

KfK 4439
August 1988

**Vergleich verschiedener
Differenzenverfahren zur
numerischen Lösung der
2-d-Konvektions-
Diffusionsgleichung anhand
eines Beispiels mit
bekannter exakter Lösung**

C. Günther
Institut für Reaktorbauelemente

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorbauelemente

KfK 4439

**Vergleich verschiedener Differenzenverfahren zur numerischen
Lösung der 2-d-Konvektions-Diffusionsgleichung anhand eines
Beispiels mit bekannter exakter Lösung**

Claus Günther

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Im vorliegenden Bericht werden verschiedene Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung untersucht. Anlaß für diese Untersuchung war ein vom Verfasser vorgeschlagenes monotones Differenzenverfahren, das sog. "LECUSSO-Verfahren", welches von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ ist und keine unphysikalischen örtlichen Oszillationen aufweist, d.h. keiner Maschen-Reynoldszahlbeschränkung unterliegt. Um die vorgeschlagene Methode zu testen, wird ein von Beier et al. benütztes zweidimensionales Beispiel mit bekannter analytischer Lösung übernommen und mit zahlreichen Differenzenverfahren numerisch gelöst. Dabei wird jeweils für einen weiten Bereich von Reynoldszahlen ($20 \leq Re' \leq 5000$) und verschiedene äquidistante Maschenweiten sowohl der ortsabhängige wie auch der maximale Fehler der numerischen Lösung angegeben.

Zu den untersuchten Verfahren gehören

- a) konvektive und bilanzentreue (konservative Erhaltungsform-)Varianten des zentralen Verfahrens und des Upwind-Verfahrens 1. Ordnung einschließlich des sogenannten hybriden Verfahrens,
- b) sogenannte "lokal exakte" Verfahren wie das von Allen-Southwell in Konvektionsform oder das von El-Mistikawy-Werle in Erhaltungsform sowie verwandte Verfahren von Samarski und ein neuere Verfahren von Berger,
- c) ein bisher wenig untersuchtes Verfahren von Gushchin und Shchennikov, welches wie das LECUSSO-Verfahren mit 4 Stützpunkten arbeitet,
- d) neben dem ursprünglichen LECUSSO-Verfahren in Konvektionsform zwei neuere Verfahren in Erhaltungsform, LECUSSO-C und QUICK-PLUS, von denen QUICK-PLUS auch als Modifikation des Leonardschen QUICK-Schemas aufgefaßt werden kann, jedoch ohne Maschen-Reynoldszahlbeschränkung wie das QUICK-Schema,
- e) neuerlich vorgeschlagene Upwind-Methoden, LUDS und LSUDS, bei denen zur vorgeschlagenen Konvektionsform auch entsprechende Erhaltungsformen entwickelt wurden (LUDS-C und LSUDS-C),
- f) die bisher vorgeschlagenen Upwind-Verfahren 2. und höherer Ordnung mit 4 Punkten (2 stromauf, 1 stromab), die sich als Spezialfälle einer einparametrischen Schar von Verfahren auffassen lassen. Dabei entspricht das zentrale Differenzenverfahren der Wahl $\Lambda = 0$ des spezifischen Parameters Λ , $\Lambda = 1/8$ ist das Leonardsche QUICK-Schema, $\Lambda = 1/6$ stellt ein von Agarwal

vorgeschlagenes Verfahren dar, während $\Lambda = 1/2$ ein Verfahren von Atias et al. charakterisiert.

- g) einige am Rande liegende Verfahren wie FAM und ein 5-Punktverfahren von Roos.

Die numerischen Tests zeigen folgendes:

Bei Strömungen mit Grenzschichten, das ist der in der Praxis interessierende Fall, bringen die Upwind-Verfahren höherer Ordnung in Erhaltungsform die günstigsten Ergebnisse, was den Absolutbetrag des maximalen örtlichen Fehlers betrifft. Dieser Fehler liegt etwa bei $1/3$ des Fehlers, den man mit Standardverfahren erhält, falls diese Verfahren nicht schon wegen Verletzung von Maschen-Reynoldszahlbedingungen völlig wertlose Ergebnisse erbracht haben.

Gemessen am vermehrten Aufwand (zusätzlicher 5. Punkt, zwei Typen von modifizierten Differenzgleichungen mit weniger Punkten in Randnähe), ist LSUDS (in Erhaltungsform) nicht besser als LECUSSO-C und QUICK-PLUS.

Insgesamt ermöglicht das Fehlerverhalten der Upwind-Verfahren höherer Ordnung die numerische Berechnung von Strömungen für höhere Reynoldszahlen als bisher.

THE ACCURACY OF SEVERAL DIFFERENCE SCHEMES FOR THE
NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL CONVECTION-
DIFFUSION EQUATION, A NUMERICAL TEST USING AN EXAMPLE WITH
KNOWN ANALYTICAL SOLUTION

Summary

This report describes numerical tests with various difference schemes to solve the convection-diffusion equation. Starting point of this investigation has been a scheme proposed by the author, the so-called "LECUSSO-scheme", which is of order $O(\Delta x^2)$ and avoids unphysical spatial oscillations meaning that this scheme does not suffer from any mesh-Reynolds-number-restriction. To test this scheme a previously described example introduced by Beier et al. with known analytical solution was adopted and numerically solved using a variety of difference schemes. This is done for a wide range of Reynolds-numbers ($20 \leq Re' \leq 5000$) and equidistant meshes of different size, the comparison being done with respect to the space-dependent error and to the maximum spatial error of the numerical solution.

The schemes under consideration are:

- a) the central difference scheme and the upwind method of first order in convection form and in conservation form also including the so-called hybrid scheme.
- b) local exact schemes as that of Allen-Southwell (convection form) or the El-Mistikawy-Werle-scheme supplemented by a related scheme of Samarski and a recently proposed scheme of Berger,
- c) an until today scarcely analyzed scheme of Gushchin and Shchennikov which as the LECUSSO-scheme is based on a 4-point approximation of the 1-d convection-diffusion equation,
- d) besides the original version of the LECUSSO-scheme, two more advanced schemes in conservation form, LECUSSO-C and QUICK-PLUS. LECUSSO-C being very formally developed as conservation form of LECUSSO whereas QUICK-PLUS, related to LECUSSO-C, may be viewed as a modification of the QUICK-scheme of Leonard but without any mesh-Reynolds-number-restriction,
- e) two recently introduced upwind schemes, LUDS (4 points, 3 upstream) and LSUDS (5 points, 3 upstream) which have been published in convection form

and which have been complemented with a corresponding conservation form (LUDS-C and LSUDS-C).

- f) the class of earlier published upwind schemes of second and higher order with four points (2 upstream, 1 downstream) which are predecessors of the LECUSSO-scheme and may be viewed as special variants of a one-parameter family of four-point-schemes. The central difference scheme corresponds to the choice $\Lambda = 0$ of the relevant parameter Λ , $\Lambda = 1/8$ is Leonard's QUICK-scheme, $\Lambda = 1/6$ characterizes a scheme proposed by Agarwal whereas $\Lambda = 1/2$ reproduces a scheme, sometimes apostrophed as upwind-scheme of second order, of Atias et al.,
- g) one very sophisticated scheme, the Finite Analytic method of Chen et al. and a 5-point scheme of Roos (2 points upstream, 2 points downstream), which has some connection with the scheme of Atias et al.

The results of the numerical tests may be summarized as follows:

Flows with boundary layers, as the most interesting case are very favourably calculated using upwind methods of second or higher order in conservation form with respect to the absolute value of the maximum spatial error. The amount of this error is near 1/3 of the error obtained with standard schemes unless these schemes not yet produced obsolete results since a mesh-Reynolds-number condition had been violated.

As to the increased amount of work (additional 5th point, two different additional types of modified difference approximations with fewer points near the boundary), LSUDS-C (in conservation form) is not better than LECUSSO-C and QUICK-PLUS.

The reduced errors of the upwind methods of higher order enable us to proceed to the numerical calculation of flows with higher Reynolds-numbers than before.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	
Summary	
1. Einleitung	1
2. Das Testbeispiel und die untersuchten Differenzenverfahren	5
2.a Das Testbeispiel	5
2.b Die untersuchten Differenzenverfahren	10
2.c Anmerkungen zu Rechentests	14
3. Ergebnisse der numerischen Tests der Differenzenverfahren beim Vorliegen von Grenzschichten	17
4. Test der Differenzenverfahren für einen Fall ohne Grenzschicht	49
5. Ergebnisse der Tests der Vierpunktverfahren von der Ordnung $O(\Delta x^2)$	52
6. Folgerungen	63
Schlußwort	67
Literaturverzeichnis	68
Verzeichnis der Anhänge	72
Anhang 1	73
Anhang 2	74
Anhang 3	80
Anhang 4	83
Anhang 5	85
Anhang 6	86

1. Einleitung

Anlaß für die im vorliegenden Bericht gemachten Testrechnungen für eine Vielzahl von Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung war ein vom Autor vorgeschlagenes inversmonotones Differenzenverfahren, das LECUSSO-Verfahren (LECUSSO = local exact consistent upwind scheme of second ord) [11], [12], [13]. Dieses Verfahren, welches von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ ist und keiner Maschen-Reynoldszahl-Bedingung unterliegt, d.h. daß es keine Schranke für Maschen-Reynoldszahlen gibt, deren Überschreiten unphysikalische örtliche Oszillationen zur Folge hat, sollte ursprünglich mit Standard-Differenzenverfahren verglichen werden.

Mit der Zeit zeigte sich die Notwendigkeit, auch Verfahren wie das von Allen-Southwell [2] und das von El-Mistikawy-Werle [10] mit in den Vergleich aufzunehmen, obwohl nicht klar ist, ob man die beiden Verfahren schon zu den Standard-Methoden zählen kann.

Inzwischen sind vom Verfasser zwei weitere Varianten in Erhaltungsform entwickelt worden, welche als Erhaltungsformen des LECUSSO-Verfahrens angesehen werden können.

Zwei Verfahren aus neuerer Zeit, LUDS und LSUDS [4], welche auch den Upwindverfahren zuzurechnen sind, wurden einschließlich der zusätzlich entwickelten Erhaltungsformen zu LUDS und LSUDS, welche LUDS-C und LSUDS-C genannt werden, mit in den Rechentest aufgenommen.

Zu den Upwindverfahren sind ebenfalls ein aus neuester Zeit stammendes 5-Punkteverfahren (für eine Dimension), von Roos [33] stammend, und ein interessantes, bisher wenig analysiertes Verfahren von Gushchin und Shchennikov [14] zu zählen.

Zwei eher exotische Verfahren, die "Finite Analytic Method" (siehe Chen et al. [8]) und ein von Berger [6] vorgeschlagenes, lokal exaktes Verfahren runden die Reihe der untersuchten Methoden ab.

Alle nachfolgenden Charakterisierungen beziehen sich auf eine eindimensionale Form der Konvektions-Diffusionsgleichung. Wir gehen von der stationären Form

aus, welche auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ gegeben sei, zusammen mit zwei Randbedingungen $\phi(0) = \phi_0$ und $\phi(1) = \phi_1$. Die dimensionslose Form lautet dann

$$\text{Re}(x) \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (1.1)$$

mit der Reynoldszahl

$$\text{Re} = \text{Re}(x) = \frac{u(x) \cdot 1}{\Gamma},$$

wobei die Intervalllänge den Wert 1 hat.

Im Zusammenhang mit numerischen Lösungen, welche eine Schrittweite Δx benutzen, tritt die Maschen-Reynoldszahl

$$\text{Re}_{\Delta x} = \frac{u(x) \Delta x}{\Gamma}$$

auf, welche Δx als Länge enthält, oder in ortsabhängiger Form mit $u_i = u(x_i)$ usw.

$$\text{Re}_{\Delta x, i} = \frac{u_i \Delta x}{\Gamma} \quad \text{und} \quad \text{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} \Delta x}{\Gamma}.$$

Bei dem in Abschnitt 2 beschriebenen Testbeispiel tritt außerdem eine modifizierte Reynoldszahl

$$\text{Re}' = \frac{u(x)}{\Gamma \cdot \lambda}$$

mit einer reziproken Länge λ auf.

Alle Feststellungen bezüglich numerischer Näherungen beziehen sich auf diese Gleichung (1.1). Die zweiten Ableitungen werden jeweils, mit Ausnahme des Verfahrens von Gushchin und Shchennikov, durch

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

approximiert, wobei wir davon ausgehen, daß wir eine Anzahl von $N+1$ äquidistanten Stützstellen $x_i = i \cdot \Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ mit $\Delta x = 1/N$ haben. Wir nehmen weiter an, daß $\Gamma > 0$ und $u(x) \geq 0$, so daß auch immer $\text{Re}(x) \geq 0$. Damit kommt die Strömung immer von links, d.h. von x_i mit kleineren Indizes. Die

einzelnen getesteten Verfahren unterscheiden sich darin, wie $d\phi/dx$ in obiger Gleichung approximiert wird.

Geht man von (1.1) aus und approximiert man $d\phi/dx$ im Punkte x_i in irgendeiner Form so, daß die Näherung von $d\phi/dx$ dann mit $u_i = u(x_i)$ multipliziert wird, so sagt man, dies sei die konvektive oder Konvektions-Form der Gleichung. Für das zentrale Differenzenverfahren in 1-d lautet dies

$$u \frac{d\phi}{dx} = u_i \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \Delta x}$$

Geht man von der (1.1) entsprechenden Erhaltungsform

$$\frac{d(u\phi)}{dx} = \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

aus und diskretisiert diese Gleichung mit Hilfe der (als bekannt vorausgesetzten) Werte $u_{i+1/2}$ und $u_{i-1/2}$ von u an den Zwischenstellen $(x_{i+1} + x_i)/2$ und $(x_i + x_{i-1})/2$ in der Form

$$\frac{u_{i+1/2} \hat{\phi}_{i+1/2} - u_{i-1/2} \hat{\phi}_{i-1/2}}{\Delta x} = \Gamma \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

wobei $\hat{\phi}_{i+1/2} = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2$ und $\hat{\phi}_{i-1/2} = (\phi_i + \phi_{i-1})/2$ für das zentrale Differenzenverfahren, so nennt man diese Näherungsgleichung die entsprechende Erhaltungsform. Es ist sinnvoll, die Erhaltungsform zusammen mit einer exakt eingehaltenen diskreten Form der Kontinuitätsgleichung zu verwenden.

Als Beispiel für die Testrechnungen wurde ein von Beier et al. [5] eingeführtes Beispiel einer umgelenkten zweidimensionalen Strömung benutzt, welches einerseits

- für eine bestimmte Parameterwahl einen thermischen Grenzschichtbereich aufweist,
 - keine pathologischen Situation zeigt,
- und andererseits
- eine exakte analytische Lösung besitzt.

Die Probleme, die sich bei Differenzenverfahren ergeben, die nicht nur ihre direkten Nachbarpunkte verwenden und daher in der Nähe der Ränder entweder immer (Verfahren von Roos [33]) oder bei Abströmen von der Wand modifizierte Differenzgleichungen benutzen, müssen jeweils im Einzelfall untersucht werden. Angaben dazu finden sich in Anhang 6.

2. Das Testbeispiel und die untersuchten Differenzenverfahren

2.a Das Testbeispiel

In dem für die Testrechnungen benutzten Beispiel ist im Bereich $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq h$ eine Strömung vorgegeben in der Form

$$u(x,y) = \frac{u}{2} \frac{\pi}{h} \sinh\left(\frac{\pi x}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right)$$

$$v(x,y) = -\frac{u}{2} \frac{\pi}{h} \cosh\left(\frac{\pi x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right)$$

welche in Abbildung 2.1 gezeigt und offensichtlich die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Gesucht wird dann die Lösung der stationären Konvektions-Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

für die Größe $\phi(x,y)$, unter der wir uns z.B. eine Temperatur $T(x,y)$ vorstellen können, wobei die Randbedingungen für ϕ folgendermaßen vorgeben sind:

- Es soll $\phi(x,y) = \phi_\infty = 0$ für $x \rightarrow +\infty$ und alle y sein.
- $\partial\phi/\partial y = 0$ längs $y = 0$.
- Längs des linken Randes von oben her und dann längs des unteren Randes mit steigendem x soll ϕ exponentiell mit der Ortskoordinate abfallen. Der Dämpfungsexponent sei λ , d.h.

$$\phi(0,y) = \phi_0 \cdot e^{-\lambda(h-y)} \text{ für } 0 \leq y < h,$$

und

$$\phi(x,0) = \phi_0 \cdot e^{-\lambda(h+x)} \text{ für } 0 \leq x < +\infty,$$

(siehe Abbildung 2.2).

Die analytische Lösung dieses Problems ist ausführlich in Beier et al. [5] beschrieben, wo das Beispiel ebenfalls zum Test von Differenzenverfahren verwendet wird. Die dort angegebene geschlossene Lösung wird hier so

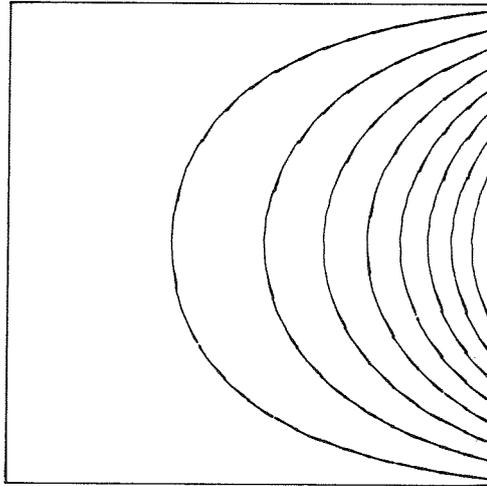


Abb. 2.1 Vorgegebene Strömungsform (Stromlinien) des Testbeispiels

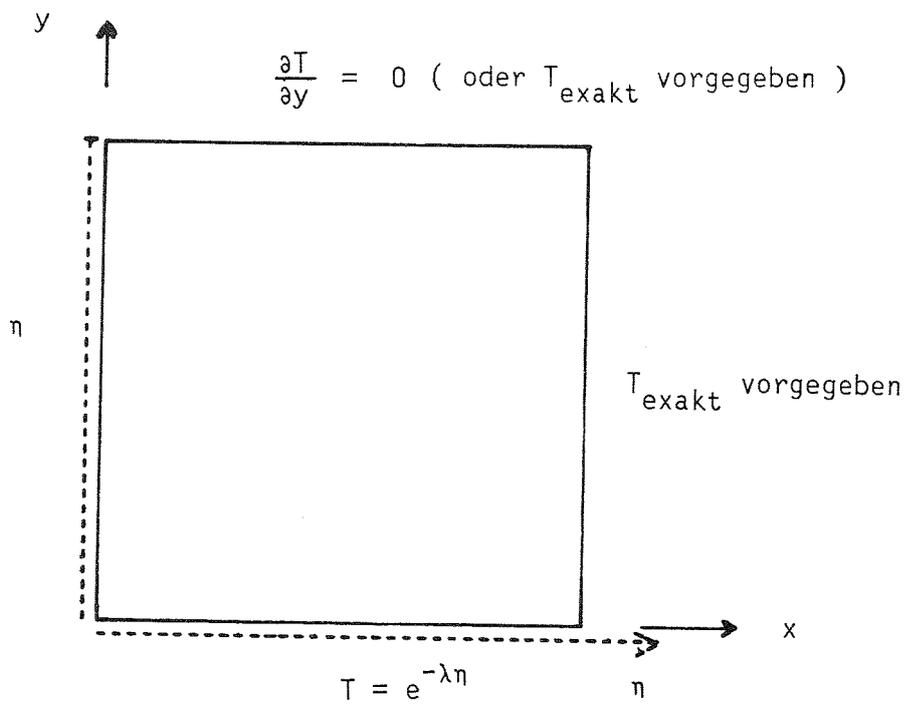


Abb. 2.2 Temperaturrandbedingung des Testbeispiels

verwendet, daß wir uns auf den Bereich $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ beschränken, d.h. $h \equiv 1$. Um dies tun zu können, wird bei den numerischen Tests bei $x = 1$ jeweils der Wert der analytischen Lösung als Randbedingung vorgegeben. Der Einfachheit halber wird dies auch am oberen Rand ($y = 1$) getan. Man kann zeigen, daß die Ergebnisse der numerischen Tests nahezu nicht von der Wahl dieser oberen Randbedingung abhängen.

Die analytische Lösung hängt einerseits von der modifizierten Reynolds-Zahl $Re' = u_0/(\Gamma \cdot \lambda)$ ab, andererseits von Γ und λ . Hier wurde in den meisten Fällen $\Gamma = \lambda = 1$ gewählt, so daß dann als zu variierender Parameter $Re' = u_0$ übrigblieb. Höhenlinien der exakten Lösung mit $\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$ zeigt Abbildung 2.3 für $Re' = 20, 40, 200, 400, 1000, 3000, 5000$. Für $\lambda \equiv 0.05, \Gamma \equiv 20$ und Werte von Re' zwischen 20 und 5000 zeigt sich in Abbildung 2.4 schon das allmähliche Verschwinden der Temperaturgrenzschicht am linken und unteren Rand.

Bei dem zu Testzwecken gewählten Beispiel mit den Parameterwerten $\lambda \equiv 1$ und $\Gamma \equiv 1$ zeigen die exakten Lösungen des Problems, daß für Anwachsen des Parameters Re' Bereiche mit Grenzschichtcharakter auftreten. Die Qualität der numerischen Lösung hängt stark von der Auflösung von Grenzschichten und bei den Verfahren, welche mehr als drei Punkte in eine Koordinatenrichtung benutzen, von den nahe den Ränder benutzten modifizierten Differenzennäherungen bei Abströmen von der Wand ab.

Man kann feststellen, daß die Geschwindigkeit, d.h. ihr Absolutbetrag, mit abnehmendem x abnimmt. Dies ist von Interesse, weil man manchmal die repräsentativen (d.h. effektiven) Maschen-Reynoldszahlen und nicht die maximalen Maschen-Reynoldszahlen kennen möchte. Man kann grob sagen, daß die maximale Geschwindigkeit bei $x = 1$ auftritt, bei $x = 3/4$ nur noch die halbe Maximalgeschwindigkeit, bei $x = 1/2$ nur noch ein Viertel und das für kleinere x eine weitere Abnahme des Absolutbetrags der Geschwindigkeit festzustellen ist.

In Beier et al. werden bei $\lambda \equiv \Gamma \equiv 1$ die Werte von $Re' = 20$ und $Re' = 200$ untersucht, die Diskretisierungen liegen bei $M = N = 3, M = N = 7$ und $M = N = 15$. Untersucht werden 6 Differenzenverfahren, alle in Erhaltungsform, Meßgröße für die Qualität der Differenzenverfahren ist der durchschnittliche ortsabhängige Fehler der diskreten Näherung.

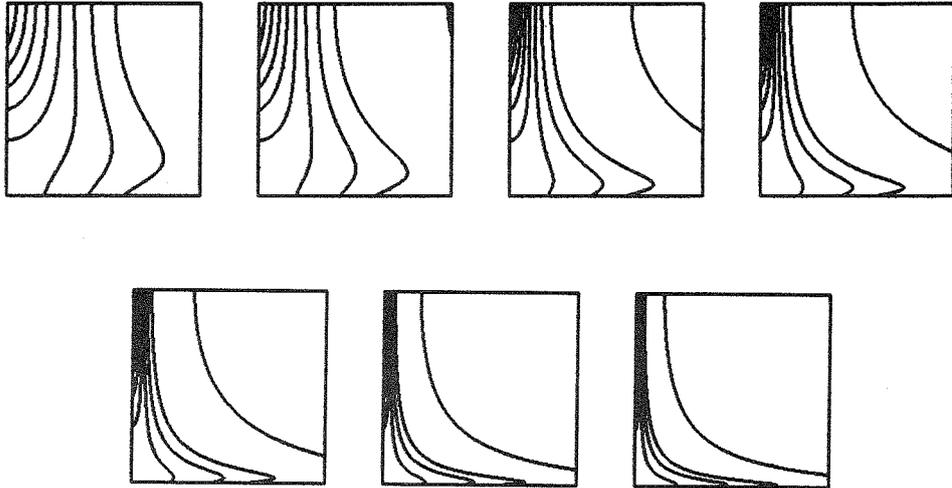


Abb. 2.3 Exakte Lösung des Testbeispiels für Reynoldszahlen $Re' = 20, 50, 200, 400, 1000, 3000, 5000$ für $\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$

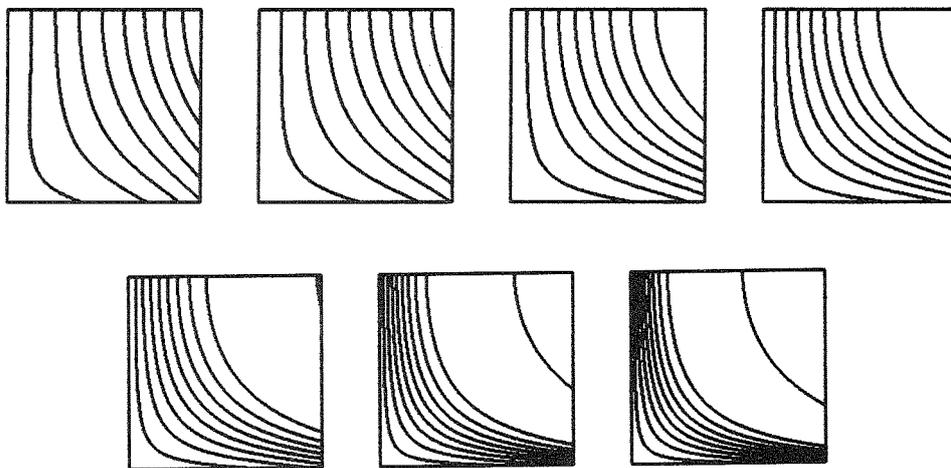


Abb. 2.4 Exakte Lösung des Testbeispiels für Reynoldszahlen $Re' = 20, 50, 200, 400, 1000, 3000, 5000$ für $\Gamma \equiv 20, \lambda \equiv 0.05$

Demgegenüber wird in der vorliegenden Analyse für sieben Re' ($= 20, 50, 200, 400, 1000, 3000, 5000$), für $M=N=11, 21, 31$, für $\lambda \equiv \Gamma \equiv 1$ und $\lambda \equiv 0.05, \Gamma \equiv 20$ mit $M=N=11$ das Verhalten der numerischen Näherungslösung untersucht. Hier werden in Abschnitt 3 und 4 zunächst 17 Verfahren untersucht und in Abschnitt 5 noch einige mehr (Atias et al. ($\Lambda = 1/2$), Agarwal ($\Lambda = 1/6$), Leonard ($\Lambda = 1/8$), SCUP). Als Vergleichsgröße dient der maximale örtliche Fehler, ergänzt wird dies durch Darstellungen des örtlichen Fehlers.

2.b Die untersuchten Differenzenverfahren

Die untersuchten Methoden umfassen zunächst

- a) Zentrale Differenzennäherungen (=CDS) und Upwind-Verfahren 1. Ordnung (UDS) in Konvektionsform und Erhaltungsform. Von den beiden Varianten in Erhaltungsform wird eine weitere Form geprüft, bei der die Geschwindigkeiten so verändert werden, daß eine diskrete Form der Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.
- b) Das hybride Verfahren in Konvektions- und Erhaltungsform, z.B. [36]. Hier wird für $Re_{\Delta x,i} \leq 2$ das Verfahren mit zentralen Differenzen und für $Re_{\Delta x,i} > 2$ das Upwind-Verfahren benutzt. Der diffusive Term wird in keinem Fall weggelassen.
- c) Drei sogenannte "lokal exakte" oder "exponentielle" Verfahren, das eine geht auf Allen-Southwell [2] zurück, siehe auch Il'in [16], und benutzt die Konvektionsform der Gleichung. Eine verwandte Form wurde von Samarski [35] vorgeschlagen. Eine bestimmte Art von Erhaltungsform stellt ein Verfahren von Berger [6] dar, welches nicht auf ein versetztes Maschennetz angewiesen ist. Etwas modifiziert wurde der Ansatz von El-Mistikawy-Werle [10], der die Konvektions-Diffusionsgleichung in Erhaltungsform numerisch löst. Die Änderung bezieht sich darauf, daß im ursprünglichen Verfahren im konvektiven Term in Erhaltungsform

$$u_{i+1/2} \hat{\phi}_{i+1/2} - u_{i-1/2} \hat{\phi}_{i-1/2}$$

statt des hier verwendeten bekannten Wertes $u_{i+1/2}$ als Näherung für diesen Wert $(u_{i+1} + u_i)/2$ angesetzt wurde.

- d) Neben den vorgenannten Gruppen von Verfahren, welche im Eindimensionalen Dreipunktnäherungen für den Operator

$$L(\phi) := Re(x) \frac{d\phi}{dx} - \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

sind, benützen mehrere vorgeschlagene Upwind-Verfahren 2. oder höherer Ordnung im Eindimensionalen einen weiteren, stromaufwärts liegenden Punkt. Dies sind ein von Agarwal [1] vorgeschlagenes Verfahren, dann das von Leonard [20] stammende "QUICK"-scheme", das er in einer Reihe von Veröffentlichungen [18]-[26] propagierte, sowie eine von Atias et al. [3] vorgeschlagene Methode, die zwei stromaufwärts liegende Punkte benutzt. Zu diesen Verfahren gehört auch das "lokal exakte konsistente Upwind-

Verfahren zweiter Ordnung (local exact consistent upwind scheme of second order)", abgekürzt LECUSSO-Schema [11].

- e) Es wurden zwei weitere bilanzentreue Verfahren untersucht, welche dem LECUSSO-Verfahren nahestehen. Das eine ist LECUSSO-C (C als Abkürzung für "conservation form"), das eine formale Übertragung des LECUSSO-Verfahrens in Erhaltungsform darstellt, sowie QUICK-PLUS, was auch als Verbesserung des QUICK-Schemas aufgefaßt werden kann. Die Details zu diesen beiden Verfahren werden im Anhangteil angegeben.
- f) Zu den Vierpunktverfahren von Grad 2 gehört das von Gushchin und Shchennikov [14] vorgeschlagene Verfahren, das ebenfalls untersucht wird. Dieses Verfahren ist nur für Maschen-Reynoldszahlen im Betrag größer als 1/2 frei von örtlichen Oszillationen (invers-isoton). Daher muß für kleine Maschen-Reynoldszahlen ein anderes Verfahren gewählt werden. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde für $|\text{Re}_{\Delta x, i}| \leq 2$ CDS verwendet.
- g) Zu den Upwind-Verfahren gehört eine von Roos [33] angegebene Klasse von Verfahren, welche auf einer unsymmetrischen 5-Punkt-Approximation mit jeweils 2 stromaufwärts und 2 stromab gelegenen Punkten basiert. Diese Klasse ist von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ und hängt von zwei Parametern α und β ab. Für die Testrechnungen haben wir uns auf das vom Autor angegebene Parameterpaar $\alpha = 11/30$, $\beta = 3$ beschränkt.
- h) Die "Finite Analytic Method (=FAM)" von Chen et al. [8] wurde getestet.
- i) Von zwei neuerlich vorgeschlagenen Upwind-Methoden, LUDS und LSUDS [4], wurde jeweils die vorgeschlagene Konvektionsform und eine entsprechende Methode der in Anhang 3 beschriebenen Erhaltungsform LUDS-C bzw. LSUDS-C untersucht. LUDS benutzt vier Punkte, davon drei stromauf, LSUDS arbeitet mit 5 Punkten, davon ebenfalls drei stromauf.

Bei den Rechnungen wird auf dem untersuchten Bereich $0 \leq x, y \leq 1$ jeweils ein äquidistantes Maschengitter mit M Maschen in x-Richtung und N Maschen in y-Richtung gewählt.

Schon in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß die Lösung einer zwei-dimensionalen Konvektions-Diffusionsgleichung auf einem Bereich der x,y-Ebene - hier dem Quadrat $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ - mit vernünftig gestellten Randbedingungen bei gegebener Strömung in Erhaltungsform nur sinnvoll möglich ist, wenn die diskrete Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Das heißt, es muß

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}, j} - u_{i-\frac{1}{2}, j}}{\Delta x} + \frac{v_{i, j+\frac{1}{2}} - v_{i, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0 \quad (2.1)$$

gelten. Es ist zwecklos, die exakten Werte des vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes $u(x_i + \Delta x/2, y_j)$ bzw. $\Gamma(x_i, y_j + \Delta y/2)$ zu kennen, falls (2.1) nicht erfüllt ist. Falls die vorgegebenen Randwerte von ϕ nicht nahe bei Null, z.B. zwischen 0 und 1, sondern bei betragsmäßig größeren Werten liegen, werden die Rechenergebnisse völlig falsch. Dies kann z.B. geschehen, wenn ein untersuchtes Problem Strahlungswärmeübertragung beinhaltet und in absoluten Temperaturen gerechnet werden muß.

Da in unserem Falle diese Situation auftritt, d.h. die exakten (!) Werte des vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes erfüllen (2.1) nicht, wird an diesen Werten in zwei Varianten eine Korrektur durchgeführt, so daß die veränderten Werte (2.1) erfüllen. Es wird natürlich versucht, diese Korrektur möglichst klein zu halten und damit ist auch schon ein Hinweis gegeben, auf welche Weise diese Änderung durchgeführt wird. Wir nehmen an, wir hätten $M*(N-1)$ Werte $u_{i+1/2,j}$ und $(M-1)*N$ Werte $v_{i,j+1/2}$, insgesamt $2*M*N-M-N$ Werte, an denen Korrekturen anzubringen sind. Die diskrete Kontinuitätsgleichung ist in $(M-1)*(N-1)$ Punkten zu erfüllen. Dann versuchen wir, die Quadratsumme der notwendigen Korrekturen unter Einhaltung von (2.1) möglichst klein zu halten. Dies entspricht einem Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen, das z.B. mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren gelöst werden kann. Die Anwendung dieser Methode führt auf ein lineares Gleichungssystem, das für nicht zu große M und N ($M, N \leq 20$) ohne Schwierigkeiten mit Standardmethoden gelöst werden kann.

Die hier beschriebene Prozedur wird jeweils für CDS und UDS einmal durchgeführt (MODUS = 6 bzw. MODUS = 7).

Zum Schluß dieses Abschnitts erwähnen wir noch kurz die Verfahren, die nicht in den Test mit aufgenommen wurden.

- a) Skew upwind: Mit diesem Verfahren haben sich in den vergangenen Jahren mehrere Bearbeiter beschäftigt und gezeigt, daß dieses Verfahren in manchen Fällen den nicht zu den Koordinatenlinien parallelen konvektiven Transport besser erfaßt, dennoch aber ist das Verfahren $O(\Delta x)$, hat gelegentlich negative Einflußkoeffizienten und ist in manchen Fällen nicht stabil.
- b) Weighted upwind differencing: Dieses Verfahren liegt zwischen dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung und CDS, ähnlich wie das hybride Verfahren,

welches entweder das eine oder das andere Verfahren wählt, oder dem von Allen-Southwell, das sich stetig zwischen beiden Verfahren bewegt, jedoch im Gegensatz zum Weighted upwind differencing formal von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ bleibt.

- c) Eigentlich hätte zu dem von Berger vorgeschlagenen exponentiellen Verfahren ein nicht-exponentielles Verfahren getestet werden müssen, dessen konvektiver Term in einer Dimension

$$\frac{d(u\phi)}{dx} = \frac{u_{i+1}\phi_{i+1} - u_{i-1}\phi_{i-1}}{\Delta x}$$

lauten müßte. Man kann aus Analogiebetrachtungen schließen, daß dieses Verfahren zum Upwind-Verfahren 1. Ordnung in Erhaltungsform liegt wie das Verfahren von Berger zu dem von El-Mistikawy-Werle.

- d) Das von Gushchin und Shchennikov vorgeschlagene Verfahren wurde bisher offensichtlich nicht intensiv analysiert. Dieses Verfahren in Konvektionsform benutzt die Geschwindigkeit(-skomponenten) $u_{i-1/2}$, falls diese > 0 . Es wäre interessant, zu dem Originalverfahren

$$u_{i-1/2} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \Gamma \frac{\phi_{i+1} - \phi_i - \phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^2}$$

auch ganz formal eine Erhaltungsform für den Bereich $Re_{\Delta x, i}, Re_{\Delta x, i-1} \geq 1/2$

$$\frac{u_i \phi_i - u_{i-1} \phi_{i-1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \Gamma \frac{\phi_{i+1} - \phi_i - \phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^2}$$

zu definieren und zu testen.

- e) Zu den Verfahren aus neuerer Zeit gehört ein Vorschlag von Kawamura und Kuwahara [17], der sich auf den rein konvektiven Transport beschränkt und von der Ordnung $O(\Delta x^3)$ ist. Ob man diesen Ansatz bei der numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung besser zusammen mit einer 3-Punkt-Näherung (in 1-d) der Ordnung $O(\Delta x^2)$ oder einer 5-Punkt-Näherung der Ordnung $O(\Delta x^4)$ für den diffusiven Term anwendet, ist nicht bekannt. Auch die modifizierten Näherungsgleichungen für die Punkte in der Nähe des Randes stehen für dieses Verfahren nicht fest. Daher erscheint es geboten, dieses Verfahren zunächst nicht in den Test aufzunehmen.
- f) Für das Verfahren von Roos, welches bei dem hier gewählten Wert der beiden Parameter α und β nahe beim Verfahren von Atias et al. liegt, wurde keine Erhaltungsform gebildet.

2.c Anmerkungen zu Rechentests

Es folgen noch einige Anmerkungen zu Testrechnungen. Kritischer Punkt aller Testrechnungen ist die Auswahl geeigneter Beispiele. Diese sollten eigentlich folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. Sie sollten eine gängige, vertraute physikalische Situation beschreiben.
2. Sie sollten nicht zu einfach und nicht zu kompliziert zu sein.
3. Es sollte eine sichere Vergleichsmöglichkeit mit einer korrekten Lösung bestehen. Dies kann eine exakte analytische Lösung sein oder das Ergebnis einer Messung.

In den meisten Fällen wurde bei Testrechnungen auch die eindimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung gelöst. Sie eignet sich besonders dafür, theoretisch erarbeitete Aussagen für bestimmte Differenzenverfahren zu verifizieren. Schon bei der Untersuchung von Erhaltungsformen von Differenzenverfahren entstehen jedoch Schwierigkeiten, weil es in einer Dimension keine Äquivalenz von Erhaltungsform und Konvektionsform gibt. In einer Raumdimension sind die Gleichung $\text{Re}(x)\phi' - \phi'' = 0$ und $(\text{Re}(x) \cdot \phi)' - \phi'' = 0$ verschieden. Eine eindimensionale inkompressible Kontinuitätsgleichung $\text{Re}'(x) = 0$ macht beide Gleichungen trivialerweise identisch. Das ändert sich erst in zwei Raumdimensionen, wo sich die kontinuierlichen Erhaltungs- und Konvektionsformen durch ein Vielfaches der Kontinuitätsgleichung unterscheiden.

Nur in zwei Raumdimensionen kann das Wechselspiel zwischen Konvektions-Diffusions-Gleichung und Kontinuitätsgleichung in diskreter Form studiert werden. Zur Bedingung des "nicht zu einfach und nicht zu kompliziert" wäre hinzuzufügen, daß sowohl das Runchal-Problem [34] der sich drehenden Scheibe mit Wärmequelle im Zentrum des sphärischen Koordinatensystems wie auch das zweidimensionale Beispiel aus Barrett [4] zu einfach sind. Im erstgenannten Beispiel wird, wenn wir ϕ als Temperatur auffassen zwar die Strömung umgelenkt, - sie verläuft auf Kreisbahnen -, die Wärme bewegt sich aber immer senkrecht zur Strömung, es gibt keine thermische Grenzschichten, d.h. es fließt nicht von der Seite Wärme in die Strömung, wird dort konvektiv weitertransportiert und vielleicht noch irgendwo durch einen Diffusionsvorgang aus der Strömung entnommen usw. Testbeispiele sollten Grenzschichten beinhalten, insbesondere wegen deren Bedeutung für praktische Probleme, weil

dort als typische Situationen stark wechselnde Geschwindigkeitsfelder und große Gradienten auftreten.

Ein weiteres Beispiel mit analytischer Lösung wurde von Barrett [4] angegeben, welcher

$$\Gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + v_0 \left(\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

numerisch mit mehreren Verfahren, insbesondere LUDS und LSUDS, löste. Dieses Beispiel hat Lösungen

$$\phi = \exp\{\alpha x + \beta y\},$$

$$\alpha = 0.5 v_0 (\cos\theta + \cos\psi), \quad \beta = 0.5 v_0 (\sin\theta + \sin\psi),$$

mit beliebigem ψ .

Wählt man keine gewichtete Summe von solchen Lösungen mit verschiedenen ψ , so hat man eine eindimensionale exponentielle Lösung. Man kann durch Linearkombinationen solcher Funktionen Lösungen $\phi(x,y)$ generieren und durch die Vorgabe dieser Lösung am Rande die entsprechende numerische Lösung berechnen lassen; dennoch, man hat immer nur eine einheitliche Strömungsrichtung und auch Intensität der Strömung, so daß die festgelegte Lösung zwar größere und geringere Gradienten besitzt, diese haben jedoch nichts mit einer sich ändernder Strömung zu tun und sind daher ziemlich unphysikalisch. Ob das numerische Verfahren den konvektiv-diffusiven Vorgang bei einer Umlenkung vernünftig beschreibt, bleibt bei numerischen Tests mit diesem Beispiel fraglich.

Zahlreiche numerische Tests vergleichen ihre rechnerischen Resultate mit experimentellen Ergebnissen oder mit Lösungen von numerischen Verfahren, die als sicher angesehen werden, z.B. Han et al. [15], Leschziner [27], Maekawa and Muramatsu [28], Patel and Markatos [30], Pollard and Siu [31].

In vielen dieser Untersuchungen wird festgestellt, daß das QUICK-Schema oder eine seiner Varianten (QUICKER, QUICKE) den Standard-Verfahren überlegen ist, obwohl immer wieder auch über Schwierigkeiten mit diesem Verfahren berichtet wird. Insofern bestätigen die numerischen Tests den schon theoretisch beschriebenen Sachverhalt, z.B. Tao und Sparrow [38], daß nur die sogenannten

"invers-isotonen" Verfahren numerische Lösungen ohne örtliche Oszillationen bringen. Ein Differenzenverfahren heißt "invers-isoton", wenn die zugehörige Koeffizientenmatrix invertierbar ist und alle Elemente der Inversen nicht-negativ sind.

Viele numerische Tests lösen einfache Strömungsprobleme, bei denen neben Momentengleichungen und Kontinuitätsgleichung auch noch eine Druckgleichung oder eine Wirbeltransportgleichung gelöst werden müssen. In solchen Fällen ist es sehr schwierig, Fehler des Differenzenverfahrens von Fehlern der zusätzlichen Gleichungen und Inkonsistenzen in der Behandlung der Randbedingungen zu trennen, bzw. deren Wechselspiel zu übersehen.

In den vergangenen Jahren hat sich die Sitte eingebürgert, daß immer wieder Strömungsprobleme mit Unstetigkeiten (Jets, Sprungfunktionen) mit numerischen Verfahren, die auf die Lösung konvektiv-diffusiver Probleme zugeschnitten sind, untersucht werden, z.B. [26] und [27]. Diese erheben nicht den Anspruch, Unstetigkeiten korrekt zu behandeln. Numerische Tests mit solchen Beispielen sollten nicht zur Beurteilung von Lösungsmethoden für konvektiv-diffusive Probleme herangezogen werden.

Mit der Übernahme des Beispiels von Beier et al. [5] wurde wahrscheinlich ein guter Kompromiß getroffen, um einige der zuvor genannten Kriterien für Testrechnungen zu erfüllen. Sicherlich wäre es wünschenswert, Beispiele mit exakten Lösungen zu kennen, die

- in einer geschlossenen Kavität eine Ein-Wirbel-Strömung darstellen,
 - eine entsprechende Strömung mit zwei Wirbeln enthalten, um Verhältnisse mit "turning points" (längs einer Traverse ändert die Geschwindigkeit in Richtung der Traverse ihr Vorzeichen),
 - mit Stau- und Ablösepunkten versehen sind,
- untersuchen zu können.

3. Ergebnisse der numerischen Tests der Differenzenverfahren beim Vorliegen von Grenzschichten

3.a Maximaler Fehler

Nachfolgend vergleichen wir die untersuchten Differenzenverfahren auf der Basis des maximalen örtlichen Fehlers (=ERRMAX) in den diskreten Punkten, wobei wir die Rechnungen mit unserem Testbeispiel mit $\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$ und äquidistanten Maschengittern mit $M = N = 11, 21$ und 31 verwenden. Der Parameter Re' wird zwischen 20 und 5000 variiert, was bei $\Delta x = \Delta y = 0.1$ einem Bereich maximaler Maschen-Reynolds-Zahlen zwischen 2 und 500 entspricht, bei $\Delta x = \Delta y = 1/30$ liegt $Re_{\Delta x} = Re' \cdot \Delta x$ zwischen $2/3$ und $500/3$. Die Abbildung zeigen die Werte der maximalen Abweichung der numerischen Lösung von der exakten analytischen Lösung in Abhängigkeit von $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x$. Bei dieser Art der Darstellung, die schon mehrfach verwendet wurde, z.B. auch in Beier et al. [5], werden die Verfahren von der Ordnung zwei, bei denen man für nicht zu große Re'

$$ERRMAX \sim Re' \cdot \Delta x^2$$

annimmt, in einem doppellogarithmischen Koordinatensystem in etwa als Geraden mit der Steigung zwei dargestellt. Der Bereich der Abszisse überdeckt das Intervall $0.15 \leq \sqrt{Re'} \cdot \Delta x \leq 7.07$. Der linke Randpunkt entspricht $\Delta x = 1/30, Re' = 20$, der rechte $\Delta x = 0.1, Re' = 5000$.

1. Die Bandbreite(-höhe) aller gezeigten Fehler geht fast überall über mehr als eine Zehnerpotenz.
2. Für kleine Werte von $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x$ haben entsprechend ihrer Fehlerordnung die beiden Upwind-Verfahren 1. Ordnung die größten Maximalfehler.
3. Zu den Verfahren, welche die niedrigsten maximalen Fehler aufweisen, gehören LSUDS in Erhaltungsform, QUICK-PLUS und LECUSSO-C.
4. Alle Verfahren außer den beiden Upwind-Verfahren 1. Ordnung zeigen im Bereich $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x \leq 3$ eine Steigung von etwa 2.
5. Es gibt immer wieder stochastische Schwankungen einzelner Punkte, obwohl der Gesamteindruck entsteht, daß alle Punkte zu einem Verfahren in etwa auf einer Kurve liegen.
6. Bei einigen Verfahren in den nachfolgenden Abbildungen kann man im Bereich $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x$ zwischen 1.5 und 4 eine geänderte, geringere Steigung

vermuten, was in Einklang stände mit Konvergenzsätzen, die für sehr große $Re_{\Delta x}$ bei manchen Differenzenverfahren einen linearen Anstieg des Fehlers prognostizieren. Dies wird nachfolgend noch etwas ausführlicher erläutert. Aus Sätzen über die Konvergenz von Differenzenverfahren für $\Delta x \rightarrow 0$, z.B. [6] ist bekannt, daß solche Konvergenzsätze meist zwei Konvergenzordnungen beinhalten, eine für $\Delta x \leq \Gamma$ und eine für $\Gamma \leq \Delta x$. Ein typisches Ergebnis findet sich z.B. in [6].

Ist ϕ_j die exakte Lösung von

$$\frac{d(u\phi)}{dx} = \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2}, \quad \phi(0) = \alpha_0, \quad \phi(1) = \alpha_1, \quad u(x) \leq B < 0$$

$$0 \leq x \leq 1$$

so gibt es eine Konstante $C = C(\alpha_0, \alpha_1, [U(x)], B)$, so daß für die mit dem Verfahren von Berger berechnete Näherungslösung $\bar{\phi}_j$ gilt:

$$|\bar{\phi}_j - \phi_j| \leq C \frac{\Delta x^2}{\Gamma}, \quad \text{wenn } \Delta x \leq \Gamma$$

$$|\bar{\phi}_j - \phi_j| \leq C \Delta x^2 + C \Gamma, \quad \text{wenn } \Delta x > \Gamma.$$

Ähnliche Aussagen gelten für viele andere Differenzenverfahren, dabei gilt für hinreichend kleine Δx eine Abschätzung wie die für $\Delta x \leq \Gamma$, welche $O(\Delta x^2)$ ist. Für $\Gamma, \Gamma \leq \Delta x$, falls bei gleichbleibendem Γ der Wert von Δx verkleinert wird, nimmt der Fehler nicht mehr proportional zu Δx^2 ab. Die Konvergenzaussagen lassen sich auch als Feststellungen in Abhängigkeit von der Maschen-Reynoldszahl $Re_{\Delta x} = u \cdot \Delta x / \Gamma$ formulieren.

Vergleicht man die beiden Verfahren mit zentralen Differenzen in Abbildung 3.1, so findet man ohne Schwierigkeit die Steigung 2, wenn man eine Gerade durch die jeweiligen Punkte legt. Das Verfahren in Erhaltungsform liegt im Schnitt um den Faktor 1/2 unter dem Ergebnis der konvektiven Form. Bei beiden Verfahren scheint bei $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x \approx 2$ ein Plateau zu bestehen, bei dem ein Abweichen von der Steigung 2 vorhanden ist. Möglicherweise macht sich dort der Einfluß der örtlichen Oszillationen auf den maximalen Fehler bemerkbar.

Bei den Upwind-Verfahren 1. Ordnung in Abbildung 3.2 zeigt sich ebenfalls in ziemlich reiner Form der Unterschied um den Faktor 1/2 zwischen den beiden Varianten. Oberhalb $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x = 4$ deutet sich eine Abflachung an.

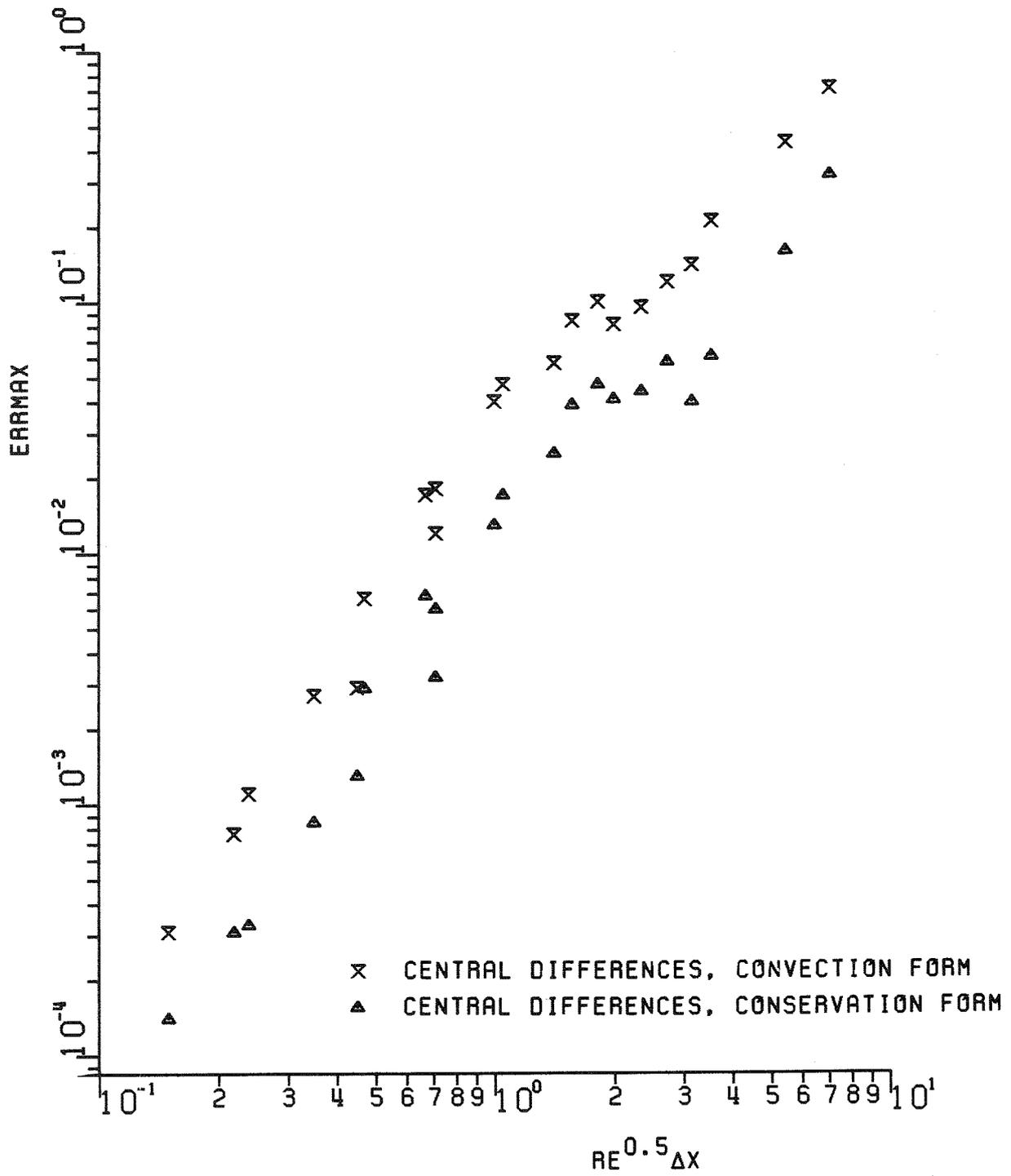


Abb. 3.1 Maximaler ortsabhängiger Fehler der beiden Verfahren mit zentralen Differenzen

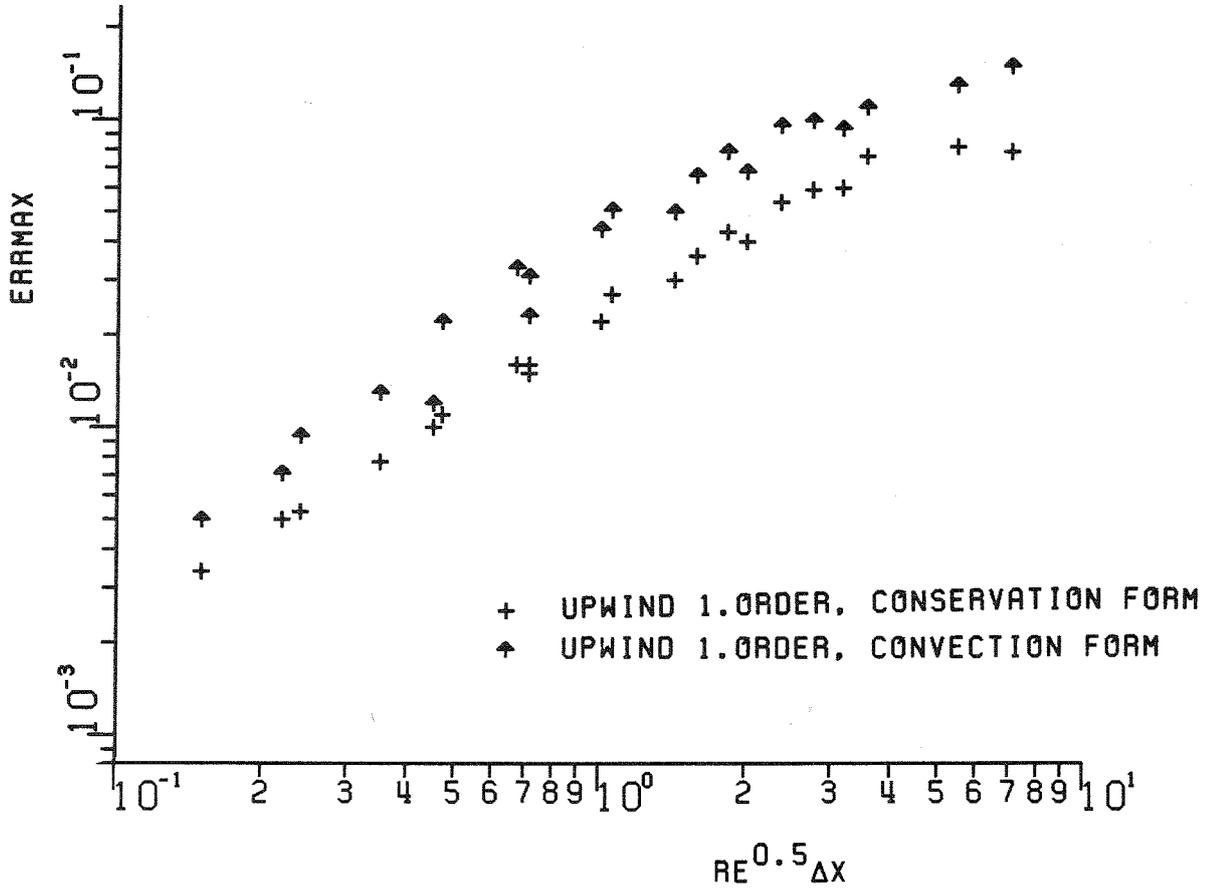


Abb. 3.2 Maximaler ortsabhängiger Fehler der beiden Upwind-Verfahren erster Ordnung

Der Vergleich der beiden vorgenannten Verfahren (beide Varianten) mit den hybriden Verfahren in Abbildung 3.3 zeigt den Größenordnungsübergang etwa bei $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} = 1$, die feine Übereinstimmung zwischen Upwind- und Hybrid-Verfahren erst etwa bei $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} = 5$, so daß etwa bei $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} \approx 2$ der effektive Übergang von zentralem zum Upwind-Verfahren geschieht, d.h. daß in den für den maximalen Fehler maßgeblichen Punkten die Maschen-Reynoldszahlen im Betrag den Wert 2 überschreiten. Dies entspricht wegen

$$\text{Re}' \cdot \Delta x^2 = \text{Re}_{\Delta x} \cdot \Delta x = 4,$$

wenn wir $\Delta x = 0.1$ annehmen, einer maximalen Maschen-Reynoldszahl von 40.

Bei den exponentiellen Verfahren in Abbildung 3.4 ist die Situation weniger klar. Das Verfahren von El-Mistikawy-Werle liegt bis $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} \approx 2$ bei etwa 50 % des Verfahrens von Allen-Southwell. Darüber liegen sie sehr nahe zusammen, so, als würde der maximale Fehler bei keinem Verfahren über 15 % steigen. Das Verfahren von Berger liegt bis zu $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} = 2$ in etwa zwischen beiden Verfahren. Oberhalb liegt es deutlich über den beiden anderen Verfahren.

Abbildung 3.5 umfaßt LECUSSO, LECUSSO-C und QUICK-PLUS sowie die Methode von Gushchin und Shchennikov. Das Verfahren von Gushchin und Shchennikov liegt meist über dem LECUSSO-Verfahren in Konvektionsform. Im ganzen Bereich $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} \leq 6$ liegen QUICK-PLUS und LECUSSO-Verfahren in Erhaltungsform mindestens beim halben Fehler des LECUSSO-Verfahrens in Konvektionsform. Erst oberhalb $\sqrt{\text{Re}' \cdot \Delta x} = 6$ verwischen sich die Unterschiede.

Abbildung 3.6 vergleicht das hybride Verfahren in konvektiver Form mit dem lokal exakten Verfahren von Allen-Southwell. Die Testrechnungen bestätigen die schon mehrmals geäußerte Vermutung, daß Allen-Southwell nicht wesentlich besser liegt als das hybride Schema in konvektiver Form.

Bei den entsprechenden Varianten in Erhaltungsform, dem erhaltungstreuen hybriden Verfahren und dem Schema von El-Mistikawy-Werle, zeigt Abbildung 3.7, daß das lokal exakte Schema in weiten Teilen für höhere $\text{Re}_{\Delta x}$ besser liegt.

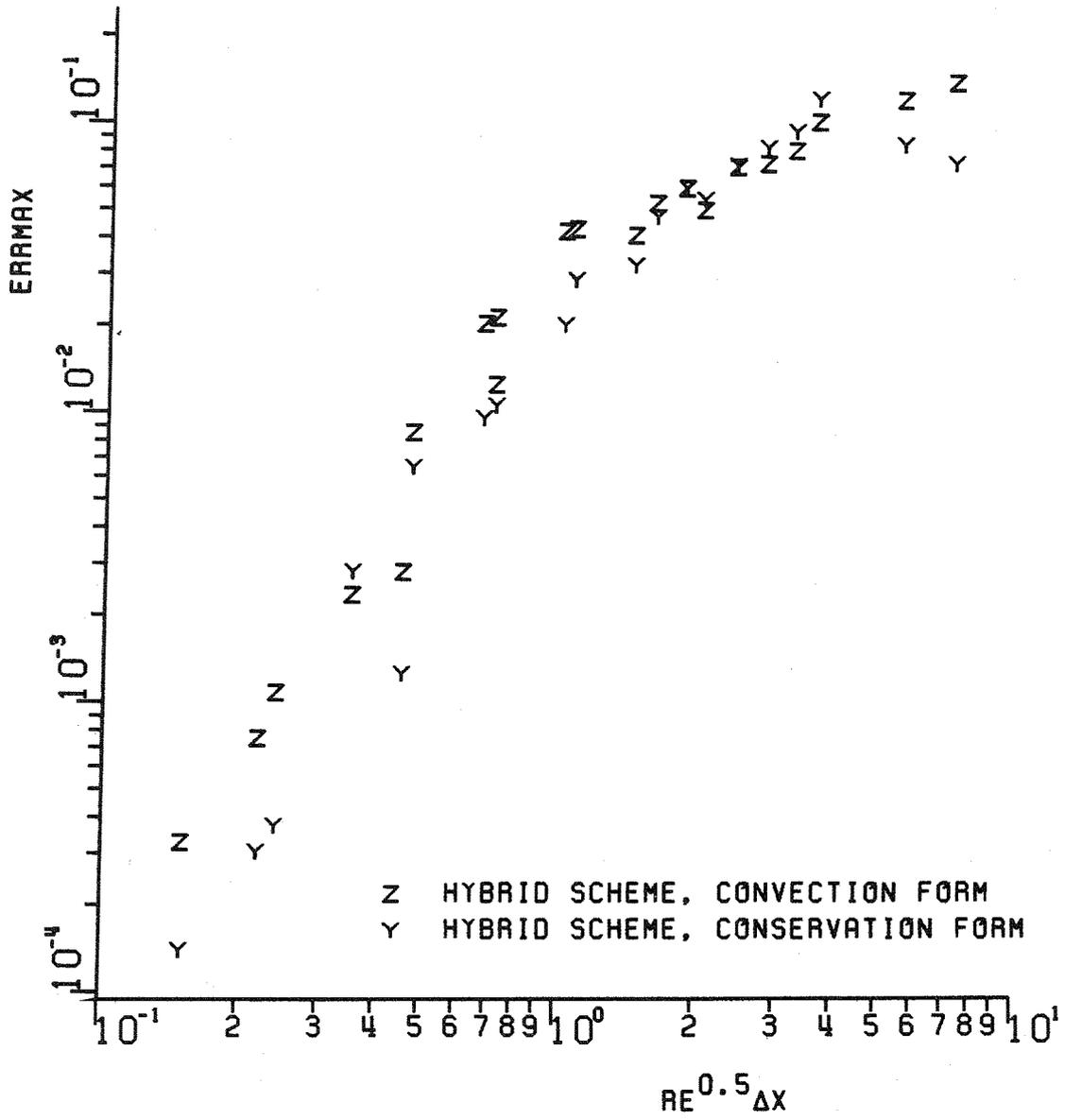


Abb. 3.3 Maximaler ortsabhängiger Fehler der beiden hybriden Verfahren

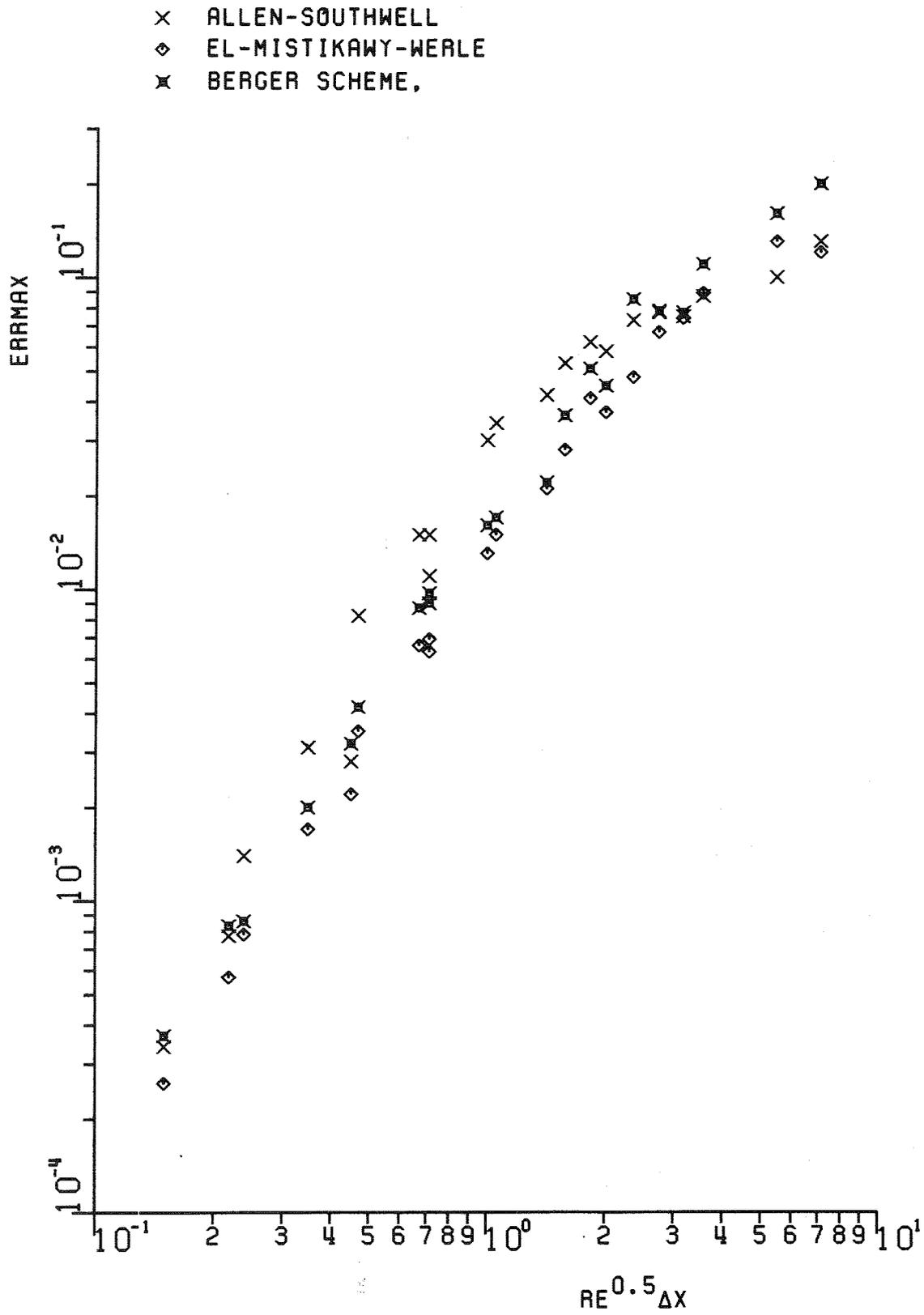


Abb. 3.4 Maximaler ortsabhängiger Fehler der exponentiellen Verfahren als Funktion von $\sqrt{Re} \cdot \Delta x$

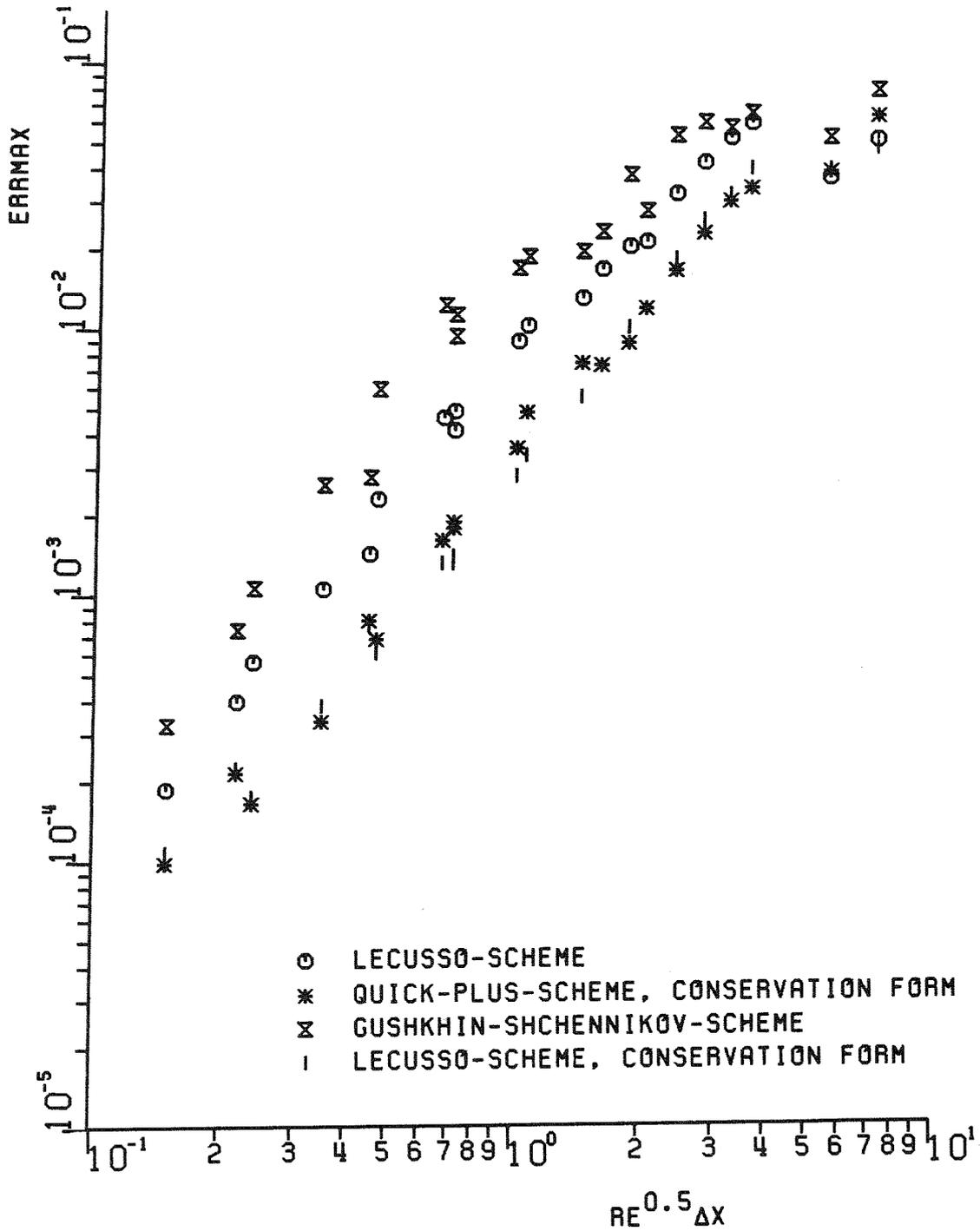


Abb. 3.5 Maximaler Fehler der Verfahren mit 4 Punkten (in einer Dimension)

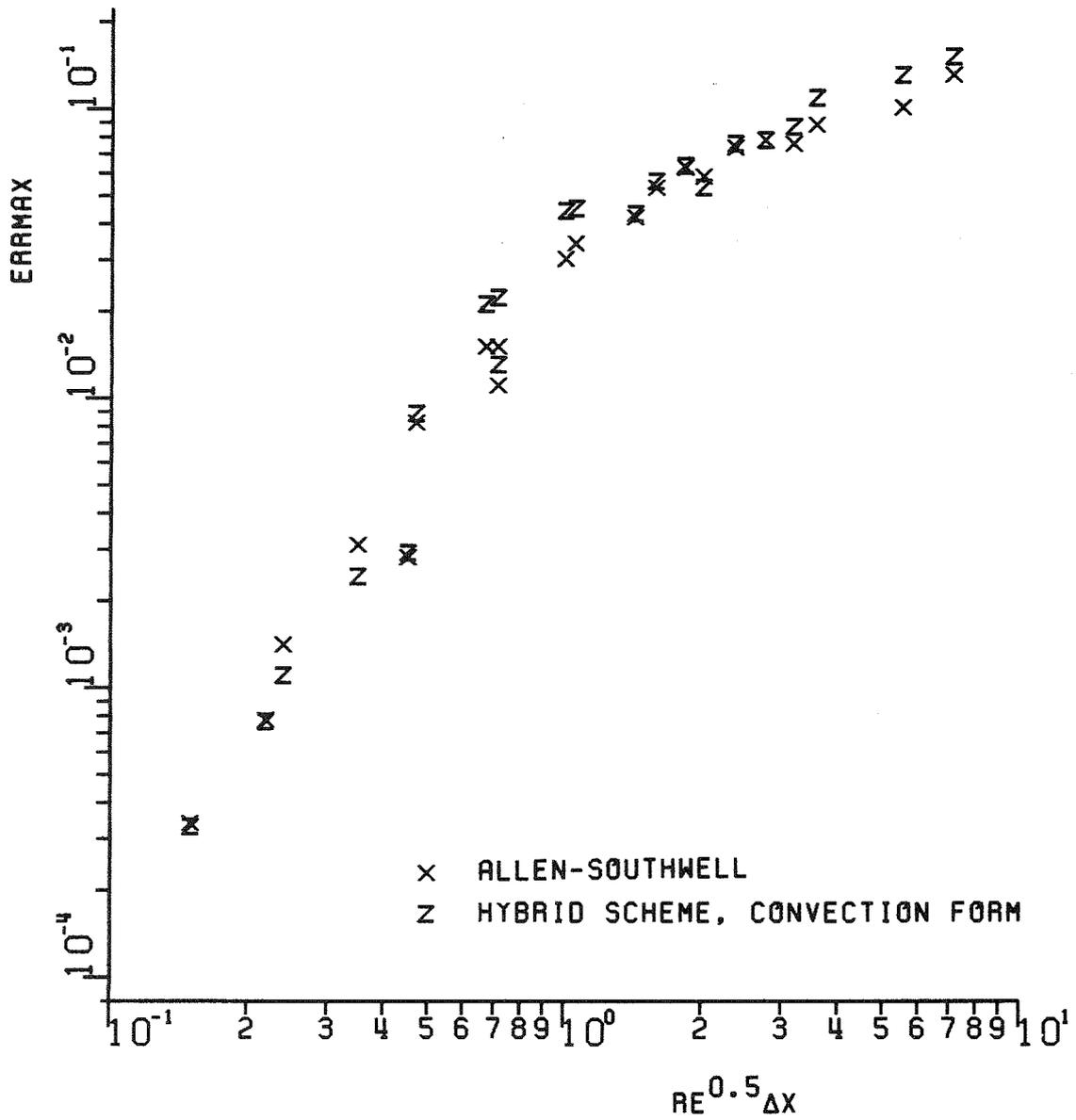


Abb. 3.6 Maximaler Fehler des hybriden Verfahrens in konvektiver Form und des Verfahrens von Allen-Southwell

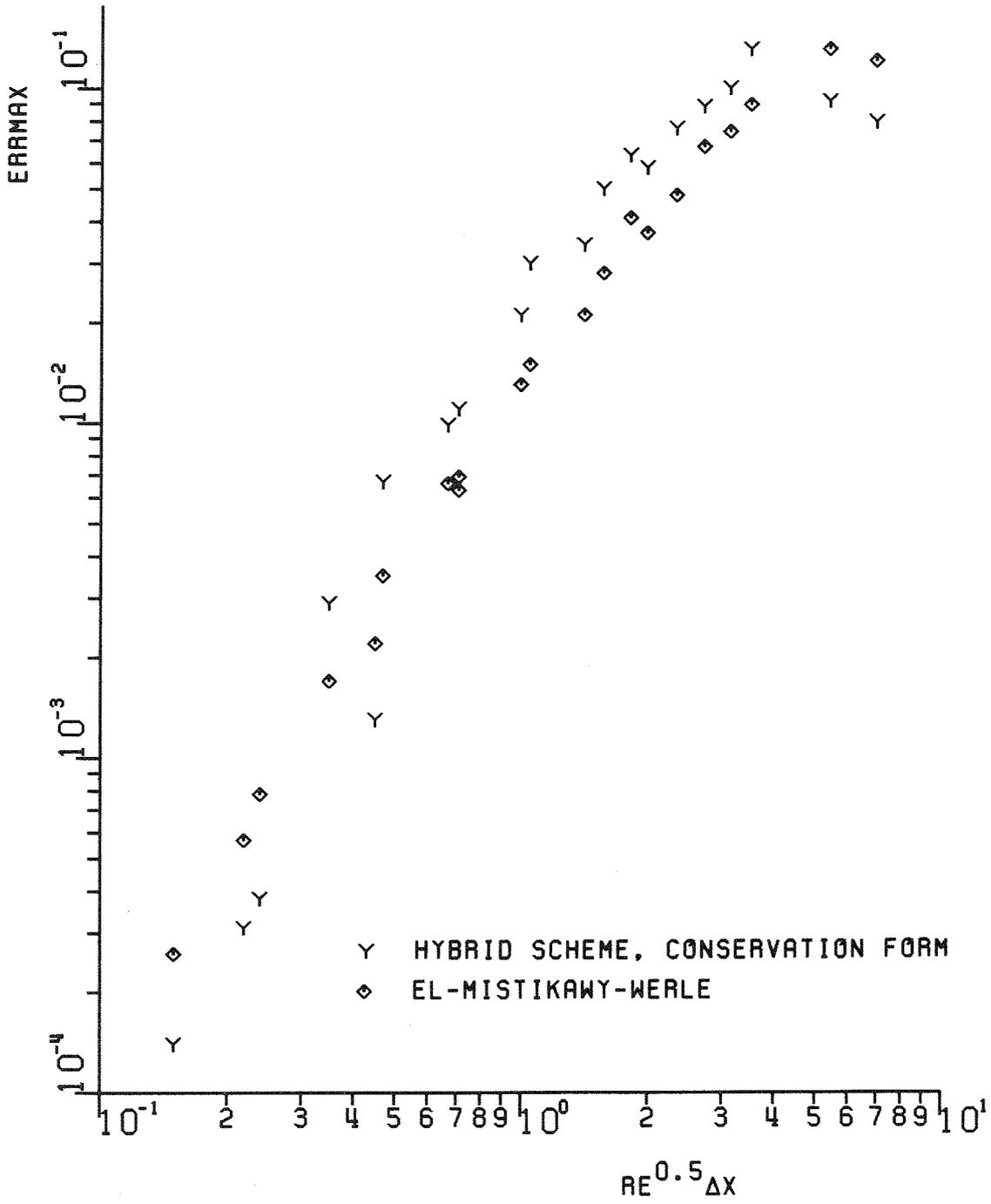


Abb. 3.7 Maximaler Fehler des hybriden Verfahrens in Erhaltungsform und des Verfahrens von El-Mistikawy-Werle

Abbildung 3.8 vergleicht das LECUSSO-Verfahren (Konvektionsform) mit LUDS und LSUDS. Für den Bereich kleinerer $\sqrt{\text{Re}'} \cdot \Delta x$ ist LSUDS klar besser als LECUSSO und das letztere besser als LUDS. Für größere Werte von $\sqrt{\text{Re}'} \cdot \Delta x$ verwischen sich diese Unterschiede, die Verfahren sind dort nahezu gleichwertig, so daß Aussagen bezüglich des LECUSSO-Verfahrens fast ebenso für LSUDS gelten.

Einen Vergleich der in Abbildung 3.8 gezeigten Verfahren mit den Verfahren von Abbildung 3.6, sogenannten Standardverfahren, die in einer Dimension jeweils mit Dreipunktnäherungen arbeiten, zeigt Abbildung 3.9. Dieser Vergleich von Verfahren in konvektiver Form zeigt, daß durch die Verwendung eines geeignet gewählten Upwind-Verfahrens mit vier oder mehr Punkten beim maximalen ortsabhängigen Fehler ein Faktor zwei bis vier gewonnen werden kann.

Abbildung 3.10 zeigt die fortgeschrittenen Upwind-Verfahren in Erhaltungsform, das sind LUDS und LSUDS in Erhaltungsform sowie QUICK-PLUS und LECUSSO in Erhaltungsform. Hier liegt im Bereich $\sqrt{\text{Re}'} \cdot \Delta x \leq 1$ die LSUDS-Erhaltungsform geringfügig besser als QUICK-PLUS und LECUSSO-C. Für $\sqrt{\text{Re}'} \cdot \Delta x \geq 1$ ist die Situation umgekehrt und QUICK-PLUS und LECUSSO-C liegen meist nahe beieinander und LSUDS (Erhaltungsform) liegt etwas schwächer.

In Abbildung 3.11 sind zusätzlich das Verfahren von El-Mistikawy-Werle und das hybride Verfahren in Erhaltungsform aufgenommen. Das letztere Verfahren hat gerade im Bereich höherer Maschen-Reynolds-Zahlen einen um den Faktor 4 bis 10 größeren maximalen örtlichen Fehler als LSUDS-C (Erhaltungsform), QUICK-PLUS und LECUSSO-C.

Es ist eine der wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden numerischen Untersuchung, daß LSUDS-C, QUICK-PLUS und LECUSSO-C nahezu gleichwertig sind und beträchtlich kleinere maximale Fehler ergeben als Standardverfahren.

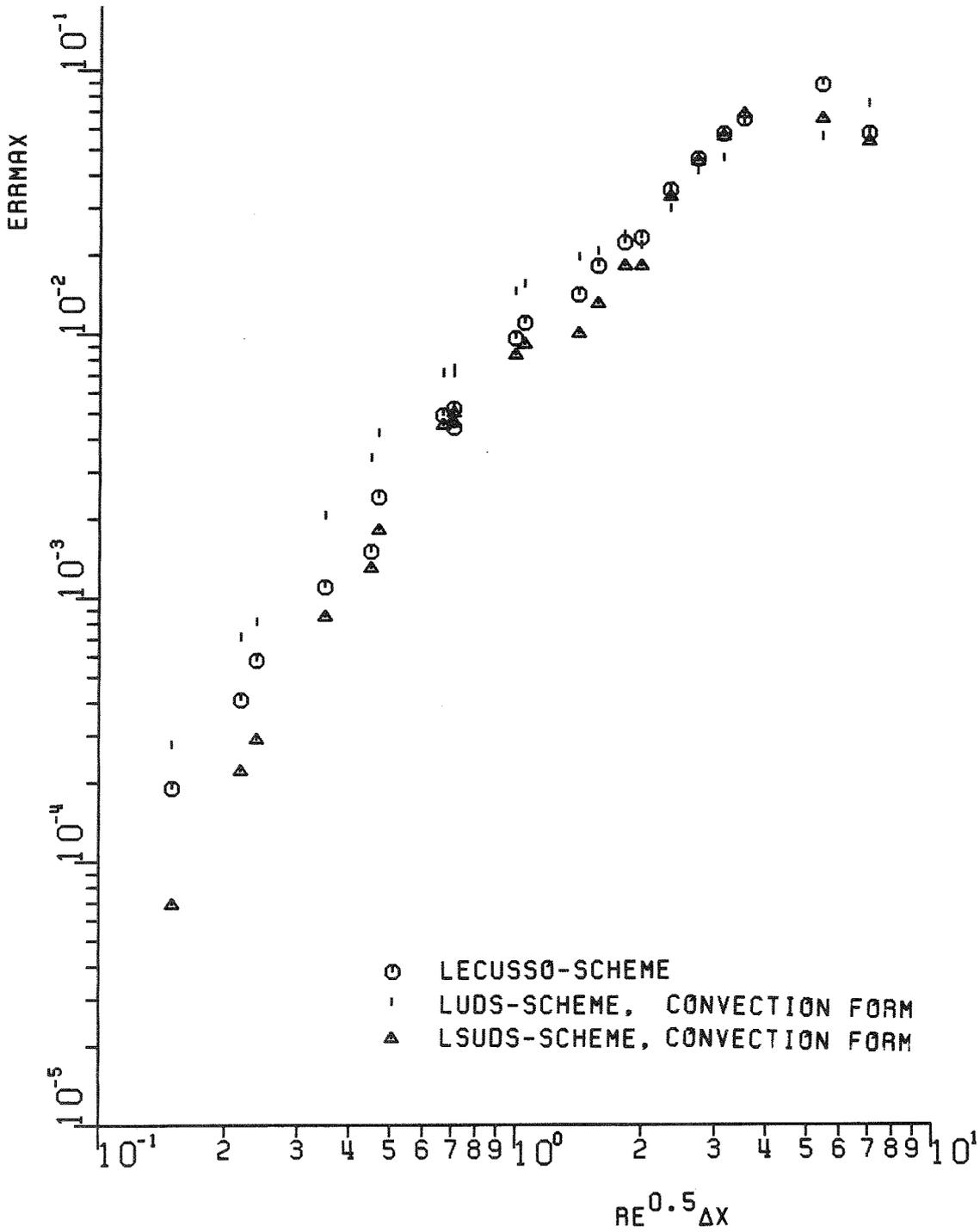


Abb. 3.8 Maximaler örtlicher Fehler der neueren Upwind-Verfahren in Konvektionsform

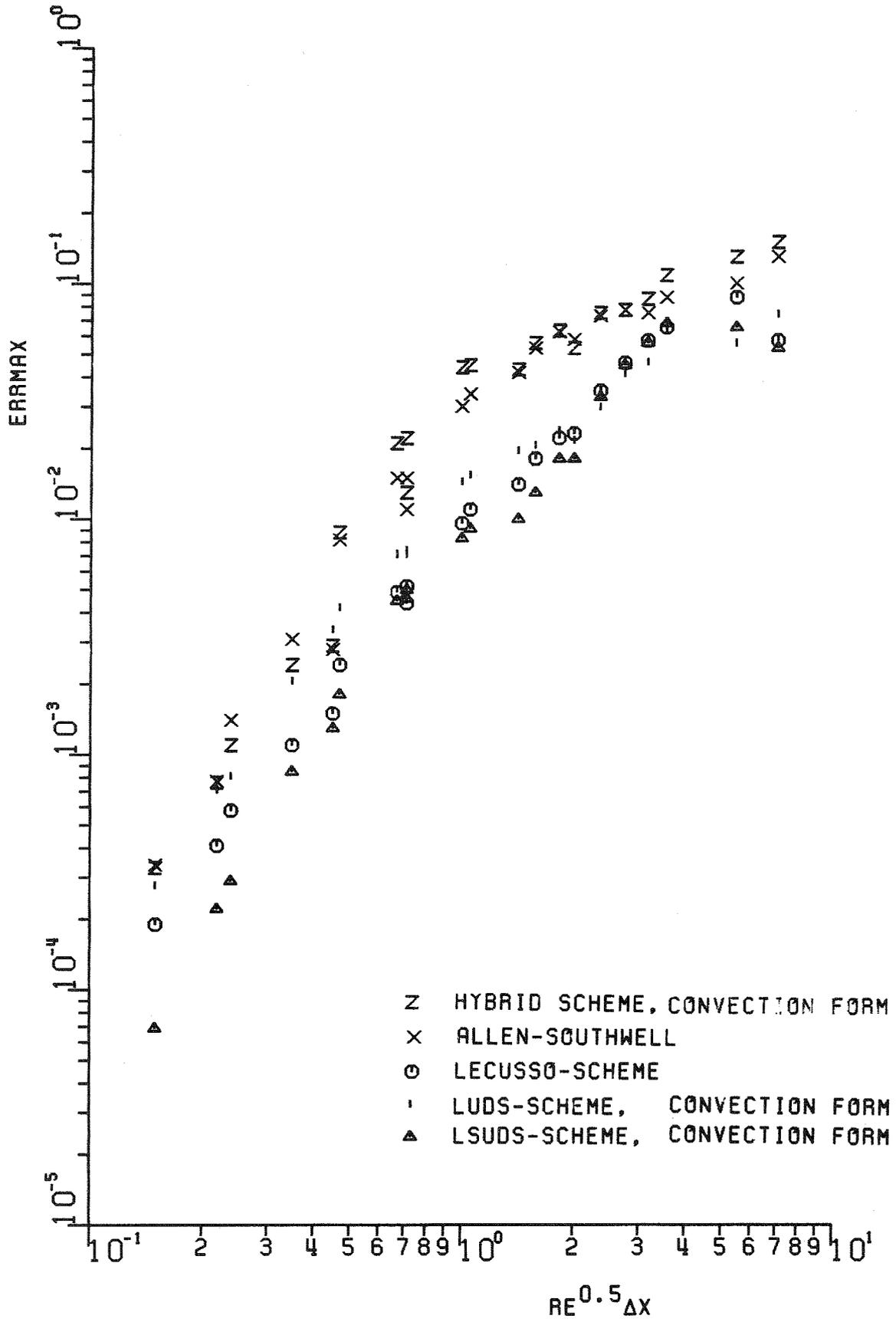


Abb. 3.9 Vergleich der fortgeschrittenen Upwind-Verfahren in konvektiver Form mit den Standardverfahren aus Abbildung 6.7

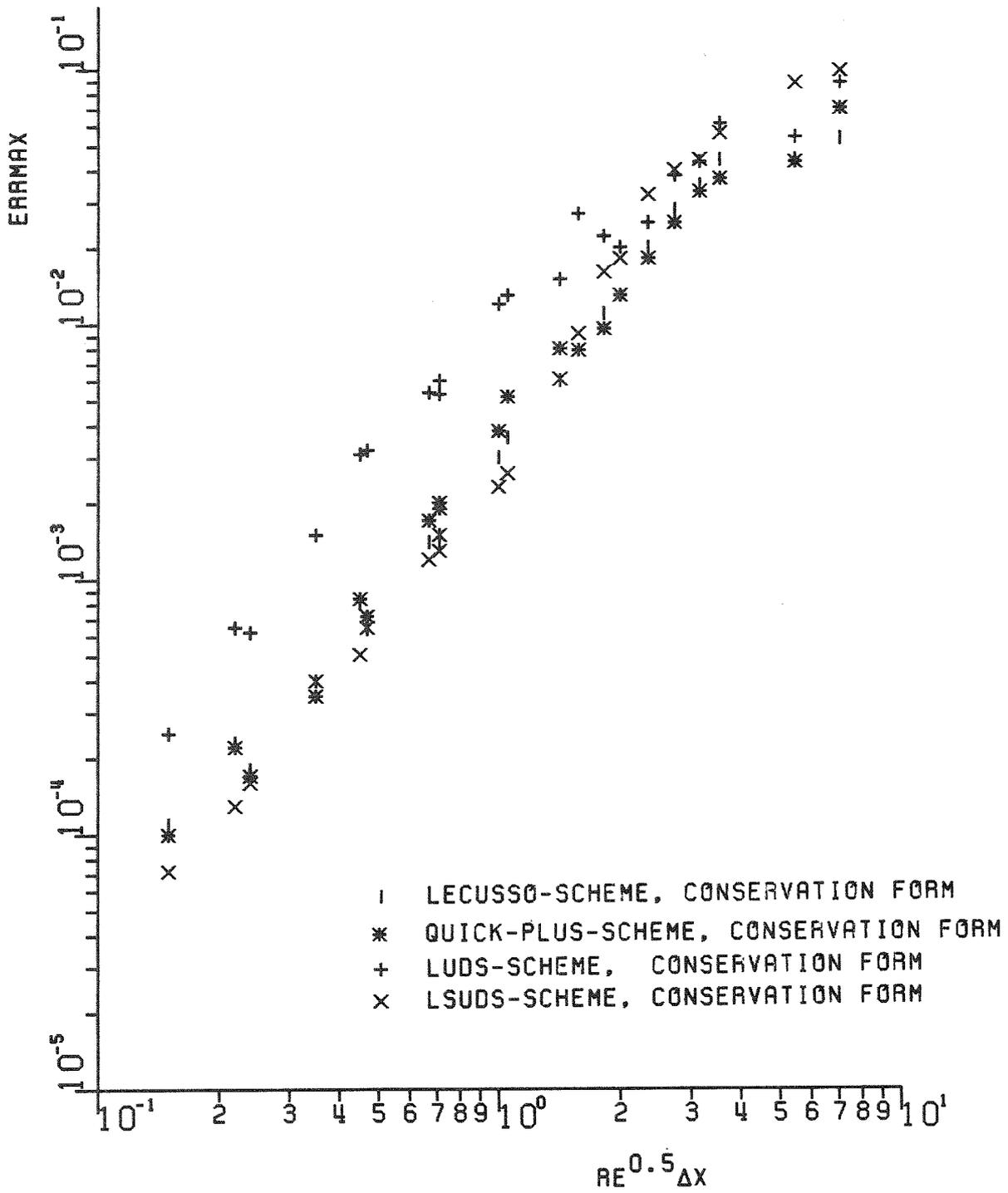


Abb. 3.10 Maximaler ortsabhängiger Fehler für die Erhaltungsformen der vorgeschrittenen Upwind-Verfahren

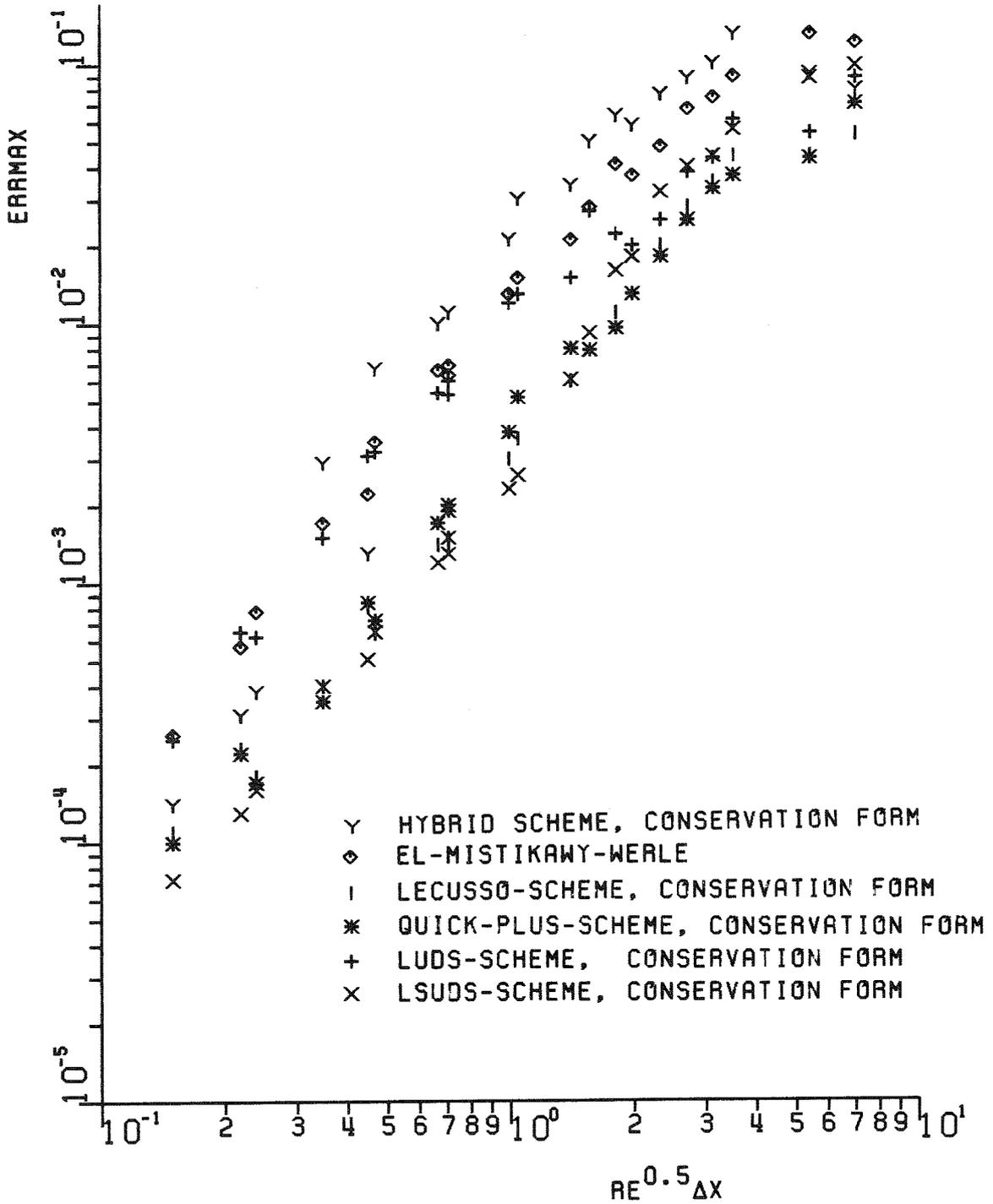


Abb. 3.11 Vergleich der fortgeschrittenen Upwind-Verfahren in Erhaltungsform mit den in Abbildung 6.8 gezeigten Standardverfahren

3.b Untersuchung des ortsabhängigen Fehlers der numerischen Lösung

Nachfolgend untersuchen wir die Ortsabhängigkeit des Fehlers der numerischen Lösungen für 19 verschiedene Differenzenverfahren und die drei Werte $Re' = 50, 400, 5000$. Dies geschieht mit Hilfe der Abbildungen 3.12, 3.13 und 3.14. Dort findet man zunächst Höhenlinienplots der exakten Lösung (linke Spalte), deren Höhenlinien mit Hilfe von auf dem der Rechnung entsprechenden Maschengitter gegebenen exakten Werten gezeichnet werden.

Es mag die Versuchung vorliegen, die jeweilige numerisch gefundene Lösung optisch mit der exakten Lösung zu vergleichen. Dies wäre für grafische Zwecke eine Darstellung von Isothermen auf einem diskreten Maschennetz von $200 \cdot 200$ Punkten, wie dies in den Abbildungen 2.3 und 2.4 getan wurde und die kontinuierliche (= exakte) Lösung hinreichend genau wiedergibt. Darauf wurde hier verzichtet. Dagegen wurde immer die exakte Lösung auf dem entsprechenden diskreten und oft auch groben Maschengitter geplottet, um deutlich zu machen, was die numerische Lösung überhaupt leisten kann.

Daneben wird ein Höhenlinienplot der numerischen Lösung sowie ein Höhenlinienbild des ortsabhängigen Fehlers wiedergegeben. Rechts daneben in der Abbildung befindet sich ein 3-d-Plot des ortsabhängigen Fehlers mit Angabe des numerischen Verfahrens sowie des Wertes des maximalen Fehlerbetrages. Die Orientierung des Quadrates $0 \leq x, y \leq 1$ ist im 3-d-Plot um 180° gedreht, der Nullpunkt, welcher sich beim Höhenlinienplot links unten befindet, liegt im 3-d-Plot rechts hinten.

Wir untersuchen die grafischen Darstellungen in bezug auf die Größe und Lage des maximalen Fehlers, vergleichen Verfahren, suchen nach Ähnlichkeiten bei Verfahren und stellen fest, ob Oszillationen auftreten. Daneben bietet sich die Möglichkeit, anhand der 3-d-Plots den maximalen und den durchschnittlichen Fehler qualitativ zu vergleichen.

$Re' = 50$: (Abbildung 3.12)

Die Upwind-Verfahren haben die größten maximalen Fehler, deren stärkere Abweichungen erstrecken sich über größere örtliche Bereiche. Das Verfahren mit zentralen Differenzen in konvektiver Form, das hybride Verfahren in konvektiver Form, das Verfahren von Allen-Southwell, FAM und Gushchin und

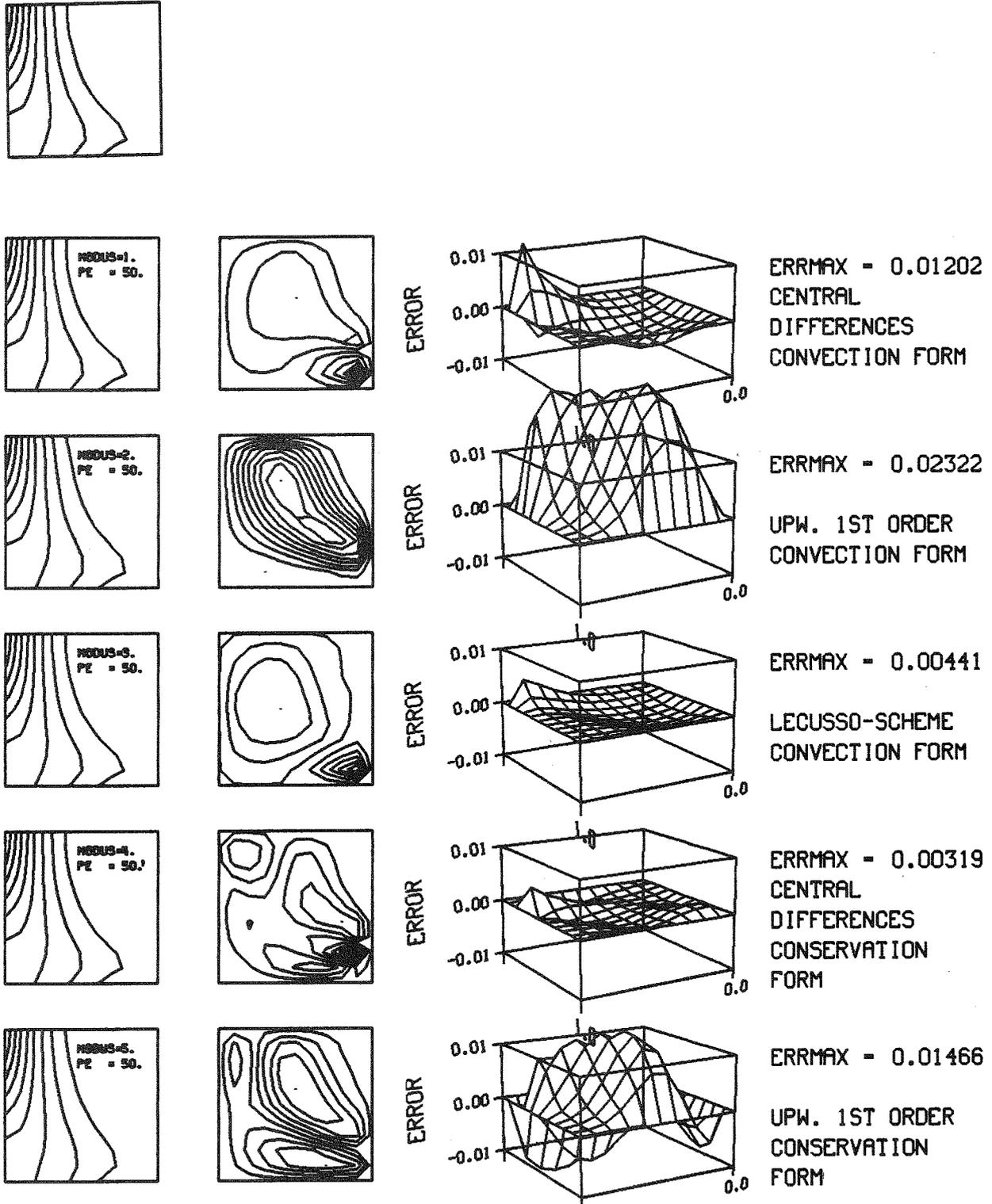


Abb. 3.12 Darstellung des ortsabhängigen Fehlers als 3-d-Plot (rechte Spalte) und als Höhenlinien (zweite Spalte von rechts) sowie Höhenlinien der Näherungslösung (zweite Spalte von links) und Höhenlinien der exakten Lösung, aufgetragen auf dem diskreten Gitter $M = N = 11$ (linke Spalte). $Re' = 50$.

a) MODUS = 1, 2, ..., 5, bezogen auf die in Anhang 1 angegebene Numerierung

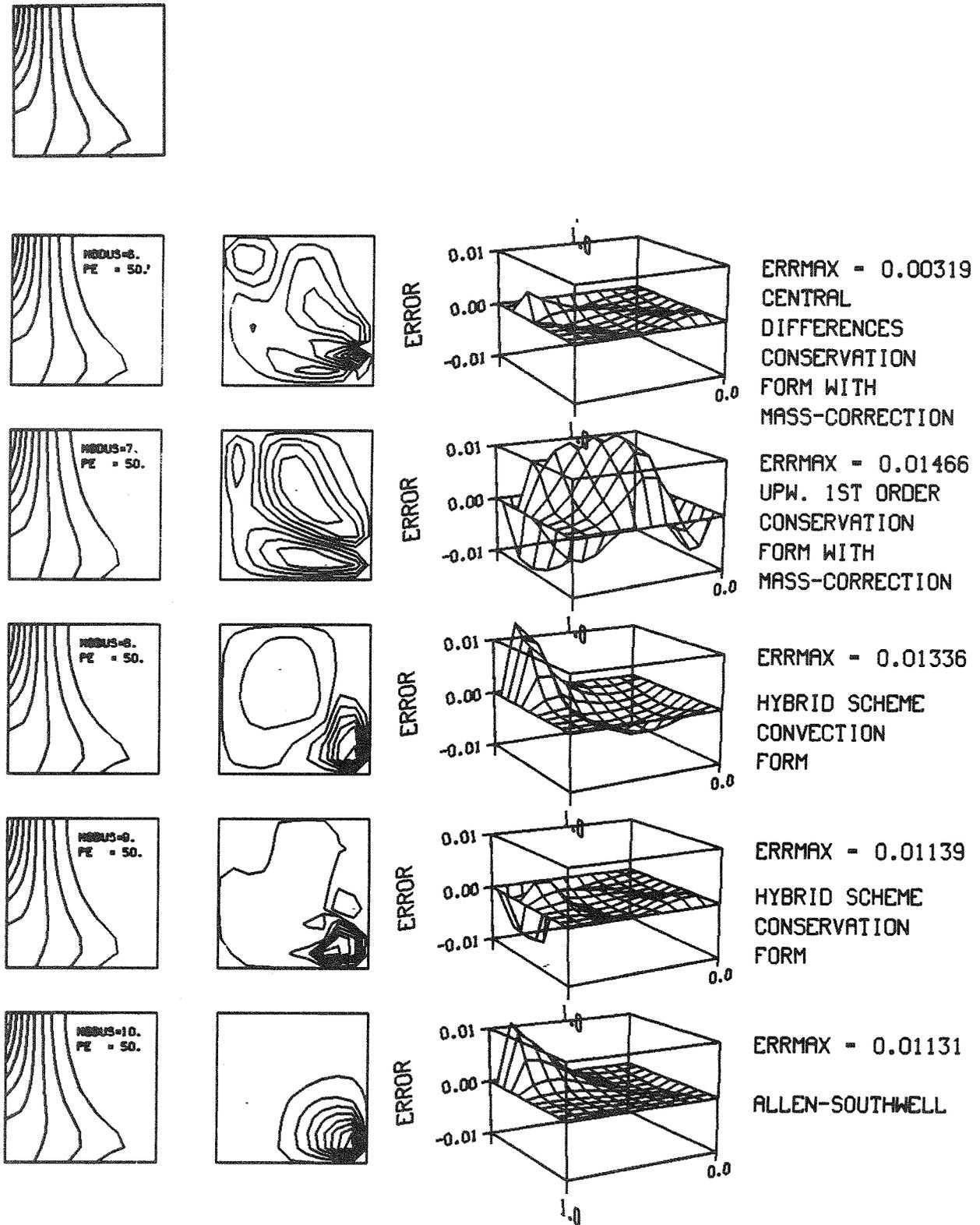
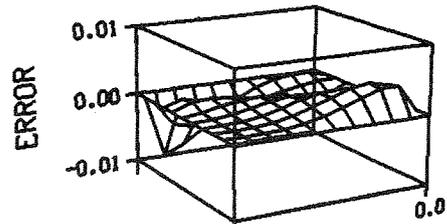
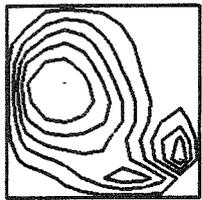
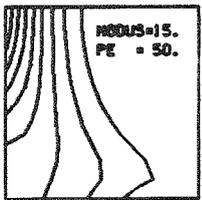
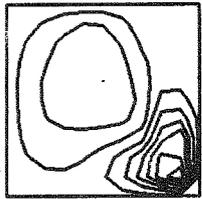
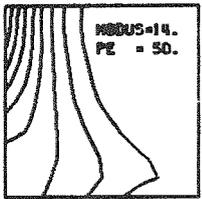
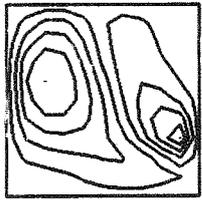
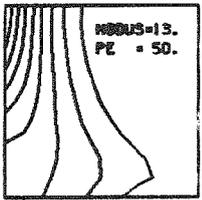
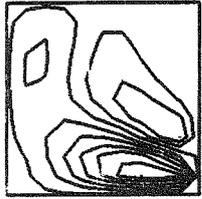
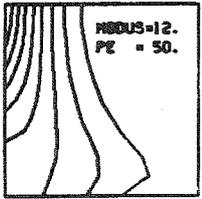
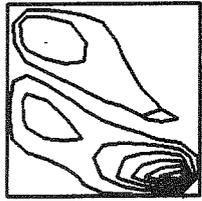
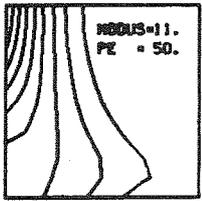
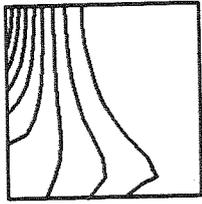
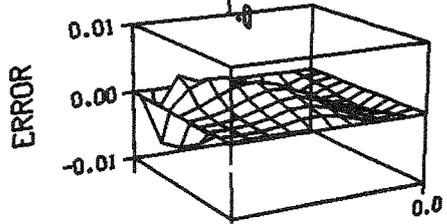


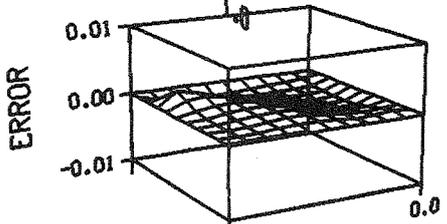
Abb. 3.12 (Fortsetzung)



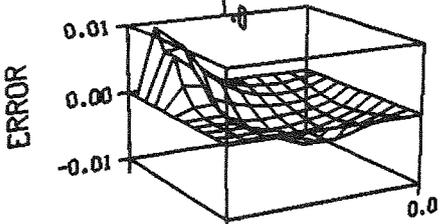
ERRMAX = 0.00896
BERGER-SCHEME



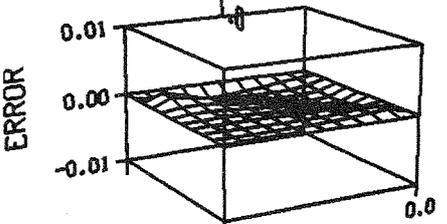
ERRMAX = 0.00852
EL-MISTIKAWY
-WERLE



ERRMAX = 0.00199
QUICK-PLUS

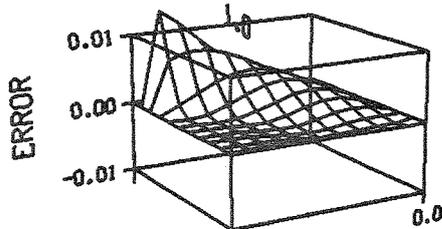
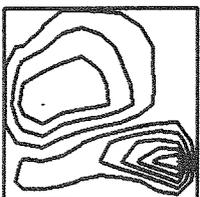
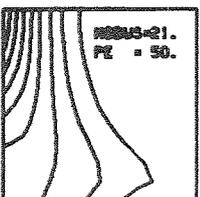
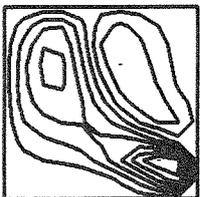
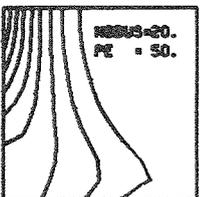
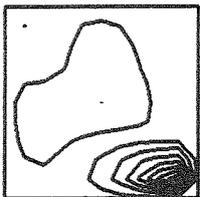
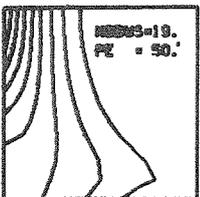
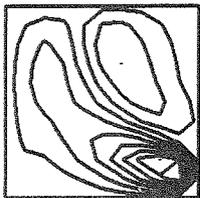
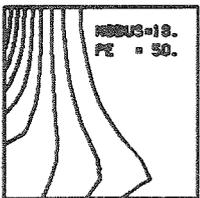
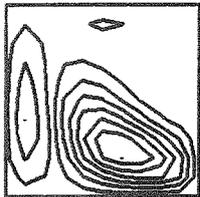
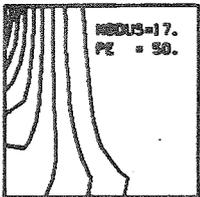
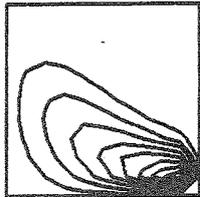
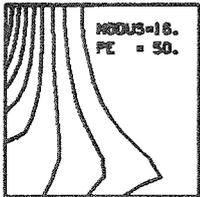
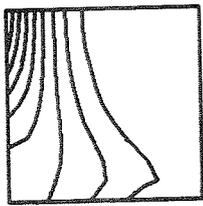


ERRMAX = 0.00991
GUSHCHIN ET AL.



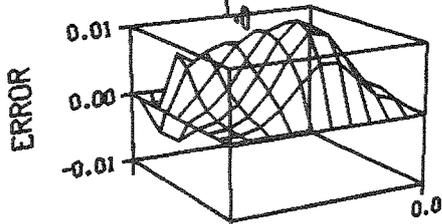
ERRMAX = 0.00147
LECUSSO-SCHEME
CONSERVATION
FORM

Abb. 3.12 (Fortsetzung)



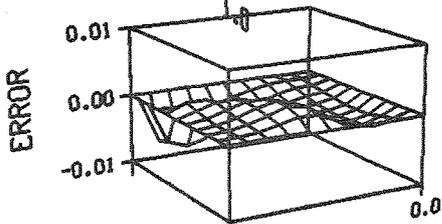
ERRMAX = 0.01368

FAS-METHOD



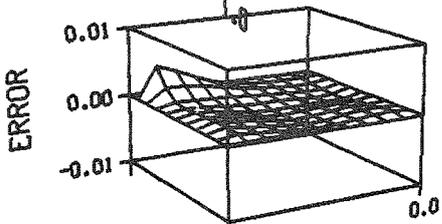
ERRMAX = 0.01289

METHOD OF ROOS



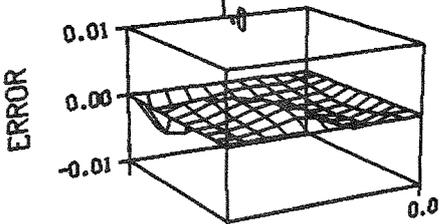
ERRMAX = 0.00692

LEONARDS
UPWIND SCHEME
LUDS
CONVECTION FORM



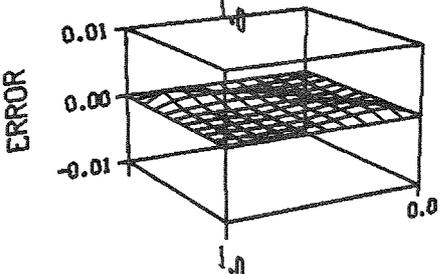
ERRMAX = 0.00463

LEONARDS
SUPER UPWIND
SCHEME LSUDS
CONVECTION FORM



ERRMAX = 0.00514

LEONARDS
UPWIND SCHEME
LUDS
CONSERVATION FORM



ERRMAX = 0.00159

LEONARDS
SUPER UPWIND
SCHEME LSUDS
CONSERVATION FORM

Abb. 3.12 (Fortsetzung)

Shchennikov (wegen der Approximation für kleine Maschen-Reynoldszahlen) haben eine ähnliche Abhängigkeit des ortsabhängigen Fehlers. Eine vergleichbare Feststellung gilt für die entsprechenden Verfahren in Erhaltungsform, sofern sie existieren, d.h. zentrale Differenzen und hybrides Verfahren in Erhaltungsform sowie El-Mistikawy-Werle, LECUSSO und LECUSSO-C sowie QUICK-PLUS sind verwandt und die Verfahren mit den kleinsten Maxima. Bei Berger und LUDS ist eine gewisse Ähnlichkeit vorhanden, das Verfahren von Roos liegt unter den Upwind-Verfahren 1. Ordnung. Oszillationen sind bei keinem Verfahren festzustellen.

$Re' = 400$: (Abbildung 3.13)

Die Verfahren mit zentralen Differenzen zeigen hier ausgeprägte örtliche Oszillationen. Die Upwind-Verfahren 1. Ordnung haben immer noch beträchtliche Abweichungen, die Maximalabweichung des Verfahrens von Roos liegt über der des Upwind-Verfahrens 1. Ordnung in Erhaltungsform. Hybrid-Verfahren in konvektiver Form, Allen-Southwell und FAS haben ähnliches Fehlerverhalten, auch die Höhe der Extrema variiert nicht sehr stark zwischen den Verfahren. Die Fehlerfunktion der hybriden Verfahren ähnelt nur bereichsweise dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung. Bei der Erhaltungsform hat das hybride Verfahren einen größeren Maximalfehler (0.058) als das Upwindverfahren (0.040). El-Mistikawy-Werle sieht auch hier dem hybriden Verfahren in Erhaltungsform ähnlich, das letztere besitzt jedoch niedrigere Extremwerte.

LECUSSO-Verfahren in Konvektionsform und LSUDS sehen wieder ähnlich aus, LSUDS mit kleinerem Maximum. QUICK-PLUS und LECUSSO-C sehen wieder fast gleich aus. LUSD, Berger und Gushchin-Shchennikov haben eine eigenständige Form, bei Berger taucht in der einen Ecke ein Keil auf, der u.U. auch als Oszillation bezeichnet werden kann.

$Re' = 5000$: (Abbildung 3.14)

Hier gibt es ähnliches festzustellen wie bei $Re' = 400$. Daher wird hier nur kommentiert, was vom Falle $Re' = 400$ wesentlich abweicht. Die Berechnung von FAM versagt, wahrscheinlich treten bei den Berechnungen der Integrale oszillierender Funktionen zu große Schwierigkeiten auf. Der Maßstab der Fehlerdarstellung im 3-d-Plot bei CDS weicht von den anderen Maßstäben um den Faktor 10 ab. Hybrides und entsprechendes exponentielles Verfahren unterscheiden sich nur noch etwas in der Intensität, die Gestalten der

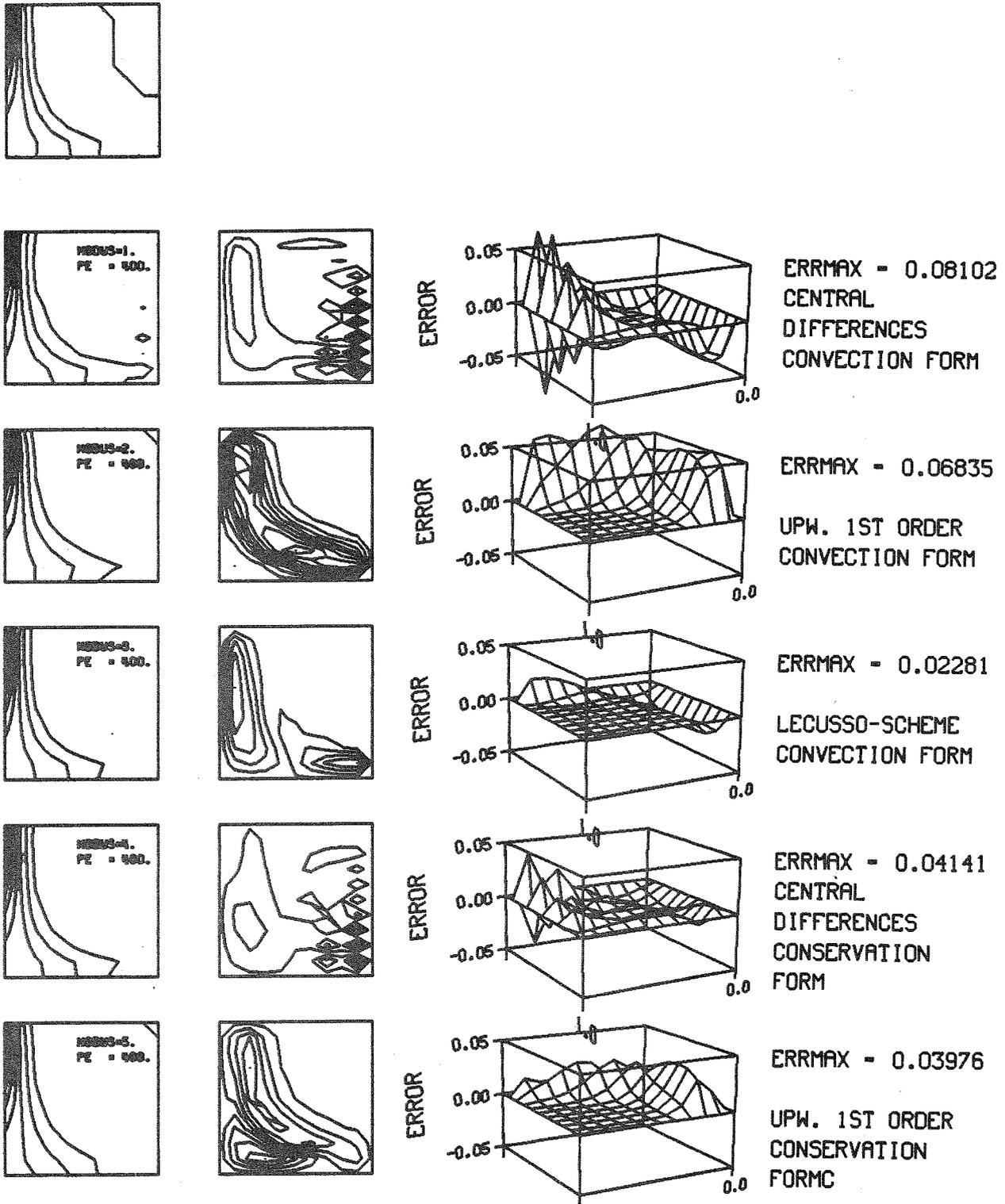


Abb. 3.13 Darstellung des ortsabhängigen Fehlers als 3-d-Plot (rechte Spalte) und als Höhenlinien (zweite Spalte von rechts) sowie Höhenlinien der Näherungslösung (zweite Spalte von links) und Höhenlinien der exakten Lösung, aufgetragen auf dem diskreten Gitter $M=N=11$ (linke Spalte). $Re' = 400$

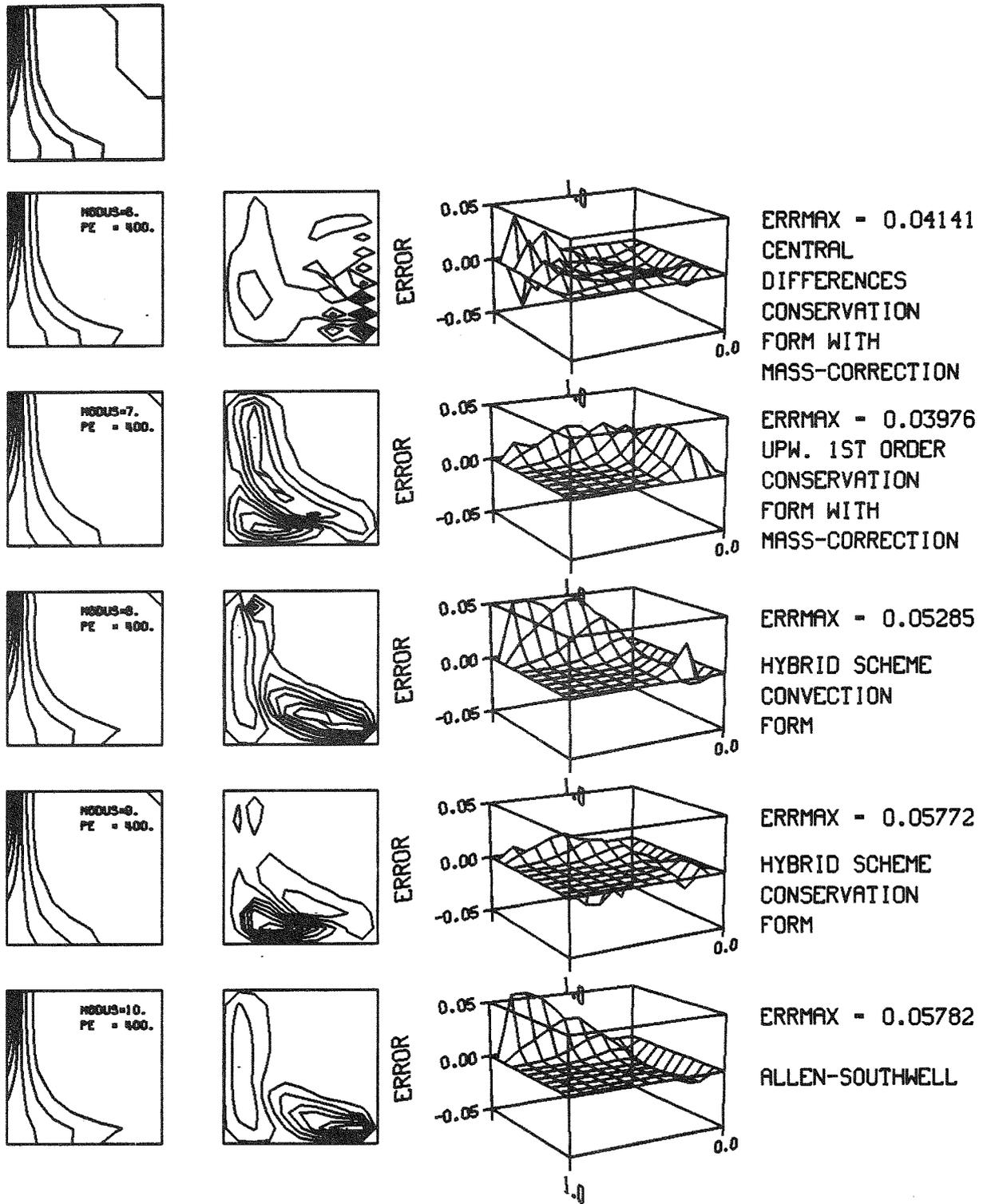


Abb. 3.13 (Fortsetzung)

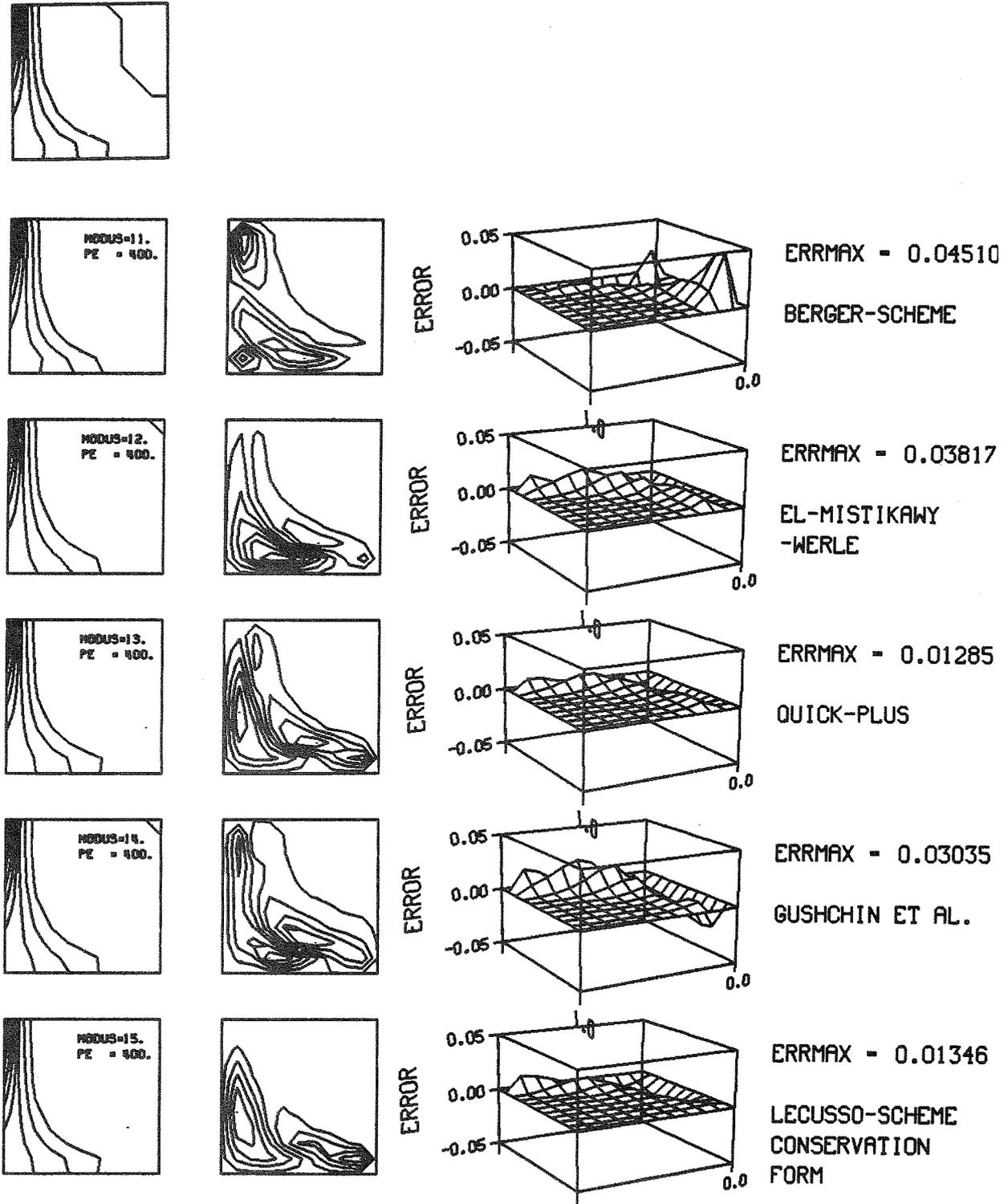
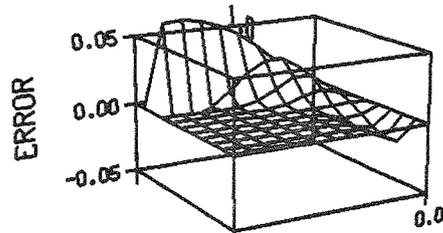
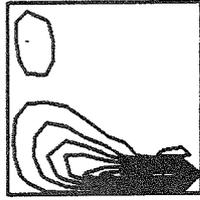
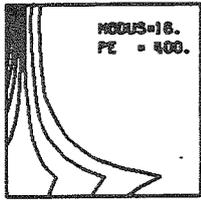
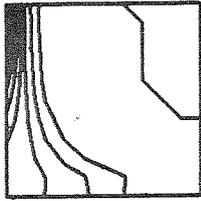
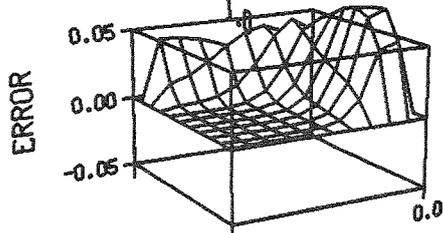
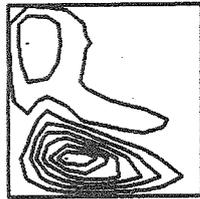
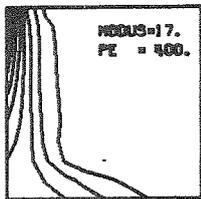


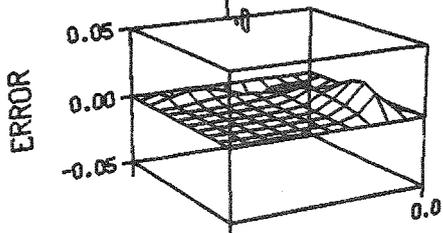
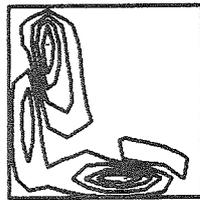
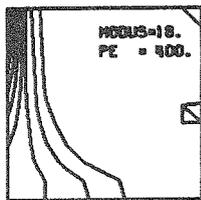
Abb. 3.13 (Fortsetzung)



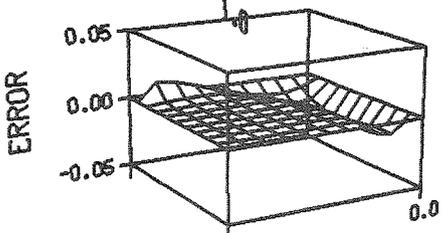
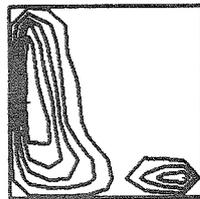
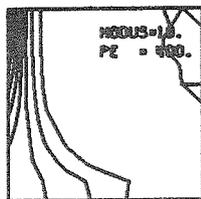
ERRMAX = 0.06116
FAS-METHOD



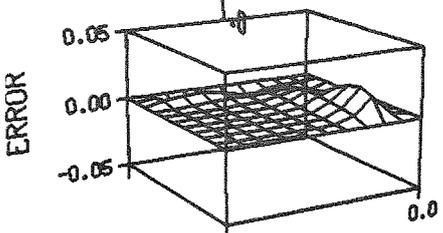
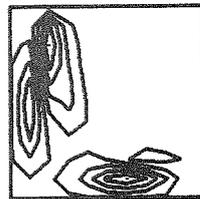
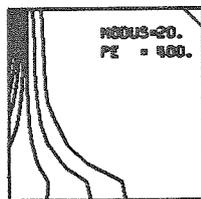
ERRMAX = 0.07228
METHOD OF ROOS



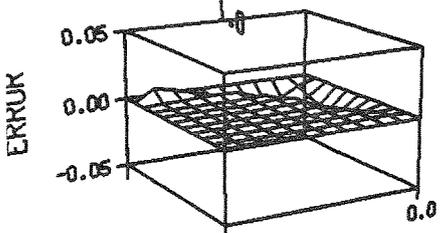
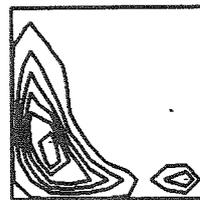
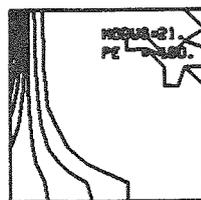
ERRMAX = 0.02113
LEONARDS
UPWIND SCHEME
LUDS
CONVECTION FORM



ERRMAX = 0.01846
LEONARDS
SUPER UPWIND
SCHEME LSUDS
CONVECTION FORM



ERRMAX = 0.01952
LEONARDS
UPWIND SCHEME
LUDS
CONSERVATION FORM



ERRMAX = 0.01714
LEONARDS
SUPER UPWIND
SCHEME LSUDS
CONSERVATION FORM

Abb. 3.13 (Fortsetzung)

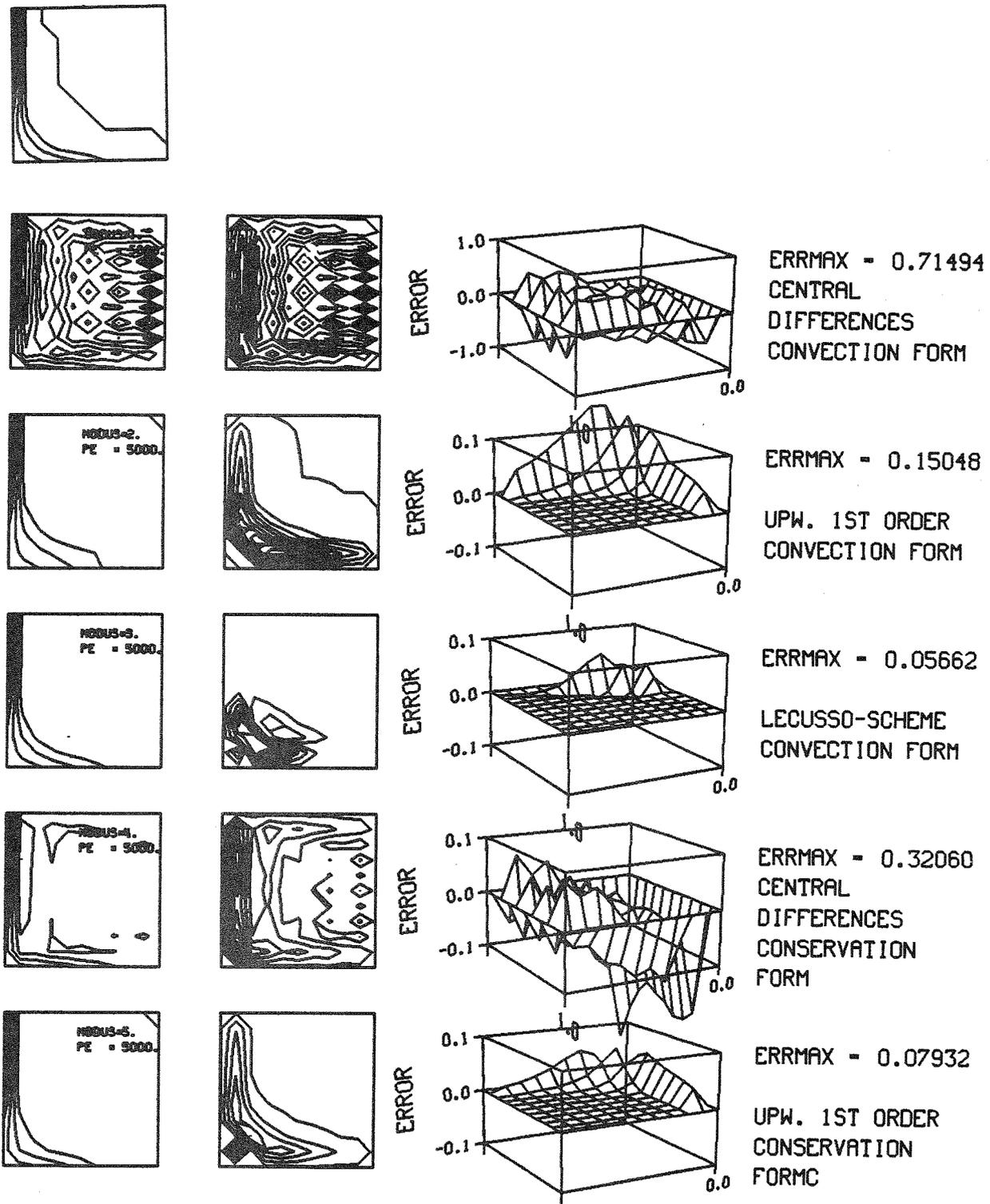


Abb. 3.14 Darstellung des ortsabhängigen Fehlers als 3-d-Plot (rechte Spalte) und als Höhenlinien (zweite Spalte von rechts) sowie Höhenlinien der Näherungslösung (zweite Spalte von links) und Höhenlinien der exakten Lösung, aufgetragen auf dem diskreten Gitter $M=N=11$ (linke Spalte). $Re'=5000$

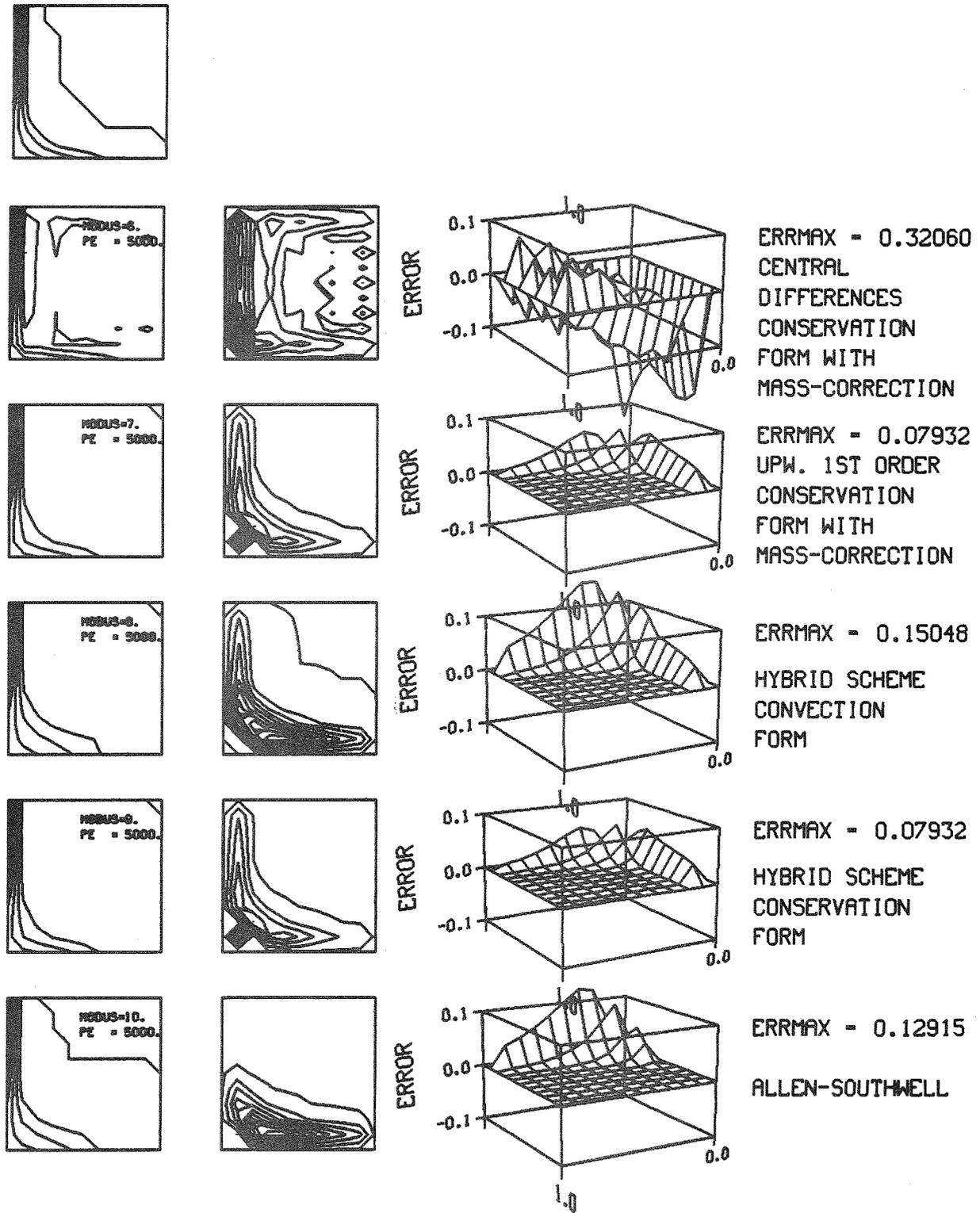
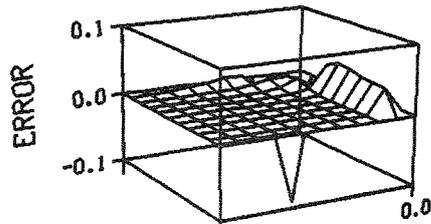
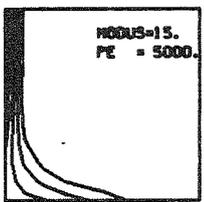
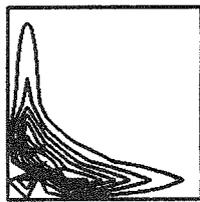
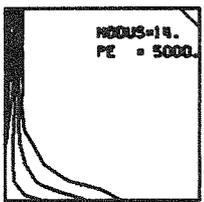
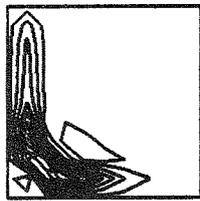
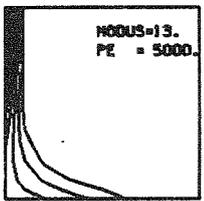
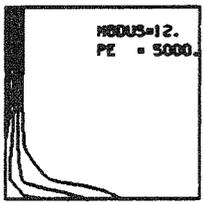
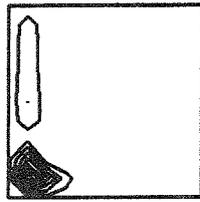
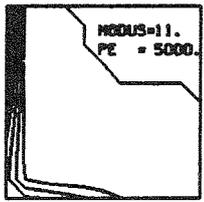
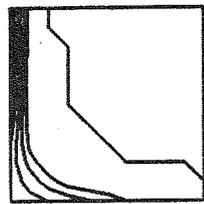
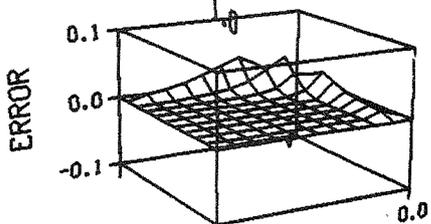


Abb. 3.14 (Fortsetzung)



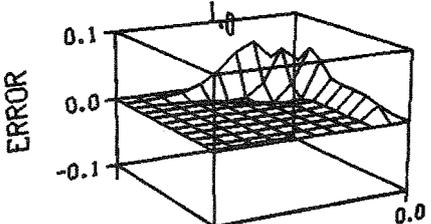
ERRMAX = 0.20126

BERGER-SCHEME



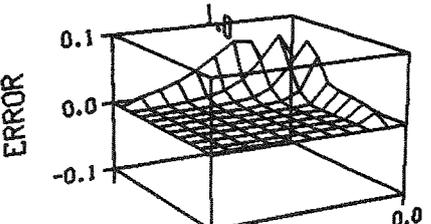
ERRMAX = 0.10579

EL-MISTIKAWY
-WERLE



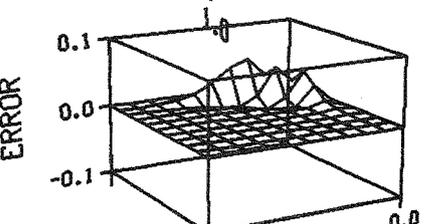
ERRMAX = 0.07042

QUICK-PLUS



ERRMAX = 0.08688

GUSHCHIN ET AL.



ERRMAX = 0.05293

LECUSSO-SCHEME
CONSERVATION
FORM

Abb. 3.14 (Fortsetzung)

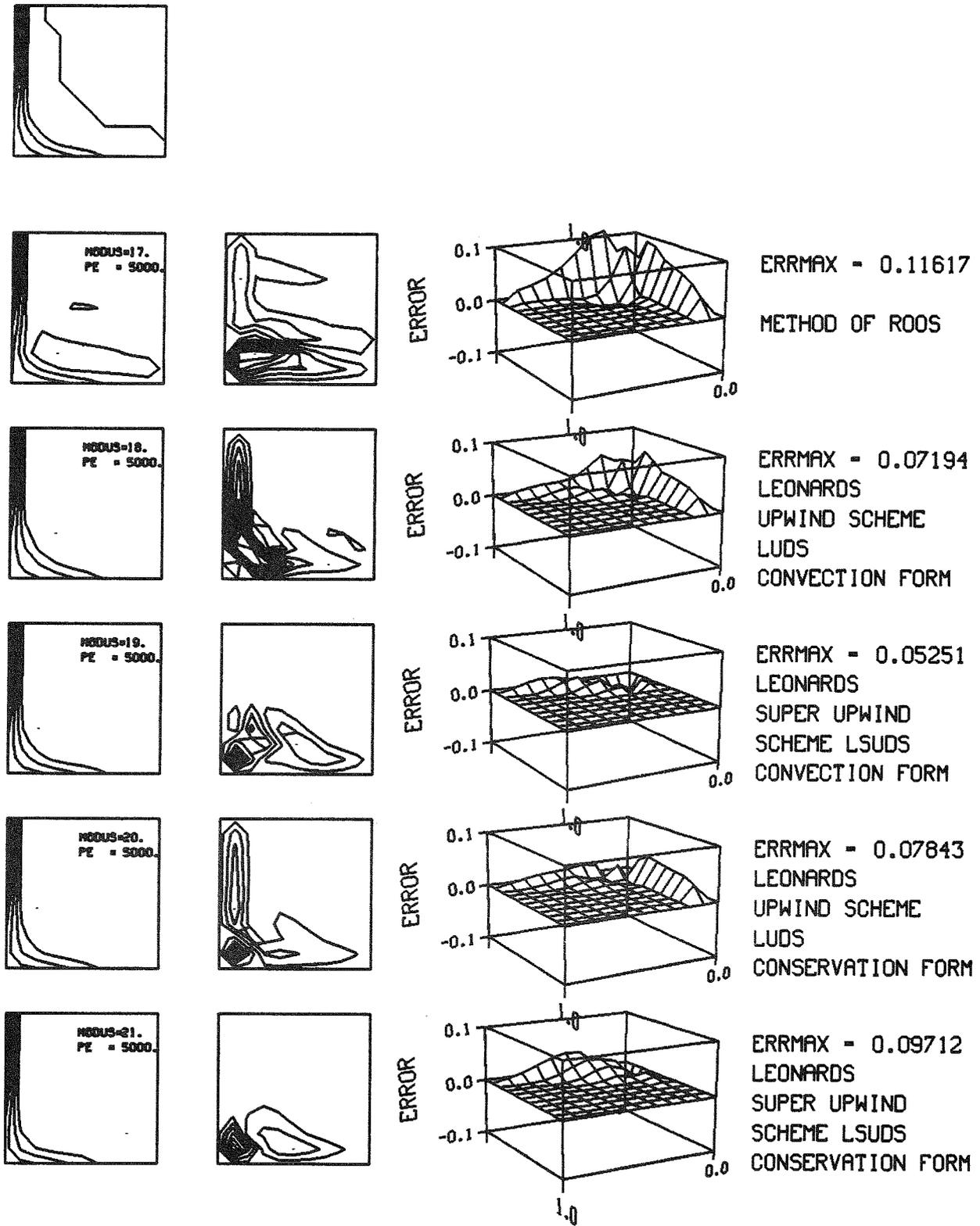


Abb. 3.14 (Fortsetzung)

Funktionen sind sehr ähnlich, El-Mistikawy-Werle hat wie das Verfahren von Berger noch ein spitzes lokales Minimum. Hybride und Upwind-Verfahren stimmen jeweils, soweit es das Auge erkennen kann, überein. Die Verfahren mit maximalem Fehler < 0.1 zeigen hier folgende Reihung

LSUDS	$5.2 \cdot 10^{-2}$
LECUSSO-C	$5.3 \cdot 10^{-2}$
LECUSSO	$5.7 \cdot 10^{-2}$
QUICK-PLUS	$7.0 \cdot 10^{-2}$
LUDS	$7.2 \cdot 10^{-2}$
UPWIND-C	$7.9 \cdot 10^{-2}$
(Hybrid-C)	
GUSHCHIN	$8.7 \cdot 10^{-2}$
LSUDS-C	$9.7 \cdot 10^{-2}$

Die modifizierten Differenzgleichungen von LUDS und LSUDS am Rande sind, wie bei Barrett [4] vermutet, nicht die bestmöglichen. Es muß hier ergänzt werden, daß die versuchsweise Verwendung anderer Differenzennäherungen am Rande für LUDS-C und LSUDS-C teilweise bessere Ergebnisse erbracht hat.

Die nachfolgenden drei Tabellen enthalten alle erfaßten Zahlenwerte der maximalen örtlichen Abweichungen für die drei Diskretisierungen $M=N=11$, $M=N=21$ und $M=N=31$.

$\Delta x \cdot \sqrt{Re'}$	0.45	0.71	1.42	2.	3.16	5.47	7.07
MODUS Re'	20	50	200	400	1000	3000	5000
1	0.29E-2	0.12E-1	0.57E-1	0.81E-1	0.14	0.43	0.71
2	0.12E-1	0.23E-1	0.50E-1	0.68E-1	0.94E-1	0.13	0.15
3	0.15E-2	0.44E-2	0.14E-1	0.23E-1	0.57E-1	0.41E-1	0.57E-1
4	0.13E-2	0.32E-2	0.25E-1	0.41E-1	0.40E-1	0.16	0.32
5	0.1E-1	0.15E-1	0.30E-1	0.40E-1	0.60E-1	0.82E-1	0.79E-1
6	0.13E-2	0.32E-2	0.25E-1	0.42E-1	0.40E-1	0.16	0.32
7	0.1E-1	0.15E-1	0.30E-1	0.40E-1	0.60E-1	0.82E-1	0.79E-1
8	0.29E-2	0.13E-1	0.43E-1	0.53E-1	0.86E-1	0.13	0.15
9	0.13E-2	0.11E-1	0.34E-1	0.58E-1	0.10	0.91E-1	0.79E-1
10	0.28E-2	0.11E-1	0.42E-1	0.58E-1	0.75E-1	0.10	0.13
10a	0.87E-2	0.27E-1	0.66E-1	0.94E-1	0.14	0.21	0.24
11	0.32E-2	0.90E-2	0.22E-1	0.45E-1	0.77E-1	0.16	0.20
12	0.22E-2	0.63E-2	0.21E-1	0.38E-1	0.74E-1	0.13	0.12
12a	0.37E-2	0.85E-2	0.24E-1	0.38E-1	0.71E-1	0.11	0.11
13	0.84E-3	0.19E-2	0.80E-2	0.13E-1	0.33E-1	0.43E-1	0.70E-1
14	0.29E-2	0.99E-2	0.21E-1	0.30E-1	0.62E-1	0.58E-1	0.87E-1
15	0.81E-3	0.15E-2	0.60E-2	0.13E-1	0.35E-1	0.44E-1	0.53E-1
16	0.46E-2	0.14E-1	0.11	0.31	0.85E-1	0.10E + 7	-
17	0.57E-2	0.13E-1	0.48E-1	0.72E-1	0.11	0.10	0.12
18	0.33E-2	0.69E-2	0.19E-1	0.21E-1	0.45E-1	0.54E-1	0.72E-1
19	0.12E-2	0.45E-2	0.10E-1	0.19E-1	0.57E-1	0.65E-1	0.53E-1
20	0.31E-2	0.51E-2	0.15E-1	0.20E-1	0.43E-1	0.54E-1	0.78E-1
21	0.51E-3	0.16E-2	0.61E-2	0.17E-1	0.44E-1	0.88E-1	0.97E-1

Tabelle 3.1: Maximaler absoluter ortsabhängiger Fehler für alle untersuchten Methoden, die sieben Werte von Re' ($\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$) und $M = N = 11$. Der Wert von MODUS in der ersten Spalte ganz links bezieht sich auf die Numerierung der untersuchten Verfahren in Anhang 1.

$\Delta x \cdot \sqrt{Re'}$	0.22	0.35	0.71	1.	1.58	2.74	3.54
MODUS Re'	20	50	200	400	1000	3000	5000
1	0.76E-3	0.27E-2	0.18E-1	0.40E-1	0.84E-1	0.12	0.21
2	0.71E-2	0.13E-1	0.31E-1	0.44E-1	0.66E-1	0.99E-1	0.11
3	0.41E-3	0.11E-2	0.52E-2	0.96E-2	0.18E-1	0.46E-1	0.65E-1
4	0.31E-3	0.85E-3	0.60E-2	0.13E-1	0.39E-1	0.38E-1	0.61E-1
5	0.50E-2	0.77E-2	0.16E-1	0.22E-1	0.36E-1	0.59E-1	0.76E-1
6	0.31E-3	0.85E-3	0.60E-2	0.13E-1	0.39E-1	0.38E-1	0.61E-1
7	0.50E-2	0.77E-2	0.16E-1	0.22E-1	0.36E-1	0.59E-1	0.76E-1
8	0.76E-3	0.24E-2	0.22E-1	0.44E-1	0.56E-1	0.77E-1	0.108
9	0.31E-3	0.29E-2	0.11E-1	0.21E-1	0.50E-1	0.88E-1	0.13
10	0.77E-3	0.31E-2	0.15E-1	0.30E-1	0.53E-1	0.77E-1	0.87E-1
10a	0.31E-2	0.11E-1	0.36E-1	0.56E1	0.88E-1	0.15	0.20
11	0.83E-3	0.20E-2	0.97E-2	0.16E-1	0.36E-1	0.78E-1	0.11
12	0.57E-2	0.17E-2	0.69E-2	0.13E-1	0.28E-1	0.67E-1	0.96E-1
12a	0.12E-2	0.30E-2	0.97E-2	0.16E-1	0.31E-1	0.67E-1	0.89E-1
13	0.22E-3	0.35E-3	0.20E-2	0.38E-2	0.79E-2	0.25E-1	0.37E-1
14	0.76E-3	0.27E-2	0.12E-1	0.18E-1	0.25E-1	0.65E-1	0.71E-1
15	0.23E-3	0.40E-3	0.14E-2	0.30E-2	0.79E-2	0.28E-1	0.44E-1
16	0.12E-2	0.33E-2	0.14E-1	0.29E-1	0.58E-1	0.21E-1	0.46E + 7
17	0.23E-2	0.56E-2	0.15E-1	0.31E-1	0.72E-1	0.13	0.14
18	0.69E-3	0.20E-2	0.72E-2	0.14E-1	0.20E-1	0.40E-1	0.62E-1
19	0.22E-3	0.85E-3	0.50E-2	0.83E-2	0.13E-1	0.45E-1	0.69E-1
20	0.65E-3	0.15E-2	0.60E-2	0.12E-1	0.17E-1	0.38E-1	0.61E-1
21	0.13E-3	0.40E-3	0.13E-2	0.23E-2	0.92E-2	0.40E-1	0.56E-1

Tabelle 3.2: Maximaler absoluter ortsabhängiger Fehler für alle untersuchten Methoden, die sieben Werte von Re' ($\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$) und $M = N = 21$. Der Wert von MODUS in der ersten Spalte ganz links bezieht sich auf die Numerierung der untersuchten Verfahren in Anhang 1.

$\Delta x \cdot \sqrt{\text{Re}'}$	0.15	0.24	0.47	0.67	1.05	1.83	2.35
MODUS Re'	20	50	200	400	1000	3000	5000
1	0.31E-3	0.11E-2	0.66E-2	0.17E-1	0.47E-1	0.10	0.95E-1
2	0.50E-2	0.94E-2	0.22E-1	0.33E-1	0.51E-1	0.79E-1	0.96E-1
3	0.19E-3	0.58E-3	0.24E-2	0.49E-2	0.11E-1	0.22E-1	0.35E-1
4	0.14E-3	0.33E-3	0.29E-2	0.68E-2	0.17E-1	0.47E-1	0.44E-1
5	0.34E-2	0.53E-2	0.11E-1	0.16E-1	0.27E-1	0.43E-1	0.54E-1
6	0.14E-3	0.33E-3	0.29E-2	0.68E-2	0.17E-1	0.47E-1	0.44E-1
7	0.14E-3	0.33E-3	0.29E-2	0.68E-2	0.17E-1	0.47E-1	0.44E-1
8	0.33E-3	0.11E-2	0.88E-2	0.21E-1	0.45E-1	0.63E-1	0.75E-1
9	0.14E-3	0.38E-3	0.67E-2	0.99E-2	0.30E-1	0.63E-1	0.76E-1
10	0.34E-3	0.14E-2	0.82E-2	0.15E-1	0.34E-1	0.62E-1	0.73E-1
10a	0.15E-2	0.63E-2	0.23E-1	0.37E-1	0.65E-1	0.107	0.134
11	0.37E-3	0.86E-3	0.42E-2	0.87E-2	0.17E-1	0.51E-1	0.85E-1
12	0.26E-3	0.78E-3	0.35E-2	0.66E-2	0.15E-1	0.41E-1	0.58E-1
12a	0.56E-3	0.16E-2	0.56E-2	0.97E-2	0.20E-1	0.42E-1	0.58E-1
13	0.10E-3	0.17E-3	0.72E-3	0.17E-2	0.52E-2	0.96E-2	0.18E-1
14	0.33E-3	0.11E-2	0.62E-2	0.13E-1	0.20E-1	0.41E-1	0.58E-1
15	0.11E-3	0.18E-3	0.64E-3	0.14E-2	0.36E-2	0.11E-1	0.20E-1
16	0.54E-3	0.14E-2	0.56E-2	0.13E-1	0.33E-1	0.64E-1	0.74E-1
17	0.12E-2	0.31E-2	0.97E-2	0.15E-1	0.38E-1	0.88E-1	0.12
18	0.27E-3	0.79E-3	0.41E-2	0.69E-2	0.15E-1	0.23E-1	0.29E-1
19	0.69E-4	0.21E-3	0.18E-2	0.45E-2	0.91E-2	0.18E-1	0.33E-1
20	0.25E-3	0.62E-3	0.32E-2	0.54E-2	0.13E-1	0.22E-1	0.25E-1
21	0.72E-4	0.16E-3	0.65E-3	0.12E-2	0.26E-2	0.16E-1	0.32E-1

Tabelle 3.3: Maximaler absoluter ortsabhängiger Fehler für alle untersuchten Methoden, die sieben Werte von Re' ($\tau \equiv \lambda \equiv 1$) und $M = N = 31$. Der Wert von MODUS in der ersten Spalte ganz links bezieht sich auf die Numerierung der untersuchten Verfahren in Anhang 1.

4. Test der Differenzenverfahren für einen Fall ohne Grenzschicht

Der Vergleich mit den Ergebnissen anderer Vergleichsrechnungen und Tests von Differenzenverfahren legt es nahe, eine etwas weniger umfangreiche Serie von Testrechnungen für das Testbeispiel für eine Parameterkombination von λ und Γ bei gleichbleibenden $Re' = u(\lambda \cdot \Gamma)^{1/2}$ durchzuführen und auch diese Ergebnisse kritisch zu bewerten. Zu diesem Zweck wurde Re' und $\lambda \cdot \Gamma = 1$ beibehalten, jedoch $\lambda \equiv 0.05$ und $\Gamma \equiv 20$ gewählt. Dies entspricht einer wesentlich größeren Diffusivität, während sich die Temperatur am linken und unteren Rand wenig ändert. Die exakten Lösungen für $Re' = 20, 50, 200, 400, 1000, 3000, 5000$ sind schon in Abbildung 2.4 dargestellt worden.

Die Ergebnisse dieses Tests für $M = N = 11$ sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Für Verfahren, die in irgendeiner Weise als fortgeschrittene Verfahren bezeichnet werden können, sind für Werte von $\sqrt{(Re') \cdot \Delta x} \geq 1$ die Ergebnisse (maximaler Fehler) in Abbildung 4.1 gezeichnet.

Das erstaunliche an diesen Rechnungen ist, daß bestimmte Erkenntnisse, die für $\lambda \equiv 1$ zutreffen, nicht mehr gelten.

Es zeigt sich, daß bei vielen Differenzenverfahren, welche hier mit einer Konvektionsform und einer Erhaltungsform vertreten sind, die Erhaltungsform über größere Bereiche von Re' die schlechteren Ergebnisse bringt, wenn man als Vergleichsmaßstab (wie in Abschnitt 3) den maximalen örtlichen Fehler wählt. Dies gilt für CDS, UDS, LECUSSO, LUDS und LSUDS, eine gewisse Ausnahme bilden das Verfahren von Allen-Southwell und das von El-Mistikawy-Werle, bei denen das erhaltungstreue zweitgenannte Verfahren meist besser liegt.

Bezüglich des Vergleichs der verschiedenen Verfahren kann hier festgestellt werden, daß die konvektive Form von LSUDS die besten Ergebnisse bringt, an zweiter Stelle liegt das LECUSSO-Verfahren. Mit steigendem Parameter $\sqrt{Re'} \cdot \Delta x$ nähern sich die Erhaltungsformen und konvektive Formen.

Alle Verfahren scheinen die Steigung 2 zu haben, auch das Upwind-Verfahren 2. Ordnung. Das deutet darauf hin, daß der diffusive Prozeß überwiegt und der konvektive Prozeß in dem untersuchten Parameterbereich eine untergeordnete Rolle spielt.

- LECUSSO-SCHEME
- ↑ UPWIND 1.ORDER, CONVECTION FORM
- × CENTRAL DIFFERENCES, CONVECTION FORM
- | LECUSSO-SCHEME, CONSERVATION FORM
- * QUICK-PLUS-SCHEME, CONSERVATION FORM
- ' LUDS-SCHEME, CONVECTION FORM
- △ LSUDS-SCHEME, CONVECTION FORM
- + LUDS-SCHEME, CONSERVATION FORM
- × LSUDS-SCHEME, CONSERVATION FORM

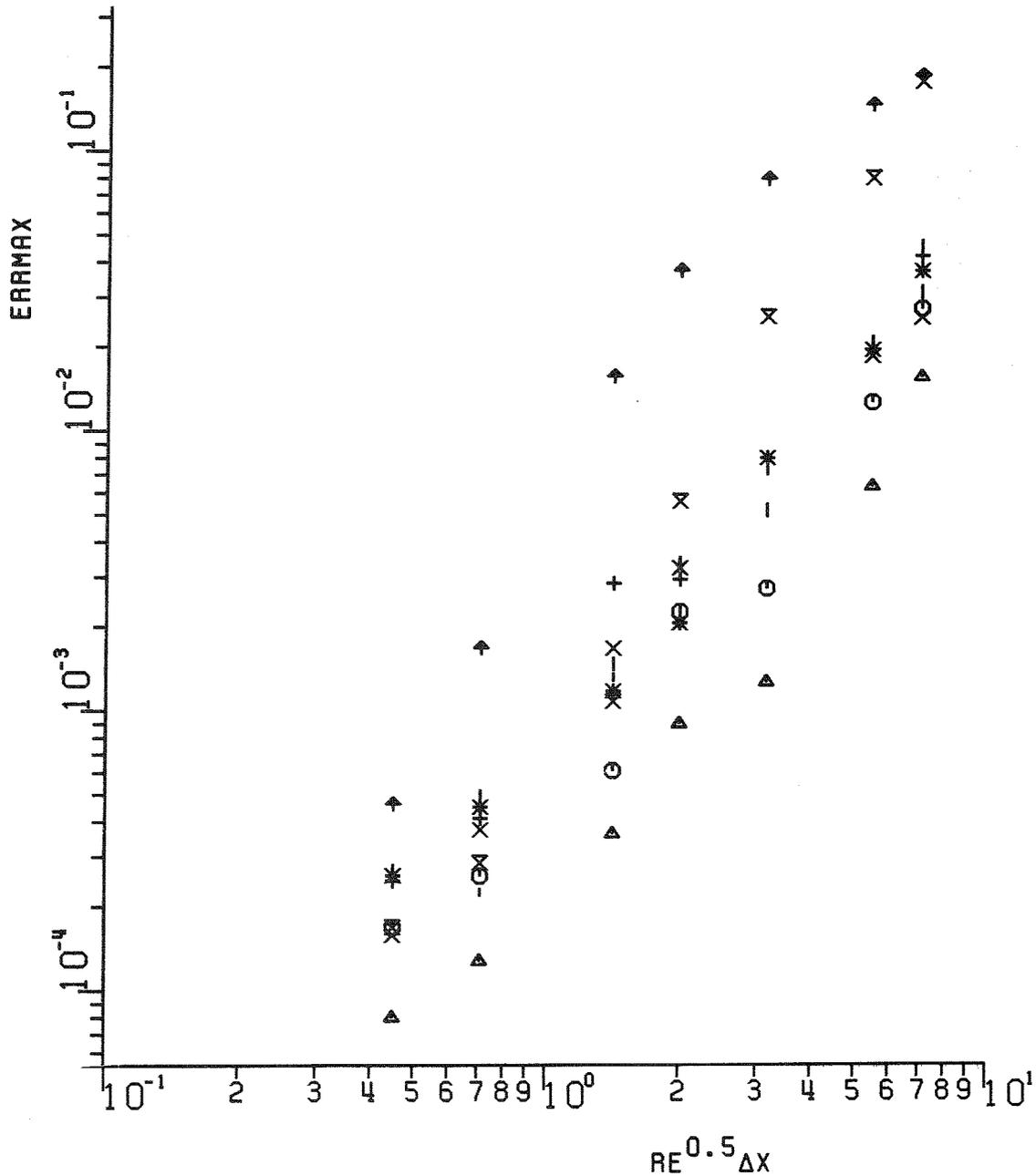


Abb. 4.1 "Beispiel ohne Grenzschichten"
 Maximaler örtlicher Fehler über $\sqrt{Re} \cdot \Delta x$
 Testbeispiel mit $\Gamma \equiv 20$, $\lambda \equiv 0.05$, $M = N = 11$

$\Delta x \cdot \sqrt{\text{Re}'}$	0.45	0.71	1.42	2.	3.16	5.47	7.07
MODUS Re'	20	50	200	400	1000	3000	5000
1	0.17E-3	0.29E-3	0.11E-2	0.57E-2	0.26E-1	0.82E-1	0.18
2	0.47E-3	0.17E-2	0.16E-1	0.38E-1	0.81E-1	0.15	0.19
3	0.17E-3	0.26E-3	0.62E-3	0.23E-2	0.28E-2	0.13E-1	0.28E-1
4	0.21E-3	0.43E-3	0.17E-2	0.31E-2	0.13E-1	0.57E-1	0.72E-1
5	0.10E-2	0.32E-2	0.21E-1	0.20E-1	0.37E-1	0.57E-1	0.75E-1
6	0.29E-3	0.59E-3	0.21E-2	0.39E-2	0.14E-1	0.59E-1	0.73E-1
7	0.92E-3	0.30E-2	0.12E-1	0.19E-1	0.36E-1	0.57E-1	0.75E-1
8	0.17E-3	0.29E-3	0.11E-2	0.57E-2	0.31E-1	0.11	0.17
9	0.39E-3	0.59E-3	0.21E-2	0.39E-2	0.30E-1	0.49E-1	0.72E-1
10	0.17E-3	0.31E-3	0.74E-3	0.20E-2	0.16E-1	0.62E-1	0.96E-1
11	0.39E-3	0.80E-3	0.63E-2	0.16E-1	0.29E-1	0.35E-1	0.50E-1
12	0.28E-3	0.48E-3	0.74E-3	0.33E-2	0.13E-1	0.20E-1	0.30E-1
13	0.26E-3	0.46E-3	0.12E-2	0.21E-2	0.82E-2	0.20E-1	0.38E-1
14	0.17E-3	0.29E-3	0.11E-2	0.57E-2	0.14E-1	0.42E-1	0.53E-1
15	0.27E-3	0.50E-3	0.15E-2	0.23E-2	0.53E-2	0.21E-1	0.32E-1
16	-	-	-	-	-	-	-
17	0.12E-3	0.32E-3	0.43E-2	0.15E-1	0.49E-1	0.12	0.16
18	0.17E-3	0.22E-3	0.13E-2	0.34E-2	0.71E-2	0.21E-1	0.46E-1
19	0.81E-4	0.13E-3	0.37E-3	0.92E-3	0.13E-2	0.65E-2	0.16E-1
20	0.25E-3	0.42E-3	0.29E-2	0.30E-2	0.82E-2	0.20E-1	0.43E-1
21	0.16E-3	0.38E-3	0.17E-2	0.33E-2	0.82E-2	0.19E-1	0.26E-1

Tabelle 4.1: Maximaler absoluter ortsabhängiger Fehler für alle untersuchten Methoden, die sieben Werte von Re' ($\Gamma \equiv 20$, $\lambda \equiv 0.05$) und $M = N = 11$. Der Wert von MODUS in der ersten Spalte ganz links bezieht sich auf die Numerierung der untersuchten Verfahren in Anhang 1.

5. Ergebnisse der Tests der Vierpunktverfahren von der Ordnung $O(\Delta x^2)$

Um die Richtigkeit der Überlegungen zur Wahl des spezifischen Parameters Λ für das LECUSSO-Verfahren [11] zu untersuchen, wurde eine Reihe von Tests gemacht, bei denen ein global gültiges Λ variiert wurde oder ein ortsabhängiges Λ in noch näher zu beschreibender Form gewählt wurde. Diese numerischen Tests wurden für $\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$ und $M = N = 11$ durchgeführt.

Im ersten Test wurde für $\Lambda = 0$ (CDS), $\Lambda = 1/8$ (Leonard), $\Lambda = 1/6$ (Agarwal), $\Lambda = 1/2$ (Atias et al.) sowie das LECUSSO-Verfahren das Testproblem für verschiedene Re' gelöst und daraus der maximale örtliche Fehlerbetrag entnommen. Die gefundenen maximalen absoluten Fehler sind in nachfolgender Tabelle angegeben.

Re'	20	50	200	400	1000	3000	5000
$\Lambda = 0$	0.29E-2	0.12E-1	0.57E-1	<u>0.81E-1</u>	<u>0.14</u>	<u>0.43</u>	<u>0.71</u>
$\Lambda = 0.125$	0.14E-2	0.50E-2	0.26E-1	<u>0.36E-1</u>	<u>0.73E-1</u>	<u>0.18</u>	<u>0.23</u>
$\Lambda = 0.166\dots$	0.10E-2	0.33E-2	0.20E-1	<u>0.30E-1</u>	<u>0.63E-1</u>	<u>0.14</u>	<u>0.18</u>
LECUSSO	0.15E-2	0.44E-2	0.14E-1	0.23E-1	0.57E-1	0.87E-1	0.57E-1
$\Lambda = 0.5$	0.38E-2	0.63E-2	0.20E-1	0.33E-1	0.62E-1	0.67E-1	0.85E-1

Tabelle 5.1: Maximaler absoluter Fehler für die numerische Lösung des Testproblems mit $\lambda \equiv \Gamma \equiv 1$ und $M = N = 11$ für verschiedene Re' und verschiedene, durch die Wahl von Λ spezifizierte Verfahren. Unterstrichene Werte gehören zu numerischen Lösungen mit "wiggles".

Eine weitere Tabelle (Tabelle 5.2) enthält zwar nur die Werte für $Re' = 50, 400, 500$, jedoch ist die Tabelle ergänzt durch Werte von Λ von 0.25 und 0.35.

Höhenlinien der numerischen Lösung und deren ortsabhängiger Fehler für die verschiedenen Upwindverfahren für die beiden Werte $Re' = 400$ und $Re' = 5000$ sowie 3-d-Plots des Fehlers sind in den Abbildungen 5.1 und 5.2 gezeigt, wobei die Höhenlinienplots sehr deutlich die "wiggles" von CDS, QUICK-Verfahren und Agarwal-Verfahren aufdecken.

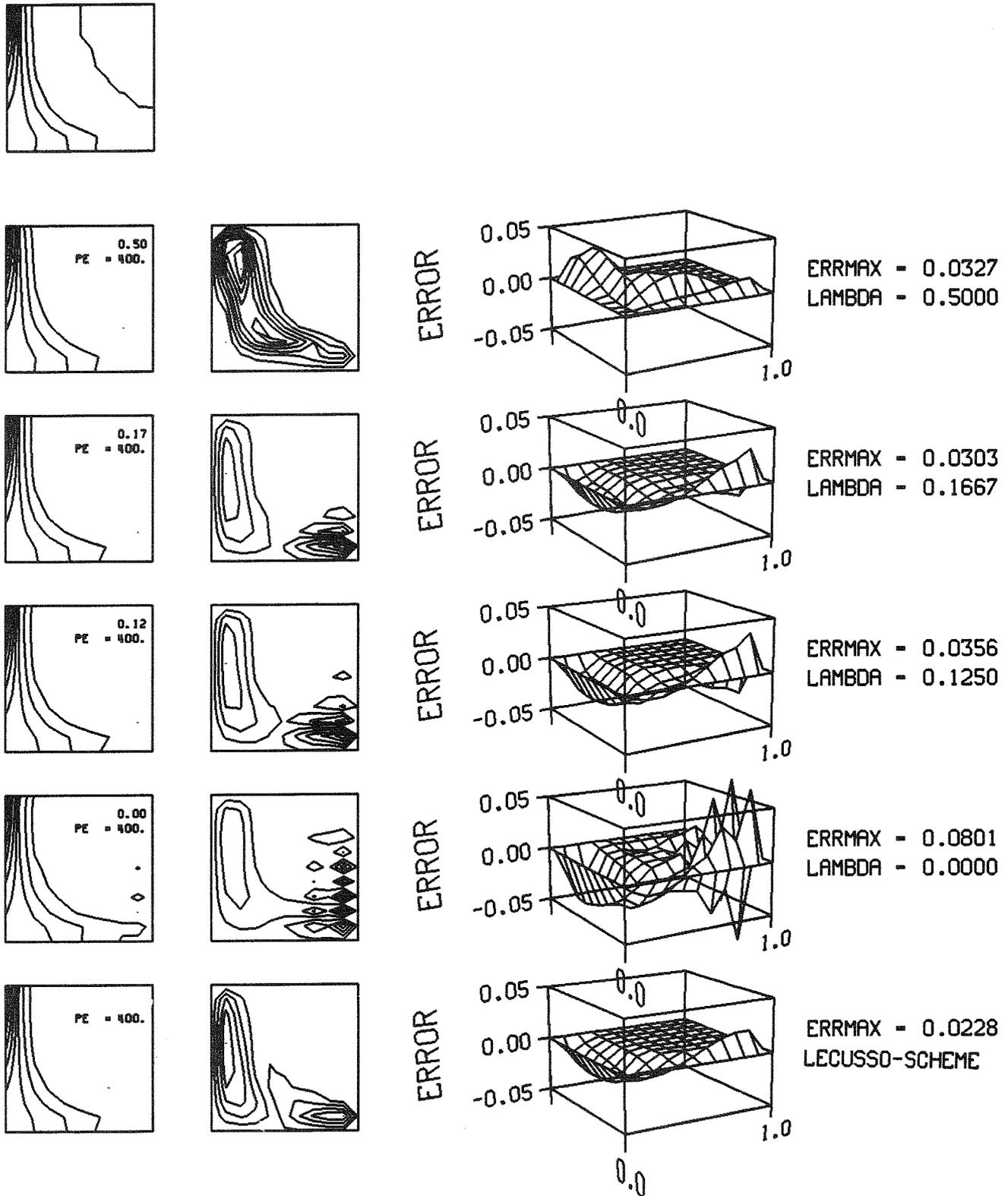


Abb. 5.1 Vergleich der numerischen Lösung und deren Fehler für CDS ($\Lambda = 0$), Leonard (QUICK, $\Lambda = 1/8$), Agarwal ($\Lambda = 1/6$), Atias et al. ($\Lambda = 1/2$) und LECUSSO-Verfahren für $Re' = 400$, $\lambda \equiv \Gamma \equiv 1$, $M = N = 11$, Höhenlinienplots, oben exakte Lösung auf diskrettem Gitter, links numerische Lösung, daneben (2. Spalte von links) der ortsabhängige numerische Fehler. Rechts (umgedreht) 3-d-Plot des örtlichen Fehlers.

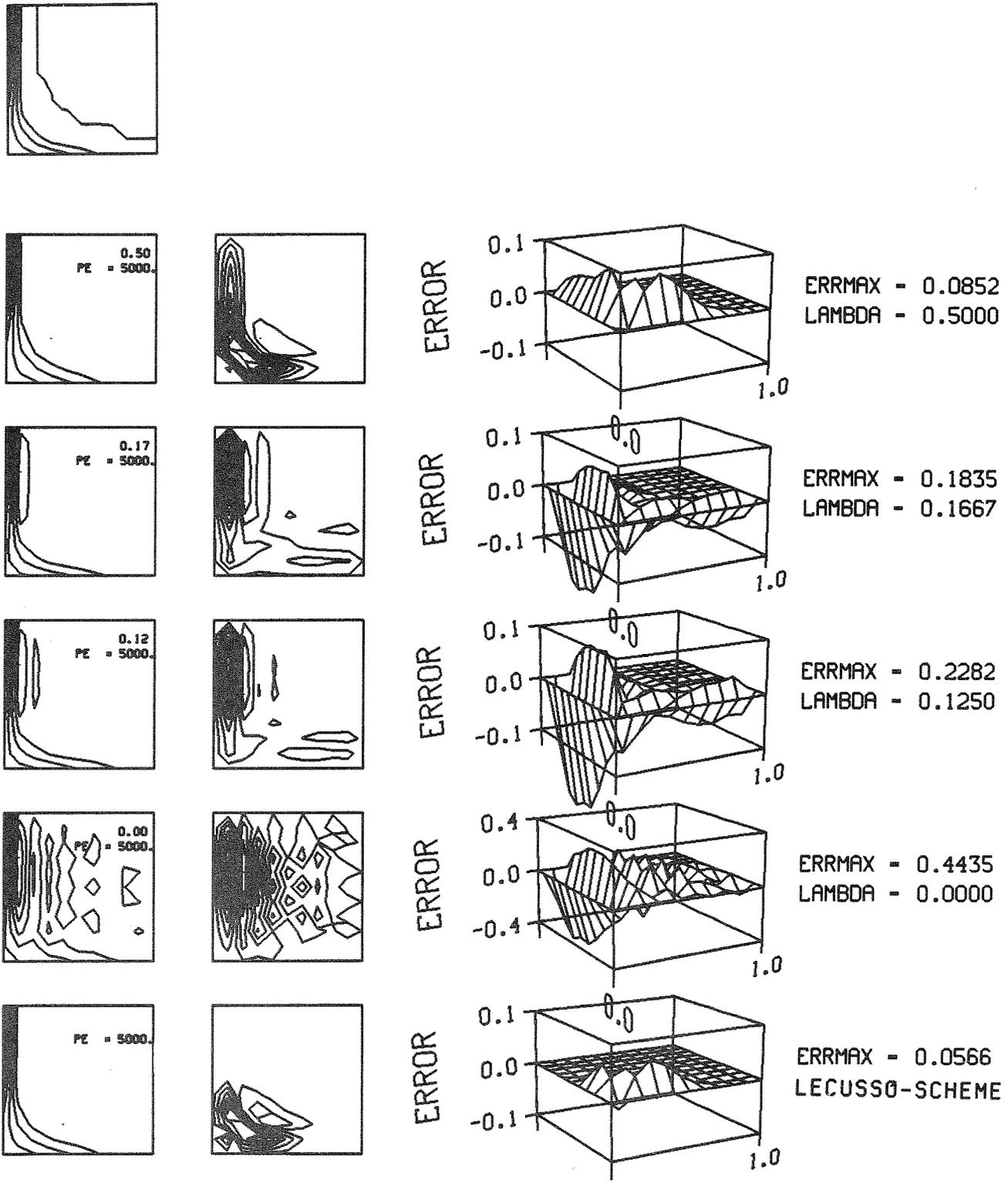


Abb. 5.2 Vergleich der numerischen Lösung und deren Fehler für CDS ($\Lambda = 0$), Leonard (QUICK, $\Lambda = 1/8$), Agarwal ($\Lambda = 1/6$), Atias et al. ($\Lambda = 1/2$) und LECUSSO-Verfahren für $Re' = 5000$, $\lambda \equiv \Gamma \equiv 1$, $M = N = 11$, Höhenlinienplots, oben exakte Lösung auf diskrettem Gitter, links numerische Lösung, daneben (2. Spalte von links) der ortsabhängige numerische Fehler. Rechts (umgedreht) 3-d-Plot des örtlichen Fehlers.

	Re'		
	50	400	5000
LECUSSO	0.0044	0.023	0.057
(CDS) $\Lambda = 0$	0.012	0.080	0.443
(Leonard) $\Lambda = 0.125$	0.0051	0.036	0.228
(Agarwal) $\Lambda = 0.166$	0.0033	0.030	0.184
$\Lambda = 0.25$	0.0012	0.023	0.109
$\Lambda = 0.35$	0.0031	0.017	0.043
(Atias) $\Lambda = 0.5$	0.0062	0.033	0.085

Tabelle 5.2 Maximaler absoluter Fehler für $Re = 50, 400, 5000$ für ausgesuchte Werte von Λ .

Noch ausführlicher ist die nachfolgende Tabelle 5.3, welche ebenfalls für $Re' = 50, 400, 5000, M=N=11, \Gamma \equiv \Gamma \equiv 1$ den maximalen ortsabhängigen absoluten Fehler der numerischen Lösung ausweist, hier jedoch mit einer relativ feinen Schrittweite in Λ .

Ergänzt werden die Angaben von Tabelle 5.3 durch die Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5, in denen die numerische Lösung des Standardtestbeispiels $\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$ mit $M=N=11$ für die Werte von $\Lambda = \Lambda_x = \Lambda_y$ zwischen 0 und 0.6, Schrittweite 0.1, enthalten ist.

Für $Re' = 50$ sehen eigentlich alle numerischen Näherungen gleich gut aus. Die Analyse des Fehlers zeigt, daß es für $0 \leq \Lambda \leq 0.2$ im Punkte (0.9, 0.1) numerisch instabiles Verhalten gibt, bei $\Lambda = 0.25$ finden wir den kleinsten Fehler, während sich für $\Lambda \leq 0.3$ ein größerer Bereich positiver Abweichungen und ein kleinerer mit etwa gleichstarken negativen Abweichungen ausbildet.

Für $Re' = 400$ ist der Bereich ortsabhängiger Oszillationen für $\Lambda \leq 0.1$ stärker ausgeprägt, aus den Höhenlinien sind örtliche Oszillationen bis $\Lambda = 0.3$ zu erkennen. Das Minimum des absoluten Fehlers erhält man für $\Lambda = 0.35$. Mit Ausnahme der Werte $0 \leq \Lambda \leq 0.1$ zeigt die Fehlerfunktion für alle übrigen Λ einen Bereich, der sich grob durch $0.5 \leq x, y \leq 1$ beschreiben läßt, in welcher der Fehler nahezu den Wert Null hat.

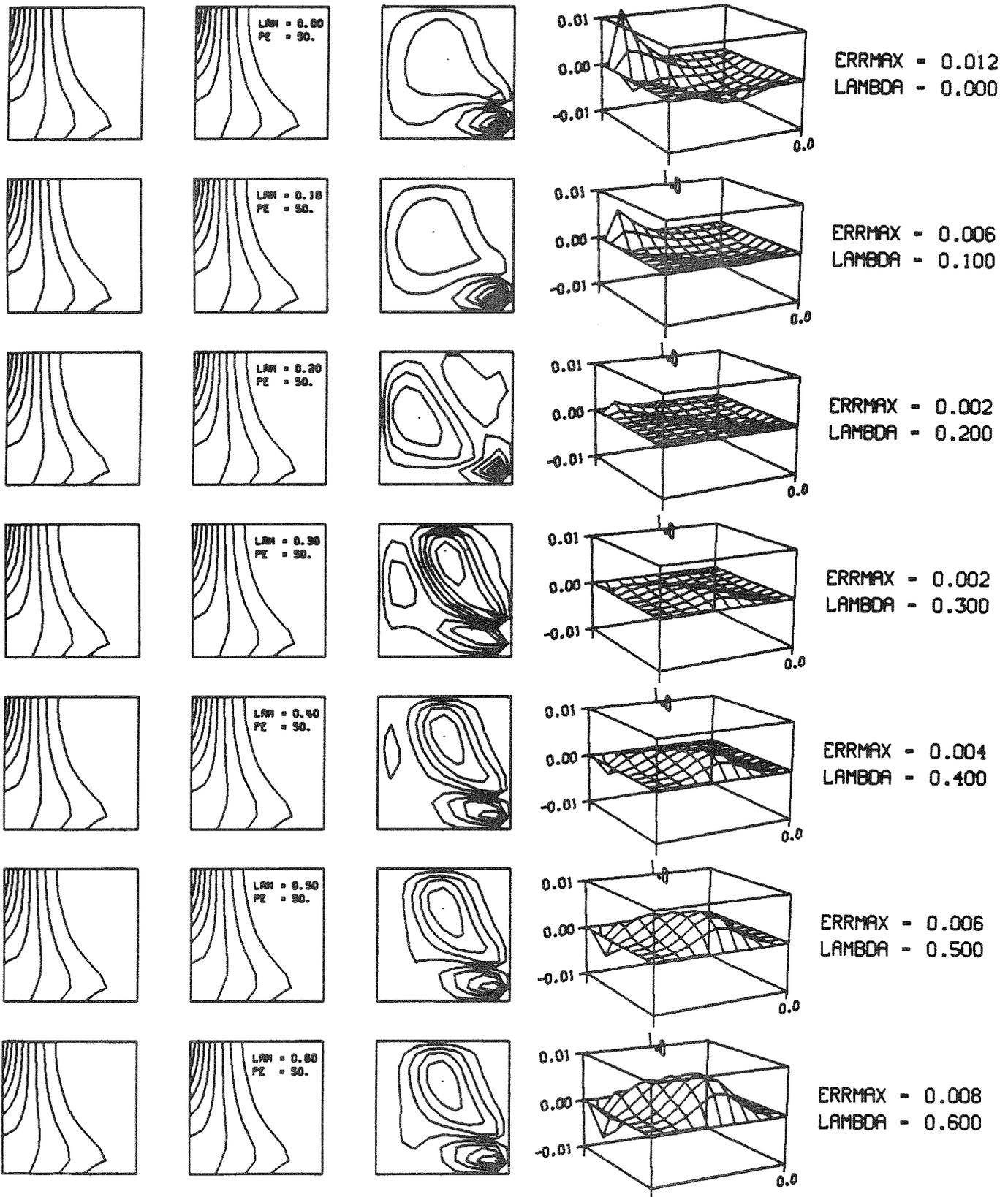


Abb. 5.3 $Re' = 50$, exakte Lösung auf diskretem Maschennetz (ganz linke Spalte), numerische Lösung mit $M = N = 11$ und $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda$ wie angegeben (zweite Spalte von links), Höhenlinien des Fehlers der numerischen Lösung (dritte Spalte von links) sowie 3-d-Bild des Fehlers, Grundbereich dabei um 180° gedreht.

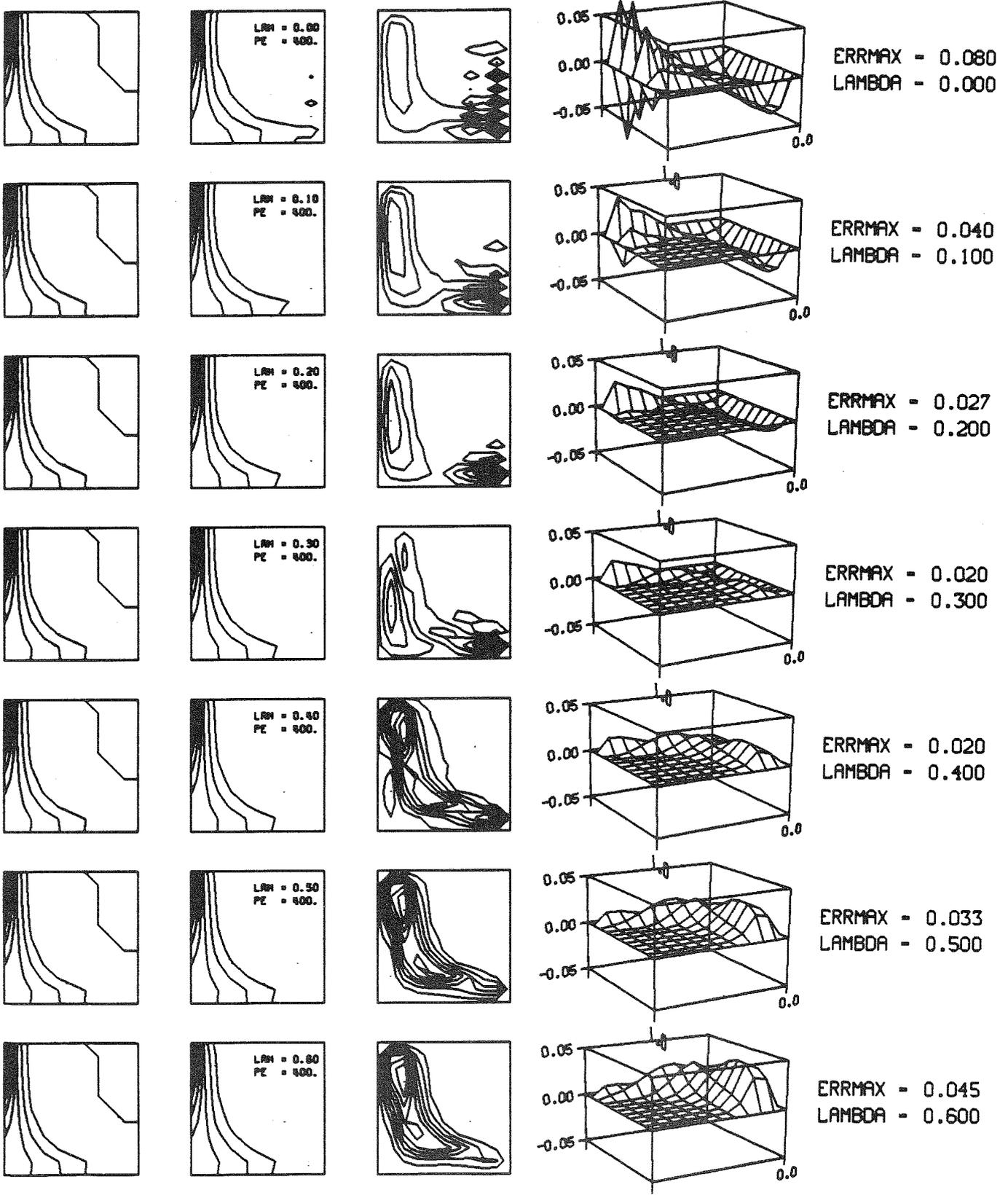


Abb. 5.4

$Re' = 400$, exakte Lösung auf diskretem Maschennetz (ganz linke Spalte), numerische Lösung mit $M = N = 11$ und $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda$ wie angegeben (zweite Spalte von links), Höhenlinien des Fehlers der numerischen Lösung (dritte Spalte von links) sowie 3-d-Bild des Fehlers, Grundbereich dabei um 180° gedreht.

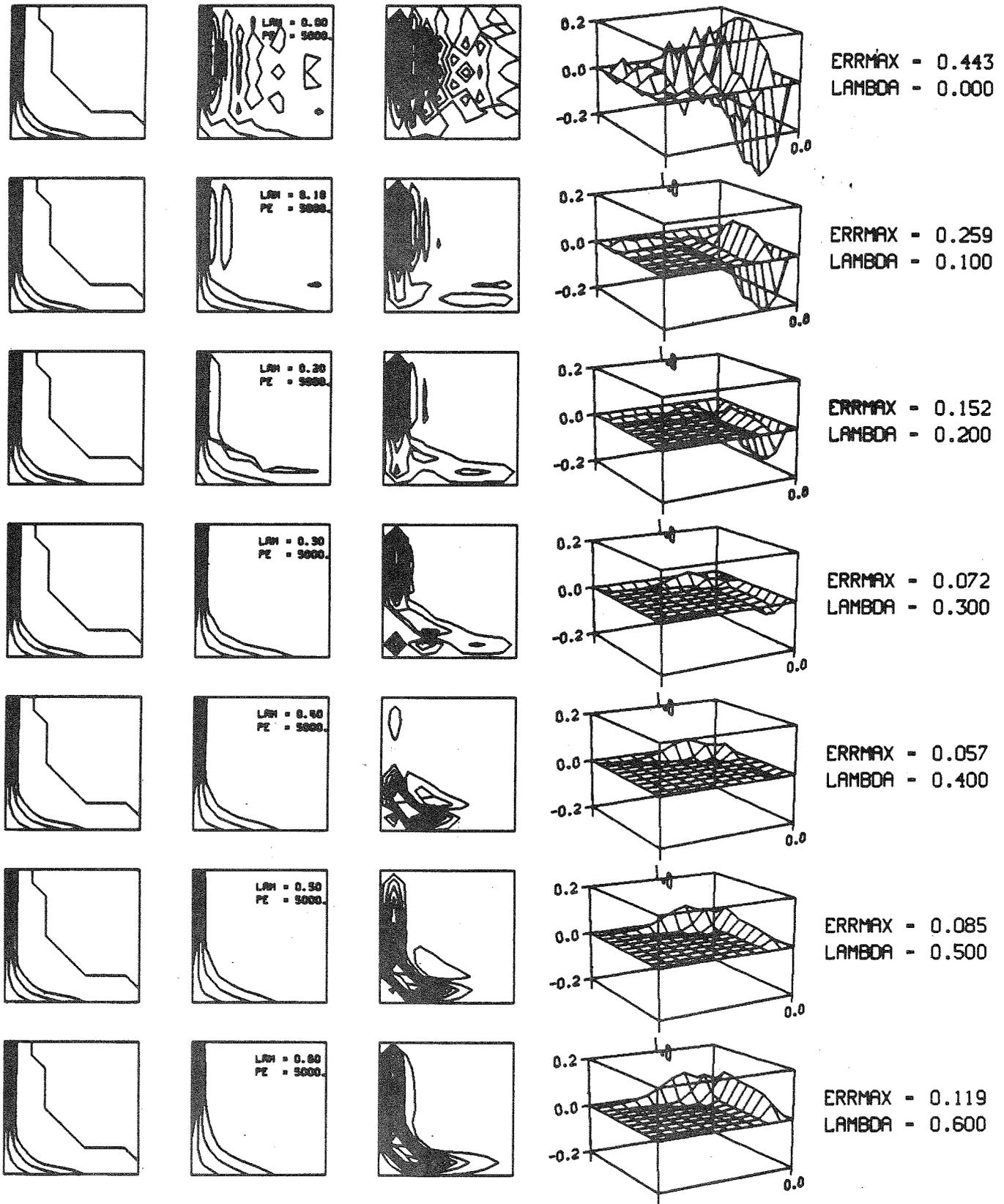


Abb. 5.5 $Re' = 5000$, exakte Lösung auf diskretem Maschennetz (ganz linke Spalte), numerische Lösung mit $M = N = 11$ und $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda$ wie angegeben (zweite Spalte von links), Höhenlinien des Fehlers der numerischen Lösung (dritte Spalte von links) sowie 3-d-Bild des Fehlers, Grundbereich dabei um 180° gedreht.

Λ	Re'		
	50	400	5000
0	1.20E-2	0.80E-1	4.44E-1
0.05	0.88E-2	0.51E-1	3.30E-1
0.10	0.62E-2	0.40E-1	2.59E-1
0.15	0.40E-2	0.32E-1	2.01E-1
0.20	0.21E-2	0.27E-1	1.52E-1
0.25	0.12E-2*	0.23E-1	1.09E-1
0.30	0.20E-2	0.20E-1	0.72E-1
0.35	0.31E-2	0.17E-1*	0.43E-1*
0.40	0.41E-2	0.20E-1	0.57E-1
0.45	0.52E-2	0.26E-1	0.70E-1
0.50	0.63E-2	0.33E-1	0.85E-1
0.55	0.73E-2	0.39E-1	1.03E-1
0.60	0.84E-2	0.45E-1	1.19E-1
0.65	0.94E-2	0.51E-1	1.35E-1
LECUSO	0.44E-2	0.23E-1	0.57E-1

Tabelle 5.3: Absolutbetrag des maximalen örtlichen Fehler der numerischen Lösung für $Re' = 50, 400$ und 5000 für äquidistante Werte von Λ . ($M = N = 11$, $\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$). Das jeweilige Minimum über Λ ist durch einen Stern (*) gekennzeichnet.

Entsprechendes läßt sich fast ohne Änderung für $Re' = 5000$ feststellen, außer daß für kleine Λ die örtlichen Oszillationen für $x > 0.3$ zweidimensional sind, während sie für $x \leq 0.3$ im wesentlichen eindimensional sind.

Es ist interessant festzustellen, daß man bei experimentierendem Variieren von Λ für alle Re erstens einen kleineren Minimalwert der maximalen Abweichung erhält als beim LECUSO-Verfahren und zweiten die Λ -Werte, welche dieses Minimum liefern, kleiner sind als beim LECUSO-Verfahren. Dazu ist zu bemerken, daß das LECUSO-Verfahren nicht als Verfahren mit minimalem Fehler sondern als Verfahren so gewählt wird, daß mit Sicherheit keine unphysikalischen örtlichen Oszillationen auftreten.

Neben der numerisch experimentellen Überprüfung des LECUSSO-Verfahrens wurde eine erhaltungstreue Form des Vierpunkt-Upwind-Verfahrens mit Parametern $\Lambda_{i+1/2}$ und $\Lambda_{i-1/2}$ entwickelt. Das Verfahren, wie man aus einem Differenzenschema in Konvektionsform das entsprechende in Erhaltungsform konstruiert, ist in Anhang 3 beschrieben. Wir beschränken uns hier bei der Erläuterung auf den eindimensionalen Fall mit positiven Geschwindigkeiten und fassen noch einmal alle Formeln zusammen.

Die Vierpunktformel von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ mit Punkten $i+1, i, i-1, i-2$ lautet

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\Delta x, i} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \Lambda_i \right) \phi_{i+1} + 3\Lambda_i \phi_i - \left(3\Lambda_i + \frac{1}{2} \right) \phi_{i-1} - \Lambda_i \phi_{i-2} \right\} \\ - (\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) = 0, \end{aligned}$$

wo wegen der Ortsabhängigkeit von Λ hier Λ_i geschrieben wurde. Diese Näherung, zweidimensional, liegt den in Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3 beschriebenen Ergebnissen zugrunde.

Das LECUSSO-Verfahren in Erhaltungsform lautet:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_{i+\frac{1}{2}} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) \right\} \\ - \text{Re}_{\Delta x, i-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_{i-1}) - \Lambda_{i-\frac{1}{2}} (\phi_i + \phi_{i-2} - 2\phi_{i-1}) \right\} + \\ - (\phi_{i+1, j} + \phi_{i-1, j} - 2\phi_{i, j}) = 0 \end{aligned}$$

Die nachfolgende Tabelle 5.4 gibt das Ergebnis der Berechnungen für $\text{Re}' = 50, 400, 5000, M=N=11, \Gamma \equiv \lambda \equiv 1$ und bestimmte ausgewählte Werte von $\Lambda = \Lambda_{i+1/2} = \Lambda_{i-1/2}$ wieder, während für LECUSSO-C folgende Werte für $\Lambda_{i+1/2}$ und $\Lambda_{i-1/2}$ verwendet wurden ($\text{Re}_{\Delta x, i+1/2} > 0, \text{Re}_{\Delta x, i-1/2} > 0$ angenommen):

$$\Lambda_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{r_{i\pm\frac{1}{2}}}{\text{Re}_{\Delta x, i\pm\frac{1}{2}}} \frac{0.5 \text{Re}_{\Delta x, i\pm\frac{1}{2}} (r_{i\pm\frac{1}{2}} + 1) - (r_{i\pm\frac{1}{2}} - 1)}{(r_{i\pm\frac{1}{2}} - 1)^2}$$

mit $r_{i\pm 1/2} = \exp\{\text{Re}_{\Delta x, i\pm\frac{1}{2}}\}$

In Tabelle 5.4 ist jeweils links oben in den einzelnen Feldern der Wert der Version in Konvektionsform und der Wert des Verfahrens in Erhaltungsform rechts unten angegeben. Unterstreichung weist auf numerische Lösungen mit "wiggles" hin. Folgende Tendenzen sind feststellbar:

Δ \ Re'	50	400	5000
0	0.12E-1 0.32E-2	<u>0.81E-1</u> 0.41E-1	<u>0.71</u> 0.28
0.125	0.50E-2 0.19E-2	<u>0.36E-1</u> 0.24E-1	<u>0.23</u> 0.88E-1
0.1667	0.33E-2 0.19E-2	<u>0.30E-1</u> 0.20E-1	<u>0.18</u> 0.69E-1
0.5	0.63E-2 0.19E-1	0.33E-1 0.24E-1	0.85E-1 0.81E-1
LECUSO LECUSO-C	0.44E-2 0.15E-2	0.23E-1 0.13E-1	0.57E-1 0.53E-1

Tabelle 5.4 Absolutbetrag des maximalen örtlichen Fehlers für erhaltungstreue Formen des Vierpunktverfahrens jeweils rechts unten, links darüber zum Vergleich der entsprechende Wert für die konvektive Form des Verfahrens.

1. Die Erhaltungsform liegt immer besser als die konvektive Form, die Erhaltungsform liegt aber nur für kleine Re' um den Faktor 2 oder mehr besser als die Konvektionsform. Für große Re' wird der Unterschied marginal, vergleichbar den Ergebnissen für alle Verfahren.
2. Bei den erhaltungstreuen Formen ergibt LECUSO-C, verglichen mit den anderen Verfahren, den jeweils kleinsten absoluten numerischen Fehler.

Zur Abrundung der in diesem Kapitel zusammengestellten Ergebnisse wird wieder für das Standardtestbeispiel ($\Gamma \equiv \lambda \equiv 1$) und $M=N=11$ sowie $M=N=21$ das LECUSO-Verfahren mit SCUP (= Simple Consistent Upwind) verglichen. Während bei LECUSO z.B. für die x-Komponente

$$\Lambda_{x,i} = \frac{\rho}{Re_{\Delta x,i}} \frac{0.5 Re_{\Delta x,i} (\rho + 1) - (\rho - 1)}{(\rho - 1)^2}$$

mit $\rho = \exp\{Re_{\Delta x,i}\}$

gesetzt wird, wird bei SCUP die einfachere Form

$$\Lambda_{x,i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\operatorname{Re} \Delta_{x,i}},$$

verwendet. Offensichtlich ist für $r_i > 1$

$$\Lambda_{x,i}(\text{LECUSSO}) < \Lambda_{x,i}(\text{SCUP}).$$

Re'	M = N = 11		M = N = 21	
	LECUSSO	SCUP	LECUSSO	SCUP
20	0.15E-2	0.29E-2	0.41E-3	0.76E-3
50	0.44E-2	0.99E-2	0.11E-2	0.27E-2
200	0.14E-1	0.24E-1	0.52E-2	0.12E-1
400	0.23E-1	0.42E-1	0.96E-2	0.24E-1
1000	0.57E-1	0.99E-1	0.18E-1	0.32E-1
3000	0.87E-1	0.43E-1	0.46E-1	0.12
5000	0.57E-1	0.56E-1	0.65E-1	0.10

Tabelle 5.5 Vergleich des maximalen absoluten Fehlers von LECUSSO und SCUP-Verfahren.

In den meisten Fällen, abgesehen von einem Ausreißer, ist erkennbar, daß das LECUSSO-Verfahren besser liegt als SCUP.

Zusammenfassend für Kapitel 5 kann festgestellt werden, daß das LECUSSO-Verfahren in den untersuchten Fällen

- keine ortsabhängigen Oszillationen zeigt
- und in der Nähe der Lösung liegt, die bezüglich Λ den kleinstmöglichen maximalen ortsabhängigen Fehler liefert.

6. Folgerungen

1. Mit den Upwind-Verfahren höherer Ordnung lassen sich bessere numerische Ergebnisse erzielen als mit den Standard-Differenzenverfahren (CDS, UDS, hybrides Verfahren). Sie sind nachfolgend noch einmal, bezogen bzgl. der Punktezahl auf eine Raumdimension, aufgeführt. Die quantitativen Aussagen aus den numerischen Tests bezüglich der Upwindverfahren höherer Ordnung hängen davon ab, ob die Lösung des Testbeispiels eine Grenzschicht enthält oder nicht.

Punktezahl	Punktmuster	Koeffizienten	Name oder Autor
3	1 stromauf 1 stromab	variabel	Allen-Southwell, Samarski, El-Mistikawy-Werle
4	2 stromauf 1 stromab	fest	Atias, Agarwal, Leonard, Gushchin und Shchennikov
4	3 stromauf	fest	LUDS (Barrett)
4	2 stromauf 1 stromab	variabel	LECUSSO (Günther)
5	2 stromauf 2 stromab	fest	Roos
5	3 stromauf 1 stromab	variabel	LSUDS (Barrett)

Tabelle 6.1 Schematische Zusammenstellung der Upwind-Verfahren höherer Ordnung

In dem Falle mit Grenzschicht, das ist der praktisch interessierende Fall, ergibt sich folgendes:

Die Verfahren mit 4 oder 5 Punkten und variablen Koeffizienten in der jeweiligen Erhaltungsform - das sind LSUDS-C, LECUSSO-C und QUICK-PLUS - sind etwa von gleicher Qualität. Für kleine $Re_{\Delta x, i}$ liegt LSUDS-C etwas besser, für größere $Re_{\Delta x, i}$ zeigen QUICK-PLUS und LECUSSO-C etwas kleinere maximale ortsabhängige Fehler. Die drei Verfahren liegen in der Regel - es treten immer wieder Ausreißer auf - etwa um den Faktor 3 besser als das Schema von El-Mistikawy-Werle und LUDS-C. Diesen beiden

gegenüber ist das hybride Verfahren noch einmal (mit Ausnahme kleiner $Re_{\Delta x}$) um den Faktor zwei schlechter. Von den Verfahren in konvektiver Form liegt für kleine $Re_{\Delta x}$ LSUDS am besten vor LECUSSO und diese beiden vor LUDS.

Insgesamt liegen die Varianten der Differenzenverfahren in Erhaltungsform bei dem Beispiel mit Grenzschicht meist etwa um den Faktor 2 besser als die Versionen in Konvektionsform. Eine gewisse Ausnahme davon bilden LDUS und LSUDS.

Offensichtlich werden die exakten Lösungen beim Auftreten randnaher Grenzschichten durch Verfahren in Erhaltungsform, welche versetzte Maschengitter verwenden, besser approximiert als durch Verfahren in konvektiver Form. Dieses Ergebnis liegt im Rahmen bekannter Erfahrungen.

Vergleicht man Allen-Southwell, LECUSSO und LSUDS als lokal exakte Verfahren mit entweder 3, 4 oder 5 Punkten, so zeigt sich (bei den Konvektionsformen), daß LECUSSO und LSUDS nahezu immer um den Faktor zwei besser sind als Allen-Southwell (siehe z.B. Abbildung 3.9), nur für relativ kleine $Re_{\Delta x}$ ist LSUDS besser als LECUSSO. Der Grund für dieses etwa gleich gute Abschneiden mag an den nicht gut gewählten modifizierten Differenzgleichungen in Randnähe bei LSUDS liegen. Diese Tendenz tritt noch verstärkt bei den Erhaltungsformen auf, bei denen QUICK-PLUS und LECUSSO-C besser sind für größere $Re_{\Delta x}$ als LSUDS-C.

2. Bei dem Testbeispiel mit einer Parameterwahl von λ und Γ so, daß keine Grenzschicht auftritt, bleibt die interne Reihung der Verfahren in der gleichen Weise erhalten, nur liegen bei diesem Beispiel die Erhaltungsformen der Differenzenverfahren schlechter. Dies gilt für LECUSSO und seine Erhaltungsformen LECUSSO-C und QUICK-PLUS, sowie LUDS mit LUDS-C sowie LSUDS und LSUDS-C. Eine Ausnahme bilden hier Allen-Southwell und El-Mistikawy-Werle. Das letztgenannte Verfahren ist schlechter für kleine $Re_{\Delta x}$ und besser für große $Re_{\Delta x}$.

Dieses Ergebnis ist etwas überraschend und steht im Gegensatz zur (unbewiesenen) Lehrmeinung, daß Erhaltungsformen mit versetzten Maschengittern immer vorzuziehen seien. Möglicherweise liegt es daran, daß

bei dem Beispiel ($\Gamma=20$, $\lambda=0.05$) der konvektive Anteil am Gesamtprozeß nicht überwiegt. Auch beim Übergang von der Reynoldszahl $Re' = u/\Gamma\lambda$ zu einer mehr gebräuchlichen (entsprechend Abschnitt 1) $Re = u/(\Gamma\lambda)$, bei der Re dann um den Faktor 20 kleiner wird, (statt $\lambda=0.05$ im Nenner $l=1$. im Zähler) liegen die auftretenden Maschen-Reynoldszahlen häufig im Betrag noch weit über dem Wert zwei.

3. Eine Abwägung von Aufwand im Vergleich zum Nutzen für die Nicht-Standard-Verfahren ergibt folgendes:

Diese Verfahren benützen im Vergleich zu Standard-Verfahren in den Differenzgleichungen entweder mehr Punkte und/oder variable Koeffizienten, die oft auch die rechenintensivere Auswertung von Exponentialfunktionen verlangen, was sowohl zu komplizierterer Programmierung als auch zu mehr Rechenaufwand führt. Weil die Verwendung von Punkten außerhalb des üblichen Dreipunktemusters mit Basispunkt, rechtem und linkem Nachbar in der Nähe des Randes modifizierte Differenzgleichungen (bei LUDS und LSUDS zweierlei Typen) verlangt, werden die Programmierung und der Rechenaufwand ebenfalls erhöht.

Demgegenüber steht ein Gewinn des Faktors 5 über weite Bereiche von Re' und mindestens eines Faktors 2, wenn wir Differenzenverfahren in konvektiver Form vergleichen, und zwar LSUDS als bestem Verfahren mit dem hybriden Verfahren. Bei den Differenzenverfahren in Erhaltungsform liegt fast durchgehend ein Faktor von mindestens 4 zwischen dem hybriden Verfahren und QUICK-PLUS als einem der drei Spitzenreiter.

Insoweit scheint der Gewinn an Genauigkeit auch für Standardrechnungen gerechtfertigt. Auf der anderen Seite erlauben es die fortgeschrittenen Verfahren, bei vorgegebener Genauigkeit und vorgegebener diskreter Auflösung, zu Rechnungen mit höherer typischer Kennzahl überzugehen. Bei unserem Testbeispiel, beschränkt auf die Differenzenverfahren in Erhaltungsform, bringt der Übergang vom hybriden Verfahren zu QUICK-PLUS einen Gewinn in $Re'^{1/2}\cdot\Delta x$ von etwa 3, d.h. in Re' selbst etwa eine Größenordnung! -

Es gibt noch eine Menge von Erkenntnissen, die nicht von so großem Gewicht sind:

4. Die Testrechnungen haben gezeigt bzw. bestätigt, daß das Verfahren von Allen-Southwell nur geringfügig besser ist als das hybride Verfahren in

konvektiver Form (Abbildung 3.6). Für größere Maschen-Reynoldszahlen ist das El-Mistikawy-Werle-Verfahren über weite Bereiche besser als das hybride Verfahren in Erhaltungsform (Abbildung 3.7).

5. Das Verfahren FAM liegt etwa bei Allen-Southwell in der Genauigkeit, auch die örtliche Form des Fehlers ist ähnlich. Der rechnerische Aufwand, etwa das Hundert- bis Tausendfache des Aufwands anderer Verfahren, rechtfertigt es nicht, dieses Verfahren für Standardrechnungen zu benutzen.
6. Das Verfahren von Roos kommt für Standardrechnungen kaum in Frage, da seine Genauigkeit, verglichen mit dem hybriden Verfahren in Konvektionsform, kaum besser ist.
7. Sowohl für die Konvektionsformen wie für die Erhaltungsformen von LUDS und LSUDS ist eine Tendenz zu erkennen, daß die Differenzenapproximationen an Abströmrändern, wie in Barrett [4] vorgeschlagen, vielleicht nicht die bestmöglichen sind. Auch ist nicht klar, ob die Bildung von erhaltungstreuen Varianten bei fast rein einseitigen Näherungen noch sinnvoll ist.

Schlußwort

Am Schluß dieses relativ umfangreichen Tests bleibt festzustellen, daß die theoretische Analyse von Differenzenverfahren noch große Lücken aufweist. Man ist sehr schnell am Ende, wenn man bei der Analyse über die Dreipunkt-differenzensterne im Eindimensionalen und die Fünfpunktsterne im Zweidimensionalen hinausgeht. Selbst bei diesen einfachen Typen ist unklar, welches das beste invers-isotone Verfahren ist, siehe [37].

Viele Konvergenzaussagen im 1-d benützen die Annahme, daß der Koeffizient der ersten Ableitung (= die Geschwindigkeit) im Betrag nach unten durch eine positive Schranke begrenzt wird, eine in der Praxis nicht vorhandene Einschränkung.

Offensichtlich fehlt es auch an Aussagen in zwei Dimensionen, wenn das kontinuierliche Problem nichtnegative Lösungen hat und Differenzenverfahren numerische Lösungen mit eben dieser Eigenschaft liefern sollten.

Für die numerische Lösung transienter Konvektions-Diffusionsprobleme bestehen ebenfalls einige nicht gelöste Probleme, siehe z.B. [29]. Es müßte untersucht werden, welche Abweichungen bei transienten numerischen Lösungsverfahren auftreten, wenn dabei Approximationen verwendet werden, die bei der numerischen Lösung von stationären Problemen "wiggles" erzeugen!

LITERATURVERZEICHNIS

- /1/ Agarwal, R.K. 'A Third-order-accurate Upwind Scheme for Navier Stokes Solutions in Three Dimensions' in K.N.Ghia, T.J.Mueller and B.R.Patel(eds.): Computers in Flow Prediction and Fluid Dynamics Experiments. Proc. ASME winter meeting, Washington, 15. - 20.Nov. 1981, 73-82.
- /2/ Allen, D.N. de und Southwell, R.V., Relaxation Methods Applied to Determine the Motion, in Two Dimensions, of a Viscous Fluid past a Fixed Cylinder. Quart. J. Mech. Appl. Math. 8, 129-145, 1955.
- /3/ Atias, M., Wolfshtein, M. und Israeli, M., Efficiency of Navier-Stokes Solvers, AIAA Journal 15, 263-266, 1977.
- /4/ Barrett, K., 'Super Upwinding - Elements of Doubts und Discrete Differences of Opinion on the Numerical Muddling of the Incomprehensible Defective Confusion Equation' in Caldwell, J. und Moscardini, A.O.(eds.), Numerical Modelling in Diffusion Convection, Pentech Press, London, Plymouth, 33-48, 1982.
- /5/ Beier, R.A., Ris, J. de und Baum, H.R., Accuracy of Finite Difference Methods in Recirculating Flows. Num. Heat Transfer 6, 283-302, 1983.
- /6/ Berger, A.E., A Conservative Uniformly Accurate Difference Method for a Singular Perturbation Problem in Conservation Form, SIAM J. Numer. Anal. 23, 6, 1241-1253, 1986.
- /7/ Braga, W., Secondary Flows on Low Aspect Ratio Rotating Cavities, Proc. of the ISCFD-Sidney 1987, in Computational Techniques and Applications CTAC-87, Noye, J. und Fletcher C.(eds.), Elsevier Science Publishers B.V.(North Holland), 119-128, 1988.
- /8/ Chen, C.-J., Naseri-Neshat, H. und Ho, K.-S., Finite Analytic Numerical Solution of Heat Transfer in Two-Dimensional Cavity Flow, Num. Heat Transf. 4, 179-199, 1981.
- /9/ El-Mistikawy, T.M. und Werle, M.J., Numerical Method for Boundary Layers with Blowing - the Exponential Box Scheme, AIAA J. 16, 749-751, 1978.
- /10/ Günther, Cl. A Consistent Upwind Method of Second Order for the Convection-Diffusion-Equation, Proc. of the ISCFD-Sidney 1987,

in Computational Techniques and Applications CTAC-87,
Noye, J. und Fletcher C.(eds.), Elsevier Science Publishers
B.V.(North Holland), 249-258, 1988.

- /11/ Günther, Cl., Upwind-Verfahren höherer Ordnung. Aber wie?
Interner Bericht des Kernforschungszentrums Karlsruhe.
- /12/ Günther, Cl., Monotone Upwind-Verfahren 2.Ordnung zur Lösung
der Konvektions-Diffusionsgleichung, erscheint in ZAMM 1988.
- /13/ Gushchin, V.A. und Shchennikov, V.V., A Monotonic Difference
Scheme of Second-Order Accuracy, Zh. vychisl. Mat. mat.
Fiz. 14,3, 789-792, 1974. Engl. Übersetzung in USSR Comp.
Math. and Math. Phys. 14, 252-256, 1974.
- /14/ Han, T., Humphrey, J.A.C. und Launder, B., A Comparison of
Hybrid and Quadratic-Upstream Differencing in High Reynolds
Number Elliptic Flows. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.
29, 81-95, 1981.
- /15/ Il'in, A.M., Differencing Scheme for a Differential Equation
with a Small Parameter Affecting the Highest Derivative,
Mat.Zametki 6, 237-248, 1969, Engl. Übersetzung in Math.
Notes 6, 596-602, 1969.
- /16/ Kawamura, T., und Kuwahara, K., Computation of High Reynolds
Number Flow around a Circular Cylinder with Surface
Roughness, AIAA-paper 84-0340, 1984.
- /17/ Leonard, B.P., A Stable and Accurate Convective Modelling
Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation,
Comput. Methods. Appl. Mech. Eng. 19, 59-98, 1979.
- /18/ Leonard, B.P., A Survey of Finite Differences with Upwinding
for Numerical Modelling of the Incompressible Convective
Diffusion Equation, in Taylor, C. und Morgan, K.(eds.),
Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow,
Pineridge Press, Swansea, U.K., 1-35, 1981.
- /19/ Leonard, B.P., News-Flash: Upstream Parabolic Interpolation,
Proc. 2nd GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid
Mechanics, Köln, W. Germany, 97-104, 1977.
- /20/ Leonard, B.P., Leschziner, M.A. und McGuirk, J., Third-order
Finite-Difference Method for Steady Two-dimensional
Convection, Proc. First Int. Conf. on Numerical Methods
in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, U.K., 807-819, 1978.
- /21/ Leonard, B.P., The QUICK Finite Difference Method for the
Convection-Diffusion Equation, in Advances in Computer Methods
for Partial Differential Equations, III (IMACS, 1979),

- Vichnevetsky, R. und Stepleman, R.S.(eds.), 292-297, 1979.
- /22/ Leonard, B.P., Third-order Upwinding as a Rational Basis for Computational Fluid Dynamics, in Computational Techniques and Applications CTAC-83, Noye, J. und Fletcher C.(eds.), Elsevier Science Publishers B.V.(North Holland), 106-120, 1984.
- /23/ Leonard, B.P., A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Muddling of the Incomprehensible Defective Confusion Equation, in Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, Hughes, T.J.R. (ed.),(AMD-34, ASME, New York), 1-30, 1079.
- /24/ Leonard, B.P., A Survey of Finite Differences with Upwinding for Numerical Modelling of the Incompressible Convective Diffusion Equation, in Taylor, C.(ed.), Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Vol.2, Pineridge Press, 1-35, 1981.
- /25/ Leonard, B.P., The EULER-QUICK Code, in Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow III, Taylor, C., Johnson, J.A. und Smith, W.R.,(eds.), Seattle, Pineridge Press, Swansea, U.K., 489-499, 1983.
- /26/ Leschziner, M.A., Practical Evaluation of Three Finite Difference Schemes for the Computation of Steady State Recirculating Flows, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 23, 293-312, 1980.
- /27/ Maekawa, I. und Muramatsu, T., Higher Order Differencing Schemes in Fluid Flow Analysis and Their Applications to In-Vessel Thermo-Hydraulics. 5th IAHR Liquid Metal Working Group Meeting Grenoble, France, June 23-27, 1986, (Unveröffentlicht).
- /28/ Noye, J., Three-Point Two-Level Finite Difference Methods for the One-Dimensional Advection Equation, in Computational Techniques and Applications CTAC-85, Noye, J. und May, R. (eds.), Elsevier Science Publisher B.V. (North Holland), 159-192, 1986.
- /29/ Patel, M.K. und Markatos, N.C., An Evaluation of Eight Discretization Schemes for Two-Dimensional Convection-Diffusion Equations, Int. J. Numer. Methds. in Fluids 6, 129-154, 1986.
- /30/ Pollard, A. und Siu, A.L.-W., The Calculation of Some Laminar Flows Using Various Discretization Schemes. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 35, 293-313, 1982.
- /31/ Price, H.S., Varga, R.S. und Warren, J.E., Application of

Oscillation Matrices to Diffusion-Convection Equations,
J. Math. Phys. 45, 301-311, 1966.

- /32/ Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers Albuquerque, NM. 1972.
- /33/ Roos, H.-G., A Second Order Monotone Upwind Scheme, Computing 36, 57-67, 1986.
- /34/ Runchal, A.K., Convergence and Accuracy of Three Finite Difference Schemes for a Two-dimensional Conduction and Convection Problem, Int. J. Num. Meth. Eng. 4, 541-550, 1972.
- /35/ Samarski, A.A., Theory of Difference Methods. Deutsche Übersetzung bei Geest und Portig, Leipzig, 1984, Russische Ausgabe von 1977.
- /36/ Spalding, D.B., A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving both First and Second Derivatives, Int. J. Num. Meth. Eng. 4, 551-559, 1972.
- /37/ Stoyan, G., Monotone Difference Schemes for Convection-Diffusion Problems. ZAMM 59, 361-372, 1979.
- /38/ Tao, W.Q. und Sparrow, E.M., The Transportative Property and Convective Numerical Stability of the Steady-State Convection-Diffusion Finite-Difference Equation, Num. Heat Transfer 11, 491-497, 1987.

Verzeichnis der Anhänge

- Anhang 1: Schematische Tabelle der untersuchten Differenzenverfahren
- Anhang 2: Formelmäßige Darstellung der untersuchten Differenzgleichungen
- Anhang 3: Entwicklung der Erhaltungsform eines Differenzenverfahrens aus der Nicht-Erhaltungsform
- Anhang 4: LECUSSO-C, das LECUSSO-Verfahren in Erhaltungsform
- Anhang 5: QUICK-PLUS, ein weiteres, dem LECUSSO-Verfahren verwandtes Differenzschema in Erhaltungsform
- Anhang 6: Schema der Randnäherungen für Verfahren, welche mehr als drei Punkte in eine Koordinatenrichtung verwenden, bei Abströmung von der Wand weg.

Anhang 1: Schematische Tabelle der untersuchten Differenzenverfahren

Die Tabelle hat in der linken Spalte eine intern benützte Numerierung, Spalte 2 enthält die Bezeichnung, in Spalte 3 die Form (Conv = konvektive Form, Cons = Erhaltungsform), Spalte 4 gibt bei Nicht-Standardverfahren den Autor an, Spalte 5 die Anzahl der involvierten Punkte bei einer Raumdimension. Spalte 6 enthält den Grad g der Näherung, d.h. der Abbruchfehler des Verfahrens ist $O(\Delta x^g)$. Möglicherweise ist der Grad einiger lokal exakter Verfahren (LECUSSO, ..., LSUDS, ...) noch um 1 höher als in der Tabelle angegeben.

	Bezeichnung	Konvektionsform	Erhaltungsform	Autor	Punkte bei einheitlicher 1-d Strömung	Grad	lokal exakt
1	Zentrale Differenzenmethode	x			3	2	
2	Upwind-Verfahren 1. Ordnung	x			2	1	
3	LECUSO,	x		Günther	4	2	x
4	Zentrale Differenzenmethode		x				
5	Upwind-Verfahren 1. Ordnung		x				
6	Zentrale Differenzenmethode mit diskreter Kontin.		x				
7	Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit diskreter Kontinuität		x				
8	Hybrid scheme	x					
9	Hybrid scheme		x				
10	Exponentielles Schema	x		Allen-Southwell	3	2	x
10a	Samarski	x		Samarski	3	2	
11	Exponentielles Schema		x	Berger	3	2	x
12	Exponentielles Schema	x		El-Mistikawy-Werle	3	2	x
12a	Samarski-Variante von 12		x		3	2	
13	QUICK-PLUS		x	Günther	4	2	x
14	Zentrale i-1/2-Methode	x		Gushkin + Shchen.	4	2	
15	LECUSO-C		x	Günther	4	2	x
16	FAS	x		Chen	3		
17	Roos-Verfahren	x		Roos	5	2	
18	LUDS	x		Barrett	4	3	
19	LSUDS	x		Barrett	5	3	x
20	LUDS-C		x		4	3	
21	LSUDS-C		x		5	3	x

Verzeichnis der getesteten Verfahren

Anhang 2: Formelmäßige Darstellung der untersuchten Differenzgleichungen

Nachfolgend werden die Differentialgleichungen der untersuchten Methoden für eine Raumdimension angegeben. Wir gehen wieder aus von der Gleichung

$$u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 ,$$

in konvektiver Form oder von der entsprechenden Erhaltungsform

$$\frac{d(u\phi)}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 ,$$

Wir nehmen weiterhin wie zuvor schon an, daß wir eine Anzahl von $N + 1$ äquidistanten Stützstellen $x_i = i \cdot \Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ mit $\Delta x = 1/N$ haben.

Differenzenverfahren in konvektiver Form können als

$$u_i \frac{\hat{\phi}_{i+1/2} - \hat{\phi}_{i-1/2}}{\Delta x} - \Gamma \frac{(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}{\Delta x^2} = 0 .$$

mit $u_i = u(x_i)$ dargestellt werden, für Verfahren in Erhaltungsform läßt sich in Anleitung an (A2.1.) die Schreibweise

$$\frac{u_{i+1/2} \hat{\phi}_{i+1/2} - u_{i-1/2} \hat{\phi}_{i-1/2}}{\Delta x} - \Gamma \frac{(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}{\Delta x^2} = 0 .$$

finden, wobei $u_{i+1/2} = u(x_{i+1/2}) = u((x_{i+1} + x_i)/2)$ und $u_{i-1/2} = u((x_i + x_{i-1})/2)$.

Damit genügt meist die Angabe von $\hat{\phi}_{i+1/2}$, um sowohl die konvektive Form als auch die Erhaltungsform eines Differenzenverfahrens zu spezifizieren. Falls mit dieser Schreibweise abweichende gängige Formulierungen gebräuchlich sind oder wenn es dem Verständnis dient, werden auch weitere Formulierungen angegeben. Die mitaufgeführte Größe MODUS bezieht sich auf eine intern benutzte Numerierung der Verfahren, die in Anhang 1 angegeben ist.

- 1) CDS = Zentrales Differenzenverfahren in konvektiver und Erhaltungsform (MODUS = 1,4,6):

$$\hat{\phi}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1})$$

- 2) UDS=Upwindverfahren 1. Ordnung in konvektiver und Erhaltungsform (MODUS=2,5,7):

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} &= \phi_i, \text{ falls } u_i \geq 0, \text{ bzw. } u_{i+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ &= \phi_{i+1}, \text{ falls } u_i < 0, \text{ bzw. } u_{i+\frac{1}{2}} < 0.\end{aligned}$$

- 3) Hybrides Verfahren in konvektiver und Erhaltungsform (MODUS=8,9):

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}), \text{ falls } |\text{Re}_{\Delta x, i}| \geq 2, \\ &= \phi_i, \text{ falls } \text{Re}_{\Delta x, i} > 2, \\ &= \phi_{i+1}, \text{ falls } \text{Re}_{\Delta x, i} < -2.\end{aligned}$$

- 4) Allen-Southwell (MODUS=10):

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \coth \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho} \right) \right] \phi_{i+1} + \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \coth \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho} \right) \right] \phi_i$$

mit $\rho = \text{Re}_{\Delta x, i}$.

Eine andere Schreibweise verdeutlicht die hinzugefügte künstliche Diffusivität des Verfahrens:

$$\frac{\rho}{2}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{\rho}{2} \coth \frac{\rho}{2} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) = 0$$

- 5) Samarski (MODUS=10a):

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2} - \frac{1}{\rho} \right) \right] \phi_{i+1} + \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2} - \frac{1}{\rho} \right) \right] \phi_i$$

mit $\rho = \text{Re}_{\Delta x, i} > 0$, bekannter ist die Schreibweise

$$\frac{\rho}{2}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{\rho}{2} \left[1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \right]^{-1} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) = 0$$

- 6) El-Mistikawy-Werle (MODUS=12): Dieses Verfahren ist teils explizit, teils implizit. Die implizite Formulierung bezieht sich auf Konvektions-Diffusionsgleichungen mit Quellterm. Hier wird nur der explizite Teil des Verfahrens verwendet.

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{1 - \exp\{-\rho\}} - \frac{1}{\rho} \right) \right) (\phi_{i+1} - \phi_i),$$

$$\hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\exp\{-\rho l\}}{1 - \exp\{-\rho l\}} - \frac{1}{\rho l} \right) \right) (\phi_i - \phi_{i-1}),$$

Gebäuchlich ist auch die Schreibweise

$$\left(\frac{\rho}{1 - \exp\{-\rho\}} \right) (\phi_{i+1} - \phi_i) - \left(\frac{\rho l}{1 - \exp\{-\rho l\}} \right) (\phi_i - \phi_{i-1}) = 0.$$

$$\rho = \exp\{\text{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}}\}, \quad \rho l = \exp\{\text{Re}_{\Delta x, i-\frac{1}{2}}\}.$$

- 7) Berger (MODUS=11): Auch dieses Verfahren ist teils explizit, teils implizit. Hier wird ebenfalls nur der explizite Teil des Verfahrens benützt. Es kann in der Form

$$\frac{u_{i+1}\phi_{i+1} - u_{i-1}\phi_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\Delta x^2} \{ \rho_{j+1} \coth(\rho_{j+1}) \phi_{i+1} - 2 \cdot \rho_j \coth(\rho_j) \phi_i + \rho_{j-1} \coth(\rho_{j-1}) \phi_{i-1} \} = 0.$$

mit $\rho_j = \text{Re}_{\Delta x, j}$ geschrieben werden.

- 8) LECUSSO-Verfahren (MODUS=3):

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_i(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i), \text{ falls } \text{Re}_{\Delta x, i} \geq 0, \\ &= \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_i(\phi_{i+2} + \phi_i - 2\phi_{i+1}), \text{ falls } \text{Re}_{\Delta x, i} < 0, \end{aligned}$$

mit

$$\Lambda_i = \frac{\rho}{\text{Re}_{\Delta x, i}} \cdot \frac{0.5 \text{Re}_{\Delta x, i} (\rho + 1) - (\rho - 1)}{(\rho - 1)^2},$$

9) LECUSSO-C (MODUS = 15):

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_{i+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i), \text{ falls } \operatorname{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ &= \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_{i+\frac{1}{2}}(\phi_{i+2} + \phi_i - 2\phi_{i+1}) \text{ falls } \operatorname{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} < 0.\end{aligned}$$

$$\Lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{\operatorname{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}}} \frac{0.5 \operatorname{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} (r_{i+\frac{1}{2}} + 1) - (r_{i+\frac{1}{2}} - 1)}{(r_{i+\frac{1}{2}} - 1)^2}$$

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \exp\{\operatorname{Re}_{\Delta x, i+\frac{1}{2}}\}$$

In den Formeln für $\hat{\phi}_{i-1/2}$ wird $\Lambda_{i-1/2}$ verwendet, welches mit $\operatorname{Re}_{\Delta x, i-1/2}$ gebildet wird.

10) QUICK-PLUS (MODUS = 13):

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = A \phi_{i+1} + B \phi_i + C \phi_{i-1}.$$

mit

$$A = \frac{e^{\rho/2} - 1 + 0.5(e^{-\rho} - 1)}{(e^{\rho} - 1)^2}$$

$$B = \frac{1.5e^{\rho} + 0.5e^{-\rho} - 2e^{\rho/2}}{(e^{\rho} - 1)^2}$$

$$C = \frac{e^{\rho/2} - 1 - 0.5(e^{-\rho} - 1)}{(e^{\rho} - 1)^2}$$

mit $\rho = \operatorname{Re}_{\Delta x, i+1/2}$.

Entsprechend

$$\hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}} = A' \phi_i + B' \phi_{i-1} + C' \phi_{i-2}$$

und die A' , B' und C' sind jetzt mit $\rho' = \operatorname{Re}_{\Delta x, i-1/2}$ gebildet.

- 11) Verfahren von Gushkin und Shchennikov (MODUS=14): Hier hat die eindimensionale Differenzgleichung die Form:

$$u_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \Gamma \frac{\phi_{i+1} - \phi_i - \phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^2}$$

Falls $u_{i+1/2} < 0$, lautet die Gleichung zum Punkt i :

$$u_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} = \frac{1}{2} \Gamma \frac{\phi_{i+2} - \phi_{i+1} - \phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- 12) FAM (MODUS=16): Bei dieser Methode wird im zweidimensionalen ein Neun-Punkt-Differenzenstern benutzt, dessen Koeffizienten lokal berechnet werden und als unendliche Reihen darstellbar sind. Für Details wird auf die Originalarbeit /8/ verwiesen.

- 13) Roos (MODUS=17): Die Differenzgleichung lautet, bezogen auf unsere Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} & \text{Re}_{i, \Delta x} (\alpha_1 \phi_{i-2} + \alpha_2 \phi_{i-1} + \alpha_3 \phi_i + \alpha_4 \phi_{i+1} + \alpha_5 \phi_{i+2}) \\ & - (\phi_{i+1} + \phi_{i-1} + 2\phi_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \alpha_1 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\alpha + \frac{3}{8}\beta, \\ \alpha_2 &= -\beta, \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\alpha + \frac{3}{8}\beta, \\ \alpha_4 &= -\alpha, \\ \alpha_5 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\alpha - \frac{1}{8}\beta. \end{aligned}$$

Die zulässigen Werte von α und β sind auf relativ kleine Bereiche im α - β -Raum beschränkt, ein zulässiges Wertepaar, das hier verwendet wird, ist $\alpha=11/30$, $\beta=3$.

- 14) LUDS (MODUS=18) und LUDS-C (MODUS=20):

Falls $u_i > 0$,

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(11\phi_i - 7\phi_{i-1} + 2\phi_{i-2}).$$

- 15) LSUDS (MODUS=19) und LSUDS-C (MODUS=21):

$u_i > 0$,

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \lambda_i \left(\frac{1}{3}\phi_{i+1} + \frac{5}{6}\phi_i - \frac{1}{6}\phi_{i-1} \right) + (1 - \lambda_i) \frac{1}{6}(11\phi_i - 7\phi_{i-1} + 2\phi_{i-2}),$$

$$\lambda_i = \frac{6 - (6 + 11 \operatorname{Re}_{\Delta_{X,i}})\rho + 7 \operatorname{Re}_{\Delta_{X,i}} \rho^2 - 2 \operatorname{Re}_{\Delta_{X,i}} \rho^3}{2 \operatorname{Re}_{\Delta_{X,i}} (1 - \rho)^2},$$

$$\rho = \exp\{-\operatorname{Re}_{\Delta_{X,i}}\}.$$

Bei LSUDS-C wird $\hat{\phi}_{i+1/2}$ wie unter 8) mit $\lambda_{i+1/2}$, welches aus $\operatorname{Re}_{\Delta_{X,i+1/2}}$ berechnet wird, gebildet, $\hat{\phi}_{i-1/2}$ wird mit Hilfe von $\lambda_{i-1/2}$ berechnet aus $\operatorname{Re}_{\Delta_{X,i-1/2}}$.

- 16) Die Verfahren von Agarwal, Leonard und Atias et al. haben entsprechende Formeln für $\hat{\phi}_{i+1/2}$ und $\hat{\phi}_{i-1/2}$ wie LECUSSO-C. Sie unterscheiden sich von diesen jeweils durch die Wahl eines einheitlichen von der Maschen-Reynolds-Zahl unabhängigen Λ_i bzw. $\Lambda_{i+1/2}$, welches in nachfolgender kleiner Tabelle angegeben ist.

Methode	$\Lambda_i, \Lambda_{i+1/2}$
Leonard	1/8
Agarwal	1/6
Atias et al.	1/2

Anhang 3: Entwicklung der Erhaltungsform eines Differenzenverfahrens aus der Konvektionsform

In diesem Anhang wird gezeigt, unter welchen Bedingungen sich zu einem eindimensionalen Differenzschema in konvektiver Form zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung eine entsprechende Formulierung in Erhaltungsform ableiten läßt. Da sich dieses Problem eigentlich nur auf den konvektiven Teil der Gleichung bezieht, beschränken wir uns auf die diskrete Darstellung von $u \cdot d\phi/dx$ bzw. von $d(u\phi)/dx$. Vom ersten Ausdruck sagt man, er sei in konvektiver Form gegeben, vom zweiten sagt man, er sei in Erhaltungsform. Natürlich sind beide Ausdrücke nicht gleichwertig. Dies ist jedoch in zwei Dimensionen der Fall, falls mit der Konvektionsgleichung

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Gamma \nabla^2 \phi \quad (\text{A3.1})$$

die (inkompressible) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A3.2})$$

gilt. Dann ist

$$\frac{d(u\phi)}{dx} + \frac{d(v\phi)}{dy} = \Gamma \nabla^2 \phi, \quad (\text{A3.3})$$

zu (A3.1) gleichwertig.

In diskreter Form hat die (A3.1) entsprechende eindimensionale Version die Gestalt (o.B.d.A.)

$$u_i \frac{\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}}{2 \Delta x} - \Gamma \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (\text{A3.4})$$

die Erhaltungsform, (A3.3) entsprechend, hat eine Darstellung

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \Gamma \frac{(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}{\Delta x^2} = 0 \quad (\text{A3.5})$$

wobei $u_{i+1/2}$ und $u_{i-1/2}$ die an den Koordinaten $x=x_i + \Delta x/2$ und $x=x_i - \Delta x/2$ als bekannt vorausgesetzten Werte der Geschwindigkeitskomponente u sind, während $\hat{\phi}_{i+1/2}$ und $\hat{\phi}_{i-1/2}$ durch Interpolation aus $\phi_{i+2}, \phi_{i+1}, \phi_i, \phi_{i-1}, \dots$ entstehende Näherungswerte sind.

Wir nehmen nun an,
 - wir hätten eine Näherung der Form

$$u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} : \cong L_i(\phi) = u_i \{A \phi_{i+1} + B \phi_i + C \phi_{i-1} + D \phi_{i-2}\},$$

und diese Näherung gelte exakt für eine konstante Funktion ϕ .

Die letzte Bedingung hat zur Folge, daß

$$A + B + C + D = 0 \tag{A3.6}$$

Nun läßt sich $L_i(\phi)$

$$L_i(\phi) = A\phi_{i+1} + B\phi_i + C\phi_{i-1} + D\phi_{i-2} \tag{A3.7}$$

umformen zu

$$A(\phi_{i+1} - \phi_i) + (A + B)(\phi_i - \phi_{i-1}) + (A + B + C)(\phi_{i-1} - \phi_{i-2}) + (A + B + C + D)\phi_{i-2}$$

Wegen (A3.6) fällt der letzte Term weg und $L_i(\phi)$ läßt sich unter der genannten Voraussetzung als Summe von Differenzen benachbarter ϕ -Werte schreiben,

$$L_i(\phi) = \bar{A}(\phi_{i+1} - \phi_i) + \bar{B}(\phi_i - \phi_{i-1}) + \bar{C}(\phi_{i-1} - \phi_{i-2}) \tag{A3.8}$$

mit $\bar{A} = A$, $\bar{B} = A + B$, $\bar{C} = A + B + C$.

Definiert man nun

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{A} \phi_{i+1} + \bar{B} \phi_i + \bar{C} \phi_{i-1},$$

$$\hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}} = \bar{A} \phi_i + \bar{B} \phi_{i-1} + \bar{C} \phi_{i-2},$$

so hat man die Interpolationsformel zur Berechnung der $\hat{\phi}_{i+1/2}$ und $\hat{\phi}_{i-1/2}$, welche nun in (A3.5) einzusetzen sind, um die Differenzgleichung in Erhaltungsform zu bekommen.

Dies sieht am Beispiel von LUSD mit Basispunkten x_i , x_{i-1} , x_{i-2} und x_{i-3} folgendermaßen aus: Dort ist

$$u \frac{d\phi}{dx} = u_i \frac{\{11\phi_i - 18\phi_{i-1} + 9\phi_{i-2} - 2\phi_{i-3}\}}{6\Delta x},$$

die geschweifte Klammer läßt sich analog (A3.8) schreiben als

$$\{11(\phi_i - \phi_{i-1}) - 7(\phi_{i-1} - \phi_{i-2}) + 2(\phi_{i-2} - \phi_{i-3})\}$$

und der konvektive Teil der Erhaltungsform von LUDS lautet

$$\frac{d(u\phi)}{dx} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} \{11\phi_i - 7\phi_{i-1} + 2\phi_{i-2}\} - u_{i-\frac{1}{2}} \{11\phi_{i-1} - 7\phi_{i-2} + 2\phi_{i-3}\}}{6 \Delta x}$$

Anhang 4: LECUSSO-C, das LECUSSO-Verfahren in Erhaltungsform

Entsprechend den Ausführungen in Anhang 3 läßt sich ganz formal eine Erhaltungsform von LECUSSO bilden. Dabei tritt jeweils statt eines zentralen $\Lambda = \Lambda_i$ ein $\Lambda_{i+1/2}$ und ein $\Lambda_{i-1/2}$ pro Gleichung auf, wobei sinnvollerweise $\Lambda_{i+1/2} = \Lambda_{i+1/2}(\text{Re}_{\Delta x, i+1/2})$ und $\Lambda_{i-1/2} = \Lambda_{i-1/2}(\text{Re}_{\Delta x, i-1/2})$. In Formeln für den eindimensionalen Fall ausgedrückt, sieht dies folgendermaßen aus:

Es sei
$$\text{Re}_{\Delta x, i \pm \frac{1}{2}} = \frac{u(x_{i \pm \frac{1}{2}}) \Delta x}{\Gamma} = \frac{u_{i \pm \frac{1}{2}} \Delta x}{\Gamma}$$

und

$$\text{Re}_{\Delta x, i + \frac{1}{2}} \hat{\phi}_{i + \frac{1}{2}} - \text{Re}_{\Delta x, i - \frac{1}{2}} \hat{\phi}_{i - \frac{1}{2}} - (\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) = 0 \quad ,$$

wobei sich entsprechend für nichtnegative $\text{Re}_{\Delta x, i \pm 1/2}$ ergibt, daß

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{i + \frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{2} - \Lambda_{i + \frac{1}{2}}\right) \phi_{i+1} + \left(2\Lambda_{i + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right) \phi_i - \Lambda_{i + \frac{1}{2}} \phi_{i-1} \\ &= \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_{i + \frac{1}{2}}(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) \end{aligned}$$

und

$$\hat{\phi}_{i - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_{i-1} + \phi_i) - \Lambda_{i - \frac{1}{2}}(\phi_i + \phi_{i-2} - 2\phi_{i-1})$$

mit

$$\Lambda_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{r_{i \pm \frac{1}{2}}}{\text{Re}_{\Delta x, i \pm \frac{1}{2}}} \frac{0.5 \text{Re}_{\Delta x, i \pm \frac{1}{2}} (r_{i \pm \frac{1}{2}} + 1) - (r_{i \pm \frac{1}{2}} - 1)}{(r_{i \pm \frac{1}{2}} - 1)^2}$$

und $r_{i \pm 1/2} = e^{\text{Re}_{\Delta x, i \pm 1/2}}$.

Falls $\text{Re}_{\Delta x, i+1/2} < 0$, nimmt man

$$\hat{\phi}_{i + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \Lambda_{i + \frac{1}{2}}(\phi_{i+2} + \phi_i - 2\phi_{i+1})$$

und

$$\hat{\phi}_{i - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_{i-1} + \phi_i) - \Lambda_{i - \frac{1}{2}}(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i)$$

dabei ist $\Lambda_{i \pm 1/2}$ definiert wie zuvor.

Zu diesem Verfahren ist noch zu bemerken:

1. Am Rand (Punkte nächst dem Rand) muß eine Dreipunktdifferenzen-
näherung, z.B. Upwind-Verfahren 1. Ordnung, oder ein gleichwertiges Ver-
fahren verwendet werden.
2. Die Näherung $\hat{\phi}_{i+1/2} = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2 - \Lambda(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})$ für $\hat{\phi}_{i+1/2}$ ist zwar keine
parabolische Interpolation, aber dennoch $O(\Delta x^2)$.
3. Die Koeffizienten A, B und C in

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{i+1/2} &= A \phi_{i+1} + B \phi_i + C \phi_{i-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \Lambda_{i+1/2}\right) \phi_{i+1} + \left(2\Lambda_{i+1/2} - \frac{1}{2}\right) \phi_i - \Lambda_{i+1/2} \phi_{i-1} \end{aligned}$$

tendieren für $\text{Re}_{\Delta x, i+1/2} \rightarrow \infty$ wegen $\Lambda_{i+1/2} \rightarrow 1/2$ gegen folgende Werte

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0 \\ B &\rightarrow 3/2 \\ C &\rightarrow -1/2, \end{aligned}$$

das entspricht der Erhaltungsform des Verfahrens von Atias et al. Das
QUICK-Verfahren entspricht $\Lambda = \Lambda_{i+1/2} = 1/8$ und damit $A = 3/8$, $B = 3/4$ und
 $C = -1/8$.

4. $\Lambda_{i+1/2} \rightarrow 1/12$ für $\text{Re}_{\Delta x, i+1/2} \rightarrow 0$.

Anhang 5: QUICK-PLUS, ein weiteres, dem LECUSSO-Verfahren verwandtes Differenzenschema in Erhaltungsform

Die Herleitung des QUICK-PLUS-Schemas hat viele Ähnlichkeiten mit der von LECUSSO-C. Wir nehmen wieder $u_{i+1/2} > 0$ an und beschränken uns auf die Darstellung des eindimensionalen Falles. Den Ansatzpunkt bildet jetzt die Interpolation von $\hat{\phi}_{i+1/2}$ und $\hat{\phi}_{i-1/2}$ in der Näherung

$$\frac{d(u\phi)}{dx} = \frac{u_{i+1/2} \hat{\phi}_{i+1/2} - u_{i-1/2} \hat{\phi}_{i-1/2}}{\Delta x}$$

für den konvektiven Teil der 1-d Konvektions-Diffusionsgleichung.

Der Ansatz lautet

$$\hat{\phi}_{i+1/2} = A \phi_{i+1} + B \phi_i + C \phi_{i-1}.$$

Wird hier verlangt, daß A, B und C so gewählt wird, daß die Interpolationsformel exakt ist für die Funktionen $\phi \equiv 1$, $\phi = x$ und $\phi = x^2$, so gelangt man zum QUICK-Verfahren.

Wir verlangen hier, daß die Interpolationsformel exakt ist für $\phi \equiv 1$, $\phi = x$ und $\phi = \exp(\alpha x)$ mit $\alpha = \text{Re}_{i+1/2}$.

Mit der Abkürzung $\rho = \text{Re}_{\Delta x, i+1/2}$ ergibt sich

$$A = \frac{e^{\rho/2} - 1 + 1/2(e^{-\rho} - 1)}{e^{\rho} + e^{-\rho} - 2}$$

$$B = \frac{3/2 e^{\rho} + 1/2 e^{-\rho} - 2 e^{+\rho/2}}{e^{\rho} + e^{-\rho} - 2}$$

$$C = \frac{e^{\rho/2} - 1 - 1/2(e^{\rho} - 1)}{e^{\rho} + e^{-\rho} - 2}$$

Die Feststellung 1) bis 3) zum LECUSSO-C-Verfahren in Anhang 4 gelten ebenfalls für QUICK-PLUS. Außerdem gilt $\Lambda_{i+1/2} \rightarrow 1/8$ für $\text{Re}_{\Delta x, i+1/2} \rightarrow 0$ im Gegensatz zu LECUSSO-C.

Anhang 6: Schema der Randnäherungen für Verfahren, welche mehr als drei Punkte in eine Koordinatenrichtung verwenden, bei Abströmung von der Wand weg.

Von den untersuchten Verfahren benutzen nachfolgend genannte Verfahren mehr als drei Punkte bzw. mehr als den Basispunkt sowie den rechten und den linken Nachbarpunkt:

LECUSSO, LECUSSO-C, QUICK-PLUS
Gushchin und Shchennikov,
Roos,
LUDS, LSUDS, LUDS-C, LSUDS-C.

Falls bei diesen Verfahren eine Abströmung von der Wand weg erfolgt, sind bei diesen Verfahren der übernächste Nachbar bzw. der überübernächste Nachbar in Richtung der Wand nicht verfügbar.

LECUSSO verwendet in diesem Fall CDS.

Dagegen verwenden LECUSSO-C und QUICK-PLUS, falls am Rande $i = 1$ ($x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$) und, falls $u_{1/2} < 0$, die Näherung

$$\hat{\phi}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1)$$

d.h. das zentrale Differenzenverfahren.

Beim Verfahren von Gushchin und Shchennikov wird unabhängig von der Lage des Punktes für Maschen-Reynoldszahlen vom Betrag ≤ 2 das zentrale Differenzenverfahren CDS verwendet, in dem Rand benachbarten Punkten wird wie bei LECUSSO das hybride Verfahren angewendet.

Beim Verfahren von Roos wird in allen Punkten, die dem Rand benachbart sind, UDS verwendet.

Bei LUDS und LSUDS ist die Situation komplizierter. Da bei LUDS alle drei Stützpunkte stromaufwärts liegen, hat man zwei getrennt zu behandelnde Sonderfälle vor sich, die Fälle mit entweder nur einem oder mit nur zwei stromaufwärts verfügbaren Punkten.

Bei LUDS gibt es keine vom Autor vorgeschlagene Randnäherungen. Es liegt allerdings nahe, dies wurde hier auch so gehandhabt, für $i=2$ bei $u_{1/2} > 0$ das Verfahren von Atias et al. zu verwenden, bei $i=1$ entsprechend das hybride Verfahren.

Für LSUDS gibt es einen Vorschlag. Man wählt, falls $i=2$

$$\operatorname{Re}_{\Delta x, 2} \left\{ \frac{\phi_3 - \phi_1}{2} + \gamma(\phi_3 - 3\phi_2 + 3\phi_1 - \phi_0) \right\} - (\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_1) = 0 ,$$

mit

$$\gamma = \frac{\exp[-\operatorname{Re}_{\Delta x, 2}] \operatorname{Re}_{\Delta x, 2}}{\operatorname{Re}_{\Delta x, 2}} \frac{(\exp[\operatorname{Re}_{\Delta x, 2}] + 1) - 2(\exp[\operatorname{Re}_{\Delta x, 2}] - 1)}{(\exp[\operatorname{Re}_{\Delta x, 2}] - 1)^2}$$

was dem LECUSSO-Schema entspricht, während für $i=1$ eine entsprechende Gleichung der Form

$$\operatorname{Re}_{\Delta x, 1} \left\{ \frac{\phi_2 - \phi_0}{2} + \mu(\phi_3 - 3\phi_2 + 3\phi_1 - \phi_0) \right\} - (\phi_2 - 2\phi_1 + \phi_0) = 0 ,$$

$$\mu = \frac{\exp[-\operatorname{Re}_{\Delta x, 1}] \operatorname{Re}_{\Delta x, 1}}{\operatorname{Re}_{\Delta x, 1}} \frac{-\operatorname{Re}_{\Delta x, 1} \cdot (\exp[-\operatorname{Re}_{\Delta x, 1}] + 1) - 2(\exp[-\operatorname{Re}_{\Delta x, 1}] - 1)}{(\exp[-\operatorname{Re}_{\Delta x, 1}] - 1)^2}$$

gilt, siehe Barrett /4/.

