auf  $a + da$  die Gesamtverlängerung von  $\Delta_G$  auf  $\Delta_G + d\Delta_G$  zu und die Kraft von  $F$  auf  $F + dF$  ab.

Die Arbeit der äußeren Kraft ist durch die Fläche ABCD (3+4) gegeben:

$$dA = F d\Delta_G + \frac{1}{2} dF d\Delta_G \quad (3.6)$$

Die vom System Probe/Einspannung freigesetzte elastische Energie ist durch die Fläche OAD-OBC (1+2-2-3 = 1-3) gegeben:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} F\Delta_G - \frac{1}{2} (F + dF)(\Delta_G + d\Delta_G) \\ &= -\frac{1}{2} F d\Delta_G - \frac{1}{2} \Delta_G dF - \frac{1}{2} dF d\Delta_G \end{aligned} \quad (3.7)$$

Insgesamt steht somit für die Rißausbreitung zur Verfügung:

$$\frac{1}{2} F d\Delta_G - \frac{1}{2} \Delta_G dF \quad (3.8)$$

Dies entspricht der Fläche OABO (1+4), die somit die während der Rißverlängerung um  $da$  verbrauchte Energie darstellt. Da während der stabilen Rißausbreitung  $G_I = G_{IR}$  ist, entspricht diese Fläche auch der Energiefreisetzungsrates  $G_I$ .

Für den elasto-plastischen Fall sind die Verhältnisse in Abb. 13 dargestellt. Es ist dabei  $\Delta_{e1}$  und  $\Delta_{p1}$  gegen die Kraft aufgetragen. Der plastische Anteil  $\Delta_{p1}$  nimmt immer zu. Der elastische Anteil  $\Delta_{e1}$  kann bei abnehmender Kraft abhängig von der Compliance zu- oder abnehmen (Abb. 13a bzw. 13b).

Die Arbeit der äußeren Kräfte ist gegeben durch die Flächen ABCD + A'B'C'D', wobei in Abb. 13a die Fläche ABCD positiv und in Abb. 13b negativ ist:

$$\begin{aligned} dA &= F d\Delta_{e1} + \frac{1}{2} dF d\Delta_{e1} + F d\Delta_{p1} + \frac{1}{2} dF d\Delta_{p1} \\ &= F d\Delta_G + \frac{1}{2} dF d\Delta_G \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die frei werdende elastische Energie entspricht der Fläche OAD-OBC (gestrichelt in Abb. 13b). Wird diese Energie mit  $-dU_{el}$  bezeichnet ( $U_{el}$  ist die in der Probe gespeicherte Energie), dann ist

$$- dU_{el} = - \frac{1}{2} F d\Delta_{el} - \frac{1}{2} \Delta_{el} dF - \frac{1}{2} dF d\Delta_{el} \quad (3.10)$$

Die für die Rißausbreitung notwendige Energie setzt sich zusammen aus einem "elastischen" Anteil, der durch die Fläche OABO gegeben ist und einem plastischen Anteil, der durch die Fläche A'B'C'D' gegeben ist. Der elastische Anteil entspricht der bei einer elastischen Rechnung sich ergebenden Energiefreisetzungsrates und wird mit  $G_{IR,el}$  bezeichnet. Entsprechend wird der plastische Anteil mit  $G_{IR,pl}$  bezeichnet:

$$G_{IR,pl} = \frac{1}{2} \frac{dU_{pl}}{da} \quad (3.11)$$

Die Energiebilanz lautet somit

$$dA - dU_{el} = G_{IR,el} + G_{IR,pl} \quad (3.12)$$

Beim Einsetzen der instabilen Rißverlängerung ist  $d\Delta_G = 0$  oder

$$d\Delta_{pl} = - d\Delta_{el} \quad (3.13)$$

Da die Arbeit der äußeren Kraft dann gleich Null ist, liefert die elastisch frei werdende Energie den notwendigen elastischen Anteil  $G_{IR,el}$  und den plastischen Anteil  $G_{IR,pl}$ .

Die Instabilitätsbedingung läßt sich schreiben als

$$- \frac{1}{B} \frac{dU_{el}}{da} > \frac{1}{B} \frac{dU_{pl}}{da} + G_{IR,el} \quad (3.14)$$

Mit

$$U_{p1} = \int_0^{\Delta_{p1}} F d\Delta_{p1}$$

$$\frac{dU_{p1}}{da} = F \cdot \frac{d\Delta_{p1}}{da}$$

$$G_{IR,e1} = \frac{F^2 Y^2}{E' B^2 W}$$

$$U_{e1} = \frac{1}{2} F \Delta_{e1} = \frac{1}{2} F^2 (C_{Mo} + C_R)$$

ergibt sich

$$- F \cdot \frac{dF}{da} (C_{Mo} + C_R) - \frac{1}{2} F^2 \frac{dC_R}{da} = F \frac{d\Delta_{p1}}{da} + \frac{F^2 Y^2}{E' B W} \quad (3.15)$$

und somit die bereits anders abgeleitete Gl. (3.4)

#### 4. Plastische Grenzlast

Bei zähem Werkstoffverhalten kann die Rißausbreitung näherungsweise durch einfache Beziehungen der plastischen Grenzlast beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen der kritischen Belastung und der Rißlänge wird dabei aus der Bedingung des Kräfte- und Momentengleichgewichts erhalten, wobei im angerissenen Querschnitt eine konstante Fließspannung  $\sigma_f$  angenommen wird. Für diese wird im allgemeinen der Mittelwert zwischen Streckgrenze und Zugfestigkeit angesetzt.

Für ein zweidimensionales Problem, d.h. eine Platte der Dicke B und der Breite W mit einem Riß der Länge a, ist die plastische Grenzlast gegeben durch

$$F_{p1} = B W \sigma_f \cdot Z(\alpha) \quad (4.1)$$

wobei Z eine werkstoffunabhängige Funktion der relativen Rißlänge  $\alpha$  ist.

Instabilitätsvoraussagen können unter folgenden Voraussetzungen gemacht werden:

1. Während der stabilen Rißverlängerung ist Gl. (4.1) erfüllt, d.h. die Kraft verändert sich entsprechend der für das Bauteil gültigen Funktion  $Z(\alpha)$ .
2. Die plastische Energie ist eine Funktion der Rißverlängerung, die unabhängig von der Anrißlänge  $a_0$  ist:

$$U_{pl} = B \cdot g \cdot (a - a_0)$$

Diese Funktion kann aus einem Versuch mit einer beliebigen Anfangsrißlänge erhalten werden.

Aus

$$U_{pl} = \int_0^{\Delta_{pl}} F \, d\Delta_{pl} \quad (4.2)$$

folgt

$$\frac{dU_{pl}}{da} = \frac{dU_{pl}}{d\Delta_{pl}} \cdot \frac{d\Delta_{pl}}{da} = F \cdot \frac{d\Delta_{pl}}{da} \quad (4.3)$$

Mit Gl. (4.1) ergibt sich

$$\frac{d\Delta_{pl}}{da} = \frac{g'}{WZ\sigma_f} \quad (4.4)$$

und

$$C_{Mo}^* > \frac{2ZY^2}{Z'} + \frac{Eg'}{WZ \cdot Z'\sigma_f^2} - 2 \int_0^{\alpha} Y^2 d\alpha \quad (4.5)$$

## 5. J-Integral-Verfahren

### 5.1 Allgemeine Beziehungen

Bei der Beschreibung des Rißausbreitungsverhaltens mit dem J-Integral tritt anstelle des Spannungsintensitätsfaktors als Rißbelastungsgröße  $J_I$ , die manchmal auch als  $J_{Iappl}$  bezeichnet wird. Das materialspezifische Verhalten

wird durch den Verlauf der  $J_{IR}-\Delta a$ -Kurve beschrieben (Abb. 14). Rißausbreitung setzt ein, wenn  $J_I = J_{II}$  ist, während der weiteren Rißausbreitung wird  $J_{IR}$  zunehmen. Auf das Problem der Abhängigkeit der  $J_{IR}-\Delta a$ -Kurve von der Belastungsart (Zug- oder Biegung) und der Proben- bzw. Bauteilgröße soll hier nicht eingegangen werden. Die Instabilitätsbedingung kann bei Verwendung der J-Integralmethode geschrieben werden als

$$\left(\frac{\partial J_{Iappl}}{\partial a}\right)_F > \frac{dJ_{IR}}{da}, \quad J_{Iappl} = J_{IR} \quad (5.1)$$

für Kraftregelung

$$\left(\frac{\partial J_{Iappl}}{\partial a}\right)_{\Delta_G} > \frac{dJ_{IR}}{da}, \quad J_{Iappl} = J_{IR} \quad (5.2)$$

für Wegregelung.

Für die weitere Betrachtung wird zunächst ein Zusammenhang zwischen  $(\partial J_{Iappl}/\partial a)_{\Delta_G}$  und  $(\partial J_{Iappl}/\partial a)_F$  hergeleitet. Im folgenden wird zur Vereinfachung anstelle von  $J_{Iappl}$  lediglich  $J$  geschrieben. Zunächst wird die Gesamtverlängerung  $\Delta_G$  betrachtet, für die geschrieben werden kann

$$\Delta_G = \Delta < F, a > + C_M F, \quad (5.3)$$

wobei die Verlängerung der Probe als eine eindeutige Funktion von der Kraft  $F$  und der Rißlänge  $a$  angenommen wird. Eine inkrementelle Änderung von  $a$  und  $F$  ergibt dann

$$\begin{aligned} d\Delta_G &= \left(\frac{\partial \Delta_G}{\partial a}\right)_F da + \left(\frac{\partial \Delta_G}{\partial F}\right)_a dF \\ &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_F da + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial F}\right)_a dF + C_M dF \end{aligned} \quad (5.4)$$

Für Rißausbreitung bei  $\Delta_G = \text{const}$  ist somit

$$\left(\frac{dF}{da}\right)_{\Delta_G} = - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_F \left[ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial F}\right)_a + C_M \right]^{-1} \quad (5.5)$$

Eine inkrementelle Änderung von  $a$  und  $F$  führt zur einer Änderung von  $J$ :

$$dJ = \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_F da + \left(\frac{\partial J}{\partial F}\right)_a dF \quad (5.6)$$

Erfolgt die Änderung bei konstanter Gesamtverlängerung  $\Delta_G$ , dann ist

$$\left(\frac{dJ}{da}\right)_{\Delta_G} = \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_F + \left(\frac{\partial J}{\partial F}\right)_a \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Delta_G} \quad (5.7)$$

Unter Verwendung von Gl. (5.5) ergibt sich

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_{\Delta_G} = \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_F - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_F \left(\frac{\partial J}{\partial F}\right)_a \left[ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial F}\right)_a + C_M \right]^{-1} \quad (5.8)$$

Wie später gezeigt wird, gilt

$$\frac{1}{B} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_F = \left(\frac{\partial J}{\partial F}\right)_a \quad (5.9)$$

Gl. (5.8) kann dann geschrieben werden als

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_{\Delta_G} = \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_F - B \left(\frac{\partial J}{\partial F}\right)_a^2 \left[ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial F}\right)_a + C_M \right]^{-1} \quad (5.10)$$

Wird  $\Delta$  entsprechend Gl. (3.1) aufgeteilt, dann ist



$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial F}\right)_a + C_M = C_{Mo} + \left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a + C_R \quad (5.11)$$

Aus Gl. (5.2), (5.8) und (5.9) folgt für die kritische Compliance bei Instabilität

$$C_{Mo} = \frac{\left(\frac{\partial J_{Iappl}}{\partial F}\right)_a \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_F}{\left(\frac{\partial J_{Iappl}}{\partial a}\right)_F - \frac{dJ_{IR}}{da}} - \left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a - C_R \quad (5.12)$$

$$C_{Mo} = \frac{B \left(\frac{\partial J_{Iappl}}{\partial F}\right)_a^2}{\left(\frac{\partial J_{appl}}{\partial a}\right)_F - \frac{dJ_{IR}}{da}} - \left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a - C_R \quad (5.13)$$

Für spätere Betrachtungen werden noch einige Beziehungen für das J-Integral angegeben. Es ist

$$J = - \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_\Delta = - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_\Delta, \quad (5.14)$$

wobei U die Fläche unter der Kraft-Verlängerungskurve ist. Anstelle von Gl. (5.14) kann auch geschrieben werden (Abb. 15)

$$J = \frac{1}{B} \int_0^F \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_F dF = - \frac{1}{2} \int_0^\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_\Delta d\Delta \quad (5.15)$$

Durch Differentiation des ersten Integrals ergibt sich Gl. (5.9).

## 5.2 $J_{Iappl} \langle F, a \rangle$ nach EPRI-Handbook

Von Shih, Kumar und German wurden für verschiedene Probenformen  $J \langle F, a \rangle$  und  $\Delta \langle F, a \rangle$  in Abhängigkeit vom Verfestigungsverhalten berechnet und die Ergebnisse in Tabellenform zusammengestellt /1/. Die Berechnungen erfolgten für den vollplastischen Zustand. Für den Übergangsbereich von anfänglich elastischem Verhalten bei zunehmender Belastung wird eine modifizierte plastische Zonenkorrektur vorgeschlagen.

Das Verfestigungsverhalten wird durch

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + A \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (5.16)$$

dargestellt. Dabei ist  $\sigma_0$  die Fließgrenze.

Wird  $J$  nach Gl. (5.15) geschrieben als

$$J = \frac{1}{B} \int_0^F \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_F dF = \frac{1}{B} \int_0^F \left( \frac{\partial \Delta_{el}}{\partial a} \right)_F dF + \frac{1}{B} \int_0^F \left( \frac{\partial \Delta_{pl}}{\partial a} \right)_F dF \quad (5.17)$$

$$= J_{el} + J_{pl}$$

dann kann das  $J$ -Integral in einen elastischen und in einen plastischen Anteil aufgeteilt werden. Nach Shih et al /2/ kann der plastische Anteil für den vollplastischen Zustand dargestellt werden als

$$J_{pl} = A \epsilon_0 \sigma_0 W(1-\alpha) h_1 \langle \alpha, n \rangle \cdot \left( \frac{F}{F_L} \right)^{n+1} \quad (5.18)$$

Dabei ist  $\epsilon_0 = \sigma_0/E$  die zur Fließgrenze gehörige elastische Dehnung,  $F_L$  die Kraft bei der bei ideal-plastischem Werkstoffverhalten mit  $\sigma_0$  als Fließgrenze der vollplastische Zustand erreicht wird.  $h_1(\alpha, n)$  ist eine tabellierte Funktion der Riblänge  $\alpha$  und des Verfestigungsexponenten  $n$ .

Für die plastische Verlängerung  $\Delta_{p1}$  gilt

$$\Delta_{p1} = A \epsilon_0 W \alpha h_3(\alpha, n) \cdot \left(\frac{F}{F_L}\right)^n \quad (5.19)$$

$h_3$  ist eine ebenfalls tabellierte Funktion von  $\alpha$  und  $n$ . Unter Vernachlässigung von  $\Delta_{e1}$  bzw.  $J_{e1}$  folgt aus Gl. (5.9):

$$\frac{\sigma_0^{BW}}{F_L} \cdot \frac{h_1}{h_3} (n+1)(1-\alpha) = 1 + \alpha \frac{h_3'}{h_3} - \alpha n \frac{F_L'}{F_L} \quad (5.20)$$

Die Beziehungen  $h_1$  und  $h_3$  sind also voneinander abhängig. Der elastische Anteil  $J_{e1}$  ist gleich der Energiefreisetzungsrates  $G_I$  und somit

$$J_{e1} = \frac{F^2 Y^2}{B^2 W E} \quad (5.21)$$

Im folgenden wird

$$J = J_{e1} + J_{p1}$$

mit  $J_{p1}$  nach Gl. (5.18) und  $J_{e1}$  nach Gl. (5.21) verwendet und nicht der etwas komplizierter darzustellende Übergang mit der plastischen Zonenkorrektur. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\left(\frac{\partial J_{Iapp1}}{\partial F}\right)_a = \frac{2FY^2}{B^2WE} + A \varepsilon_0 \sigma_0 W(1-\alpha) h_1 (n+1) \left(\frac{F}{F_L}\right)^n \frac{1}{F_L} \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{\partial J_{Iapp1}}{\partial a}\right)_F = \frac{2F^2YY'}{B^2W^2E} + A \varepsilon_0 \sigma_0 \left(\frac{F}{F_L}\right)^{n+1} h_1 \left[ (1-\alpha) \frac{h_1'}{h_1} - 1 - (1-\alpha)(n+1) \frac{F_L'}{F_L} \right] \quad (5.23)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a = A \varepsilon_0 \alpha W h_3 n \left(\frac{F}{F_L}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{F_L} \quad (5.24)$$

Die Kraft  $F$  wird in die Gl. (5.22) - (5.23) als Funktion von  $J_{IR,p1}$  eingesetzt, die sich aus Gl. (5.18) ergibt:

$$F = F_L \cdot \left( \frac{J_{IR,p1}}{A \varepsilon_0 \sigma_0 W(1-\alpha) h_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (5.25)$$

Die kritische Compliance für Instabilität ergibt sich aus den Gl. (5.13) und (5.22) - (5.25) zu

$$M_0 = \frac{[A \varepsilon_0 G_0 W(1-d)h_1]^{\frac{2}{n+1}} B(n-1)^2 F_L^{-2} \cdot J_{IR,pl}^{\frac{2n}{n+1}}}{\frac{J_{IR,pl}}{W} \left[ \frac{h_1'}{h_1} - \frac{1}{1-d} - (n+1) \frac{F_L'}{F_L} \right] - \frac{dJ_{IR}}{da} + \frac{2YY'F_L^2}{B^2W^2E} \cdot J_{IR,pl}^{\frac{2}{n+1}} [A \varepsilon_0 G_0 W(1-d)h_1]^{-\frac{2}{n+1}}}$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{4Y^4 F_L^4}{E^2 B^2 W^2 (n+1)^2} \cdot J_{IR,pl}^{\frac{2(1-n)}{n+1}} [A \varepsilon_0 G_0 W(1-d)h_1]^{-\frac{4}{n+1}} \right.$$

$$\left. + \frac{4Y^2 F_L^2}{EW B^2 (n+1)} \cdot J_{IR,pl}^{\frac{1-n}{n+1}} [A \varepsilon_0 G_0 W(1-d)h_1]^{-\frac{2}{n+1}} \right\}$$

(5.26)

$$- \frac{n}{F_L} A \varepsilon_0 \alpha W h_3 [A \varepsilon_0 G_0 W(1-d)h_1]^{\frac{1-n}{n+1}} J_{IR,pl}^{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$- \frac{2}{EB} \int Y^2 d\alpha$$

Dabei wurden die elastischen Anteile in  $J$  und  $\Delta$  mit berücksichtigt. Können sie vernachlässigt werden, dann reduziert sich Gl. (5.26) zu

$$C_{M_0} = \frac{[A \varepsilon_0 G_0 W(1-d)h_1]^{\frac{2}{n+1}} B(n+1)^2 F_L^{-2} \cdot J_{IR,pl}^{\frac{2n}{n+1}}}{\frac{J_{IR,pl}}{W} \left[ \frac{h_1'}{h_1} - \frac{1}{1-d} - (n+1) \frac{F_L'}{F_L} \right] - \frac{dJ_{IR}}{da}}$$

(5.26a)

Diese Beziehung wird auch aus der allgemeinen Gleichung (3.4) erhalten. Der in dieser Beziehung enthaltene Ausdruck  $dF/da$ , d.h. die Änderung der Kraft mit der Rißverlängerung, ist abhängig von der Probenform und von der  $J_{IR}$ -a-Kurve. Er ergibt sich aus Gl. (5.22) zu

$$\frac{dF}{da} = \frac{F_L}{W} \left[ \frac{J_{IR, pl}}{A \varepsilon_o \sigma_o W (1-\alpha) h_1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \frac{F_L'}{F_L} + \frac{1}{n+1} \left[ \frac{W}{J_{pl}} \frac{dJ_{IR, pl}}{da} - \frac{h_1'}{h_1} + \frac{1}{1+\alpha} \right] \right\} \quad (5.27)$$

### 5.3 J-Integral-Analyse nach Ernst et al. /3/

Zur Ermittlung der  $J_{IR}-\Delta a$ -Kurve aus einer  $F-\Delta$ -Kurve wurde von Ernst et al eine Methode vorgeschlagen. Es wird dabei von folgenden Annahmen ausgegangen:

1. Die Kraft ist eine eindeutige Funktion von der Rißlänge  $a$  und der plastischen Verlängerung  $\Delta_{pl}$ , die unabhängig von der Ausgangsrißlänge  $a_o$  ist.
2. Es wird darüberhinaus angenommen, daß sich diese Abhängigkeit darstellen läßt als

$$F = h\langle a \rangle \cdot g\langle \Delta_{pl} \rangle, \quad (5.28)$$

wobei  $h$  nur eine Funktion von  $a$  und  $g$  nur eine Funktion von  $\Delta_{pl}$  ist. Diese Separation ist nicht allgemein erfüllt. Sie gilt vor allem für große Risse bei Biegebelastung.

Aus Gl. (5.15) folgt

$$J_{pl} = - \frac{1}{B} \int_{\Delta_{pl}} \left( \frac{\partial F}{\partial a} \right)_{\Delta_{pl}} \cdot d\Delta_{pl} \quad (5.29)$$

Mit

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Delta_{p1}} = h' \cdot g < \Delta_{p1} > = \frac{h'}{h} F \quad (5.30)$$

folgt

$$J_{p1} = -\frac{h'}{B} \int_0^{\Delta_{p1}} g < \Delta_{p1} > d\Delta_{p1} = -\frac{h'}{hB} \int F d\Delta_{p1} \quad (5.31)$$

für  $a = \text{const}$ , d.h. solange keine Rißverlängerung stattfindet, ergibt sich  $J_{p1}$  aus der Fläche unter der  $F-\Delta_{p1}$ -Kurve, wenn  $h < a >$  bekannt ist.

Tritt Rißverlängerung auf, dann ergibt sich eine differentielle Änderung von  $J_{p1}$  zu

$$\begin{aligned} dJ_{p1} &= \left(\frac{\partial J_{p1}}{\partial a}\right)_{\Delta_{p1}} da + \left(\frac{\partial J_{p1}}{\partial \Delta_{p1}}\right)_a d\Delta_{p1} \\ &= -\frac{h'''}{B} \int g d\Delta_{p1} \cdot da - \frac{h'g}{B} d\Delta_{p1} \\ &= \frac{h'''}{h'} J_{p1} da - \frac{h'}{Bh} F d\Delta_{p1} \\ &= \gamma J_{p1} da + \beta F d\Delta_{p1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

mit

$$\beta = -\frac{h'''}{Bh} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{h'''}{h'}$$

Aus Gl. (5.32) folgt eine Prozedur zur Ermittlung von  $J_{IR}$  in Abhängigkeit von der Rißverlängerung durch stufenweise Addition von  $\Delta J_{pl}$  entsprechend

$$J_{pl}^{i,i+1} = J_{pl}^i \cdot \ln( h' \langle i+1 \rangle / h' \langle i \rangle ) + \frac{\beta \langle i+1 \rangle + \beta \langle i \rangle}{2} U_{pl}^{i,i+1} \quad (5.33)$$

Dabei ist  $J_{pl}^{i,i+1}$  der Zuwachs von  $J_{pl}$  zwischen zwei Verformungsschritten  $i$  und  $i+1$  und  $U_{pl}^{i,i+1}$  die entsprechende Zunahme der plastischen Verformungsenergie.

Für Instabilitätsbetrachtungen unter Verwendung von Gl. (5.13) sind folgende Größen von Bedeutung:

$$\left( \frac{\partial J_{pl}}{\partial F} \right)_a = + \beta F \left( \frac{\partial \Delta_{pl}}{\partial F} \right)_a \quad (5.34)$$

$$\left( \frac{\partial J_{pl}}{\partial a} \right)_F = \gamma J_{pl} + \beta F \left( \frac{\partial \Delta_{pl}}{\partial a} \right)_F \quad (5.35)$$

Zwischen  $(\partial \Delta_{pl} / \partial a)_F$  und  $(\partial \Delta_{pl} / \partial F)_a$  kann ein Zusammenhang hergeleitet werden. Aus Gl. (5.28) folgt

$$\Delta_{pl} = g^{-1} \langle F/h \rangle \quad (5.36)$$

$$\left( \frac{\partial \Delta_{pl}}{\partial a} \right)_F = - (g^{-1})' \frac{F}{h^2} \cdot h' \quad (5.37)$$

$$\left( \frac{\partial \Delta_{pl}}{\partial F} \right)_a = (g^{-1})' \frac{1}{h} \quad (5.38)$$



und somit

$$\left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial a}\right)_F = -F \frac{h'}{h} \left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a = B \cdot F \beta \left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a \quad (5.39)$$

Aus Gl. (5.12) folgt dann für die kritische Compliance unter Vernachlässigung des elastischen Anteils von J:

$$C_{Mo} = \frac{B \beta^2 F^2 \left(\left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a\right)^2}{\gamma J_{IR,p1} + \beta^2 F^2 \left(\left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a\right)^2 - \frac{dJ_{IR}}{da}} - \left(\frac{\partial \Delta_{p1}}{\partial F}\right)_a \quad (5.40)$$

Diese Gleichung ist für die Voraussage einer kritischen Compliance nur anwendbar, wenn  $F$  und  $(\partial \Delta_{p1} / \partial F)_a$  als Funktion von  $a$  bekannt sind. Dies ist der Fall, wenn die Funktion  $g\langle \Delta_{p1} \rangle$ , die vom Verfestigungsverhalten des Materials und von der Geometrie des Bauteils abhängt, und  $h\langle a \rangle$  bekannt ist. Gl. (5.28) und (5.38) liefern dann die gewünschten Größen. Da in der Literatur keine Angaben über  $g\langle \Delta_{p1} \rangle$  zu finden sind, ist eine direkte Anwendung von Gl. (5.40) nicht möglich.

Die von Gl. (5.28) geforderte Separation der Abhängigkeit der Kraft von der Riblänge und der plastischen Verlängerung wird von dem in Abschnitt 5.2 beschriebenen Ansatz des EPRI-Handbooks erfüllt. Aus Gl. (5.19) folgt

$$F = F_L \left[ \frac{\Delta_{p1}}{A \epsilon_0 W \alpha \cdot h_3 \langle \alpha, n \rangle} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (5.41)$$

Mit

$$F_L = \sigma_0 B W Z \langle \alpha \rangle \quad (5.42)$$

ergibt sich

$$F = \frac{\sigma_0 B W Z \langle \alpha \rangle}{|A \epsilon_0 \alpha h_3|^{1/n}} \left(\frac{\Delta_{p1}}{W}\right)^{1/n} \quad (5.43)$$

$Z(\alpha)$  ist eine von der Bauteilgeometrie abhängige Funktion der relativen Rißlänge. Es kann somit geschrieben werden

$$g(\Delta_{p1}) = \left(\frac{\Delta_{p1}}{W}\right)^{1/2} \cdot \sigma_o \text{ BW} \quad (5.44)$$

$$h(a) = \frac{Z}{(A\varepsilon_o \alpha h_3)^{1/n}} \quad (5.45)$$

Literatur

- /1/ V. Kumar, M.D. German, D.F. Shih,  
Estimation Technique for the Prediction of Elastic-Plastic Fracture of  
Structural Components of Nuclear Systems, General Electric Report  
SRD -80-094, 1480
- /2/ C.F. Shih, J.W. Hutchinson, Trans. ASME, J. of Engineering and Tech-  
nology, 98 (1976), 289 - 245
- /3/ H.A. Ernst, P.C. Paris, J.D. Landes, ASTM-STP 743 (1981), S. 476-502

Anhang: Probe mit Innenriß

Für eine Probe der Breite  $2W$  mit Innenriß der Länge  $2a$  ist

$$Y = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\alpha} \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$$

$$Y' = \frac{\sqrt{\pi}}{4 \cdot \sqrt{\alpha(1-\alpha)}^{3/2}} \left[ 1 - 1.5\alpha + 2.63\alpha^2 - 1.304\alpha^3 \right]$$

$$\int_0^{\alpha} Y^2 d\alpha = -\frac{\pi}{4} \left[ 0.682276 \ln(1-\alpha) - 0.93338(1-\alpha) \right. \\ \left. + 0.40638(1-\alpha)^2 - 0.220253(1-\alpha)^3 \right. \\ \left. + 0.051345(1-\alpha)^4 - 0.021255(1-\alpha)^5 \right. \\ \left. + 0.717163 \right]$$

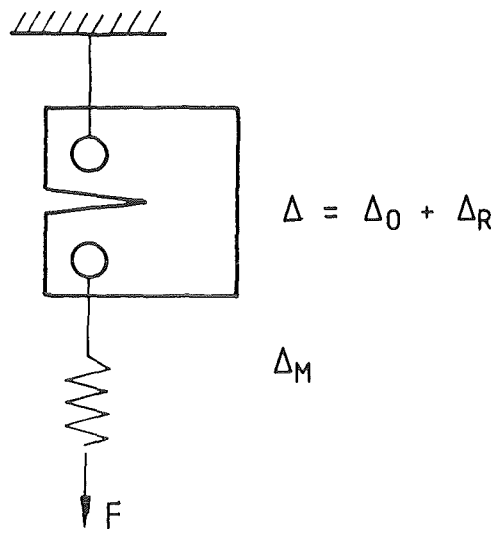


Abb. 1 Bauteil mit Belastungssystem

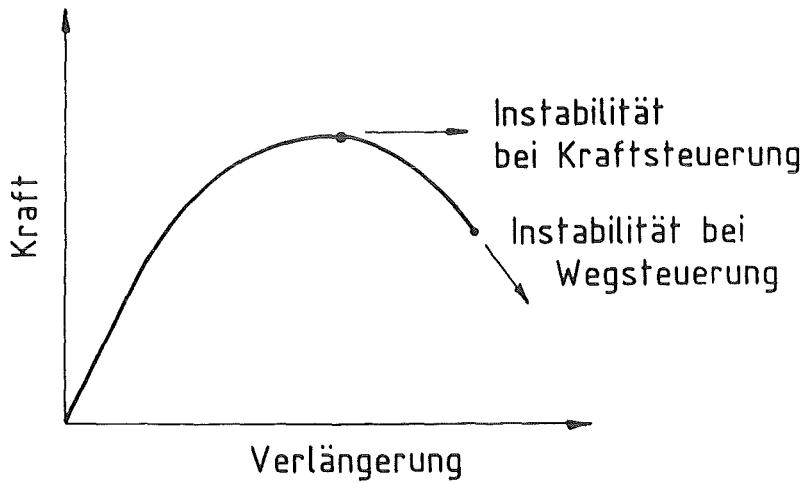


Abb. 2 Kraft-Verlängerungskurve

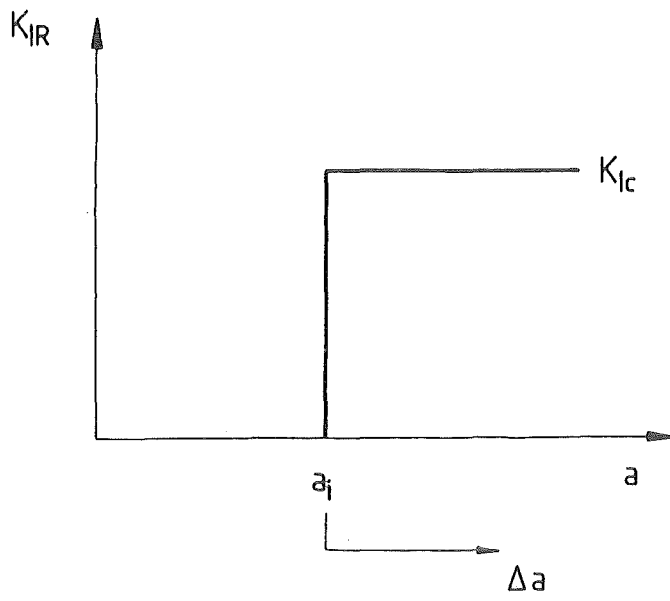


Abb. 3 Flache Rißwiderstandskurve

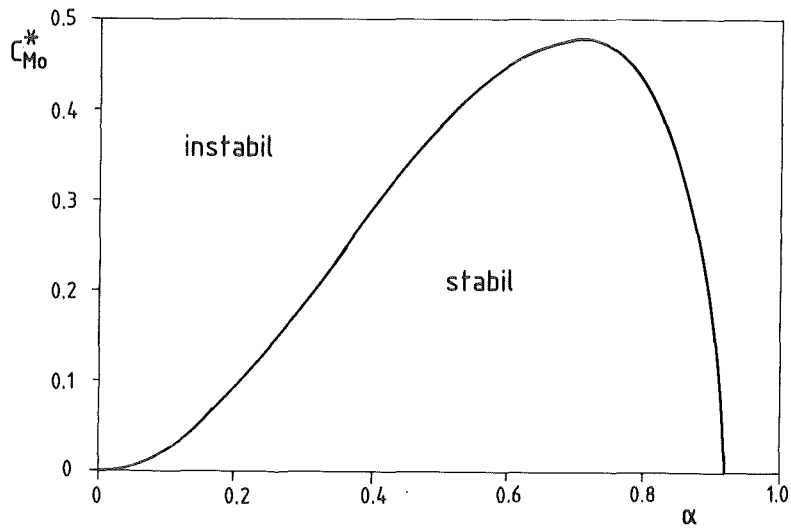


Abb. 4 Kritische Compliance bei Wegregelung (Zugprobe mit Innenriß flache Rißwiderstandskurve)

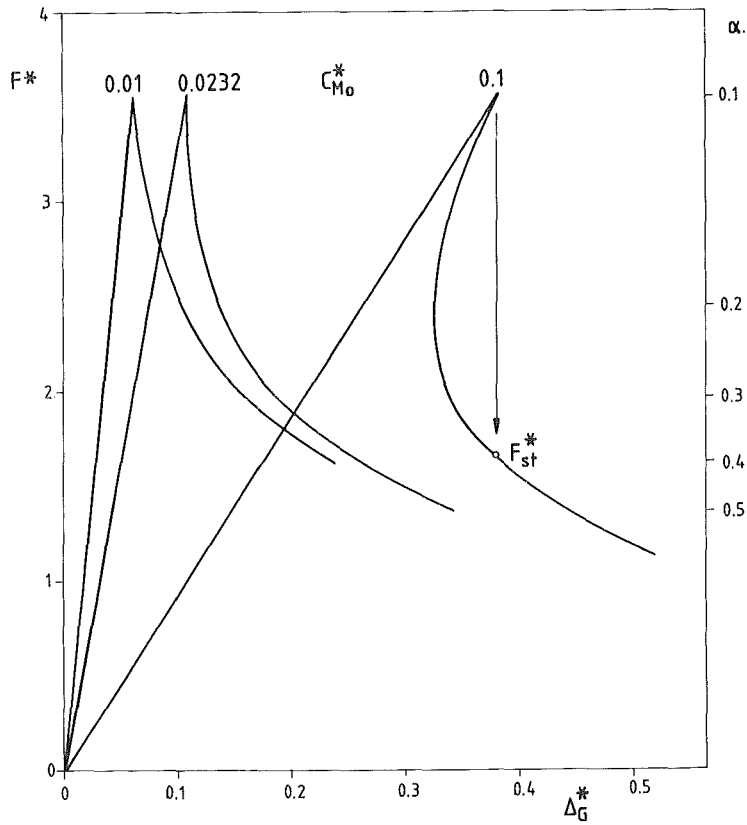


Abb. 5 Kraft-Verlängerungskurve für Zugproben mit Innenriß ( $\alpha = 0,1$ , flache Rißwiderstandskurve)

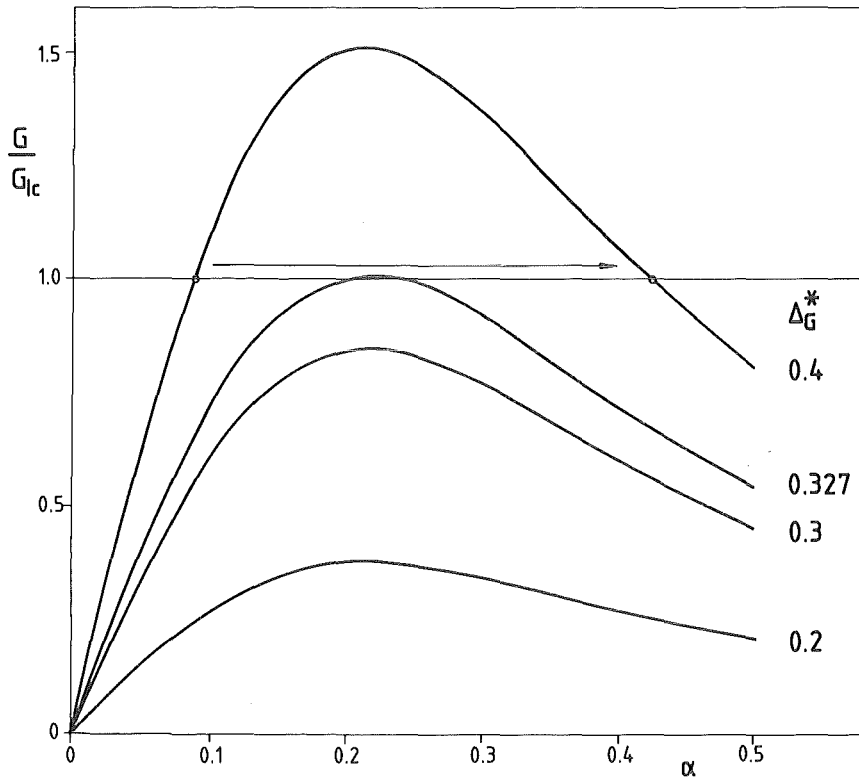


Abb. 6 Energiefreisetzungsrates für konstante Gesamtverlängerung (Zugprobe mit Innenriß,  $C_M^* = 0,1$ )

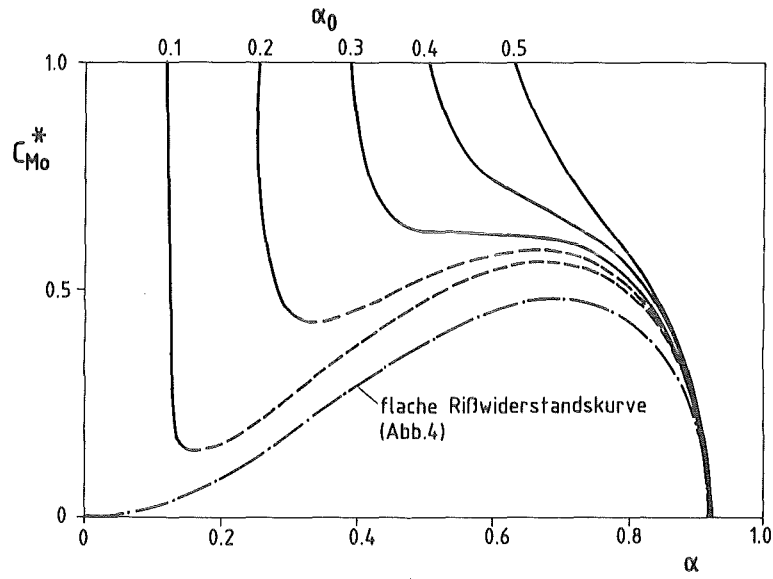


Abb. 7 Kritische Compliance bei Wegregelung (Zugprobe mit Innenriß, ansteigende Rißwiderstandskurve)

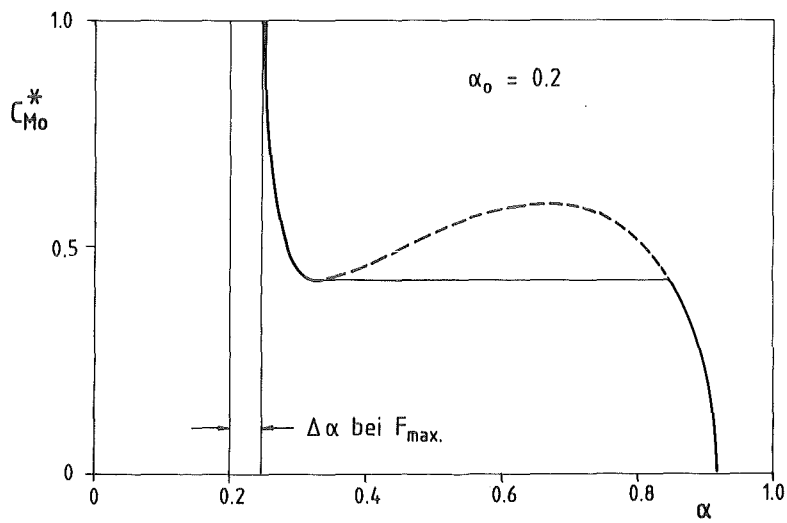


Abb. 8 Kritische Compliance bei Wegregelung (Zugprobe mit Innenriß, ansteigende Rißwiderstandskurve,  $\alpha_0 = 0.2$ )



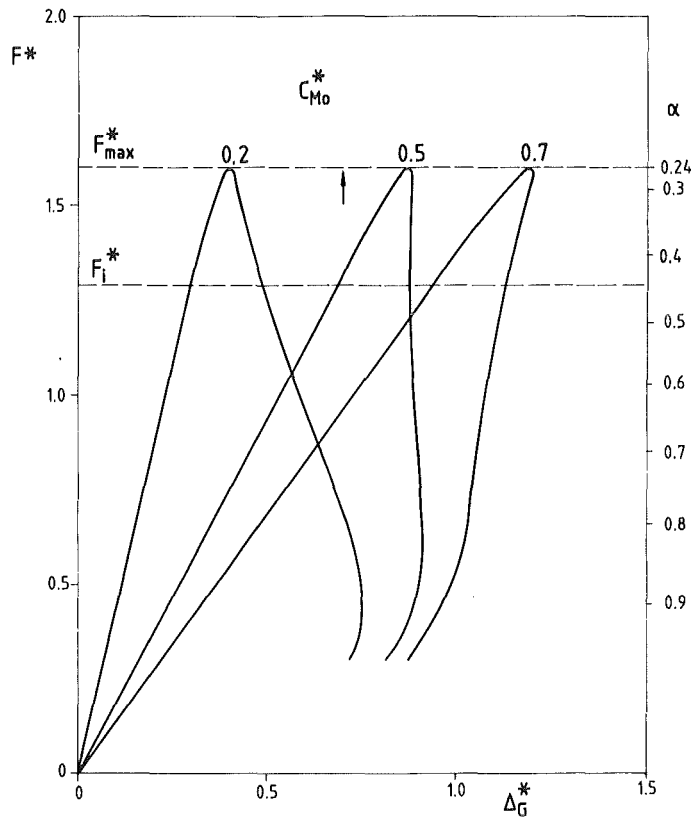


Abb. 9 Kraft-Verlängerungskurven für Zugprobe mit Innenriß ( $\alpha_0 = 0.2$ , ansteigende Rißwiderstandskurve)

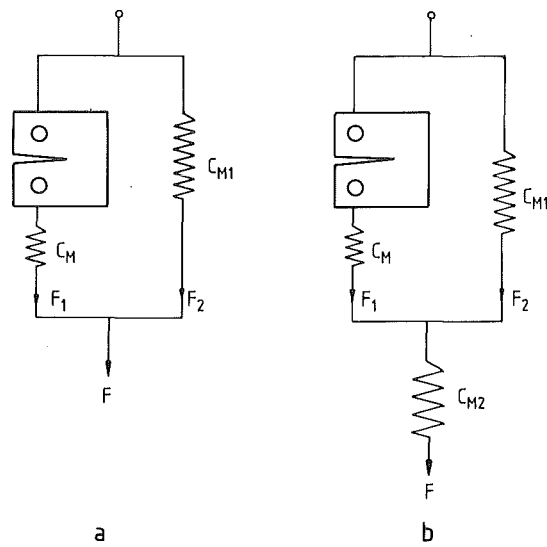


Abb. 10 Kompliziertere Belastungsanordnungen

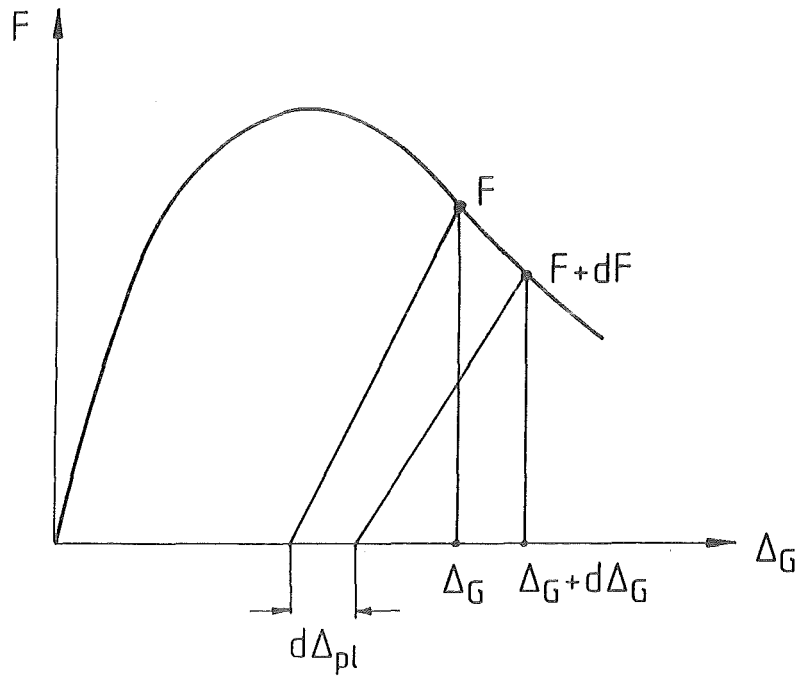


Abb. 11 Kraft-Verlängerungskurve bei elasto-plastischer Verformung

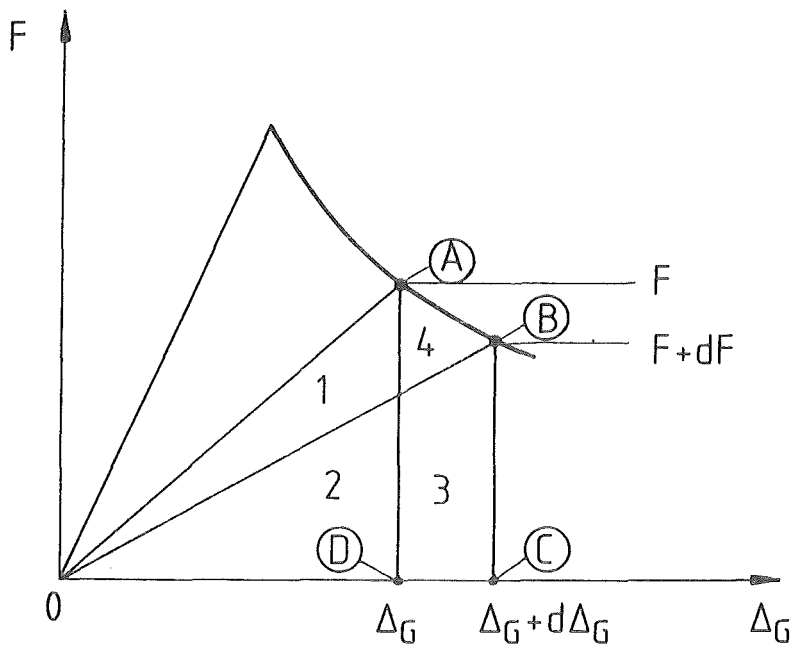


Abb. 12 Energiebetrachtung bei linear-elastischem Verhalten

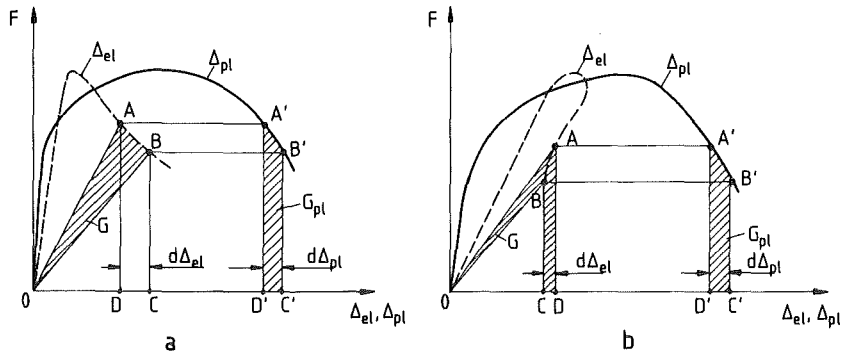


Abb. 13 Energiebetrachtung bei elasto-plastischem Verhalten

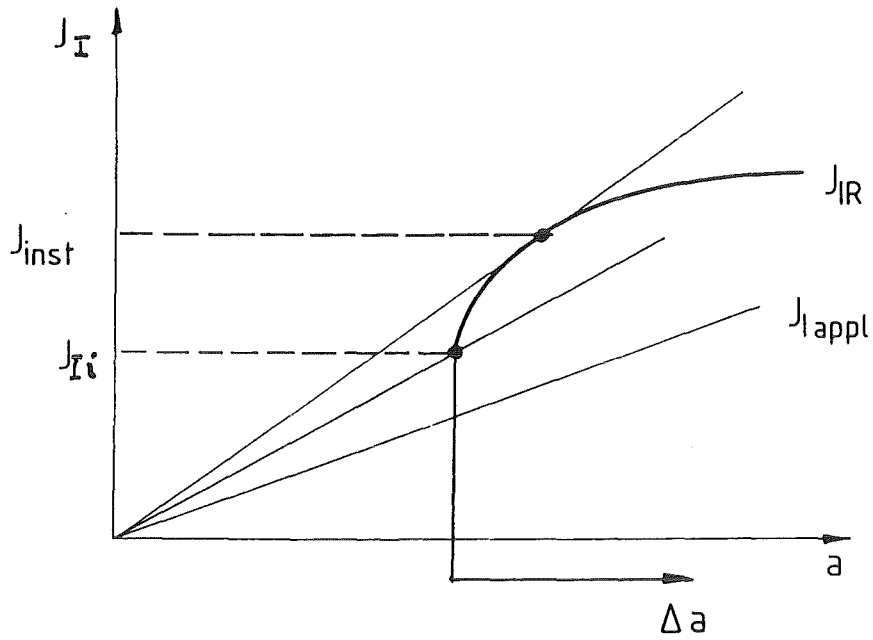


Abb. 14  $J_{IR}$ - $\Delta a$ -Kurve und  $J_{Iappl}$

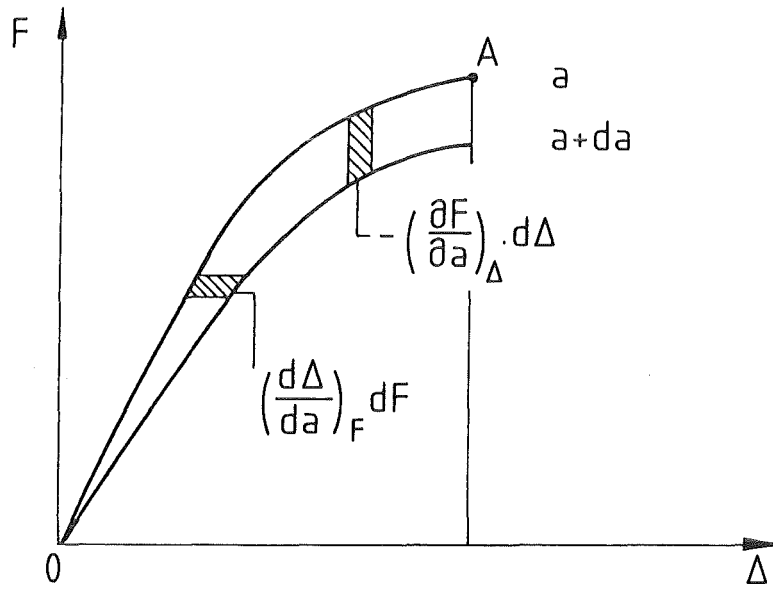


Abb. 15 Kraft-Verlängerungs-Kurven für zwei verschiedene Rißlängen