

KfK 4254  
April 1987

# Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze in Finite Element Programmen

K. Hornberger, H. Stamm  
Institut für Material- und Festkörperforschung

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Material- und Festkörperforschung

KfK 4254

Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze  
in Finite Element Programmen

K. Hornberger\*, H. Stamm

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE GMBH, KARLSRUHE

\*Universität Karlsruhe, Institut für Zuverlässigkeit  
und Schadenskunde im Maschinenbau

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

## **Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze in Finite Element Programmen**

Die allgemeine mathematische Formulierung häufig benutzter viskoplastischer Stoffgesetze wird erläutert, wobei das Robinson-Modell ausführlicher diskutiert wird.

Der Einbau viskoplastischer Stoffgesetze in Finite Element Programme wird am Beispiel des Robinson-Modells beschrieben. Zur numerischen Integration wird sowohl ein explizites (die Explizit-Euler-Methode) als auch ein implizites (die verallgemeinerte Mittelpunktsregel) Verfahren eingesetzt und mit einer Zeitschrittsteuerung kombiniert. Die Konvergenz der bei impliziten Methoden notwendigen iterativen Lösung eines nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems wird durch die Einführung einer Projektionsmethode beschleunigt.

Die Leistungsfähigkeit der implementierten Verfahren wird am Beispiel homogener Lastfälle und am Beispiel einer Kriech- und einer Dehnwechselbelastung einer Lochscheibe demonstriert.

## **Application of viscoplastic constitutive equations in Finite Element Programs**

The general mathematical formulation of frequently used viscoplastic constitutive equations is explained and Robinson's model is discussed in more detail.

The implementation of viscoplastic constitutive equations into Finite Element programs is described using Robinson's model as an example. For the numerical integration both an explicit (explicit Euler) and an implicit (generalized midpoint rule) integration scheme is utilized in combination with a time step control strategy. In the implicit integration scheme, convergence in solving a system of nonlinear algebraic equation is improved introducing a projection method.

The efficiency of the implemented procedures is demonstrated for different homogeneous load cases as well as for creep loading and strain controlled cyclic loading of a perforated plate.

## Inhalt

1.	Einleitung	1
2.	Viskoplastische Stoffmodelle	3
2.1.	Allgemeine Form	3
2.2.	Das Robinson-Modell	7
3.	Stoffgesetze in Finite-Element-Programmen	9
4.	Integration des Robinson-Modells in ABAQUS	12
4.1.	Auswahl geeigneter Integrationsverfahren	12
4.2.	Implizite Integration (GMR)	14
4.3.	Berechnung von Startwerten für die Newton-Iteration	18
4.4.	Berechnung des Tangentenmoduls	21
4.5.	Explizite Integration	22
4.6.	Zeitschrittsteuerung	24
5.	Berechnungsbeispiele	26
5.1.	Homogene Lastfälle	26
5.2.	Kriech- und Dehnwechselbelastung einer Lochscheibe	28
6.	Zusammenfassung	30
	Literatur	33
A.1.	Materialkonstanten für das Robinson-Modell	36
A.2.	Integrations-Algorithmen	37
A.3.	Newton-Methode für GMR und GTR	39
	Liste der verwendeten Symbole	41

## 1. Einleitung

Bauteile von Anlagen und Maschinen, die bei hohen Betriebstemperaturen arbeiten, können auch bei normalen Betriebsbedingungen gekoppelten thermischen und mechanischen Belastungen ausgesetzt sein, die an hochbelasteten Stellen meßbare inelastische Verformungen verursachen. Als Beispiele hierfür seien Brennkammern von Flugzeugturbinen, Komponenten von Brüterkraftwerken oder auch für zukünftige Anwendungen Komponenten der ersten Wand von Fusionsreaktoren genannt. Da derartige Belastungen wiederholt, häufig auch zyklisch auftreten, können auch verhältnismäßig kleine inelastische Dehnungsanteile durch Akkumulation von Dehnungsinkrementen oder im Fall der Wechselplastizierung durch Kurzzeitermüdung zu einem Versagen des Bauteils führen. Um die Lebensdauer solcher Bauteile zuverlässig abschätzen zu können, ist es notwendig, die Schwingbreite bzw. die Inkremente der inelastischen Dehnungen  $\Delta\varepsilon^P$ , auf denen die Lebensdauervorhersage letztlich beruht, im Rahmen einer Strukturanalyse möglichst genau zu berechnen. Hierzu ist eine mathematische Modellierung des Materialverhaltens in Form von Stoffgesetzen (konstitutiven Gleichungen), die das nichtlineare, ratenabhängige Materialverhalten unter den mehrachsigen, thermo-mechanischen Belastungsbedingungen genau wiedergeben, erforderlich.

Zur Beschreibung des viskoplastischen Verhaltens im Hochtemperaturbereich gibt es eine Vielzahl von Stoffgesetzen, deren Anwendung sich meist auf bestimmte Materialien oder Materialgruppen in einem begrenzten Temperaturbereich beschränkt. Die meisten dieser Stoffgesetze beruhen auf der Annahme, daß sich der augenblickliche makroskopische Zustand des Materials durch die beobachtbaren Variablen wie Spannung, Dehnung, Temperatur, und außerdem durch einen geeigneten Satz innerer Variablen vollständig erfassen läßt. Zu diesem Typ zählt auch das Robinson-Modell /1,2/, das als Beispiel in diesem Bericht herangezogen wurde. Wie auch in anderen viskoplastischen Modellen, z.B. /3-9,17/ enthält es in Anlehnung an die klassische Plastizitätstheorie eine skalare und eine tensorielle innere Variable zur Beschreibung des isotropen bzw. kinematischen Verfestigungsverhaltens. Die allgemeine Form derartiger Modelle und die des Robinson-Modells im besonderen wird im Kapitel 2 genauer erläutert.

Stoffgesetze der obengenannten Art sind mathematisch gesehen durch ein System von gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen in der Zeit gegeben und bilden zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen und Kompatibilitätsbedingungen ein Anfangs- und Randwertproblem, das integriert werden muß. Zur Berechnung des Verhaltens realer Bauteile wird hierzu die Finite-Element-Methode (FEM) herangezogen. In Kapitel 3 wird die Rolle der nichtlinearen Stoffgesetze im Lösungsalgorithmus eines FE-Programms erläutert. Dabei wird deutlich, daß es von entscheidender Bedeutung ist, leistungsfähige Verfahren zur numerischen Integration der Stoffgesetze zu entwickeln, um auch größere Strukturen mit vertretbarem Aufwand berechnen zu können. In kommerziell verfügbaren Programmen wie ABAQUS /28/ und ADINA /29/ muß der Anwender eigene Unterprogramme bereitstellen, in denen die konstitutiven Gleichungen integriert werden und der Tangentenmodul berechnet wird.

Ziel dieses Bericht ist es, die Vorgehensweise beim Einbau eines viskoplastischen Stoffmodells in ein kommerziell verfügbares Finite Element Programm wie ABAQUS zu beschreiben. Dies wird am Beispiel des Robinson-Modells durchgeführt, läßt sich aber leicht auf andere Stoffgesetze dieses Typs verallgemeinern. Dabei wird sowohl eine explizite (Explizit-Euler) als auch eine implizite (die verallgemeinerte Mittelpunktsregel) Integrationsmethode eingesetzt, um je nach Problemstellung das leistungsfähigere Verfahren auswählen zu können. Die bei impliziten Methoden notwendige Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems wird mit Hilfe der Newton-Methode durchgeführt, der zur Konvergenzbeschleunigung eine Projektionsmethode vorausgeht. Es zeigt sich, daß durch Verwendung einer geeigneten Zeitschrittsteuerung die benötigte Rechenzeit beträchtlich verkürzt werden kann.

Nach der Beschreibung der soeben geschilderten Vorgehensweise in Kapitel 4 werden in Kapitel 5 homogene und inhomogene Lastfälle untersucht, um die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Integrationsalgorithmen an charakteristischen Bauteilen beurteilen zu können.

## 2. Viskoplastische Stoffmodelle

### 2.1. Allgemeine Form

In klassischen Modellen zur Beschreibung von Metallen werden die inelastischen Dehnungen in einen zeitunabhängigen plastischen Anteil, der das Material bei niedrigen Temperaturen charakterisiert, und einen zeitabhängigen Kriechanteil, der das Hochtemperaturverhalten beschreibt, zerlegt.

Für eine genaue Beschreibung der Materialantwort auf komplexe, z.B. kombinierte zyklische thermische und mechanische Belastung sind diese Modelle unzureichend, da sie keine Wechselwirkungen zwischen Kriechen und Plastizität enthalten /10/. Aus diesem Grund wurden in den letzten Jahren eine Reihe sogenannter viskoplastischer Modelle entwickelt, z.B. /1-9/. Dabei wurden wesentliche Merkmale von klassischen Modellen übernommen:

1. Die inelastischen Dehnraten sind unabhängig vom hydrostatischen Druck.
2. Um Verfestigungsphänomene zu erfassen werden innere Variable eingeführt. Die meisten Modelle beinhalten eine tensorielle innere Variable ("innere Spannung") zur Beschreibung kinematischer Verfestigungsphänomene (z.B. Bauschinger Effekt) sowie eine skalare innere Variable, mit der isotrope, insbesondere auch zyklische Verfestigung modelliert werden kann. Die Entwicklungsgesetze dieser inneren Variablen bestimmen das Verfestigungsverhalten.
3. Es werden Erholungsterme eingeführt, die der Verfestigung entgegenwirken. Damit lassen sich stationäre Phänomene (z.B. stationäres Kriechen) beschreiben.

Im folgenden werden die wichtigsten gemeinsamen mathematischen Grundzüge der häufig benutzten Modelle beschrieben. Daneben beinhalten viele Modelle spezifische Besonderheiten, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Eine ausführliche Übersicht findet sich in /3,11/.

Beschränkt man sich auf den Fall kleiner Dehnungen und kleiner Deformationen, so läßt sich die Gesamt-Dehnrates  $\dot{\epsilon}$  in einen elastischen Anteil ( $\dot{\epsilon}^e$ ) und einen inelastischen Anteil ( $\dot{\epsilon}^p$ )

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (2.1)$$

zerlegen.

Für die elastische Dehnrates gilt das Hookesche Gesetz,

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}:(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) + \dot{T} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial T}:(\epsilon - \epsilon^p) \quad (2.2)$$

für die inelastische Dehnrates wird ein Fließgesetz formuliert,

$$\dot{\epsilon}^p = \mathbf{F}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, K, T) \quad (2.3)$$

wobei  $\mathbf{s}$  der Spannungsdeviator,  $\mathbf{a}$  die kinematische Verfestigungsvariable,  $K$  die isotrope Verfestigungsvariable und  $T$  die Temperatur sind.

Im folgenden wird ein anfänglich isotropes Material betrachtet. Das Fließgesetz (2.3) wird dann meist zu

$$\dot{\epsilon}^p = f(J_2(\boldsymbol{\Sigma}), K, T) \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.3.a)$$

vereinfacht, d.h. die inelastische Dehnrates hängt nicht in beliebiger Weise von  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{a}$  ab, sondern nur von der "Effektiv-Spannung"  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \mathbf{a}$ . In der nichtlinearen Funktion  $f$  werden außer  $J_2(\boldsymbol{\Sigma})$  alle weiteren möglichen Invarianten vernachlässigt.

Das Entwicklungsgesetz für die kinematische Verfestigungsvariable wird in der Form

$$\dot{\mathbf{a}} = h(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \bar{\epsilon}^p, T) - d(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \bar{\epsilon}^p, T) \bar{\epsilon}^p \mathbf{a} - r(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \bar{\epsilon}^p, T) \mathbf{a} \quad (2.4)$$

angesetzt. Dabei ist  $\bar{\epsilon}^p$  durch

$$\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{4}{3} J_2(\dot{\epsilon}^p)} \quad (2.5)$$

gegeben, woraus durch Integration über den Belastungspfad die akkumulierte inelastische Vergleichsdehnung  $\bar{\epsilon}^P$

$$\bar{\epsilon}^P = \int_c \dot{\bar{\epsilon}}^P dt \quad (2.6)$$

bestimmt wird.

Die einachsige Version von Gl. (2.4) läßt folgende Interpretation der Terme auf der rechten Seite zu :

- $h(\cdot) \dot{\bar{\epsilon}}^P$  ist ein Verfestigungsterm; er kann unter bestimmten Voraussetzungen mit der Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve korreliert werden /12/.
- $d(\cdot) \bar{\epsilon}^P$  a beschreibt dynamische Erholungsvorgänge, die an inelastische Dehnraten gekoppelt sind. Nach Spannungsumkehr führt dieser Term beim weiteren Belasten zu einer schnellen Änderung der kinematischen Verfestigungsvariablen.
- $r(\cdot) a$  beschreibt thermische Erholungsvorgänge und ist daher stark temperaturabhängig. Bei hohen Temperaturen erfährt die kinematische Verfestigungsvariable eine rücktreibende Kraft, bei niedrigen Temperaturen ist dieser Term vernachlässigbar.

Die Erholungsterme erlauben einerseits stationäre Lösungen bei monotoner Belastung und beschreiben andererseits experimentelle Befunde wie z.B.:

- hohe Kriechdehnraten nach Lastunterbrechung beim Kriechversuch.
- kleine inelastische Dehnraten nach Lastumkehr bei zyklischen Versuchen.

Die Entwicklungsgesetze für die isotrope Verfestigungsvariable haben die Form

$$\dot{K} = \Gamma(K, \eta, T) \dot{\eta} - P(K, \eta, T) K + \Theta(K, \eta, T) \dot{T} \quad (2.7)$$

Die Größe  $\eta$  ergibt sich aus

$$\eta = \int_c \dot{\eta} dt$$

Dabei kann  $\dot{\eta}$  entweder gleich der inelastischen Vergleichsdehnrate  $\bar{\epsilon}^P$  ("strain-hardening")

$$\dot{\eta} = \bar{\epsilon}^P \quad (2.8)$$

oder gleich der zeitlichen Ableitung der inelastischen Verformungsarbeit  $\dot{W}^P$  ("work-hardening")

$$\dot{\eta} = \dot{W}^P \quad (2.9)$$

sein.

Auch im Entwicklungsgesetz (2.7) für  $K$  sind Verfestigung, beschrieben durch  $\Gamma$ , und thermische Erholung, beschrieben durch  $P$  als gegenläufige Prozesse enthalten. Der zusätzlich eingeführte Term  $\theta(\cdot)\dot{T}$  in (2.9) ermöglicht eine konsistentere Beschreibung des Materialverhaltens unter nichtisothermer Belastung /2/.

## 2.2 Das Robinson-Modell

Das Robinson Modell /1,2/ hat im wesentlichen die im letzten Kapitel dargestellte Form. Eine Besonderheit stellt die Unterteilung des Zustandsraums dar, der aus den Komponenten von  $\sigma$ ,  $\mathbf{a}$  und  $K$  gebildet wird /1,13/.

Ähnlich wie in der Plastizitätstheorie wird in diesem Zustandsraum ein rein elastischer Bereich ( $J_2(\Sigma) < K$ ) und ein Entlastungskriterium ( $\mathbf{s}:\Sigma < 0$ ) definiert. Eine weitere Unterteilung erfolgt durch ein Kriterium für Spannungsumkehr ( $\mathbf{s}:\mathbf{a} < 0$ ), um dynamische Erholungseffekte modellieren zu können.

Das Fließgesetz hat die Form,

$$\dot{\epsilon}^P = \begin{cases} A \left[ \frac{J_2(\Sigma)}{K} - 1 \right]^n \frac{\Sigma}{\sqrt{2J_2(\Sigma)}} & \text{falls } \mathbf{s}:\Sigma < 0 \text{ und } J_2(\Sigma) > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.10)$$

mit den Materialkonstanten  $A$  und  $n$ .

Das Entwicklungsgesetz für die kinematische Verfestigungsvariable  $\mathbf{a}$  lautet

$$\dot{\mathbf{a}} = \begin{cases} H G^{-\beta} \dot{\epsilon}^P - R(T) G^{m-\beta} \mathbf{a} & \text{falls } \mathbf{s}:\mathbf{a} > 0 \text{ und } G > G_0 \\ H G_0^{-\beta} \dot{\epsilon}^P - R(T) G^{m-\beta} \mathbf{a} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

mit

$$G = \frac{J_2(\mathbf{a})}{\kappa_0^2}$$

wobei  $H$ ,  $\beta$ ,  $m$ ,  $G_0$ ,  $\kappa_0^2$  sowie  $R(T)$  Materialkonstanten sind.  $R(T)$  ist stark temperaturabhängig.

$G_0$  ist ein Abschneide-Parameter, der verhindert, daß bei  $G \rightarrow 0$  die Funktion  $G^{-\beta}$  singulär wird. Gleichzeitig bewirkt der kleine Wert von  $G_0$ , daß  $(HG_0^{-\beta})$  sehr groß wird und damit bei Spannungsumkehr ( $\dot{s}: \dot{a} < 0$ ) betragsmäßig große Änderungen von  $\dot{a}$  auftreten. Auf diese Weise wird im Robinson-Modell dynamische Erholung bei Spannungsumkehr modelliert, während in anderen Modellen ein spezieller Term eingeführt wird (Gl. (2.4)). In das Entwicklungsgesetz für  $K$

$$\dot{K} = \Gamma(W^P, T) \dot{W}^P + \Theta(W^P, T) \dot{T} \quad (2.12)$$

gehen die vorgegebenen, materialspezifischen Funktionen

$$\Gamma = \frac{K_s(T) - K_i(T)}{3W_0(T)} e^{-\frac{W^P}{W_0(T)}}$$

$$\Theta = -\frac{Q_0}{3T^2} e^{-Q_0(1/T_0 - 1/T)}$$

ein. Hier sind  $K_i(T)$ ,  $K_s(T)$ ,  $Q_0$ ,  $W_0$ ,  $T_0$  temperaturabhängige Materialkonstanten. Die im Robinson-Modell enthaltenen Materialkonstanten wurden /2/ entnommen und sind im Anhang A.1 zusammengestellt. Als Beispiel wird die in Abb. 1 gezeigte einachsige zyklische Belastung bei der Temperatur  $T = 773$  K betrachtet. Die Abbn. 2-4 zeigen die zeitlichen Entwicklungen der Spannung und der inneren Variablen. In Abb. 3 ist die schnelle Änderung der kinematischen Verfestigungsvariablen bei Spannungsumkehr deutlich zu erkennen. Abb. 5 zeigt die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Hysterese und in Abb. 6 ist der Verlauf der Spannung  $\sigma$  und der inneren Variablen  $a$  im Zustandsraum  $\sigma$ - $a$  dargestellt.

### 3. Stoffgesetze in FE-Programmen

Um die Wirkungsweise des in Kapitel 4 beschriebenen Unterprogramms zur numerischen Integration viskoplastischer Modelle in FE-Programmen aufzuzeigen, werden kurz die für diesen Zusammenhang wichtigen Begriffe der FE-Formulierung erläutert. Dabei wird die Darstellung von /14/ übernommen. Die Gleichgewichtsbedingung

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}^N dV = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}^N dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}^N dV \quad (3.1)$$

für den N-ten Freiheitsgrad einer FE-Struktur läßt sich aus dem Theorem der virtuellen Arbeit ableiten, wobei  $\mathbf{P}$  die Oberflächenkräfte (bezogen auf die Einheitsfläche) und  $\mathbf{f}$  die Volumenkräfte (bezogen auf das Einheitsvolumen) sind.  $\mathbf{N}^N(\mathbf{x})$  sind die durch den Element-Typ bestimmten Interpolationsfunktionen, die gemäß

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_N \mathbf{N}^N(\mathbf{x}) \bar{u}^N \quad (3.2)$$

die Verschiebungen  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  mit den Knotenverschiebungen  $\bar{u}^N$  verknüpfen. In (3.2) erstreckt sich die Summe über die Anzahl der Freiheitsgrade NF. Aus (3.2) folgt, daß durch die Dehnungs-Verschiebungs-Matrix

$$\mathbf{B}^N = \text{sym} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^N(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

die Beziehung

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \sum_N \mathbf{B}^N(\mathbf{x}) \bar{u}^N$$

zwischen Dehnungen und Knotenverschiebungen gegeben ist. Zur Abkürzung wird Gl. (3.1) in der Form

$$\mathbf{I}^N = \mathbf{P}^N \quad (3.3)$$

mit

$$\mathbf{I}^N = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}^N dV$$

geschrieben. Dann sind  $\mathbf{I}^N$  die inneren, durch Spannungen übertragene, Kräfte auf den N-ten Freiheitsgrad.  $\mathbf{P}^N$  ist durch die rechte

Seite von Gleichung (3.1) gegeben und umfaßt die äußeren auf diesen Freiheitsgrad wirkenden Kräfte. Im elastischen Fall gilt ( $\mathbf{E}$  ist der Elastizitätstensor)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}:\boldsymbol{\epsilon} = \sum_M \mathbf{E}:\mathbf{B}^M \bar{u}^M$$

so daß sich

$$\begin{aligned} I^N &= \sum_M \bar{u}^M \int_V \mathbf{B}^N:\mathbf{E}:\mathbf{B}^M dV \\ &= \sum_M K^{NM} \bar{u}^M \end{aligned} \quad (3.4)$$

ergibt. Gleichung (3.2) nimmt damit die bekannte Form

$$\sum_M K^{NM} \bar{u}^M = P^N \quad (3.5)$$

mit der elastischen Steifigkeitsmatrix

$$K^{NM} = \int_V \mathbf{B}^N:\mathbf{E}:\mathbf{B}^M dV$$

an.

Die gesuchten Knotenverschiebungen  $\bar{u}^M$  ergeben sich als Lösungen des linearen Gleichungssystems (3.5). In inelastischen Stoffmodellen sind die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nichtlinear, so daß die Gleichgewichtsbedingungen (3.3) ein nichtlineares Gleichungssystem darstellen, das in jedem Zeitschritt  $\Delta t$  iterativ gelöst werden muß (Gleichgewichtsiteration). Eine wegen ihrer quadratischen Konvergenz häufig verwendete Methode ist die Newton-Iteration /14,15/. Wendet man diese auf (3.2) an, erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\left( I^N - P^N \right)^{(r)} + \sum_M \left( \frac{\partial I^N}{\partial \bar{u}^M} - \frac{\partial P^N}{\partial \bar{u}^M} \right)^{(r)} \delta \Delta \bar{u}^M = 0 \quad (3.6.a)$$

wobei  $(r)$  den  $r$ -ten Iterationsschritt und  $\delta \Delta \bar{u}^M$  die Verbesserung der bisherigen Näherung  $\Delta \bar{u}^M(r)$  für die Änderung der Knotenverschiebungen im Zeitschritt  $\Delta t$  bezeichnet:

$$\left( \Delta \bar{u}^M \right)^{(r+1)} = \left( \Delta \bar{u}^M \right)^{(r)} + \delta \Delta \bar{u}^M \quad (3.6.b)$$

Beschränkt man sich auf kleine Dehnungen, so ist  $\partial P^N / \partial \bar{u}^M = 0$  und für die inneren Kräfte gilt

$$\frac{\partial I^N}{\partial \bar{u}^M} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^M} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}^N dV = \int_V \mathbf{B}^N : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(t+\Delta t)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(t+\Delta t)}} : \mathbf{B}^M dV$$

Führt man die "tangentielle Steifigkeitsmatrix"

$$\hat{K}^{NM} = \int_V \mathbf{B}^N : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(t+\Delta t)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(t+\Delta t)}} : \mathbf{B}^M dV = \int_V \mathbf{B}^N : \mathbf{D} : \mathbf{B}^M dV$$

mit dem Tangentenmodul  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(t+\Delta t)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(t+\Delta t)}} \quad (3.7.a)$$

ein, so läßt sich die Iteration (3.6) durch

$$\sum_M \hat{K}^{NM(r)} \delta \Delta \bar{u}^M = \left( P^N - I^N \right)^{(r)} \quad (3.7.b)$$

$$\left( \Delta \bar{u}^M \right)^{(r+1)} = \left( \Delta \bar{u}^M \right)^{(r)} + \delta \Delta \bar{u}^M \quad (3.7.c)$$

darstellen. Der Iterationsprozeß (3.7) wird wiederholt, bis ein geeignetes Konvergenzkriterium erfüllt ist, z.B.

$$\text{MAX}_N \left( \left| \left( I^N - P^N \right)^{(r)} \right| \right) < \text{PTOL}$$

wobei  $I^N$ ,  $P^N$  durch (3.1) und (3.3) definiert sind. Dann werden die Verschiebungen zum Zeitpunkt  $(t+\Delta t)$  berechnet

$$\left( \bar{u}^M \right)^{(t+\Delta t)} = \left( \bar{u}^M \right)^{(t)} + \Delta \bar{u}^M$$

und mit der Iteration im nächsten Zeitschritt begonnen.

#### 4.1 Auswahl geeigneter Integrationsverfahren

Aus Gleichung (3.7) geht hervor, daß für die globale Gleichgewichtsiteration die Spannungen  $\sigma^{(t+\Delta t)}$  und der Tangentenmodul  $\mathbf{D}$  benötigt werden. Kommerzielle FE-Codes (z.B. ABAQUS /28/, ADINA /29/) sehen zur Berechnung dieser Größen spezielle Unterprogramme vor, die an jedem Integrationspunkt während jeder Gleichgewichtsiteration aufgerufen werden. In Abb. 7 ist die Wechselwirkung eines solchen Unterprogramms (UMAT) mit dem FE-Hauptprogramm (ABAQUS) skizziert.

Das viskoplastische Stoffmodell wurde in der allgemeinen Form

$$\dot{\epsilon}^P = f(J_2(\boldsymbol{\Sigma}), K) \boldsymbol{\Sigma} \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{a}} = h(J_2(\mathbf{a})) \dot{\epsilon}^P - r(J_2(\mathbf{a})) \mathbf{a} \quad (4.2)$$

$$\dot{K} = \Gamma(W^P, T) \dot{W}^P + \Theta(W^P, T) \dot{T} \quad (4.3)$$

implementiert. Setzt man in (4.1) - (4.3) die in Abschnitt 2.2 angegebenen Funktionen ein, so erhält man das Robinson-Modell. Die Funktionen  $f$  und  $h$  enthalten dann Unstetigkeiten wegen der erwähnten Bereichsunterteilung im Zustandsraum.

Die Zerlegung der Gesamtdehnrates (2.1) in einen elastischen und einen inelastischen Anteil und das Hookesche Gesetz (2.2) vervollständigen das System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das bezüglich der Zeit integriert werden muß.

Aus einer Vielzahl vorhandener Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen wurden zwei ausgewählt, nämlich

- die Explizit-Euler-Methode
- die verallgemeinerte Mittelpunktsregel

In /16/ wurden mehrere explizite Integrationsmethoden in Bezug auf Genauigkeit und Rechenzeit an verschiedenen viskoplastischen Stoffmodellen /1,3,17/ untersucht. Von den untersuchten expliziten

Integrationsmethoden (Milne, Explizit-Euler, Runge-Kutta 4. Ordnung, modifiziertes Euler-Verfahren) zeigte die Explizit-Euler-Methode in Verbindung mit einer Zeitschrittsteuerung die höchste Effektivität.

Da diese expliziten Methoden nur bedingt stabil sind, wurde außerdem ein implizites Verfahren, die verallgemeinerte Mittelpunktsregel (GMR) genauer untersucht.

Die verallgemeinerte Mittelpunktsregel ist in Anhang A.2 kurz beschrieben. Sie enthält einen Parameter  $\theta$ , der Werte aus dem Intervall  $0 \leq \theta \leq 1$  annehmen kann. Für  $\theta=0$  erhält man die Explizit-Euler-Methode, für  $\theta=1$  die Implizit-Euler-Methode und für  $\theta=0.5$  die eigentliche Mittelpunktsregel, die sich durch Genauigkeit der Ordnung zwei auszeichnet. In /18/ wurde gezeigt, daß die Methode für alle Werte von  $\theta \geq 0.5$  uneingeschränkt stabil ist. Auf die Stabilitätsgrenze der Explizit-Euler-Methode wird in Abschnitt 4.6 eingegangen.

## 4.2 Implizite Integration (GMR)

Wendet man auf die konstitutiven Gleichungen (4.1)-(4.3) die verallgemeinerte Mittelpunktsregel (s. Anhang A.2) an, so erhält man das nichtlineare Gleichungssystem :

$$\Delta \epsilon^P = \Delta t (f \Sigma)^{(t+\theta \Delta t)} \quad (4.5)$$

$$\Delta \mathbf{a} = h^{(t+\theta \Delta t)} \Delta \epsilon^P - (r \mathbf{a})^{(t+\theta \Delta t)} \quad (4.6)$$

$$\Delta K = \Gamma^{(t+\theta \Delta t)} \Delta W^P + \Theta^{(t+\theta \Delta t)} \Delta T \quad (4.7)$$

mit

$$\Delta W^P = \sigma^{(t+\theta \Delta t)} \Delta \epsilon^P$$

Die integrierte Form des Hookeschen Gesetzes liefert

$$\Delta \sigma = \mathbf{E}^{(t+\Delta t)} : (\epsilon^{(t)} + \Delta \epsilon - \epsilon^P{}^{(t)} - \Delta \epsilon^P - \epsilon^{th(t+\Delta t)}) - \sigma^{(t)} \quad (4.8)$$

wobei  $\epsilon^{th(t+\Delta t)}$  die thermischen Dehnungen zum Zeitpunkt  $(t+\Delta t)$  bezeichnen. Aus (4.8) folgt:

$$\sigma^{(t+\theta \Delta t)} = \theta \mathbf{E}^{(t+\Delta t)} : (\epsilon^{(t)} + \Delta \epsilon - \epsilon^P{}^{(t)} - \Delta \epsilon^P - \epsilon^{th(t+\Delta t)}) + (1-\theta) \sigma^{(t)} \quad (4.9)$$

Im folgenden werden alle Größen, soweit nicht anders bezeichnet, an der Stelle  $(t+\theta \Delta t)$  berechnet. Da die Anwendung der konstitutiven Gleichungen (4.1)-(4.3) auf anfänglich isotrope Materialien beschränkt ist, wird auch für  $\mathbf{E}$  die isotrope Form

$$\mathbf{E} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{1}\mathbf{1}$$

verwendet.

Wendet man auf (4.5)-(4.7) die Newton-Methode an, so erhält man das lineare Gleichungssystem :

$$\delta \Delta \mathbf{s} + 2\mu^{(t+\Delta t)} \delta \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P = 0 \quad (4.10)$$

$$\delta \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P - \mathbf{L} : \delta \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{L} : \delta \Delta \mathbf{a} - \mathbf{N} \delta \Delta K = \mathbf{R}_1 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{P} : \delta \Delta \mathbf{a} - h \delta \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P = \mathbf{R}_2 \quad (4.12)$$

$$\delta \Delta K - \theta G \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P : \delta \Delta \boldsymbol{\sigma} - G \boldsymbol{\sigma} \delta \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P = \mathbf{R}_3 \quad (4.13)$$

mit

$$\mathbf{R}_1 = \Delta t \mathbf{f} \boldsymbol{\Sigma} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P$$

$$\mathbf{R}_2 = h \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P - \Delta t r \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$$

$$\mathbf{R}_3 = \Gamma \Delta W^P + \Theta \Delta T - \Delta K$$

wobei  $\delta \Delta \boldsymbol{\epsilon}^P$ ,  $\delta \Delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\delta \Delta \mathbf{a}$ ,  $\delta \Delta K$  iterative Verbesserungen zu Näherungen von  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^P$ ,  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta \mathbf{a}$  und  $\Delta K$  sind.

In (4.10)-(4.13) wurden bei den Ableitungen der Gleichungen nach den Variablen  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta \mathbf{a}$  und  $\Delta K$  die Abkürzungen

$$\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}} \left( \Delta t \mathbf{f} \boldsymbol{\Sigma} \right)^{(t+\theta \Delta t)} = \theta \Delta t \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial J_2(\boldsymbol{\Sigma})} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{f} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \mathbf{1} \right) \right) \quad (4.14)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = - \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{a}} \left( \Delta t \mathbf{f} \boldsymbol{\Sigma} \right)^{(t+\theta \Delta t)} = \mathbf{L} + \frac{\theta \Delta t}{3} \mathbf{f} \mathbf{1} \mathbf{1} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial}{\partial \Delta K} \left( \Delta t \mathbf{f} \boldsymbol{\Sigma} \right)^{(t+\theta \Delta t)} = \theta \Delta t \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial K} \right) \boldsymbol{\Sigma} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{a}} \left( \Delta \mathbf{a} + \Delta t r \mathbf{a} \right)^{(t+\theta \Delta t)} = (1 + \theta \Delta t r) \mathbf{I} + \theta \Delta t \frac{\partial r}{\partial J_2(\mathbf{a})} \mathbf{a} \mathbf{a} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} - \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{a}} \left( h \Delta \epsilon^{\mathbf{P}} \right)^{(t+\theta \Delta t)} = \mathbf{M} - \theta \frac{\partial h}{\partial J_2(\mathbf{a})} \Delta \epsilon^{\mathbf{P}} \mathbf{a} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{G} = \Gamma + \theta \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial W^{\mathbf{P}}} \Delta W^{\mathbf{P}} + \frac{\partial \Theta}{\partial W^{\mathbf{P}}} \Delta T \right) \quad (4.19)$$

eingeführt.

Eliminiert man aus (4.10)-(4.13) die übrigen Variablen, so erhält man für  $\delta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}}$

$$\mathbf{Z} : \delta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}} = \mathbf{R} \quad (4.20)$$

mit

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} + 2\mu^{(t+\Delta t)} \mathbf{L} + h \mathbf{L} : \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{G} \mathbf{N} (\sigma - 2\mu^{(t+\Delta t)} \theta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}}) \quad (4.21.a)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{L} : \mathbf{P}^{-1} : \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \mathbf{N} \quad (4.21.b)$$

und daraus

$$\delta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}} = \mathbf{Z}^{-1} : \mathbf{R} \quad (4.22)$$

Die Inversen  $\mathbf{P}^{-1}$  und  $\mathbf{Z}^{-1}$  lassen sich mit Hilfe der Sherman-Morrison-Formel /19/ analytisch berechnen.

Nachdem aus (4.22)  $\delta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}}$  für einen Iterationsschritt bekannt ist, werden die übrigen Unbekannten durch Rückwärtseinsetzen von  $\delta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}}$  in die Gleichungen (4.10)-(4.13) berechnet. Die bisherigen Näherungen werden gemäß

$$\Delta \epsilon^{\mathbf{P}(r+1)} = \Delta \epsilon^{\mathbf{P}(r)} + \delta \Delta \epsilon^{\mathbf{P}}$$

$$\Delta \mathbf{a}^{(r+1)} = \Delta \mathbf{a}^{(r)} + \delta \Delta \mathbf{a}$$

$$\Delta K^{(r+1)} = \Delta K^{(r)} + \delta \Delta K$$

$$\epsilon^{p(t+\theta\Delta t)(r+1)} = \epsilon^{p(t)} + \theta\Delta\epsilon^{p(r+1)}$$

$$\mathbf{a}^{(t+\theta\Delta t)(r+1)} = \mathbf{a}^{(t)} + \theta\Delta\mathbf{a}^{(r+1)}$$

$$K^{(t+\theta\Delta t)(r+1)} = K^{(t)} + \theta\Delta K^{(r+1)}$$

verbessert und, nachdem diese Iteration konvergiert hat, werden die Variablen für den Zeitpunkt  $(t+\Delta t)$  berechnet.

$$\epsilon^{p(t+\Delta t)} = \epsilon^{p(t)} + \Delta\epsilon^p$$

$$\mathbf{a}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{a}^{(t)} + \Delta\mathbf{a}$$

$$K^{(t+\Delta t)} = K^{(t)} + \Delta K$$

$$\sigma^{(t+\Delta t)} = \sigma^{(t)} + \Delta\sigma$$

Um eine schnelle Konvergenz dieser aufwendigen Newton-Iteration zu erreichen, werden "gute" Näherungen für die Unbekannten  $\Delta\epsilon^p$ ,  $\Delta\mathbf{a}$  und  $\Delta K$  als Startwerte benötigt.

### 4.3 Berechnung von Startwerten für die Newton-Iteration

Zur Bestimmung von Startwerten für die Newton-Iteration wird eine Methode verallgemeinert, die sich bei der Integration zeitunabhängiger Modelle bewährt hat /20-24/.

Dazu werden die Gleichungen für  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$  und  $\Delta \mathbf{a}$  in einen zweidimensionalen Unterraum des sechsdimensionalen Spannungsraums projiziert, der durch ein Orthogonalsystem  $\mathbf{X}^1$  und  $\mathbf{X}^2$  aufgespannt wird. Die im folgenden beschriebene Vorgehensweise ist in Abb.8 graphisch dargestellt.

Zunächst wird ein Prädiktor  $\mathbf{s}^*$  berechnet, der dem elastischen Spannungsdeviator zum Zeitpunkt  $(t+\theta\Delta t)$  entspricht

$$\mathbf{s}^* = 2\mu^{(1+\Delta t)}\theta(\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} - \boldsymbol{\varepsilon}^P(t) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) + (1-\theta)\mathbf{s}^{(t)} \quad (4.23)$$

Die erste Projektionsrichtung  $\mathbf{X}^1$  (Richtung CB in Abb.8) ist dann durch

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{s}^* - \mathbf{a}^{(t)} \quad (4.24)$$

mit der Normierung

$$\hat{\mathbf{X}}^1 = \frac{\mathbf{X}^1}{\sqrt{2J_2(\mathbf{X}^1)}}$$

gegeben. Falls  $\mathbf{X}^1$  und  $\mathbf{a}(t)$  linear unabhängig sind, wird eine zweite, zu  $\mathbf{X}^1$  orthogonale Richtung durch

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{a}^{(t)} - (\mathbf{a}^{(t)} : \hat{\mathbf{X}}^1) \hat{\mathbf{X}}^1 \quad (4.25)$$

bestimmt, die gemäß

$$\hat{\mathbf{X}}^2 = \frac{\mathbf{X}^2}{\sqrt{2J_2(\mathbf{a}^{(t)}) - (\mathbf{a}^{(t)} : \hat{\mathbf{X}}^1)^2}}$$

normiert wird.

Nun werden Näherungslösungen  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{P^*}$  und  $\Delta \mathbf{a}^*$  für  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$  und  $\Delta \mathbf{a}$  in dem durch  $\hat{\mathbf{X}}^\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ) aufgespannten Unterraum gesucht:

$$\Delta \epsilon^p \approx \Delta \epsilon^{p*} = E^\alpha \hat{X}^\alpha \quad (4.26.a)$$

$$\Delta \mathbf{a} \approx \Delta \mathbf{a}^* = A^\alpha \hat{X}^\alpha$$

Aus der Orthonormalität der  $X^\alpha$  folgt :

$$E^\alpha = \hat{X}^\alpha : \Delta \epsilon^{p*} \quad (4.26.b)$$

$$A^\alpha = \hat{X}^\alpha : \Delta \mathbf{a}^*$$

Hier wird bezüglich  $\alpha$  die Summationskonvention verwendet.

Projiziert man die Gleichungen (4.10)-(4.13) auf  $\hat{X}^\alpha$  und berücksichtigt man außerdem die Näherung (4.26a), so erhält man an Stelle von (4.20)

$$\bar{Z}^{\alpha\beta} \delta E^\beta = \bar{R}^\alpha \quad (4.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{Z}^{\alpha\beta} = & \delta^{\alpha\beta} - 2\mu^{(1+\Delta t)} \hat{X}^\alpha : L : \hat{X}^\beta + h X^\alpha : L : \hat{X}^\gamma \hat{X}^\gamma : P^{-1} : \hat{X}^\beta - \\ & - G \hat{X}^\alpha : N (\sigma - 2\mu^{(1+\Delta t)} \theta \Delta \epsilon^p) : \hat{X}^\beta \end{aligned}$$

und

$$\bar{R}^\alpha = \hat{X}^\alpha : (R_1 + R_3 N) - \hat{X}^\alpha : L : \hat{X}^\gamma \hat{X}^\gamma : P^{-1} : \hat{X}^\beta \hat{X}^\beta : R_2$$

Das 2x2-Gleichungssystem (4.27) kann leicht nach den  $\delta E^\alpha$ , den iterativen Verbesserungen der  $E^\alpha$  aufgelöst werden. Dann werden die iterativen Verbesserungen  $\delta A^\alpha$  von  $A^\alpha$  aus

$$\begin{aligned} \delta A^\alpha = & \hat{X}^\alpha : \delta \Delta \mathbf{a}^* \\ = & h \hat{X}^\alpha : P^{-1} : \hat{X}^\beta \delta E^\beta + \hat{X}^\alpha : P^{-1} : \hat{X}^\beta \hat{X}^\beta : R_2 \end{aligned}$$

berechnet und die bisherigen Näherungen für  $E^\alpha$ ,  $A^\alpha$  verbessert

$$E^\alpha \leftarrow E^\alpha + \delta E^\alpha$$

$$A^\alpha \leftarrow A^\alpha + \delta A^\alpha$$

und eine neue Näherung für  $\Delta K$  aus Gleichung (4.13) unter Verwendung von Gl. (4.26.a) berechnet.

Nachdem dieser Iterationsprozeß konvergiert hat, stehen Näherungslösungen für  $\Delta \epsilon^P$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta K$  zur Verfügung.

In den bisher durchgeführten FE-Rechnungen arbeitete das Projektionsverfahren sehr effektiv. Es konvergiert in durchschnittlich 3-5 Iterationen und die damit gewonnene Lösung ist so genau, daß entweder überhaupt keine volle Newton-Iteration erforderlich ist, oder Konvergenz in einer bis zwei anschließenden vollen Newton-Iterationen erreicht wird.

#### 4.4 Berechnung des Tangentenmoduls

Nachdem die numerische Integration für einen Zeitschritt durchgeführt ist und die Spannungen  $\sigma^{(t+\Delta t)}$  und die inneren Variablen  $\mathbf{a}^{(t+\Delta t)}$  und  $K^{(t+\Delta t)}$  berechnet wurden, muß der Tangentenmodul  $\mathbf{D}$

$$\delta\sigma^{(t+\Delta t)} = \mathbf{D}:\delta\epsilon^{(t+\Delta t)}$$

für die globale Gleichgewichtsiteration bereitgestellt werden.

$\delta(\cdot)$  bezeichnet in diesem Abschnitt die Variation von  $(\cdot)$  zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$ .

$\mathbf{D}$  ergibt sich durch Linearisieren des nichtlinearen Gleichungssystems (4.5)-(4.8). Mit den Definitionen (4.14)-(4.19) erhält man

$$\delta\epsilon^P = \mathbf{L}:\delta\sigma - \mathbf{L}:\delta\mathbf{a} + \mathbf{N}\delta K \quad (4.28)$$

$$\mathbf{P}:\delta\mathbf{a} - h\delta\epsilon^P = 0 \quad (4.29)$$

$$\delta K - G\theta\Delta\epsilon^P:\delta\sigma - G\sigma:\delta\epsilon^P = 0 \quad (4.30)$$

$$\delta\sigma = 2\mu^{(t+\Delta t)}(\delta\mathbf{e} - \delta\epsilon^P) + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)^{(t+\Delta t)}(\delta\epsilon:\mathbf{1})\mathbf{1} \quad (4.31)$$

woraus

$$\delta\mathbf{s} = 2\mu^{(t+\Delta t)}\delta\mathbf{e} - (2\mu^{(t+\Delta t)})^2\mathbf{Z}^{-1}:(\mathbf{L} + \theta\mathbf{GN}\Delta\epsilon^P):\delta\mathbf{e} \quad (4.32)$$

folgt. Damit ergibt sich der Tangentenmodul zu

$$\mathbf{D} = 2\mu^{(t+\Delta t)}\left(\mathbf{I} - 2\mu^{(t+\Delta t)}\mathbf{Z}^{-1}:(\mathbf{L} + \theta\mathbf{GN}\Delta\epsilon^P)\right) + \lambda^{(t+\Delta t)}\mathbf{1}\mathbf{1} \quad (4.33)$$

## 4.5 Explizite Integration

Die Integration der konstitutiven Gleichungen (4.1)-(4.3) mit der Explizit-Euler-Methode ergibt zusammen mit dem Hookeschen Gesetz (4.8) für die Inkremente von Spannungen und inneren Variablen

$$\Delta \epsilon^p = \Delta t (f \Sigma)^{(t)} \quad (4.35)$$

$$\Delta \mathbf{a} = h^{(t)} \Delta \epsilon^p - (r \mathbf{a})^{(t)} \quad (4.36)$$

$$\Delta K = \Gamma^{(t)} \Delta W^p + \Theta^{(t)} \Delta T \quad (4.37)$$

$$\Delta W^p = \sigma^{(t)} \Delta \epsilon^p \quad (4.38)$$

Da die rechten Seiten der Gleichungen (4.35) - (4.38) keine unbekannt-ten Variablen enthalten, muß in diesem Fall kein algebraisches Gleichungssystem gelöst werden. Außerdem ergibt sich aus (4.35) und (4.8) der Tangentenmodul für die globale Gleichgewichtsiteration einfach zu

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{(t+\Delta t)} \quad (4.39)$$

Dieses Integrationsverfahren ist numerisch nur bedingt stabil. Der größte zulässige Zeitschritt ist durch die Stabilitätsbedingung

$$\Delta t < \Delta t^{\text{krit}} \sim \left( \text{MAX}_k (|\text{Re}(\omega_k)|) \right) \quad (4.40)$$

begrenzt, wobei  $\omega_k$  die zeitabhängigen Eigenwerte des zugehörigen linearisierten Systems sind /18,25/. Die Stabilitätsbedingung (4.40) kann das Iterationsverfahren besonders dann ineffektiv machen, wenn die Lösung stationär wird, und beliebig große Zeitschritte nur wegen der Stabilitätsbedingung (4.40) verhindert werden.

Bei Verwendung eines expliziten Integrationsalgorithmus in einem FE-Programm stellt (4.40) eine noch stärkere Einschränkung dar, weil dann das Element mit dem kleinsten stabilen Zeitschritt den globalen Zeitschritt für die ganze Struktur bestimmt. Um die Stabilitätsprobleme zu vermeiden, werden die vom FE-Programm vorgegebenen globalen Inkremente  $\Delta t$ ,  $\Delta \epsilon$ ,  $\Delta T$  in Subinkremente unterteilt. Die Integration wird dann über die einzelnen Subinkremente durchgeführt. Die Anzahl  $N$  der verwendeten Subinkremente pro Inkrement wurde empirisch zu

$$N = 4.0 \times 10^4 \Delta \epsilon, \quad \text{mit} \quad \Delta \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{4}{3} J_2(\Delta \epsilon)}$$

angenommen.

Bei Verwendung von Subinkrementen läßt sich kein geschlossener Ausdruck für den Tangentenmodul angeben. Es wird daher das Verfahren der Anfangssteifigkeit /15/ verwendet und (4.39) als Näherung für den Tangentenmodul benutzt. Dadurch verschlechtert sich die Konvergenz der globalen Gleichgewichtsiteration, aber die Gesamtsteifigkeitsmatrix muß nur einmal faktorisiert werden, d.h. bei expliziter Integration vergrößert sich die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen aber der Aufwand pro Iteration wird geringer. Da nicht von vornherein entschieden werden kann, welches der Integrationsverfahren (Explizit-Euler oder GMR) schneller arbeitet, wurden beide Verfahren in das Benutzerprogramm UMAT eingearbeitet. Abb. 9 zeigt einen schematischen Programmablaufplan von UMAT.

#### 4.6 Zeitschrittsteuerung

Um die Genauigkeit der numerischen Integration zu kontrollieren, muß der in jedem Integrationsschritt entstehende Abbruchfehler abgeschätzt werden. Wird das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (4.41a)$$

mit der verallgemeinerten Mittelpunktsregel

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta t \mathbf{f}(t + \theta \Delta t) \quad (4.41b)$$

integriert, und sind die Funktionswerte  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t + \theta \Delta t)$  und  $\mathbf{f}(t + \Delta t)$  bekannt, so zeigt ein Vergleich der Taylor-Entwicklungen von (4.41a) und (4.41b), daß der Abbruchfehler durch

$$e = \Delta t \left| A \|\mathbf{f}(t + \Delta t)\| + B \|\mathbf{f}(t + \theta \Delta t)\| + C \|\mathbf{f}(t)\| \right| \quad \theta < 1 \quad (4.42a)$$

mit

$$A = \frac{2-3\theta}{6(1-\theta)} \quad B = -1 + \frac{1}{6(1-\theta)} \quad C = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} \quad (4.42b)$$

abgeschätzt werden kann.

Die Fehlerabschätzung (4.42) wird auf die konstitutiven Gleichungen angewendet indem aus (4.1) und (4.2) die Vergleichsgrößen

$$\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{4}{3} J_2(\dot{\epsilon}^p)}$$

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{4}{3} J_2(\dot{a})}$$

gebildet werden. Daraus wird gemäß (4.42) der Abbruchfehler durch

$$e^\epsilon = \begin{cases} \Delta t \left| A \bar{\epsilon}^p(t + \Delta t) + B \bar{\epsilon}^p(t + \theta \Delta t) + C \bar{\epsilon}^p(t) \right| & \text{sonst} \\ \frac{\Delta t}{2} \left| \bar{\epsilon}^p(t + \Delta t) - \bar{\epsilon}^p(t) \right| & \text{falls } \theta = 0 \text{ oder } \theta > 0.9 \end{cases} \quad (4.43a)$$

$$e^a = \begin{cases} \Delta t \left| A \bar{a}^{(t+\Delta t)} + B \bar{a}^{(t+\theta\Delta t)} + C \bar{a}^{(t)} \right| & \text{sonst} \\ \frac{\Delta t}{2} \left| \bar{a}^{(t+\Delta t)} - \bar{a}^{(t)} \right| & \text{falls } \theta=0 \text{ oder } \theta>0.9 \end{cases} \quad (4.43b)$$

bestimmt, wobei A,B,C durch (4.42.b) gegeben sind.

Die Zeitschrittsteuerung verläuft nach folgender Vorschrift:

Falls:  $e^e > ETOL$  oder  $e^a > ATOL$

werden die Ergebnisse des aktuellen Zeitschritts verworfen und mit einem kleineren Zeitschritt ( $\Delta t/4$ ) neu berechnet.

Falls:  $ETOLU < e^e < ETOL$  oder  $ATOLU < e^a < ATOL$

werden die Ergebnisse des aktuellen Zeitschritts akzeptiert, jedoch eine Vergrößerung von  $\Delta t$  für den nächsten Zeitschritt unterbunden.

Falls:  $e^e < ETOLU$  und  $e^a < ATOLU$

wird eine Vergrößerung ( $1.5*\Delta t$ ) von  $\Delta t$  im nächsten Zeitschritt zugelassen.

ETOL, ETOLU, ATOL und ATOLU sind empirisch vorgegebene Toleranzen. Alle impliziten Rechnungen wurden mit

$$\begin{array}{ll} ETOL = 4.0 \cdot 10^{-4} & , \quad ATOL = 3 \text{ MPa} \\ ETOLU = 1/5 ETOL & , \quad ATOLU = 1/5 ATOL \end{array}$$

durchgeführt.

Bei den expliziten Rechnungen wurde die Fehlerabschätzung auf die Subinkremente bezogen. Dabei zeigte sich, daß die Toleranzen um einen Faktor 5 gegenüber den impliziten Rechnungen verkleinert werden mußten, um vergleichbare Genauigkeit zu erzielen.

## 5. Berechnungsbeispiele

### 5.1. Homogene Lastfälle

Um die Effizienz des Integrationsverfahrens und der Zeitschrittsteuerung zu untersuchen, wurden eine Reihe von Testrechnungen für homogene ein- und zweiachsige Belastungen durchgeführt /26/. Diese Testrechnungen, bei denen keine Finiten Elemente eingesetzt werden mußten, sollten Anhaltspunkte für optimale Werte des Integrationsparameters  $\theta$  bei verschiedenartigen, insbesondere auch bei extrem nichtradialen, Lastfällen liefern.

Es wurden folgende Lastfälle bei der Temperatur  $T = 773 \text{ K}$  untersucht:

- a) einachsiges Kriechen
- b) einachsige zyklische Belastung
- c) zweiachsiges Kriechen (radial)
- d) zweiachsige zyklische Belastung (radial)
- e) zweiachsige zyklische Belastung (nichtradiel)

Abb. 10 zeigt die zugehörigen Belastungsdiagramme. Für jeden der oben beschriebenen Lastfälle wurde zuerst eine "genaue" Lösung mit dem Explizit-Euler-Verfahren berechnet, indem der Zeitschritt solange halbiert wurde, bis eine weitere Halbierung das Ergebnis in den ersten vier Dezimalstellen nicht mehr änderte. Durch Vergleich mit dieser Lösung konnten die Fehler der numerischen Integration mit der GMR bestimmt werden.

Um für die FE-Anwendung relevante Aussagen machen zu können, wurde das Integrationsverfahren unter dehnungskontrollierten Bedingungen getestet. Die "genaue" Lösung wurde dazu benutzt, die Dehnungsinkremente  $\Delta \epsilon$  für jeden Zeitschritt zu berechnen. Um die Genauigkeit zu beurteilen, wurde eine Fehlergröße  $\bar{E}$  als arithmetischer Mittelwert der Beträge der Abweichung von der "genauen" Lösung zu bestimmten Zeitpunkten definiert. Bei den Kriechbelastungen waren dies die Zeitpunkte  $t=0.02, 0.1, 0.2, 5.0, 20.0 \text{ h}$ , und bei den zyklischen Belastungen die Punkte, die der positiven Maximallast entsprechen.

Als Maß für die Effektivität der Integrationsverfahren in Verbindung mit der Zeitschrittsteuerung wurde das Produkt  $\bar{E} \cdot N$  ( $N$ =Gesamtzahl der Zeitschritte) untersucht. Da die Zeitschrittsteuerung auf einer Abschätzung des Abbruchfehlers beruht, der bei  $\theta=0.5$  den kleinsten Wert annimmt, war zu erwarten, daß an dieser Stelle auch das Minimum von  $\bar{E} \cdot N$  auftreten würde. Beim einachsigen zyklischen und beim zweiachsigen zyklischen radialen Lastfall bestätigt sich dies. Abb.11a-c zeigt, daß sowohl  $\bar{E}$  als auch  $N$  und damit auch  $\bar{E} \cdot N$  ein Minimum bei  $\theta=0.5$  haben. Beim nichtradialen zyklischen zweiachsigen Lastfall (Abb.12 a-c) liegt das Minimum des relativen Fehlers immer noch in der Nähe von  $\theta=0.5$ , aber die Anzahl der Zeitschritte steigt bei  $\theta \rightarrow 0.5$  stark an. Auch für alle anderen Werte von  $\theta$  ist  $N$  sehr viel größer als bei den radialen Lastfällen. Abb.12c zeigt, daß der optimale Wert von  $\theta$  bei  $\theta=0.65$  liegt. Bei den ein- und zweiachsigen Kriechbelastungen scheint  $\theta=0.65$  ebenfalls am effektivsten zu sein (Abb.13c). Während  $\bar{E}$  bei  $\theta=0.5$  ein Maximum aufweist (Abb. 13a), ist die Anzahl der Zeitschritte bei  $\theta=0.5$  (Abb. 13b) minimal. Die Kriechbelastungen zeigen jedoch erwartungsgemäß einen deutlich kleineren relativen Fehler bei gleichzeitig größerem Zeitschritt als die zyklischen Belastungen. Offensichtlich wird von der Zeitschrittsteuerung für  $\theta \rightarrow 0.5$  ein größerer Zeitschritt zugelassen, der zu einem vernachlässigbaren Verlust an Genauigkeit führt. Daher kann die GMR mit  $\theta=0.5$  auch bei dieser Belastung als sehr effektiv angesehen werden.

Um den Anstieg der Zeitschrittzahl bei  $\theta \rightarrow 0.5$  im Fall von stark nichtradialen Belastungen zu vermeiden, muß die Zeitschrittsteuerung weiter untersucht werden. Möglicherweise müssen die in Abschnitt 4.6 erwähnten Faktoren zur Vergrößerung ( $1.5\Delta t$ ) bzw. Verkleinerung ( $\Delta t/4$ ) des Zeitschritts verändert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die "Nicht-Radialität" in die Toleranzen einzubeziehen /22/.

Die Ergebnisse der homogenen Lastfälle zeigen, daß die Leistungsfähigkeit einer Integrationsmethode stark von der Zeitschrittsteuerung abhängt. Außerdem wird deutlich, daß bei der Integration nicht-radialer Lastfälle ein viel kleinerer Zeitschritt erforderlich ist und daß für die Beurteilung von Integrationsverfahren solche Lastfälle mitberücksichtigt werden müssen.

## 5.2 Kriech- und Dehnwechselbelastung einer Lochscheibe

In diesem Abschnitt werden zwei Berechnungsbeispiele dargestellt, um die Anwendung eines viskoplastischen Stoffgesetzes an einer einfachen Struktur zu veranschaulichen. Eine Lochscheibe (siehe Abb. 14) wird einer Kriech- und einer Dehnwechselbelastung ausgesetzt. Es wurde eine hohe Belastung gewählt, um die Funktionsfähigkeit des für das Robinson-Modell entwickelten Unterprogramms UMAT zu testen.

Aufgrund der Symmetrieverhältnisse genügt es  $\frac{1}{4}$  der Gesamtstruktur zu modellieren. Es wurde ein zweidimensionales FE-Modell mit der Bedingung eines ebenen Verzerrungszustandes verwendet. Die Rechnung wurde für die Temperatur  $T = 773$  K durchgeführt, wobei die in Anhang A.1 zusammengestellten Materialkonstanten für das Robinson-Modell benutzt wurden.

Im Fall der Kriechbelastung wird auf dem oberen Rand der Struktur durch eine Stufenfunktion zur Zeit  $t=0$  die Spannung  $\sigma_x = \sigma_R$  vorgeschrieben. Aufgrund der unendlich schnellen Belastung ergibt sich zunächst eine elastische Antwort. Für  $t>0$  setzt dann Kriechen ein. In Abb. 15 sind die ortsabhängigen Spannungen im höchstbelasteten Querschnitt entlang der Linie  $\overline{AB}$  für verschiedene Zeiten aufgetragen.  $\sigma_{xx}(t=0)$  entspricht der rein elastischen Spannungsverteilung mit der typischen Spannungsüberhöhung am Lochrand. Innerhalb der ersten Minute ergibt sich eine rasche Umverteilung der Spannungen, die sich danach nur noch wenig ändern. Der zeitliche Verlauf der Kriechdehnung an verschiedenen Punkten der Linie  $\overline{AB}$  ist in Abb. 16 dargestellt. Aufgrund der hohen Belastung wird überall im Querschnitt nach kurzer Zeit der stationäre Kriechbereich erreicht.

In Abb. 17 wird an derselben Struktur eine Dehnwechselbelastung untersucht. Hierzu wird am oberen Rand eine ortsunabhängige zyklische Verschiebung mit einer Dehnrates  $\Delta \dot{w} = 6.675 \cdot 10^{-5}$  1/s vorgeschrieben. In Abb. 17 wird für dieses Beispiel die zyklische Last-Verschiebungskurve der am oberen Rand angreifenden Last und die Spannungs-Dehnungs-Hysterese am höchstbelasteten Punkt gezeigt. Aufgrund der hohen Belastung an dieser Stelle wird bereits nach dem ersten Zyklus nahezu die Sättigungshysterese erreicht, während die

Last-Verschiebungskurve auch in den folgenden Zyklen weitere zyklische Verfestigung zeigt.

Ein Rechenzeitvergleich (s. Tab. 1) zeigt, daß bei beiden Belastungsarten die erforderliche CPU-Zeit für  $\theta = \frac{1}{2}$  am geringsten ist. Dabei ist der Unterschied im Fall der Kriechbelastung am größten.

#### Kriechbelastung

$\theta$	0.5	0.67	0.83	1
Anzahl der Zeitschritte	66	108	147	166
Anzahl der Gleichgewichtsiterationen	143	211	292	332
CPU-Zeit (min)	6.1	8.1	11.2	13.5

#### Zyklische Belastung

$\theta$	0.5	0.67	0.83	1
Anzahl der Zeitschritte	248	245	325	323
Anzahl der Gleichgewichtsiterationen	479	476	624	703
CPU-Zeit (min)	18.1	18.0	23.7	26.3

Tab.1 Vergleich der Zahl der Zeitschritte, Zahl der Gleichgewichtsiterationen und CPU-Zeiten für verschiedene Werte des Integrationsparameters  $\theta$  (alle Rechnungen wurden auf einer SIEMENS M7890 durchgeführt)

## 6. Zusammenfassung

Am Beispiel eines viskoplastischen Stoffgesetzes, dem Robinson-Modell, wurden verschiedene numerische explizite und implizite Integrationsverfahren untersucht. Dabei wurde insbesondere auf die Leistungsfähigkeit der Methoden im Hinblick auf die Anwendung in FE-Programmen geachtet.

Das Robinson-Modell ist ein typischer Vertreter einer Klasse von Stoffmodellen, den sog. Überspannungsmodellen. Es enthält innere Variablen zur Beschreibung des kinematischen ( "back-stress" ) und des isotropen Verfestigungsverhaltens. In den Entwicklungsgesetzen für die inneren Variablen treten Verfestigungs- und Erholungsterme auf.

Der Einbau dieses Stoffmodells in ein Finite Elemente Programm (ABAQUS) durch Entwicklung eines speziellen Unterprogramms UMAT wird ausführlich beschrieben. Da dieses Unterprogramm bei jedem Schritt der Gleichgewichtsiteration an jedem Integrationspunkt der Struktur aufgerufen wird, müssen effiziente numerische Verfahren eingesetzt werden, um die Rechenzeit möglichst gering zu halten. In UMAT werden die konstitutiven Gleichungen integriert und der Tangentenmodul berechnet.

Bei dem expliziten Integrationsverfahren (Explizit-Euler) wird der globale Zeitschritt in Subinkremente unterteilt um die Stabilitätsgrenze nicht zu überschreiten. Der Tangentenmodul wird gemäß der Methode der Anfangssteifigkeit durch den Elastizitätstensor ersetzt. Dies führt zu einer höheren Anzahl von Gleichgewichtsiterationen pro Zeitschritt. Da jedoch der Rechenzeitbedarf pro UMAT-Aufruf verglichen mit den impliziten Methoden klein ist und die Gesamtsteifigkeitsmatrix nur einmal faktorisiert werden muß, kann auch diese Vorgehensweise sehr effizient sein.

Als implizite Methode wird die verallgemeinerte Mittelpunktsregel in ihrem uneingeschränkt stabilen Bereich eingesetzt. Der Integrationsalgorithmus erfordert hier ein lokales Iterationsverfahren zur Lösung von nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystemen. Wegen der quadratischen Konvergenzeigenschaft wird auch hier das Newtonverfahren angewendet. Die Konvergenz wird durch die Anwendung einer Projektionsmethode zur Erzielung guter

Anfangsschätzwerte stark beschleunigt. Häufig ist keine volle, lokale Newton-Iteration mehr erforderlich. Gegenüber den bei den zeitunabhängigen plastischen Stoffmodellen üblichen Methoden mußte das Projektionsverfahren erweitert werden, damit beim Auftreten von Erholungstermen im Entwicklungsgesetz für die kinematische Verfestigungsvariable hinreichend gute Näherungslösungen erzielt werden.

Einen wesentlichen Beitrag zur Leistungsfähigkeit von UMAT liefert die entwickelte Strategie zur Zeitschrittsteuerung. Die Diskussion der Beispiele bei homogener Belastung zeigt jedoch, daß bei starker nichtradialer Belastung hierzu Verbesserungen erforderlich sind.

Es wurden verschiedene Lastfälle untersucht, wobei sich ergab, daß die implementierten Methoden über einen großen Bereich von Zeitschritten ( $10^{-5}$  h bei zyklischer Belastung bis  $5 \cdot 10^1$  h bei Kriechbelastung) gut arbeiteten. Am Beispiel der Lochscheibe erwies sich ein Wert von  $\nu=0.5$  bei der GMR als optimal, insbesondere im Fall einer Kriechbelastung. Es zeigt sich aber auch aus den oben dargelegten Vor- und Nachteilen der Integrationsverfahren, daß es nicht möglich ist, ein Verfahren uneingeschränkt zu empfehlen. Vielmehr muß sich die Auswahl des Verfahrens an der Problemstellung und an dem zur Beschreibung eingesetzten Stoffgesetz orientieren. So macht sich beispielsweise eine Reduzierung der Rechenzeit durch Einsatz eines impliziten Verfahrens im Falle einer Kriechbelastung wesentlich stärker bemerkbar als bei Dehnwechselbelastungen. Die Untersuchungen werden fortgesetzt durch die Analyse weiterer 2D und 3D Strukturen, die als Grundelemente in Bauteilen häufig auftreten. Die angewendeten numerischen Verfahren sollen an weiteren Stoffmodellen erprobt werden, wobei auch an eine Erweiterung auf Theorien mit ersten und dritten Invarianten gedacht ist.

## Danksagung

Die Autoren danken den Herren Prof. D.N. Robinson, Dr. H.D. Hibbitt und H. Moldenhauer für hilfreiche Diskussionen.

Die vorliegende Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Sonderforschungsbereichs "Hochfeste Brennräume - stationäre Gleichdruckverbrennung" an der Universität Karlsruhe (TH) gefördert.

## Literatur

- /1/ ROBINSON, D.N. - A Unified Creep-Plasticity Model for Structural Metals at High Temperature. ORNL Report/TM-5969, 1978.
- /2/ ROBINSON, D.N. and BARTOLOTTA, P.A. - Viscoplastic Constitutive Relationships with Dependence on Thermomechanical History. NASA CR 174836, March 1985.
- /3/ WALKER, K.P. - Research and Development Program for Nonlinear Structural Modeling with Advanced Time-Temperature Dependent Constitutive Relationships. NASA Contract Report, NASA CR 165533, 1981.
- /4/ CHABOCHE, J. L., - Viscoplastic Constitutive Equations for the Description of Cyclic and Anisotropic Behavior of Metals. Bulletin de l'Academie des Sciences, Serie des Sciences Techniques, Vol. XXV, No. 1, p.33, 1977.
- /5/ BRUHNS, O.T., BOECKE, B., Link, F. - The Constitutive Relations of Elastic-Inelastic Materials at Small Strains. Nucl. Eng. and Design **83**, p.325, 1984.
- /6/ HART, E., W. - Constitutive Relations for the Nonelastic Deformation of Metals. ASME J. Eng. Mat. & Technology **98**, p.193, 1976.
- /7/ KREMPL, E., MCMAHON, J.J., YAO, D. - Viscoplasticity based on over-stress with a differential growth law for the equilibrium stress. Mech. of Materials **5**, p.35, 1986.
- /8/ MILLER, A. K. - An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic and Creep Deformation: Part I - 'Equations Development and Analytical Procedures' and Part II - 'Application to Type 304 Stainless Steel' ASME J. of Eng. Mat. and Technol. **98**, p.97, 1976.
- /9/ KRIEG, R. D., Swearingen, J.C., Rohde, R.W. - A Physically Based Internal Variable Model for Rate-Dependent Plasticity, in: Inelastic Behaviour of Pressure Vessel and Piping Components, PVP-PB-028 (ASME), p.15, 1978.

- /10/ KREMPL, E. - Cyclic creep. An interpretative literature survey, WRC Bulletin No. 195, Welching Research Conneil, New York, 1974.
- /11/ LINDHOLM, U.S., CHAN, K.S., BODNER, S.R., WEBER, R.M., WALKER, K.P., CASSENTI, B.N. - Constitutive Modeling for Isotropic Materials (HOST). NASA CR-174718, 1984.
- /12/ CESCOTTO, S. and LECKIE, F. - 'Determination of Unified Constitutive Equations for Metals at High Temperature', Proc. of the Int. Conference on "Constitutive Laws for Engineering Materials", Tucson, Arizona, Jan. 10-14, 1983, Ed. Desai and Gallagher, p. 105.
- /13/ ONAT, E.T. and FARDSHISHE, F. - Representation of Creep, Rate Sensitivity and Plasticity. SIAM J. Appl. Math. 25, p. 522, 1973.
- /14/ HIBBITT, KARLSSON and SORENSEN, INC. - ABAQUS Theory Manual, Providence, RI, 1984.
- /15/ ZIENKIEWICZ, O.C. - **The Finite Element Method** (3rd. Ed.), McGraw-Hill, New York, 1977.
- /16/ ARAYA, V.K., HORNBERGER, K. and STAMM, H. - On the Numerical Integration of Viscoplastic Models. KfK 4082, May 1986.
- /17/ BODNER, S.R. and PARTOM, Y. - Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials, ASME J. of Appl. Mech. 42, p. 385, 1975.
- /18/ HUGHES, T.J.R. - 'Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behaviour', Computational Methods for Transient Analysis, p. 67, Ed. Belytschko, T. and Hughes, T.C.J., North Holland, Amsterdam, 1983.
- /19/ SHERMAN, I. and MORRISON, W.I. - Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to Changes in the Elements of a Given Column or a Given Row of the Original Matrix. Ann. Math. Statist. 20, p. 621, 1947.

- /20/ HIBBITT, H.D. - Some Issues in Numerical Simulations of Nonlinear Structural Response. Unveröffentlicht.
- /21/ KRIEG, R.D. and KRIEG, D.B. - Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model. J. Press. Vess. Techn., ASME 99, p. 510, 1977.
- /22/ SCHREYER, H.L., KULAK, R.L. and KRAMER, J.M. - Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models. J. Press. Vess. Techn., ASME 101, p. 226, 1979.
- /23/ ORTIZ, M. and POPOV, E.P. - Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, Int. J. Num. Meth. Eng. 21, p. 1561, 1985.
- /24/ SIMO, J.C. and TAYLOR, R.L. - Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 48, p. 101, 1985.
- /25/ LAMBERT, J.D. - **Computational Methods in Ordinary Differential Equations**, John Wiley, London, 1973.
- /26/ HUBER, W. - Untersuchungen zur numerischen Integration viskoplastischer Stoffgesetze. Studienarbeit, Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau, Universität Karlsruhe, 1987. Unveröffentlicht.
- /27/ DAHLQUIST, G. and LINDBERG, B. - On Some Implicit One-Step-Methods for Stiff Differential Equations. Rep. TRITA-NA-7302. Dep. of Information Processing, The Royal Institut of Technology, Stockholm, 1973.
- /28/ HIBBITT, KARLSSON and SORENSEN, INC. - ABAQUS Theory and Users Manual, Providence, RI, 1984.
- /29/ "ADINA", A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis", Report AE 84-1, ADINA Eng. Inc. Watertown Mass. USA, 1984.

### A.1. Materialkonstanten für das Robinson-Modell

Die Materialkonstanten für die in Abschnitt 2.2 beschriebene Version des Robinson-Modells wurden /2/ entnommen und haben in den angegebenen Einheiten folgende Werte

$$E(T) = 2.67 \times 10^5 \text{ MPa} - 149 T \text{ MPa/K}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\alpha^{\text{th}} = 14 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$$

$$A = 2.73 \times 10^{-12} \text{ 1/s}$$

$$n = 4$$

$$\beta = 0.75$$

$$m = 3.37$$

$$H = 6.84 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$\kappa_0^2 = 31.7 \text{ (MPa)}^2$$

$$G_0 = 0.5$$

$$R(T) = R_r \exp[Q_r(1/T_0 - 1/T)]$$

$$\text{mit: } Q_r = 4.0 \times 10^4 \text{ 1/K, } R_r = 3.0 \times 10^{-11}, T_0 = 811 \text{ K}$$

$$W_0(T) = p + q(T - T_p)^2$$

$$\text{mit: } p = 3.45 \text{ MPa, } q = 3.45 \times 10^{-4} \text{ MPa/K}^2, T_p = 711 \text{ K}$$

$$K_i(T) = K_0 \{1 - \frac{1}{2}(1 - \exp[-Q_0(1/T_0 - 1/T)])\}$$

$$\text{mit: } Q_0 = 4.0 \times 10^3 \text{ K, } K_0 = 95.1 \text{ (MPa)}^2$$

$$K_s(T) = A + B(T - T_p) + C(T - T_p)^2$$

$$\text{mit: } A = 760 \text{ (MPa)}^2, B = -1.9 \text{ (MPa)}^2/\text{K}, C = -0.045 \text{ (MPa/K)}^2$$

## A.2. Integrations-Algorithmen

Die numerische Integration des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(t=t_0) &= \mathbf{y}_0\end{aligned}\tag{A.1}$$

wird in diskreten Zeitschritten  $\Delta t$  mit Hilfe einer der folgenden Beziehungen durchgeführt:

### a) Explizit-Euler

$$\mathbf{y}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{y}^{(t)} + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t)}, t)\tag{A.2}$$

### b) Implizit-Euler

$$\mathbf{y}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{y}^{(t)} + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t+\Delta t)}, t+\Delta t)\tag{A.3}$$

### c) Verallgemeinerte Mittelpunkts-Regel (GMR)

$$\mathbf{y}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{y}^{(t)} + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t+\theta\Delta t)}, t+\theta\Delta t)\tag{A.4}$$

mit

$$\mathbf{y}^{(t+\theta\Delta t)} = (1-\theta)\mathbf{y}^{(t)} + \theta\mathbf{y}^{(t+\Delta t)}$$

### d) Verallgemeinerte Trapez-Regel

$$\mathbf{y}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{y}^{(t)} + \Delta t \left( (1-\theta)\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t)}, t) + \theta\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t+\Delta t)}, t+\Delta t) \right)\tag{A.5}$$

Die Gleichungen (A.4) und (A.5) enthalten einen frei wählbaren Parameter  $\theta$ , der Werte aus dem Intervall  $0 \leq \theta \leq 1$  annehmen kann. Spezialfälle von (A.4) und (A.5) sind

- $\theta = 0$  : Explizit-Euler
- $\theta = 1$  : Implizit-Euler
- $\theta = 0.5$  : Mittelpunkts-Regel / Trapez-Regel

Für alle Werte  $\theta \neq 0$  sind die Methoden (A.3)-(A.5) implizit, d.h. die zu berechnenden Funktionswerte  $y^{(t+\Delta t)}$  sind Argumente der im allgemeinen nichtlinearen Funktionen  $f$ . Implizite Integration erfordert daher die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems (s.u.).

Die wichtigsten Eigenschaften bezüglich Genauigkeit und Stabilität von (A.3) - (A.5) sind /18,25/

- $\theta \neq 0.5$  : Genauigkeit der Ordnung 1
- $\theta = 0.5$  : Genauigkeit der Ordnung 2
- $\theta < 0.5$  : bedingte Stabilität  $\Delta t < \Delta t^{\text{krit}}(\theta)$
- $\theta \geq 0.5$  : uneingeschränkte Stabilität  $\Delta t < \infty$
- $\theta = 1$  : beste Stabilitätseigenschaften /25/

Eine sinnvolle Anwendung von (A.4) und (A.5) erfordert daher  $0.5 \leq \theta \leq 1$ , weil andernfalls ein Gleichungssystem gelöst werden muß ohne eine grundlegende Verbesserung der Stabilitätseigenschaften zu erzielen.

### A.3. Newton-Methode für GMR und GTR

Wendet man die Newton-Methode auf die GMR (A.4) an, so erhält man die Korrektur  $\delta \mathbf{y}$  zur r-ten Näherung  $(\mathbf{y}^{(t+\Delta t)})^{(r)}$  aus

$$\left( \mathbf{I} - \theta \Delta t \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{(t+\theta \Delta t)} \right)^{(r)} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{R}_{\text{GMR}}^{(r)} \quad (\text{A.6})$$

mit

$$\mathbf{R}_{\text{GMR}}^{(r)} = \mathbf{y}^{(t)} + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t+\theta \Delta t)}, t + \theta \Delta t)^{(r)} - (\mathbf{y}^{(t+\Delta t)})^{(r)} \quad (\text{A.7})$$

( $\mathbf{I}$  ist die Einheitsmatrix)

Das lineare Gleichungssystem (A.6) muß nach  $\delta \mathbf{y}$  aufgelöst werden um die neuen Näherungen

$$(\mathbf{y}^{(t+\Delta t)})^{(r+1)} = (\mathbf{y}^{(t+\Delta t)})^{(r)} + \delta \mathbf{y} \quad (\text{A.8})$$

zu berechnen. Diese Iteration wird fortgesetzt bis ein Konvergenzkriterium der Form

$$\|\mathbf{R}^{(r)}\| < \text{TOL} \quad (\text{A.9})$$

erfüllt ist, wobei  $\|\cdot\|$  eine Norm und TOL eine Toleranz bedeutet. In der vorliegenden Arbeit wurde die euklidische Norm verwendet.

Die Newton-Methode für die GTR (A.5) lautet

$$\left( \mathbf{I} - \theta \Delta t \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{(t+\Delta t)} \right)^{(r)} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{R}_{\text{GTR}}^{(r)} \quad (\text{A.10})$$

mit

$$\mathbf{R}_{\text{GTR}}^{(r)} = \mathbf{y}^{(t)} + \Delta t \left( (1-\theta) \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t)}, t) + \theta \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(t+\Delta t)}, t + \Delta t) \right)^{(r)} - (\mathbf{y}^{(t+\Delta t)})^{(r)} \quad (\text{A.11})$$

Der Iterationsprozeß wird wie in (A.8) durchgeführt bis ein Kriterium der Form (A.9) erfüllt ist.

Die beiden Integrationsmethoden (GTR) und (GMR) unterscheiden sich nur wenig. Tatsächlich wurde gezeigt /27/, daß sie in gewissem Sinn äquivalent sind. Es muß jedoch betont werden, daß sich Unterschiede ergeben können, wenn die Funktionen  $f$  Unstetigkeiten enthalten.

Da alle Plastizitätsmodelle und viele viskoplastische Modelle Unstetigkeiten im Fließ- und/oder in den Entwicklungsgesetzen enthalten, sind diesbezüglich weitere Untersuchungen erforderlich.

## Liste der verwendeten Symbole

Tensoren und Matrizen werden mit fettgedruckten Buchstaben bezeichnet, wobei der Typ einer Größe aus dem jeweiligen Zusammenhang ersichtlich ist. So kann  $\mathbf{X}$  folgende Bedeutungen haben:

$$\mathbf{X} \quad \text{Vektor mit Komponenten} \quad (\mathbf{X})_k = X_k$$

$$\mathbf{X} \quad \text{symm. Tensor zweiter Stufe mit Komp.} \quad (\mathbf{X})_{kl} = X_{kl}$$

$$\mathbf{X} \quad \text{Tensor vierter Stufe mit Komponenten} \quad (\mathbf{X})_{klmn} = X_{klmn}$$

Die Einheitstensoren zweiter und vierter Stufe werden durch

$$\mathbf{1} \quad \text{mit Komponenten} \quad (\mathbf{1})_{kl} = \delta_{kl}$$

$$\mathbf{I} \quad \text{mit Komponenten} \quad (\mathbf{I})_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm})$$

bezeichnet.

Die Schreibweise für Tensorprodukte folgt den üblichen Regeln, d.h. je ein Punkt steht für eine Kontraktion, also z.B.:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})_{kl} = X_{kn} Y_{nl}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = X_k Y_k$$

$$\mathbf{X} : \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} : \mathbf{Y}) = X_{kl} Y_{kl}$$

$$\mathbf{X} : \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} : \mathbf{Y})_{klmn} = X_{klab} Y_{abmn}$$

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \mathbf{Y})_{klmn} = X_{kl} Y_{mn}$$

Hier wurde die Summationskonvention verwendet und ein kartesisches Koordinatensystem zugrundegelegt. Insbesondere gilt

$$\mathbf{11} \quad (\mathbf{11})_{klmn} = \delta_{kl} \delta_{mn}$$

Die zweite Invariante eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{X}$  wird mit

$$J_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}:\mathbf{X}$$

bezeichnet.

Außerdem werden folgende Bezeichnungen verwendet

$\boldsymbol{\sigma}$  Spannungstensor

$\mathbf{s}$  Spannungsdeviator  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{1})\mathbf{1}$

$\boldsymbol{\epsilon}$  Tensor der Gesamtdehnungen

$\mathbf{e}$  Dehnungsdeviator  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{1})\mathbf{1}$

$\boldsymbol{\epsilon}^p$  Tensor der inelastischen Dehnungen

$\mathbf{a}$  Kinematische Verfestigungsvariable

$K$  Isotrope Verfestigungsvariable

$\boldsymbol{\Sigma}$  "Effektiv-Spannung",  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \mathbf{a}$

$\mathbf{E}$  Elastizitätstensor

$E, \nu$  E-Modul, Querkontraktionszahl

$\mu, \lambda$  Lamé-Konstanten

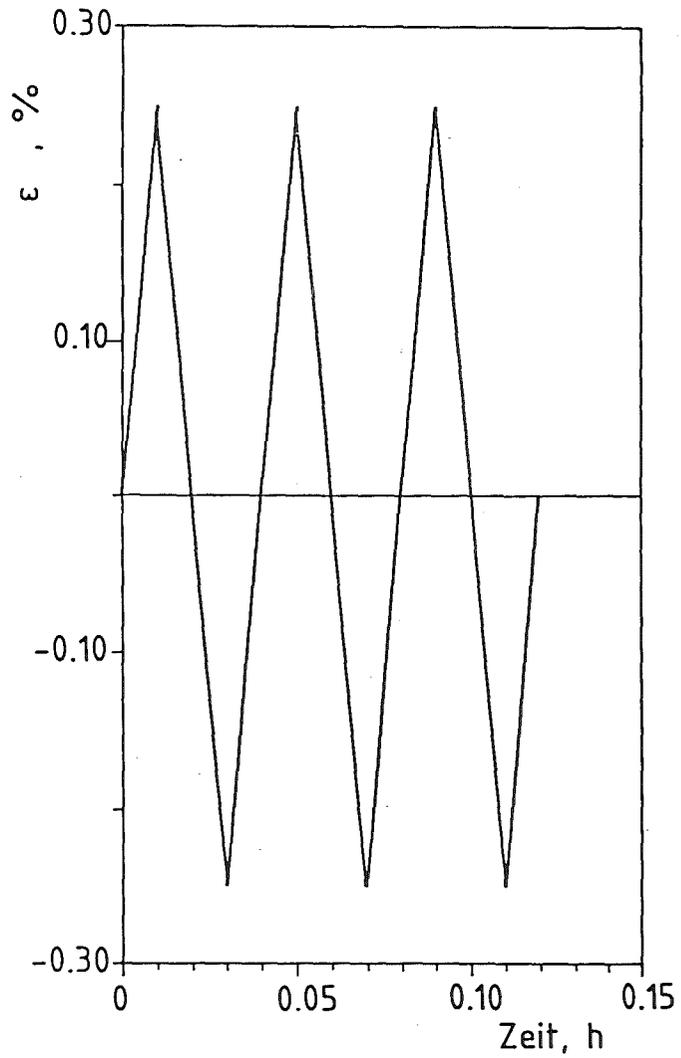


Abb.1 Zeitfunktion der Gesamtdehnung bei einachsiger Dehnwechselbelastung.

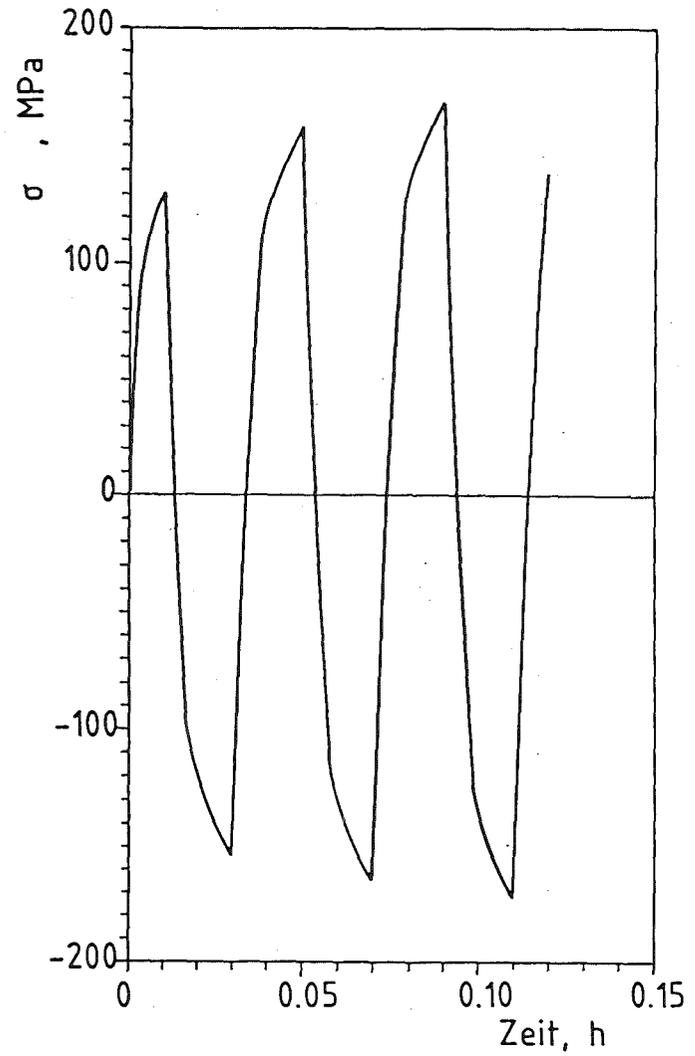


Abb.2 Spannung in Abhängigkeit von der Zeit bei einachsiger Dehnwechselbelastung.

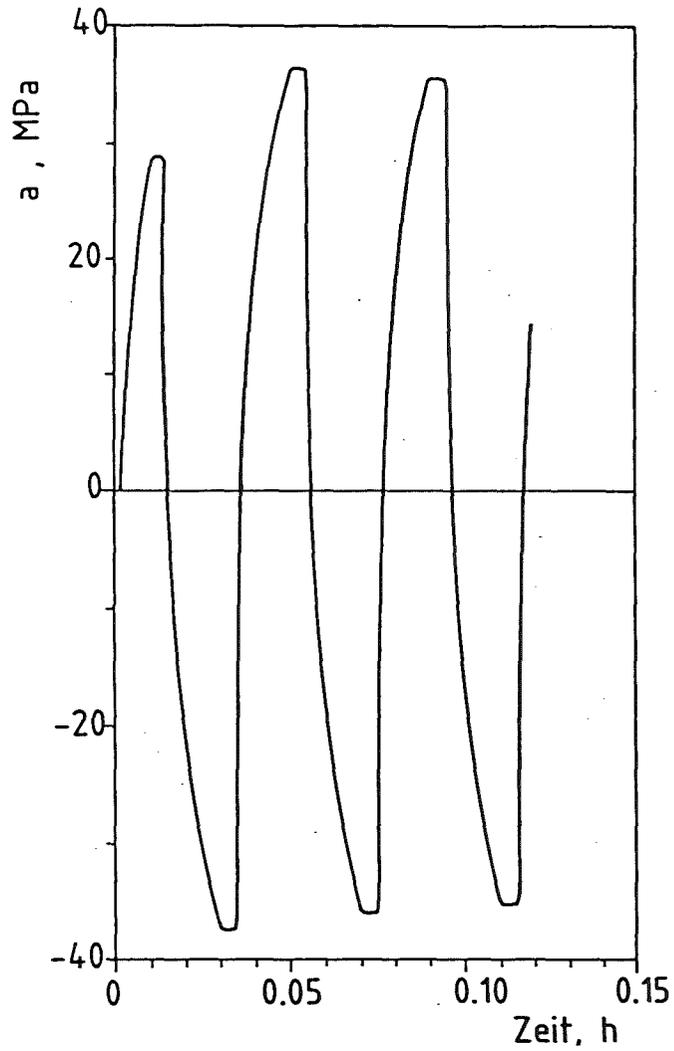


Abb.3 Zeitlicher Verlauf der kinematischen Verfestigungsvariablen  $a$  bei einachsiger Dehnwechselbelastung.

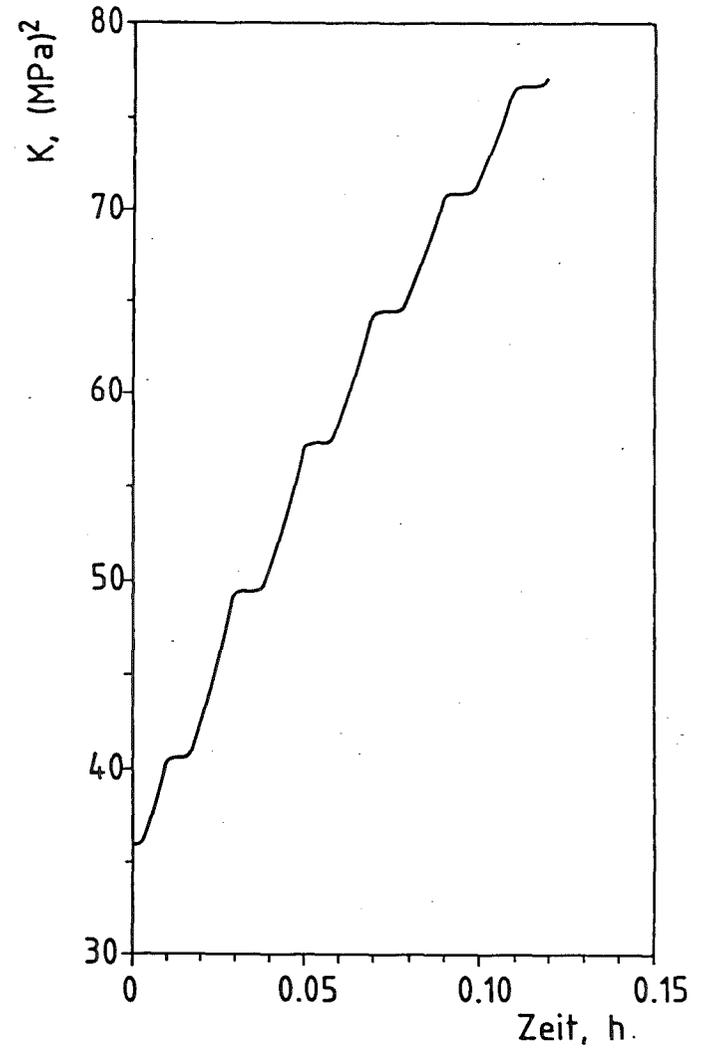


Abb.4 Zeitlicher Verlauf der isotropen Verfestigungsvariablen  $K$  bei einachsiger Dehnwechselbelastung.

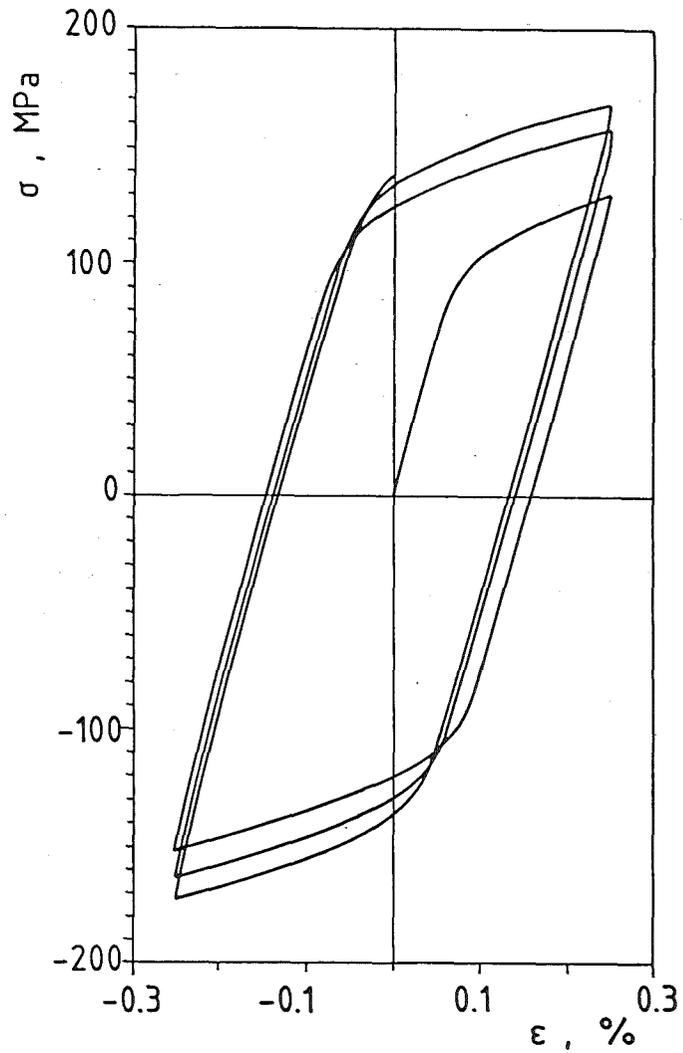


Abb.5 Zyklische Spannungs-Dehnungskurve bei einachsiger Dehnwechselbelastung.

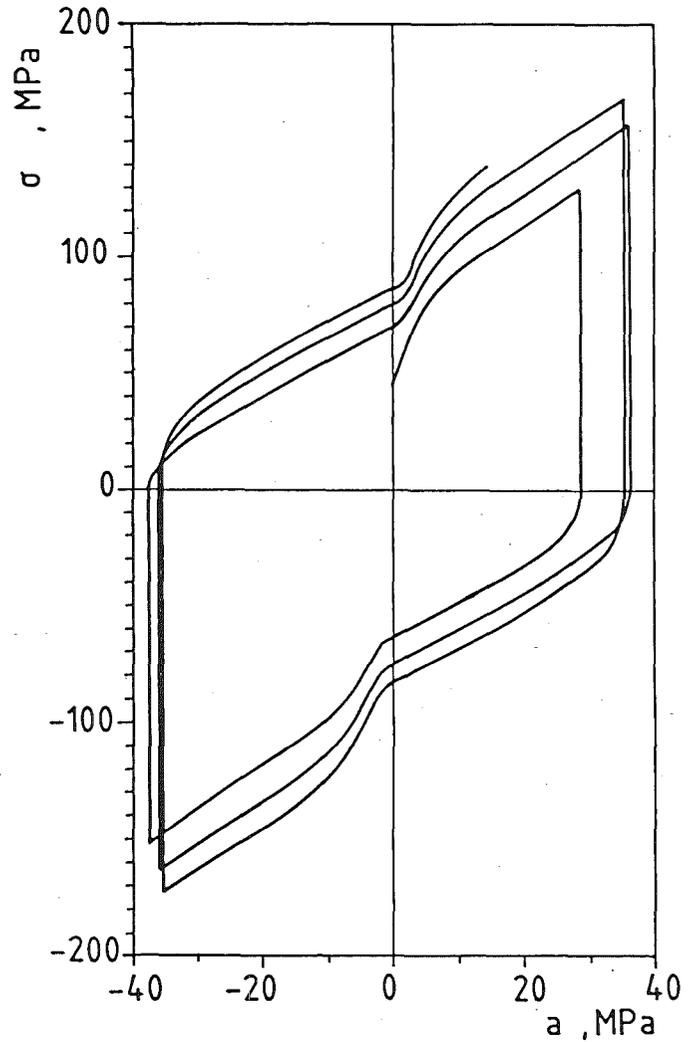


Abb.6 Trajektorie im Zustandsraum bei einachsiger Dehnwechselbelastung.

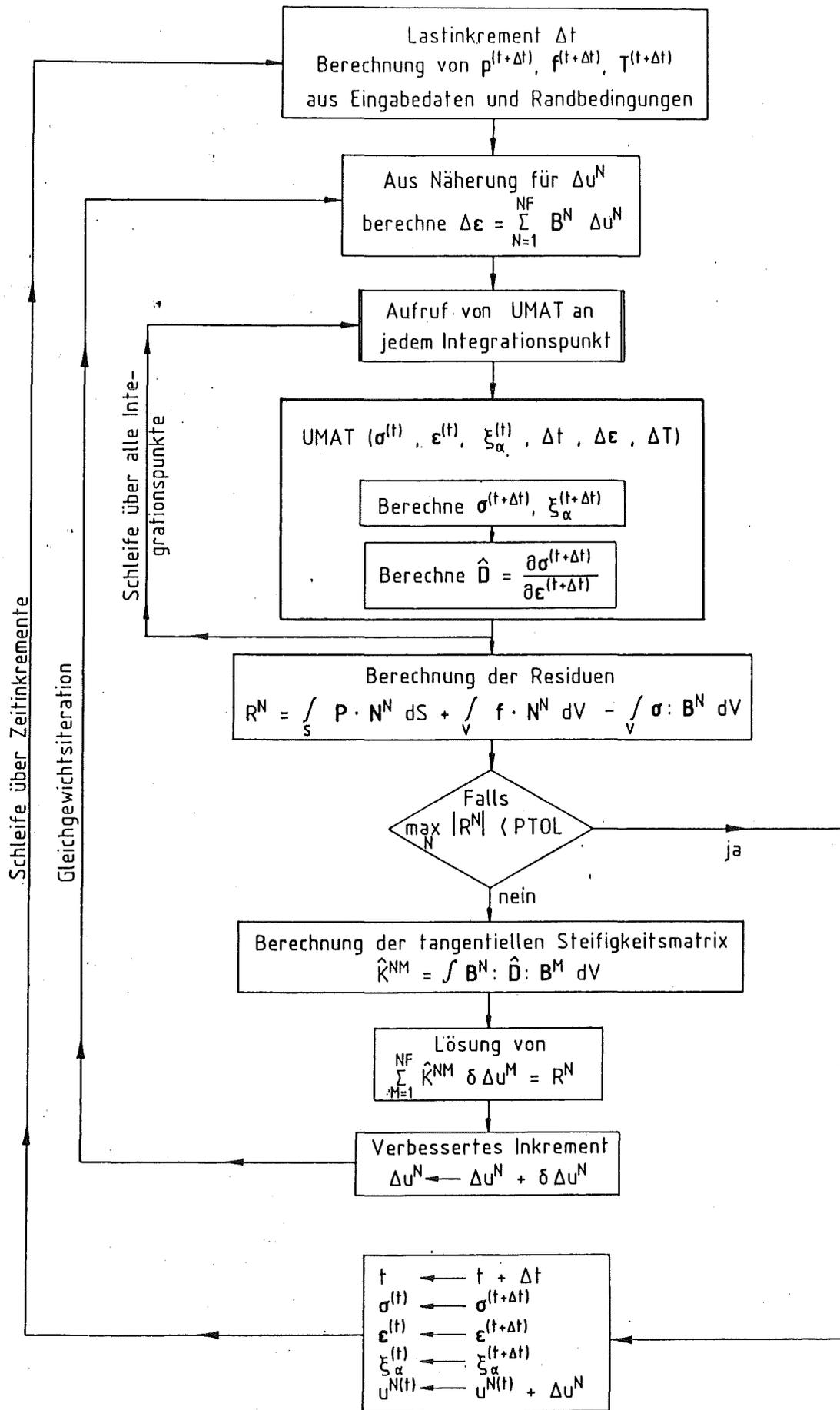


Abb.7 Flußdiagramm der FE-Analyse in ABAQUS bei nichtlinearem Materialgesetz.

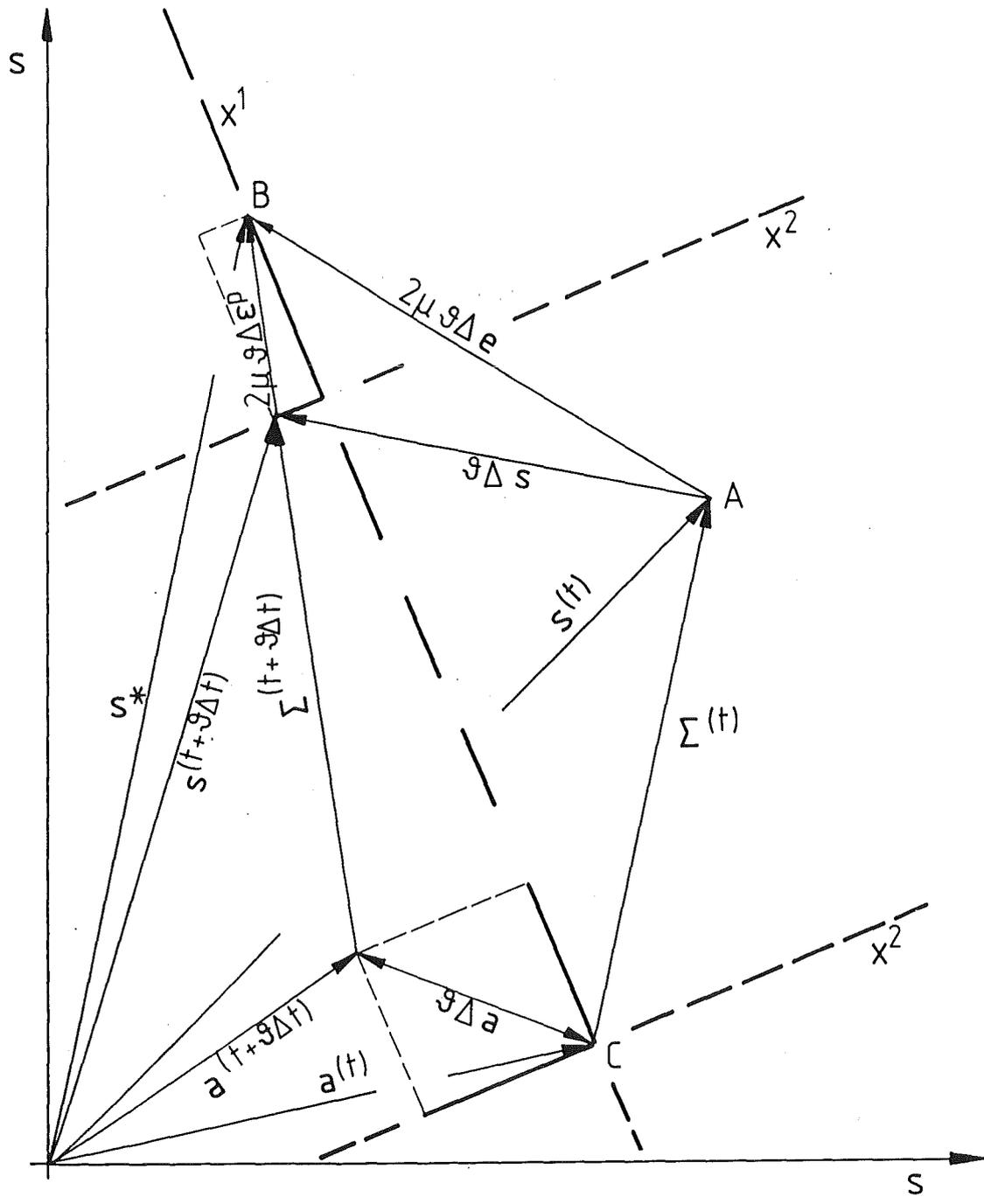


Abb.8 Graphische Darstellung der Projektionsmethode im Spannungsraum.

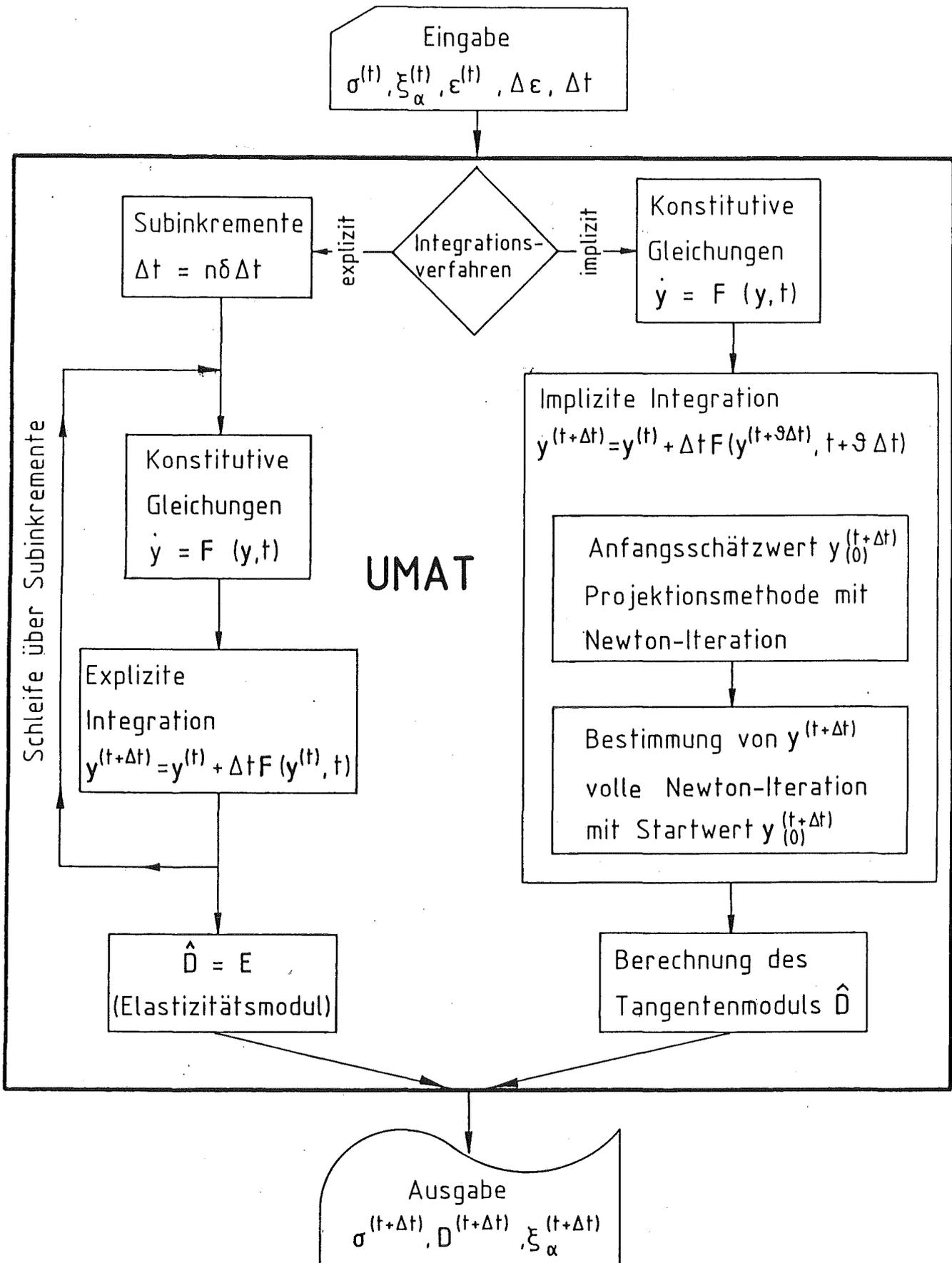
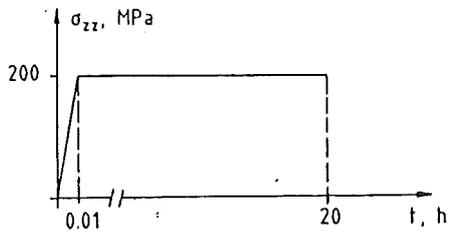
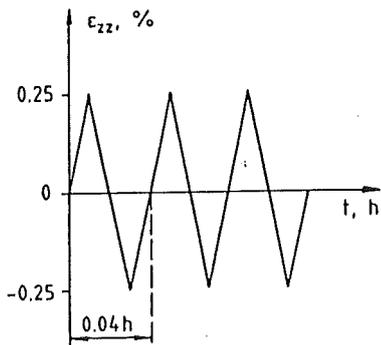


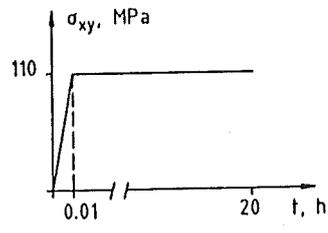
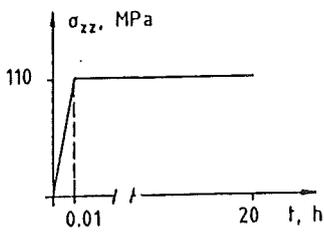
Abb.9 Schematischer Ablaufplan von UMAT.



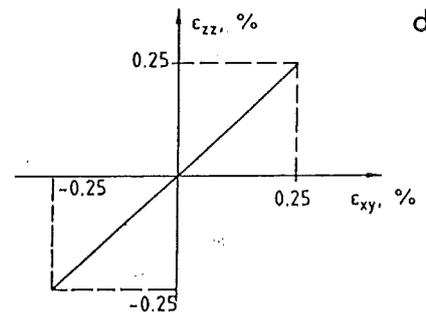
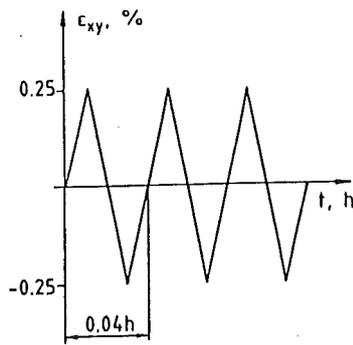
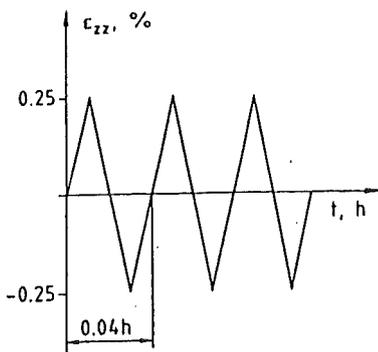
a)



b)



c)



d)

Abb.10 a-d Belastungsdiagramme für radiale Kriech- und Dehnwechselbelastungen.

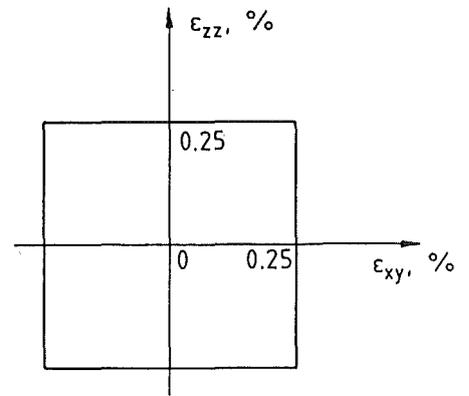
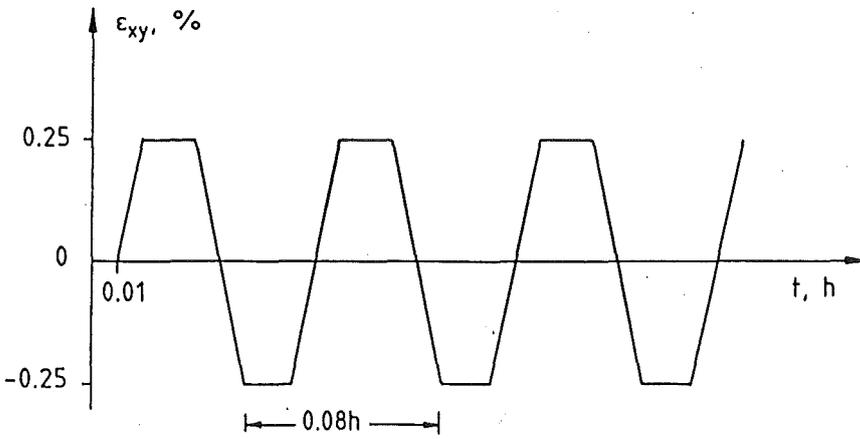
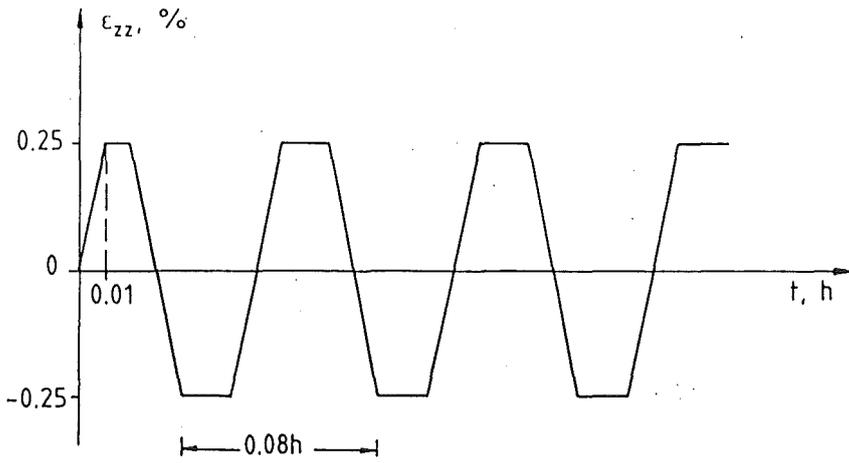


Abb.10 e Belastungsdiagramme für nichtradiale Dehnwechselbelastung.

Abb.11 Mittlere Fehler und Gesamtzahl der Zeitschritte bei homogener radialer einachsiger ( Fall b) in Abb. 10) und zweiachsiger ( Fall d) in Abb. 10) Dehnwechselbelastung.

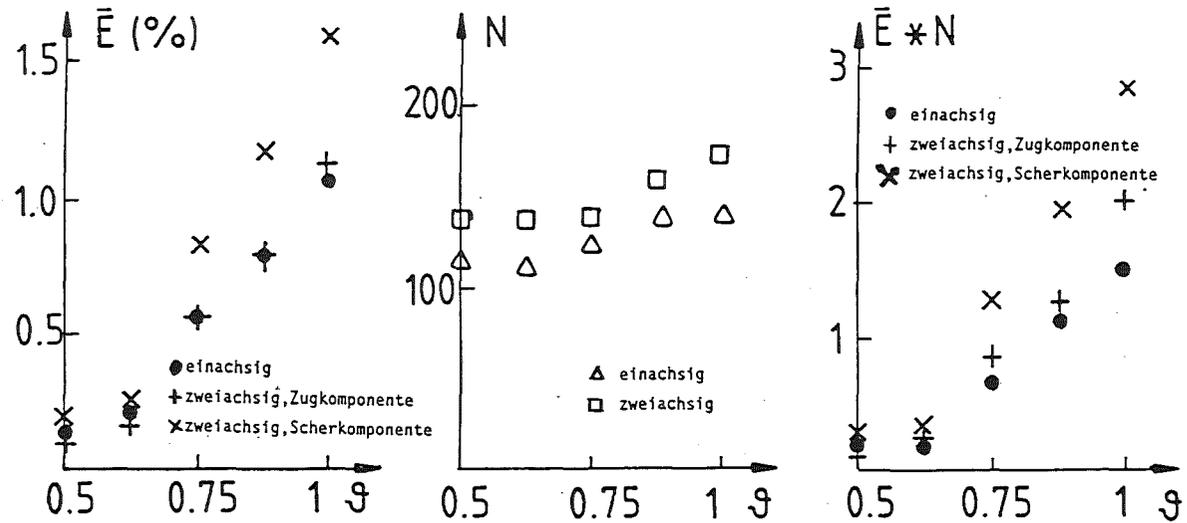
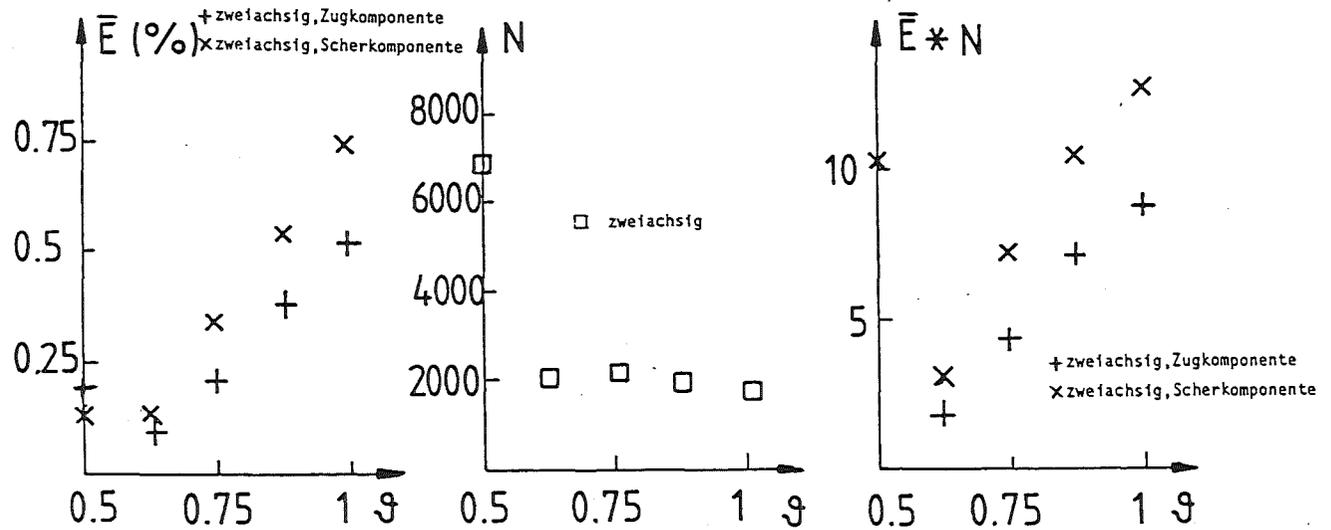


Abb.12 Mittlere Fehler und Gesamtzahl der Zeitschritte bei homogener nichtradialer zweiachsiger Dehnwechselbelastung ( Fall e) in Abb. 10).



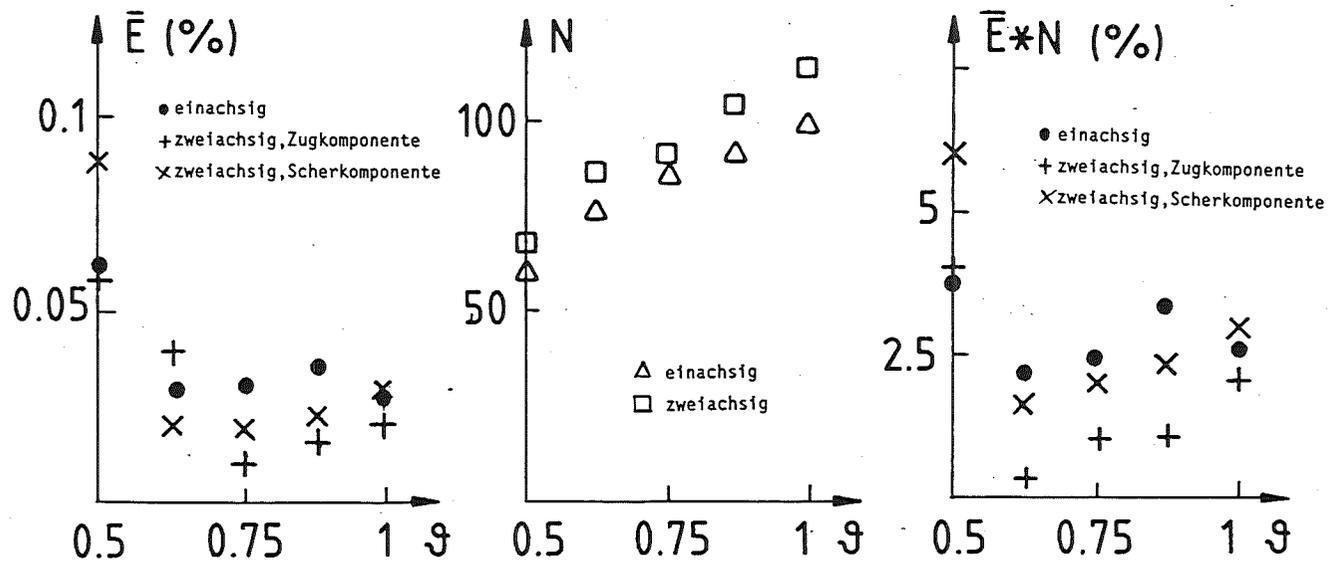


Abb.13 Mittlere Fehler und Gesamtzahl der Zeitschritte bei einachsiger ( Fall a) in Abb. 10) und zweiachsiger ( Fall c) in Abb. 10) Kriechbelastung.

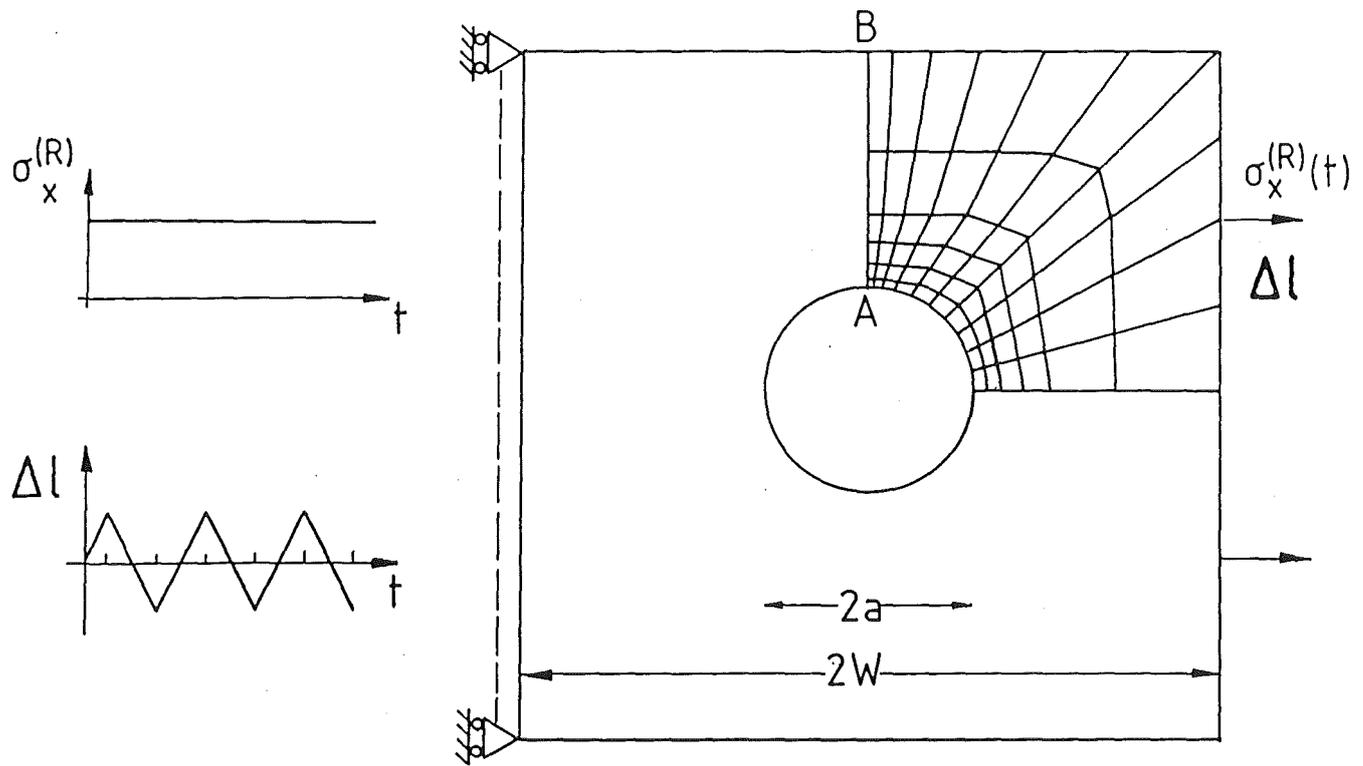


Abb.14 Finite Elemente Modell der Lochscheibe  $a/w = 0.3$ .

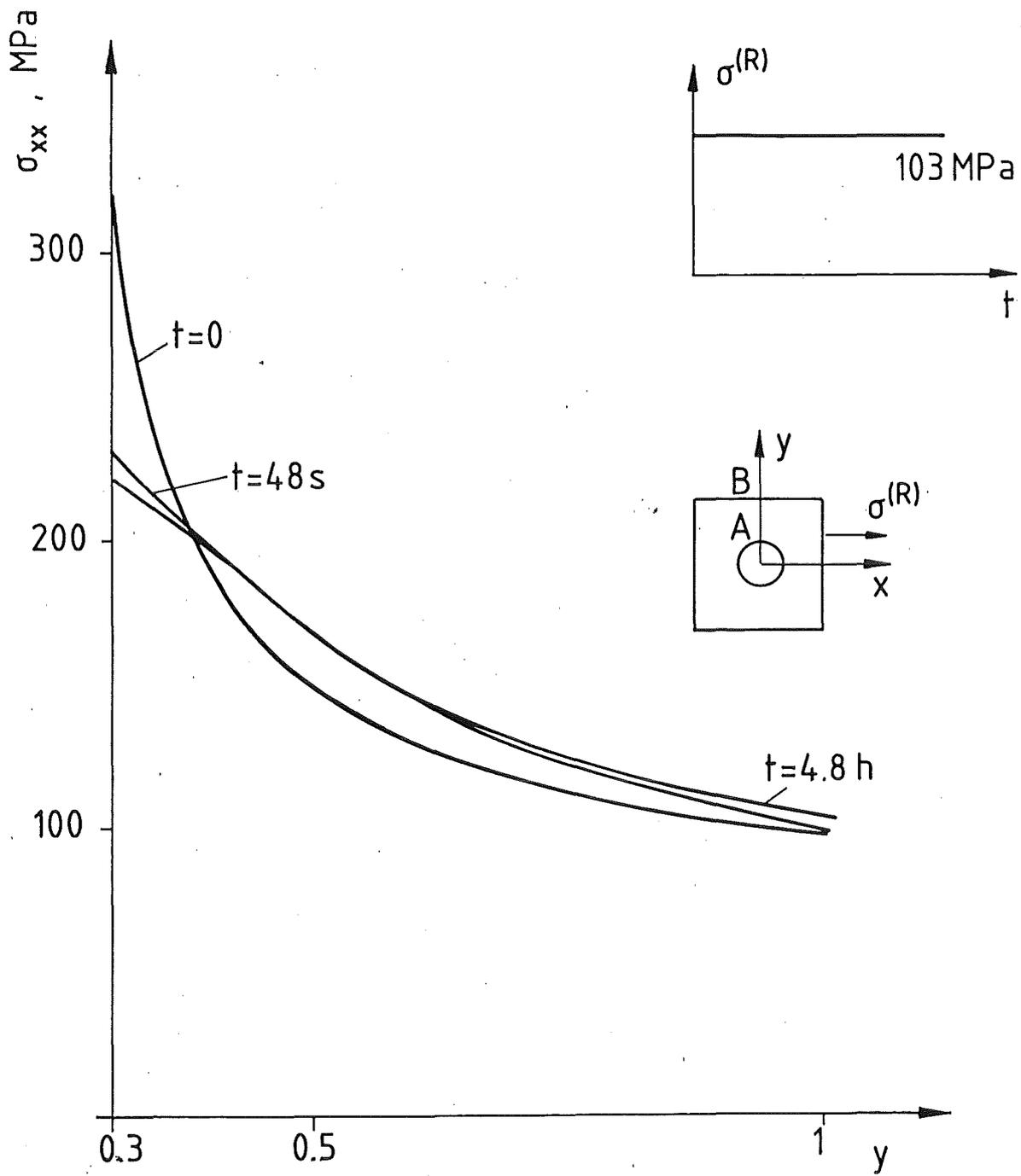


Abb.15 Spannungsverlauf bei Kriechbelastung im höchstbelasteten Querschnitt (Linie  $\overline{AB}$ ) zu verschiedenen Zeiten.

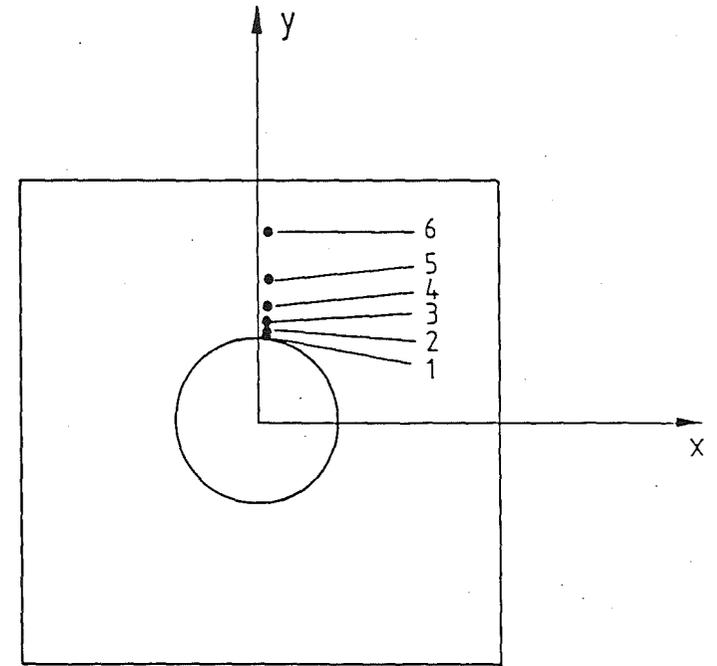
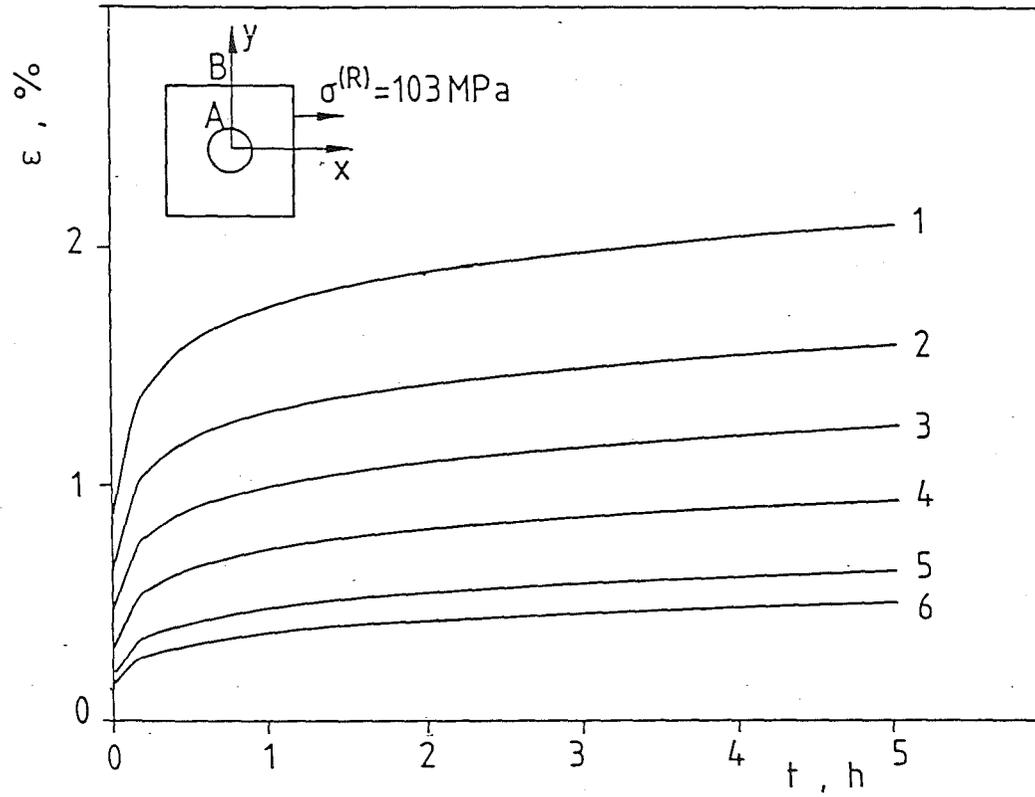


Abb.16 Gesamtdehnungen an verschiedenen Stellen des höchstbelasteten Querschnitts entlang der Linie  $\overline{AB}$ .

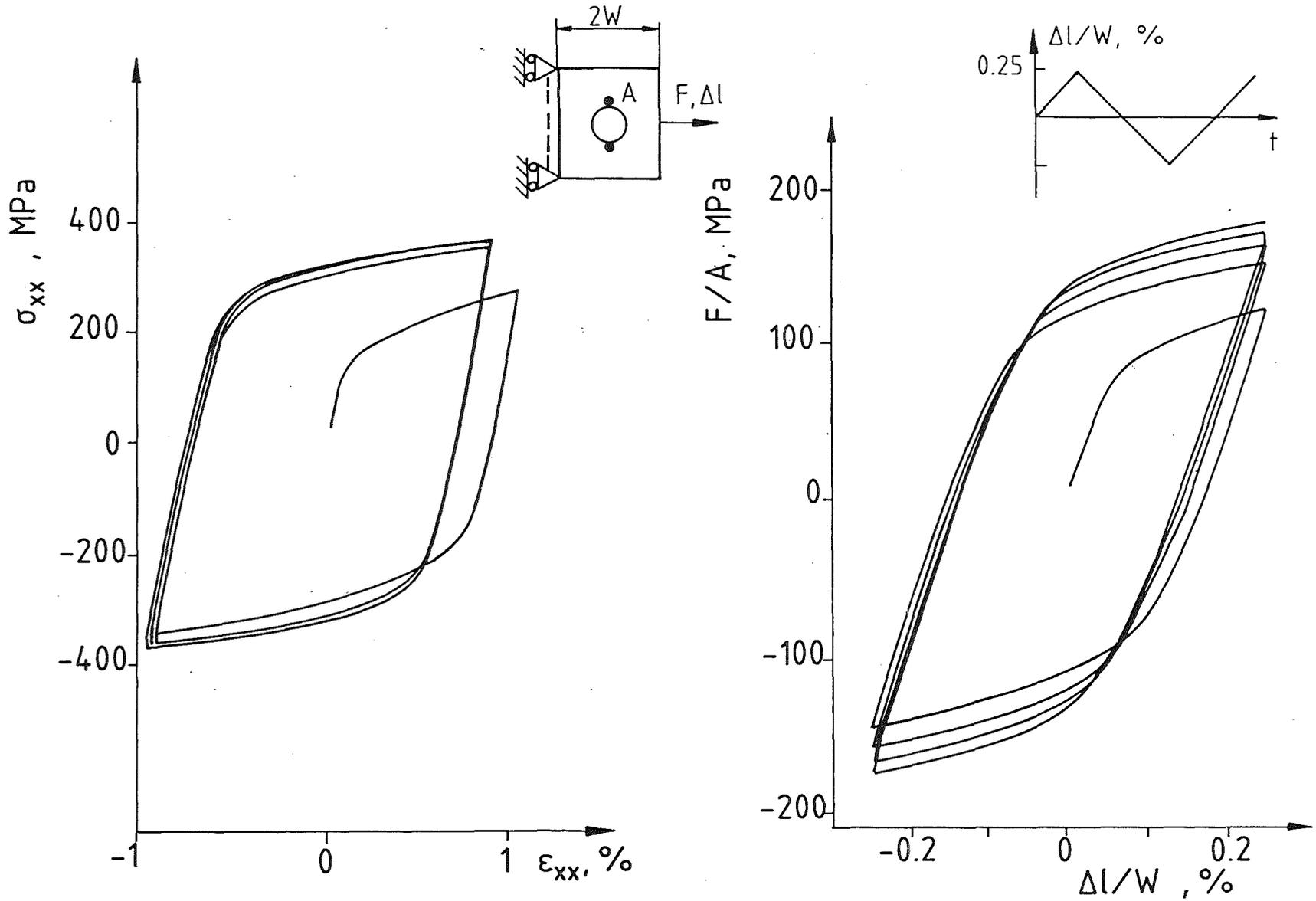


Abb.17 Lokales (Punkt A) und globales zyklisches Verhalten der Lochplatte.