

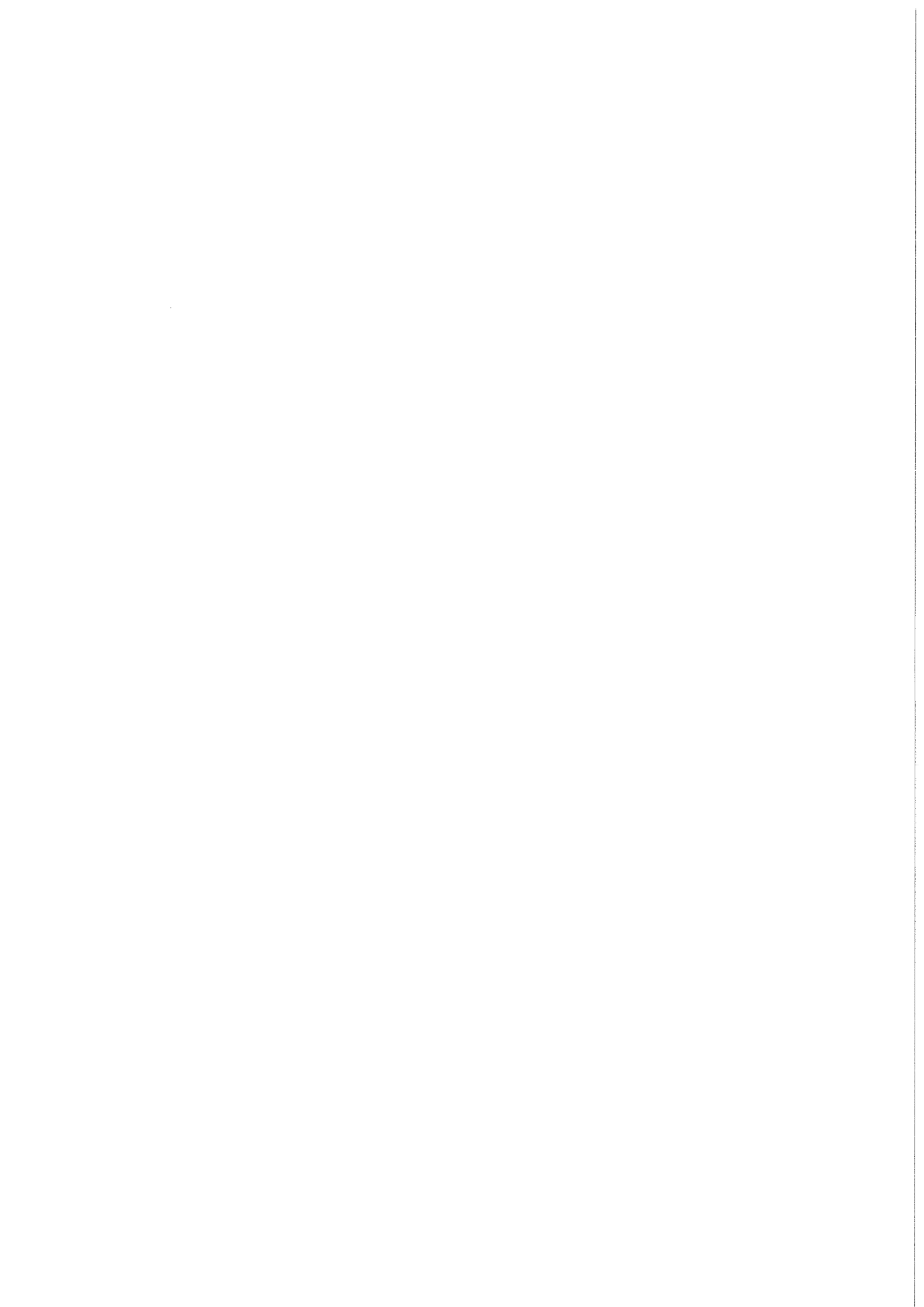
KfK 4374  
September 1988

# **Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen**

**Teil 1:  
Auswertung von  
Energiebilanzbedingungen**

**T. Malmberg  
Institut für Reaktorentwicklung**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Reaktorentwicklung

KfK 4374

Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen

Teil 1: Auswertung von Energiebilanzbedingungen

von

T. Malmberg

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

NICHT-ISOTHERME THEORIE GROSSER DEFORMATIONEN THERMOELASTISCHER SCHALEN

TEIL 1: AUSWERTUNG VON ENERGIEBILANZBEDINGUNGEN

Zusammenfassung

Ziel der in Teil 1 und 2<sup>x</sup> vorgelegten Abhandlung ist es, einen neuartigen Weg der Herleitung zweidimensionaler Bilanz- und Stoffgleichungen für thermoelastische Schalen beliebiger Geometrie und bei großen Verformungen unter Berücksichtigung thermodynamischer Prinzipie zu erproben. Ausgangspunkt dieser mathematischen Entwicklung ist die Auswertung der Forminvarianz der integralen Energiebilanzgleichung gegenüber Wechsel des Beobachtersystems und die Auswertung der integralen Clausius-Duhem-Entropiegleichung entsprechend der Interpretation in der modernen Kontinuumsmechanik (Coleman-Noll-Schlußweise). Die Einbettung der Herleitung der zweidimensionalen Schallgleichungen in diesen thermodynamischen Rahmen erlaubt, eine thermodynamisch konsistente Schalentheorie zu entwickeln.

Für das Verschiebungsfeld in der Schale wurde einschränkend ein linearer Ansatz und für die Verteilung der Temperaturinversen ein quadratischer Ansatz über die Schalendicke gemacht. Es zeigte sich zunächst, daß die beiden integralen, thermodynamischen Prinzipie nicht ausreichen, um ein vollständiges System zweidimensionaler Bilanzgleichungen zu gewinnen; vielmehr sind noch zusätzliche Forderungen notwendig. Die Auffindung dieser zusätzlichen Bedingungen gelang über eine physikalisch motivierte Interpretation der approximativen Ansätze für die Verschiebungen und die Temperatur. Diese Ansätze werden als innere kinematische bzw. thermische Zwangsbedingungen aufgefaßt, die durch Reaktionsgrößen in der Form zusätzlicher gedachter Einwirkungen (wie z.B. Volumenkräfte und Wärmequellen) in einem Gedankenexperiment zu realisieren sind. Zur eindeutigen Charakterisierung des neuen Problems werden nun diese Zusatzeinwirkungen physikalisch plausiblen Energie- und Entropieforderungen integraler Art unterworfen, die die beiden Hauptsätze ergänzen. Ob diese Forderungen ausreichend sind, um ein vollständiges System zweidimensionaler Bilanzgleichungen für die Schale aufzustellen, muß die weitere Analyse zeigen.

Im vorliegenden 1. Teil wird zunächst die (im Ergebnis bekannte) dreidimensionale Theorie nichtlinear thermoelastischer Körper dargestellt; die

---

<sup>x</sup> T. Malmberg: Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen, Teil 2: Auswertung von Entropiebilanzbedingungen, KfK 4375, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988

Ableitung der dreidimensionalen Feldgleichungen folgt dabei auf der Basis des 1. und 2. Hauptsatzes in integraler Form unter Beachtung ihrer Forminvarianz bei Beobachterwechsel. Dieser Abschnitt hat insbesondere zum Ziel, sich mit der Auswertung der beiden thermodynamischen Prinzipien vertraut zu machen.

Nach einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse zur Differentialgeometrie von Flächen wird die Forminvarianz der (über die Schalendicke integrierten) Energiebilanzgleichung und die integrale Energie-Forderung ausgewertet. Hier zeigt sich, daß noch Freiheiten in der Wahl der gedachten Zusatzeinwirkungen vorhanden sind. Während die abgeleiteten Bewegungsgleichungen 1. Art (zweidimensionaler Impulssatz der Schale) unabhängig von den weiteren Annahmen über die Zusatzeinwirkungen sind, erhält man sowohl zwei unterschiedliche Bewegungsgleichungen 2. Art wie auch zwei unterschiedlich algebraische Restriktionen für die zweidimensionalen mechanischen Stoffgleichungen. Dementsprechend werden im weiteren zwei verschiedene schalentheoretische Konzepte betrachtet. Der 1. Teil wird abgeschlossen mit einer vergleichenden Gegenüberstellung und Diskussion dieser Ergebnisse. Die wesentlichen, noch offenen Fragen werden aufgezeigt. Ihre Beantwortung sowie die Auswertung der Forminvarianz der zweidimensionalen Stoffgleichungen und die Auswertung der integralen Clausius-Duhem-Entropieungleichung einschließlich der Entropieforderung für die gedachten Zusatzeinwirkungen sind Thema des 2. Teils.

NON-ISOTHERMAL THEORY OF THERMOELASTIC SHELLS UNDER LARGE DEFORMATIONS

PART 1: EVALUATION OF ENERGY BALANCE CONDITIONS

Summary

It is the aim of the study presented in part 1 and 2<sup>x</sup> to explore a new approach for the derivation of two-dimensional balance equations and constitutive relations for thermoelastic shells of arbitrary geometry and under large deformations. This is done by taking proper account of thermodynamic principles. The starting point for this mathematical development is an evaluation of the form-invariance of the integral energy balance equation under changes of the observer system and an evaluation of the integral Clausius-Duhem entropy inequality and its interpretation in modern continuum thermodynamics (Coleman-Noll approach). The embedding of the derivation of the two-dimensional shell equations in this thermodynamic frame ensures the development of a thermodynamically consistent shell theory.

The displacement field in the shell was approximated by a linear distribution across the thickness of the shell whereas the inverse of the temperature was represented by a quadratic distribution. It was shown that the two integral thermodynamic principles are insufficient to obtain a complete system of two-dimensional balance equations; additional conditions are necessary. These conditions were obtained with the help of a physically motivated interpretation of the approximate ansatz for the displacement and temperature distributions. Both approximate distributions are considered to represent internal kinematic and thermal constraints which are realized in a thought experiment by additional virtual agencies (e.g. volume forces and heat sources). For a unique characterization of this new problem, these agencies are subjected to physically plausible energy and entropy conditions in integral form, which accompany the two basic thermodynamic principles. Whether these conditions are sufficient to obtain a complete set of two-dimensional balance equations for the shell has to be shown by further analysis.

In the 1. part presented here the (well known) threedimensional theory of nonlinear thermoelastic bodies is delineated; the derivation of the

---

<sup>x</sup> Malmberg, T.: Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen, Teil 2: Auswertung von Entropiebilanzbedingungen, KfK 4375, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988

threedimensional field equations is done on the basis of the two basic thermodynamic principles in integral form and their form-invariance under observer transformations. The purpose of this section is to recreate and digest the application and evaluation of the two basic thermodynamic principles, a prerequisite to master more complex situations.

After summarizing essential results of the differential geometry of surfaces the form-invariance of the energy balance equation (integrated across the shell thickness) and the energy condition are evaluated. It is found that still some freedom is present in the choice of the additional actions. It is shown that the equations of motion of the 1. kind (twodimensional equations of balance of linear momentum for the shell) are independent of the further alternative assumptions concerning the additional actions; however, two different equations of motion of the 2. kind and two different algebraic restrictions for the twodimensional mechanical constitutive relations are obtained. Consequently in the further analysis two different shell concepts are considered.

The 1. part is closed with a comparative evaluation and discussion of these results. Essential open questions are indicated. Their clarification as well as the evaluation of the form-invariance of the twodimensional constitutive relations and the evaluation of the integral Clausius-Duhem entropy inequality including the entropy condition for the additional actions are performed in the 2. part.



<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
1. Einführung	1
2. Grundzüge einiger approximativer Theorien nicht-isothermer Verformungen dünner Schalen	7
2.1 Nicht-isotherme elastische Schalentheorien: Ableitungen aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie	7
2.2 Skizze einer approximativen Theorie nicht-isothermer Verformungen dünner, thermoelastischer Schalen	12
2.3 Plan der Abhandlung (Teil 1)	18
3. Kinematik und Deformation	20
3.1 Materielle, räumliche und mitgeschleppte Koordinaten	20
3.2 Basisvektoren, Deformationsgradient und Verzerrungstensor	24
3.3 Materielle Zeitableitung kinematischer Größen	31
4. Die Energiebilanzgleichung und ihre Invarianzeigenschaften	37
4.1 Die Darstellung der Energiebilanzgleichung in der Momentan- und der Referenzkonfiguration	37
4.2 Transformationseigenschaften und Invarianz bei Übergang zu einem bewegten Beobachtersystem	41
4.2.1 Koordinaten- und Beobachtertransformationen, das Forminvarianzprinzip	41
4.2.2 Invarianzeigenschaften bei Übergang zu gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen	53
4.2.3 Invarianzeigenschaften bei Übergang zu beliebig rotatorisch bewegten Beobachtersystemen	59
4.2.4 Zum lokalen Impuls- und Drehimpulssatz	68
4.2.5 Der reduzierte Energiesatz	69
5. Auswertung der Entropieungleichung und der Beobachterinvarianz für thermoelastische Stoffgleichungen	72
5.1 Die Entropieungleichung (Clausius-Duhem Entropiegleichung)	72
5.2 Thermodynamische Prozesse	74
5.3 Thermoelastische Stoffgleichungen	75
5.4 Auswertung der Entropieungleichung: Das Dissipationspostulat	76
5.5 Konsequenzen des Prinzips der Forminvarianz der Stoffgleichungen	79
5.6 Die Temperaturinverse als unabhängige thermische Variable	83
5.7 Ergänzende Bemerkungen	84

	Seite	
6.	Geometrische Beziehungen und Koordinatensysteme in der undeformierten Bezugskonfiguration der Schale	87
6.1	Flächenkoordinaten und Basisvektoren	87
6.2	Flächenvektoren und -tensoren und kovariante Ableitung	90
6.3	Vektoren und Tensoren im Schalenraum	94
6.4	Flächen- und Volumenelement	102
7.	Charakterisierung des Ersatzproblems	104
8.	Auswertung der energetischen Bedingungen und der Invarianzforderungen	110
8.1	Integration der Energiebilanzgleichung für das "erweiterte Problem" über die Schalendicke	110
8.2	Folgerungen aus der Bedingung (A2) (Beobachterinvarianz der Energie-Forderung) und der zweidimensionalen Energiebilanzgleichung	123
8.2.1	Invarianz der Energie-Forderung für die gedachten Zusatzeinwirkungen bei Beobachterwechsel	124
8.2.1.1	Transformationsgesetze	124
8.2.1.2	Übergang zu gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen	127
8.2.1.3	Übergang zu beliebig rotierenden Beobachtersystemen	127
8.2.2	Invarianz der zweidimensionalen Energiebilanzgleichung bei Beobachterwechsel	129
8.2.2.1	Transformationsgesetze	130
8.2.2.2	Übergang zu gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen (Bewegungsgleichungen 1. Art)	132
8.2.2.3	Übergang zu beliebig rotierenden Beobachtersystemen (zweidimensionaler Drehimpulssatz)	133
8.2.2.4	Folgerungen aus dem zweidimensionalen Drehimpulssatz (Bewegungsgleichungen 2. Art und Orthogonalitätsbedingung)	138
8.2.2.5	Reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung	145
8.2.2.6	Entkoppelte Transformation der Größen $\bar{\delta}_n$ und $\hat{\delta}_n^A$ ( $n=0,1$ )	146
8.3	Folgerungen aus der Bedingung (A3) ("Prozessinvarianz der Energie-Forderung)	147
8.3.1	Bewegungsgleichungen 1. Art (Folgerungen aus (8.92) <sub>1</sub> )	150
8.3.2	Bewegungsgleichungen 2. Art (Folgerungen aus (8.92) <sub>2</sub> )	151
8.3.3	Symmetriebedingungen (Folgerungen aus (8.92) <sub>3</sub> und (8.92) <sub>4</sub> )	156
8.3.4	Vergleich der Bewegungsgleichungen 2. Art	161
8.3.5	Reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung	164
8.4	Diskussion	166

	Seite
Anhang (1): Zur Transformation der Ortsvektoren zwischen zwei Beobachtersystemen; objektive Vektoren und Tensoren	173
Anhang (2): Bemerkungen zum Forminvarianzprinzip	187
Anhang (3): Leistung der hydrostatischen Druckkräfte auf den Schalenlaibungen	190
Literatur	196
Abbildungen	205

## 1. Einführung

Die technologische Bedeutung nichtlinearer Schalentheorien, z.B. für Sicherheitsbetrachtungen in der Reaktortechnik, und die bisher nur mit Einschränkungen erfolgte Berücksichtigung moderner kontinuumsmechanischer Konzepte bei der Entwicklung von Schalentheorien läßt es wünschenswert erscheinen, neben der Anwendung auch ingenieurwissenschaftliche Grundlagenforschung zur nichtlinearen Schalentheorie zu treiben. Unter diesen Grundlagenuntersuchungen werden hier einschränkend Überlegungen und Analysen zu Methoden und Konzepten verstanden, die es gestatten, das eigentliche dreidimensionale kontinuumsmechanische Problem auf ein zweidimensionales Schalenproblem, das eine einfachere Lösbarkeit verspricht, zu reduzieren.

Es geht hier also um das Problem, ausgehend von der Feldtheorie dreidimensionaler Kontinua möglichst mit einem Minimum an Basisaxiomen und Zusatzannahmen konsistente, geometrieunabhängige, zweidimensionale Bilanz- und Stoffgleichungen zu gewinnen. Dabei besteht nicht zuletzt auch die Zielvorstellung, ad hoc-Annahmen besser zu motivieren oder auf eine rationale Basis zu stellen, indem sie aus übergeordneten Prinzipien als ableitbar erwiesen werden.

Zunächst sei hier ein kurzer und notwendigerweise grober Überblick über die aus der Literatur bekannten Entwicklungen linearer oder nichtlinearer Schalentheorien gegeben. Bei diesen Entwicklungen lassen sich u.a. die folgenden drei Gruppen ausmachen<sup>x</sup>:

- (1) Ersatz des dreidimensionalen klassischen (nichtpolaren) Schalenkontinuums durch ein zweidimensionales, polares Kontinuum (insbesondere Cosseratkontinuum); das ist die sogenannte direkte Methode, z.B. [1-8].
- (2) Ableitung aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie unter Verwendung verschiedener Annahmen und Vernachlässigungen. Hier sind einmal die Methoden zu nennen,
  - (2i) die durch einen Integrationsprozess über die Schalendicke das dreidimensionale Feldproblem auf ein zweidimensionales reduzieren, z.B. [9-25], und ferner
  - (2ii) bei denen die dreidimensionalen Feldgleichungen bezüglich eines kleinen Parameters<sup>xx</sup>  $\epsilon$  entwickelt werden, z.B. [28-31].

---

<sup>x</sup> Die hier angegebenen Literaturstellen erheben keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit.

<sup>xx</sup> z.B.  $h/r$ ,  $h$ : Schalendicke;  $r$ : minimaler Krümmungsradius

Je nach Problemstellung (Geometrie, Randbedingungen, Lastfälle) ergeben sich damit verschiedene Möglichkeiten einer asymptotischen Entwicklung bezüglich  $\varepsilon$  und damit auch unterschiedliche asymptotische Feldgleichungen.

- (3) Gemischte Methode: Hier werden die zweidimensionalen Stoffgleichungen durch Integration der dreidimensionalen Stoffgleichungen über die Schalendicke gewonnen, während die Bewegungsgleichungen durch eine "direkte" Betrachtungsweise aufgestellt werden, z.B. [32 - 36].

Jede Schalentheorie stellt eine zweidimensionale Approximation für ein eigentlich dreidimensionales strukturmechanisches Problem dar. Es erscheint deshalb nur natürlich, die dreidimensionale Feldtheorie als Ausgangsbasis zu nehmen; hierbei lassen sich dann die zweidimensionalen Feldgrößen (wie z.B. Momente) zwangslos einführen und durch dreidimensionale Feldgrößen interpretieren. Im Gegensatz dazu erfordert die Vorgehensweise nach (1), bei der die zweidimensionale Theorie ohne Kenntnis der Einbettung in die dreidimensionale Kontinuumsmechanik formuliert wird, Erfahrungen mit der Theorie multipolarer Kontinua; die hier einzuführenden statischen und kinematischen Größen, die einen sehr formalen Charakter haben können, bedürfen gewöhnlich erst der Interpretation, für die die dreidimensionale monopolare Kontinuumsmechanik wieder herangezogen werden muß. Die unter (3) angeführte Vorgehensweise hat u.U. ähnlichen ad hoc-Charakter.

In dem unter (2i) angedeuteten generellen Rahmen, in den auch die in diesem Bericht noch vorzustellende Vorgehensweise sich einfügt, lassen sich die bekannten klassischen Ausgangspunkte etwa in folgende Gruppen einteilen:

- (2i.1) Direkte Integration der lokalen Bewegungsgleichungen (Cauchysche Bewegungsgleichungen) und der dreidimensionalen Stoffgleichungen über die Schalendicke (vergl. z.B. [9 - 15]). Obgleich explizit nicht darauf hingewiesen wird, läßt sich diese Vorgehensweise formal unter die Methoden der gewichteten Residuen [37] einordnen.

- (2i.2) Direkte Auswertung des dreidimensionalen integralen Impuls- und Drehimpulssatzes (Eulersche Bewegungsgleichungen), z.B. [16].
- (2i.3) Prinzip der virtuellen Arbeiten (z.B. [17, 18, 25]), Variationsprinzip (z.B. [19 - 24]), Hamiltonsches Prinzip und Varianten (vergl. [26, 27]).

Den zitierten Arbeiten ist gemeinsam, daß eigentlich thermodynamische Konzepte außer acht gelassen werden oder gegebenenfalls nur indirekt durch Voraussetzung eines elastischen Potentials berücksichtigt werden. Für die erste Gruppe (2i.1) ist besonders charakterisierend, daß die lokalen Bilanzgleichungen (insbesondere Impuls und Drall) als Axiome zum Ausgangspunkt genommen werden. Die in der dritten Gruppe (2i.3) genannten Prinzipie sind wohl Integralprinzipie, müssen aber als abgeleitete Prinzipie angesehen werden ([38] S. 594). In der üblichen Formulierung der modernen Kontinuumsphysik werden die integralen Bilanzsätze für den Impuls, Drall, Energie und Masse aber als die grundlegenden Prinzipie angesehen, aus denen man erst unter Voraussetzung von gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen der Feldgrößen und unter Voraussetzung einer Lokalisierungshypothese\* [39] zu lokalen (differentiellen) Bilanzgleichungen kommt. Hierbei zeigt sich auch, daß eine logische Hierarchie für die lokalen Bilanzgleichungen besteht. Diese klassische Deduktion ist schematisch in Abb. 1 dargestellt, aus der auch die hierarchische Struktur der lokalen Bilanzgleichung erkennbar wird. Darüberhinaus ist bekannt (z.B. [38]), daß aus den integralen Bilanzgleichungen nicht nur die lokalen Bilanzgleichungen, sondern auch Sprung- und Randbedingungen abgeleitet werden können. Die integrale Formulierung der Axiome ist daher nicht bloß eine Alternative zur lokalen (differentiellen) Form der Bilanzgleichungen, sondern ist der lokalen Formulierung übergeordnet und muß als grundlegend angesehen werden ([38] S. 232, [40] S. 1).

---

\* Die Lokalisierungshypothese bedeutet, daß die integralen Bilanzgleichungen nicht nur für den gesamten betrachteten Körper gültig sind, sondern für jeden beliebigen Teilbereich. Mit anderen Worten: Die integralen Bilanzgleichungen sind forminvariant gegenüber Änderung des Integrationsbereichs in betrachteten Körper.

Der Ausgangspunkt für die hier vorgestellte Entwicklung einer nichtlinearen Schalentheorie ist in mehreren Aspekten nicht konventionell. Hauptanliegen der Arbeit ist es, ohne Einschränkungen der Verformungen der Schale konsistente zweidimensionale Bewegungs- und (thermoelastische) Stoffgleichungen für Schalen beliebiger Geometrie aufzustellen, und zwar insbesondere unter Berücksichtigung thermodynamischer Prinzipie, d.h. dem 1. und 2. Hauptsatz. Die Beachtung thermodynamischer Prinzipie erfolgt hier weniger unter dem Gesichtspunkt, daß mechanische und thermische Phänomene unter allen Umständen gekoppelt behandelt werden müßten. Vielmehr soll durch die explizite Beachtung dieser Prinzipie der Vorstellung Rechnung getragen werden, daß thermodynamische Prinzipie von übergeordneter Bedeutung sind, und zwar auch im Zusammenhang mit rein mechanischen Theorien. Es sei hier einmal an die quasi-thermodynamische Annahme der Existenz eines elastischen Potentials in der Elastizitätstheorie (Greensche Methode [41]) erinnert, die erst durch Einbettung in eine thermomechanische Theorie ihre eigentliche physikalische Begründung erfährt. Ein weiterer Grund für die übergeordnete Bedeutung wird aus den folgenden Ausführungen deutlich.

Der erste Hauptsatz wird hier in der Form der klassischen integralen Energiebilanzgleichung vorausgesetzt. Als wesentlicher Aspekt kommt aber ein weiteres Axiom hinzu, nämlich die Forminvarianz der Energiebilanzgleichung gegenüber Wechsel des Beobachtersystems. Hierbei werden nur starre Beobachtersysteme als zulässig betrachtet. Diese Forderung der Forminvarianz bei Beobachterwechsel motiviert sich aus Überlegungen von Green und Rivlin [42]. Die Autoren haben 1964 in dieser kurzen Notiz<sup>x</sup>

---

<sup>x</sup> Green und Rivlin verweisen auf eine frühere Arbeit [43], in der ihr Konzept im Rahmen nichtklassischer Kontinua wohl erstmals entwickelt wurde. In diesem Zusammenhang sei die von den Autoren angedeutete Noll'sche Arbeit [44] kurz kommentiert. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß Noll zunächst den Begriff der Leistung von Kräften einführt, wobei nicht zwischen Kontakt-, Volumen- und Trägheitskräften unterschieden wird. Vielmehr kann die Noll'sche Kraftgröße auch eine - nicht näher ausgeführte - Kombination dieser Kräfte sein. Von dieser Leistung wird verlangt, daß sie invariant ist gegenüber Überlagerung der aktuellen Bewegung des Körpers mit Starrkörperbewegungen; eine Beschränkung auf gleichförmige oder infinitesimale Starrkörperbewegungen erfolgt dabei nicht. Die Noll'schen Kraftgrößen werden als objektiv angesehen. Es handelt sich hier also um die Forderung der Invarianz einer bestimmten Definition und nicht um den 1. Hauptsatz.

gezeigt, daß man aus der Energiebilanzgleichung den Impulssatz und die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors (d.s. die Cauchyschen Bewegungsgleichungen) herleiten kann, wenn man verlangt, daß die Energiebilanzgleichung invariant ist gegenüber Überlagerung der aktuellen Bewegung des Kontinuums mit infinitesimalen, gleichförmig translatorischen und rotatorischen Starrkörperbewegungen; dabei wird vorausgesetzt, daß die innere Energie, der Wärmefluß, die Spannungen und Volumenkräfte gewissen Transformationsvorschriften genügen. Diese Schlußweise ist schematisch in Abb. 2 dargestellt.<sup>x</sup>

Die von Green und Rivlin aufgestellte Forderung ist eine Invarianzforderung gegenüber aktiven Transformationen innerhalb ein und desselben Beobachtersystems (Bezugssystem), d.h. die auf eine physikalische Größe (z.B. mit Vektoreigenschaften) wirkende aktive Transformation erzeugt eine neue physikalische Größe (mit Vektoreigenschaften) im selben Beobachtersystem [45]. Invarianzforderungen gegenüber aktiven Transformationen haben allerdings nur einen geringen physikalischen "appeal". Invarianzforderungen gegenüber passiven Transformationen, d.s. Wechsel von einem starren Beobachtersystem zu einem anderen, sind dagegen einfacher zu deuten: Die Forderung der Forminvarianz des ersten Hauptsatzes (Energiebilanzgleichung) gegenüber Beobachterwechseln stellt einen Sonderfall des allgemeinen Relativitätsprinzips (Kovarianzprinzip, Forminvarianzprinzip) dar. In der Formulierung von Schmutzer [46] lautet das allgemeine Relativitätsprinzip: "Für zwei in beliebigen Bewegungszustand befindliche Beobachter, deren Koordinatensysteme kontinuierlich auseinander hervorgehen, haben die physikalischen Grundgesetze die gleiche Form". Dies ist einer der wesentlichen Gründe<sup>xx</sup> von der ursprünglichen Invarianzforderung von Green und Rivlin abzugehen und die Forminvarianzforderung der Energiebilanzgleichung gegenüber Beobachterwechsel zum Ausgangspunkt zu nehmen. Ohne hier jetzt auf die Einzelheiten einzugehen, ergeben sich aus der Forminvarianzforderung der integrale Impuls- und Drehimpulssatz (Eulersche Bewegungsgleichungen)

---

<sup>x</sup> Es sollte hier angemerkt werden, daß Green und Rivlin [42] eine eingeschränkte Formulierung des Energiesatzes benutzt haben, bei der gleichsam schon der Massenerhaltungssatz berücksichtigt wurde. Geht man von der allgemeineren, auf die Momentankonfiguration des Körpers bezogene Form des Energiesatzes aus, bei der die materielle zeitliche Ableitung der Summe der inneren und der kinetischen Energie gleich der Gesamtenergiezufuhr pro Zeiteinheit ist, dann erhält man aus den Green-Rivlinschen Invarianzforderungen nicht nur Impuls- und Drehimpulssatz, sondern auch den Massenerhaltungssatz.

<sup>xx</sup> Weitere Gründe sind auf S. 18 angegeben.



für das dreidimensionale Kontinuum als notwendige Bedingungen, aus denen man mit dem Lokalisierungspostulat die lokalen mechanischen Bilanzgleichungen (Cauchysche Bewegungsgleichungen) erhält. Abb. 3 zeigt schematisch die logische Struktur dieser Herleitung (Kap. 4). Dieses Ergebnis ist einmal deshalb von Interesse, weil sich zeigt, daß die integralen mechanischen Bilanzsätze (Impuls und Drall) nicht als separate Axiome betrachtet werden müssen, sondern als Konsequenzen des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik aufgefaßt werden können [47].

Außerdem ist von Bedeutung, daß bei dieser Betrachtungsweise Invarianzbedingungen zum Tragen kommen, die in ähnlicher Form bei der Aufstellung der Stoffgesetze von großer Bedeutung sind: Hier liefern Forminvarianzforderungen allgemeine Restriktionen für die mathematische Struktur der Stoffgesetze. Diese Situation ist natürlich verständlich, da das allgemeine Relativitätsprinzip (Forminvarianzprinzip) nicht nur für Bilanzgleichungen sondern auch für die Stoffgleichungen als gültig angesehen wird.

Einen besonderen Aspekt stellt der zweite Hauptsatz dar. Seine explizite Beachtung erfolgt unter dem Gesichtspunkt, daß der 2. Hauptsatz insbesondere dem Ablauf irreversibler Prozesse in Kontinua Einschränkungen auferlegt. Während hinsichtlich der Gültigkeit der Bilanzgleichungen Einigkeit besteht, ist die Diskussion um die Formulierung des 2. Hauptsatzes bei irreversiblen Prozessen noch im Fluß (vergl. z.B. [48]). Ausgangspunkt in der vorgelegten Arbeit ist der zweite Hauptsatz in der Form der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung zusammen mit der Interpretation von Coleman und Noll (1964 [49]).

Der grundsätzliche Gesichtspunkt ist hier, daß die Entropieungleichung nicht als eine Prozesseinschränkung angesehen wird, deren Erfüllung für jeden Prozess jeweils nachzuweisen ist, sondern daß verlangt wird, daß die Entropieungleichung für alle denkbaren Prozesse identisch erfüllt wird [50, 51]. Diese Forderung führt zusammen mit den Bilanzgleichungen zu weiteren allgemeinen Restriktionen für die mathematische Struktur der Stoffgleichungen (schematische Darstellung in Abb. 4).

Diese allgemeinen Anmerkungen über den 1. und 2. Hauptsatz sind gewiß noch nicht geeignet, ein klares Bild davon zu geben, wie die Entwicklung einer nichtlinearen Schalentheorie auf dieser Basis zu bewerkstelligen wäre. Der in dieser Arbeit eingeschlagene, z.T. neuartige Weg, wird in Grundzügen im folgenden Kapitel skizziert.

## 2. Grundzüge einiger approximativer Theorien nicht-isothermer Verformungen dünner Schalen

In jünster Vergangenheit sind verschiedene Vorgehensweisen zur Entwicklung von Schalentheorien auf der Grundlage thermodynamischer Konzepte vorgestellt worden [6, 52 - 62]. Hier lassen sich im wesentlichen zwei Gruppen von Vorgehensweisen unterscheiden: Einmal die Theorien, die von der dreidimensionalen Kontinuumsthermodynamik ausgehen und durch einen Integrationsprozeß über die Schalendicke zu zweidimensionalen Schalengleichungen kommen [6, 52 - 57]. Dagegen werden in der zweiten Gruppe die Schalengleichungen über ein direktes Verfahren gewonnen, das auf der Theorie eines zweidimensionalen, polaren Kontinuums, insbesondere Cosseratkontinuums, beruht [58 - 61]. Darüber hinaus gibt es Entwicklungen, die teilweise eine Ableitung vom Dreidimensionalen vornehmen, dann aber wesentliche Bilanzgleichungen in zweidimensionaler Form postulieren (z.B. [62]).

Die in diesem Bericht dargestellte Theorie ist der ersten Gruppe zuzuordnen. Zur Abgrenzung dieser Theorie zu den bisherigen Entwicklungen in der ersten Gruppe [6, 52 - 57] seien die wichtigsten Merkmale jener Arbeiten angegeben. Auf die anderen Arbeiten kann hier nicht eingegangen werden.

### 2.1 Nicht-isotherme elastische Schalentheorien: Ableitungen aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie

Gemeinsames Merkmal der Arbeiten von Green, Laws und Naghdi [6, 52, 53] sowie Krätzig [54 - 56] ist die Entwicklung des Verschiebungsfeldes im Schalenraum in eine unendliche Potenzreihe bezüglich der Dickenkoordinate und die ausschließliche Verwendung von mitgeschleppten Koordinaten (convected coordinates). In der Arbeit von Green, Laws und Naghdi (1968 [52]) wird von der dreidimensionalen integralen Energiegleichung und der integralen Clausius-Duhem Entropiegleichung unter Berücksichtigung der Wärmeleitung ausgegangen. Die Autoren waren in ihrer Formulierung darauf angewiesen, hinsichtlich der Temperaturverteilung über der Schalendicke nur einen sehr groben Ansatz zu machen, nämlich konstante Temperatur<sup>x</sup>. Außerdem sei erwähnt, daß bei der Auswertung der Green-Rivlinschen Invarianzforderungen, angewandt auf die über die Schalendicke integrierten Energiebilanzgleichung, zusätzliche Arbeitshypothesen<sup>xx</sup> eingeführt werden müssen. Die Autoren erhalten

---

<sup>x</sup> "... we might expect to express  $T$  as a MacLaurin series in  $\xi$  but so far it has not proved possible to use such an expansion" ( $T$ : absolute Temperatur,  $\xi$ : Dickenkoordinate)

<sup>xx</sup> "The quantities  $m^{Ni}$  are defined by (4.6) and (4.7) and are specified by constitutive equations ( $N > 2 \dots \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ )"

dadurch ein System von unendlich vielen mechanischen Bilanzgleichungen, in dem aufgrund des Verschiebungsansatzes auch unendlich viele höhere Momente auftreten. Es sei hier kritisch angemerkt, daß die Einführung der genannten Arbeitshypothesen physikalisch nicht durchsichtig ist; es besteht der Eindruck, daß hier verborgene Annahmen gemacht wurden, so daß es schwer fällt, den recht kurz gehaltenen Ableitungen mit Vertrauen zu folgen. Um diese Kritik andeutungsweise zu substantiieren, sei darauf hingewiesen, daß aus den Invarianzforderungen sich nur zwei vektorielle Bedingungsgleichungen und eine skalare Bedingung ergeben, und zwar unabhängig von dem Grad des Potenzreihenansatzes für das Verschiebungsfeld. Die Tatsache, daß hier unendlich viele mechanische Bilanzgleichungen erhalten werden, muß also auf weiteren, unausgesprochenen Voraussetzungen beruhen.

Bemerkenswert ist auch die Feststellung, daß die absolute Temperatur in Richtung der Dickenkoordinate nicht in eine MacLaurin-Reihe entwickelt werden konnte. Diese Feststellung ist wohl im Zusammenhang damit zu sehen, daß die Clausius-Duhem Entropieungleichung - ebenso wie die Energiebilanzgleichung - nur eine skalare Bedingung darstellt. Für die Koeffizienten des Reihenansatzes der Temperatur müssen aber so viele Gleichungen zur Verfügung stehen, wie Reihenglieder mitgenommen werden.

Diese hier angesprochenen Probleme werden in einer weiteren Arbeit von Green und Naghdi (1970 [53]) umgangen, indem nun allerdings eine verallgemeinerte Energiebilanzgleichung und Entropieungleichung eingeführt werden<sup>x</sup>. Um diese Verallgemeinerung zu erhalten, wird die lokale Energiebilanzgleichung mit einer skalaren Funktion  $\phi$  multipliziert und über das Volumen integriert;  $\phi$  wird dann als  $(\xi)^n$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$  interpretiert, so daß man anstelle einer integralen Energiebilanzgleichung (in klassischer Form) eine unendliche Zahl von integralen energetischen Bilanzbedingungen erhält. Die lokale Clausius-Duhem Entropieungleichung wird dagegen mit der skalaren Funktion  $\psi \geq 0$  multipliziert und über das Volumen integriert; für  $\psi$  wird dann  $\psi = (-\alpha + \xi)^n$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots \infty$ ,  $\alpha \leq \xi \leq \beta$  gesetzt, so daß  $\psi$  im Intervall  $\alpha < \xi \leq \beta$  stets positiv ist. Man erhält dann auch hier einen unendlichen Satz von Entropieungleichungen. Bemerkenswert ist, daß neben einer unendlichen Potenzreihenentwicklung der absoluten Temperatur auch eine unendliche Potenzreihenentwicklung der Temperaturinversen benützt wird.

---

<sup>x</sup> "We require generalized forms of the energy equation and entropy production inequality...".

Invarianz der unendlich vielen energetischen Bedingungen gegenüber Überlagerung mit infinitesimalen Starrkörperbewegungen liefert dann unendlich viele Bilanzgleichungen. Diese Ableitungen haben später in der Abhandlung von Naghdi (1972 [6]) ihren Niederschlag gefunden.

Anknüpfend an diese Arbeiten hat Krätzig ([54 - 56]) entsprechende verallgemeinerte Prinzipie angegeben. Ein wesentlicher Unterschied zu den Arbeiten von Naghdi et al. besteht darin, daß von der mit der absoluten Temperatur ( $T > 0$ ) multiplizierten lokalen Clausius-Duhem Entropieungleichung ausgegangen wird, und diese jeweils mit den Skalarfunktionen  $\phi = (\xi)^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ,  $\alpha \leq \xi \leq \beta$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  multipliziert und über die Schalendicke integriert wird. Für die absolute Temperatur wird ein unendlicher Reihenansatz bezüglich der Dickenkoordinate gemacht.

Zu diesen Entwicklungen lokaler zweidimensionaler Bilanzgleichungen und zweidimensionaler Entropiebedingungen aus den generalisierten integralen Energie- und Entropieprinzipien sind einige Anmerkungen angebracht. Zunächst ist klar, daß die Herleitung der generalisierten Prinzipie auf der lokalen Energiebilanzgleichung und lokalen Entropieungleichung beruht; dies heißt insbesondere auch, daß bei dieser Herleitung zunächst die exakte Erfüllung dieser lokalen Bedingungen vorausgesetzt wird. Damit die weitere Anwendung der generalisierten Prinzipie nun aber logisch einen Sinn hat, müssen jetzt diese generalisierten integralen Prinzipie als neue Fundamentalaxiome angesehen werden; sie ersetzen damit die klassische integrale Energiebilanzgleichung und die integrale Entropieungleichung. Das bedeutet insbesondere, daß die Voraussetzungen und die Herleitung der neuen generalisierten Integralprinzipie "vergessen" werden müssen. Vom physikalischen Standpunkt sind diese generalisierten Integralprinzipie etwas Gekünsteltes, da sie die noch frei wählbaren Funktionen  $\phi$  bzw.  $\psi$  enthalten, die keine physikalische Bedeutung haben.

Es ist wohl selbstverständlich, daß man von diesen generalisierten Integralprinzipien verlangen muß, daß sie für vorgegebene Funktionen  $\phi$  und  $\psi$  im Verein mit einem Lokalisierungspostulat wieder auf die klassische lokale Energiebilanzgleichung und die lokale Entropieungleichung führen. Für die generalisierte integrale Energiebilanzgleichung ist

\* Für die Funktionen  $\phi$  und  $\psi$  werden erst nachträglich Potenzreihenansätze gewählt.

dies bei Naghdi et al. und Krätzig der Fall, welche Funktion  $\phi$  ( $\phi$  stetig und differenzierbar) auch gewählt wird. Für die generalisierte Entropieungleichung ist dies aber nur der Fall, wenn die hier auftretende Skalarfunktion  $\psi$  im Integrationsbereich positiv ist. Naghdi et al. [53, 6] wählen die Funktion  $\psi$  so, daß  $\psi$  im Intervall zwischen den Schalenlaibungen ( $\alpha < \xi \leq \beta$ ) positiv ist; hier ist also die obige Forderung erfüllt. Bei Krätzig [54, 55] ist dagegen  $\psi \sim \phi = (\xi)^n$ ,  $n=0,1,2,\dots,\infty$ , so daß  $\psi$  das Vorzeichen im Integrationsbereich bei  $\xi=0$  wechseln kann. Damit führt die generalisierte integrale Entropieungleichung nicht mehr auf die lokale Entropieungleichung, sondern auf die Bedingung verschwindender Entropieproduktion ( $S=0$ ). Physikalisch bedeutet dies aber eine Einschränkung auf reversible Prozesse. Hier besteht also ein Widerspruch in der sonst allgemein angelegten thermoelastischen Schalentheorie (mit Wärmeleitung!), zu dem sich Krätzig [55] allerdings etwas unschlüssig bekennt<sup>x</sup>.

Wenn auch die physikalische Rechtfertigung für die Formulierung der generalisierten Energie- und Entropieprinzipie nicht unmittelbar gegeben ist, so ist doch eine mathematische Begründung für den "Integrationsmechanismus" von Naghdi et al. und Krätzig andeutungsweise möglich. Krätzig [54] bemerkt, daß eine mathematische Rechtfertigung dieser Prozeduren in dem Weierstraßschen Approximationssatz liege. Diese Interpretation wird aber in den genannten Arbeiten nicht weiter ausgeführt; im Hinblick auf die Formulierung des Approximationssatzes in [79]<sup>xx</sup> bleibt hier unausgesprochen, welche Funktion eigentlich bei dem Integrationsmechanismus approximiert wird. Eine andere, sehr naheliegende mathematische Rechtfertigung ist wohl in der Methode der gewichteten Residuen [37] zu suchen; aber auch diese Interpretation des Integrationsmechanismus würde noch eine detaillierte Analyse erfordern.

Neben der Entwicklung lokaler zweidimensionaler Bilanzgleichungen und lokaler zweidimensionaler Entropiebedingungen aus diesen generalisierten integralen Energie- und Entropieprinzipien steht die Formulierung konsistenter zweidimensionaler Stoffgleichungen für die Schalen. Auf diesen Aspekt in den Arbeiten von Naghdi et al. und Krätzig kann hier jetzt nicht eingegangen werden.

<sup>x</sup> "Daher sollte die Entropieungleichung (35b) korrekter als einfache Identitäten (= 0) geschrieben werden, was allerdings verschiedene thermodynamische Einschränkungen zur Folge hätte (reversible Prozesse)".

<sup>xx</sup> Jede im Intervall  $a \leq x \leq b$  stetige Funktion kann in diesem Intervall gleichmäßig durch Polynome approximiert werden [79].

Für eine praktikable Schalentheorie ist es notwendig die Reihenentwicklung des Verschiebungs- und Temperaturfeldes zu begrenzen und ebenso die Zahl der Wichtungsfunktionen  $\phi$  und  $\psi$  einzuschränken. Bei dem Integrationsmechanismus von Naghdi et al. und Krätzig besteht kein logischer Zusammenhang zwischen den Potenzreihenansätzen für Verschiebung und Temperatur einerseits und Wichtungsfunktionen  $\phi$  und  $\psi$  andererseits; daher kann im Prinzip die Zahl der Reihenglieder und die Zahl der Wichtungsfunktionen verschieden sein. Hier besteht eine gewisse Vielfalt der Wahlmöglichkeiten und die getroffene Wahl bestimmt u.a. den Charakter und den Approximationsgrad der Schalentheorie. Die von Krätzig getroffene Wahl [ 55, S. 324 ] orientiert sich an klassischen Vorstellungen zu Schalentheorien ("...zeitgemäße Definition dünner Schalentragwerke", Entsprechungen zur Cosserat-Fläche). Es scheint, daß ein mehr physikalisch oder mathematisch begründeter Integrationsmechanismus hier Kriterien liefern könnte, um diese Willkürlichkeit einzuschränken. Man denke hier an das Galerkinsche Verfahren, bei dem die Wichtungsfunktionen gleich den Ansatzfunktionen der Näherungslösung sind.

Abschließend soll noch auf eine Arbeit von Hammel [ 57 ] verwiesen werden. Hammel wählt von vornherein einen in der Dickenkoordinate quadratischen Ansatz, so daß hier also näherungsweise die Dickenänderung, Schubverformungen, und Querschnittsverwölbungen berücksichtigt werden. Für die Temperaturverteilung wird ebenfalls ein quadratischer Ansatz gewählt. Ausgangspunkte sind bei Hammel die lokalen Massen-, Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichungen sowie die lokale Energiebilanzgleichung, in der der lokale Impulssatz berücksichtigt wurde, und ferner die mit der absoluten Temperatur multiplizierte lokale Clausius-Duhem Entropiegleichung. Hier wird also nicht von den Invarianzeigenschaften des integralen Energiesatzes Gebrauch gemacht, so daß die enge Kopplung zwischen Energiesatz und Impuls- sowie Drehimpulssatz entfällt. Diese lokalen Gleichungen werden jeweils mit den Funktionen  $\phi = (\xi)^n$ ,  $n = 0, 1, 2$  ohne nähere Begründung multipliziert und über die Schalendicke integriert. Dabei werden alle Entropiegleichungen, die höhere als quadratische Momente der spezifischen Entropie enthalten, ad hoc ignoriert. Auf dieses Vorgehen lassen sich auch einige der schon oben gemachten kritischen Anmerkungen übertragen, was aber nicht näher ausgeführt zu werden braucht. Der hauptsächliche Beitrag der Hammelschen Arbeit bezieht sich auf die Entwicklung konsistenter zweidimensionaler Stoffgleichungen, wobei von

einem streng linear elastischen Materialverhalten ausgegangen wird. Wesentlicher Aspekt ist dabei die Bemühung, weitere Vereinfachungen in mathematisch konsistenter Weise durchzuführen (Vernachlässigung von Termen vergleichbarer oder kleinerer Größenordnung).

Hiermit soll der Einblick in allgemeine Schalentheorien, die auf einer thermodynamischen Basis entwickelt wurden und von Potenzreihenansätzen ausgehen, beendet werden. Im folgenden Abschnitt wenden wir uns einem alternativen Konzept zu, das eine Reihe der hier angedeuteten Probleme nicht kennt.

## 2.2 Skizze einer approximativen Theorie nicht-isothermer Verformungen dünner thermoelastischer Schalen

Zunächst sollen spezielle Ausgangsbedingungen angegeben werden, unter denen die nicht-isotherme Schalentheorie entwickelt werden soll; diese Bedingungen sind nicht methodischer Art. Im Gegensatz zu den in Kap. 2.1 angesprochenen Theorien wird hier als Referenzkonfiguration der undeformierte (natürliche) Zustand der Schale benutzt (materielle oder Lagrangesche Koordinaten); dadurch werden die Bilanzgleichungen explizit nichtlinear. Der Verschiebungsvektor bzw. der momentane Ortsvektor eines materiellen Punktes im Schalenraum wird in eine endliche Potenzreihe bezüglich der Dickenkoordinate entwickelt, wobei allerdings von vornherein eine Beschränkung auf einen in der Dickenkoordinate linearen Ansatz erfolgt. Für die Temperatur bzw. die Temperaturinverse wird ein quadratischer Ansatz gewählt. Der Ansatz für den momentanen Ortsvektor entspricht der kinematischen Annahme, daß materielle Punkte auf der Normalen zur unverformten Referenzfläche der Schale nach der Deformation auf einer Geraden liegen, die aber nicht mehr normal zur deformierten Referenzfläche steht; ferner kann sich der Abstand der materiellen Punkte von der Referenzfläche ändern, aber nur symmetrisch zur Referenzfläche. Es werden daher Scherdeformationen und Wandstärkenänderungen der Schale durch große Dehnungen näherungsweise berücksichtigt, nicht aber die Verkrümmung der Normalfaser. Dieser Ansatz ist solange gerechtfertigt, wie die Biegespannungen nicht deutlich die Membranspannungen überschreiten und Schubspannungen klein gegenüber den Normalspannungen bleiben. Im Vergleich zur üblichen technischen Schalentheorie<sup>x</sup> bietet dieser Ansatz zusätzliche kinematische Freiheiten, was dann aber auch zu komplexeren Schalengleichungen führt.

---

<sup>x</sup> Normalenhypothese und unveränderliche Schalendicke

Der wesentliche und z.T. neuartige Aspekt, der jetzt angesprochen werden soll, ist methodischer Natur. Im Unterschied zu den in Kap. (2.1) geschilderten Methoden wird hier von der klassischen integralen Energiebilanzgleichung und Clausius-Duhem-Entropieungleichung ausgegangen, denn die generalisierten thermodynamischen Prinzipie lassen sich physikalisch nicht interpretieren und die lokalen Bilanzgleichungen und die lokale Entropieungleichung stellen nach den Ausführungen in Kap. 1 nicht die übergeordnete axiomatische Basis dar.

In einer ersten Arbeit hat der Autor [63] im Rahmen der oben genannten Ausgangsbedingungen aber unter der Voraussetzung isothermer Prozesse (d.h. gleichförmige konstante Temperatur, keine Wärmeleitung, keine Wärmequellen) eine isotherme nichtlinear elastische Schalentheorie entwickelt, und zwar unter Anwendung der Green-Rivlinschen Invarianzforderungen für den zweidimensionalen über die Schalendicke integrierten Energiesatz<sup>\*</sup>. In diesem Rahmen läßt sich ein vollständiges System zweidimensionaler Bewegungsgleichungen und Einschränkungen für die zweidimensionalen Stoffgleichungen ableiten, ohne daß weitergehende Zusatzhypthesen erforderlich wären. Die genannten Einschränkungen folgen aus den Invarianzbedingungen und aus der Restenergiegleichung<sup>\*\*</sup>. Insbesondere ist beachtenswert, daß ein Rückgriff auf lokale Gleichungen (wie z.B. die Symmetrie des Spannungstensors) oder dreidimensionale Stoffgleichungen nicht zu erfolgen braucht. Die Ableitungsstruktur ist in dem logischen Schema Abb. 5 wiedergegeben. Verträglichkeit mit der integralen Clausius-Duhem Ungleichung wurde aber nicht untersucht. Auf wesentliche Einzelheiten dieses Ergebnisses wird später (Teil 2) eingegangen werden.

Obgleich die hier geschilderte Vorgehensweise ein vollständiges allgemeines System von zweidimensionalen Feldgleichungen liefert, unterliegt sie doch wesentlichen Einschränkungen: Enthält die Entwicklung des Verschiebungs- bzw. des momentanen Ortsvektors nach der Dickenkoordi-

---

<sup>\*</sup> Den zweidimensionalen integrierten Energiesatz erhält man wie folgt: Betrachtet wird irgendein endlicher Abschnitt der Schale, der ganz durch die Schalenlaibungen einerseits und durch einen geschlossenen Randstreifen andererseits begrenzt wird (Abb. 11). Auf diesen endlich großen, dreidimensionalen Teilkörper wird die klassische dreidimensionale, integrale Energiebilanzgleichung angesetzt. Für den Verschiebungs- bzw. den momentanen Ortsvektor wird der gewählte Potenzreihenansatz eingesetzt und die Integration formal über die Schalendicke durchgeführt; es wird dabei nötig, eine Reihe gewichteter, integrierter Größen einzuführen. Der zweidimensionale, integrale Energieansatz stellt sich dann dar durch Integralausdrücke über eine Teilfläche der Referenzfläche und über die Randkurve dieser Teilfläche.

<sup>\*\*</sup> Die Restenergiegleichung erhält man aus der zweidimensionalen Energiegleichung, wenn in dieser die Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden.



nate quadratische und höhere Terme in der Dickenkoordinate, dann liefern die Invarianzforderungen des über die Schalendicke integrierten Energiesatzes nicht genügend Bewegungsgleichungen. Geht man ferner von der Voraussetzung isothermer Prozesse ab und setzt daher eine nichtkonstante Temperaturverteilung über die Schalendicke an, dann ist es erforderlich die integrale Clausius-Duhem-Entropieungleichung mit in die Betrachtung einzubeziehen; die formal über die Schalendicke integrierte Entropieungleichung stellt aber nur eine skalare Bedingung dar, so daß selbst bei linearem Verschiebungsansatz nicht hinreichend viele zweidimensionale Feldgleichungen (für die Koeffizienten der Temperaturverteilung über die Schalendicke) erhalten werden. Es genügt also offensichtlich nicht, nur von dem über die Schalendicke integrierten Energiesatz und der Entropieungleichung auszugehen. Es müssen zusätzliche Forderungen hinzukommen.

Wenn im Rahmen der Entwicklung einer physikalischen Theorie sich herausstellt, daß mehr physikalische Variable vorhanden sind als Gleichungen verfügbar, dann ist dies ein unübersehbarer Hinweis darauf, daß gewisse physikalische Gesetze fehlen bzw. übersehen wurden. Wir übertragen diese Einsicht auf die Situation bei der Entwicklung der Schalentheorie und fassen die dort gesuchten zusätzlichen Forderungen als physikalisch interpretierbare Bedingung auf.

Man könnte hier zunächst daran denken, daß die Invarianzforderungen zu eng gefaßt sind: Die ausschließliche Betrachtung von starren Zusatzbewegungen bzw. starren Beobachtersystemen könnte dahingehend erweitert werden, daß man auch - bei passiver Interpretation der Invarianzforderungen - deformierbare Beobachtersysteme zuläßt [64, 65].

Dieser Aspekt liefert möglicherweise zusätzliche Bedingungen insbesondere bei höheren Potenzansätzen für den momentanen Ortsvektor im Schalenraum; er scheint aber nicht weiterzuführen bei ungleichförmiger Temperaturverteilung über die Schalendicke. Daher wurde dieser Gedanke nicht weiter verfolgt.

Hier soll ein anderer Weg eingeschlagen werden, der nicht in der Erweiterung fundamentaler allgemeingültiger Prinzipie besteht, sondern der auf einer physikalischen Interpretation der endlichen Potenzreihenansätze für den momentanen Ortsvektor und der Inversen der absoluten Temperatur beruht. Diese Ansätze stellen mathematisch gesehen zunächst nichts anderes dar als Näherungen für die Momentanposition einer materiellen Faser (Normalfaser), die vor der Deformation normal zur Referenzfläche orientiert ist, und für die in ihr vorhandene Verteilung der Temperaturinversen.

Faßt man nun diese Ansätze als innere kinematische und thermische Zwangsbedingungen auf, die in einem Gedankenexperiment physikalisch exakt zu realisieren wären, dann bestehen zwei prinzipielle Möglichkeiten:

- (1) Man könnte daran denken, die Stoffgleichungen des aktuellen dreidimensionalen Kontinuums zu modifizieren (Zwangsbedingungen sind konstitutive Bedingungen [66 - 68]) oder
- (2) die aktuellen äußeren Einwirkungen (Volumenkräfte, Oberflächenkräfte, Wärmequellen und Wärmeflüsse an der Oberfläche) durch Reaktionsgrößen in der Form zusätzlicher gedachter äußerer Einwirkungen zu ergänzen [69 - 73],

so daß sich unter beliebigen aktuellen äußeren Einwirkungen nur solche Verschiebungs- und Temperaturfelder einstellen, die mit den inneren Zwangsbedingungen verträglich sind. Hier soll der zweite, vielleicht naheliegendere Weg beschritten werden, wobei es nötig sein könnte, zunächst auch gedachte Einwirkungen zuzulassen, die im aktuellen Problem garnicht vorhanden sind, wie z.B. Volumenmomente.

Diese exakte Realisation der beiden inneren Zwangsbedingungen durch gedachte, von außen eingeprägte Zusatzeinwirkungen in einem Gedankenexperiment bedeutet zunächst die Lösung eines neuen dreidimensionalen Problems. Es kann nun leicht gezeigt werden (Kap. 7), daß sich unendlich viele derartige Zusatzeinwirkungen finden lassen, die alle die inneren kinematischen und thermischen Zwangsbedingungen realisieren. Diese Willkürlichkeit kann nur durch zusätzliche Forderungen hinsichtlich der gedachten Zusatzeinwirkungen beseitigt werden. Dieses neue, dreidimensionale, erweiterte Problem zusammen mit derartigen zusätzlichen Forderungen soll als Ersatzproblem bezeichnet werden.

Im Blick auf den 1. und 2. Hauptsatz in der Form der integralen Energiebilanzgleichung und der Clausius-Duhem-Entropiegleichung sind nun folgende, physikalisch unmittelbar einleuchtenden, zusätzlichen Forderungen zu stellen, damit die Lösung des Ersatzproblems eine Näherung für das aktuelle, dreidimensionale Problem darstellt:

#### Energie-Forderung

Formuliert man die integrale Energiebilanzgleichung (1. Hauptsatz) des erweiterten Problems für einen Schalenabschnitt zwischen den Schalenlaibungen (bzw. für irgendeine materielle Normalfaser), dann sollen die gedachten Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag zur Gesamtenergiebilanz liefern.

### Entropie-Forderung

Hinsichtlich der integralen Entropieungleichung (2. Hauptsatz) für einen Schalenabschnitt zwischen den Schalenlaibungen soll für das erweiterte Problem verlangt werden, daß die Gesamtentropiezufuhr durch die gedachten Zusatzeinwirkungen verschwindet.

Die beiden integralen Forderungen sollen insbesondere

- (1) für jeden beliebigen Schalenabschnitt zwischen den Laibungen
- (2) für alle zugelassenen Beobachtersysteme (starre Beobachtersysteme)
- (3) und für alle denkbaren aktuellen äußeren Einwirkungen

gelten. Auch die Forderungen (1), (2), (3) sprechen physikalisch für sich selbst: Sie besagen einfach, daß kein Schalenabschnitt, Beobachtersystem oder System von aktuellen äußeren Einwirkungen vor dem anderen ausgezeichnet ist. Es sind dies daher Invarianzbedingungen (Bereichsinvarianz, Beobachterinvarianz und "Prozessinvarianz"), die an die Energie- und Entropie-Forderung zu stellen sind.

Mit der Energie- und Entropieforderung wird erreicht, daß für jeden Schalenabschnitt zwischen den Laibungen die integrale Energiebilanzgleichung und die integrale Entropieungleichung des Ersatzproblems mit den entsprechenden thermodynamischen Prinzipien des aktuellen Problems übereinstimmen, sofern dort der angenommene Funktionstyp für die Verteilung der Verschiebung (bzw. Ortsvektor) und der absoluten Temperatur (bzw. Temperaturinversen) als der tatsächlich vorliegende angesehen wird. Die Lösung des Ersatzproblems erfüllt damit den 1. und 2. Hauptsatz (in Form der genannten Integralprinzipie), wie sie für das aktuelle Problem integral für irgendeinen Teilbereich, nämlich für irgendeinen Schalenabschnitt bzw. irgendein durch die Laibungen begrenztes finites Linienelent (= Normalfaser) gelten, aber eben nur für das ganze Linienelement und nicht für Teile (Punkte) davon.

Ob die hier angegebenen, physikalisch einleuchtenden Zusatzforderungen ausreichen, um die genannte Willkürlichkeit in der Wahl der gedachten Zusatzeinwirkungen vollständig zu beseitigen, kann diesen Forderungen aber nicht unmittelbar angesehen werden. Diese Frage ist wesentlicher Inhalt der vorgelegten mathematischen Analyse; hierbei ist auch zu klären, ob diese Forderungen widerspruchsfrei sind und ob sie gegebenenfalls Redundanzen enthalten.

Wie eine Literaturdurchsicht gezeigt hat, ist der Gedanke, innere Zwangsbedingungen durch zusätzliche äußere Einwirkungen und nicht durch Abänderung des Stoffverhalten zu realisieren, nicht neu. Woźniak [69] hat innere kinematische Zwangsbedingungen durch Zusatzeinwirkungen wie Volumenkräfte und Oberflächenspannungen realisiert und dieses Konzept für die Entwicklung approximativer mechanischer Theorien (diskrete Modelle, Platten- oder Schalentheorien) diskutiert. Auf die Einführung dieser Realisation von kinematischen Zwangsbedingungen kann deshalb die vorliegende Abhandlung keinen Anspruch erheben, wenn sie auch unabhängig von dem Arbeiten von Woźniak verlief.

Zur Abgrenzung der Arbeiten sei folgendes gesagt. Die Arbeiten von Woźniak betreffen kinematische Zwangsbedingungen, z.T. in sehr abstrakter Form.\* Nun sind bekanntlich unendlich viele Zusatzeinwirkungen denkbar, die alle die kinematischen Zwangsbedingungen realisieren (vergl. Kap. 7, Teil 1). Woźniak definiert deshalb sogenannte ideale kinematische Zwangsbedingungen durch die Forderung, daß die integrale virtuelle Arbeit der Zusatzeinwirkungen im Gesamtkörper für alle virtuellen Verschiebungen verschwinden soll. Andere Bedingungen sind denkbar [72], und jede dieser Bedingungen kann zu einer andersartigen Theorie führen. Hier sei darauf hingewiesen, daß die in dieser Abhandlung verwendeten Konzepte nicht von einem formalen Prinzip virtueller Arbeiten ausgehen, sondern von verschiedenen, physikalisch plausiblen und mathematisch einleuchtenden Forderungen, die im Rahmen einer Kontinuumsthermodynamik zu sehen sind.

Woźniak [73] hat seine Überlegungen ansatzweise auf thermomechanische, gekoppelte Zwangsbedingungen abstrakter Art ausgedehnt, indem neben inneren Reaktionskräften auch unbekannte Wärmequellen bzw. -senken eingeführt werden. Auch hier werden zur vollständigen Charakterisierung des Problems zusätzliche Forderungen in der Art eines formalen Prinzips virtueller Aktionen ("ideality" principle) eingeführt, deren physikalischer Hintergrund aber im Dunkeln bleibt. Darüber hinaus bestehen Widersprüche in der globalen und lokalen Entropieungleichung. Eine detailliertere Entwicklung wäre hier notwendig gewesen.

---

\* In der weiteren Entwicklung werden auch innere kinetische Zwangsbedingungen, also Bedingungen an die Spannungen, betrachtet [71].

### 2.3 Plan der Abhandlung (Teil 1)

Bevor das hier angedeutete schalentheoretische Konzept im einzelnen entwickelt wird, werden in den Kapiteln 3 bis 5 die weitgehend bekannten Grundlagen zur dreidimensionalen Theorie nichtlinear thermoelastischer Körper dargestellt. Die Ableitung der dreidimensionalen lokalen Feldgleichungen erfolgt dabei auf der Basis des 1. und 2. Hauptsatzes in integraler Form. Diese Darstellung hat den Sinn, die Nomenklatur einzuführen, später benötigte Beziehungen bereitzustellen, und sich mit der Auswertung der beiden thermodynamischen Prinzipien vertraut zu machen.

In Kap. 3 werden Grundbeziehungen der Kinematik und Deformation bei Verwendung verschiedener Bezugssysteme (materielle, räumliche und mitgeschleppte Koordinaten) dargestellt. In Kap. 4 wird von der klassischen, dreidimensionalen integralen Energiebilanzgleichung in der Momentan-konfiguration ausgegangen und diese wird unter Verwendung materieller Koordinaten auf die undeformierte Ausgangskonfiguration umgerechnet. Die Begriffe der Koordinaten - und der Beobachtertransformation und -invarianz werden erläutert.

Anstelle der Green-Rivlinschen Invarianzforderungen [42], die auch von Naghdi et al. [6, 52, 53] und Krätzig [54, 55] verwendet wurden, wird hier von der Forminvarianz der integralen Energiebilanzgleichung<sup>x</sup> gegenüber Wechsel des Beobachtersystems ausgegangen. Ein Grund dafür ist schon in Kap. 1 genannt worden; ein weiterer Grund ist in der Tatsache zu sehen, daß die von Green-Rivlin angenommenen infinitesimalen und gleichförmigen Transformationen physikalisch Einschränkungen darstellen, die nicht notwendig sind. Im einzelnen wird die Forminvarianz bei Wechsel zwischen gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen und bei beliebig rotatorisch bewegten Beobachtersystemen analysiert ohne Beschränkung auf benachbarte Lagen der Beobachtersysteme. Ein besonderer Aspekt ergibt sich hier wegen der Formulierung in materiellen Koordinaten, denn durch den Beobachterwechsel wird hier auch das materielle Koordinatensystem betroffen. Die Herleitung ist in Abb. 3 in einem Flußdiagramm skizziert. Diese Ableitung der dreidimensionalen Impuls-, Drehimpuls- und der reduzierten Energiebilanzgleichung ist in den einschlägigen Fachbüchern [74, 75] mit diesem Detaillierungsgrad nicht zu finden.

---

<sup>x</sup> dargestellt in Bezug auf die undeformierte Ausgangskonfiguration

Die Darstellung der dreidimensionalen Feldgleichungen wird in Kap. 5 mit der Analyse der Restriktionen der thermoelastischen Stoffgleichungen, wie sie aus der Forminvarianz bei Beobachterwechsel und der Clausius-Duhem-Entropieungleichung folgen, abgeschlossen.

Die Kapitel 6, 7 und 8 der Abhandlung beinhalten den ersten Teil des in Kap. 2.2. angedeuteten schalentheoretischen Konzepts. In Kap. 6 wird das notwendigste Rüstzeug zur Differentialgeometrie von Flächen und zum Tensorkalkül auf Flächen und im Schalenraum zusammengestellt. Kap. 7 gibt eine detaillierte Beschreibung des Ersatzproblems. In Kap. 8 werden schließlich die integrale Energiebilanzgleichung für die Schale und die Energie-Forderung für die gedachten Zusatzeinwirkungen unter den Invarianzbedingungen ausgewertet. Hier zeigt sich, daß noch Freiheiten in der Wahl der gedachten Zusatzeinwirkungen vorhanden sind. Dies führt zu zwei unterschiedlichen Sätzen von zweidimensionalen Bewegungsgleichungen und algebraischen Restriktionen für die mechanischen Stoffgleichungen. Diese Ergebnisse werden vergleichend einander gegenübergestellt.

Der 2. Teil<sup>x</sup> der Abhandlung befaßt sich mit der Auswertung der Forminvarianz der zweidimensionalen Stoffgleichungen und der integralen Entropieungleichung einschließlich der Entropie-Forderung für die gedachten Zusatzeinwirkungen.

---

<sup>x</sup> T. Malmberg: Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen, Teil 2: Auswertung von Entropiebilanzbedingungen, KfK 4375, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988

### 3. Kinematik und Deformation

Im folgenden werden einige wesentliche Begriffe und Beziehungen im dreidimensionalen Kontinuum, die die Koordinatensysteme, die (lokale) Kinematik und die (lokalen) Deformationen in tensorieller Darstellung betreffen, zusammengestellt. In Einzelheiten sei der Leser auf die Fachliteratur (z.B. [39, 41, 45, 66, 76, 77]) verwiesen. Es muß daher diese Zusammenstellung mehr als eine kurz kommentierte Legende angesehen werden.

#### 3.1 Materielle, räumliche und mitgeschleppte Koordinaten

Die materiellen Punkte eines kontinuierlichen Mediums mögen zu einem Zeitpunkt ( $t=0$ ) einen Bereich  $B_R$  mit dem Volumen  $V_R$  und der Oberfläche  $O_R$  umfassen. Dieser Zeitpunkt kann durch einen ausgezeichneten oder natürlichen Zustand des Körpers charakterisiert sein, z.B. den spannungsfreien, unverformten Zustand eines Körpers oder einen Zustand, in dem der Körper eine besonders einfache geometrische Gestalt hat.

In diesem Zustand (Referenzkonfiguration) werde die Lage eines materiellen Teilchens  $X$  in Bezug auf ein krummliniges, starres Koordinatensystem mit den - Lagrangeschen oder materiellen - Koordinaten  $X^K$  ( $K=1, 2, 3$ ) beschrieben (Abb. 6). In diesem Koordinatensystem sind

$\bar{G}_K(X^M), \bar{G}^K(X^M)$  die ko- und kontravarianten Basisvektoren

$G_{KL}(X^M), G^{KL}(X^M)$  die ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten

$G(X^M) = \det(G_{KL})$  die Determinante der Metrikkoeffizienten

$\Gamma_{ML}^K(X^M)$  die Christoffelsymbole 2. Art

$dV_R = \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3$  das Volumenelement

und die kovariante Ableitung werde durch ein Semikolon  $(\cdot)_{;K}$  gekennzeichnet.

Die Lage eines materiellen Teilchens  $X$  kann dann durch Angabe der materiellen Koordinaten  $X^k$  des Ortes, an dem sich das Teilchen befindet, definiert werden oder durch Angabe des Ortsvektors  $\bar{P}(X)$ , der sich vom (festen) Ursprung  $O$  des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens  $X$  erstreckt.

Unter der Einwirkung von äußeren Kräften wird die Lage der materiellen Punkte verändert, der Körper wird deformiert und erhält ein neues Volumen  $V$  und eine neue Oberfläche  $O$ . Ist  $\bar{p}(X, t)$  der neue Ortsvektor des materiellen Teilchens  $X$  zum Zeitpunkt  $t$  und  $\bar{P}(X)$  der ursprüngliche Ortsvektor zum Zeitpunkt  $t=0$ , dann ist

$$\bar{u}(X, t) = \bar{p}(X, t) - \bar{P}(X)$$

der Verschiebungsvektor des Teilchens  $X$ ; hierbei sind  $\bar{p}$  und  $\bar{P}$  auf denselben Ursprung bezogen. Der Bewegungsablauf bzw. der momentane verformte Zustand (Momentankonfiguration) zum Zeitpunkt  $t$  kann nun in Bezug auf verschiedene Koordinatensysteme dargestellt werden. Zunächst einmal ist es möglich - im Unterschied zu dem materiellen Koordinatensystem - ein sog. räumliches Koordinatensystem mit den Koordinaten  $x^k$  ( $k=1, 2, 3$ ) zu wählen, das als völlig unabhängig von dem materiellen Koordinatensystem anzusehen ist, sich aber relativ zu diesem nicht bewegt. In diesem System sind

$\bar{g}_k(x^m), \bar{g}^k(x^m)$  ko- und kontravariante Basisvektoren

$g_{kl}(x^m), g^{kl}(x^m)$  ko- und kontravariante Metrikkoeffizienten

$g(x^m) = \det(g_{kl})$  Determinante der Metrikkoeffizienten

$\gamma_{ml}^k(x^m)$  Christoffelsymbole 2. Art

$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$  Volumenelement



und die kovariante Ableitung wird durch einen Strich  $(\cdot)_{/k}$  gekennzeichnet. Man beachte, daß hier für die Grundsymbole und Indizes kleine Buchstaben verwendet werden. Die momentane Lage eines Teilchens  $X$  zum Zeitpunkt  $t$  wird durch Angabe der räumlichen (Eulerschen) Koordinaten  $X^k$  ( $k=1,2,3$ ) oder durch den Ortsvektor  $\vec{p}(X)$  angegeben. Wesentlich ist, daß alle physikalischen Größen (wie z.B. Verschiebungs- oder Geschwindigkeitsfeld) als Funktion der momentanen Ortskoordinaten  $X^k$  und der Zeit  $t$  (unabhängige Veränderliche) angesehen werden und alle vektoriellen und tensoriellen Größen, die einem bestimmten materiellen Teilchen zuzuordnen sind, hier auf die Basisvektoren an dem Ort bezogen sind, an dem sich das Teilchen momentan befindet. Die räumlichen Koordinaten  $X^k$  sind also hier keine Identifikatoren für ein bestimmtes materielles Teilchen. In der Fluidodynamik wird dies gewöhnlich als die Eulersche Betrachtungsweise bezeichnet.

Der momentane Zustand bzw. der Bewegungs- und Verformungsverlauf kann aber auch unter Verwendung der Lagrangeschen (materiellen) Koordinaten beschrieben werden. Hier sind zwei Möglichkeiten streng zu unterscheiden. Einmal kann der Bewegungsablauf unter Verwendung der Lagrangeschen Koordinaten  $X^K$  in dem anfangs beschriebenen Referenzsystem dargestellt werden, wobei die vektoriellen und tensoriellen Größen auf die Basis des Referenzsystems am Ort  $X^K$  in der Ausgangskonfiguration zu beziehen sind. Dieses Konzept entspricht der Vorstellung, daß das Referenzsystem (Koordinatensystem  $X^K$  mit Basis  $\vec{G}_K$ ) mit den zu ermittelnden physikalischen Größen (wie z.B. Geschwindigkeits- oder Spannungsfeld) belegt ist, die in diesem System differenziert und integriert werden. Stellt man sich das Koordinatensystem  $X^K$  bildhaft als ein diskretes Maschenetz von Koordinatenlinien vor (Abb. 6), dann bleibt dieses Netz unbeeinflusst durch die Deformation: die Maschen, in denen die Rechenoperationen stattfinden, deformieren sich nicht. Dies soll hier kurz als die Darstellung in materiellen Koordinaten bezeichnet werden [41].

Ferner kann der Bewegungsablauf aber auch unter Verwendung eines Koordinatensystems beschrieben werden, das mit dem Körper verbunden ist und sich daher mitdeformiert. (Abb. 6). Zum Zeitpunkt  $\bar{t} = 0$  falle es mit dem Referenzsystem (z.B. unverformter Körper) zusammen. Die Koordinaten dieses sich deformierenden Systems können dann auch mit  $X^K$  ( $K=1, 2, 3$ ) bezeichnet werden. Auch sie werden als Lagrangesche Koordinaten bezeichnet, da sie ein materielles Teilchen identifizieren. Wesentlich ist, daß alle vektoriellen und tensoriellen Größen auf die Basis eines sich mit dem Körper deformierenden Koordinatensystems bezogen werden. Relativ zum Referenzsystem ist diese Basis zeitabhängig, was bei der zeitlichen Differentiation entsprechend zu beachten ist. Diese Darstellungsweise wird als die Darstellung in mitgeschleppten Koordinaten (convected coordinates) bezeichnet. In diesem System seien

$\bar{g}_K(X^M, t), \bar{g}^K(X^M, t)$  die ko- und kontravarianten Basisvektoren

$g_{KL}(X^M, t), g^{KL}(X^M, t)$  die ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten

$g(X^M, t) = \det(g_{KL})$  die Determinante der Metrikkoeffizienten

$\bar{\gamma}_{ML}^K(X^N, t)$  die Christoffelsymbole 2. Art

$dV = \sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3$  das Volumenelement;

die kovariante Ableitung wird durch einen Doppelstrich  $(\cdot)_{||K}$  gekennzeichnet. Man beachte: als Grundsymbole werden kleine Buchstaben verwendet, für die Indizes aber große.

Die Darstellung in materiellen Koordinaten wird in diesem Bericht hauptsächlich Anwendung finden.

### 3.2 Basisvektoren, Deformationsgradient und Verzerrungstensor

In der Ausgangskonfiguration (Bezugskonfiguration) ist der Abstandsvektor zweier differentiell benachbarter materieller Punkte mit den materiellen Koordinaten  $X^K$  und  $X^K + dX^K$  gegeben durch<sup>x</sup>

$$d\bar{P}(X^K) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial X^M} dX^M = \bar{P}_{,M} dX^M = \bar{G}_M dX^M, \quad (3.1)$$

wobei

$$\bar{G}_M = \bar{P}_{,M}, \quad M = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

die kovarianten Basisvektoren darstellen. Die kovarianten Metrikoeffizienten sind durch

$$G_{MN} = \bar{G}_M \cdot \bar{G}_N \quad (3.3)$$

definiert. Den kovarianten Basisvektoren  $\bar{G}_M$  sind die kontravarianten Basisvektoren  $\bar{G}^M$  zugeordnet:

$$\bar{G}^M = \frac{1}{\sqrt{G}} \bar{G}_K \times \bar{G}_L, \quad K, L, M \text{ zyklisch} \quad (3.4)$$

$$G := \det(G_{MN}) \quad (3.5)$$

bzw.

$$\bar{G}^M = \frac{1}{2} \epsilon_R^{MKL} \bar{G}_K \times \bar{G}_L \quad (3.6)$$

mit dem Permutationstensor

$$\epsilon_R^{KLM} = \frac{1}{\sqrt{G}} e^{KLM}, \quad \epsilon_{R KLM} = \sqrt{G} e_{KLM} \quad (3.7)$$

$$e^{KLM} = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{KLM zyklisch} \\ -1 & \text{KLM antizyklisch} \\ 0 & \text{zwei oder drei Indizes gleich} \end{array} \right\} = e_{KLM} \quad (3.8)$$

<sup>x</sup> Hier wird von der Summationskonvention Gebrauch gemacht: Über gleiche hoch- und tiefgestellte lateinische Indizes wird von 1 bis 3 summiert.

Die kontravarianten Metrikkoeffizienten  $G^{MN}$  sind definiert durch

$$G^{MN} = \bar{G}^M \cdot \bar{G}^N \quad (3.9)$$

so daß mit dem Kroneckerdelta  $\delta_K^M$

$$G_{KL} G^{LM} = \delta_K^M. \quad (3.10)$$

Ferner ergibt das verjüngende Produkt der Metrikkoeffizienten mit den Basisvektoren (Herauf- und Herunterziehen der Indizes)

$$\bar{G}^M = G^{MN} \bar{G}_N, \quad \bar{G}_M = G_{MN} \bar{G}^N. \quad (3.11)$$

In der Momentankonfiguration ist der differentielle Abstandsvektor derselben differentiell benachbarten Punkte mit den materiellen Koordinaten  $X^K$  und  $X^K + dX^K$  gegeben durch

$$d\bar{p}(X^K, t) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X^M} dX^M = \bar{p}_{,M} dX^M = \bar{g}_M dX^M. \quad (3.12)$$

Zerlegt man den momentanen Ortsvektor  $\bar{p}(X^K, t)$  bezüglich der Basis  $\bar{G}_K$  am Ort  $X^K$  im materiellen Koordinatensystem (Referenzsystem<sup>x</sup>)

$$\bar{p} = p_R^K(X^L, t) \bar{G}_K(X^L) \quad (3.13)$$

dann wird

$$\bar{g}_M(X^L, t) = \bar{p}_{,M}(X^L, t) = p_R^K{}_{;M}(X^L, t) \bar{G}_K(X^L). \quad (3.14)$$

Die  $\bar{g}_M$  sind die momentanen kovarianten Basisvektoren im mitgeschleppten Koordinatensystem. Ganz entsprechend wie vorher sind im mitgeschleppten Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} g_{MN} &= \bar{g}_M \cdot \bar{g}_N && \text{kovariante Metrikkoeffizienten} \\ g &= \det(g_{MN}) && \text{Determinante der kovarianten} \\ &&& \text{Metrikkoeffizienten} \end{aligned} \quad (3.15)$$

<sup>x</sup> Die Komponenten sind durch den nicht-tensoriellen Index  $R$  gekennzeichnet, um sie von den Komponenten bezüglich des mitgeschleppten Koordinatensystems zu unterscheiden.

$$\begin{aligned}
 \bar{g}^M &= \frac{1}{\sqrt{g}} \bar{g}_K \times \bar{g}_L && \text{kontravarianten Basisvektoren} \\
 & && \text{KLM zyklisch} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon^{MKL} \bar{g}_K \times \bar{g}_L \\
 \epsilon^{KLM} &= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{KLM} && \text{Permutationstensor} \\
 g^{MN} &= \bar{g}^M \cdot \bar{g}^N && \text{kontravariante Metrikkoeffizienten} \\
 g_{KL} g^{LM} &= \delta_K^M \\
 \bar{g}^M &= g^{MN} \bar{g}_N, \quad \bar{g}_M = g_{MN} \bar{g}^N.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Führt man jetzt den Deformationsgradiententensor  $\underline{F}$  als Linearkombination dyadischer Produkte ein

$$\underline{F}(X^L, t) = \underbrace{P_{R;M}^K(X^L, t) \bar{G}_K(X^L)}_{\text{Darstellung im materiellen Koordinatensystem}} \otimes \underbrace{\bar{G}^M(X^L)}_{\text{Darstellung in gemischter Form}^*} = \bar{g}_M(X^L, t) \otimes \bar{G}^M(X^L), \tag{3.16}$$

dann läßt sich der differentielle Abstandsvektor  $d\bar{p}$  in der Momentan-  
konfiguration darstellen als

$$d\bar{p}(X^L, t) = \underline{F}(X^L, t) d\bar{P}(X^L), \tag{3.17}$$

der Deformationsgradiententensor leistet also eine lineare Abbildung von  $d\bar{P}$  in  $d\bar{p}$  (Abb. 7). Mit

$$\underline{F} = \bar{g}_M \otimes \bar{G}^M = P_{R;M}^K \bar{G}_K \otimes \bar{G}^M \tag{3.18}$$

\* Gemischte Darstellung bedeutet, daß gleichzeitig die materielle wie auch die mitgeschleppte Basis  $\bar{G}_K$  bzw.  $\bar{g}_K$  verwendet wird.

wird dann

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{E}^T &= \bar{G}^M \otimes \bar{g}_M = P_R^K ; M \bar{G}^M \otimes \bar{G}_K \\
 \underline{E}^{-1} &= \bar{G}_M \otimes \bar{g}^M \\
 \underline{E}^T \underline{E} &= \bar{G}_M \otimes \bar{G}^M = \underline{1} \quad \text{Einheitstensor in materiellen Koordinaten} \\
 \underline{E} \underline{E}^{-1} &= \bar{g}_M \otimes \bar{g}^M = \underline{1} \quad \text{Einheitstensor in mitgeschleppten Koordinaten} \\
 \det(\underline{E}) &= \det(P_R^K ; M) \neq \det(P_{R,L} ; M)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Es seien jetzt die Nabla-Operatoren

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\nabla}_R &:= \bar{G}^K \frac{\partial}{\partial X^K} \quad \text{im materiellen Koordinatensystem} \\
 \bar{\nabla} &:= \bar{g}^K \frac{\partial}{\partial X^K} \quad \text{im mitgeschleppten Koordinatensys.}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

eingeführt. Die Umrechnung der beiden Operatoren ergibt

$$\bar{\nabla}(\cdot) = \underline{E}^{-1T} \bar{\nabla}_R(\cdot) = \bar{\nabla}_R(\cdot) \underline{E}^{-1} \quad (3.21)$$

Mit dem Nabla-Operator  $\bar{\nabla}_R$  läßt sich dann der Deformationsgradiententensor auch darstellen durch

$$\underline{E} = (\bar{\nabla}_R \otimes \bar{p})^T = (\bar{G}^K \otimes \bar{p}_{,K})^T = \bar{p}_{,K} \otimes \bar{G}^K \quad (3.22)$$

Aus (3.6) oder (3.7) folgt nun leicht, daß  $\underline{E}$  die Basisvektoren  $\bar{G}_K$  und  $\bar{g}_K$  ineinander abbildet:

$$\bar{g}_K = \underline{E} \bar{G}_K \quad (3.23)$$

Diese Beziehung gilt nicht für die kontravarianten Basisvektoren  $\bar{g}^K$  und  $\bar{G}^K$ , denn die  $\bar{g}^K$  sind durch die Bedingung

$$\bar{g}^K \cdot \bar{g}_L = \delta_L^K \quad (3.24)$$

definiert und nicht dadurch, daß sie aus den  $\bar{G}_k$  durch mitgeschleppte Deformation entstehen. Vielmehr läßt sich für die kontravarianten Basisvektoren die folgende Beziehung ableiten:

$$\bar{g}^k = \bar{F}^{\prime T} \bar{G}^k = \bar{G}^k \bar{F}^{\prime} \quad (3.25)$$

Es soll vorausgesetzt werden, daß sich mit Ausnahme singulärer Punkte, Linien oder Flächen jedem differentiellen Abstandsvektor  $d\bar{p}$  ein  $d\bar{P}$  zuordnen läßt; d.h., die Inverse von  $\underline{F}$  existiert unter den gemachten Voraussetzungen. Dann ist der polare Zerlegungssatz für einen invertierbaren zweistufigen Tensor anwendbar: Jeder invertierbare (zweistufige) Tensor  $\underline{F}$  hat zwei eindeutige multiplikative Zerlegungen

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} \quad , \quad \underline{F} = \underline{V} \underline{R} \quad ; \quad (3.26)$$

$\underline{R}$  ist ein orthogonaler Tensor

$$\underline{R} \underline{R}^T = \underline{1} \quad \text{bzw.} \quad \underline{R}^T = \underline{R}^{-1} \quad (3.27)$$

und  $\underline{U}$  sowie  $\underline{V}$  sind symmetrische, positiv definite Tensoren. Die geometrische Interpretation der multiplikativen Zerlegung (3.26) läßt sich aus Abb. 8 ablesen.

Diese Interpretation hat zu folgenden Bezeichnungen für die Tensoren  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}$  und  $\underline{R}$  geführt:

- $\underline{U}$  : Rechter Streck-Tensor
- $\underline{V}$  : Linker Streck-Tensor
- $\underline{R}$  : Rotationstensor

Für die Quadrate der Streck-Tensoren sind die folgenden Bezeichnungen üblich [45, 66, 76]

$$\left. \begin{aligned} \underline{C} &= \underline{U} \underline{U} = \underline{F}^T \underline{F} && \text{Rechter Cauchy-Green Tensor}^* \\ \underline{B} &= \underline{V} \underline{V} = \underline{F} \underline{F}^T && \text{Linker Cauchy-Green Tensor} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

\* auch einfach Greenscher Deformationstensor genannt [41]

Das Quadrat des differentiellen Abstandsvektors in der Momentankonfiguration ist

$$d\bar{p} \cdot d\bar{p} = d\bar{P} (\underline{F}^T \underline{F}) d\bar{P} = d\bar{P} \underline{C} d\bar{P}, \quad (3.29)$$

wobei der rechte Cauchy-Green Tensor verwendet wurde:

$$\left. \begin{aligned} \underline{C} &= \underline{F}^T \underline{F} \\ &= (p_R^L ;_M \bar{G}_M \otimes \bar{G}_L) (p_R^K ;_N \bar{G}_K \otimes \bar{G}^N) \\ &= p_R^L ;_M p_R^K ;_N G_{KL} \bar{G}^M \otimes \bar{G}^N \\ &= p_R^L ;_M p_R^L ;_N \bar{G}^M \otimes \bar{G}^N = C_{MN} \bar{G}^M \otimes \bar{G}^N. \end{aligned} \right\} (3.30)$$

Man sieht, daß die Komponenten  $C_{MN}$  numerisch gleich den kovarianten Metrikkoeffizienten des mitgeschleppten Koordinatensystems sind:

$$C_{MN} = g_{MN} := \bar{g}_M \cdot \bar{g}_N. \quad (3.31)$$

Die Differenz der Linienquadrate der Momentan- und der Ausgangskonfiguration wird jetzt

$$\left. \begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= d\bar{p} \cdot d\bar{p} - d\bar{P} \cdot d\bar{P} = d\bar{P} \underline{C} d\bar{P} - d\bar{P} \cdot d\bar{P} \\ &= d\bar{P} (\underline{C} - \underline{1}) d\bar{P} \\ &= 2 d\bar{P} \underline{E} d\bar{P} \end{aligned} \right\} (3.32)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &:= \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{1}) \\ &= E_{MN} \bar{G}^M \otimes \bar{G}^N \\ &= \frac{1}{2} (C_{MN} - G_{MN}) \bar{G}^M \otimes \bar{G}^N \end{aligned} \right\} (3.33)$$



den Lagrangeschen Verzerrungstensor darstellt. Die Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors sind also - bis auf den Faktor  $1/2$  - numerisch gleich den Differenzen der Metrikkoeffizienten der Momentan- und der Ausgangskonfiguration. Es sei darauf hingewiesen, daß der Tensor  $\underline{E}$  auf die Basis des materiellen Koordinatensystems (Ausgangs- oder Referenzkonfiguration) bezogen ist.

Der Lagrangesche Verzerrungstensor  $\underline{E}$  läßt sich auch durch den Verschiebungsvektor

$$\bar{u} = \bar{p} - \bar{P} \quad (3.34)$$

darstellen. Mit

$$\bar{p} = \bar{u} + \bar{P}$$

wird unter Beachtung von (3.20)<sub>1</sub>

$$\begin{aligned} \underline{E} &= (\bar{\nabla}_R \otimes \bar{p})^T = [\bar{G}^K \otimes (\bar{u}_{,K} + \bar{P}_{,K})]^T \\ &= (\bar{u}_{,K} + \bar{P}_{,K}) \otimes \bar{G}^K = (\bar{u}_{,K} + \bar{G}_K) \otimes \bar{G}^K, \end{aligned} \quad (3.35)$$

so daß

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{E}^T \underline{E} = \bar{G}^K \otimes (\bar{u}_{,K} + \bar{G}_K) (\bar{u}_{,L} + \bar{G}_L) \otimes \bar{G}^L \\ &= (\bar{u}_{,K} \cdot \bar{u}_{,L} + \bar{u}_{,K} \cdot \bar{G}_L + \bar{u}_{,L} \cdot \bar{G}_K + \bar{G}_{KL}) \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L, \end{aligned}$$

Bezieht man  $\bar{u}$  auf das materielle Koordinatensystem

$$\bar{u} = U^M \bar{G}_M, \quad \bar{u}_{,K} = U^M_{;K} \bar{G}_M, \quad (3.36)$$

dann ermittelt man den Lagrangeschen Verzerrungstensor zu

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{1}) = E_{KL} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L,$$

wobei

$$\begin{aligned} E_{KL} &= \frac{1}{2} (\bar{u}_{,L} \cdot \bar{G}_K + \bar{u}_{,K} \cdot \bar{G}_L + \bar{u}_{,K} \cdot \bar{u}_{,L}) \\ &= \frac{1}{2} (U_{K;L} + U_{L;K} + U^M_{;K} U_{M;L}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Eine alternative Darstellung läßt bei Verwendung eines mitgeschleppten Koordinatensystems angeben, auf die hier aber verzichtet werden kann.

### 3.3 Materielle Zeitableitung kinematischer Größen

Zunächst soll hier die materielle Zeitableitung von skalaren, vektoriellen oder tensoriellen Feldgrößen, die von den materiellen Koordinaten  $X^k$  und der Zeit  $t$  abhängen, eingeführt werden:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) \Big|_{X, \bar{G} \sim \text{konst.}} \quad (3.38)$$

oder auch kurz

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = (\cdot)^\circ.$$

Wirkt dieser Operator auf eine skalare Größe  $f(X^k, t)$ , dann ist diese Ableitung gleichbedeutend mit der partiellen Ableitung bezüglich der Zeit  $t$  bei festgehaltenen materiellen Koordinaten  $X^k$

$$\frac{D}{Dt} f(X^k, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(X^k, t) \Big|_{X^k = \text{konst.}} \quad (3.39)$$

Das gleiche gilt, wenn die materielle Zeitableitung auf einen Vektor oder Tensor angewandt wird; da diese Größen aber auf verschiedene Basisvektoren bezogen werden können, ist eine Angabe des jeweiligen Bezugssystems notwendig; dies wird deutlich, wenn beachtet wird, daß die Basen  $\bar{G}_k(X^k)$  und  $\bar{g}_k(X^k, t)$  Relativbewegungen gegeneinander ausführen. Daher ist hier festgesetzt, daß bei der materiellen Zeitdifferentiation die Basis  $\bar{G}_k$  festgehalten wird, d.h. die materielle Zeitdifferentiation erfolgt relativ zum materiellen Koordinatensystem (Ausgangskonfiguration).

Ist der Vektor  $\bar{a}$  in Bezug auf das materielle Koordinatensystem dargestellt

$$\bar{a} = A^k(X^m, t) \bar{G}_k(X^m, t) = A_k(X^m, t) \bar{G}^k(X^m), \quad (3.40)$$

dann ist

$$\frac{D}{Dt} \bar{a} = \frac{\partial A^k(X^M, t)}{\partial t} \bar{G}_k(X^M) = \frac{\partial A_k(X^M, t)}{\partial t} \bar{G}^k(X^M), \quad (3.41)$$

Ist dagegen  $\bar{a}$  im Bezug auf das mitgeschleppte Koordinatensystem dargestellt

$$\bar{a} = a^k(X^M, t) \bar{g}_k(X^M, t) = a_k(X^M, t) \bar{g}^k(X^M, t) \quad (3.42)$$

dann wird zunächst entsprechend der Kettenregel

$$\frac{D}{Dt} \bar{a} = \frac{\partial a^k(X^M, t)}{\partial t} \bar{g}_k + a^k \dot{\bar{g}}_k, \quad (3.43)$$

denn die Komponenten  $a^k(X^M, t)$  sind bei der materiellen Zeitdifferenziation wie Skalare zu behandeln.

Die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  ist definiert als

$$\bar{v}(X^M, t) = \frac{D}{Dt} \bar{p}(X^M, t) = \dot{\bar{p}}(X^M, t), \quad (3.44)$$

sie ist als Änderung des momentanen Ortsvektors  $\bar{p}$  pro Zeiteinheit relativ zum materiellen Koordinatensystem zu verstehen. Der Vektor  $\bar{v}$  kann natürlich sowohl im materiellen wie auch im mitgeschleppten Koordinatensystem dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \bar{v}(X^M, t) &= V^k(X^M, t) \bar{G}_k(X^M) = V_k(X^M, t) \bar{G}^k(X^M) \\ &= v^k(X^M, t) \bar{g}_k(X^M, t) = v_k(X^M, t) \bar{g}^k(X^M, t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Mit (3.23) wird nun

$$\dot{\bar{g}}_k = \dot{\underline{F}} \bar{G}_k = \dot{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1} \bar{g}_k; \quad (3.46)$$

andererseits ist

$$\dot{\bar{g}}_k = \frac{D}{Dt} \bar{g}_k = \frac{D}{Dt} \bar{p}_{,k} = \frac{\partial}{\partial X^k} \bar{v} = v^M{}_{||k} \bar{g}_M, \quad (3.47)$$

so daß mit dem Nabla-Operator im mitgeschleppten Koordinatensystem und unter Beachtung von (3.46) und (3.47)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{g}}_k \otimes \bar{g}^k &= v^M{}_{||K} \bar{g}_M \otimes \bar{g}^K = (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})^T \\ &= \underline{\dot{F}} \underline{\bar{F}}^{-1} \underbrace{(\bar{g}_k \otimes \bar{g}^k)}_1 = \underline{\dot{F}} \underline{\bar{F}}^{-1} =: \underline{L}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Für die materielle Zeitableitung des kontravarianten Basisvektors  $\bar{G}^k$  erhält man mit (3.25)

$$\frac{D}{Dt} \bar{G}^k = \frac{D}{Dt} (\bar{g}^k \underline{F}) = \dot{\bar{g}}^k \underline{F} + \bar{g}^k \dot{\underline{F}} =: \bar{O},$$

so daß mit (3.48)

$$\dot{\bar{g}}^k = -\bar{g}^k \underline{\dot{F}} \underline{\bar{F}}^{-1} = -\underline{L}^T \bar{g}^k = -(\bar{\nabla} \otimes \bar{v}) \bar{g}^k. \quad (3.49)$$

Analog ergibt sich für den kontravarianten Basisvektor mit (3.46) und (3.48)

$$\dot{\bar{g}}_k = \underline{\dot{F}} \underline{\bar{F}}^{-1} \bar{g}_k = \underline{L} \bar{g}_k = (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})^T \bar{g}_k = \bar{g}_k (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}). \quad (3.50)$$

Damit wird aus (3.43)

$$\frac{D}{Dt} \bar{a} = \bar{g}_k \frac{\partial}{\partial t} a^k \Big|_{X^M = \text{konst.}} + \bar{a} (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}). \quad (3.51)$$

Mit der Zerlegung (3.42)<sub>2</sub> des Vektors  $\bar{a}$  erhält man analog

$$\frac{D}{Dt} \bar{a} = \bar{g}^k \frac{\partial}{\partial t} a_k \Big|_{X^M = \text{konst.}} - (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}) \bar{a}. \quad (3.52)$$

Die materielle Ableitung eines zweistufigen Tensors  $\underline{C}$  kann in verschiedener Weise dargestellt werden. Im materiellen Koordinatensystem erhält man

$$\left. \begin{aligned} \underline{C} &= C^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L = C_{KL} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L \text{ etc.} \\ \frac{D}{Dt} \underline{C} &= \frac{\partial C^{KL}}{\partial t} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L = \frac{\partial C_{KL}}{\partial t} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L \text{ etc.} \end{aligned} \right\} (3.53)$$

und im mitgeschleppten Koordinatensystem ergibt sich, je nachdem welche Zerlegung von  $\underline{C}$  zugrunde gelegt wird, folgendes:

$$\left. \begin{aligned}
 & \underline{c} = c^{kl} \bar{g}_k \otimes \bar{g}_l \\
 & \frac{D}{Dt} \underline{c} = \left( \frac{\partial}{\partial t} c^{kl} \right) \bar{g}_k \otimes \bar{g}_l + (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})^T \underline{c} + \underline{c} (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}) \\
 \\
 & \underline{c} = c_{kl} \bar{g}^k \otimes \bar{g}^l \\
 & \frac{D}{Dt} \underline{c} = \left( \frac{\partial}{\partial t} c_{kl} \right) \bar{g}^k \otimes \bar{g}^l - (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}) \underline{c} - \underline{c} (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})^T \\
 \\
 & \underline{c} = c^{k,l} \bar{g}_k \otimes \bar{g}^l \\
 & \frac{D}{Dt} \underline{c} = \left( \frac{\partial}{\partial t} c^{k,l} \right) \bar{g}_k \otimes \bar{g}^l + (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})^T \underline{c} - \underline{c} (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})^T \\
 \\
 & \underline{c} = c_{k,l} \bar{g}^k \otimes \bar{g}_l \\
 & \frac{D}{Dt} \underline{c} = \left( \frac{\partial}{\partial t} c_{k,l} \right) \bar{g}^k \otimes \bar{g}_l - (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}) \underline{c} + \underline{c} (\bar{\nabla} \otimes \bar{v})
 \end{aligned} \right\} (3.54)$$

Die materielle Zeitableitung des differentiellen Abstandsvektors  $d\bar{p}$  in der Momentankonfiguration wird nun

$$\frac{D}{Dt} d\bar{p}(X^H, t) = \frac{D}{Dt} (F(X^H, t) d\bar{P}(X^H)) = \left( \frac{D}{Dt} F \right) d\bar{P}. \quad (3.55)$$

Mit (3.21), (3.22), (3.26)<sub>1</sub> und unter Beachtung der Orthogonalität von  $\underline{R}$  wird

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} F &= \frac{D}{Dt} (\bar{\nabla}_R \otimes \bar{p})^T = \left( \bar{\nabla}_R \otimes \frac{D}{Dt} \bar{p} \right)^T \\
 &= (\bar{\nabla}_R \otimes \bar{v})^T = (\bar{\nabla} \otimes \bar{v}) \underline{F} \\
 &= \underline{\dot{R}} \underline{U} + \underline{R} \underline{U} = \underline{\dot{R}} \underline{R}^T \underline{F} + \underline{R} \underline{\dot{U}}.
 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Man erhält damit zunächst folgende alternativen Darstellungen für  $\frac{D}{Dt} d\bar{p}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} d\bar{p} &= \underline{\dot{F}} d\bar{P} &= \underline{\dot{F}} \underline{\bar{F}}^{-1} d\bar{p} &= \underline{L} d\bar{p} \\ &= (\underline{\bar{V}}_R \otimes \underline{\bar{v}}) d\bar{P} \\ &= (\underline{\bar{V}} \otimes \underline{\bar{v}}) \underline{F} d\bar{P} = (\underline{\bar{V}} \otimes \underline{\bar{v}})^T d\bar{p} \\ &= \underline{\dot{R}} \underline{R}^T \underline{F} d\bar{P} + \underline{R} \underline{\dot{U}} d\bar{P} = \underline{\dot{R}} \underline{R}^T d\bar{p} + \underline{\dot{R}} \underline{\dot{U}} \underline{\bar{U}}^{-1} \underline{\bar{R}}^{-1} d\bar{p} \end{aligned} \right\} (3.57)$$

wobei mit (3.48)

$$\underline{L} := \underline{\dot{F}} \underline{\bar{F}}^{-1} = (\underline{\bar{V}} \otimes \underline{\bar{v}})^T = \underline{\dot{R}} \underline{R}^T + \underline{R} \underline{\dot{U}} \underline{\bar{U}}^{-1} \underline{\bar{R}}^{-1} \quad (3.58)$$

Die Zerlegung dieses Tensors in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \quad (3.59)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{D} &:= \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \\ \underline{W} &:= \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \end{aligned} \right\} (3.60)$$

liefert

$$\frac{D}{Dt} d\bar{p} = \underline{L} d\bar{p} = \underline{D} d\bar{p} + \underline{W} d\bar{p} \quad (3.61)$$

Den Tensor  $\underline{D}$  und  $\underline{W}$  kann u.a. die folgende kinematische Interpretation gegeben werden (z.B. [66, 76]):  $\underline{D}$  ist die materielle Zeitableitung des "relativen", auf die Momentankonfiguration bezogenen rechten Strecktensors  $\underline{U}_t$  und  $\underline{W}$  ist die materielle Zeitableitung des "relativen" Rotationstensors  $\underline{R}_t$ . Es heißen deshalb auch

$\underline{D}$  der Deformationsgeschwindigkeitstensors oder Streckgeschwindigkeitstensor

$\underline{W}$  der Spintensor .

Gl. (3.48) stellt das fundamentale additive Zerlegungstheorem von Euler-Cauchy-Stokes dar [77]. Da  $\underline{W}$  schiefsymmetrisch ist, läßt sich diesem Tensor ein axialer Vektor  $\underline{\bar{w}}$  zuordnen, derart daß

$$\underline{W} d\bar{p} = \bar{w} \times d\bar{p}, \quad (3.62)$$

dies stellt die (starre) Drehung pro Zeiteinheit der materiellen Umgebung eines Punktes am Ort  $\bar{p}$  dar. Man findet für  $\bar{w}$  die Darstellung

$$\bar{w} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \times \dot{\bar{p}})$$

oder mit (3.20)

$$\bar{w} = \frac{1}{2} (\underline{F}^{-1})^T (\bar{\nabla}_R \times \dot{\bar{p}}).$$

(3.63)

Die materielle Zeitableitung der Differenz der Quadrate der Linienelemente  $d\bar{p}$  und  $d\bar{P}$  stellt sich im Bezug auf das materielle Koordinatensystem wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (d\bar{p} \cdot d\bar{p} - d\bar{P} \cdot d\bar{P}) &= 2 \frac{D}{Dt} (d\bar{P} \underline{E} d\bar{P}) \\ &= 2 d\bar{P} \underline{\dot{E}} d\bar{P} \end{aligned} \quad (3.64)$$

mit

$$\underline{\dot{E}} = \frac{D}{Dt} \underline{E} = \dot{E}_{KL} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L = \frac{\partial}{\partial t} (E_{KL}(x^M, t)) \bar{G}_{(X^M)}^K \otimes \bar{G}_{(X^M)}^L. \quad (3.65)$$

Mit (3.61) und (3.62) findet man den Zusammenhang zwischen  $\underline{\dot{E}}$  und  $\underline{D}$

$$\frac{D}{Dt} \underline{E} = \underline{\dot{E}} = \underline{F}^T \underline{D} \underline{E}. \quad (3.66)$$

#### 4. Die Energiebilanzgleichung und ihre Invarianzeigenschaften

##### 4.1 Die Darstellung der Energiebilanzgleichung in der Momentan- und Referenzkonfiguration

Die integrale Energiebilanzgleichung<sup>x</sup> (besser Leistungsbilanzgleichung) für einen massemäßig abgeschlossenen beliebigen Teilbereich  $V$  lautet

$$\frac{D}{Dt} (\mathcal{E} + K) = W + H. \quad (4.1)$$

Ist  $\mathcal{E}$  die spezifische innere Energie (pro Masseinheit) und  $\rho > 0$  die Massedichte in der Momentankonfiguration, dann ist

$$\mathcal{E} := \int_V \rho \varepsilon dV \quad (4.2)$$

die gesamte innere Energie des betrachteten materiellen Körpers. Die Integration ist hier wie auch in den folgenden Ausdrücken in der Momentankonfiguration des Körpers auszuführen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir mit (4.2) die Existenz einer Zustandsfunktion - der spezifischen inneren Energie - annehmen, die von noch zu bestimmenden Zustandsvariablen abhängt; diese Forderung stellt die erste Teilaussage des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik dar, während die zweite Teilaussage in der Bilanzgleichung (4.1) zu sehen ist [78].

Die gesamte kinetische Energie ist gegeben durch

$$K := \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} dV. \quad (4.3)$$

Die Leistungsbeitrag  $W$  auf der rechten Seite von (4.1) stellt die Gesamtleistung der eingepprägten (äußeren) Kräfte dar, und zwar sei

$$W = W_b + W_t + W_e. \quad (4.4)$$

---

<sup>x</sup> Die integrale Energiebilanzgleichung, der integrale Energiesatz und der 1. Hauptsatz sind hier Synonyme.



Die ersten beiden Beiträge sind klassischer Natur:  $W_b$  ist die Leistung der Massenkraftdichte  $\bar{b}$ .

$$W_b := \int_V \rho \bar{b} \cdot \dot{\bar{p}} \, dV \quad (4.5)$$

und  $W_t$  ist die Leistung der Oberflächenspannungen  $\bar{t}$  auf der Oberfläche  $O$  in der Momentankonfiguration:

$$W_t := \oint_O \bar{t} \cdot \dot{\bar{p}} \, dO. \quad (4.6)$$

In praktisch allen Problemen der Kontinuumsmechanik werden Volumenmomente\*  $\rho \bar{l}$  ausgeschlossen bzw. als nicht vorhanden angesehen. Aus Gründen, die später im einzelnen diskutiert werden, sollen hier aber Volumenmomente zunächst zugelassen werden. Ihr Leistungsbeitrag ist dann durch

$$W_l := \int_V \rho \bar{l} \cdot \dot{\bar{w}} \, dV \quad (4.7)$$

gegeben, wobei  $\dot{\bar{w}}$  die Starrkörperdrehgeschwindigkeit eines materiellen Teilchens darstellt, wie sie durch das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\bar{p}}$  induziert wird (Gl. 3.63). Es würde hier jetzt naheliegen anzunehmen, daß neben Volumenmomenten auch Momentenspannungen wirken und übertragen werden können und daß ferner die materiellen Punkte des Kontinuums auch einen Eigenpin besitzen; dies würde zu einem zusätzlichen Leistungsterm infolge der Momentenspannungen und zu einem Zusatzterm in der kinetischen Energie führen. Für die folgenden Betrachtungen sollen diese Generalisierungen aber außer acht gelassen werden.

Die zugeführte Wärmemenge  $H$  pro Zeiteinheit setze sich aus zwei Teilen zusammen:

$$H := H_r + H_q \quad (4.8)$$

hier ist

$$H_r := \int_V \rho \tau \, dV \quad (4.9)$$

die durch kontinuierlich verteilte Wärmequellen bzw. -senken zu- bzw. abgeführte Wärmemenge; hier ist  $\tau$  die spezifische Wärmemenge pro

---

\* Volumenmoment: Äußeres eingepprägtes Moment pro Volumeneinheit in der Momentankonfiguration. Es ist  $\bar{l}$  die Massenmomentdichte, also das äußere eingepprägte Moment pro Masseneinheit.

Masseneinheit.  $H_q$  ist die durch Wärmeleitung durch die Oberfläche zu- bzw. abgeführte Wärme:

$$H_q := - \oint_0 \bar{q} \cdot \bar{n} dO, \quad (4.10)$$

wobei  $\bar{n}$  der äußere Einheitsnormalenvektor in der Momentankonfiguration ist. Der Vektor  $\bar{q}$  ist der Wärmefluß pro Flächen- und Zeiteinheit; falls  $\bar{q} \cdot \bar{n} < 0$ , dann fließt Wärme durch die Oberfläche  $O$  in den betrachteten Teilkörper. Diskrete Wärmequellen oder auch Wärmequellen auf Diskontinuitätsflächen werden hier nicht betrachtet. Gleiches gilt auch für die zugeführten mechanischen Energien.

Die Energiebilanzgleichung soll jetzt in Bezug auf die Referenzkonfiguration (d.i. die unverformte Ausgangskonfiguration des Körpers) dargestellt werden; das bedeutet, daß sämtliche Vektoren und Tensoren im Referenzsystem darzustellen sind und daß die Volumenintegration in der Referenzkonfiguration zu erfolgen hat; dieses Vorgehen liegt nahe, denn die Momentankonfiguration ist gewöhnlich unbekannt, während die Referenzkonfiguration normalerweise gegeben ist.

Das Volumenelement in der Momentankonfiguration ist mit (3.15)<sub>2</sub>

$$dV = \sqrt{g'} dx^1 dx^2 dx^3$$

und in der Referenzkonfiguration gilt mit (3.5)

$$dV_R = \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

} (4.11)

Aufgrund der lokalen Massenerhaltung ist

$$\rho dV = \rho_R dV_R \quad (4.12)$$

wobei  $\rho_R$  die Dichte in der Referenzkonfiguration ist. Mit (3.19), (3.23) und den Definitionsgleichungen (4.11)<sub>2</sub> wird dann auch

$$\frac{\rho_R}{\rho} = \frac{dV}{dV_R} = \sqrt{\frac{g'}{G}} = \det(\underline{F}). \quad (4.13)$$

Es sei  $dO_R$  das Oberflächenelement in der Referenzkonfiguration und

$$\bar{t}_R := \bar{t} \frac{dO}{dO_R} \quad (4.14)$$

die auf das Flächenelement der Referenzkonfiguration bezogene Oberflächenspannung, so daß

$$\dot{\bar{p}} \cdot \bar{t} dO = \dot{\bar{p}} \cdot \bar{t}_R dO_R. \quad (4.15)$$

Unter Beachtung der Nansonschen Formel [38, S. 249]

$$\bar{n} dO = \bar{F}^{-1T} \det(\underline{E}) \bar{N} dO_R, \quad (4.16)$$

wobei  $\bar{N}$  den Einheitsnormalenvektor des Flächenelements  $dO_R$  in der Referenzkonfiguration darstellt, wird der Wärmefluß durch das Oberflächenelement

$$\bar{q} \cdot \bar{n} dO = \bar{q}_R \cdot \bar{N} dO_R \quad (4.17)$$

mit

$$\bar{q}_R := \det(\underline{E}) \underline{F}^{-1} \bar{q} = \frac{g_R}{g} \underline{F}^{-1} \bar{q}. \quad (4.18)$$

Damit läßt sich die Energiebilanzgleichung (4.1) auf eine Form bringen, bei der sämtliche Integrationsprozesse in der Referenzkonfiguration auszuführen sind:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left\{ \int_{V_R} g_R \left[ \varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\bar{p}} \cdot \dot{\bar{p}} \right] dV_R \right\} \\ &= \int_{V_R} g_R \left[ \bar{b} \cdot \dot{\bar{p}} + \bar{l} \cdot \bar{w} + r \right] dV_R \\ &+ \oint_{O_R} \left[ \bar{t}_R \cdot \dot{\bar{p}} - \bar{q}_R \cdot \bar{N} \right] dO_R. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nach Ausführung der materiellen Zeitdifferentiation läßt sich dafür auch schreiben

$$\int_{V_R} \rho_R \dot{E} dV_R = \int_{V_R} \rho_R [(\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) \cdot \dot{\bar{p}} + \bar{l} \cdot \ddot{\bar{w}} + r] dV_R \quad (4.20)$$

$$+ \int_{Q_R} [\bar{t}_R \cdot \bar{N} - \bar{q}_R \cdot \bar{N}] dQ_R.$$

Bei komponentenweiser Darstellung ist zu beachten, daß alle Vektoren auf die Basis  $\bar{G}_k$  des Referenzsystem bezogen werden.

## 4.2 Transformationseigenschaften und Invarianz bei Übergang zu einem bewegten Beobachtersystem

### 4.2.1 Koordinaten- und Beobachtertransformationen, das Forminvarianzprinzip

Die Bewegung eines Massenpunktes oder eines endlich ausgedehnten Körpers kann nicht in einem absoluten Sinne beschrieben werden, sondern nur relativ zu einem Beobachtersystem, auch Bezugsrahmen benannt. Ein solcher Rahmen ist eine Menge von materiellen Objekten, deren gegenseitige Anordnungen sich relativ wenig ändern. Im idealisierten Grenzfall handelt es sich um einen starren Rahmen. Ein derartiger starrer Rahmen und die zugehörige Vorgabe von Längenmaßstäben sowie eine Zeitmeßeinrichtung charakterisiert ein (starres) Beobachtersystem. Innerhalb eines solchen Beobachtersystem lassen sich verschiedene (starre) Koordinatensysteme aufspannen, wie z.B. kartesische oder krummlinige Koordinatensysteme. Der Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes innerhalb eines Beobachtersystems erfolgt durch zeitunabhängige Koordinatentransformationen.

Neben einem solchen Beobachtersystem können auch andere starre Beobachtersysteme benutzt werden, die relativ zu dem ersten, als ruhend bezeichneten Beobachtersystem, bewegt sind. Im Gegensatz zu den oben erwähnten Koordinatentransformationen sind diese Transformationen zwischen den Beobachtersystemen zeitabhängig; sie werden Beobachtertransformationen genannt. Voraussetzungsgemäß wird von den Beobachtertransformationen, die die geometrischen Größen betreffen, verlangt, daß sie längen- und winkeltreu sind und daß außerdem der Zeitmaßstab nicht verändert wird. Die einzigen Transformationen, die dies leisten, sind die translatorischen und die orthogonalen Transformationen.

Längen- und winkeltreue Beobachtertransformationen sind, anschaulich gesprochen, dann gegeben, wenn das "ruhende" Beobachtersystem durch eine kontinuierliche Starrkörperbewegung mit dem "bewegten" Beobachtersystem zur Deckung gebracht werden kann. Die erwähnten orthogonalen Transformationen enthalten aber i.a. noch einen Übergang von einem Rechts- in ein Linkssystem (Spiegelung der Koordinatenachsen), der natürlich nicht durch eine Starrkörperbewegung beschrieben werden kann. Diese Möglichkeit soll hier nicht betrachtet werden; d.h., es werden nur eigentlich orthogonale Transformationen (ohne Spiegelung) zugelassen.

Betrachtet werde ein Beobachtersystem  $S$ . Die Referenzkonfiguration des Körpers (Ausgangslage aller materieller Punkte des unverformten Körpers zum Zeitpunkt  $t = 0$ , Kap. 3) bezüglich dieses Beobachtersystems sei  $\mathcal{K}$ . Neben diesem als ruhend bezeichneten Beobachtersystem werde ein anderes Beobachtersystem  $S^*$  betrachtet, das sich relativ zu  $S$  bewegt. Die Referenzkonfiguration des materiellen Körpers in  $S^*$  sei  $\mathcal{K}^*$ . Bei dieser Darstellung ist die Referenzkonfiguration (das Abbild der Ausgangslage aller Punkte des materiellen Körpers - zum Zeitpunkt  $t = 0$  - in dem jeweiligen Beobachtersystem) mit dem Beobachtersystem verbunden und nimmt an der relativen Starrkörperbewegung teil. Abb. 9 veranschaulicht die Verhältnisse.

Ausgangspunkt für die weitere Entwicklung sei das allgemeine Relativitätsprinzip (Kovarianzprinzip, Forminvarianzprinzip) [46]:

"Für zwei in beliebigem Bewegungszustand befindliche Beobachter, deren Koordinatensysteme kontinuierlich auseinander hervorgehen, haben die physikalischen Grundgesetze die gleiche Form."

Es muß nun einschränkend angemerkt werden, daß hier nur starre Relativbewegungen zwischen den Beobachtern betrachtet werden. Schmutzer [46] und Jaunzemis [74] folgend kann diesem Prinzip folgende Interpretation gegeben werden: Man stelle sich einen "objektiv" ablaufenden Belastungs- und Verformungsprozess an einem Körper vor, der von zwei beliebigen Beobachtersystemen aus messend verfolgt wird. Die benutzten physikalischen Größen wie z.B. Lage, Geschwindigkeit, kinetische Energie etc. werden dabei in beiden Beobachtersystemen in gleicher Weise definiert, z.B. durch eine bestimmte Rechen- oder Meßvorschrift. Beispielsweise faßt der Beobachter in  $S$  seine Meßresultate für die physikalischen Größen  $A, B, C, \dots$  in der Gleichung

$$f(A, B, C, \dots) = 0$$

zusammen. Entsprechendes wird im System  $S^*$  durchgeführt und die entsprechenden Größen  $A^*, B^*, C^*, \dots$  werden in der Gleichung

$$F(A^*, B^*, C^*, \dots) = 0$$

miteinander verknüpft. Das allgemeine Relativitätsprinzip verlangt nun, daß die mathematische Struktur der beiden Funktionen  $f$  und  $F$  gleich ist:

$$f(\cdot, \cdot, \cdot, \dots) = F(\cdot, \cdot, \cdot, \dots).$$

Die Größen  $A, A^*$  etc. werden hier als die Bilder bestimmter physikalischer Größen in den jeweiligen Beobachtersystemen angesehen. Zwischen ihnen müssen Umrechnungs- oder Transformationsbeziehungen bestehen, die zum Ausdruck bringen, daß es sich um dieselben physikalischen Größen (definiert durch die gleichen Meß- und Rechenvorschriften in den beiden Beobachtersystemen) handelt. Sind beispielsweise derartige Transformationsvorschriften für  $B \rightarrow B^*$ ,  $C \rightarrow C^*$  etc. vorgegeben oder angenommen nicht aber für  $A \rightarrow A^*$ , dann kann man aus

$$f(A, B, \dots) = f(A^*, B^*, \dots)$$

eine Transformationsvorschrift  $A \rightarrow A^*$  ableiten, indem man diese Beziehung nach  $A^*$  auflöst. Auf die Transformationsgesetze wird später eingegangen werden.

Im Mittelpunkt unserer theoretischen Entwicklung steht nun der 1. Hauptsatz in Form der Energie- bzw. Leistungsbilanzgleichung. In Kap. 4.1 war er für ein Beobachtersystem  $S$  angegeben worden, und zwar sowohl für die Momentankonfiguration wie auch bezogen auf die Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}$ . Unter Verwendung des allgemeinen Relativitätsprinzips bzw. der Forderung der Forminvarianz der integralen Energiebilanzgleichung (4.1), lautet die Energiebilanzgleichung im Beobachtersystem  $S^*$  wie folgt:

$$\frac{D}{Dt} (\mathcal{E}^* + K) = W^* + H^* \quad (4.21)$$

Hier ist die materielle Zeitableitung natürlich relativ zum Beobachtersystem  $S^*$  zu verstehen; dies soll hier aber nicht gesondert gekennzeichnet werden, da die Zeitmessung bei Übergang von einem Beobachtersystem zu einem anderen, wie eingangs erwähnt, nicht verändert oder beeinflusst werden soll. Das  $*$ -Zeichen an einer Größe  $(\cdot)^*$  bringt zum Ausdruck, daß die Größe  $(\cdot)$  nicht im Beobachtersystem  $S$  sondern in  $S^*$  dargestellt ist. Insbesondere bedeutet dies, daß vektorielle Größen, wie z.B.  $\dot{\vec{p}}^*$ , auf das gesternete Beobachtersystem  $S^*$  bezogen sind, d.h. die Basis dieses Systems zugrunde liegt. In Bezug auf die Referenzkonfiguration  $R^*$ , die dem Beobachtersystem  $S^*$  zugeordnet ist, erhält jetzt die Energiebilanzgleichung analog zu (4.19) die folgende Form

$$\left. \begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left\{ \int_{V_{R^*}} \rho_{R^*}^* \left[ \mathcal{E}^* + \frac{1}{2} \dot{\vec{p}}^* \cdot \dot{\vec{p}}^* \right] dV_{R^*} \right\} \\ & = \int_{V_{R^*}} \rho_{R^*}^* \left[ \bar{b}^* \cdot \dot{\vec{p}}^* + \bar{l}^* \cdot \bar{\omega}^* + r^* \right] dV_{R^*} \\ & + \oint_{O_{R^*}} \left[ \bar{t}_{R^*}^* \cdot \dot{\vec{p}}^* - \bar{q}_{R^*}^* \cdot \bar{N}^* \right] dO_{R^*} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Analog zu (4.18) und (4.24) sind hier

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_{R^*}^* &= \bar{t}^* \frac{dO_{R^*}^*}{dO_{R^*}^*} \\ \bar{q}_{R^*}^* &= \frac{\rho_{R^*}^*}{\rho^*} \bar{F}^{*-1} \bar{q}^* \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Damit ist zunächst das allgemeine Relativitätsprinzip (Forminvarianz) ausgeschöpft. Weitere Folgerungen lassen sich erst gewinnen, wenn auch die Transformationsgesetze der verschiedenen Größen bekannt sind.

Es ist nun  $\bar{p}$  der momentane Ortsvektor eines materiellen Punktes  $X$ , wie er im Beobachtersystem  $S$  festgestellt wird und  $\bar{p}^*$  der momentane Ortsvektor desselben materiellen Punktes im Beobachtersystem  $S^*$  (Abb. 9), entsprechend ist  $\bar{p}$  bzw.  $\bar{p}^*$  der Ortsvektor desselben materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt  $t=0$  in Bezug auf  $S$  bzw.  $S^*$ . Wir fassen jetzt die beiden Beobachtersysteme  $S$  und  $S^*$  als zwei verschiedene Euklidische Punkträume  $[79]$  auf mit den Ursprüngen  $\theta$  und  $\theta^*$  und (beispielsweise kartesischen) Basissystemen  $\bar{e}_k$  und  $\bar{e}_k^*$ . Diesen beiden Punkträumen wird zum Zeitpunkt  $t$  durch die Ortsvektoren  $\bar{p}$  bzw.  $\bar{p}^*$  der Momentankonfiguration jeweils ein Euklidischer Vektorraum zugeordnet. Es sei jetzt  $\bar{c}$  der Ortsvektor des Ursprungs  $\theta^*$  von  $S^*$ , wie er im Beobachtersystem  $S$  festgestellt wird. Die Ortsvektoren  $\bar{p}$  und  $\bar{p}^*$  desselben materiellen Punktes sind dann durch die (eigentlich) orthogonale Transformation  $[66, 76]$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}^* &= \underline{Q}(t) (\bar{p} - \bar{c}(t)) = \bar{c}^*(t) + \underline{Q}(t) \bar{p} \\ \bar{c}^* &= - \underline{Q} \bar{c} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

verknüpft, wobei <sup>x</sup>

$$\underline{Q}(t) = Q_{KM}(t) \bar{e}_K^* \otimes \bar{e}_M$$

ein orthogonaler Drehtensor

$$\underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{1} \quad , \quad \underline{Q}^T = \underline{Q}^{-1} \quad (4.25)$$

$$\det(\underline{Q}) = +1$$

ist; hier ist jetzt  $\bar{c}^*$  der Ortsvektor von  $\theta$  in  $S$ , wie er im System  $S^*(\theta^*, \bar{e}_K^*)$  beobachtet wird. Der Vektor  $\bar{c}$  beschreibt die relative Translationsbewegung zwischen den beiden Beobachtersystemen und  $\underline{Q}$  die (starre) Relativdrehung.

<sup>x</sup> Über gleiche Indizes wird von 1 bis 3 summiert.



In der Fachliteratur werden formal verschiedene Darstellungen der Transformation des Ortsvektors zwischen den beiden Beobachtersystemen angegeben [74, 45], die auf verschiedenen Interpretationen der Symbole  $\bar{p}$  und  $\bar{p}^*$  beruhen. Eine kurze Diskussion ist dazu im Anhang (1) angefügt. Den Ausführungen in Anhang (1) folgend kann die Transformationsregel (4.24) nicht nur als Transformationsvorschrift für die Ortsvektoren in verschiedenen Vektorräumen interpretiert werden, sondern sie kann auch einfach als Transformationsvorschrift für die Komponenten von  $\bar{p}$  und  $\bar{p}^*$  aufgefaßt werden.

Nach Voraussetzung sind die Referenzkonfigurationen den jeweiligen Beobachtersystemen angeheftet, so daß folgende Transformationsbeziehungen zwischen  $\bar{p}$  und  $\bar{p}^*$  gilt (Anhang (1)):

symbolisch	in Komponenten	
$\bar{p}^* = \underline{Q}(t) \bar{p}$	$p_k^* = p_k$	(4.26)

mit dem eigentlich orthogonalen Tensor (Anhang (1))

$$\underline{Q}(t) = \bar{e}_M^* \otimes \bar{e}_M = Q_{NM}(t) \bar{e}_M \otimes \bar{e}_N. \quad (4.27)$$

Man beachte, daß die Funktionen  $Q_{NM}(t)$  dieselben sind wie die des Drehtensors  $\underline{Q} = Q_{NM}(t) \bar{e}_N^* \otimes \bar{e}_M$  (gemischte Basis!).

Aus der Transformationsregel (4.24) für den Ortsvektor  $\bar{p}$  lassen sich die Transformationsregeln für die Geschwindigkeit  $\dot{\bar{p}}$  und Beschleunigung  $\ddot{\bar{p}}$  gewinnen. Allerdings kann man dazu nicht einfach (4.24) materiell nach der Zeit differenzieren (wie z.B. in [76]), denn nach Kap. 3.3 ist hier die materielle Zeitdifferenzierung bezüglich eines materiellen Koordinatensystems (z.B.  $\mathcal{R}: X^k, \bar{G}_k$ ) definiert, und dieses ist fest mit dem jeweiligen Beobachtersystem verbunden.

Man muß daher die Komponentenform von (4.24) (siehe Abb. 11) bei festen materiellen Koordinaten  $X^k$  nach der Zeit differenzieren und das Ergebnis wieder in Tensorform überführen. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{p}}^* &= \dot{\bar{c}}^* + \underline{\dot{Q}} \bar{p} + \underline{Q} \dot{\bar{p}} \\ \ddot{\bar{p}}^* &= \ddot{\bar{c}}^* + \underline{\ddot{Q}} \bar{p} + 2 \underline{\dot{Q}} \dot{\bar{p}} + \underline{Q} \ddot{\bar{p}} \end{aligned} \right\} (4.28)$$

mit den Definitionen

$$\underline{\dot{Q}} := \dot{Q}_{KM}(t) \bar{e}_K^* \otimes \bar{e}_M, \quad \underline{\ddot{Q}} := \ddot{Q}_{KM}(t) \bar{e}_K^* \otimes \bar{e}_M.$$

Hier sind  $\dot{\bar{p}}$  und  $\dot{\bar{p}}^*$  die Geschwindigkeiten des materiellen Punktes  $X$  relativ zum Beobachtersystem  $S$  und  $S^*$  sowie  $\ddot{\bar{p}}$  und  $\ddot{\bar{p}}^*$  die Relativbeschleunigungen. Wird also beispielsweise  $\bar{p}^*$  bezüglich einer Basis  $\bar{e}_K^*$  im Beobachtersystem  $S^*$  zerlegt

$$\bar{p}^* = p_{R^*K}^*(X^M, t) \bar{e}_K^*$$

dann ist

$$\dot{\bar{p}}^* := \dot{p}_{R^*K}^*(X^M, t) \bar{e}_K^* = \frac{\partial}{\partial t} (p_{R^*K}^*(X^M, t)) \bar{e}_K^*.$$

Berücksichtigt man das zur materiellen Zeitdifferentiation Gesagte, dann folgt aus

$$\underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{1}, \quad \underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{1}^* \quad (4.29)$$

über die entsprechende Komponentendarstellung

$$\underline{\dot{Q}}^T \underline{Q} + \underline{Q}^T \underline{\dot{Q}} = \underline{0},$$

so daß

$$\begin{aligned} \underline{R} &:= \underline{\dot{Q}}^T \underline{Q} = -\underline{Q}^T \underline{\dot{Q}} = -(\underline{\dot{Q}}^T \underline{Q})^T = -\underline{R}^T \\ &= \dot{Q}_{KM} Q_{KN} \bar{e}_M \otimes \bar{e}_N \end{aligned} \quad (4.30)$$

ein schiefsymmetrischer Tensor ist, der auf die Basis des Beobachtersystems  $S^*$  bezogen ist. Daher wird

$$\begin{aligned} \underline{\dot{Q}} &= \underline{Q} \underline{R}^T \\ \underline{\ddot{Q}} &= \underline{\dot{Q}} \underline{R}^T + \underline{Q} \underline{\dot{R}}^T \\ \underline{\dot{R}} &= (\dot{Q}_{KM} Q_{KN}) \bar{e}_M \otimes \bar{e}_N \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit und Beschleunigung im Beobachtersystem  $S^*$  erhält man damit:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{p}}^* &= \dot{\bar{c}}^* + \underline{Q} \underline{Q}^T \bar{p} + \underline{Q} \dot{\bar{p}} \\ \ddot{\bar{p}}^* &= \ddot{\bar{c}}^* + (\dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T) \bar{p} \\ &\quad + 2 \underline{Q} \underline{Q} \dot{\bar{p}} + \underline{Q} \ddot{\bar{p}}. \end{aligned} \right\} (4.31)$$

Dem schiefssymmetrischen Tensor  $\underline{Q}$  läßt sich ein axialer Vektor  $\bar{\omega}$  zuordnen, derart, daß für beliebige Vektoren  $\bar{a}$

$$\underline{Q} \bar{a} = \bar{\omega} \times \bar{a} \quad (4.32)$$

gilt. Alle Größen sind hier im Beobachtersystem  $S$  definiert, so daß die materielle Zeitdifferentiation von (4.32)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}} \bar{a} &= \dot{\bar{\omega}} \times \bar{a} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{a}} - \underline{Q} \dot{\bar{a}} \\ &= \dot{\bar{\omega}} \times \bar{a} \end{aligned}$$

ergibt. Also wird

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{p}}^* &= \dot{\bar{c}}^* - \underline{Q} [\bar{\omega} \times \bar{p}] + \underline{Q} \dot{\bar{p}} \\ \ddot{\bar{p}}^* &= \ddot{\bar{c}}^* + \underline{Q} [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{p})] - \underline{Q} [\dot{\bar{\omega}} \times \bar{p}] \\ &\quad - 2 \underline{Q} [\bar{\omega} \times \dot{\bar{p}}] + \underline{Q} \ddot{\bar{p}}. \end{aligned} \right\} (4.33)$$

Hierbei ist  $\bar{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit des Beobachtersystems  $S^*$  relativ zu  $S$ .

Die Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  der Starrkörperbewegung des Kontinuums in der Umgebung eines materiellen Punktes im Beobachtersystem  $S$  war definiert durch (3.63). In Bezug auf das Beobachtersystem  $S^*$  wird dann

$$\bar{\omega}^* = \frac{1}{2} \bar{\nabla}^* \times \dot{\bar{p}}^* = \frac{1}{2} (\bar{F}^*)^T \bar{\nabla}_{R^*}^* \times \dot{\bar{p}}^*$$

Das Transformationsverhalten von  $\bar{\nabla}$  läßt sich wie folgt finden: Es sei  $H$  eine gegen Beobachtertransformationen invariante skalare Größe

$$H^* = H,$$

dann ist bei Übergang zu einem benachbarten materiellen Punkt

$$dH = \bar{\nabla} H \cdot d\bar{\rho}, \quad dH^* = \bar{\nabla}^* H^* \cdot d\bar{\rho}^*,$$

Wegen

$$dH = dH^*$$

und (4.24) erhält man für beliebiges  $d\bar{\rho}$

$$\bar{\nabla}^*(\cdot) = \underline{Q} \bar{\nabla}(\cdot). \quad (4.34)$$

Ganz entsprechend findet man das Transformationsverhalten von  $\bar{\nabla}_{\mathcal{R}}$  mit (4.26) zu

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{R}}^*(\cdot) = \underline{Q} \bar{\nabla}_{\mathcal{R}}(\cdot). \quad (4.35)$$

Mit (4.33), (4.34) und unter Beachtung, daß  $\dot{\bar{c}}^*$  ortsunabhängig ist (d.h.  $\bar{\nabla}^* \dot{\bar{c}}^* = \dot{\bar{c}}^*$ ), wird nun

$$\bar{w}^* = \frac{1}{2} (\underline{Q} \bar{\nabla}) \times [\underline{Q} \dot{\bar{p}} - \underline{Q} (\bar{\omega} \times \bar{p})].$$

Wenn man beachtet,<sup>\*</sup> daß

$$(\underline{Q} \bar{a}) \times (\underline{Q} \bar{b}) = \underline{Q} (\bar{a} \times \bar{b})$$

mit beliebigen Vektoren  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$ , dann findet<sup>\*\*</sup> man mit (3.20)

$$(\underline{Q} \bar{\nabla}) \times (\underline{Q} \bar{b}) = \underline{Q} (\bar{\nabla} \times \bar{b}).$$

Damit wird

$$\bar{w}^* = \frac{1}{2} \underline{Q} (\bar{\nabla} \times \dot{\bar{p}} - \bar{\nabla} \times (\bar{\omega} \times \bar{p})).$$

<sup>\*</sup> Der Beweis erfolgt am einfachsten über eine Komponentendarstellung.

<sup>\*\*</sup> Dieses Ergebnis wird nicht durch Analogieschluß gefunden, sondern durch komponentenweise Auswertung mit (3.20). Analogieschlüsse ( $\bar{\nabla}$ -Operator  $\hat{=}$  Vektor) können bei Operatoren zu falschen Aussagen führen; ein Beispiel dafür ist der Entwicklungssatz für das vektorielle Dreifachprodukt  $\bar{\nabla} \times (\bar{a} \times \bar{b})$ .

Unter Berücksichtigung der Differentiationsregeln<sup>\*</sup> für den Nabla-Operator  $\nabla$  und unter Beachtung, daß  $\bar{\omega}$  unabhängig vom Ort ist, wird

$$\nabla \times (\bar{\omega} \times \bar{p}) = 2 \bar{\omega}.$$

Also folgt als Transformationsregel für die Starrkörperdrehgeschwindigkeit

$$\bar{\omega}^* = Q (\bar{\omega} - \bar{\omega}). \quad (4.36)$$

Die Deformationsgradienten  $\underline{F}$  und  $\underline{F}^*$  sind definiert durch

$$d\bar{p} = \underline{F} d\bar{P}, \quad d\bar{p}^* = \underline{F}^* d\bar{P}^*.$$

Mit (A1.16) und (A1.17) sind

$$d\bar{P}^* = Q(t) d\bar{P}, \quad d\bar{p}^* = Q(t) d\bar{p},$$

so daß als Transformationsgesetz<sup>\*\*</sup> für den Deformationsgradienten

$$\underline{F}^* = Q \underline{F} Q^T \quad (4.37)$$

folgt. Ist  $\underline{F} = F_{KL} \bar{e}_K \otimes \bar{e}_L$  und  $\underline{F}^* = F_{KL}^* \bar{e}_K^* \otimes \bar{e}_L^*$ , dann folgt aus (4.37)

$$F_{KL}^* = Q_{KN} F_{NL}. \quad (4.38)$$

Dies ist die in der Literatur angegebene übliche Form.

Da die Relativbewegung zwischen den beiden Beobachtersystemen zu abstands- und damit winkel- und volumenerhaltenden Transformationsregeln führt, gilt

$$dV^* = dV, \quad dV_{R^*}^* = dV_R$$

und wegen der Massenerhaltung

$$\rho dV = \rho_R dV_R = \rho^* dV^* = \rho_{R^*}^* dV_{R^*}^*$$

\* siehe Fußnote (\*\*\*) S. 49.

\*\* Man beachte hier strikt, daß die in der einschlägigen Literatur zu befindene Beziehung  $\underline{F}^* = Q \underline{F}$  auf einer anderen Definition der Referenzkonfiguration und der verwendeten Symbole beruht.

gilt

$$\frac{\rho}{\rho_R} = \frac{dV_R}{dV} = \frac{dV_{R^*}}{dV^*} = \frac{\rho^*}{\rho_{R^*}} \quad (4.40)$$

Damit sind die rein kinematischen Transformationsregeln angegeben.

Für die weiteren, auf den Momentanzustand bezogenen physikalischen Größen sollen für beliebige Relativbewegungen zwischen den Beobachtersystemen folgende Transformationsgesetze gelten:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Spez. Innere Energie} & \epsilon^* = \epsilon \\ \text{Wärmequellendichte} & \gamma^* = \gamma \end{array} \right\} (4.41)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Spannungsvektor} & \bar{t}^* = \underline{Q} \bar{t} \\ \text{Wärmeflußvektor} & \bar{q}^* = \underline{Q} \bar{q} \end{array} \right\} (4.42)$$

Mit der Bezeichnungsweise von Anhang (1) stellen diese Größen beobachtervariante oder objektive Skalare und Vektoren dar. Die Tatsache, daß diese physikalischen Größen gerade diesen Beobachtertransformationen genügen, ist im Rahmen dieser Theorie als Axiom anzusehen. Das Transformationsverhalten der Komponenten des Spannungs- und Wärmeflußvektors hängt ab, ob  $\bar{t}$  und  $\bar{q}$  im Eulerschen Koordinatensystem (raumfest verbunden in dem jeweiligen Beobachtersystem) oder im mitgeschleppten Koordinatensystem dargestellt werden. Einzelheiten entnehme man Anhang (1).

Anstelle von (4.42) werden die auf die Referenzkonfiguration bezogenen Größen (4.23) benutzt, deren Transformationsverhalten sich wie folgt ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{t}_{R^*}^* = \bar{t}^* \frac{dO^*}{dO_{R^*}^*} = \underline{Q} \bar{t} \frac{dO}{dO_R} = \underline{Q} \bar{t}_R \\ \bar{q}_{R^*}^* = \frac{\rho_{R^*}^*}{\rho^*} \bar{F}^* \bar{q}^* = \frac{\rho_R}{\rho} \underline{Q} \bar{F}^* \underline{Q}^T \underline{Q} \bar{q} = \underline{Q} \bar{q}_R \end{array} \right\} (4.43)$$

wobei u.a.

$$\underline{\bar{E}}^{1*} = (\underline{Q} \underline{E} \underline{Q}^T)^{-1} = \underline{Q} \underline{\bar{E}} \underline{Q}^T \quad (4.44)$$

verwendet wurde.

Den materiellen Koordinaten in den Referenzsystemen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}^*$  können nun dieselben Bezeichnungen gegeben werden, da sie zahlenmäßig denselben Wert darstellen, wenn sie sich auf dasselbe materielle Teilchen beziehen. Das bedeutet dann auch, daß die Integrationsgrenzen im auf  $\mathcal{R}^*$  bezogenen Energiesatz (4.22) zahlenmäßig dieselben sind wie im auf  $\mathcal{R}$  bezogenen Energiesatz (4.19). Berücksichtigt man ferner, daß zwischen den Einheitsnormalenvektoren der Referenzsysteme die Transformationsbeziehung

$$\bar{N}^* = \underline{Q} \bar{N} \quad (4.45)$$

besteht, dann läßt sich der auf  $\mathcal{R}^*$  bezogene Energiesatz (4.22) wie folgt darstellen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left\{ \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} \left[ \varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\bar{p}}^* \cdot \dot{\bar{p}}^* \right] dV_{\mathcal{R}} \right. \\ & = \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} \left[ \bar{b}^* \cdot \dot{\bar{p}}^* + \bar{l}^* \cdot \bar{\omega}^* + r \right] dV_{\mathcal{R}} \\ & \quad \left. + \oint_{O_{\mathcal{R}}} \left[ \bar{t}_{\mathcal{R}^*}^* \cdot \dot{\bar{p}}^* - \bar{q}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{N} \right] dV_{\mathcal{R}} \right\} \quad (4.46) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} \dot{\varepsilon} dV_{\mathcal{R}} & = \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} \left[ (\bar{b}^* - \ddot{\bar{p}}^*) \cdot \dot{\bar{p}}^* + \bar{e}^* \cdot \bar{\omega}^* + r \right] dV_{\mathcal{R}} \\ & \quad + \oint_{O_{\mathcal{R}}} \left[ \bar{t}^* \cdot \dot{\bar{p}}^* - \bar{q}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{N} \right] dO_{\mathcal{R}} . \end{aligned}$$

Hier wurden (A1.6)<sub>3</sub>, (4.39) - (4.45) verwendet.

4.2.2 Invarianzeigenschaften bei Übergang zu gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen

Bei Übergang zu einem gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystem (Galileitransformation) ist

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{c}} &= \text{konst.} , & \ddot{\underline{c}} &= \underline{\bar{0}} \\ \underline{Q} &= \text{konst.} , & \underline{Q} &= \text{konst.} , \end{aligned} \right\} (4.47)$$

so daß

$$\dot{\underline{c}}^* = \text{konst.} , \quad \ddot{\underline{c}}^* = \underline{\bar{0}} ,$$

Da wir vorausgesetzt hatten, daß zum Zeitpunkt  $t=0$  die beiden Beobachtersysteme sich decken, gilt für diesen Zeitpunkt

$$\underline{Q}(0) = \underline{1} \quad , \quad \underline{Q}(0) = \underline{1} ;$$

da ferner die Relativbewegung der Beobachtersysteme translatorisch sein soll, gilt dann auch

$$\underline{Q}(t) = \underline{1} \quad , \quad \underline{Q}(t) = \underline{1} \quad \text{für alle } t$$

Diese spezielle Eigenschaft der Transformationstensoren braucht im folgenden aber nicht verwendet zu werden.

Für die spezifische Massenkraft  $\underline{\bar{b}}$  und das spezifische Massenmoment  $\underline{\bar{l}}$  soll nun gefordert werden, daß sie invariant gegenüber dem Bewegungszustand des bewegten Beobachtersystems (charakterisiert durch (4.47)) sind, d.h.

$$\left. \begin{aligned} \underline{\bar{b}}^* &= \underline{Q} \underline{\bar{b}} \\ \underline{\bar{l}}^* &= \underline{Q} \underline{\bar{l}} . \end{aligned} \right\} (4.48)$$



Der Energiesatz (4.46) bezogen auf  $\mathcal{R}^*$  lautet dann mit (4.31), (4.47) und (4.48)

$$\begin{aligned}
 \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} \dot{\mathcal{E}} dV_{\mathcal{R}} &= \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} [(\underline{Q}\bar{\mathbf{b}} - \underline{Q}\ddot{\bar{\mathbf{p}}}) \cdot (\dot{\mathcal{C}}^* + \underline{Q}\dot{\bar{\mathbf{p}}}) \\
 &\quad + \underline{Q}\bar{\mathbf{l}} \cdot \underline{Q}\bar{\mathbf{w}} + \tau] dV_{\mathcal{R}} \\
 &\quad + \oint_{O_{\mathcal{R}}} [\underline{Q}\bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} \cdot (\dot{\mathcal{C}}^* + \underline{Q}\dot{\bar{\mathbf{p}}}) - \bar{\mathbf{q}}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{\mathbf{N}}] dO_{\mathcal{R}} \\
 &= \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} [(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\bar{\mathbf{p}}}) \cdot \dot{\bar{\mathbf{p}}} + \bar{\mathbf{l}} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \tau] dV_{\mathcal{R}} \\
 &\quad + \oint_{O_{\mathcal{R}}} [\bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{p}}} - \bar{\mathbf{q}}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{\mathbf{N}}] dO_{\mathcal{R}} \\
 &\quad + (\underline{Q}^T \dot{\mathcal{C}}^*) \cdot \left\{ \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\bar{\mathbf{p}}}) dV_{\mathcal{R}} + \oint_{O_{\mathcal{R}}} \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} dO_{\mathcal{R}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Bis auf den letzten Term auf der rechten Seite mit dem vektoriellen Faktor  $\underline{Q}^T \dot{\mathcal{C}}^* = -\dot{\bar{\mathbf{c}}}$  stellt dies den Energiesatz in Bezug auf  $\mathcal{R}$  dar. Daher muß das Skalarprodukt

$$-\dot{\bar{\mathbf{c}}} \cdot \left\{ \int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\bar{\mathbf{p}}}) dV_{\mathcal{R}} + \oint_{O_{\mathcal{R}}} \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} dO_{\mathcal{R}} \right\} = 0 \tag{4.50}$$

für beliebige Werte von  $\dot{\bar{\mathbf{c}}} = \text{konst.}$  verschwinden. Da die geschweifte Klammer nicht von  $\dot{\bar{\mathbf{c}}}$  abhängt, folgt

$$\int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\bar{\mathbf{p}}}) dV_{\mathcal{R}} + \oint_{O_{\mathcal{R}}} \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} dO_{\mathcal{R}} = \bar{\mathbf{0}}. \tag{4.51}$$

Dies ist der integrale Impulssatz im Beobachtersystem  $S$  bezogen auf  $\mathcal{R}$ .

Voraussetzungsgemäß ist keines der beiden Beobachtersysteme gegenüber dem anderen ausgezeichnet, so daß auch das gesternte Beobachtersystem  $S^*$  als das "ruhende" System angesehen werden kann. Die dann im "bewegten" Beobachtersystem  $S$  observierten Größen wie  $\bar{p}, \dot{\bar{p}}, \ddot{\bar{p}}, \bar{t}, \bar{q}$  etc. können durch die entsprechenden Größen  $\bar{p}^*$  etc. des "ruhenden" Systems mit Hilfe der Transformationsgesetze dargestellt werden; z.B.

$$\bar{p} = \bar{c} + \underline{Q}^T \bar{p}^*.$$

Führt man dies in den Energiesatz (4.20) (Beobachtersystem  $S$ ) ein und fordert die Forminvarianzbedingung, dann folgt ganz analog wie oben als integraler Impulssatz im Beobachtersystem  $S^*$

$$\int_{V_{R^*}} S_{R^*}^* (\bar{b}^* - \ddot{\bar{p}}^*) dV_{R^*} + \oint_{O_{R^*}} \bar{t}_{R^*}^* dO_{R^*} = \bar{O}^* \quad (4.52)$$

Im weiteren soll nur kurz die Schlußweise skizziert werden, um aus dem integralen Impulssatz den lokalen Impulssatz abzuleiten. Ausführliche Darstellungen sind z.B. in [39, 41, 77] zu finden. Da jeder Teil eines Körpers selbst wieder einen Körper darstellt, für den der Energiesatz und damit auch der integrale Impulssatz dieselbe Form haben soll, ist die Form dieser Sätze unabhängig vom Integrationsbereich.<sup>x</sup> Denkt man sich jetzt einen Teilbereich in der Gestalt eines Tetraeders aus dem Körper herausgeschnitten, dessen Kanten mit den Koordinatenlinien zusammenfallen sollen, wendet darauf den integralen Impulssatz an und läßt die Abmessungen des Tetraeders gegen Null gehen, dann erhält man in der Momentankonfiguration das Cauchysche Fundamentaltheorem

$$\bar{t} = \underline{t} \bar{n} \quad ; \quad (4.53)$$

hier ist  $\bar{n}$  der Einheitsnormalenvektor der Tetraederfläche, auf die der Spannungsvektor  $\bar{t}$  wirkt, und  $\underline{t}$  ist der Cauchysche Spannungstensor. Man beachte, daß zur Herleitung der Existenz des Spannungstensors  $\underline{t}$  u.a. der integrale Impulssatz verwendet wurde. Ein anderes

---

<sup>x</sup> Diese Forderung ist nicht selbstverständlich. Es sei bemerkt, daß dieses Postulat (Lokalitätspostulat) für nicht-lokale Theorien nicht unterstellt wird; die Gültigkeit der integralen Bilanzgleichungen wird dort nur für den gesamten Körper verlangt [39, S. 74].

Herleitungskonzept ist wohl möglich [77], aber auch hier kann man nicht umhin, den integralen Impulssatz zu benutzen. Dies zeigt, daß der integrale Impulssatz gegenüber dem noch im folgenden abzuleitenden lokalen Impulssatz von übergeordneter Bedeutung ist, denn aus ihm, zusammen mit anderen Postulaten, folgen die Existenz des Spannungstensors und der lokale Impulssatz.

Anstelle des Cauchyschen Spannungstensors  $\underline{t}$  sei hier der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor 2. Art [66]

$$\underline{T} := \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{t} \underline{F}^T \quad (4.54)$$

eingeführt, der auf die Flächenelemente und die Basisvektoren des Referenzsystems  $\mathcal{R}$  bezogen ist.

Anmerkung:

Sind  $\bar{g}_N$ ,  $N=1,2,3$  die Basisvektoren eines krummlinigen, mitgeschleppten Koordinatensystems der Momentankonfiguration und  $\bar{G}_N$ ,  $N=1,2,3$  die Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems in der Referenzkonfiguration (Kap. 3.1), dann sind

$$\underline{t} = t^{KL} \bar{g}_K \otimes \bar{g}_L = t_{KL} \bar{g}^K \otimes \bar{g}^L$$

und

$$\underline{T} = T^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L = T_{KL} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L.$$

Mit (3.18), (3.19) und (4.12) wird

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{t} \underline{F}^T = \frac{s_R}{s} \bar{G}_M \otimes \bar{g}^M \underline{t} \bar{g}^N \otimes \bar{G}_N \\ &= \frac{s_R}{s} t^{MN} \bar{G}_M \otimes \bar{G}_N, \end{aligned}$$

so daß

$$T^{KL} = \frac{s_R}{s} t^{KL} \quad (4.54)^I$$

gilt; d.h., bei der Verwendung mitgeschleppter Koordinaten zur Beschreibung der Momentankonfiguration sind die kontravarianten Komponenten des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art bis auf das Dichteverhältnis  $\rho_R/\rho$  zahlenmäßig gleich den kontravarianten Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors. Wie man leicht zeigt, gilt aber für die kovarianten Komponenten

$$T_{KL} = \frac{\rho_R}{\rho} t^{MN} G_{MK} G_{NL}$$

$$T_{KL} = \frac{\rho_R}{\rho} t_{RS} g^{RM} g^{SN} G_{MK} G_{NL}.$$

Ende der Anmerkung

Unter Beachtung von Nansons Formel (4.16) wird mit (4.54)

$$\begin{aligned} \bar{t}_R &= \bar{t} \frac{dO}{dO_R} = \underline{t} \bar{n} \frac{dO}{dO_R} = \det(\underline{F}) \underline{t} \underline{F}^{-T} \bar{N} \\ &= \underline{F} \underline{I} \bar{N}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

Damit wird der auf die Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}$  bezogene integrale Impulssatz

$$\int_{V_R} \rho_R (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) dV_R + \oint_{O_R} \underline{F} \underline{I} \bar{N} dO_R = \bar{0}.$$

Das hier auftretende Oberflächenintegral läßt sich jetzt mit dem Gaußschen Integralsatz für zweistufige Tensorfelder<sup>\*</sup>  $\underline{Z}$

$$\int_{V_R} \bar{\nabla}_R \underline{Z} dV_R = \oint_{O_R} \bar{N} \underline{Z} dO_R = \oint_{O_R} \underline{Z}^T \bar{N} dO_R \quad (4.56)$$

in ein Volumenintegral umformen, so daß der integrale Impulssatz die Form

$$\int_{V_R} \left\{ \rho_R (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla}_R (\underline{F} \underline{I})^T \right\} dV_R = \bar{0}$$

<sup>\*</sup> wird als eindeutig und stetig und

als stetig vorausgesetzt.

erhält. Da dies für jeden beliebigen Integrationsbereich gelten soll (Lokalitätspostulat), muß der Integrand verschwinden:

$$\mathfrak{S}_R(\bar{\mathbf{b}} - \dot{\bar{\mathbf{p}}}) + \bar{\nabla}_R (\underline{\mathbf{E}\mathbf{I}})^T = \bar{\mathbf{0}}, \quad (4.57)$$

Dies ist der lokale Impulssatz. Hierbei sind die Vektoren  $\bar{\mathbf{b}}$  und  $\dot{\bar{\mathbf{p}}}$  auf die Basis der Referenzkonfiguration zu beziehen, wenn eine Komponentendarstellung vorgenommen wird.

Mit diesem Ergebnis läßt sich der Energiesatz (4.20) "reduzieren". Mit dem Gaußschen Integralsatz für Vektoren  $\bar{\mathbf{a}}$

$$\int_{V_R} \bar{\nabla}_R \cdot \bar{\mathbf{a}} \, dV_R = \oint_{O_R} \bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{a}} \, dO_R \quad (4.58)$$

und mit (4.20) wird das Oberflächenintegral der Spannungsleistung im Energiesatz (4.27) umgeformt:

$$\begin{aligned} \oint_{O_R} \dot{\bar{\mathbf{p}}} \cdot ((\underline{\mathbf{E}\mathbf{I}})\bar{\mathbf{N}}) \, dO_R &= \oint_{O_R} \bar{\mathbf{N}} \cdot ((\underline{\mathbf{E}\mathbf{I}})^T \dot{\bar{\mathbf{p}}}) \, dO_R \\ &= \int_{V_R} \bar{\nabla}_R \cdot ((\underline{\mathbf{E}\mathbf{I}})^T \dot{\bar{\mathbf{p}}}) \, dV_R. \end{aligned}$$

Ist

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Z}} &= \mathbf{Z}^{MN} \bar{\mathbf{G}}_M \otimes \bar{\mathbf{G}}_N := (\underline{\mathbf{E}\mathbf{I}})^T \\ \bar{\mathbf{p}} &= p_{RN} \bar{\mathbf{G}}^N, \quad \dot{\bar{\mathbf{p}}} = \dot{p}_{RN} \bar{\mathbf{G}}^N \end{aligned}$$

dann wird mit (3.20)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_R \cdot (\underline{\mathbf{Z}} \dot{\bar{\mathbf{p}}}) &= \mathbf{Z}^{MN}{}_{;N} \dot{p}_{RN} + \mathbf{Z}^{MN} \dot{p}_{RN}{}_{;M} \\ &= (\bar{\nabla}_R \underline{\mathbf{Z}}) \cdot \dot{\bar{\mathbf{p}}} + \text{tr} [\underline{\mathbf{Z}} (\bar{\nabla}_R \otimes \dot{\bar{\mathbf{p}}})^T] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Beachtet man ferner, daß

$$\bar{\nabla}_R \otimes \bar{\rho} = \underline{F}^T, \quad \bar{\nabla}_R \otimes \dot{\bar{\rho}} = \underline{\dot{F}}^T, \quad (4.60)$$

dann wird aus dem integralen Energiesatz (4.20)

$$\begin{aligned} \int_{V_R} \rho_R \dot{\underline{E}} dV_R &= \int_{V_R} \left\{ \rho_R (\bar{b} - \ddot{\bar{\rho}}) + \bar{\nabla}_R (\underline{F} \underline{I})^T \right\} \cdot \dot{\bar{\rho}} dV_R \\ &+ \int_{V_R} \left\{ \text{tr} [\underline{I}^T \underline{F}^T \underline{\dot{E}}] + \rho_R \bar{l} \cdot \bar{\omega} \right\} dV_R \end{aligned} \quad (4.61)$$

Unter Berücksichtigung des lokalen Impulssatzes (4.57) folgt damit schließlich der "partiell reduzierte" Energiesatz

$$\int_{V_R} \rho_R \dot{\underline{E}} dV_R = \int_{V_R} \left\{ \text{tr} [\underline{I}^T \underline{F}^T \underline{\dot{E}}] + \rho_R \bar{l} \cdot \bar{\omega} \right\} dV_R \quad (4.62)$$

Die Bezeichnung "partiell reduziert" soll zum Ausdruck bringen, daß der Leistungsbeitrag der Massenkraftdichte  $\bar{b}$  eliminiert worden ist, nicht aber der Beitrag durch die Massenmomentendichte  $\bar{l}$ .

#### 4.2.3 Invarianzeigenschaften bei Übergang zu beliebig rotatorisch bewegten Beobachtersystemen

Bewegt sich das Beobachtersystem  $S^*$  relativ zu  $S$  beliebig rotatorisch, wobei die Ursprünge  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}^*$  zusammenfallen sollen, dann gilt

$$\bar{c}^* = \bar{c}, \quad \dot{\bar{c}}^* = \dot{\bar{c}}, \quad \underline{Q} = \underline{Q}(t) \quad (4.63)$$

Im vorhergehenden Kapitel folgte aus der Forminvarianz des Energiesatzes gegenüber Galilei-Transformationen der integrale Impulssatz (4.50) bzw. (4.52). Man beachte, daß der Impulssatz (4.52) im Beobachtersystem  $S^*$  unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachtersystems  $S^*$  gilt, also forminvariant ist. Diese Forderung kann als ein Ausdruck des allgemeinen Relativitätsprinzips angesehen werden.

Mit (4.43)<sub>1</sub> und unter Beachtung der Tatsache, daß die Integrationsgrenzen in  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}^*$  zahlenmäßig dieselben sind, wird aus (4.52)

$$\int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} (\bar{b}^* - \ddot{\bar{p}}^*) dV_{\mathcal{R}} + \underline{Q}(t) \oint_{\partial \mathcal{R}} \bar{t}_{\mathcal{R}} d\sigma_{\mathcal{R}} = \bar{0}^* ;$$

mit (4.51) erhält man schließlich

$$\int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} [\bar{b}^* - \ddot{\bar{p}}^* - \underline{Q}(t) (\bar{b} - \ddot{\bar{p}})] dV_{\mathcal{R}} = \bar{0}^* ; \quad (4.64)$$

so daß sich daraus wegen der Beliebigkeit des Integrationsbereiches

$$\bar{b}^* - \ddot{\bar{p}}^* = \underline{Q}(t) (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) \quad (4.65)$$

ergibt. Die Auflösung nach  $\bar{b}^*$  liefert damit das Transformationsgesetz für die Massenkraftdichte  $\bar{b}$  bei Übergang zu beliebig rotierenden Beobachtersystemen. Das Transformationsgesetz (4.65) macht deutlich, daß nur die Differenz zwischen der Massenkraftdichte und der Beschleunigung ein vom Bewegungszustand des Beobachtersystems unabhängiger Vektor (d.i. objektiver Vektor, vergl. Kap. 4.2.6) ist, nicht aber die Massenkraftdichte selbst. Für das Transformationsverhalten der Massensmomentendichte  $\bar{\mathcal{L}}$  soll die Annahme

$$\bar{\mathcal{L}}^* = \underline{Q}(t) \bar{\mathcal{L}} \quad (4.66)$$

getroffen werden. Diese Hypothese ist dadurch motiviert, daß man sich Volumenmomente durch statisch äquivalente Paare von Volumenkräften er-

setzt denken kann. Wenn eine vom Verschiebungsfeld unabhängige Eigendrehbewegung vorhanden ist, dann wird man ein Transformationsgesetz zu erwarten haben, das analog (4.65) aufgebaut ist, wobei hier dann anstelle von  $\ddot{\bar{p}}$  die Eigendrehbeschleunigung treten würde. Da für diese Betrachtungen aber eine Eigendrehbewegung nicht vorhanden sein soll, ist die Transformationsbedingung (4.66) naheliegend.

Ferner soll hier noch das Transformationsverhalten der beiden Spannungstensoren angegeben werden, das später noch benötigt wird. Für den Spannungsvektor  $\bar{t}$  in der Momentankonfiguration, wie er sich im Beobachtersystem  $\mathcal{S}$  darstellt, gilt die Transformation (4.42) und der Normalenvektor  $\bar{n}$  transformiert sich analog

$$\bar{n}^* = \underline{Q} \bar{n} \quad (4.67)$$

(man beachte den Unterschied zu der Transformation des Normalenvektors  $\bar{N}$  der Referenzkonfiguration (4.45)). Im Beobachtersystem  $\mathcal{S}^*$  geht (4.53) über in

$$\bar{t}^* = \underline{t}^* \bar{n}^* ;$$

mit (4.67) folgt

$$\underline{t}^* = \underline{Q} \underline{t} \underline{Q}^T \quad (4.68)$$

als Transformationsvorschrift für den Cauchyschen Spannungstensor. Unter Beachtung der Begriffe von Anhang (1) ist demnach der Cauchysche Spannungstensor  $\underline{t}$  ein objektiver oder beobachterinvarianter Tensor. Mit der Definition (4.54) für den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor 2. Art gilt zunächst im Beobachtersystem  $\mathcal{S}^*$

$$\underline{T}^* = \det(\underline{F}^*) \underline{F}^{*-1} \underline{t}^* (\underline{F}^{*-1})^T$$

Mit dem Transformationsgesetz für  $\underline{F}^{-1}$  (4.44) und

$$\det(\underline{F}^*) = \det(\underline{F}),$$



wird

$$\underline{T}^* = \det(\underline{F}) \underline{Q} \underline{\bar{F}} \underline{Q}^T \underline{t}^* \underline{Q} \underline{\bar{F}}^T \underline{Q}^T;$$

wegen (4.68), (4.54) und wegen der Orthogonalität von  $\underline{Q}$  erhält man schließlich

$$\underline{T}^* = \underline{Q} \underline{T} \underline{Q}^T, \quad (4.69)$$

Daraus folgt sofort, daß die Komponenten von  $\underline{T}^*$  bezogen auf das Referenzsystem  $\mathcal{R}^*$  zahlenmäßig dieselben Werte haben wie die Komponenten von  $\underline{T}$  im Referenzsystem  $\mathcal{R}$ . Denn mit

$$\underline{T}^* = T^{*KL} \bar{G}_K^* \otimes \bar{G}_L^* \quad , \quad \underline{T} = T^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L$$

und (A1.4) bzw.

$$\underline{Q} = \bar{G}_M^* \otimes \bar{G}^M = \bar{G}^{*M} \otimes \bar{G}_M$$

ist

$$T^{*KL} = T^{KL}, \quad (4.70)$$

Mit diesen Ergebnissen und Annahmen werden jetzt weitere Folgerungen aus der Forminvarianz des Energiesatzes bei Übergang zu beliebig rotierenden Beobachtersystemen abgeleitet. Unter Beachtung der Transformationsgesetze von Kap. (4.2.1) sowie Gl. (4.65) und (4.66) läßt sich jetzt der Energiesatz (4.22) im Beobachtersystem  $\mathcal{S}^*$  wie folgt darstellen: Aus (4.22) folgt zunächst

$$\begin{aligned} \int_{V_{\mathcal{R}^*}^*} S_{\mathcal{R}^*}^* \dot{\mathcal{E}}^* dV_{\mathcal{R}^*}^* &= \int_{V_{\mathcal{R}^*}^*} S_{\mathcal{R}^*}^* [(\bar{b}^* - \dot{\bar{p}}^*) \cdot \dot{\bar{p}}^* + \bar{e}^* \cdot \dot{\bar{w}}^*] dV_{\mathcal{R}^*}^* \\ &+ \int_{O_{\mathcal{R}^*}^*} \bar{t}_{\mathcal{R}^*}^* \cdot \dot{\bar{p}}^* dO_{\mathcal{R}^*}^* \\ &+ H_{\mathcal{N}}^* + H_{\mathcal{F}}^* \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned}
 \int_{V_R} g_R \dot{E} dV_R &= \int_{V_R} g_R \left[ (\underline{Q}(\bar{b} - \ddot{\bar{p}})) \cdot (-\underline{Q}(\bar{\omega} \times \bar{p}) + \underline{Q} \dot{\bar{p}}) \right. \\
 &\quad \left. + (\underline{Q} \bar{l}) \cdot (\underline{Q}(-\bar{\omega} + \dot{\bar{w}})) \right] dV_R \\
 &\quad + \oint_{O_R} (\underline{Q} \bar{t}_R) \cdot (-\underline{Q}(\bar{\omega} \times \bar{p}) + \underline{Q} \dot{\bar{p}}) dO_R \\
 &\quad + H_r + H_q \\
 &= \int_{V_R} g_R \left[ (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) \cdot \dot{\bar{p}} + \bar{l} \cdot \dot{\bar{w}} \right] dV_R \\
 &\quad + \oint_{O_R} \bar{t}_R \cdot \dot{\bar{p}} dO_R + H_r + H_q \\
 &\quad - \left\{ \int_{V_R} g_R \left[ (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{p}) + \bar{l} \cdot \bar{\omega} \right] dV_R - \oint_{O_R} \bar{t}_R \cdot (\bar{\omega} \times \bar{p}) dO_R \right\}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Mit dem Energiesatz (4.20) im Beobachtersystem  $S'$  folgt aber jetzt aus (4.71), daß der Ausdruck in geschweiften Klammern {...} verschwinden muß. Unter Berücksichtigung des Permutationstheorems für Spatprodukte dreier Vektoren erhält man daher

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} \cdot \left\{ \int_{V_R} g_R \left[ \bar{p} \times (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{l} \right] dV_R \right. \\
 \left. + \oint_{O_R} \bar{p} \times \bar{t}_R dO_R \right\} &= \bar{0}
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Da  $\bar{\omega}$  beliebig wählbar ist und die geschweifte Klammer in (4.72) unabhängig von  $\bar{\omega}$  ist, folgt schließlich

$$\int_{V_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}} [\bar{\mathbf{p}} \times (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\bar{\mathbf{p}}}) + \bar{\mathbf{l}}] dV_{\mathcal{R}} + \oint_{\partial V_{\mathcal{R}}} \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} d\sigma_{\mathcal{R}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (4.73)$$

Dies ist der integrale Drehimpulssatz für das Beobachtersystem  $\mathcal{S}$ , dargestellt in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}$ . Mit Ausnahme der Massenmomentendichte  $\bar{\mathbf{l}}$  hat er klassische Form; die hier zu bildenden Momente sind bezüglich des Ursprungs  $\sigma$  des Beobachtersystems  $\mathcal{S}$  zu ermitteln.

Die Überführung in eine lokale Bedingung erfordert zunächst die Umrechnung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral. Das Vektorprodukt läßt sich zunächst darstellen durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} &= \epsilon_{\mathcal{R}}^{KLM} p_{\mathcal{R}L} t_{\mathcal{R}M} \bar{\mathbf{G}}_K \\ \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} &= t_{\mathcal{R}M} \bar{\mathbf{G}}^M, \quad \bar{\mathbf{p}} = p_{\mathcal{R}L} \bar{\mathbf{G}}^L \end{aligned} \quad (4.74)$$

wobei  $\epsilon_{\mathcal{R}}^{KLM}$  den Permutationstensor

$$\epsilon_{\mathcal{R}}^{KLM} = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}, \quad \epsilon_{\mathcal{R}KLM} = \sqrt{G} \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} KLM \text{ zyklisch} \\ \text{" antizyklisch} \\ \text{zwei oder drei Indizes} \\ \text{gleich} \end{array} \quad (4.75)$$

darstellt. Mit dem Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor 1. Art  $\underline{\underline{T}}_{\mathcal{R}}$  ist

$$\bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{T}} \bar{\mathbf{N}} = \underline{\underline{T}}_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{N}}, \quad \underline{\underline{T}}_{\mathcal{R}} := \underline{\underline{F}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{\mathcal{R}L} {}^N \bar{\mathbf{G}}^L \otimes \bar{\mathbf{G}}_N, \quad (4.76)$$

es wird dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{t}}_{\mathcal{R}} &= \bar{\mathbf{p}} \times (\underline{\underline{T}}_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{N}}) = \underline{\underline{Y}} \bar{\mathbf{N}} \\ \underline{\underline{Y}} &:= \epsilon_{\mathcal{R}}^{KLM} p_{\mathcal{R}L} T_{\mathcal{R}M}^N \bar{\mathbf{G}}_K \otimes \bar{\mathbf{G}}^N \end{aligned}$$

Der Gaußsche Integralsatz liefert weiter

$$\begin{aligned}
 \oint_{O_R} \bar{\rho} \times \bar{t}_R dO_R &= \oint_{O_R} \underline{Y} \bar{N} dO_R = \int_{V_R} \bar{\nabla}_R \underline{Y}^T dV_R \\
 &= \int_{V_R} \bar{\nabla}_R \left( \epsilon_R^{KLM} p_{R,L} T_{R,M}^N \bar{G}_N \otimes \bar{G}_K \right) dV_R \quad (4.77) \\
 &= \int_{V_R} \left[ \bar{\rho} \times \left( \bar{\nabla}_R T_{R}^T \right) + \epsilon_R^{KLM} p_{R,L;S} T_{R,M}^S \bar{G}_K \right] dV_R.
 \end{aligned}$$

Hier wurde die Kettenregel für die kovariante Ableitung von Tensorprodukten verwendet und die Tatsache, daß

$$\epsilon_R^{KLM} ; S \equiv 0.$$

Berücksichtigt man jetzt die Definitionsgleichung von  $\underline{T}_R$  Gl. (4.76)<sub>1</sub> sowie (4.77), dann erhält der Drehimpulssatz die folgende Form

$$\int_{V_R} \left\{ \bar{\rho} \times \left[ g_R (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla}_R (\underline{F} \underline{T})^T \right] + g_R \bar{l} + \epsilon_R^{KLM} p_{R,L;S} p_{R,M;N} T^{NS} \bar{G}_K \right\} dV_R = \bar{0} \quad (4.78)$$

Ist der lokale Impulssatz (4.57) exakt erfüllt, dann verschwindet das Vektorprodukt und wegen der Beliebigkeit des Integrationsbereiches erhält man schließlich den reduzierten lokalen Drehimpulssatz

$$\epsilon_R^{KLM} p_{R,L;S} p_{R,M;N} T^{NS} \bar{G}_K + g_R \bar{l} = \bar{0} \quad (4.79)$$

oder auch

$$\bar{p}_{,S} \times \bar{p}_{,N} T^{NS} + g_R \bar{l} = \bar{0}. \quad (4.80)$$

Bei Verwendung mitgeschleppter Koordinaten mit der ko- und kontravarianten Basis  $\bar{g}_s = \bar{P}_{,s}$  und  $\bar{g}^s$  (Gl. (3.15)) erhält (4.80) auch die Form

$$E_{SNQ} T^{NS} \bar{g}^Q + S_R \bar{l} = \bar{0}. \quad (4.81)$$

Mit  $\bar{l} = l_M \bar{g}^M$  und unter Beachtung von (4.54)<sup>I</sup> gilt dann

$$\left. \begin{aligned} E_{KLM} t^{LK} + S_{LM} &= 0 \\ t^{KL} - t^{LK} &= \frac{1}{\sqrt{g}} S_{LM}, \quad K, L, M \text{ zyklisch} \end{aligned} \right\} (4.82)$$

Verwendet man dagegen ausschließlich Größen, die auf das Referenzsystem bezogen sind, dann erhält man aus (4.79) mit  $\bar{l} = L_M \bar{G}^M$  und unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Permutationstensors (3.7)

$$\left. \begin{aligned} E_{R KLM} S^{LK} + S_R L_M &= 0 \\ \text{bzw. für zyklische Indizes } K, L, M \end{aligned} \right\} (4.83)$$

$$S^{KL} - S^{LK} = P_R^K{}_{;N} (T^{NS} - T^{SN}) P_R^L{}_{;S} = + \frac{1}{\sqrt{G}} S_R L_M$$

wobei

$$\underline{S} := S^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L, \quad S^{KL} := P_R^K{}_{;N} T^{NS} P_R^L{}_{;S}$$

Spaltet man den Cauchyschen Spannungstensor  $\underline{t}$  in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil auf

$$\left. \begin{aligned} \underline{t} &= \underline{\overset{s}{t}} + \underline{\overset{a}{t}} \\ \underline{\overset{s}{t}} &= \frac{1}{2} (\underline{t} + \underline{t}^T), \quad \underline{\overset{a}{t}} = \frac{1}{2} (\underline{t} - \underline{t}^T) \end{aligned} \right\} (4.84)$$

und beachtet, daß

$$E_{KLM} \overset{s}{t}{}^{LK} = 0$$

dann folgt aus (4.82)<sub>1</sub>

$$E_{KLM} \underline{\underline{t}}^{aLK} = -S_{LM}. \quad (4.85)$$

Mit [81]

$$E_{KLM} E^{PQM} = \int_{KL}^{PQ}$$

und

$$\int_{KL}^{PQ} \underline{\underline{t}}^{aLK} = \underline{\underline{t}}^{aQP} - \underline{\underline{t}}^{aPQ} = -2 \underline{\underline{t}}^{aPQ}$$

folgt aus (4.85) schließlich

$$\underline{\underline{t}}^{aPQ} = + \frac{1}{2} S E^{PQM} L_M. \quad (4.86)$$

Analog gilt für den schiefssymmetrischen Anteil des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art

$$\underline{\underline{t}}^{aPQ} := \underline{\underline{t}}^P_{R;N} \underline{\underline{T}}^{NS} \underline{\underline{t}}^Q_{R;S} = + \frac{1}{2} S_R E_R^{PRM} L_M. \quad (4.87)$$

Die Ergebnisse (4.86) und ebenso (4.87) zeigen, daß der schiefssymmetrische Anteil der Spannungstensoren  $\underline{\underline{t}}$  und  $\underline{\underline{T}}$  vollständig durch Vorgabe der Massenmomentdichte bestimmt wird. Ist insbesondere kein Volumenmoment vorhanden, so verschwinden die schiefssymmetrischen Anteile der Spannungstensoren, so daß

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}^T, \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T. \quad (4.88)$$

Um zu dem Ergebnis (4.79) (lokaler Drehimpulssatz) bzw. seinen Alternativformen (4.82) und (4.83) zu gelangen, läßt sich noch eine abgekürzte Ableitung durchführen, die von der partiell reduzierten Energiebilanzgleichung (4.62), in der die Leistung der Massenkraftdichte  $\underline{\underline{b}}$  nicht mehr enthalten ist, ausgeht. Invarianz bei Übergang zu einem beliebig rotatorisch bewegten Beobachtersystem liefert dann auch hier (4.79). Der hier angedeutete Weg wurde von Green und Rivlin [42] für Probleme ohne Volumenmomente besprochen. Der scheinbare Vorteil dieser Vorgehensweise, keine Aussage über das Transformationsverhalten der Massenkraftdichte  $\underline{\underline{b}}$  machen zu müssen, erweist sich aber bei anderen Problemstellungen als nachteilig (Kap. 8.2).

#### 4.2.4 Zum lokalen Impuls- und Drehimpulssatz

Mit der Aufspaltung des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil

$$\underline{T} = \underline{\overset{s}{T}} + \underline{\overset{a}{T}} \quad (4.89)$$

$$\underline{\overset{s}{T}} = \frac{1}{2} (\underline{T} + \underline{T}^T) \quad , \quad \underline{\overset{a}{T}} = \frac{1}{2} (\underline{T} - \underline{T}^T)$$

wird der Divergenzterm im lokalen Impulssatz (4.57)

$$\bar{\nabla}_R (\underline{E} \underline{T})^T = \bar{\nabla}_R (\underline{E} \underline{\overset{s}{T}})^T + \bar{\nabla}_R (\underline{E} \underline{\overset{a}{T}})^T$$

Weiter läßt sich der lokale Drehimpulssatz in der Form (4.87) auch durch

$$\underline{E} \underline{\overset{a}{T}} \underline{E}^T = \frac{1}{2} \rho_R \epsilon_R^{PQM} L_M \bar{G}_P \otimes \bar{G}_Q \quad (4.90)$$

darstellen. Multiplikation mit der Inversen von  $\underline{E}^T$  erlaubt dann schließlich den lokalen, auf die Referenzkonfiguration bezogenen Impulssatz (4.57) in der folgenden Form zu schreiben

$$\rho_R (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla}_R (\underline{E} \underline{\overset{s}{T}})^T + \bar{\nabla}_R (\underline{E}^{-1} \frac{1}{2} \rho_R \epsilon_R^{PQM} L_M \bar{G}_Q \otimes \bar{G}_P) = \bar{0}. \quad (4.91)$$

Bei Verwendung mitgeschleppter Koordinaten (Momentankonfiguration ist Bezugsconfiguration) und des Cauchy'schen Spannungstensor  $\underline{t}$  lautet der lokale Impulssatz

$$\rho (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla} \underline{t}^T = \bar{0}.$$

Ferner ist (4.86) äquivalent

$$\underline{t}^a = \frac{1}{2} \rho \epsilon^{PQM} L_M \bar{g}_P \otimes \bar{g}_Q,$$

so daß der lokale Impulssatz in mitgeschleppten Koordinaten auch die Form

$$\rho (\bar{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla} \underline{t}^a + \bar{\nabla} (\frac{1}{2} \rho \epsilon^{PQM} L_M \bar{g}_P \otimes \bar{g}_Q) = \bar{0}$$

hat. Damit ist gezeigt, daß der lokale Impulssatz auch allein mit dem symmetrischen Anteil des Spannungstensors dargestellt werden kann. Der schiefssymmetrische Anteil läßt sich vollständig durch die eingeprägte Massenmomentdichte  $\underline{\bar{\ell}}$  (bzw. Volumenmomentdichte  $\rho \underline{\bar{\ell}}$ ) darstellen. Formal gesehen wirken diese Terme wie zusätzliche Volumenkräfte; auf diesen Gesichtspunkt wird besonders im Teil 2 der Abhandlung eingegangen werden.

#### 4.2.5 Der reduzierte Energiesatz

Mit der lokalen Bedingung (4.87) kann jetzt der partiell reduzierte Energiesatz (4.62) auf eine Form gebracht werden, in der der Leistungsbeitrag durch die äußere eingeprägte Massenmomentdichte  $\underline{\bar{\ell}}$  nicht mehr enthalten ist. Man ordnet dazu den Vektoren  $\underline{\bar{\ell}}$  und  $\underline{\bar{w}}$  schiefssymmetrische Tensoren

$$\underline{\Lambda} = -\underline{\Lambda}^T, \quad \underline{W} = -\underline{W}^T$$

zu, derart daß

$$\underline{\Lambda} \bar{a} = \underline{\bar{\ell}} \times \bar{a}, \quad \underline{W} \bar{a} = \underline{\bar{w}} \times \bar{a}$$

gilt ( $\bar{a}$  beliebig). Dann sind die Komponenten von  $\underline{\Lambda}$  und  $\underline{W}$  durch

$$\Lambda^{KM} = \epsilon_R^{KLM} L_L = -\epsilon_R^{KML} L_L \quad (4.92)$$

und entsprechend für  $W^{KM}$  gegeben. Man zeigt dann leicht, daß

$$\underline{\bar{\ell}} \cdot \underline{\bar{w}} = \frac{1}{2} \text{tr} (\underline{\Lambda}^T \underline{W}). \quad (4.93)$$

Wegen (4.92) folgt jetzt aus der lokalen Bedingung (4.87) bzw. (4.90)

$$\underline{F} \underline{\bar{T}} \underline{F}^T = \frac{1}{2} \rho_R \underline{\Lambda}^T \quad (4.94)$$

so daß (4.93)

$$\underline{\bar{\ell}} \cdot \underline{\bar{w}} = + \frac{1}{2} \text{tr} (\underline{F} \underline{\bar{T}} \underline{F}^T \underline{W}) \quad (4.95)$$

ergibt. Ferner läßt sich der erste Ausdruck im Integranden der rechten Seite von Gl. (4.64) unter Beachtung von (3.58) und (3.59) wie folgt umformen:



$$\begin{aligned}
 \text{tr} [\underline{I}^T \underline{F}^T \dot{\underline{F}}] &= \text{tr} [\underline{\dot{E}} \underbrace{\underline{\dot{E}}^{-1} \underline{F} \underline{I}^T \underline{F}^T}_{:= \underline{S}^T}] \\
 &= \text{tr} [\underline{L} \underline{S}^T] \\
 &= \text{tr} [(\underline{D} + \underline{W}) \underline{S}^T] \\
 &= \text{tr} [\underline{S}^T \underline{D}] + \text{tr} [\underline{S}^T \underline{W}] \\
 &= \text{tr} [\underline{\dot{S}} \underline{D}] - \text{tr} [\underline{\dot{S}} \underline{W}],
 \end{aligned}
 \tag{4.96}$$

so daß man mit (4.95) aus (4.96)

$$\text{tr} [\underline{I}^T \underline{F}^T \dot{\underline{F}}] + \rho_R \bar{l} \cdot \bar{w} = \text{tr} [\underline{F} \underline{\dot{I}} \underline{F}^T \underline{D}]
 \tag{4.87}$$

erhält. Mit dem Lagrangeschen Verzerrungstensor  $\underline{E}$  (3.33) und den Lagrangeschen Verzerrungsraten  $\underline{\dot{E}}$  (3.66) wird

$$\underline{D} = \underline{\dot{E}}^T \underline{\dot{E}} \underline{E}^{-1},$$

so daß man schließlich

$$\text{tr} [\underline{F} \underline{\dot{I}} \underline{F}^T \underline{D}] = \text{tr} [\underline{\dot{I}} \underline{\dot{E}}]
 \tag{4.98}$$

ermittelt. Wendet man den Gaußschen Integralsatz auf den Oberflächenterm in (4.62) an, dann läßt sich wegen (4.97) und (4.98) die Energiebilanzgleichung (4.62) wie folgt darstellen

$$\int_{V_R} \left\{ \rho_R \dot{E} - \text{tr} [\underline{\dot{I}} \underline{\dot{E}}] - \rho_R r + \bar{V}_R \cdot \bar{q}_R \right\} dV_R = 0.
 \tag{4.99}$$

Wegen der Beliebigkeit des Integrationsbereiches folgt daraus als lokale Bedingung die lokale reduzierte Energiebilanzgleichung

$$\rho_R \dot{E} - \text{tr} [\underline{\dot{I}} \underline{\dot{E}}] - \rho_R r + \bar{V}_R \cdot \bar{q}_R = 0.
 \tag{4.100}$$

Man beachte hier, daß in dem Spannungsleistungsterm

$$\text{tr} [\underline{\underline{T}} \dot{\underline{\underline{E}}}]$$

nur der symmetrische Anteil des Spannungstensors einen Beitrag liefert. Bei Problemen ohne Volumenmomente ( $\bar{\underline{\underline{l}}} = \bar{\underline{\underline{0}}}$ ) ist der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor 2. Art  $\underline{\underline{T}}$  symmetrisch, so daß damit die lokale reduzierte Energiebilanzgleichung ihre übliche Form

$$\rho_{\mathcal{R}} \dot{\underline{\underline{E}}} - \text{tr} [\underline{\underline{T}} \dot{\underline{\underline{E}}}] - \rho_{\mathcal{R}} \gamma + \bar{\nabla}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{\underline{\underline{q}}}_{\mathcal{R}} = 0$$

annimmt.

## 5. Auswertung der Entropieungleichung und der Beobachterinvarianz für thermoelastische Stoffgleichungen<sup>x</sup>

### 5.1 Die Entropieungleichung (Clausius-Duhem Entropieungleichung)

Neben dem Energiesatz steht in der Gleichgewichtsthermodynamik (Thermostatik) als zweites fundamentales Prinzip der 2. Hauptsatz, für den im Rahmen der Gleichgewichtsthermodynamik verschiedene alternative Formulierungen vorhanden sind, die unbestritten sind [82]. Für Nichtgleichgewichtsprozesse gibt es bisher kein allgemein akzeptiertes Prinzip oder Konzept. Verschiedene Konzepte mit z.T. sehr unterschiedlichen axiomatischen Strukturen sind vorgeschlagen und angewandt worden [83, 84], auf die hier aber nicht eingegangen werden kann.

Im Sinne der Terminologie von Hutter [83], der die klassische irreversible Thermodynamik (der Vorgänge) und die rationale Thermodynamik, u.z. die Clausius-Duhem Theorien und die entropiefreien Theorien, unterscheidet, soll hier eine Clausius-Duhem Theorie zum Ausgangspunkt genommen werden. Die hier verwendete Formulierung des 2. Hauptsatzes für Nichtgleichgewichtsprozesse entspricht vollständig der von Coleman und Noll [49], Truesdell-Noll [66, 51] und Truesdell [50] postulierten (vergl. auch Gurtin [47]) Form der Clausius-Duhem Entropieungleichung, u.z.

$$\frac{D}{Dt} \int_V s \eta \, dV \geq \int_V \frac{s r}{T} \, dV - \oint_0 \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{T} \, dO. \quad (5.1)$$

Als neue, in dieser Studie bisher nicht erklärte Größen, sind hier die spezifische Entropie  $\eta$  und die absolute Temperatur  $T$  vorhanden. Beachtenswert ist, daß die Begriffe Entropie und absolute Temperatur in der Gleichgewichtsthermodynamik als aus dem 2. Hauptsatz ableitbare Größen eingeführt werden (erste Teilaussage des 2. Hauptsatzes [82]), während hier an Anlehnung an dieses Ergebnis die Existenz dieser Größen postuliert wird.

Mit (4.13) und (4.17) stellt sich die Entropieungleichung (5.1) in der Referenzkonfiguration wie folgt dar

<sup>x</sup> Diese Darstellung folgt weitgehend der von Coleman und Noll [49]. Der mit diesen Konzepten vertraute Leser kann dieses Kapitel übergehen.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_R} \rho_R \eta \, dV_R \geq \int_{V_R} \frac{\rho_R r}{T} \, dV_R - \oint_{O_R} \frac{\bar{q}_R \cdot \bar{N}}{T} \, dO_R \quad (5.1)^I$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz, die Differenzierbarkeit von  $\bar{q}_R/T$  vorausgesetzt, läßt sich das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführen und man erhält

$$\int_{V_R} \left\{ \rho_R \dot{\eta} - \rho_R \frac{r}{T} + \bar{\nabla}_R \cdot \left( \frac{\bar{q}_R}{T} \right) \right\} dV_R \geq 0; \quad (5.1)^{II}$$

diese Ungleichung soll mit der Lokalisierungshypothese für alle Integrationsbereiche gelten, so daß damit als lokale Entropieungleichung

$$\begin{aligned} \rho_R \dot{\eta} - \rho_R \frac{r}{T} + \bar{\nabla}_R \cdot \left( \frac{\bar{q}_R}{T} \right) &= \\ &= \rho_R \dot{\eta} - \rho_R \frac{r}{T} + \frac{1}{T} \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R - \frac{1}{T^2} \bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R T \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

folgt.

Die Forderung nach Forminvarianz der Clausius-Duhem Entropieungleichung bei Wechsel des Beobachtersystems bedeutet, daß

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_R^*} \rho_{R^*} \eta^* \, dV_{R^*} \geq \int_{V_R^*} \frac{\rho_{R^*} r^*}{T^*} \, dV_{R^*} - \oint_{O_{R^*}} \frac{\bar{q}_{R^*} \cdot \bar{N}^*}{T^*} \, dO_{R^*} \quad (5.3)$$

im "bewegten" Beobachtersystem gilt. Für die absolute Temperatur werde verlangt, daß sie ein beobachterinvarianter (objektiver) Skalar ist, so daß für sie die Beobachtertransformation

$$T^* = T \quad (5.4)$$

gilt. Aus der Forminvarianz der Entropieungleichung und unter Beachtung der bekannten Beobachtertransformationen der anderen Größen in der Ungleichung folgt dann die Objektivität (Beobachterinvarianz) der spezifischen Entropie

$$\eta^* = \eta \quad (5.5)$$

## 5.2 Thermodynamische Prozesse

Ein "thermodynamischer Prozess" in einem Körper wird durch die folgenden Funktionen beschrieben:

1. Die Momentanposition

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{P}, t)$$

eines materiellen Punktes, dessen Position in der Referenzkonfiguration durch  $\bar{P}$  gegeben ist.

2. Der Spannungstensor

$$\underline{I} = \underline{I}(\bar{P}, t)$$

3. Die Massenkraftdichte

$$\bar{b} = \bar{b}(\bar{P}, t)$$

4. Die Massenmomentendichte

$$\bar{l} = \bar{l}(\bar{P}, t)$$

5. Die spezifische innere Energie

$$\varepsilon = \varepsilon(\bar{P}, t)$$

6. Der Wärmeflußvektor

$$\bar{q}_R = \bar{q}_R(\bar{P}, t)$$

7. Die Wärmequellendichte

$$r = r(\bar{P}, t)$$

8. Die spezifische Entropie

$$\eta = \eta(\bar{P}, t)$$

9. Die absolute Temperatur

$$T = T(\bar{P}, t) > 0$$

die als positiv angenommen wird.

Dieser Satz von Funktionen bildet einen "thermodynamischen Prozess", wenn die Energiebilanzgleichung zusammen mit den Invarianzforderungen (oder alternativ die Energiebilanzgleichung, der Impuls- und der Drehimpulssatz) für jeden beliebigen Teil des Körpers erfüllt werden. Mit anderen Worten müssen die in Kap. 4 abgeleiteten lokalen Bedingungen (4.57), (4.79) und (4.100) simultan erfüllt werden.

Um einen derartig definierten thermodynamischen Prozess hinreichend zu beschreiben, genügt die Angabe der Funktionen  $\bar{\rho}, \underline{T}, \varepsilon, \bar{q}_R, \eta,$  und  $\bar{T}$ ; die verbleibenden Funktionen  $\bar{b}, \bar{\ell}$  und  $\tau$  sind dann eindeutig durch den lokalen Impuls-, Drehimpuls- und Energiesatz festgelegt.

### 5.3 Thermoelastische Stoffgleichungen

Ein thermoelastisches Material mit Wärmeleitung sei durch die folgenden Stoffgleichungen charakterisiert:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Spez. innere Energie} \quad \varepsilon &= \check{\varepsilon}(\bar{\rho}, \kappa, T, \bar{\nabla}_R T) \\
 \text{Spannungstensor (Sym. Anteil)} \quad \underline{T} &= \check{T}(\bar{\rho}, \kappa, T, \bar{\nabla}_R T) \\
 \text{Wärmeflußvektor} \quad \bar{q}_R &= \check{q}_R(\bar{\rho}, \kappa, T, \bar{\nabla}_R T) \\
 \text{Spez. Entropie} \quad \eta &= \check{\eta}(\bar{\rho}, \kappa, T, \bar{\nabla}_R T)
 \end{aligned} \right\} (5.6)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß der schiefsymmetrische Anteil des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art bei Vorgabe der Volumenelemente vollständig bestimmt ist und nur für den symmetrischen Anteil Stoffgleichungen verlangt werden.

Die Liste der unabhängigen Variablen  $\bar{\rho}, \kappa, T, \bar{\nabla}_R T$  wird in allen Stofffunktionen entsprechend der Äquipräsenzregel als Argumentenliste angesehen. Anstelle von  $\bar{\nabla}_R T = \bar{G}^K \bar{T}_{,K}$  hätte auch die Ableitung  $\bar{T}_{,K}$  allein aufgeführt werden können, und anstelle von  $\bar{\rho}, \kappa$  hätte der Deformationstensor  $\underline{F} = \bar{\rho}, \kappa \otimes \bar{G}^K$  verwendet werden können.

Konstitutive Gleichungen unterliegen der Bedingung der Forminvarianz bei Wechsel des Beobachtersystem (Prinzip der Objektivität). Auf die Bedingung soll aber erst später eingegangen werden.

Ein thermodynamischer Prozess soll als zulässig bezeichnet werden, wenn er mit den Stoffgleichungen (5.6) verträglich ist.

#### 5.4 Auswertung der Entropieungleichung: Das Dissipationspostulat

Mit den oben aufgeführten Definitionen soll jetzt, den Vorstellungen von Coleman und Noll [49] folgend, das folgende Dissipationspostulat als gültig angesehen werden:

Für jeden zulässigen thermodynamischen Prozess in einem Körper, der hier durch die Stoffgleichungen (5.6) charakterisiert sein soll, muß die Clausius-Duhem-Ungleichung in jedem beliebigen Teilbereich erfüllt sein.

Im folgenden werden kurz die logischen Konsequenzen dieser Forderung dargestellt. Aus der lokalen Clausius-Duhem Entropieungleichung, erhält man durch Elimination der Wärmequellendichte mit Hilfe des lokalen reduzierten Energiesatzes (4.100)

$$\rho_R \dot{\eta} - \rho_R \frac{\dot{\epsilon}}{T} + \frac{1}{T} \operatorname{tr}[\bar{T} \dot{\underline{\epsilon}}] - \frac{1}{T^2} \bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R T \geq 0 \quad (5.7)$$

Führt man als neue Stofffunktion\* die "freie Energie" (Helmholtzsche Funktion)

$$\psi = \epsilon - T\eta = \psi(\bar{p}_{,k}, T, \bar{\nabla}_R T) \quad (5.8)$$

ein, dann wird

$$\dot{\epsilon} = \dot{\psi} + T\dot{\eta} + \eta\dot{T},$$

so daß

$$T\dot{\eta} - \dot{\epsilon} = -\dot{\psi} - \eta\dot{T},$$

---

\* Dies ist nicht als eine Legendre-Transformation zu verstehen, sondern als eine bequeme Abkürzung;  $\psi$ ,  $\epsilon$  und  $\eta$  sind Funktionen mit derselben Argumentenliste.

und beachtet, daß

$$\begin{aligned} t_r [\underline{\dot{T}} \underline{\dot{E}}] &= \overset{1}{T}{}^{KL} \dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} \overset{1}{T}{}^{KL} (\dot{\bar{p}}_{,K} \cdot \bar{p}_{,L} + \bar{p}_{,K} \cdot \dot{\bar{p}}_{,L}) \\ &= \overset{1}{T}{}^{KL} \bar{p}_{,K} \cdot \dot{\bar{p}}_{,L}, \end{aligned}$$

dann wird aus der Clausius-Duhem Ungleichung nach Multiplikation mit  $\bar{T} > 0$

$$-s_{,R}(\dot{\psi} + \eta \dot{T}) + \overset{1}{T}{}^{KL} \bar{p}_{,K} \cdot \dot{\bar{p}}_{,L} - \frac{1}{\bar{T}} \bar{q}_{,R} \cdot \bar{\nabla}_R T \geq 0, \quad (5.9)$$

Ausführung der materiellen Zeitintegration und Umordnen liefert

$$\begin{aligned} & \left[ \overset{1}{T}{}^{KL} \bar{p}_{,K} - s_{,R} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\bar{p}}_{,L}} \right] \cdot \dot{\bar{p}}_{,L} - s_{,R} \left[ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{T}} + \eta \right] \dot{T} \\ & - s_{,R} \left[ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\bar{\nabla}}_R T} \right] (\bar{\nabla}_R T) - \frac{1}{\bar{T}} \bar{q}_{,R} \cdot \bar{\nabla}_R T \geq 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Entsprechend dem Dissipationspostulat muß diese Ungleichung für jeden zulässigen thermodynamischen Prozess gelten. Mit den oben aufgeführten Definitionen läßt sich jeder beliebigen Vorgabe der Funktionen

Bewegung  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{P}, t)$

absol. Temperatur  $\bar{T} = \bar{T}(\bar{P}, t)$

ein zulässiger thermodynamischer Prozess zuordnen, sofern dann nur  $\overset{1}{T}$ ,  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{q}_{,R}$  und  $\eta$  den Stoffgleichungen (5.6) genügen. Sind  $\bar{\rho}(\bar{P}, t)$  und  $\bar{T}(\bar{P}, t)$  beliebig einstellbar, dann sind lokal (d.h. für irgend einen materiellen Punkt) auch  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\rho}_{,K}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\nabla}_R \bar{T}$  wie auch  $\dot{\bar{\rho}}$ ,  $\dot{\bar{\rho}}_{,K}$ ,  $\dot{\bar{T}}$  und  $(\bar{\nabla}_R \bar{T})^\circ$  beliebig und unabhängig von einander einstellbar.<sup>x</sup> Da die Ausdrücke in den eckigen Klammern ebenso wie  $\bar{q}_{,R} \cdot \bar{\nabla}_R T$  unabhängig von den Raten  $\dot{\bar{\rho}}_{,K}$ ,  $\dot{\bar{T}}$ ,  $(\bar{\nabla}_R \bar{T})^\circ$  sind, folgt entsprechend der Coleman-Noll-

<sup>x</sup> Auf einen Beweis wird hier verzichtet. Dazu wird auf [49] verwiesen.



Schlußweise, daß die Koeffizienten der Raten der unabhängig Veränderlichen identisch verschwinden müssen, d.h.,

$$\begin{aligned} \frac{\check{\nu}}{T} \kappa_L \bar{p}_{,K} - S_R \frac{\partial \check{\psi}}{\partial \bar{p}_{,L}} &= 0 \\ \frac{\partial \check{\psi}}{\partial T} + \check{\eta} &= 0 \\ \frac{\partial \check{\psi}}{\partial \bar{\nabla}_R T} &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

und als Restentropieungleichung erhält man wegen  $T > 0$

$$\bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R T \leq 0 \quad (5.12)$$

Die Bedingungen (5.11) zeigen, daß die Stoffgleichungen  $\frac{\check{\nu}}{T}, \check{\psi}, \check{\eta}$  nicht unabhängig voneinander gewählt werden dürfen; bei Vorgabe der freien Energie  $\check{\psi}$  sind die Entropie entsprechend (5.11)<sub>2</sub> und Spannungen entsprechend (5.11)<sub>1</sub> bestimmt. Gl. (5.11)<sub>3</sub> zeigt insbesondere, daß die freie Energie nicht vom Temperaturgradienten abhängen darf; damit dürfen dann auch nicht die Entropie und die Spannungen von den Temperaturgradienten abhängen. Die Stoffgleichungen (5.6) vereinfachen sich damit zu

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \check{\varepsilon}(\bar{p}_{,K}, T) \\ \frac{\check{\nu}}{T} &= \check{\nu}(\bar{p}_{,K}, T) \\ \bar{q}_R &= \check{q}_R(\bar{p}_{,K}, T, \bar{\nabla}_R T) \\ \eta &= \check{\eta}(\bar{p}_{,K}, T), \end{aligned} \right\} (5.13)$$

wobei immer noch (5.11)<sub>1</sub>, (5.11)<sub>2</sub> und (5.12) zu beachten sind.

5.5 Konsequenzen des Prinzips der Forminvarianz der Stoffgleichungen

Bei Übergang zu einem beliebig rotierenden Beobachtersystem lauten die Stoffgleichungen (5.13) wie folgt

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}^* &= \underline{\varepsilon}^{v*}(\underline{\bar{p}}_{,k}^*, T^*) \\
 \underline{\dot{T}}^* &= \underline{\dot{T}}^{v*}(\underline{\bar{p}}_{,k}^*, T^*) \\
 \underline{\bar{Q}}_{T_R}^* &= \underline{\bar{Q}}_{T_R}^{v*}(\underline{\bar{p}}_{,k}^*, T^*, \underline{\bar{v}}_{R^*}^* T^*) \\
 \underline{\eta}^* &= \underline{\eta}^{v*}(\underline{\bar{p}}_{,k}^*, T^*) .
 \end{aligned} \right\} (5.14)$$

Wie vorher angegeben worden war, transformieren sich die Werte der Stofffunktionen (die abhängig Veränderlichen, d.s. die linken Seiten von (5.6)) und die Argumente der Stofffunktionen (unabhängig Veränderliche) bei Übergang zu einem beliebig rotierenden Beobachtersystem nach folgenden Regeln:

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{\bar{p}}_{,k}^* &= \underline{Q} \underline{\bar{p}}_{,k} \\
 (\underline{\bar{v}}_R T)^* &= \underline{Q} \underline{\bar{v}}_R T \\
 \underline{\dot{T}}^* &= \underline{Q} \underline{\dot{T}} \underline{Q}^T \\
 \underline{\bar{Q}}_{T_R}^* &= \underline{Q} \underline{\bar{Q}}_{T_R}
 \end{aligned} \right\} \text{und in Komponentenform} \left\{ \begin{aligned}
 \bar{p}_{R^* i k}^{*L} &= Q^L_M \bar{p}_{R i k}^M \\
 T^*_{,k} &= T_{,k} \\
 \dot{T}^{*KL} &= \dot{T}^{KL} \\
 \bar{Q}_{T_R}^{*K} &= \bar{Q}_{T_R}^K
 \end{aligned} \right\} (5.15)$$

Das Forminvarianzprinzip besagt nun im Hinblick auf die Stofffunktionen  $\underline{\varepsilon}^v, \underline{\varepsilon}^{v*}$  etc., daß für zwei im beliebigen Bewegungszustand befindliche Beobachter, deren Koordinatensysteme kontinuierlich auseinander hervorgehen, die Stofffunktionen die gleiche Form haben. In Komponentendarstellung für die Stofffunktionen bedeutet dies

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{v^*}{\mathcal{E}}(\bar{\rho}_{,K}^*, T^*) &= \overset{v}{\mathcal{E}}(\bar{\rho}_{,K}, T) \\
 \overset{v^*}{\eta}(\bar{\rho}_{,K}^*, T^*) &= \overset{v}{\eta}(\bar{\rho}_{,K}, T) \\
 \overset{v^*}{T}^{KL}(\bar{\rho}_{,K}^*, T^*) &= \overset{v}{T}^{KL}(\bar{\rho}_{,K}, T) \\
 \overset{v^*}{f}_R^K(\bar{\rho}_{,K}^*, T^*, (\bar{v}_R T)^*) &= \overset{v}{f}_R^K(\bar{\rho}_{,K}, T, (\bar{v}_R T)^*)
 \end{aligned} \right\} (5.16)$$

Diese Forminvarianzforderung für die Stofffunktionen ergibt jetzt zusammen mit den Transformationsregeln (5.15) die folgenden Bedingungen für die Stofffunktionen:

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{v}{\mathcal{E}}(Q \bar{\rho}_{,K}, T) &= \overset{v}{\mathcal{E}}(\bar{\rho}_{,K}, T) \\
 \overset{v}{\eta}(Q \bar{\rho}_{,K}, T) &= \overset{v}{\eta}(\bar{\rho}_{,K}, T) \\
 \overset{v}{T}^{KL}(Q \bar{\rho}_{,K}, T) &= \overset{v}{T}^{KL}(\bar{\rho}_{,K}, T) \\
 \overset{v}{f}_R^K(Q \bar{\rho}_{,K}, T, Q \bar{v}_R T) &= \overset{v}{f}_R^K(\bar{\rho}_{,K}, T, \bar{v}_R T)
 \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Aus (5.17) lassen sich weitere logische Konsequenzen mit Hilfe des Cauchyschen Representationstheorems [66, S. 27+28; 26] ableiten:

Ist  $f(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$  eine eindeutige Funktion von  $n$  Vektoren  $\bar{v}_i$  und ist  $f$  invariant gegenüber Wechsel des Beobachtersystems (eigentlich orthogonalen Transformationen), d.h.

$$\begin{aligned}
 f(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) &= f(Q \bar{v}_1, Q \bar{v}_2, \dots, Q \bar{v}_n) \\
 \underline{Q} \underline{Q}^T &= \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{1}, \quad \det(\underline{Q}) = +1,
 \end{aligned}$$

dann ist  $f$  reduzierbar auf eine Funktion, die nur von den Skalarprodukten  $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j$  und den skalaren Dreifachprodukten  $\bar{v}_i \cdot (\bar{v}_k \times \bar{v}_l)$   $i \neq k \neq l$  abhängt.

Demnach läßt sich beispielsweise die innere Energie  $\overset{v}{\mathcal{E}}$  darstellen durch eine Funktion mit den Argumenten

$$\mathcal{E} = \overset{v}{\mathcal{E}}(g_{MN}, h_{JKL}, T),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} g_{MN} &:= \bar{p}_{,M} \cdot \bar{p}_{,N} \\ h_{JKL} &:= \bar{p}_{,J} \cdot (\bar{p}_{,K} \times \bar{p}_{,L}) \end{aligned} \right\} (5.18)$$

und die Indizes die Werte 1 bis 3 annehmen. Das skalare Dreifachprodukt  $h_{JKL}$  verschwindet identisch, sofern nur zwei Indizes gleiche Werte annehmen. Die nicht verschwindenden Dreifachprodukte sind

$$h_{123} = \bar{p}_{,1} \cdot (\bar{p}_{,2} \times \bar{p}_{,3})$$

sowie  $h_{231}$  und  $h_{312}$ .

Nun gilt bekanntlich für drei linear unabhängige Vektoren  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$

$$\bar{c}_1 \cdot (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3) = \operatorname{sgn} [\bar{c}_1 \cdot (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3)] \det(\bar{c}_i)$$

$$\det(\bar{c}_i) = \begin{vmatrix} \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_1 & \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 & \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_3 \\ \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_2 & \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_3 \\ \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_1 & \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_3 \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

Die Basisvektoren des Koordinatensystems in der undeformierten Ausgangskonfiguration  $\bar{p}_{,K}$   $K=1,2,3$  bilden per definitionem ein rechtshändiges System, so daß

$$\operatorname{sgn} [\bar{p}_{,1} \cdot (\bar{p}_{,2} \times \bar{p}_{,3})] = +1$$

$$\det(\bar{p}_{,K}) \neq 0.$$

Die Vektoren  $\bar{p}_{,K}$  bilden die Basis des mitgeschleppten Koordinatensystems in der Momentankonfiguration. Da die  $\bar{p}_{,K}$   $K=1,2,3$  als Tangentenvektoren an drei materielle Linien aufgefaßt werden können und diese in einem materiellen Punkt nicht jeweils zueinander parallel werden dürfen (m.a.W.  $\bar{p}_{,1}, \bar{p}_{,2}, \bar{p}_{,3}$  können zu keinem Zeitpunkt gleichzeitig in einer Ebene liegen), gilt

$$\operatorname{sgn} [h_{123}] = \operatorname{sgn} [h_{231}] = \operatorname{sgn} (h_{312}) = +1. \quad (5.20)$$

Stellt man die drei verbliebenen skalaren Dreifachprodukte mit Hilfe von (5.19) dar und beachtet jetzt (5.20), dann wird erkennbar, daß Dreifachprodukte vollständig durch Angabe der Skalarprodukte  $g_{MN}$  bestimmt sind. Die  $h_{JKL}$  können also in der Argumentenliste für die innere Energie gestrichen werden. Damit reduzieren sich die ersten drei Stoffgleichungen von (5.16) auf

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \check{\varepsilon}(g_{MN}, T) \\ \eta &= \check{\eta}(g_{MN}, T) \\ \check{T}^{KL} &= \check{T}^{KL}(g_{MN}, T). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ganz entsprechend sind die Argumente der Funktion  $\check{\Psi}$  durch  $g_{MN}$  und  $T$  bestimmt. Die reduzierte Stofffunktion für den Wärmestrom soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Mit diesem Ergebnis wird aus (5.11)<sub>1</sub>

$$\left[ \check{T}^{KL} - s_{\pi} \left( \frac{\partial \check{\Psi}}{\partial g_{LK}} + \frac{\partial \check{\Psi}}{\partial g_{KL}} \right) \right] \bar{p}_{JK} = \bar{0};$$

da die  $\bar{p}_{JK}$  voraussetzungsgemäß (linear) unabhängig voneinander einstellbar sind, ist diese Null-Vektor-Bedingung nur dann erfüllt, wenn die eckige Klammer identisch verschwindet, d.h.

$$\check{T}^{KL} = s_{\pi} \left( \frac{\partial \check{\Psi}}{\partial g_{KL}} + \frac{\partial \check{\Psi}}{\partial g_{LK}} \right). \quad (5.22)$$

Damit sind das Dissipationspostulat und die Beobachterinvarianz für die innere Energie und den Spannungstensor ausgeschöpft. Es bleibt noch, die konstitutive Gleichung für den Wärmefluß zu analysieren; darauf wird hier verzichtet. Es sei schließlich noch angemerkt, daß sich wegen (3.30) - (3.33) die abhängigen Veränderlichen  $\check{T}^{KL}$ ,  $\check{\Psi}$  etc. auch als Funktionen der Komponenten  $E_{MN}$  des Lagrangeschen Verzerrungstensors darstellen lassen; dies ist die gebräuchliche Darstellung.

### 5.6 Die Temperaturinverse als unabhängige thermische Variable

Anstelle der absoluten Temperatur kann die Temperaturinverse

$$\Lambda = \frac{1}{T}$$

als unabhängige thermische Variable benutzt werden; wie sich später zeigen wird, hat dies Vorteile für die Entwicklung der Schalentheorie, insbesondere bei der expliziten Verwendung des 2. Hauptsatzes in Form der Clausius-Duhem Entropieungleichung. Es sollen daher die oben abgeleiteten Konsequenzen aus der Clausius-Duhem Ungleichung unter Verwendung der Variablen  $\Lambda$  hier dargestellt werden.

Die integrale Clausius-Duhem-Entropieungleichung (5.1)<sup>I</sup> erhält die Form

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_R} \rho \eta dV_R \geq \int_{V_R} \rho r \Lambda dV_R - \oint_{O_R} \bar{q}_R \cdot \bar{N} \Lambda dO \quad (5.1)^{III}$$

und die lokale Entropieungleichung lautet

$$\rho_R \dot{\eta} - \rho_R r \Lambda + \Lambda \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R + \bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R \Lambda \geq 0,$$

Mit Hilfe des lokalen (reduzierten) Energiesatzes wird daraus

$$\rho_R \dot{\eta} - \rho_R \dot{\epsilon} \Lambda + \Lambda \text{tr} [\bar{\underline{T}} \bar{\underline{E}}] + \bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R \Lambda \geq 0,$$

Mit der Massieschen Funktion [84]

$$\phi = \eta - \epsilon \Lambda$$

$$\phi = -\psi \Lambda$$

wird die lok. Entropieungleichung

$$\rho_R (\dot{\phi} + \epsilon \dot{\Lambda}) + \Lambda \text{tr} [\bar{\underline{T}} \bar{\underline{E}}] + \bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R \Lambda \geq 0.$$

Die hieraus unter Beachtung der Beobachterinvarianz abgeleiteten Restriktionen lauten schließlich:

$$\begin{aligned} T^{KL} &= -\frac{1}{\Lambda} g_R \left( \frac{\partial \phi}{\partial g_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial g_{LK}} \right) \\ \varepsilon &= -\frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{v}_R \Lambda} &= 0 \\ \bar{f}_R \cdot \bar{v}_R \Lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Mit diesen Einschränkungen läßt sich die Entropie  $\eta$  durch die Massieu-  
sche Funktion  $\phi$  darstellen

$$\eta = \phi - \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} .$$

### 5.7 Ergänzende Bemerkungen

Die in Kapitel 4 dargestellte Schlußweise zur Herleitung der lokalen Bilanzgleichung für Impuls, Drall und Energie aus der integralen Energiebilanzgleichung und seinen Invarianzeigenschaften gegenüber Beobachtertransformationen ist schematisch in dem logischen Schema Abb. 3 dargestellt. Dieses Diagramm bezieht sich allerdings auf den Fall, daß keine Volumenmomente  $\beta_R^{\bar{t}}$  vorhanden sind. In Ergänzung dazu ist in Abb. 2 die abgekürzte Ableitung von Green-Rivlin ebenfalls angegeben. Es sei hier noch einmal deutlich hervorgerufen, daß die hier abgeleiteten lokalen Bedingungen isoliert gesehen, ohne Kenntnis ihrer Herleitung nicht unmittelbar einsichtig sind. Man muß sich klarmachen, daß diese lokalen Bedingungen eigentlich Konsequenzen bestimmter Felddefinitionen (skalare, vektorielle und tensorielle Felder), der integralen Energiegleichung und seiner Invarianzeigenschaften sowie bestimmter Transformationsgesetze sind, im Verein mit der Forderung, daß die integralen Bedingungen in der angegebenen Form für jeden beliebigen Teilbereich eines Körpers zu gelten haben (Lokalisierungshypothese). In der Herleitung besteht eine bestimmte Sequenz, die eine Hierarchie in den Gleichungen zur Folge hat. So ist z.B. der lokale Drehimpuls in der Form (4.79) nur dann ableitbar, wenn zugleich der lokale Impulssatz

erfüllt wird; daher ist dann für Probleme ohne Volumenmomente die Symmetrie des Spannungstensors nur dann ableitbar, wenn der lokale Impulssatz exakt erfüllt wird. Entsprechend ist der schiefssymmetrische Anteil des Spannungstensors nur dann durch das Volumenmoment vollständig bestimmt, wenn wiederum der lokale Impulssatz exakt erfüllt wird. Ganz analog setzt die lokale Energiegleichung voraus, daß der lokale Impuls- und Drehimpulssatz exakt erfüllt werden.

Die Auswertung der Clausius-Duhem Entropieungleichung entsprechend der Coleman-Noll Interpretation ist in dem logischen Schema Abb. 4 dargestellt; auch hier beschränkt sich die Darstellung auf den Fall, daß Volumenmomente  $\mathcal{S}_R \bar{\rho}$  nicht vorhanden sind. Die oben angesprochene logische Sequenz setzt sich auch fort in der Coleman-Noll Schlußweise im Zusammenhang mit der Clausius-Duhem Entropieungleichung: Die abgeleiteten entropischen Restriktionen setzten die exakte Erfüllung der lokalen Bilanzgleichungen voraus.

Diese Situation erhält ihre besondere Bedeutung, wenn Näherungstheorien und -lösungen entwickelt werden; hier werden die lokalen Bedingungen nicht mehr exakt erfüllt. Stellt man sich auf den sehr wohl vertretbaren Standpunkt, daß die lokalen Bedingungen nicht die fundamentalen physikalischen Prinzipie darstellen, sondern vielmehr mathematisch-logische Konsequenzen übergeordneter physikalischer Integralprinzipie sind, dann erscheint die Entwicklung von Näherungstheorien (wie z.B. eine Schalentheorie), ausgehend von lokalen Bedingungen, zumindest unter physikalischen Gesichtspunkten undurchsichtig. Eine rationale und rigorose Entwicklung, ausgehend von integralen Fundamentalprinzipien, erscheint angemessener.

Schließlich sei noch auf einen besonderen Aspekt in Zusammenhang mit der angenommenen Existenz von Volumenmomenten hingewiesen. Normalerweise wird das Vorhandensein volumenhaft verteilter externer Momente aufgrund physikalischer Argumente oder schlicht aufgrund einer ad hoc-Annahme ausgeschlossen. In unseren Betrachtungen waren sie aufgrund einer ad hoc-Annahme berücksichtigt, nicht aber die Momentenspannungen und der Spin. Wie aus der Literatur bekannt und auch hier entwickelt, ist der schiefssymmetrische Anteil des Spannungstensors durch Angabe der Volumenmomente (und bei Kenntnis des Verschiebungsfeldes) vollständig festgelegt. Stoffgleichungen sind dann nur noch erforderlich für



symmetrischen Anteil des Spannungstensors; dies ist insbesondere auch ersichtlich aus den Restriktionen für die Stoffgleichungen. Wie die Betrachtungen in Kap. 4.2.4 gezeigt haben, läßt sich die lokale Impulsbilanzgleichung so formulieren, daß in ihr nur der symmetrische Spannungstensor auftritt; neben der aktuellen Volumenkraft treten in dem lokalen Impulssatz jetzt aber Gradienten des Volumenmomentes auf. Formal kann man daher diese beiden Größen zu einer "modifizierten Volumenkraftdichte" zusammenfassen. Es gilt daher folgende allgemein gültige Aussage:

Kontinuumsmechanische Probleme, in denen neben Volumenkräften auch Volumenmomente vorhanden sind, der Spin und Momentenspannungen aber außer Betracht gelassen werden, können formal mathematisch wie ein klassisches kontinuumsmechanisches Problem (d.h. ohne Volumenmomente etc. und mit einem symmetrischen Spannungstensor) behandelt werden, sofern man die aktuelle Volumenkraftdichte durch die "modifizierte Volumenkraftdichte" ersetzt. Es sollte aber beachtet werden, daß bis auf Sonderfälle (insbesondere konstantes Volumenmomentenfeld) die errechneten Verschiebungsfelder natürlich davon abhängen, ob ein Volumenmomentenfeld tatsächlich vorhanden ist oder nicht.

6. Geometrische Beziehungen und Koordinatensysteme in der undeformierten Bezugskonfiguration der Schale<sup>\*</sup>

Die Entwicklung einer Schalentheorie hat zum Ziel, das dreidimensionale Feldproblem auf ein zweidimensionales zu reduzieren; dies beinhaltet u.a. die Darstellung der zweidimensionalen Feldgleichungen in einem zweidimensionalen Raum, nämlich den der i.a. gekrümmten Referenzfläche. Als Referenzfläche sei hier vorerst noch ganz allgemein irgendeine Fläche zwischen den Schalenlaibungen gewählt.

6.1 Flächenkoordinaten und Basisvektoren

Die undeformierte Konfiguration dieser Referenzfläche  $\mathcal{S}$  werde im ungestörten ("ruhenden") Beobachtersystem  $\mathcal{S}$  durch den Ortsvektor  $\bar{R}$  beschrieben. Diese Fläche sei mit einem Koordinatennetz (Abb. 10) belegt; die Koordinaten seien  $\theta^\alpha, \alpha=1,2$  <sup>xxx</sup> (Gaußsche Parameter, Flächenkoordinaten). Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien und damit an die Referenzfläche sind gegeben durch

$$\bar{A}_\alpha := \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{R}_{,\alpha} \quad \alpha=1,2 ; \quad (6.1)$$

dies sind die kovarianten Basisvektoren der Referenzfläche. Mit ihnen läßt sich ein Einheitsvektor  $\bar{A}_3$  bilden, der senkrecht zur Fläche steht

$$\bar{A}_3 = \frac{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_2|} , \quad (6.2)$$

so daß  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  und  $\bar{A}_3$  ein rechtshändiges Basisdreiein auf der Fläche bilden mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_\alpha \cdot \bar{A}_3 &= 0 \\ \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_3 &= 1 . \end{aligned} \right\} (6.3)$$

\* Dieses Kapitel orientiert sich an den Darstellungen von Green-Zerna [75], Klingbeil [85] und Naghdi [11]; auf eine ausführliche mathematische Erläuterung und Begründung wird hier verzichtet.

xxx Hier wie auch im folgenden durchlaufen griechische Indizes die Werte eins bis zwei, lateinische Indizes die Werte eins bis drei.

Die kontravarianten Basisvektoren  $\bar{A}^\alpha$  der Fläche sind definiert durch

$$\bar{A}^1 = \bar{A}_2 \times \bar{A}_3 \frac{1}{|\bar{A}^1|}, \quad \bar{A}^2 = \bar{A}_3 \times \bar{A}_1 \frac{1}{|\bar{A}^2|} \quad (6.4)$$

$$A = \det(\bar{A}_\alpha \cdot \bar{A}_\beta) = [\bar{A}_1 \cdot (\bar{A}_2 \times \bar{A}_3)]^{1/2},$$

so daß

$$\bar{A}_\alpha \cdot \bar{A}^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (6.5)$$

Mit den kontravarianten Basisvektoren  $\bar{A}^\alpha$  bildet man

$$\bar{A}^3 = \frac{\bar{A}^1 \times \bar{A}^2}{|\bar{A}^1 \times \bar{A}^2|} \quad (6.6)$$

und damit wird

$$\bar{A}_3 = \bar{A}^3. \quad (6.7)$$

Das Linienelement auf der Referenzfläche ist

$$d\bar{R} = \bar{R}_{,\alpha} d\theta^\alpha = \bar{A}_\alpha d\theta^\alpha; \quad (6.8)$$

sein Quadrat ist

$$d\bar{R} \cdot d\bar{R} = A_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta, \quad (6.9)$$

wobei

$$A_{\alpha\beta} = \bar{A}_\alpha \cdot \bar{A}_\beta \quad (6.10)$$

die kovarianten Komponenten des Metriktensors auf der Referenzfläche sind (Fundamentalgrößen 1. Ordnung). Die kontravarianten Metrikkoeffizienten auf der Referenzfläche sind

$$A^{\alpha\beta} = \bar{A}^\alpha \cdot \bar{A}^\beta \quad (6.11)$$

mit

$$A^{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad ; \quad (6.12)$$

diese Metrikkoeffizienten dienen zum Herauf- und Herunterziehen der Indizes, denn es gilt

$$\bar{A}_\alpha = A_{\alpha\gamma} \bar{A}^\gamma \quad , \quad \bar{A}^\alpha = A^{\alpha\gamma} \bar{A}_\gamma \quad (6.13)$$

Die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten lauten

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{\alpha,\beta} &= \frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \theta^\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{A}_\gamma + B_{\alpha\beta} \bar{A}_3 \\ \bar{A}_{3,\alpha} &= \frac{\partial \bar{A}_3}{\partial \theta^\alpha} = -B_\alpha^\gamma \bar{A}_\gamma \end{aligned} \right\} (6.14)$$

In (6.14) bedeuten  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$  das Christoffelsymbol auf der Referenzfläche

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma &= \frac{1}{2} A^{\gamma\delta} (A_{\delta\alpha,\beta} + A_{\delta\beta,\alpha} - A_{\alpha\beta,\delta}) \\ &= \bar{A}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{A}^\gamma = \bar{A}_{\beta,\alpha} \cdot \bar{A}^\gamma = -\bar{A}_\beta \cdot \bar{A}_{,\alpha}^\gamma \end{aligned} \quad (6.15)$$

und  $B_{\alpha\beta}$  die Fundamentalgrößen 2. Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{R} \cdot d\bar{R} &= \bar{A}_\alpha \cdot \bar{A}_{3,\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta = -B_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta \\ B_{\alpha\beta} &= B_{\beta\alpha} = -\bar{A}_\alpha \cdot \bar{A}_{3,\beta} = -\bar{A}_\beta \cdot \bar{A}_{3,\alpha} = \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_{\alpha,\beta} \\ B_\beta^\alpha &= A^{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta} \quad , \quad B^{\alpha\beta} = A^{\alpha\gamma} B_\gamma^\beta \end{aligned} \right\} (6.16)$$

Mit dem Permutationskoeffizienten  $\epsilon_{\mathcal{R}\alpha\beta}$

$$\epsilon_{\mathcal{R}\alpha\beta} = \sqrt{|A|} e_{\alpha\beta}$$

$$e_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{zyklisch} \\ -1 & \text{antizyklisch} \\ 0 & \text{zwei Indizes gleich} \end{array} \right\} = e^{\alpha\beta}$$
(6.17)

und

$$\epsilon_{\mathcal{R}}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} \epsilon_{\mathcal{R}\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{|A|}} e^{\alpha\beta}$$

ist

$$\bar{A}_\alpha \times \bar{A}_\beta = \epsilon_{\mathcal{R}\alpha\beta} \bar{A}_\gamma, \quad \bar{A}_\gamma \times \bar{A}_\beta = \epsilon_{\mathcal{R}\beta\gamma} \bar{A}_\alpha$$

$$\bar{A}_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathcal{R}\alpha\beta} \bar{A}^\alpha \times \bar{A}^\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathcal{R}}^{\alpha\beta} \bar{A}_\alpha \times \bar{A}_\beta.$$
(6.18)

## 6.2 Flächenvektoren und -tensoren und kovariante Ableitung

Auf der Referenzfläche kann ein zweites Koordinatensystem  $\bar{\theta}^\alpha$  gewählt werden. Die Transformationsbeziehungen zwischen  $\theta^\alpha$  und  $\bar{\theta}^\alpha$  lauten dann

$$\bar{\theta}^\alpha = \bar{\theta}^\alpha(\theta^1, \theta^2)$$

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2),$$
(6.19)

wobei eine umkehrbar eindeutige Verknüpfung vorausgesetzt wird.

Ähnlich wie im dreidimensionalen (Euklidischen) Raum kann auf der Fläche ein Tensorkalkül für die Koordinatentransformationen (6.19) entwickelt werden. Für die Koordinatendifferentiale gilt

$$d\theta'^{\alpha} = \frac{\partial \theta'^{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} d\theta^{\beta} \quad (6.20)$$

$$d\theta^{\alpha} = \frac{\partial \theta^{\alpha}}{\partial \theta'^{\beta}} d\theta'^{\beta} ;$$

dann wird

$$d\bar{R} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^{\alpha}} d\theta^{\alpha} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta'^{\alpha}} d\theta'^{\alpha} \quad (6.21)$$

$$= \bar{A}_{\alpha} d\theta^{\alpha} = \bar{A}'_{\alpha} d\theta'^{\alpha} ,$$

so daß mit (6.20)

$$\bar{A}'_{\alpha} = \frac{\partial \theta^{\beta}}{\partial \theta'^{\alpha}} \bar{A}_{\beta} , \quad \bar{A}_{\alpha} = \frac{\partial \theta'^{\beta}}{\partial \theta^{\alpha}} \bar{A}'_{\beta} \quad (6.22)$$

Ein Vektor  $\bar{v}$ , der ganz in der Tangentialfläche der Referenzfläche liegt (Flächenvektor), kann bezüglich der Basis  $\bar{A}_{\alpha}$  oder  $\bar{A}'_{\alpha}$  zerlegt werden

$$\bar{v} = v^{\alpha} \bar{A}_{\alpha} = v'^{\alpha} \bar{A}'_{\alpha} ; \quad (6.23)$$

seine Komponenten transformieren sich mit (6.22) dann entsprechend

$$v'^{\alpha} = \frac{\partial \theta'^{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} v^{\beta} , \quad v^{\alpha} = \frac{\partial \theta^{\alpha}}{\partial \theta'^{\beta}} v'^{\beta} . \quad (6.24)$$

Entsprechende Transformationsregeln lassen sich für die kovarianten Komponenten von  $\bar{v}$

$$v_{\alpha} = A_{\alpha\beta} v^{\beta} \quad (6.25)$$

ableiten. Ein (zweistufiger) Flächentensor  $\underline{M}$  bildet einen Flächenvektor  $\bar{v}$  in einen Flächenvektor  $\bar{w}$  ab

$$\bar{w} = \underline{M} \bar{v}. \quad (6.26)$$

Die dyadische Zerlegung von  $\underline{M}$  bezüglich der Basisvektoren der Referenzfläche ergibt

$$\begin{aligned} \underline{M} &= M^{\alpha\beta} \bar{A}_\alpha \otimes \bar{A}_\beta = M_{\alpha\beta} \bar{A}^\alpha \otimes \bar{A}^\beta \\ &= M'^{\alpha\beta} \bar{A}'_\alpha \otimes \bar{A}'_\beta = M'^{\alpha\beta} \bar{A}'_\alpha \otimes \bar{A}'_\beta; \end{aligned} \quad (6.27)$$

als Koordinatentransformationsregeln für die Komponenten hat man beispielsweise

$$\left. \begin{aligned} M'^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \theta'^\alpha}{\partial \theta^\gamma} \frac{\partial \theta'^\beta}{\partial \theta^\delta} M^{\gamma\delta} \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta'^\gamma} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \theta'^\delta} M'^{\gamma\delta} \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Die Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung  $A_{\alpha\beta}$  und  $B_{\alpha\beta}$  und die Permutationskoeffizienten  $\epsilon_{\alpha\beta}$  sind die Komponenten von Flächentensoren.

Es sei ein Flächenvektor  $\bar{v} = v^\alpha \bar{A}_\alpha$  gegeben. Mit den Ableitungsgleichungen (6.14) wird dann seine Ableitung bezüglich der Flächenkoordinate  $\theta^\beta$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{;\beta} &= v^\alpha{}_{;\beta} \bar{A}_\alpha + v^\alpha \bar{A}_{\alpha;\beta} \\ &= (v^\delta{}_{;\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\delta{}_{\alpha\beta} v^\alpha) \bar{A}_\delta + B_{\alpha\beta} v^\alpha \bar{A}_3 \\ &= v^\delta{}_{;\beta} \bar{A}_\delta + B_{\alpha\beta} v^\alpha \bar{A}_3. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Hier ist

$$v^\delta{}_{;\beta} := v^\delta{}_{|\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\delta{}_{\alpha\beta} v^\alpha \quad (6.30)$$

die kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten des Flächenvektors  $\bar{v}$ ; sie stellen die Komponenten eines 2-stufigen Flächentensors dar. Wie aus (6.30) mit (6.15) ersichtlich, ist die durch das  $(:)$ -Symbol gekennzeichnete kovariante Ableitung mit der Metrik  $A_{\alpha\beta}$  zu bilden. Für die kovarianten Komponenten  $v_{\gamma}^s$  wird

$$v_{\gamma;\beta}^s = A_{\gamma\delta} v^{s;\delta} = v_{\gamma,\beta}^s - \overset{0}{\Gamma}_{\gamma\beta}^s v_{\delta}^s. \quad (6.31)$$

Es sei ferner ein Flächentensor 2. Stufe  $\underline{M}$  gegeben. Seine Ableitung wird

$$\begin{aligned} \underline{M}_{,\gamma} &= (M^{\alpha\beta} \bar{A}_{\alpha} \otimes \bar{A}_{\beta})_{,\gamma} \\ &= M^{s\beta}_{;\gamma} \bar{A}_s \otimes \bar{A}_{\beta} \\ &\quad + B_{\alpha\gamma} M^{\alpha\beta} \bar{A}_{\alpha} \otimes \bar{A}_{\beta} + B_{\alpha\gamma} M^{\beta\alpha} \bar{A}_{\beta} \otimes \bar{A}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Hier ist

$$M^{s\beta}_{;\gamma} := M^{s\beta}_{,\gamma} + \overset{0}{\Gamma}_{\alpha\gamma}^s M^{\alpha\beta} + \overset{0}{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\beta} M^{s\alpha} \quad (6.33)$$

die kovariante Ableitung der Komponenten  $M^{s\beta}$ . Die  $M^{s\beta}_{;\gamma}$  sind die Komponenten eines dreistufigen Flächentensors. Die kovarianten Ableitungen der anderen Komponenten sind:

$$\left. \begin{aligned} M^{s\beta}_{;\gamma} &= A_{\beta\mu} M^{s\mu}_{;\gamma} \\ &= M^{s\beta}_{,\gamma} + \overset{0}{\Gamma}_{\lambda\gamma}^s M^{\lambda\beta} - \overset{0}{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\lambda} M^s_{\lambda} \\ M_{s\beta;\gamma} &= A_{s\nu} M^{\nu}_{\beta;\gamma} \\ &= M_{s\beta,\gamma} - \overset{0}{\Gamma}_{\gamma\alpha}^s M_{\lambda\beta} - \overset{0}{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\lambda} M_{s\lambda}. \end{aligned} \right\} (6.34)$$



Es ist hier festzuhalten, daß sich im Gegensatz zum dreidimensionalen (Euklidischen) Raum die Ableitungen  $\bar{v}_{,\beta}$  und  $\bar{M}_{,\gamma}$  nicht allein durch die Flächenvektoren  $v^{\gamma}_{;\beta} \bar{A}_{\beta}$  bzw.  $M^{s\beta}_{;\gamma} \bar{A}_s \otimes \bar{A}_{\beta}$  darstellen lassen.

Man beachte, daß folgendes gilt:

$$A^{\alpha\beta}_{;\gamma} = A^{\alpha}_{\beta;\gamma} = A_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \quad (6.35)$$

$$E^{\alpha s}_{; \gamma} = E^{\alpha}_{s;\gamma} = E_{\alpha s;\gamma} = 0$$

und (Gleichungen von Mainardi und Codazzi)

$$B_{\alpha 2;1} = B_{\alpha 1;2}. \quad (6.36)$$

Ferner ist wesentlich, daß kovariante Ableitungen i.a. nicht vertauschbar sind, d.h.

$$v^{\alpha}_{;\beta\gamma} \neq v^{\alpha}_{;\gamma\beta} \quad (6.37)$$

$$M^{\alpha\beta}_{;\gamma\mu} \neq M^{\alpha\beta}_{;\mu\gamma};$$

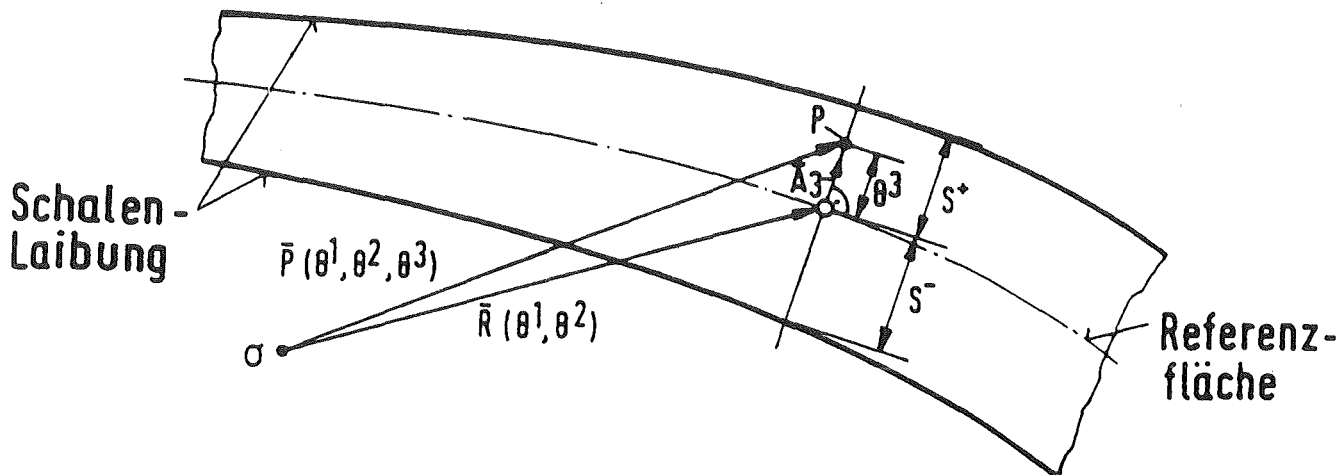
auch dies steht im Gegensatz zur kovarianten Ableitung im dreidimensionalen (Euklidischen) Raum.

### 6.3 Vektoren und Tensoren im Schalenraum

Es sei jetzt  $P$  ein Punkt im Schalenraum, der nicht notwendig auf der Schalenfläche liege. Der Ortsvektor dieses Punktes sei  $\bar{P}$  und er ist darstellbar durch den Ortsvektor  $\bar{R}$  der Referenzfläche und den Normalenvektor  $\bar{A}_3$

$$\bar{P} = \bar{R}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{A}_3(\theta^1, \theta^2). \quad (6.38)$$

Hier ist  $\theta^3 \equiv \theta$  der Abstand des Punktes  $P$  von der Referenzfläche (siehe Skizze).



Für Punkte innerhalb der Schale gilt

$$-S^-(\theta^1, \theta^2) \leq \theta^3 \equiv \Theta \leq +S^+(\theta^1, \theta^2), \quad S^+, S^- > 0 \quad (6.39)$$

wobei  $S^+$  und  $S^-$  die Abstände der Schnittpunkte der Normalen von der Referenzfläche sind. Es sei jetzt

$$\Theta^K = \left\{ \theta^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \quad \theta^3 \equiv \Theta \right\}, \quad K = 1, 2, 3, \quad (6.40)$$

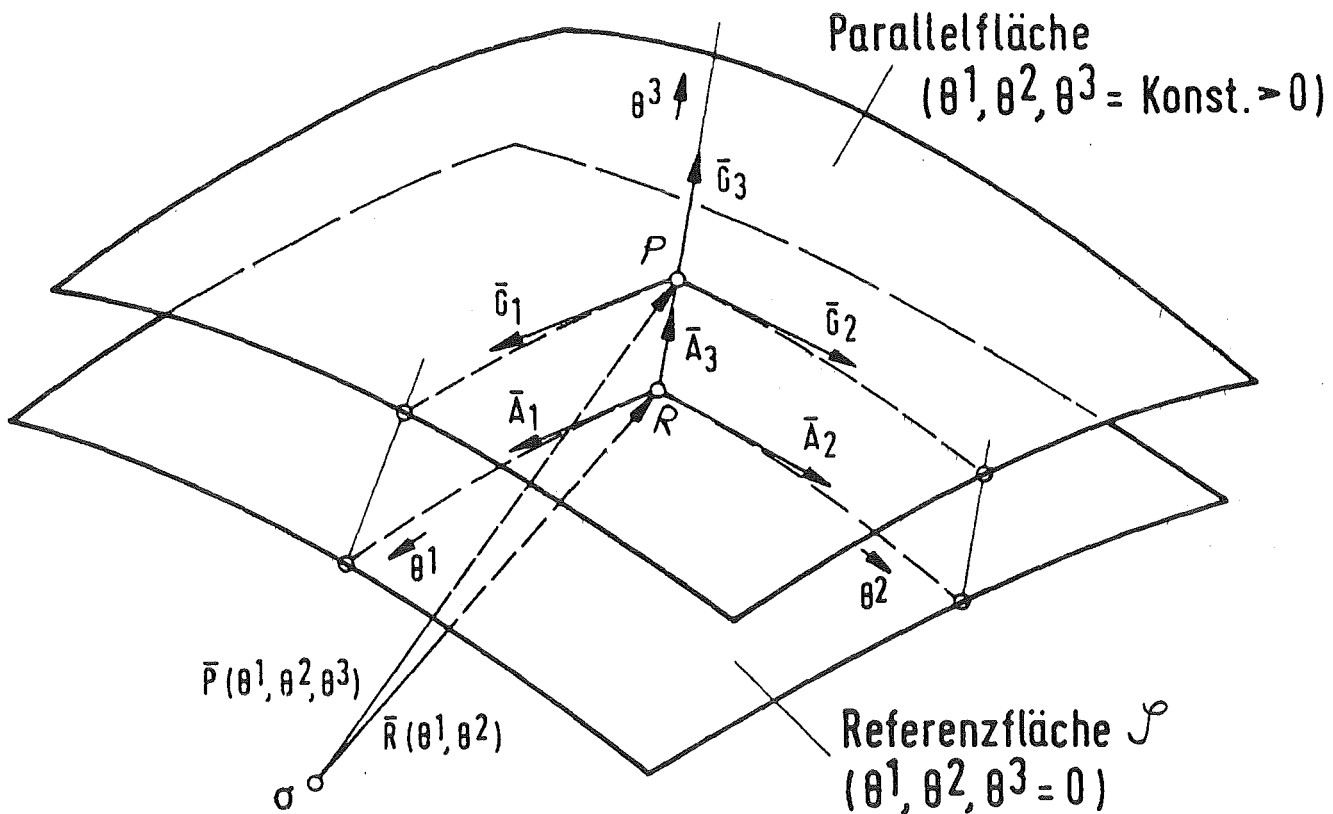
die Koordinatenlinien

$$\Theta^K = \text{konst.}$$

spannen ein dreidimensionales, krummliniges Koordinatennetz auf

(s. Skizze). Die Basisvektoren dieses räumlichen Koordinatensystems sind

$$\bar{G}_K = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \Theta^K} = \bar{P}_{,K} \quad (6.41)$$



Die Basis  $\bar{G}_K$  im Punkte  $P$  im Schalenraum läßt auch durch die Basisvektoren  $\bar{A}_\alpha, \bar{A}_3$  im Fußpunkt  $R$  auf der Referenzfläche darstellen. Mit (6.38) wird

$$\bar{G}_K = \bar{P}_{,K} = \bar{A}_\alpha \delta^\alpha_K + \bar{A}_3 \delta^3_K + \Theta^3 \bar{A}_{3,K} \quad (6.42)$$

für den Einheitsnormalenvektor  $\bar{A}_3$  gilt aber (6.14)<sub>2</sub>

$$\bar{A}_{3,\alpha} = -B_\alpha^\beta \bar{A}_\beta$$

und außerdem

$$\bar{A}_{3,3} = \bar{0}.$$

(6.43)

Daher erhält man mit (6.43), aus (6.42)

$$\bar{G}_K = (\delta_\alpha^\beta - \Theta^3 B_\alpha^\beta) \bar{A}_\beta \delta_K^\alpha + \bar{A}_3 \delta_K^3, \quad (6.44)$$

Wir definieren jetzt

$$\bar{A}_M = \left\{ \bar{A}_\alpha \quad \alpha=1,2, \quad \bar{A}_3 \right\} \quad M=1,2,3 \quad (6.45)$$

mit

$$A_{MN} = \bar{A}_M \cdot \bar{A}_N = \left( \begin{array}{ccc|c} \cdot & & \cdot & 0 \\ & A_{\alpha\beta} & & \\ \cdot & & \cdot & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (6.46)$$

und

$$\det(A_{MN}) = \det(A_{\alpha\beta}) = A \quad (6.47)$$

sowie den kontravarianten Basen  $\bar{A}^N$

$$\bar{A}_M \cdot \bar{A}^N = \delta_M^N. \quad (6.48)$$

Führt man jetzt noch die Paralleltransportkoeffizienten

(shifter  $\bar{\Gamma}^{\bar{1}1\bar{1}}$ ) ein

$$S_K^M(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \left\{ \begin{array}{ll} S_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \Theta^3 B_\beta^\alpha(\theta^1, \theta^2) & \alpha, \beta = 1, 2 \\ S_\beta^3 = S_3^\alpha = 0 & \alpha, \beta = 1, 2 \\ S_3^3 = 1 & \end{array} \right\}, \quad (6.49)$$

dann läßt sich (6.44) auch in der übersichtlichen Form

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_K(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= S_K^M(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \bar{A}_M(\theta^1, \theta^2) \\ S_K^M &= \bar{G}_K \circ \bar{A}^M \end{aligned} \right\} (6.50)$$

bzw.

$$\bar{G}_\alpha = S_\alpha^\beta \bar{A}_\beta, \quad \bar{G}_3 = \bar{A}_3$$

darstellen. Wie aus (6.49) ersichtlich, gilt auf der Referenzfläche ( $\theta^3 \equiv \theta = 0$ )

$$S_K^M(\theta^1, \theta^2, \theta^3=0) = \delta_K^M, \quad (6.51)$$

so daß

$$\bar{G}_K(\theta^1, \theta^2, \theta^3=0) = \bar{A}_K,$$

Der Einheitstensor bezogen auf die Basis  $\bar{G}_K, \bar{G}^K$  ist

$$\underline{1} = G^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L = G_{KL} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L = \bar{G}_K \otimes \bar{G}^K = \bar{G}^K \otimes \bar{G}_K, \quad (6.52)$$

Wegen (6.50) wird daher

$$\underline{1} = S_K^M \bar{A}_M \otimes \bar{G}^K, \quad (6.53)$$

Die Paralleltransportkoeffizienten sind also die Komponenten des Einheitstensors, wenn dieser auf die gemischte dyadische Basis  $\bar{A}_M \otimes \bar{G}^K$  bezogen wird. Der Einheitstensor läßt sich auch allein in der Basis  $\bar{A}_M, \bar{A}^M$  darstellen:

$$\underline{1} = A^{MN} \bar{A}_M \otimes \bar{A}_N = A_{MN} \bar{A}^M \otimes \bar{A}^N = \bar{A}_M \otimes \bar{A}^M = \bar{A}^M \otimes \bar{A}_M. \quad (6.54)$$

Der Vergleich von (6.54) mit (6.53) liefert dann

$$\bar{A}_M \otimes (\bar{A}^M - S_K^M \bar{G}^K) = \underline{0}, \quad (6.55)$$

so daß

$$\bar{A}^M = S_K^M \bar{G}^K, \quad (6.56)$$

Mit der Inversen  $R_M^L$  von  $S_K^M$

$$R_M^L S_K^M = \delta_K^L, \quad R_M^L = \bar{S}_M^{-1L} \quad (6.57)$$

ermittelt man aus (6.56)

$$\bar{G}^k = R_M^k \bar{A}^M. \quad (6.58)$$

Unter Beachtung von (6.52) und (6.58) sind dann die inversen Paralleltransportkoeffizienten  $R_N^M$  die Komponenten des Einheitstensors, wenn dieser auf die dyadische Basis  $\bar{G}_M \otimes \bar{A}^N$  bezogen wird:

$$\underline{1} = R_N^M \bar{G}_M \otimes \bar{A}^N. \quad (6.59)$$

Ganz entsprechend findet man die beiden anderen möglichen Darstellungen des Einheitstensors mit gemischter dyadischer Basis  $\bar{A}^M \otimes \bar{G}_N$  und  $\bar{G}^M \otimes \bar{A}_N$ . Man erhält zusammengefaßt schließlich

$$\begin{aligned} \underline{1} &= G_{KL} \bar{G}^K \otimes \bar{G}^L = G^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L = R_{KL} \bar{A}^K \otimes \bar{A}^L = A^{KL} \bar{A}_K \otimes \bar{A}_L \\ &= \bar{G}_K \otimes \bar{G}^K = \bar{G}^K \otimes \bar{G}_K \\ &= S_K^M \bar{A}_M \otimes \bar{G}^K = S_K^M \bar{G}^K \otimes \bar{A}_M \\ &= R_M^K \bar{G}_K \otimes \bar{A}^M = R_M^K \bar{A}^M \otimes \bar{G}_K \end{aligned} \quad (6.60)$$

Aus dieser Darstellung ist klar, daß die hoch- und tiefstehenden Indizes von  $R$  und  $S$  mit unterschiedlichen Metrikkoeffizienten herunter- bzw. heraufgezogen werden müssen. Welche Metrik zuständig ist, ist aus der gemischten dyadischen Basis erkennbar.

Die explizite Form der Inversen  $R_M^L$  ermittelt man aus

$$R_M^L = \bar{S}_M^L = \frac{co(S_M^L)}{\det(S_N^K)},$$

wobei  $co(S_M^L)$  der Kofaktor bzw. die Adjunkte des Elements  $S_M^L$  ist. Zunächst findet man, daß für die Determinante  $\det(S_N^K)$

$$\det(S_N^K) = \det(S_{\beta}^{\alpha}) = 1 - 2\Theta^3 H + (\Theta^3)^2 K \quad (6.62)$$

$$H := \frac{1}{2} B_{\alpha}^{\alpha}$$

$$K := \det(B_{\beta}^{\alpha})$$

} (6.63)

gilt.  $H$  ist die mittlere Krümmung und  $K$  das Gaußsche Krümmungsmaß. Für die Inverse erhält man zunächst

$$R_M^L = \bar{S}_M^L = \left\{ \begin{array}{ll} R_{\beta}^{\alpha} & \alpha, \beta = 1, 2 \\ R_{\beta}^3 = R_3^{\alpha} = 0 & \alpha, \beta = 1, 2 \\ R_3^3 = 1 & \end{array} \right\} \quad (6.64)$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Matrix  $R_{\beta}^{\alpha}$  nicht nur eine Untermatrix der Inversen von  $S_M^L$  ist, sondern die Inverse von  $S_{\beta}^{\alpha}$  selbst darstellt, d.h.

$$R_{\beta}^{\alpha} S_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha}.$$

Die Rechnung ergibt explizit für  $R_{\beta}^{\alpha}$  [11]

$$R_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\det(S_{\beta}^{\alpha})} [\delta_{\beta}^{\alpha} + \Theta^3 (B_{\beta}^{\alpha} - 2H \delta_{\beta}^{\alpha})]. \quad (6.65)$$

Es werde jetzt ein Vektorfeld  $\bar{D}$  im Schalenraum betrachtet; ein Vektor  $\bar{D}(P)$  am Ort  $P$  kann einmal bezüglich der Basis  $\bar{G}_k$  bzw.  $\bar{G}^k$  am Ort  $P$  zerlegt werden oder auch bezüglich der Basis an einen anderen Ort, insbesondere am Fußpunkt  $R$  auf der Referenzfläche. Die Komponentendarstellungen sind natürlich in den verschiedenen Basen verschieden.

So gilt

$$\left. \begin{array}{l} \bar{D} = D^k \bar{G}_k, \quad D^k = \bar{G}^k \cdot \bar{D} \\ \quad = D_k \bar{G}^k, \quad D_k = \bar{G}_k \cdot \bar{D} \\ \text{und} \\ \bar{D} = \tilde{D}^k \bar{A}_k, \quad \tilde{D}^k = \bar{A}^k \cdot \bar{D} \\ \quad = \tilde{D}_k \bar{A}^k, \quad \tilde{D}_k = \bar{A}_k \cdot \bar{D} \end{array} \right\} \quad (6.66)$$

Die Umrechnungsformeln der verschiedenen Komponenten ineinander kann unter Verwendung der verschiedenen alternativen Darstellungsformen des Einheitstensors erfolgen. Aus

$$\begin{aligned}
 \bar{D} &= \underline{1} \bar{D} = (\bar{G}_K \otimes \bar{G}^K) \bar{D} = \bar{G}_K (\bar{G}^K \cdot \bar{D}) = \bar{G}_K D^K \\
 &= (\bar{G}^K \otimes \bar{G}_K) \bar{D} = \bar{G}^K (\bar{G}_K \cdot \bar{D}) = \bar{G}^K D_K \\
 &= (R_M^K \bar{G}_K \otimes \bar{A}^M) \bar{D} = R_M^K \bar{G}_K \tilde{D}^M \\
 &= (S_K^M \bar{G}^K \otimes \bar{A}_M) \bar{D} = S_K^M \bar{G}^K \tilde{D}_M
 \end{aligned}$$

erhält man nach Vergleich der rechten Seiten und Inversion

$$\left. \begin{aligned}
 R_M^K \tilde{D}^M &= D^K \rightsquigarrow \tilde{D}^M = S_K^M D^K \text{ bzw. } \begin{cases} \tilde{D}^\alpha = S_\beta^\alpha D^\beta \\ \tilde{D}^3 = D^3 \end{cases} \\
 S_K^M \tilde{D}_M &= D_K \rightsquigarrow \tilde{D}_M = R_M^K D_K \text{ bzw. } \begin{cases} \tilde{D}_\alpha = R_\alpha^\beta D_\beta \\ \tilde{D}_3 = D_3 \end{cases}
 \end{aligned} \right\} (6.67)$$

Die  $\tilde{D}^M$  bzw.  $\tilde{D}_M$  stellen die auf die Referenzfläche (Basis  $\bar{A}_M$  bzw.  $\bar{A}^M$ ) bezogenen Komponenten von  $\bar{D}$  dar; sie werden als die auf die Referenzfläche (genauer in den Fußpunkt auf der Referenzfläche) parallel transportierten (geschifteten) Komponenten bezeichnet  $[\bar{\cdot}]$ . Die Komponenten  $\tilde{D}^\alpha$  bzw.  $\tilde{D}_\alpha$  sind die kontra- bzw. kovarianten Komponenten eines Flächentensors, während  $\tilde{D}^3$  bzw.  $\tilde{D}_3$  invariant ist gegenüber Transformationen der Flächenkoordinaten  $\theta^\alpha$ ; man findet leicht, daß für diese Komponente

$$\tilde{D}^3 = \tilde{D}_3 = D^3 = D_3 \quad (6.68)$$

gilt.

Entsprechende Darstellungen lassen sich für einen zweistufigen Tensor  $\underline{I}$

$$\begin{aligned}
 \underline{I} &= T^{MN} \bar{G}_M \otimes \bar{G}_N = T^{\cdot M}{}_{\cdot N} \bar{G}_M \otimes \bar{G}^N \\
 &= \tilde{T}^{MN} \bar{A}_M \otimes \bar{A}_N = \tilde{T}^{\cdot M}{}_{\cdot N} \bar{A}_M \otimes \bar{A}^N
 \end{aligned} \quad (6.69)$$

ermitteln, indem man die Identität

$$\underline{T} = \underline{1} \underline{T} \underline{1}$$

für verschiedene alternative Formulierungen des Einheitstensors komponentenweise ausgewertet; natürlich kann man auch in (6.69) direkt die Basisvektoren  $\bar{G}_k$  und  $\bar{G}^k$  mit (6.50) oder (6.58) umrechnen bzw. auf die Basis  $\bar{A}_M$  bzw.  $\bar{A}^M$  schiften. Für die auf Referenzfläche (Basis  $\bar{A}^M$  bzw.  $\bar{A}_M$ ) geschifteten Komponenten erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{MN} = S_K^M S_L^N T^{KL} &\rightarrow \begin{cases} \tilde{T}^{\alpha\beta} = S_S^\alpha S_T^\beta T^{ST} \\ \tilde{T}^{\alpha 3} = S_S^\alpha T^{S3}, \tilde{T}^{3\alpha} = S_S^\alpha T^{3S} \\ \tilde{T}^{33} = T^{33} \end{cases} \\ \tilde{T}_{,N}^M = S_K^M R_N^L T_{,L}^K &\rightarrow \begin{cases} \tilde{T}_{,3}^\alpha = S_S^\alpha R_\beta^3 T_{,3}^S = S_S^\alpha \tilde{S}_\beta^{-1S} T_{,3}^S \\ \tilde{T}_{,3}^\alpha = S_S^\alpha T_{,3}^S, \tilde{T}_{,\alpha}^3 = R_\alpha^\beta T_{,\beta}^3 = \tilde{S}_\alpha^{-1\beta} T_{,\beta}^3 \\ \tilde{T}_{,3}^3 = T_{,3}^3 \end{cases} \\ \tilde{T}_{MN} = R_M^K R_N^L T_{KL} &\rightarrow \begin{cases} \tilde{T}_{\alpha\beta} = R_\alpha^S R_\beta^T T_{ST} = \tilde{S}_\alpha^S \tilde{S}_\beta^{-1T} T_{ST} \\ \tilde{T}_{\alpha 3} = R_\alpha^S T_{S3} = \tilde{S}_\alpha^S T_{S3} \\ \tilde{T}_{3\alpha} = R_\alpha^S T_{3S} = \tilde{S}_\alpha^{-1S} T_{3S} \\ \tilde{T}_{33} = T_{33} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.70)$$

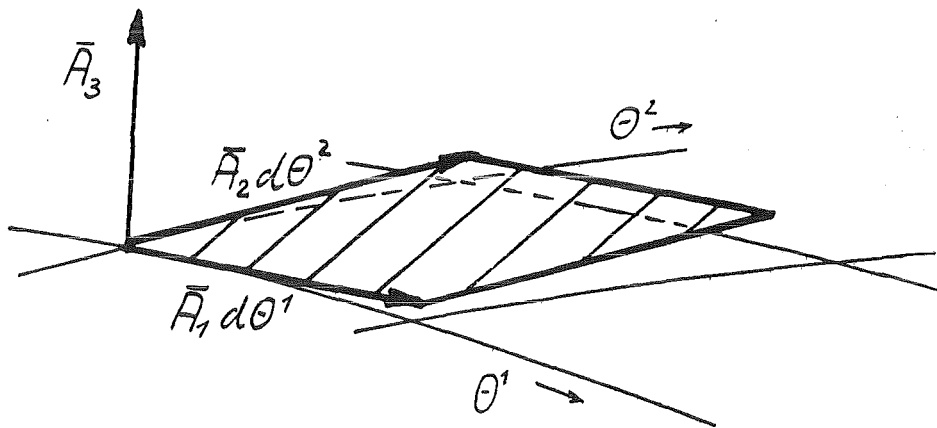
Die Komponenten  $\tilde{T}^{\alpha\beta}$  bzw.  $\tilde{T}_{,3}^\alpha$  und  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  sind die Komponenten eines Flächentensors, d.h. sie transformieren sich bei Änderung der Flächenkoordinaten entsprechend (6.28). Analog transformieren sich  $\tilde{T}^{\alpha 3}$ ,  $\tilde{T}_{,3}^\alpha$ ,  $\tilde{T}_{\alpha 3}$  bezüglich des Indexes  $\alpha$  wie die Komponenten von Flächenvektoren. Ferner sind  $\tilde{T}^{33}$ ,  $\tilde{T}_{,3}^3$  und  $\tilde{T}_{33}$  invariant gegenüber Flächenkoordinatentransformationen; für sie gilt auch

$$\tilde{T}^{33} = \tilde{T}_{,3}^3 = \tilde{T}_{33} = T^{33} = T_{,3}^3 = T_{33} \quad (6.71)$$



6.4 Flächen- und Volumenelement

Diese Zusammenstellung wird mit der Darstellung des Flächenelements der Referenzfläche und des Volumenelements im Schalenraum in Normalkoordinaten abgeschlossen. Für ein Flächenelement der Größe  $dA$  auf der Referenzfläche, das durch die Vektoren  $\bar{A}_1 d\theta^1$  und  $\bar{A}_2 d\theta^2$  aufgespannt wird (s. Skizze: Parallelogramm zwischen differentiell benachbarten Koordinatenlinien),



gilt

$$\bar{A}_3 dA = \bar{A}_1 d\theta^1 \times \bar{A}_2 d\theta^2 \quad (6.72)$$

skalare Multiplikation mit dem Einheitsnormalenvektor  $\bar{A}_3$  und unter Beachtung von (6.4)<sub>3</sub> ergibt

$$dA = (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2) \cdot \bar{A}_3 d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6.73)$$

Das Volumenelement im Schalenraum ist mit (3.5) und (4.11)

$$\begin{aligned} dV_R &= (\bar{G}_1 \times \bar{G}_2) \cdot \bar{G}_3 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= \sqrt{G} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \det(\bar{G}_k \cdot \bar{G}_l) d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Mit (6.50) wird aber

$$\det(\bar{G}_k \cdot \bar{G}_l) = (\det(S_N^H))^2 \det(A_{MN}) \quad (6.75)$$

und wegen (6.47) und (6.62) wird daraus

$$G = \det(\bar{G}_K \cdot \bar{G}_L) = (\det(S_{\beta}^{\alpha}))^2 A. \quad (6.76)$$

Daher läßt sich das Volumenelement auch darstellen durch

$$\begin{aligned} dV_R &= \sqrt{G} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= |\det(S_{\beta}^{\alpha})| \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= |\det(S_{\beta}^{\alpha})| dA d\theta \end{aligned} \quad (6.77)$$

bzw.

$$dV_R = \sqrt{\frac{G}{A}} dA d\theta.$$

Die bisher zusammengestellten Definitionen, Sätze und Ableitungen bezogen sich auf die undeformierte Referenzfläche  $\mathcal{Y}$  im ungesterten ("ruhenden") Beobachtersystem  $S$ . Ganz entsprechende Definitionen etc. können für die undeformierte Referenzfläche  $\mathcal{Y}^*$  im gesterten ("bewegten") Beobachtersystem  $S^*$  angegeben werden. Alle dargestellten Aussagen sind natürlich direkt übertragbar.

### 7. Charakterisierung des Ersatzproblems

In Kap. 2 waren schon die Grundzüge der allgemeinen Vorgehensweise beschrieben worden. Die hier zu entwickelnde Schalentheorie soll dadurch charakterisiert werden, daß als Teilbereiche, für die der 1. und 2. Hauptsatz erfüllt werden, materielle Linien betrachtet werden, die vor der Deformation senkrecht (Richtung  $\bar{A}_3$ ) zur Referenzfläche stehen (Normalfasern). Das dreidimensionale Schalenkontinuum soll hier also durch ein zweidimensionales Kontinuum finiter Linienelemente ersetzt werden. Für die Deformationen in diesen finiten Linienelementen (Normalfasern) werde angenommen, daß der momentane Ortsvektor  $\bar{p}$  eines materiellen Punktes  $P$  (Koordinaten  $\theta^\alpha, \theta^3 = \theta$ ) linear von der Dickenkoordinate  $\theta$  abhängt:

$$\bar{p} = \bar{r}(\theta^1, \theta^2, t) + \theta \bar{d}(\theta^1, \theta^2, t); \quad -s^- \leq \theta \leq s^+; \quad (7.1)$$

hier sind

$\bar{r}$ : der Ortsvektor der deformierten Referenzfläche

$\bar{d}$ : ein deformierbarer Vektor (Direktor), der nicht notwendig senkrecht auf der deformierten Referenzfläche steht und der auch seinen Betrag ändern darf.

Im Ausgangszustand  $t=0$  ist  $\bar{r} = \bar{R}$  und  $\bar{d} = \bar{A}_3$ . Die Verschiebung ist

$$\bar{u} = \bar{p} - \bar{P} = \bar{v} + \theta(\bar{d} - \bar{A}_3), \quad (7.2)$$

wobei die Verschiebung der Referenzfläche durch

$$\bar{v} = \bar{r} - \bar{R} = V^\alpha \bar{A}_\alpha + W \bar{A}_3 \quad (7.3)$$

gegeben ist. Der Direktor  $\bar{d}$ , bezogen auf die Referenzkonfiguration, ist dann durch

$$\bar{d} = D^\alpha \bar{A}_\alpha + D \bar{A}_3 \quad (7.4)$$

in seine Komponenten zerlegt. Der Ansatz (7.1) bzw. (7.2.) impliziert, daß materielle Punkte auf einer Normalen zur undeformierten Referenzfläche sich auch nach Deformation noch auf einer materiellen Geraden befinden, die aber i.a. nicht mehr senkrecht zur deformierten Referenzfläche steht; ferner können materielle Punkte ihren Abstand von der Referenzfläche ändern.

Neben dieser inneren kinematischen Zwangsbedingung (7.1) bzw. (7.2) könnte hier als Näherungsansatz für die Verteilung der absoluten Temperatur über die Schalendicke bzw. im finiten Linienelement ein quadratischer Ansatz gewählt werden. Anstelle der absoluten Temperatur soll hier aber eine andere äquivalente Variable, die Inverse

$$\Lambda = \frac{1}{T} \quad , \quad (7.5)$$

benutzt werden. Wie man später sehen wird, ermöglicht die Einführung dieser Größe zumindest eine formal exakte Integration der Entropiezufuhr durch Wärmequellen  $\dot{q}/T$  und Wärme Flüsse  $\bar{q}/T$ . Für die Temperaturinverse wurde folgender Näherungsansatz gemacht:

$$\Lambda(\theta, \theta', \theta'', t) = \Lambda_0 + \theta \Lambda_1 + (\theta)^2 \Lambda_2 \quad ; \quad (7.6)$$

die noch zu bestimmenden Größen  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$  sind Funktionen von  $\theta^\alpha$  und  $t$ . Der in  $\theta$  quadratische Term ist für die weiteren Überlegungen nicht von grundsätzlicher Bedeutung, soll aber vorläufig noch mit berücksichtigt werden. Die Gleichung (7.6) bzw.

$$\Lambda - (\Lambda_0 + \theta \Lambda_1 + (\theta)^2 \Lambda_2) = 0 \quad (7.6)^I$$

ist hier als eine innere thermische Zwangsbedingung für die Temperaturinverse aufzufassen.

Als thermische Randbedingungen auf den Schalenlaibungen kommen die folgenden Situationen in Betracht:

- Laibungstemperaturen bzw. ihre Inversen vorgeschrieben,
- Wärme flüsse normal zu Laibungsfläche vorgeschrieben oder die
- Wärme flüsse normal zur Laibungsfläche sind bei Wärmeübergängen selbst als Funktion der Oberflächentemperatur und der Temperatur des umgebenden Mediums anzusehen.

Von der thermischen Zwangsbedingung (7.6) wäre hier nur zu verlangen, daß sie bei vorgeschriebenen Oberflächentemperaturen mit diesen verträglich ist. Für die weitere Entwicklung der Theorie sollen hier aber nur

die beiden letzten Randbedingungen besondere Bedeutung erhalten, das sie von größerer technischer Bedeutung sind.

Die beiden Ansätze (7.1) und (7.6) stellen zunächst mathematisch gesehen nichts anderes dar, als einen Näherungsansatz für die Momentanposition einer materiellen Linie und der in ihr vorhandenen Verteilung der Temperaturinversen. Für das Weitere sind folgende Überlegungen von Wichtigkeit. Wenn man daran denkt, die hier angenommenen inneren Zwangsbedingungen in einem Gedankenexperiment exakt zu realisieren, dann bestehen die in Kap. 2.2 angegebenen zwei Möglichkeiten, von denen hier die Zweite Anwendung finden soll: Die aktuellen äußeren Einwirkungen (Volumenkräfte, Oberflächenkräfte, Wärmequellen, Wärmeflüsse an der Oberfläche) werden durch zusätzliche gedachte äußere Einwirkungen ergänzt.

Neben den aktuellen äußeren Einwirkungen<sup>x</sup> wie

- Volumenkräften  $\bar{b}$
- Laibungsbelastungen  $\bar{t}^+$  und  $\bar{t}^-$  auf den Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$

sowie den

- Wärmequellen  $\bar{r}$
- Wärmeflüssen  $\bar{q}^+$  und  $\bar{q}^-$  auf den Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$

sollen zusätzliche, stetig verteilte äußere Einwirkungen wie

- Volumenkräfte  $\hat{b}$
- Volumenmomente  $\hat{\ell}$
- Laibungsbelastungen  $\hat{t}^+$  und  $\hat{t}^-$

sowie

- Wärmequellen  $\hat{r}$
- Wärmeflüsse  $\hat{q}^+$  und  $\hat{q}^-$  auf den Schalenlaibungen

auf das Schalenkontinuum wirken. Diese "gedachten" Zusatzeinwirkungen müssen zunächst nur so beschaffen sein, daß sich in allen finiten Linienelementen der Schale bzw. in allen Schalenabschnitten, die durch die Laibungen und irgendeinen Randstreifen begrenzt sind (Abb. 11), die Verteilung des momentanen Ortsvektors und die der Temperaturinversen entsprechend der Zwangsbedingungen (7.1) und (7.6) einstellen. Anstelle des aktuellen dreidimensionalen Problems wird hier also ein neues dreidimensionales Problem ("erweitertes Problem") betrachtet, bei dem innere Zwangsbedingungen existieren, die durch zusätzliche äußere Einwirkungen realisiert zu denken sind.

<sup>x</sup> Die Größen  $\bar{b}, \hat{b}, \bar{\ell}, \hat{\ell}, \bar{r}, \hat{r}$  sind auf die Masseneinheit bezogen,  $\bar{t}^+, \bar{t}^-, \bar{q}^+, \bar{q}^-$  etc. auf die Flächeneinheit in der Momentankonfiguration

Die exakte Realisation der inneren Zwangsbedingungen in einem Gedankenexperiment durch Zusatzeinwirkungen bedeutet die Lösung dieses neuen dreidimensionalen Problems; dies wird durch folgende lokale dreidimensionale Bilanzgleichungen beschrieben:

Energiebilanzgleichung (nicht reduziert):

$$\rho_R \frac{D}{Dt} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\bar{p}} \cdot \dot{\bar{p}} \right) - \rho_R \left\{ (\bar{b} + \hat{b}) \cdot \dot{\bar{p}} + \hat{\ell} \cdot \dot{\bar{\omega}} + r + \hat{r} \right\} - \bar{\nabla}_R \cdot \left( (EI)^T \dot{\bar{p}} \right) + \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R \stackrel{!}{=} 0 \quad (7.7)$$

Impulssatz:

$$\rho_R (\bar{b} + \hat{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla}_R (EI)^T \stackrel{!}{=} \bar{0} \quad (7.8)$$

Drehimpulssatz (nicht reduziert):

$$\bar{p} \times \left[ \rho_R (\bar{b} + \hat{b} - \ddot{\bar{p}}) + \bar{\nabla}_R (EI)^T \right] + \rho_R \hat{\ell} + \epsilon_R^{KLM} \rho_R L;S \rho_R M;N T^{NS} \bar{G}_K \stackrel{!}{=} \bar{0} \quad (7.9)$$

Diese Feldgleichungen sind durch geeignete Randbedingungen für die Spannungen und Wärmeflüsse auf den Schalenlaibungen und auf dem Randstreifen der Schale zu ergänzen. Auch diese Bedingungen enthalten zusätzliche "gedachte" Randgrößen, auf die später eingegangen werden wird.

Es ist leicht einsehbar, daß sich nun aber unendlich viele derartige Zusatzeinwirkungen finden lassen, die alle den inneren kinematischen und thermischen Zwangsbedingungen (vorgegebenen Verteilungen) genügen. Man denke nur daran, daß es unter Beachtung der Zwangsbedingungen möglich ist, bei willkürlicher Vorgabe der Funktionen  $\bar{r}(\theta^1, \theta^2, t)$ ,  $\bar{d}(\theta^1, \theta^2, t)$  und  $\Lambda_M(\theta^1, \theta^2, t)$ ,  $M=0,1,2$  die erforderlichen Zusatzeinwirkungen zu berechnen: Mit Kenntnis der Stoffgleichungen und aktuellen Belastungen  $\bar{b}$ ,  $r$  etc. ermittelt man die Zusatzeinwirkungen einfach aus den lokalen Bilanzgleichungen (7.7), (7.8) und (7.9) und den Randbedingungen. Diese Willkürlichkeit und Unbestimmtheit kann nur durch zusätzliche Forderungen hinsichtlich der gedachten Zusatzeinwirkungen beseitigt werden. Das oben beschriebene dreidimensionale erweiterte Problem zusammen mit derartigen zusätzlichen Forderungen soll weiterhin

als Ersatzproblem bezeichnet werden. Die folgenden Betrachtungen liefern zwanglos eine Reihe dieser notwendigen Forderungen.

Zunächst sind zwei mathematische Rahmenforderungen zu stellen, die allerdings von einer derartigen Allgemeinheit sind, daß sie nicht als geeignete Ausgangspunkte anzusehen sind; sie kommen erst bei weiteren Ableitungen zum Tragen. Wegen ihres Rahmencharakters sollen sie an den Anfang gestellt werden.

#### Unabhängigkeitsforderung

Die unbekannt Funktionen  $\bar{r}(\theta', \theta'', t)$ ,  $\bar{d}(\theta', \theta'', t)$  und  $\hat{\Lambda}_M(\theta', \theta'', t)$ ,  $M=0,1,2$  werden als der wesentliche Teil der Lösung des Ersatzproblems angesehen. Zu ihrer Ermittlung soll die Kenntnis der Zusatzeinwirkungen nicht erforderlich sein. Dies bedeutet insbesondere, daß die Lösungsfunktionen  $\bar{r}, \bar{d}, \hat{\Lambda}_M$  allein durch die vorgegebenen äußeren Einwirkungen bestimmbar sind; hierbei wird natürlich die Kenntnis der Stoffgleichungen, Geometrie und Randbedingungen vorausgesetzt. Die erforderlichen Zusatzeinwirkungen  $\hat{b}, \hat{e}, \hat{r}$  etc. werden daher erst nach Ermittlung der Lösungen  $\bar{r}, \bar{d}, \hat{\Lambda}_M$  berechenbar. Andernfalls wäre die Lösung des ursprünglichen aktuellen Problems leichter als die des Ersatzproblems.

#### Bestimmtheitsforderung

Die Lösungen  $\bar{r}, \bar{d}$  und  $\hat{\Lambda}_M$ ,  $M=0,1,2$  stellen insgesamt neun skalare Funktionen dar. Dementsprechend soll das Ersatzproblem auf (mindestens) neun skalare, partielle Differentialgleichungen zurückführbar sein. Sind dagegen weniger Gleichungen als Funktionen vorhanden, dann erscheint das Problem als nicht geschlossen und eine eindeutige Lösung ist fraglich.

Damit nun die Lösung des Ersatzproblems eine Näherung für das aktuelle, dreidimensionale Problem darstellt, müssen folgende, physikalisch unmittelbar einleuchtenden Forderungen erfüllt werden:

#### (A) Energie - Forderung

Formuliert man die integrale Energiebilanzgleichung (1. Hauptsatz) des erweiterten Problems für ein finites Linienelement bzw. einen Schalenabschnitt<sup>x</sup>, dann sollen die gedachten Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag zur Gesamtenergiebilanz liefern (keine Energiezufuhr), und zwar

---

<sup>x</sup> der durch die Schalenlaibungen und einen Randstreifen begrenzt ist (Abb. 11).

- (A1) für jedes beliebige Linienelement bzw. jeden beliebigen Schalenabschnitt (abgeschwächte Lokalisierungsforderung)
- (A2) für alle Beobachtersysteme
- (A3) und nicht nur für alle vorgegebenen aktuellen äußeren Einwirkungen, sondern auch für alle denkbaren (d.h. für alle thermomechanischen Prozesse).<sup>\*</sup>

(B) Entropie - Forderung

Hinsichtlich der Clausius-Duhem Entropieungleichung (2. Hauptsatz) soll für das erweiterte Problem verlangt werden, daß die Entropiezufuhr (Entropieproduktion) durch die gedachten Zusatzeinwirkungen in einem finiten Linienelement bzw. in einem Schalenabschnitt als Ganzes verschwindet, und zwar

- (B1) für jedes beliebige finite Linienelement bzw. jeden beliebigen Schalenabschnitt
- (B2) für alle Beobachtersysteme
- (B3) und insbesondere für alle denkbaren aktuellen äußeren Einwirkungen (d.h. für alle thermomechanischen Prozesse)<sup>\*</sup>

Mit diesen Forderungen wird erreicht, daß für das finite Linienelement bzw. einen Schalenabschnitt die Energiebilanzgleichung und die Entropieungleichung des Ersatzproblems mit den entsprechenden Prinzipien des aktuellen Problems übereinstimmen, sofern dort der angenommene Funktionstyp für die Verteilung des momentanen Ortsvektors und der Temperaturinversen als der tatsächlich vorliegende angesehen wird. Die Lösung des Ersatzproblems erfüllt den 1. und 2. Hauptsatz, wie sie für das aktuelle Problem im Linienelement gelten, aber eben nur für das ganze Linienelement, nicht für Teile (Punkte) davon.

Ob diese zusätzlichen Forderungen (A) und (B) ausreichen, um die oben erwähnte Unbestimmtheit vollständig zu beseitigen, kann diesen Forderungen gleichwohl nicht unmittelbar angesehen werden; dies hat die folgende mathematische Analyse zu zeigen. Hierbei ist auch zu klären, ob diese Bedingungen widerspruchsfrei sind und gegebenenfalls Redundanzen enthalten.

---

<sup>\*</sup> Dies schließt auch praktisch nicht realisierbare Einwirkungen ein.



8. Auswertung der energetischen Bedingungen und der Invarianz-  
forderungen

8.1 Integration der Energiebilanzgleichung für das "erweiterte Problem"  
über die Schalendicke

Für irgendeinen Schalenabschnitt, der durch die Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$  und den ganz im Schaleninneren liegenden Randstreifen  $C_F$  (Abb. 11) begrenzt ist, lautet die integrale Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems:

$$\dot{E} + \dot{K} = W_b + W_L + W_{CF} + H_r + H_{q_{CF}} + H_{q_L} + \left\{ \hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{H}_r + \hat{H}_{q_L} + \hat{W}_e \right\} \quad (8.1)$$

Hier sind im einzelnen

- $K$  Gesamte kinetische Energie
- $E$  Gesamte innere Energie
- $W_b$  Gesamtleistung der aktuellen Volumenkräfte  $\bar{b}$
- $\hat{W}_b$  Gesamtleistung der zusätzlichen Volumenkräfte  $\hat{b}$
- $W_L$  Leistung der aktuellen Oberflächenkräfte  $\bar{t}^\pm$  auf den Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$
- $\hat{W}_L$  Leistung der zusätzlichen Oberflächenkraft  $\hat{t}^+, \hat{t}^-$  auf den Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$
- $W_{CF}$  Leistung der Kontaktspannungen  $\bar{t}$  auf dem Randstreifen  $C_F$
- $\hat{W}_e$  Gesamtleistung der zusätzlichen Volumenmomente  $\hat{e}$
- $H_r$  Gesamte pro Zeiteinheit zugeführte Wärme durch die aktuellen Wärmequellen  $r$
- $\hat{H}_r$  ... und entsprechend für die zusätzlichen Wärmequellen  $\hat{r}$

$H_{qCF}$  Durch Wärmeleitung über den Randstreifen  $C_F$  zugeführte Wärme

$H_{qL}$  Durch Wärmeleitung über die Laibungsflächen zugeführte aktuelle Wärme

$\hat{H}_{qL}$  Durch Wärmeleitung über die Laibungsflächen zugeführte zusätzliche Wärme

Der Gesamtausdruck in der geschweiften Klammer stellt die zugeführte Energie (pro Zeiteinheit) durch die zusätzlichen äußeren Einwirkungen dar.

Es soll davon ausgegangen werden, daß die in (8.1) auftretenden Volumenintegrationen in der Referenzkonfiguration der unverformten Schale auszuführen sind. Führt man formal die Integration über die Schalendicke durch, d.h. integriert über ein materielles finites Linienelement, dann erhält man im einzelnen

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_R} \rho \dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} dV_R = \frac{1}{2} \int_A \left[ \rho_{,R} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + 2 \rho_{,R} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{d}} + \rho_{,R} \dot{\vec{d}} \cdot \dot{\vec{d}} \right] dA \quad (8.2)$$

$$\rho_{,R}^i := \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R(\theta)^i d\theta, \quad i = 0, 1, 2; \quad (8.3)$$

Innere Energie:

$$\mathcal{E} = \int_{V_R} \rho_R \varepsilon dV_R = \int_A \rho_{,R} \varepsilon_0 dA \quad (8.4)$$

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{\rho_{,R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \varepsilon d\theta; \quad (8.5)$$

Leistung der Volumenkräfte:

$$W_b = \int_{V_R} \rho_R \bar{b} \cdot \dot{\bar{p}} dV_R = \int_{A} [\rho_{0R} \bar{b}_0 \cdot \dot{\bar{r}} + \rho_{1R} \bar{b}_1 \cdot \dot{\bar{d}}] dA \quad (8.6)$$

$$\hat{W}_b = \int_{V_R} \rho_R \hat{b} \cdot \dot{\hat{p}} dV_R = \int_{A} [\rho_{0R} \hat{b}_0 \cdot \dot{\hat{r}} + \rho_{1R} \hat{b}_1 \cdot \dot{\hat{d}}] dA \quad (8.7)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{nR} \bar{b}_n \\ \rho_{nR} \hat{b}_n \end{pmatrix} := \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \hat{b} \end{pmatrix} (\theta)^n d\theta, \quad n=0,1; \quad (8.8)$$

Leistung der Laibungsbelastungen

Für die aktuellen Laibungsbelastungen sei hier einschränkend davon ausgegangen, daß die Laibungsflächen allein durch hydrostatischen Druck  $p$  belastet werden; Einzelheiten der Rechnung sind im Anhang (A3) zu finden. Man erhält

$$W_L = \int_{A} \left[ \bar{y}_0 \cdot \dot{\bar{r}} + \bar{y}_1 \cdot \dot{\bar{d}} \right] dA, \quad (8.9)$$

Die Leistung der Zusatzbelastungen  $\hat{t}^+$  und  $\hat{t}^-$  wird mit den Definitionen

$$\left. \begin{aligned} \hat{t}_R^\pm &= \hat{t}^\pm \frac{d\theta^\pm}{d\theta_R^\pm} \\ d\theta_R^\pm &= \xi^\pm dA \end{aligned} \right\} (8.10)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_L &= \int_{O_n^+} \hat{t}^+ \cdot \dot{\hat{p}}^+ dO_n^+ + \int_{O_n^-} \hat{t}^- \cdot \dot{\hat{p}}^- dO_n^- \\
 &= \int_A \left\{ \left[ \hat{t}_n^+ \xi^+ + \hat{t}_n^- \xi^- \right] \cdot \dot{\hat{r}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \hat{t}^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}^- \xi^- s^- \right] \cdot \dot{\hat{d}} \right\} dA;
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Leistung der Kontaktspannungen auf dem Randstreifen  $C_F$  im Schaleninneren:

Es ist mit Gleichung (4.55)

$$W_{CF} = \oint_{C_F} \bar{t}_n \cdot \dot{\hat{p}} dO_n = \oint_{O_n} \dot{\hat{p}} \cdot (\underline{F} \underline{T}) \bar{N} dO_n, \tag{8.12}$$

wobei  $\bar{N}$  der äußere Einheitsnormalenvektor auf dem Randstreifen in der Referenzkonfiguration ist,  $\underline{T}$  der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor 2. Art\* und  $\underline{F}$  der Deformationsgradiententensor. Um die Integration über die Schalendicke auszuführen, müssen die Terme im Integranden durch Flächentensoren dargestellt werden. Zunächst ist (vergl. Abb. 12)

$$\bar{N} dO_n = \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial s} ds \right) \times \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta^3} d\theta^3 \right), \tag{8.13}$$

Wegen

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial s} = \bar{P}_{,k} \frac{\partial \theta^k}{\partial s},$$

$$\bar{P}_{,k} = S_K^M \bar{A}_M, \quad \bar{P}_{,3} = S_3^N \bar{A}_N$$

\* Wir merken an, daß hier explizit die Existenz des Spannungstensors vorausgesetzt wird; zum Nachweis seiner Existenz ist die Erfüllung des lokalen Impulssatzes nicht erforderlich.

wird

$$\bar{N} dO_R = S_K^M \frac{\partial \theta^K}{\partial S} ds \int_3^N d\theta^3 \bar{A}_M \times \bar{A}_N.$$

Unter Beachtung von (6.18) sowie (6.49) und wegen

$$\frac{\partial \theta^3}{\partial S} = 0$$

(das Koordinatensystem ist in der Referenzkonfiguration parallel)

wird dann

$$\bar{N} dO_R = \bar{A}^{\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha} S_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial \theta^{\beta}}{\partial S} d\theta^3. \quad (8.13)^I$$

Ferner ist

$$\underline{E} = \bar{g}_K \otimes \bar{G}^K = \bar{p}_{,K} \otimes \bar{S}_M^K \bar{A}^M \quad (8.14)$$

$$\bar{p}_{,K} = \bar{r}_{,K} + (\theta^3 \bar{d})_{,K}, \quad K = 1, 2, 3$$

$$\bar{p}_{, \alpha} = \bar{r}_{, \alpha} + \theta^3 \bar{d}_{, \alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$\bar{p}_{,3} = \bar{d}$$

$$\underline{I} = T^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L = \tilde{T}^{KL} \bar{A}_K \otimes \bar{A}_L$$

$$\tilde{T}^{KL} = S_R^K S_P^L T^{RP},$$

(8.15)

(8.16)

wobei  $\tilde{T}^{KL}$  die auf die Referenzfläche geschifteten Komponenten des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors sind. Damit wird

$$\begin{aligned} \underline{E} \underline{I} &= \bar{p}_{,K} \otimes \bar{A}^K \bar{S}_M^K \tilde{T}^{ST} \bar{A}_S \otimes \bar{A}_T \\ &= \bar{p}_{,K} \otimes \bar{A}_T \bar{S}_M^K \tilde{T}^{MT} \end{aligned}$$

und wegen  $\bar{A}_T \cdot \bar{A}^T = \delta_T^T$

$$(EI) \bar{N} dO_R = \bar{p}_{,K} \bar{S}_M^{-1K} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha} S_\beta^\alpha \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} ds d\theta^3. \quad (8.17)$$

Beachtet man noch

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} \cdot \bar{p}_{, \alpha} &= \dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}_{, \alpha} + \theta^3 (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{d}_{, \alpha} + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{r}_{, \alpha}) \\ &\quad + (\theta^3)^2 \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{, \alpha} \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{p}} \cdot \bar{p}_{, 3} = \dot{\bar{r}} \cdot \bar{d} + \theta^3 \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d},$$

dann wird das Spannungsleistungsintegral (8.12) über den Randstreifen

$$\begin{aligned} \oint_{CF} \dot{\bar{p}} \cdot \bar{t}_R dO_R &= \oint_{CF} \dot{\bar{p}} \cdot (EI) \bar{N} dO_R \\ &= \oint_C \left\{ \dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}_{, \alpha} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{S}_M^{-1K} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha} S_\beta^\alpha d\theta^3 \right. \\ &\quad + (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{d}_{, \alpha} + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{r}_{, \alpha}) \int_{-s^-}^{s^+} \bar{S}_M^{-1\alpha} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} S_\beta^\alpha \theta^3 d\theta^3 \\ &\quad + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{, \alpha} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{S}_M^{-1\alpha} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} S_\beta^\alpha (\theta^3)^2 d\theta^3 \\ &\quad + \dot{\bar{r}} \cdot \bar{d} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{S}_M^{-13} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} S_\beta^\alpha d\theta^3 \\ &\quad \left. + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{S}_M^{-13} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} S_\beta^\alpha \theta^3 d\theta^3 \right\} \frac{\partial \theta^3}{\partial s} ds \end{aligned}$$

Die Integrale über die Schalendicke lassen sich noch übersichtlicher darstellen. Mit (8.16)<sub>3</sub> werden

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_M^{-1\alpha} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s &= \tilde{S}_M^{-1\alpha} S_R^M S_P^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s T^{RP} \\
 &= S_P^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s T^{\alpha P} \\
 &= S_\pi^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s T^{\alpha\pi} \\
 \tilde{S}_M^{-13} \tilde{T}^{M\gamma} \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s &= \tilde{S}_M^{-13} S_R^M S_P^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s T^{RP} \\
 &= S_P^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s T^{3P} \\
 &= S_\pi^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s T^{3\pi}.
 \end{aligned}$$

Der Term

$$S_\pi^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s$$

berechnet sich mit (6.49), (6.62) und (6.76) zu

$$\begin{aligned}
 S_\pi^\gamma \epsilon_{r\gamma s} S_\beta^s &= \epsilon_{r\pi\beta} \left[ 1 - \theta^3 B_\nu^\nu + (\theta^3)^2 \det(B_\beta^\alpha) \right] \\
 &= \epsilon_{r\pi\beta} \det(S_\beta^\alpha) = \epsilon_{r\pi\beta} \sqrt{\frac{G}{A}}.
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Mit den Definitionen

$$M_{(m)}^{\alpha\pi} := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\pi} (\theta^3)^m d\theta^3, \quad m=0,1,2 \tag{8.19}$$

$$M_{(n)}^{3\pi} := Q_{(n)}^\pi := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{3\pi} (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1 \tag{8.20}$$

wird daher das Leistungsintegral  $W_{CF}$

$$\begin{aligned}
 W_{CF} = \oint_C \left\{ \begin{aligned} & \dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}_{,\alpha} M_0^{\alpha T} \\ & + (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{d}_{,\alpha} + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{r}_{,\alpha}) M_1^{\alpha T} \\ & + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{,\alpha} M_2^{\alpha T} \\ & + \dot{\bar{r}} \cdot \bar{d} Q_0^\pi \\ & + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} Q_1^\pi \end{aligned} \right\} \epsilon_{\pi\beta} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} ds, \quad (8.21)
 \end{aligned}$$

Der Term  $\epsilon_{\pi\beta} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s}$  ist die kovariante Komponente des äußeren Einheitsnormalenvektors  $\bar{v} = \nu_\pi \bar{A}^\pi$  auf der Randkurve  $C$  in der Tangentialebene; denn (Abb. 12)

$$\bar{v} = \bar{s} \times \bar{A}_3$$

$$\bar{s} := \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} = \bar{A}_\beta \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s}$$

und wegen (6.18) wird

$$\bar{v} = \epsilon_{\pi\beta} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \bar{A}^\pi = \nu_\pi \bar{A}^\pi, \quad (8.22)$$

Das Integral (8.21) über die geschlossene, als glatt<sup>x</sup> angenommene Randkurve  $C$ , soll noch in ein Flächenintegral überführt werden, das später benötigt wird. Das Green-Gaußsche Theorem für Flächen lautet [75, S. 39]

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{A}} Y^\pi : \pi \, d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\sqrt{A}} (\sqrt{A} Y^\pi)_{,\pi} \, d\mathcal{A} \\
 &= \oint_C Y^\pi \nu_\pi \, ds
 \end{aligned} \quad (8.23)$$

$Y^\beta$  : kontravariante Komponenten eines differenzierbaren Flächenvektors

<sup>x</sup> Tangentenvektor  $\bar{s}$  eindeutig in allen Punkten von  $C$ .



Nun ist der Integrand von (8.21) ein Skalar und da  $v_{\pi} = \frac{\epsilon}{\kappa} \pi_{\beta} \frac{\partial \theta^3}{\partial s}$  die Komponenten eines Flächenvektors bezüglich der Ausgangskonfiguration sind, kann die geschweifte Klammer in (8.21) als kontravariante Komponente eines Flächenvektors aufgefaßt werden. Daher wird mit den Green-Gaußschen Theorem

$$\begin{aligned}
 W_{CF} &= \oint_C \left\{ M_0^{\alpha\beta} \dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{d}_{,\alpha} + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{r}_{,\alpha}) \right. \\
 &\quad \left. + M_2^{\alpha\beta} \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^{\beta} \dot{\bar{r}} \cdot \bar{d} + Q_1^{\beta} \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} \right\} v_{\beta} ds \\
 &= \oint_C \left\{ \left[ M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} v_{\beta} ds \tag{8.24} \\
 &= \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left[ M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{,\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{,\beta} \right\} d\mathcal{A}.
 \end{aligned}$$

Gesamtleistung der zusätzlichen Volumenmomente:

Entsprechend (4.7) ist

$$\hat{W}_L = \int_{V_{\mathcal{R}}} s_{\mathcal{R}} \hat{\ell} \cdot \hat{w} dV_{\mathcal{R}}.$$

Mit Gl. (3.63), (3.15)<sub>3</sub> und (3.20)<sub>2</sub> wird

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \dot{\bar{p}} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu} \times \dot{\bar{p}}_{,\mu} = \frac{1}{2} [\bar{g}^{\alpha} \times \dot{\bar{p}}_{,\alpha} + \bar{g}^3 \times \dot{\bar{p}}_{,3}] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ [(\bar{r}_{,2} + \Theta \bar{d}_{,2}) \times \bar{d}] \times [\dot{\bar{r}}_{,1} + \Theta \dot{\bar{d}}_{,1}] \right. \\
 &\quad + [\bar{d} \times (\bar{r}_{,1} + \Theta \bar{d}_{,1})] \times [\dot{\bar{r}}_{,2} + \Theta \dot{\bar{d}}_{,2}] \\
 &\quad \left. + [(\bar{r}_{,1} + \Theta \bar{d}_{,1}) \times (\bar{r}_{,2} + \Theta \bar{d}_{,2})] \times \dot{\bar{d}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ (\bar{r}_{,2} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{r}}_{,1} \right. \\
 &\quad + (\bar{d} \times \bar{r}_{,1}) \times \dot{\bar{r}}_{,2} \\
 &\quad + (\bar{r}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) \times \dot{\bar{d}} \\
 &\quad + [(\bar{d}_{,2} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{r}}_{,1} + (\bar{d} \times \bar{d}_{,1}) \times \dot{\bar{r}}_{,2} \\
 &\quad + (\bar{r}_{,2} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{d}}_{,1} + (\bar{d} \times \bar{r}_{,1}) \times \dot{\bar{d}}_{,2} \\
 &\quad \left. + (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}_{,2}) \times \dot{\bar{d}} + (\bar{d}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) \times \dot{\bar{d}} \right] \Theta \\
 &\quad + [(\bar{d}_{,2} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{d}}_{,1} + (\bar{d} \times \bar{d}_{,1}) \times \dot{\bar{d}}_{,2} \\
 &\quad + (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}_{,2}) \times \dot{\bar{d}}] (\Theta)^2 \left. \right\} \\
 &=: \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 \Theta + \bar{\omega}_2 (\Theta)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Wir bemerken hier zunächst, daß wegen

$$\frac{s}{s_{12}} = \sqrt{\frac{G}{g}}$$

der Faktor  $1/\sqrt{g}$  proportional zur Momentandichte  $s$  ist und damit von den Verformungen abhängt; daher ist  $1/\sqrt{g}$  selbst noch eine Funktion der Dickenkoordinate  $\theta \equiv \theta^3$ ; auf eine explizite Darstellung kann hier aber verzichtet werden. Mit den Definitionen

$$\hat{\ell}_m^{\wedge} := \int_{-s^-}^{s^+} \frac{s}{\sqrt{A}} \hat{\ell}(\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2 \quad (8.26)$$

wird das Leistungsintegral der Volumenmomente

$$\hat{W}_L^{\wedge} = \int_{\mathcal{A}} \left\{ \hat{\ell}_0^{\wedge} \cdot \bar{w}_0 + \hat{\ell}_1^{\wedge} \cdot \bar{w}_1 + \hat{\ell}_2^{\wedge} \cdot \bar{w}_2 \right\} dA. \quad (8.27)$$

Für weitere Überlegungen ist es vorteilhaft den Integranden nach den Raten der Größen  $\bar{r}_{i,k}$  und  $\bar{d}$  zu ordnen; man erhält unter Beachtung des Vertauschungssatzes für Spatprodukte

$$\begin{aligned} \hat{W}_L^{\wedge} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \left\{ \right. & \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{11} \\ & + \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{d} \times \bar{r}_{11}) + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{d} \times \bar{d}_{11}) \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{12} \\ & + \left[ \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{11} \\ & + \left[ \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{d} \times \bar{r}_{11}) + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d} \times \bar{d}_{11}) \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{12} \\ & + \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \\ & \left. + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \left. \right\} dA \end{aligned} \quad (8.28)$$

oder bei Verwendung des Permutationssymbols  $e^{\alpha\beta}$  (6.17)<sub>2</sub>

$$\begin{aligned} \hat{W}_e = \frac{1}{2} \int_A \left\{ e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\ell}_0^\alpha \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1^\alpha \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\alpha} \right. \\ + e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\ell}_1^\alpha \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2^\alpha \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \\ + \left[ \hat{\ell}_0^\alpha \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \\ + \hat{\ell}_1^\alpha \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \\ \left. \left. + \hat{\ell}_2^\alpha \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} dA, \end{aligned} \quad (8.28)^I$$

Zugeführte Wärme durch aktuelle und zusätzliche Wärmequellen

Mit (4.9) und (4.13) sind

$$H_r = \int_{V_R} g_R r \, dV_R = \int_A g_{0R} r_0 \, dA \quad (8.29)$$

$$\hat{H}_r = \int_{V_R} g_R \hat{r} \, dV_R = \int_A g_{0R} \hat{r}_0 \, dA, \quad (8.30)$$

wobei

$$r_0 = \frac{1}{g_{0R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R r \, d\theta \quad (8.31)$$

$$\hat{r}_0 = \frac{1}{g_{0R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \hat{r} \, d\theta \quad (8.32)$$

Zugeführte Wärme durch Wärmeleitung über den Randstreifen:

Die durch Wärmeleitung durch die Oberfläche des Schalenabschnitts zugeführte Wärme läßt sich in die Anteile, die über die Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$  und über den Randstreifen  $C_F$  zugeführt werden, aufspalten. Es ist zunächst

$$H_{q_{CF}} = - \oint_{CF} \bar{q}_r \cdot \bar{N} \, dO_{CF}, \quad (8.33)$$

Mit (8.13)<sup>I</sup> läßt sich  $\bar{N} dO_{CF}$  als Flächenvektor darstellen, so daß

$$\oint_{CF} \bar{q}_r \cdot \bar{N} \, dO_{CF} = \oint_C \left\{ \left[ \int_{-s^-}^{s^+} \bar{q}_r \, S_\beta^s \, d\theta \right] \cdot \left[ \epsilon_{r\mu\beta} \bar{A}^\mu \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \right] \right\} ds.$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_r &= q_r^k \bar{G}_k = q_r^\alpha \bar{G}_\alpha + q_r^3 \bar{G}_3 \\ \bar{G}_\alpha &= S_\alpha^\gamma \bar{A}_\gamma, \quad \bar{G}_3 = \bar{A}_3 \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

wird

$$\begin{aligned} H_{q_{CF}} &= - \oint_C \left\{ \int_{-s^-}^{s^+} q_r^\alpha \underbrace{S_\alpha^\gamma \epsilon_{r\mu\beta} S_\beta^s \bar{A}_\gamma \cdot \bar{A}^\mu}_{= \epsilon_{r\alpha\beta} \det(S_\beta^\alpha)} \, d\theta \right\} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \, ds. \end{aligned}$$

Verwendet man (8.18) sowie (8.22)<sub>2</sub> und definiert

$$h_o^\alpha := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \, q_r^\alpha \, d\theta, \quad (8.35)$$

dann wird schließlich unter Beachtung des Green-Gaußschen Integralsatzes (8.23) für Flächen

$$H_{q_{CF}} = - \oint_C h_o^\alpha \nu_\alpha \, ds = - \int_A h_o^\alpha :_\alpha \, dA. \quad (8.36)$$

Zugeführte Wärme über die Laibungsflächen:

Es ist

$$\begin{pmatrix} H_{qL} \\ \hat{H}_{qL} \end{pmatrix} = - \int_{O^+} \begin{pmatrix} \bar{q}_r^+ \\ \hat{q}_r^+ \end{pmatrix} \cdot \bar{N}^+ dO_r^+ - \int_{O^-} \begin{pmatrix} \bar{q}_r^- \\ \hat{q}_r^- \end{pmatrix} \cdot \bar{N}^- dO_r^-, \quad (8.37)$$

wobei die beiden Integrale jeweils über die Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$  zu nehmen sind; man beachte, daß nur bei einer Schale konstanter Dicke ( $|S^+| = |S^-| = \text{konst.}$ )

$$\bar{N}^+ = \bar{A}_3 = -\bar{N}^-$$

gilt. Mit (8.10) wird allgemein

$$\begin{pmatrix} H_{qL} \\ \hat{H}_{qL} \end{pmatrix} = - \int_A \left[ \begin{pmatrix} \bar{q}_r^+ \\ \hat{q}_r^+ \end{pmatrix} \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \begin{pmatrix} \bar{q}_r^- \\ \hat{q}_r^- \end{pmatrix} \cdot \bar{N}^- \xi^- \right] dA. \quad (8.38)$$

Damit ist der Energiesatz formal durch Integrale über die Referenzfläche  $A$  dargestellt und damit auf eine 2-dimensionale Form gebracht.

8.2 Folgerungen aus der Bedingung (A2) (Beobachterinvarianz der Energieforderung) und der zweidimensionalen Energiebilanzgleichung

Für die hier diskutierte Schalentheorie lautet die Energieforderung (A):

Die gedachten äußeren Zusatzeinwirkungen liefern keinen Beitrag zur Energiebilanz eines Schalenabschnittes, der durch die Laibungsflächen  $O^+$  und  $O^-$  sowie einen ganz im Schaleninneren liegenden Randstreifen  $C_F$  begrenzt ist (Abb. 11), d.h.:

$$\hat{W} := \hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{H}_r + \hat{H}_{qL} + \hat{W}_L \stackrel{!}{=} 0, \quad (8.39)$$

und zwar

(A1) für beliebige Schalenabschnitte oder mit anderen Worten für beliebige Integrationsbereiche  $A$  der Referenzfläche (abgeschwächtes Lokalisierungspostulat),

(A2) unabhängig von der Wahl des Beobachtersystems,

(A3) wie auch immer die aktuellen Einwirkungen beschaffen sein mögen.

Die Energieforderung (8.39) zusammen mit der Bedingung (A1) führt auf die zweidimensionale lokale Form der Energie-Forderung: Die gedachten Zusatzeinwirkungen liefern keinen Beitrag zur Energiebilanz irgendeines finiten Linienelements (materielle Faser, die durch die Schalenlaibungen begrenzt ist und die vor der Verformung normal zur Referenzfläche stand  $\hat{=}$  Normalfaser).

Wenn die zusätzlichen Einwirkungen die Forderung (8.39) erfüllen, dann vereinfacht sich die Energiebilanzgleichung (8.1) des erweiterten Problems zu

$$\dot{E} + \dot{K} = W_b + W_L + W_{CF} + H_r + H_{q_{CF}} + H_{q_L}. \quad (8.40)$$

Wenn (8.39) unter den Bedingungen (A1)-(A3) zu erfüllen ist, dann ist auch (8.40) unter den Bedingungen (A1)-(A3) zu erfüllen. D.h., (8.39) mit den Bedingungen (A1)-(A3) ist äquivalent (8.40) mit den Bedingungen (A1)-(A3).

Mit der Forderung (8.39), die unter den Bedingungen (A1) bis (A3) erfüllt werden soll, lassen sich weitere Bedingungen für die zusätzlichen äußeren Einwirkungen ableiten. In diesem Kapitel soll zunächst neben (A1) ausschließlich die Bedingung (A2) ausgewertet werden. Insbesondere ist dabei die Frage zu stellen, inwieweit (A1) und (A2) ausreichen, um 2-D-Bewegungsgleichungen für die Schale zu gewinnen und welche zusätzlichen, bisher nicht aufgeführten Annahmen gegebenenfalls hier eingeführt werden müssen.

### 8.2.1 Invarianz der Energie-Forderung für die gedachten Zusatzeinwirkungen bei Beobachterwechsel

Es wird zunächst die Forderung  $\hat{W} = 0$  unter den Bedingungen (A1) und (A2) analysiert. Dazu ist es notwendig, die erforderlichen Transformationsgesetze anzugeben.

#### 8.2.1.1 Transformationsgesetze

Die kinematische Zwangsbedingung gilt sowohl im "ruhenden" wie auch "bewegten" Beobachtersystem

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} - (\bar{r} + \Theta \bar{d}) &= \bar{o} \\ \bar{p}^* - (\bar{r}^* + \Theta^* \bar{d}^*) &= \bar{o}^* \end{aligned} \right\} (8.41)$$

Da die materiellen Koordinaten in beiden Beobachtersystemen zahlenmäßig denselben Wert darstellen, gilt  $\theta^x = \theta^{x^*}$  und  $\theta = \theta^*$ ; mit dem Transformationsgesetz für  $\bar{p}$  Gl. (4.24) folgt daher aus (8.41)<sub>2</sub> mit (8.41)<sub>1</sub>

$$\underline{Q}(\bar{r} + \theta \bar{d} - \bar{c}) - (\bar{r}^* + \theta \bar{d}^*) = \bar{o}^*$$

bzw.

$$(\underline{Q}(\bar{r} - \bar{c}) - \bar{r}^*) + \theta(\underline{Q}\bar{d} - \bar{d}^*) = \bar{o}^*$$

und da dies für beliebige Werte  $-s^- \leq \theta \leq s^+$  gilt, folgt

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}^* &= \underline{Q}(\bar{r} - \bar{c}) = \underline{Q}\bar{r} + \bar{c}^* \\ \bar{d}^* &= \underline{Q}\bar{d}. \end{aligned} \right\} (8.42)$$

Daraus ermittelt man dann die Transformationsgesetze für die Geschwindigkeit materieller Punkte auf der Referenzfläche sowie die Direktorgeschwindigkeit und die entsprechenden Beschleunigungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{r}}^* &= \underline{Q}\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{c}}^* - \underline{Q}(\bar{\omega} \times \bar{r}) \\ \dot{\bar{d}}^* &= \underline{Q}\dot{\bar{d}} - \underline{Q}(\bar{\omega} \times \bar{d}) \\ \ddot{\bar{r}}^* &= \underline{Q}\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{c}}^* + \underline{Q}(\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) - \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) - 2\underline{Q}(\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}) \\ \ddot{\bar{d}}^* &= \underline{Q}\ddot{\bar{d}} + \underline{Q}(\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{d}) - \dot{\bar{\omega}} \times \bar{d}) - 2\underline{Q}(\bar{\omega} \times \dot{\bar{d}}). \end{aligned} \right\} (8.43)$$

Entsprechend den Transformationsgesetzen (4.41) - (4.43) gilt für das Ersatzproblem

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}_o^* &= \hat{r}_o \\ \left(\hat{t}_R^{\pm}\right)^* &= \underline{Q}\hat{t}_R^{\pm} \\ \left(\hat{q}_{T_R}^{\pm}\right)^* &= \underline{Q}\hat{q}_{T_R}^{\pm} \end{aligned} \right\} (8.44)$$

Diese hier angegebenen Transformationen gelten für beliebige  $\bar{c}$  und  $\underline{Q}$ . Bei Übergang auf ein gleichförmig translatorisch bewegtes Beobachtersystem ist



$\underline{Q} \hat{=} \text{konst.}$  unabhängig von der Zeit

$\dot{\underline{c}}^* \hat{=} \text{konst.}$  unabhängig von der Zeit

und hier wird wegen (4.48) mit

$$\left. \begin{aligned} \underline{\hat{b}}_n^* &= \underline{Q} \underline{\hat{b}}_n^{\wedge} ; n = 0, 1 \\ \underline{\hat{l}}_m^* &= \underline{Q} \underline{\hat{l}}_m^{\wedge} ; m = 0, 1, 2 \\ \underline{\bar{b}}_n^* &= \underline{Q} \underline{\bar{b}}_n^{\wedge} ; n = 0, 1. \end{aligned} \right\} (8.45)$$

Bei Übergang auf ein beliebig rotatorisch bewegtes Beobachtersystem ist

$$\underline{c}^* = \underline{o}^*$$

$$\underline{Q} = \underline{Q}(t), \quad \det \underline{Q} = +1, \quad \text{sonst beliebig.}$$

Für die Momente  $\underline{\hat{l}}_m^{\wedge}$  des Volumenmoments  $\underline{\hat{l}}^{\wedge}$  gilt mit (4.66)

$$\underline{\hat{l}}_m^* = \underline{Q}(t) \underline{\hat{l}}_m^{\wedge}, \quad m = 0, 1, 2; \quad (8.46)$$

dagegen läßt sich für die Momente der Volumenkräfte  $\underline{\bar{b}}_n^{\wedge}$  und  $\underline{\hat{b}}_n^{\wedge}$  direkt ein Transformationsgesetz nicht angeben. Entsprechend Gl. (4.65) gilt nämlich

$$(\underline{\bar{b}} + \underline{\hat{b}})^* - \underline{\ddot{p}}^* = \underline{Q} (\underline{\bar{b}} + \underline{\hat{b}}^{\wedge} - \underline{\ddot{p}}^{\wedge}), \quad (8.47)$$

wobei  $\underline{\ddot{p}}$  der kinematischen Zwangsbedingung gehorcht. Man erkennt, daß sich aus der Beziehung (8.47) separate Transformationsvorschriften für  $\underline{\bar{b}}$  und  $\underline{\hat{b}}$  und damit für  $\underline{\bar{b}}_n^{\wedge}$  und  $\underline{\hat{b}}_n^{\wedge}$  nicht ableiten lassen. Diesen besonderen Aspekt werden wir im folgenden sorgfältig beachten müssen.

8.2.1.2 Übergang zu gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen

Die energetische Bedingung (8.39) lautet im bewegten System

$$\hat{W}_b^* + \hat{W}_L^* + \hat{H}_r^* + \hat{H}_q^* + \hat{W}_e^* = 0. \quad (8.48)$$

Mit den Transformationsgesetzen und unter Beachtung von (8.39) folgt dann aus (8.48) nach Lokalisierung<sup>x</sup>

$$\underline{Q} \left[ \hat{g}_R \hat{b} + \left( \hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^- \right) \right] \cdot \dot{\hat{c}}^* = 0.$$

Da  $\dot{\hat{c}}^*$  beliebig ist, ergibt sich

$$\hat{f} := \hat{g}_R \hat{b} + \left( \hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^- \right) = \bar{0}. \quad (8.49)$$

Damit ist diese Invarianzbedingung ausgeschöpft. Diese Bedingung läßt sich sehr einfach interpretieren:  $\hat{f}$  stellt die Resultierende der auf ein materielles finites Linienelement wirkenden gedachten äußeren Zusatzkräfte dar, von der - wie hier abgeleitet wurde - zu verlangen ist, daß sie verschwindet.

8.2.1.3 Übergang zu beliebig rotierenden Beobachtersystemen

Aus der Bedingung, daß die Energie-Forderung (8.39) auch für beliebig rotierende Beobachtersysteme erfüllt ist, folgt zunächst nur

$$\hat{W}_b^* = - \left( \hat{W}_L^* + \hat{H}_r^* + \hat{H}_q^* + \hat{W}_e^* \right). \quad (8.48)^I$$

Die Energieterme auf der rechten Seite transformieren sich mit (8.11) und dem Permutationstheorem für das Spatprodukt wie folgt

$$\hat{W}_L^* = \hat{W}_L - \bar{\omega} \cdot \int_{\mathcal{A}} \left\{ \bar{r} \times \left[ \hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^- \right] + \bar{d} \times \left[ \hat{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_R^- \xi^- s^- \right] \right\} d\mathcal{A} \quad (8.50)$$

<sup>x</sup> Lokalisierung heißt, daß die Forderung (8.39), die das Verschwinden eines Flächenintegrals darstellt, für jeden beliebigen Integrationsbereich  $\mathcal{A}$  zu erfüllen ist; der Integrand von (8.39) muß daher verschwinden. Dies ist identisch mit der Bedingung (A1).

$$\hat{H}_r^* = \hat{H}_r$$

$$\hat{H}_{qL}^* = \hat{H}_{qL}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_e^* = \hat{W}_e - \bar{\omega} \cdot \int_A \frac{1}{2} \left\{ \bar{r}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\ \left. + \bar{d}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\ \left. + \bar{d} \times \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right\} dA. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Daher wird aus (8.48)<sup>I</sup> mit (8.39) und (8.50)

$$\begin{aligned} \hat{W}_b^* = + \hat{W}_b + \bar{\omega} \cdot \int_A \left\{ \bar{r} \times \left[ \hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^- \right] \right. \\ \left. + \bar{d} \times \left[ \hat{T}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{T}_R^- \xi^- s^- \right] \right\} dA \\ + \bar{\omega} \cdot \int_A \frac{1}{2} \left\{ \bar{r}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\ \left. + \bar{d}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\ \left. + \bar{d} \times \left[ \hat{\ell}_0^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_1^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\ell}_2^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \right\} dA \end{aligned} \quad (8.51)$$

Mit diesem Zwischenergebnis hat die Bedingung (A2) den Charakter einer Transformationsvorschrift für  $\hat{W}_b$  bekommen.

Die Invarianzforderungen gelten natürlich nicht nur für den Energiebeitrag der gedachten Zusatzeinwirkungen  $\hat{N}$ , sondern auch für (8.40). Es werden daher im folgenden zunächst die Konsequenzen der Invarianzbedingungen bezüglich der Energiebilanzgleichung (8.40) untersucht.

### 8.2.2 Invarianz der zweidimensionalen Energiebilanzgleichung bei Beobachterwechsel

Unter der Voraussetzung, daß die Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag zur Energiebilanz eines Schalenabschnittes liefern, gilt Gl. (8.40), die unter Beachtung von (8.2), (8.4), (8.6), (8.9), (8.24) und nach Ausführung der Zeitdifferenziation und Umordnung die folgende Form erhält:

$$\begin{aligned}
 \int_A \mathcal{S}_R \dot{\xi} dA &= \int_A \left\{ \left[ \mathcal{S}_{R0} \bar{b} - \mathcal{S}_{R0} \ddot{\bar{r}} - \mathcal{S}_{R0} \ddot{\bar{d}} + \bar{y}_0 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^{\beta} \bar{d})_{;\beta} \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \mathcal{S}_{R1} \bar{b} - \mathcal{S}_{R1} \ddot{\bar{r}} - \mathcal{S}_{R1} \ddot{\bar{d}} + \bar{y}_1 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^{\beta} \bar{d})_{;\beta} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{;\beta} \right. \quad (8.52) \\
 &\quad \left. + \left[ M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{;\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{S}_{R0} \bar{r}_0 - h_0^{\beta}{}_{;\beta} \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \bar{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \bar{q}_R^- \cdot \bar{N}^- \xi^- \right] \right\} dA.
 \end{aligned}$$

8.2.2.1 Transformationsgesetze

Bei Übergang zu einem beliebig bewegten Beobachtersystem transformierten sich die integralen Größen in (8.52) wie folgt

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}_0^* &= \underline{\varepsilon}_0 \\
 \underline{\gamma}_0^* &= \underline{\gamma}_0 \\
 \underline{\bar{y}}_0^* &= \underline{Q} \underline{\bar{y}}_0 \\
 \underline{\bar{y}}_1^* &= \underline{Q} \underline{\bar{y}}_1 \\
 \underline{g}_m^* &= \underline{g}_m, \quad m = 0, 1, 2.
 \end{aligned} \right\} (8.53)$$

Das Transformationsverhalten von  $M_m^{\alpha\beta}$ ,  $Q_n^\beta$ ,  $h_o^\beta$  und  $\bar{q}_R^\pm$  folgt aus den Definitionsgleichungen (8.19), (8.20) und (8.35) für diese Größen und aus den Transformationsgesetzen für den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor 2. Art Gl. (4.70) und den Wärmeflußvektor  $\bar{q}_R$  Gl. (4.43)<sub>2</sub>.

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{T} &= T^{KL} \bar{G}_K \otimes \bar{G}_L \\
 \underline{T} &= \underline{Q} \underline{T} \underline{Q}^T \quad \Rightarrow \quad T^{*KL} = T^{KL} \\
 \bar{q}_R &= q_R^k \bar{G}_k \\
 \bar{q}_R^* &= \underline{Q} \bar{q}_R \quad \Rightarrow \quad q_R^{*k} = q_R^k;
 \end{aligned} \right\} (8.54)$$

man erhält

$$M_m^{*\alpha\beta} = M_m^{\alpha\beta} \quad m = 0, 1, 2 \quad (8.55)$$

$$Q_n^{*\beta} = Q_n^\beta \quad n = 0, 1$$

$$h_o^{*\beta} = h_o^\beta \quad (8.56)$$

$$(\bar{q}_R^\pm \cdot \bar{N}^\pm)^* = (\bar{q}_R^\pm \cdot \bar{N}^\pm).$$

Für das Transformationsverhalten von  $\bar{b}_0, \bar{b}_1$  ergeben sich hier die schon oben (S. 126) erwähnten Schwierigkeiten. Bei Übergang zu einem unbeschleunigt translatorisch bewegten Beobachtersystem gilt entsprechend (8.45),

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_n^* &= \underline{Q} \bar{b}_n \\ \hat{b}_n^* &= \underline{Q} \hat{b}_n \end{aligned} \right\} \quad \underline{Q} \triangleq \text{konst.}, \quad n = 0, 1 \quad (8.57)$$

Bei Übergang zu einem beliebig rotatorisch beschleunigten Beobachtersystem folgt aus (8.47) durch Integration über die Schalendicke

$$\begin{aligned} \left( \int_{R_n} \bar{b}_n^* + \int_{R_n} \hat{b}_n^* \right) - \int_{R_n} \ddot{r}^* - \int_{R_{n+1}} \ddot{d}^* &= \\ &= \underline{Q} \left( \int_{R_n} \bar{b}_n + \int_{R_n} \hat{b}_n - \int_{R_n} \ddot{r} - \int_{R_{n+1}} \ddot{d} \right) \\ & \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} \int_{R_n} \bar{b}_n^* - \int_{R_n} \ddot{r}^* - \int_{R_{n+1}} \ddot{d}^* &= \underline{Q} \left( \int_{R_n} \bar{b}_n - \int_{R_n} \ddot{r} - \int_{R_{n+1}} \ddot{d} \right) \\ & \quad + \underline{Q} \int_{R_n} \hat{b}_n - \int_{R_n} \hat{b}_n^* \quad , \quad n = 0, 1 \end{aligned} \quad (8.58)$$

Diese Beziehung wird weiter unten Anwendung finden.

8.2.2.2 Übergang zu gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystemen  
(Bewegungsgleichungen 1. Art)

Verlangt man Forminvarianz des Energiesatzes (8.52) gegenüber Wechsel des Beobachtersystems, dann lautet der Energiesatz im "gesternten" (bewegten) System zunächst generell

$$\begin{aligned}
 \int_A \rho_{0R} \dot{\xi}_0^* dA &= \int_A \left\{ \left[ \rho_{0R} \bar{b}_0^* - \rho_{0R} \ddot{\bar{r}}^* - \rho_{1R} \ddot{\bar{d}}^* + \bar{y}_r^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (M_{01}^{*\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha}^* + M_{11}^{*\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha}^* + Q_0^{*\beta} \bar{d}^*)_{;\beta} \right] \cdot \dot{\bar{r}}^* \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \rho_{1R} \bar{b}_1^* - \rho_{1R} \ddot{\bar{r}}^* - \rho_{2R} \ddot{\bar{d}}^* + \bar{y}_d^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (M_{11}^{*\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha}^* + M_{21}^{*\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha}^* + Q_1^{*\beta} \bar{d}^*)_{;\beta} \right] \cdot \dot{\bar{d}}^* \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_{01}^{*\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha}^* + M_{11}^{*\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha}^* + Q_0^{*\beta} \bar{d}^* \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{,\beta}^* \right. \\
 &\quad \left. + \left[ M_{11}^{*\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha}^* + M_{21}^{*\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha}^* + Q_1^{*\beta} \bar{d}^* \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{,\beta}^* \right. \\
 &\quad \left. + \rho_{0R} \bar{r}_0^* - \bar{h}_0^{*\beta}{}_{;\beta} - \left[ \bar{q}^{*+} \cdot \bar{N}^{*+} \xi^+ + \bar{q}^{*-} \cdot \bar{N}^{-} \xi^- \right] \right\} dA
 \end{aligned} \tag{8.59}$$

hier ist zu beachten, daß das Transformationsverhalten von  $\rho_{mR}$  schon berücksichtigt wurde und daß die Koordinaten  $\theta^\alpha$  im "ungesternten" und "gesternten" System die gleichen sind, da die materiellen Koordinatennetze im System  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}^*$  durch Starrkörperbewegungen zur Deckung gebracht werden können. Speziell bei Übergang zu einem gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystem  $\mathcal{S}^*$  (Galileitransformationen) folgt aus (8.59) mit (8.52) unter Beachtung der Transformationsregeln für die gesternten Größen

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{c}}^* \cdot Q \int_A \left[ \rho_{0R} \bar{b}_0^* - \rho_{0R} \ddot{\bar{r}}^* - \rho_{1R} \ddot{\bar{d}}^* + \bar{y}_0 \right. \\
 \left. + (M_{01}^{*\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha}^* + M_{11}^{*\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha}^* + Q_0^{*\beta} \bar{d}^*)_{;\beta} \right] dA = 0
 \end{aligned} \tag{8.60}$$

und da  $\dot{\bar{c}}^* = \text{konst}$  bzw.  $\dot{\bar{c}} = -\underline{Q}^T \dot{\bar{c}}^* = -\dot{\bar{c}}^* \underline{Q}$  (vergl. 4.24)<sub>2</sub> beliebig ist, folgt

$$\int_{\mathcal{A}} \left[ \underline{g}_R \bar{b} - \underline{g}_R \ddot{\bar{r}} - \underline{g}_R \ddot{\bar{d}} + \bar{y}_0 + (M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^\beta \bar{d})_{;\beta} \right] d\mathcal{A} = \bar{0}. \quad (8.61)$$

Da dies für alle Integrationsbereiche  $\mathcal{A}$  (Lokalisierung) zu gelten hat, ergibt sich, daß der Integrand verschwinden muß:

$$\underline{g}_R \bar{b} - \underline{g}_R \ddot{\bar{r}} - \underline{g}_R \ddot{\bar{d}} + \bar{y}_0 + (M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^\beta \bar{d})_{;\beta} = \bar{0}. \quad (8.62)$$

Diese Bedingung wird als der Impulssatz für eine materielle Linie (finites Linienelement) aufgefaßt; sie soll auch als Bewegungsgleichung 1. Art bezeichnet werden.

### 8.2.2.3 Übergang zu einem beliebig rotierenden Beobachtersystem (zweidimensionaler Drehimpulssatz)

Bei Übergang zu einem rotierenden Beobachtersystem  $S^*$  wird zunächst aus (8.59) unter Beachtung der entsprechenden Transformationsgesetze

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \underline{g}_R \dot{\bar{c}} d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left[ \underline{g}_R \bar{b}^* - \underline{g}_R \ddot{\bar{r}}^* - \underline{g}_R \ddot{\bar{d}}^* \right] \cdot \dot{\bar{r}}^* \right. \\ &\quad \left. + \bar{y}_0 \cdot (\dot{\bar{r}} - \bar{\omega} \times \bar{r}) \right. \\ &\quad \left. + \underline{g}_R \bar{b}^* - \underline{g}_R \ddot{\bar{r}}^* - \underline{g}_R \ddot{\bar{d}}^* \right\} \cdot \dot{\bar{d}}^* \\ &\quad + \bar{y}_1 \cdot (\dot{\bar{d}} - \bar{\omega} \times \bar{d}) + \dots \end{aligned} \quad (8.63)$$



$$\begin{aligned}
 & + \underbrace{\left( M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d} \right)_{:\beta}} \cdot (\dot{\bar{d}} - \bar{\omega} \times \bar{d}) \\
 & + \underbrace{\left( M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{d} \right)} \cdot \left( \dot{\bar{r}}_{1\beta} - \bar{\omega} \times \bar{r}_{1\beta} \right) \\
 & + \underbrace{\left( M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d} \right)} \cdot (\dot{\bar{d}}_{1\beta} - \bar{\omega} \times \bar{d}_{1\beta}) \quad (8.63) \\
 & + \underbrace{S_{0R} \bar{r}}_0 - \underbrace{h_0^\beta}_{:\beta} \\
 & - \left[ \underbrace{\bar{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \bar{q}_R^- \cdot \bar{N}^- \xi^-} \right] \} dA.
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (8.58) läßt auf der rechten Seite die folgende Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^* & := \int_A \left\{ \left[ \underbrace{S_{R0} \bar{b}}_0^* - S_{0R} \ddot{\bar{r}}^* - S_{1R} \ddot{\bar{d}}^* \right] \cdot \dot{\bar{r}}^* + \left[ \underbrace{S_{R1} \bar{b}}_1^* - S_{1R} \ddot{\bar{r}}^* - S_{2R} \ddot{\bar{d}}^* \right] \cdot \dot{\bar{d}}^* \right\} dA \\
 & = \int_A \left\{ \left[ \underbrace{S_{R0} \bar{b}}_0 - S_{0R} \ddot{\bar{r}} - S_{1R} \ddot{\bar{d}} \right] \cdot \dot{\bar{r}} + \left[ \underbrace{S_{R1} \bar{b}}_1 - S_{1R} \ddot{\bar{r}} - S_{2R} \ddot{\bar{d}} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\
 & \quad \left. - \left[ \underbrace{S_{R0} \bar{b}}_0 - S_{0R} \ddot{\bar{r}} - S_{1R} \ddot{\bar{d}} \right] \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) - \left[ \underbrace{S_{R1} \bar{b}}_1 - S_{1R} \ddot{\bar{r}} - S_{2R} \ddot{\bar{d}} \right] \cdot (\bar{\omega} \times \bar{d}) \right. \\
 & \quad \left. + \underbrace{S_{R0} \hat{b}}_0 \cdot (\dot{\bar{r}} - \bar{\omega} \times \bar{r}) - \underbrace{S_{R0} \hat{b}}_0^* \cdot \dot{\bar{r}}^* \right. \\
 & \quad \left. + \underbrace{S_{R1} \hat{b}}_1 \cdot (\dot{\bar{d}} - \bar{\omega} \times \bar{d}) - \underbrace{S_{R1} \hat{b}}_1^* \cdot \dot{\bar{d}}^* \right\} dA.
 \end{aligned} \quad (8.64)$$

Das hier auf der rechten Seite auftretende Integral über die gesternten Größen stellt nichts anderes dar als die Leistung der zusätzlichen Volumenkräfte  $W_b^*$  im bewegten Beobachtersystem; dieser Ausdruck ist aber durch die Transformationsvorschrift (8.51) gegeben. Daher wird aus (8.64)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^* = \int_A \left\{ \right. & \left. \underbrace{\left[ \rho_0 \bar{\mathbf{b}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{r}}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{d}}} \right] \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\left[ \rho_0 \bar{\mathbf{b}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{r}}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{d}}} \right] \cdot \dot{\bar{\mathbf{d}}}}_{\text{Term 2}} \right. \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left( \bar{\mathbf{r}} \times \left[ \rho_0 \bar{\mathbf{b}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{r}}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{d}}} \right] \right) \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left( \bar{\mathbf{d}} \times \left[ \rho_0 \bar{\mathbf{b}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{r}}} - \rho_0 \ddot{\bar{\mathbf{d}}} \right] \right) \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left( \bar{\mathbf{r}} \times \rho_0 \hat{\mathbf{b}}_0 \right) \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left( \bar{\mathbf{d}} \times \rho_0 \hat{\mathbf{b}}_0 \right) \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left( \bar{\mathbf{r}} \times \left[ \hat{\mathbf{t}}_n^+ \xi^+ + \hat{\mathbf{t}}_n^- \xi^- \right] \right) \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left( \bar{\mathbf{d}} \times \left[ \hat{\mathbf{t}}_n^+ \xi^+ s^+ - \hat{\mathbf{t}}_n^- \xi^- s^- \right] \right) \\
 & - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{1}{2} \left( \bar{\mathbf{r}}_{,a} \times e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\mathbf{l}}_0 \times (\bar{\mathbf{r}}_{,b} \times \bar{\mathbf{d}}) + \hat{\mathbf{l}}_1 \times (\bar{\mathbf{d}}_{,b} \times \bar{\mathbf{d}}) \right] \right. \\
 & \quad + \bar{\mathbf{d}}_{,a} \times e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\mathbf{l}}_1 \times (\bar{\mathbf{r}}_{,b} \times \bar{\mathbf{d}}) + \hat{\mathbf{l}}_2 \times (\bar{\mathbf{d}}_{,b} \times \bar{\mathbf{d}}) \right] \\
 & \quad + \bar{\mathbf{d}} \times \left[ \hat{\mathbf{l}}_0 \times (\bar{\mathbf{r}}_{,1} \times \bar{\mathbf{r}}_{,2}) \right. \\
 & \quad \quad + \hat{\mathbf{l}}_1 \times (\bar{\mathbf{r}}_{,1} \times \bar{\mathbf{d}}_{,2} + \bar{\mathbf{d}}_{,1} \times \bar{\mathbf{r}}_{,2}) \\
 & \quad \quad \left. \left. + \hat{\mathbf{l}}_2 \times (\bar{\mathbf{d}}_{,1} \times \bar{\mathbf{d}}_{,2}) \right] \right) \left. \right\} dA \tag{8.65}
 \end{aligned}$$

Setzt man den für  $\mathcal{L}^*$  erhaltenen Ausdruck (8.65) in (8.63) ein, und beachtet die Energiebilanzgleichung (8.52) im ruhenden (ungesternten) Beobachtersystem, dann heben sich die durch Unterstreichen gekennzeichneten Terme heraus, so daß sich (8.63) auf die folgende Bedingung reduziert:

$$-\bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \int_A \bar{\mathbf{D}} dA = 0 \tag{8.66}$$

wobei

(8.67)

mit

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{D}}_S := & \bar{\mathbf{r}} \times \left[ \underset{0}{\mathcal{S}}_R \bar{\mathbf{b}} - \underset{0}{\mathcal{S}}_R \ddot{\bar{\mathbf{r}}} - \underset{1}{\mathcal{S}}_R \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \bar{\mathbf{y}}_0 \right. \\
 & \left. + (M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{d})_{:\beta} \right] \\
 & + \bar{\mathbf{d}} \times \left[ \underset{1}{\mathcal{S}}_R \bar{\mathbf{b}} - \underset{1}{\mathcal{S}}_R \ddot{\bar{\mathbf{r}}} - \underset{2}{\mathcal{S}}_R \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \bar{\mathbf{y}}_1 \right. \\
 & \left. + (M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d})_{:\beta} \right] \\
 & + \bar{\tau}_{1\beta} \times \left[ M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{d} \right] \\
 & + \bar{d}_{1\beta} \times \left[ M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d} \right] \\
 \hat{\mathcal{D}} := & \bar{\mathbf{r}} \times \left[ \underset{0}{\mathcal{S}}_R \hat{\mathbf{b}} + (\hat{\mathbf{t}}_R^+ \xi^+ + \hat{\mathbf{t}}_R^- \xi^-) \right] \\
 & + \bar{\mathbf{d}} \times \left[ \underset{1}{\mathcal{S}}_R \hat{\mathbf{b}} + (\hat{\mathbf{t}}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{\mathbf{t}}_R^- \xi^- s^-) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{l}}_0^+ \times (\bar{\tau}_{11} \times \bar{\tau}_{12}) + \hat{\mathbf{l}}_1^+ \times (\bar{\tau}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{\tau}_{12}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \hat{\mathbf{l}}_2^+ \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right) \right] \\
 & + \bar{\tau}_{1\alpha} \times \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\mathbf{l}}_0^+ \times (\bar{\tau}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\mathbf{l}}_1^+ \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \\
 & + \bar{d}_{1\alpha} \times \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \left[ \hat{\mathbf{l}}_1^+ \times (\bar{\tau}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\mathbf{l}}_2^+ \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right]
 \end{aligned} \tag{8.68}$$

Da (8.66) für beliebige rotierende Beobachtersysteme gilt, ist  $\bar{\omega}$  beliebig und daher muß das Integral in (8.66) verschwinden; da dies für beliebige Integrationsbereiche  $\mathcal{A}$  zu gelten hat (Lokalisierung), muß der Integrand gleich dem Nullvektor sein

$$\bar{\mathcal{D}} = \bar{\mathcal{D}}_S + \hat{\mathcal{D}} = \bar{\mathbf{0}}. \tag{8.69}$$

In Analogie zu den dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Problem soll die Bedingung (8.69) als der zweidimensionale lokale Drehimpulssatz der Schale bzw. der Drehimpulssatz für ein materielles finites Linienelement bezeichnet werden.

Sind der zweidimensionale lokale Impulssatz (8.62) und die Kraftbilanzbedingung (8.49) für die gedachten Zusatzbelastungen erfüllt, dann fallen die durch  $[\dots]$  gekennzeichneten Klammerterme in Gl. (8.68) heraus. Der verbleibende Ausdruck<sup>x</sup> für  $\hat{D}$  lautet

$$\begin{aligned} \hat{D} = \hat{D}_{red} := & \bar{d} \times \left[ g_R \hat{b} + (\hat{t}_R^+ \hat{s}^+ - \hat{t}_R^- \hat{s}^-) \right] \\ & + \bar{d} \times \frac{1}{2} \left[ \hat{l}_0 \times (\bar{r}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) + \hat{l}_1 \times (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}_{,2} + \bar{r}_{,2} \times \bar{d}_{,1}) \right. \\ & \left. + \hat{l}_2 \times (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}_{,2}) \right] \\ & + \bar{r}_{,\alpha} \times \frac{1}{2} e^{\kappa\beta} \left[ \hat{l}_0 \times (\bar{r}_{,\beta} \times \bar{d}) + \hat{l}_1 \times (\bar{d}_{,\beta} \times \bar{d}) \right] \\ & + \bar{d}_{,\alpha} \times \frac{1}{2} e^{\kappa\beta} \left[ \hat{l}_1 \times (\bar{r}_{,\beta} \times \bar{d}) + \hat{l}_2 \times (\bar{d}_{,\beta} \times \bar{d}) \right]. \end{aligned} \tag{8.68}^I$$

Die Interpretation der ersten Zeile ist offensichtlich: Sie stellt das resultierende Moment der Zusatzvolumenkräfte  $\hat{b}$  und der Zusatzbelastungen  $\hat{t}_R^\pm$  auf den Laibungsflächen für ein finites Linienelement dar, u.z. bezogen auf den Schnittpunkt der Referenzfläche mit dem Linienelement. Nach dieser Interpretation liegt es nahe, die übrigen, recht komplex erscheinenden Terme in  $\hat{D}_{red}$  als die Resultierende der Volumenmomente  $\hat{l}$

$$\hat{l}_0 := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \hat{l} d\theta$$

zu interpretieren. Durch eine längere Nachrechnung, die hier nicht dargestellt wird, wird dies bestätigt.

<sup>x)</sup> Man beachte, daß diese Terme in der integralen Energiebilanzgleichung (8.40) nicht enthalten sind. Die Tatsache, daß für die aktuellen und zusätzlichen Volumenkräfte separate Transformationsgesetze nicht angebar sind, führt dazu, daß diese Ausdrücke hier wieder auftreten.

8.2.2.4 Folgerungen aus dem zweidimensionalen Drehimpulssatz

(Bewegungsgleichungen 2. Art und Orthogonalitätsbedingung)

Trägt man jetzt der Vorstellung Rechnung, daß der zweidimensionale Drehimpulssatz für die Schale neben dem zweidimensionalen Impulssatz einen weiteren notwendigen Satz von Bestimmungsgleichungen (Bewegungsgleichungen) für die beiden kinematischen Größen  $\bar{\tau}$  und  $\bar{d}$  liefert und beachtet ferner, daß diese Größen allein durch die aktuellen äußeren Einwirkungen und nicht durch die Zusatzgrößen bestimmt sind, dann ist als weitere Bedingung für die Zusatzgrößen zu verlangen, daß ihr Beitrag im lokalen zweidimensionalen Drehimpulssatz (8.69) verschwindet, d.h.

$$\hat{\bar{D}}_{red} = \bar{0}, \quad (8.70)$$

Mit diesen weiteren Voraussetzung für die Zusatzbelastungen reduziert sich der zweidimensionale lokale Drehimpulssatz schließlich auf

$$\begin{aligned} \bar{D} = \bar{D}_s := & \bar{d} \times \left[ \underset{1}{g}_R \bar{b} - \underset{1}{g}_R \ddot{\bar{\tau}} - \underset{2}{g}_R \ddot{\bar{d}} + \bar{y}_1 \right. \\ & \left. + \left( M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1,\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d} \right)_{;\beta} \right] \\ & + \bar{\tau}_{1,\beta} \times \left[ M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1,\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d} \right] \\ & \bar{d}_{1,\beta} \times \left[ M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1,\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d} \right] \\ & \stackrel{!}{=} \bar{0}. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Bevor (8.71) im einzelnen analysiert wird (S.139), sollen noch einige Bemerkungen zu der Forderung (8.70) für die Zusatzbelastungen angefügt werden.

Hinreichende, aber nicht notwendige Bedingungen für die Erfüllung von (8.70) wären die Forderungen, daß die Ausdrücke in den eckigen Klammern von (8.70) verschwinden. Wenn man zusätzlich verlangen würde, daß diese Terme unabhängig von  $\bar{d}$ ,  $\bar{\tau}_{1,\alpha}$  und  $\bar{d}_{1,\alpha}$  sein sollen, dann wären diese obigen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig; man beachte hierbei,

daß die kinematischen Größen  $\bar{d}$ ,  $\bar{r}_{,\alpha}$ ,  $\bar{d}_{,\alpha}$  wegen der Unabhängigkeitsforderung allein durch die aktuellen Einwirkungen bestimmt sind und wegen der Manipulierbarkeit dieser Größen unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen können.

Eine besonders einfache Interpretation kann für (8.70) gegeben werden, wenn wir festsetzen (!), daß das Ersatzproblem keine Volumenmomente enthält; dann verschwinden die "Momente der Volumenmomente"  $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$  identisch und  $\hat{D}_{red}$  vereinfacht sich zu:

$$\hat{D}_{red} = \bar{d} \times \left[ \hat{e}_{\mathcal{R}} \hat{b} + (\hat{t}_{\mathcal{R}}^+ \hat{\xi}^+ s^+ - \hat{t}_{\mathcal{R}}^- \hat{\xi}^- s^-) \right] \stackrel{!}{=} \bar{0}. \quad (8.70)^I$$

Das Verschwinden der eckigen Klammer in (8.70)<sup>I</sup>, d.h.

$$\hat{M} := \hat{e}_{\mathcal{R}} \hat{b} + (\hat{t}_{\mathcal{R}}^+ \hat{\xi}^+ s^+ - \hat{t}_{\mathcal{R}}^- \hat{\xi}^- s^-) \stackrel{!}{=} \bar{0} \quad (8.70)^{II}$$

ist wohl eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung für die Erfüllung von (8.70)<sup>I</sup>; es ist durchaus vorstellbar, daß das Zusatzmoment  $\hat{M}$  jeweils gerade so seine Werte annimmt, daß bei allen Deformationen  $\hat{M}$  parallel zu  $\bar{d}$  wird, d.h.

$$\hat{M} = M \bar{d}$$

dann wäre (8.70)<sup>I</sup> identisch erfüllt, ohne daß  $\hat{M}$  identisch verschwindet; dies ist aber nur möglich, wenn  $\hat{M}$  zumindest eine Funktion von  $\bar{d}$  ist. Die Bedingung (8.70)<sup>II</sup> ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, wenn man verlangt, daß  $\hat{M}$  unabhängig von den kinematischen Größen  $\bar{r}_{,\alpha}$ ,  $\bar{d}_{,\alpha}$ ,  $\bar{d}$  zumindest aber unabhängig von  $\bar{d}$  ist. Es ist klar, daß diese letztgenannte Bedingung eine weitere Forderung an die Zusatzbelastungen darstellt.

Wir setzen voraus, daß die Zusatzbelastungen so gewählt werden, daß (8.70) identisch erfüllt ist. Mit (8.71) wird nach Umordnung

$$\bar{D} = \bar{D}_s = \bar{d} \times \bar{b} + \bar{c} \stackrel{!}{=} \bar{0}, \quad (8.72)$$

wobei  $\bar{b}$  und  $\bar{c}$  durch

$$\begin{aligned}
 \bar{b} &:= \mathfrak{g}_1 \bar{b} - \mathfrak{g}_2 \bar{r} - \mathfrak{g}_2 \bar{d} + \bar{y}_1 \\
 &+ (M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d})_{;\beta} \\
 &- Q_0^\beta \bar{r}_{1\beta} - Q_1^\beta \bar{d}_{1\beta} \\
 \bar{c} &:= -(\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta}) \frac{1}{2} [M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}] \\
 &- (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) [M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}] \\
 &- (\bar{d}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) \frac{1}{2} [M_2^{\alpha\beta} - M_2^{\beta\alpha}] \\
 &= +(\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{11}) [M_0^{12} - M_0^{21}] \\
 &+ (\bar{d}_{12} \times \bar{r}_{11} + \bar{r}_{12} \times \bar{d}_{11}) [M_1^{12} - M_1^{21}] \\
 &+ (\bar{d}_{12} \times \bar{d}_{11}) [M_2^{12} - M_2^{21}]
 \end{aligned} \tag{8.73}$$

definiert sind. Wir merken an, daß die Terme in (8.72), die  $Q^\beta$  und seine Ableitung  $Q^\beta_{;\beta}$  enthalten, identisch verschwinden; es soll davon aber kein Gebrauch gemacht werden. Aus (8.72) folgt nach skalarer Multiplikation mit  $\bar{d}$  die Orthogonalitätsbedingung

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = 0. \tag{8.74}$$

Diese Bedingung stellt eine Verknüpfung zwischen den Momenten  $M_m^{\alpha\beta}$  und den Deformationsgrößen  $\bar{r}_{1\alpha}, \bar{d}_{1\alpha}, d$  dar.

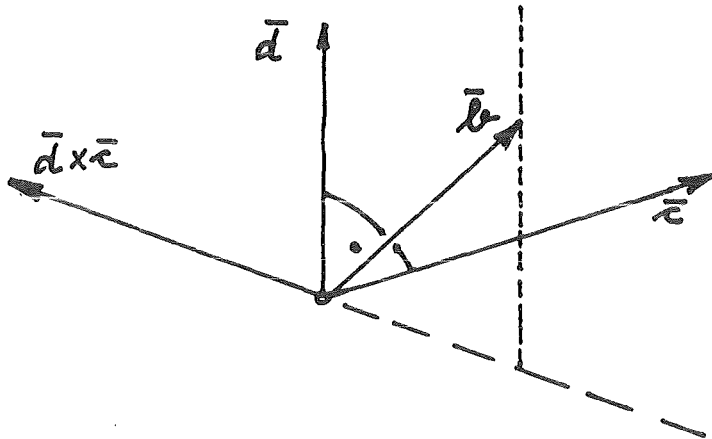
Setzt man an dieser Stelle voraus, daß das dreidimensionale Ersatzproblem speziell dadurch gekennzeichnet ist, daß keine Volumenmomente  $\hat{L}$  wirken sollen, dann ist entsprechend der zugehörigen lokalen Bedingungen der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor symmetrisch und damit sind dann auch die Momente  $M_m^{\alpha\beta}$  symmetrisch

$$M_m^{\alpha\beta} = M_m^{\beta\alpha},$$

so daß  $\bar{c}$  identisch verschwindet und (8.74) erfüllt ist. Im folgenden wird diese Voraussetzung hier nicht gemacht; es wird später (2. Teil) aber auf diesen

Gesichtspunkt erneut ausführlich eingegangen werden. Im übrigen ist dieser Sonderfall im folgenden mit enthalten.

Der Drehimpulssatz (8.72) stellt eine vektorielle Bedingung zwischen den drei Vektoren  $\bar{d}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  dar. Falls diese erfüllt ist, dann gilt auch die Orthogonalitätsbedingung (8.74). Aus (8.72) und (8.74) folgt, daß  $\bar{b}$  in der durch  $\bar{d}$  und  $\bar{d} \times \bar{c}$  aufgespannten Ebene liegen muß (s. Skizze)



Daher ist  $\bar{b}$  eindeutig zerlegbar entsprechend

$$\bar{b} = \tilde{Q} \bar{d} + \tilde{P} (\bar{d} \times \bar{c}) ; \quad (8.75)$$

dann wird mit (8.74)

$$\bar{d} \times \bar{b} = \tilde{P} \bar{d} \times (\bar{d} \times \bar{c}) = - \tilde{P} (\bar{d} \cdot \bar{d}) \bar{c}$$

und mit (8.72) wird

$$\tilde{P} = \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}} . \quad (8.76)$$

Bei Kenntnis von  $\bar{d}$  ist also  $\tilde{P}$  bestimmt; die Komponente  $\tilde{Q}$  bleibt dagegen unbestimmt. Natürlich ist aber  $\tilde{Q}$  bei Kenntnis von  $(\bar{b}, \bar{d})$  bestimmbar, denn  $\tilde{Q} = \bar{b} \cdot \bar{d} / (\bar{d} \cdot \bar{d})$ . Dieser Sachverhalt ist in der obigen Skizze dargestellt.

Werden jetzt die Orthogonalitätsbedingung (8.74) und die Zerlegung (8.75) unter Beachtung von (8.76) vorausgesetzt, dann ist der Drehimpulssatz (8.72) erfüllt. Die Sätze (8.74) und (8.75) mit (8.76) sind also hinreichende und notwendige Bedingungen für (8.72). Man beachte hierbei, daß (8.72) drei Gleichungen darstellt, während (8.74) und (8.75) vier Gleichungen beschreiben; hier ist allerdings zusätzlich die skalare Unbekannte  $\tilde{Q}$  vorhanden. Wenn nun die



Orthogonalitätsbedingung (8.74) und die Zerlegung (8.75) den 2D-lokalen Drehimpulssatz (8.72) ersetzen soll, dann muß  $\tilde{Q}$  nicht durch die Zerlegung (8.75) definiert werden, sondern es muß  $\tilde{Q}$  durch eine weitere, von (8.75) unabhängige Bedingungsgleichung bestimmt werden können. Wir unterstellen hier, daß  $\tilde{Q}$  durch eine Stoffgleichung definiert werden kann. Diese Arbeitshypothese wird in Teil 2 analysiert. Unter dieser Voraussetzung und mit (8.76) soll die vektorielle Beziehung (8.75) als Bewegungsgleichung 2. Art bezeichnet werden.

Für das Weitere ist es vorteilhaft, die Zerlegung (8.75) bezüglich der Basisvektoren  $\bar{d}$  und  $\bar{r}_{,\alpha}$  der Momentankonfiguration darzustellen. Zunächst kann die Ableitung  $\bar{d}_{,\alpha}$  des Direktors zerlegt werden entsprechend

$$\bar{d}_{,\alpha} = \eta_{\alpha}^s \bar{r}_{,s} + \mu_{\alpha} \bar{d}; \quad (8.77)$$

diese Zerlegung ist eindeutig. Denn man kann davon ausgehen, daß die durch den Direktor  $\bar{d}$  aufgespannte materielle Linie, die vor der Verformung senkrecht zur unverformten Referenzfläche stand, zu keinem Zeitpunkt während der Verformung tangential zur verformten Referenzfläche orientiert sein kann; d.h.

$$(\bar{r}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) \cdot \bar{d} \neq 0, \quad (8.78)$$

so daß  $\bar{r}_{,\alpha}$  und  $\bar{d}$  linear unabhängig sind. Mit (8.77) wird dann  $\bar{c}$  Gl. (8.73)<sub>2</sub>

$$\begin{aligned} \bar{c} = - \left\{ (\bar{r}_{,\alpha} \times \bar{r}_{,\beta}) \left[ \frac{1}{2} (M^{\alpha\beta} - M^{\beta\alpha}) \right. \right. \\ \left. \left. + (M_1^{\alpha s} - M_1^{s\alpha}) \eta_s^{\beta} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (M_2^{s\beta} - M_2^{\beta s}) \eta_s^{\alpha} \eta_s^{\beta} \right] \right. \\ \left. + (\bar{r}_{,\alpha} \times \bar{d}) \left[ (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_{\beta} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (M_2^{s\beta} - M_2^{\beta s}) (\eta_s^{\alpha} \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^{\alpha} \mu_s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Die Orthogonalitätsbedingung (8.74) lautet dann

$$\begin{aligned} \bar{d} \cdot \bar{c} &= -\bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta}) \left[ \frac{1}{2} (M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}) \right. \\ &\quad + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \eta_3^\beta \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (M_2^{3\alpha} - M_2^{\alpha 3}) \eta_3^\alpha \eta_3^\beta \right] \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Setzt man in Analogie zu (6.18)<sub>1</sub>

$$\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \bar{a}_3, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} (\det(\bar{r}_{1\alpha}, \bar{r}_{1\beta}))^{1/2} \quad (8.80)$$

( $\bar{a}_3$ , Einheitsvektor  $\perp$  auf deformierter Referenzfläche), dann ist

$$\bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta}) = \bar{d} \cdot \bar{a}_3 \epsilon_{\alpha\beta};$$

wegen (8.78) ist aber

$$\bar{d} \cdot \bar{a}_3 \neq 0,$$

so daß die Orthogonalitätsbedingung die folgende Form erhält

$$\begin{aligned} \bar{d} \cdot \bar{c} = 0 &\Rightarrow \\ \epsilon_{\alpha\beta} &\left[ \frac{1}{2} (M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}) + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \eta_3^\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (M_2^{3\alpha} - M_2^{\alpha 3}) \eta_3^\alpha \eta_3^\beta \right] \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (8.81)$$

Ausführung der Summation liefert schließlich die Orthogonalitätsbedingung in der Gestalt

$$\begin{aligned} (M_0^{22} - M_0^{21}) + (M_1^{12} - M_1^{21})(\eta_1^1 + \eta_2^2) \\ + (M_2^{12} - M_2^{21})(\eta_1^1 \eta_2^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (8.81)^I$$

Für  $\bar{d} \times \bar{c}$  in (8.75) erhält man jetzt unter Beachtung von (8.79), (8.80) und insbesondere (8.81)

$$\bar{d} \times \bar{e} = -\bar{d} \times (\bar{r}_{,\alpha} \times \bar{d}) \left[ (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\beta + \frac{1}{2} (M_2^{\delta\gamma} - M_2^{\gamma\delta}) (\eta_\delta^\alpha \mu_\gamma - \eta_\gamma^\alpha \mu_\delta) \right].$$

Mit dem Entwicklungssatz wird

$$\bar{d} \times (\bar{r}_{,\alpha} \times \bar{d}) = -(\bar{d} \cdot \bar{r}_{,\alpha}) \bar{d} + (\bar{d} \cdot \bar{d}) \bar{r}_{,\alpha},$$

Damit werden schließlich die Bewegungsgleichungen 2. Art

$$\bar{b} = \tilde{Q} \bar{d} + \tilde{P} (\bar{d} \times \bar{e}) = Q \bar{d} + L^\alpha \bar{r}_{,\alpha}$$

bzw. mit der Definitionsgleichung (8.73)<sub>1</sub>

$$\begin{aligned} \frac{g}{1} \bar{b} - \frac{g}{1} \bar{r}_{,\alpha} \ddot{\bar{r}} - \frac{g}{2} \bar{r} \ddot{\bar{d}} + \ddot{\bar{r}}_1 + (M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q^\beta \bar{d})_{;\beta} \\ - Q^\beta \bar{r}_{,\alpha} - Q^\beta \bar{d}_{,\beta} \\ = Q \bar{d} + L^\alpha \bar{r}_{,\alpha}, \end{aligned} \quad (8.82)$$

wobei

$$Q := \tilde{Q} + \frac{\bar{d} \cdot \bar{r}_{,\alpha}}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \left[ (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\beta + \frac{1}{2} (M_2^{\delta\gamma} - M_2^{\gamma\delta}) (\eta_\delta^\alpha \mu_\gamma - \eta_\gamma^\alpha \mu_\delta) \right]$$

und

$$L^\alpha := - (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\beta + \frac{1}{2} (M_2^{\delta\gamma} - M_2^{\gamma\delta}) (\eta_\delta^\alpha \mu_\gamma - \eta_\gamma^\alpha \mu_\delta), \quad (8.83)$$

Da  $\tilde{Q}$ , wie oben festgestellt, eine aus dem Drehimpulssatz nicht bestimmbare Größe ist, bleibt auch  $Q$  unbestimmt.  $L^\alpha$  ist dagegen durch die Momente  $M_1^{\alpha\beta}$  und  $M_2^{\delta\gamma}$  und die Deformationsgrößen  $\eta_\alpha^\beta$  und  $\mu_\alpha$  festgelegt; für das Folgende werde immer vorausgesetzt, daß  $L^\alpha$  durch (8.83) gegeben ist. Diese Bewegungsgleichungen 2. Art (8.82) und die Orthogonalitätsbedingung (8.81) oder (8.81)<sup>I</sup> sind notwendige und hinreichende Bedingungen für den Drehimpulssatz (8.72). In der weiteren Ableitung treten sie daher an dessen Stelle.

### 8.2.2.5 Reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung

Die Energie-Forderung (8.39) zusammen mit den Invarianzbedingungen ergaben aus dem Energiesatz die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art sowie die Orthogonalitätsbedingung, die hier zweidimensionale lokale Bedingungen darstellen. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Leistungen der aktuellen eingepprägten Kräfte  $\bar{\delta}, \bar{y}_0$  bzw. Momente  $\bar{\delta}, \bar{y}_1$  in der Energiebilanz (8.40) bzw. (8.52) eliminieren. Unter Beachtung von (8.62) und (8.82) erhält man:

$$\begin{aligned}
 \int_A \rho_{0R} \dot{\xi} dA &= \int_A \left\{ [Q\bar{d} + L^\alpha \bar{\tau}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{\tau}_{1\beta} + Q_1^\beta \bar{d}_{1\beta}] \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\
 &\quad + [M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{d}] \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} \\
 &\quad + [M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d}] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 &\quad + \rho_{0R} r_0 - h_0^\beta{}_{;\beta} \\
 &\quad \left. - [\bar{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \bar{q}_R^- \cdot \bar{N}^- \xi^-] \right\} dA \\
 &= \int_A \left\{ M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} \right. \\
 &\quad + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &\quad + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 &\quad + Q_0^\beta (\bar{\tau}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) \\
 &\quad + Q_1^\beta (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &\quad + L^\alpha \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \\
 &\quad + \rho_{0R} r_0 - h_0^\beta{}_{;\beta} \\
 &\quad \left. - [\bar{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \bar{q}_R^- \cdot \bar{N}^- \xi^-] \right\} dA.
 \end{aligned} \tag{8.84}$$

Diese Gleichung soll als reduzierte Energiebilanzgleichung bezeichnet werden.

8.2.2.6 Die entkoppelte Transformation der Größen  $\bar{b}_n$  und  $\hat{b}_n$  ( $n=0,1$ ),

Auf S. 126 war darauf hingewiesen worden, daß sich für beliebige rotatorische Relativbewegungen der Beobachtersysteme separate Transformationsvorschriften für  $\bar{b}$  und  $\hat{b}$  und damit für  $\bar{b}_n$  und  $\hat{b}_n$  ( $n=0,1$ ) nicht ableiten lassen; vielmehr galt nur die komplexe Beziehung (8.47) bzw. (8.58). Mit dem erzielten Ergebnis, daß die resultierenden Zusatzkräfte am finiten Linienelement verschwinden müssen Gl. (8.49)

$$s_{R0} \hat{b} + (\hat{t}_R^+ \xi^+ + \bar{t}_R^- \xi^-) = \bar{0}$$

und der weiteren Forderung Gl. (8.70)

$$\hat{D}_{red} = \bar{0}$$

lassen sich jetzt aber separate Transformationsgesetze ableiten. Es ist nämlich zu verlangen, daß diese beiden Bedingungen in jedem Beobachtersystem gelten sollen. Daher ist zunächst mit (8.44) und (8.45)

$$s_{R0} \hat{b}^* + \underbrace{(\hat{t}_R^{*+} \xi^{*+} + \hat{t}_R^{*-} \xi^{*-})}_{= Q(\hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^-)} = \bar{0}^* \quad (8.85)$$

Aus (8.58) folgt weiter

$$s_{R0} \hat{b}^* = Q(s_{R0} \bar{b} + s_{R0} \hat{b} - s_{R0} \ddot{r} - s_{R0} \ddot{d}) - s_{R0} \bar{b} + s_{R0} \ddot{r} + s_{R0} \ddot{d}$$

Einsetzen in (8.85) und Beachtung von (8.49) liefert dann schließlich

$$s_{R0} \bar{b}^* - s_{R0} \ddot{r}^* - s_{R0} \ddot{d}^* = Q(s_{R0} \bar{b} - s_{R0} \ddot{r} - s_{R0} \ddot{d}), \quad (8.86)$$

mit diesem Resultat folgt dann aus (8.58) weiter

$$\hat{b}^* = Q \hat{b}, \quad (8.87)$$

Ganz entsprechend folgt aus der Invarianz der Forderung (8.70)

$$\hat{D}_{red}^* = \bar{0}^* \quad (8.88)$$

unter Beachtung von

$$\text{Gl. (8.58): } \underline{s}_{1R} \bar{b}_1^{\wedge*} = \underline{Q} \left( \underline{s}_{1R} \bar{b}_1 + \underline{s}_{1R} \bar{b}_1^{\wedge} - \underline{s}_{1R} \bar{r}^{\ddot{}} - \underline{s}_{2R} \bar{d}^{\ddot{}} \right) - \underline{s}_{1R} \bar{b}_1^{\wedge*} +$$

$$\text{Gl. (8.46): } \underline{l}_m^{\wedge*} = \underline{Q} \underline{l}_m^{\wedge}, \quad m=0,1,2 \quad + \underline{s}_{1R} \bar{r}^{\ddot{*}} + \underline{s}_{2R} \bar{d}^{\ddot{*}}$$

die Transformation

$$\underline{s}_{1R} \bar{b}_1^{\wedge*} - \underline{s}_{1R} \bar{r}^{\ddot{*}} - \underline{s}_{2R} \bar{d}^{\ddot{*}} = \underline{Q} \left( \underline{s}_{1R} \bar{b}_1 - \underline{s}_{1R} \bar{r}^{\ddot{}} - \underline{s}_{2R} \bar{d}^{\ddot{}} \right). \quad (8.89)$$

Einsetzen in (8.88) und Berücksichtigung von (8.70) liefert schließlich

$$\bar{b}_1^{\wedge*} = \underline{Q} \bar{b}_1. \quad (8.90)$$

Dies sind die gesuchten Transformationsregeln für die integralen Größen  $\bar{b}_n$  und  $\hat{b}_n$  ( $n=0,1$ ). Sie zeigen ein unterschiedliches Transformationsverhalten der Integrale der aktuellen und der gedachten zusätzlichen Volumenkräfte: Im Gegensatz zu  $\bar{b}_n$  ( $n=0,1$ ) transformieren sich die  $\hat{b}_n$  ( $n=0,1$ ) wie objektive Vektoren. Letztlich ist dieses Verhalten auf die Voraussetzung zurückzuführen, daß die gedachten Zusatzvolumenkräfte keinen Einfluß auf die die Schalenverformung charakterisierenden Größen  $\bar{r}(\theta', \theta', t)$  und  $\bar{d}(\theta', \theta', t)$  haben sollen, und zwar unabhängig von der Wahl des Beobachtersystems.

### 8.3 Folgerungen aus der Bedingung (A3) ("Prozessinvarianz" der Energie-Forderung)

Aus der Energie-Forderung (8.39) für die gedachten Zusatzeinwirkungen und der Bedingung (A3) lassen sich mit einer zusätzlichen Voraussetzung eine Reihe von Folgerungen ableiten, die weitergehen als die oben aus der Beobachterinvarianz ermittelten.

Die Forderung (8.39) zusammen mit der Bedingung (A1), daß nämlich der Energiebeitrag der Zusatzeinwirkungen für jeden beliebigen Integrationsbereich  $\mathcal{A}$  der Referenzfläche (bzw. jedes finites Linienelement, abgeschwächte Lokalisierung) identisch verschwinden soll, führt unter Beachtung der Definitionen (8.7), (8.11), (8.28)<sup>I</sup>, (8.30), (8.38) und nach Umordnung auf folgende zweidimensionale lokale Bedingung

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \hat{b}_{\mathcal{R}0} + \left[ \hat{t}_{\mathcal{R}}^+ \xi^+ + \hat{t}_{\mathcal{R}}^- \xi^- \right] \right\} \cdot \dot{\bar{r}} \\
 & + \left\{ \hat{b}_{\mathcal{R}1} + \left[ \hat{t}_{\mathcal{R}}^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_{\mathcal{R}}^- \xi^- s^- \right] \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \left[ \hat{\ell}_0 \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_1 \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \\
 & \quad \left. \left. + \hat{\ell}_1 \times (\bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_2 \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \right\} \cdot \dot{\bar{d}} \quad (8.91) \\
 & + \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \left\{ \hat{\ell}_0 \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1 \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right\} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\alpha} \\
 & + \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \left\{ \hat{\ell}_1 \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2 \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right\} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \\
 & - \left\{ \left[ \hat{q}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{N} \xi \right]^+ + \left[ \hat{q}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{N} \xi \right]^- \right\} \\
 & + \sum_{\mathcal{R}} \hat{r}_0 \quad \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

Der Forderung (A3) entsprechend soll (8.91) nun für beliebige aktuelle äußere Einwirkungen gelten. Beliebigkeit der aktuellen äußeren Einwirkungen hat aber zur Folge, daß sich  $\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{d}}, \dot{\bar{r}}_{1\alpha}$  und  $\dot{\bar{d}}_{1\alpha}$  lokal beliebig und unabhängig voneinander und von  $\bar{r}, \bar{d}, \bar{r}_{1\alpha}, \bar{d}_{1\alpha}$  einstellen lassen; ein Einfluß der gedachten Zusatzgrößen auf diese kinematischen Größen ist hier ja voraussetzungsgemäß (Unabhängigkeitsforderung) nicht zugelassen. Mit der folgenden weiteren Hypothese lassen sich dann aus (8.91) eine Reihe von besonderen Forderungen gewinnen.

Hypothese: Es sei vorausgesetzt, daß die gedachten Zusatzwirkungen bzw.  $\hat{b}_{\mathcal{R}}, \hat{t}_{\mathcal{R}}^{\pm}, \hat{\ell}_m, (\hat{q}_{\mathcal{R}} \cdot \bar{N})^{\pm}, \hat{r}_0$  oder allgemeiner die vektoriellen Faktoren von  $\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{d}}$  etc. in (8.91) unabhängig von  $\bar{r}, \bar{d}$  etc. gewählt werden können.

Da  $\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{d}}$  etc. beliebige Werte annehmen können, folgt dann aus (8.91), daß die vektoriellen Faktoren von  $\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{d}}$  etc. verschwinden müssen, so daß man im einzelnen die folgenden Bedingungen erhält

$$\left. \begin{aligned}
 & \hat{g}_{r_0} \hat{b} + \left[ \hat{t}_r^+ \xi^+ + \hat{t}_r^- \xi^- \right] \stackrel{!}{=} \bar{0} \\
 & \hat{g}_{r_1} \hat{b} + \left[ \hat{t}_r^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_r^- \xi^- s^- \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \hat{\ell}_0 \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_1 \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \hat{\ell}_2 \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \stackrel{!}{=} \bar{0} \\
 & \hat{\ell}_0 \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1 \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \stackrel{!}{=} \bar{0}, \beta=1,2 \\
 & \hat{\ell}_1 \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2 \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \stackrel{!}{=} \bar{0}, \beta=1,2 \\
 & \hat{g}_{r_0} \hat{r}_0 - \left[ \left( \hat{q}_r \cdot \hat{N} \xi \right)^+ + \left( \hat{q}_r \cdot \hat{N} \xi \right)^- \right] \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned} \right\} (8.92)$$

Das Ergebnis (8.92)<sub>1</sub> war schon aus der ersten Invarianzforderung für die Leistung der gedachten Zusatzeinwirkungen erhalten worden (8.49). Die Folgerungen (8.92)<sub>2</sub> bis (8.92)<sub>5</sub> sind aber Einschränkungen, die über (8.70) und (8.39) hinausgehen. Es ist festzuhalten, daß allerdings die Bedingung (8.70)

$$\hat{D}_{red} = \bar{0}$$

identisch erfüllt wird, sofern nur die gedachten Zusatzbelastungen den Bedingungen (8.92)<sub>2</sub> bis (8.92)<sub>4</sub> genügen. Zusammenfassend sei festgehalten, daß die Bedingungen (8.92) nicht nur der energetischen Forderung (8.39)

$$\hat{W} = 0,$$

sondern auch (8.47)

$$\hat{J} = \bar{0}$$



und (8.70)

$$\hat{\vec{D}}_{\text{rel}} = \vec{0}$$

erfüllt. Zu beachten ist, daß (8.92) nur hinreichende aber keine notwendigen Bedingungen sind, sofern man nicht Hypothese auf S. 148 voraussetzt.

Die Bedingungen (9.82) sollen jetzt im einzelnen ausgewertet werden. Im Unterschied zu Kap. 8.2 gehen wir jetzt explizit davon aus, daß das Ersatzproblem eigentlich ein dreidimensionales Problem darstellt, bei dem die dreidimensionalen lokalen Bilanzgleichungen und die Randbedingungen die gedachten Zusatzeinwirkungen enthalten und exakt erfüllt werden. Daher können die Zusatzgrößen  $\hat{\vec{b}}$  und  $\hat{\vec{l}}$  aus den entsprechenden lokalen Bilanzgleichungen (7.8) und (7.9) gewonnen werden und die gedachten Zusatzspannungen erhält man aus der Spannungsrandbedingung auf den Laibungsflächen, Damit wird

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_R \hat{\vec{b}} &= \mathcal{S}_R (\ddot{\vec{p}} - \vec{b}) - \vec{\nabla}_R (\underline{F} \underline{T})^T \\ \mathcal{S}_R \hat{\vec{l}} &= - \vec{p}_{,S} \times \vec{p}_{,N} T^{NS} \\ \hat{\vec{t}}_R^{\pm} &= \vec{t}_R^{\pm} + \vec{p}^{\pm} \vec{n}^{\pm} \frac{dO_R^{\pm}}{dO_R^{\pm}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{in } V_R \\ \\ \text{auf den Laibungs-} \\ \text{flächen } O_R^+ \text{ u. } O_R^- \end{array} \quad (8.93)$$

Ferner sind die Definitionsgleichungen für  $\hat{\vec{b}}_m$ ,  $m=0,1$  und  $\hat{\vec{l}}_n$ ,  $n=0,1,2$  Gl. (8.8) und (8.26) und die innere kinematische Zwangsbedingung (7.1) zu beachten.

### 8.3.1 Die Bewegungsgleichungen 1. Art (Folgerungen aus (8.92)<sub>1</sub>)

Die erste Bedingung (8.89)<sub>1</sub>

$$\hat{\vec{f}} := \mathcal{S}_R \hat{\vec{b}} + \left( \hat{\vec{t}}_R^+ \xi^+ + \hat{\vec{t}}_R^- \xi^- \right) \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

stellt kein neues Ergebnis dar: Es wurde schon aus der ersten Invarianzforderung bezüglich  $\hat{W}=0$  (vergl. (8.49)) gewonnen. Auch auf die physikalische Bedeutung (im Sinne einer Kraftbilanzbedingung) wurde schon eingegangen (S. 127). Man überlegt sich auch leicht, daß die Forderung  $\hat{\vec{f}} \stackrel{!}{=} \vec{0}$  nach Ausführungen der Integration unter Verwendung der 3D-lokalen Bedingungen (8.93)<sub>1</sub> und (8.93)<sub>3</sub> zu den Bewegungsgleichungen 1. Art (Gl. (8.62)) führen müssen; diese Überlegung

sei dem Leser überlassen. Eine detaillierte Nachrechnung bestätigt dies; auf Einzelheiten sei hier verzichtet. Demnach wird

$$\begin{aligned} \hat{\vec{f}} &:= \hat{\rho}_R \hat{\vec{b}} + (\hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^-) = \\ &= \hat{\rho}_R \ddot{\vec{r}} + \hat{\rho}_R \ddot{\vec{d}} - \hat{\rho}_R \bar{\vec{b}} - \bar{\vec{y}} \\ &\quad - (M_0^{\alpha\pi} \bar{r}_{1,\alpha} + M_1^{\alpha\pi} \bar{d}_{1,\alpha} + M_0^{3\pi} \bar{d})_{;\pi} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (8.94)$$

### 8.3.2 Bewegungsgleichungen 2. Art (Folgerungen aus (8.92)<sub>2</sub>)

Die zweite Bedingung (8.92)<sub>2</sub> lautet

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_R \hat{\vec{b}} + (\hat{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_R^- \xi^- s^-) \\ + \frac{1}{2} \left[ \hat{\vec{\ell}}_0 \times (\bar{r}_{1,1} \times \bar{r}_{1,2}) + \hat{\vec{\ell}}_1 \times (\bar{r}_{1,1} \times \bar{d}_{1,2} + \bar{d}_{1,1} \times \bar{r}_{1,2}) \right. \\ \left. + \hat{\vec{\ell}}_2 \times (\bar{d}_{1,1} \times \bar{d}_{1,2}) \right] \stackrel{!}{=} \vec{0} \end{aligned}$$

Eine auf gängige Begriffe zurückführbare Interpretation erscheint nicht möglich. Zur Auswertung dieser Bedingung werde zunächst ihr Flächenintegral über einen beliebigen Integrationsbereich  $A$  betrachtet. Die einzelnen Terme lassen sich dann wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \int_A \hat{\rho}_R \hat{\vec{b}} dA &= \int_A \left\{ \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \hat{\rho}_R \hat{\vec{b}} \theta d\theta \right\} dA \\ &= \int_A \left\{ \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left[ \hat{\rho}_R (\ddot{\vec{r}} - \bar{\vec{b}}) - \bar{\vec{v}}_R (EI)^T \right] \theta d\theta \right\} dA \quad (8.95) \\ &= \int_A \left\{ \hat{\rho}_R \ddot{\vec{r}} + \hat{\rho}_R \ddot{\vec{d}} - \hat{\rho}_R \bar{\vec{b}} \right\} dA - \int_{V_R} \bar{\vec{v}}_R (EI)^T \theta dV_R. \end{aligned}$$

Mit

$$(\bar{\vec{v}}_R (EI)^T) \theta = \bar{\vec{v}}_R [(EI)^T \theta] - (\bar{\vec{v}}_R \theta) (EI)^T$$

und

$$\bar{V}_R \Theta = \bar{V}_R \Theta^3 = \bar{G}_3 = \bar{A}^3 = \bar{A}_3$$

sowie dem Green-Gaußschen Satz für Tensoren Gl. (4.56) wird

$$\int_{V_R} \bar{V}_R (EI)^T \Theta dV_R = \oint_{O_R} \Theta EI \bar{N} dO_R - \int_{V_R} \bar{A}_3 (EI)^T dV_R \quad (8.96)$$

Die Aufspaltung des ersten Integrals auf der rechten Seite über den Randstreifen  $C_F$  und über die Laibungsflächen  $O^+, O^-$  liefert

$$\begin{aligned} \oint_{O_R} \Theta EI \bar{N} dO_R &= \oint_{C_F} \Theta EI \bar{N} dO_{CF} \\ &+ \underbrace{\int_A (\bar{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \bar{t}_R^- \xi^- s^-) dA}_{\text{Summe der beiden Laibungsintegrale}} \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Integration des Leistungsintegrals  $W_{CF}$  (S. 113) erhält man hier jetzt ganz analog

$$\begin{aligned} \oint_{C_F} \Theta EI \bar{N} dO_{CF} &= \oint_C \left\{ M_1^{\alpha\pi} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\pi} \bar{d}_{1\alpha} + \bar{d}_1 M_1^{\beta\pi} \right\} \frac{1}{\eta} ds \\ &= \int_A \left( M_1^{\alpha\pi} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\pi} \bar{d}_{1\alpha} + \bar{d}_1 M_1^{\beta\pi} \right) \frac{1}{\eta} dA. \end{aligned} \quad (8.97)$$

Außerdem ergibt sich wegen

$$\underline{EI} = \bar{p}_{,k} \otimes \bar{A}_T \bar{S}_M^k \tilde{T}^{HT} \quad (\text{vergl. S. 114})$$

für das Integral

$$\begin{aligned} \int_{V_R} \bar{A}_3 (EI)^T dV_R &= \int_{V_R} (EI) \bar{A}_3 dV_R = \int_{V_R} \bar{p}_{,k} \bar{S}_M^k \tilde{T}^{H3} dV_R \\ &= \int_{V_R} \int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{A} \left\{ (\bar{r}_{1\alpha} + \Theta \bar{d}_{1\alpha}) \bar{S}_M^\alpha \tilde{T}^{H3} + \bar{d}_1 \bar{S}_M^3 \tilde{T}^{H3} \right\} d\Theta dA. \end{aligned}$$

Mit (8.16) und (6.64) wird daraus dann

$$\int_{V_R} \bar{A}_3 (EI)^T dV_R = \int_A \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left\{ (\bar{r}_{1\alpha} + \theta \bar{d}_{1\alpha}) T^{\alpha 3} + \bar{d} T^{33} \right\} d\theta dA.$$

Diese Form legt die Definitionen (vergl. Gl. (8.19), (8.20))

$$M_m^{\alpha 3} := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha 3} (\theta)^m d\theta, \quad m = 0, 1 \quad (8.98)$$

$$M_0^{33} := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{33} d\theta$$

nahe, so daß damit

$$\int_{V_R} \bar{A}_3 (EI)^T dV_R = \int_A \left\{ M_0^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{33} \bar{d} \right\} dA. \quad (8.99)$$

Mit (8.95)-(8.97) und (8.99) wird schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\hat{A}} \hat{g}_{\hat{r}_1} \hat{b} d\hat{A} &= \int_A \left\{ \hat{g}_{\hat{r}_2} \ddot{\hat{r}} + \hat{g}_{\hat{r}_2} \ddot{\hat{d}} - \hat{g}_{\hat{r}_1} \bar{b} \right. \\ &\quad - \left( M_1^{\alpha \pi} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha \pi} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{3\pi} \bar{d} \right) : \pi \\ &\quad - \left( \bar{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \bar{t}_R^- \xi^- s^- \right) \\ &\quad \left. + \left( M_0^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{33} \bar{d} \right) \right\} dA. \end{aligned} \quad (8.100)$$

Für den zweiten Ausdruck in (8.92)<sub>2</sub> erhält man mit (8.93)<sub>3</sub> und (Anhang 2)

$$\begin{aligned} \int_{\hat{A}} \left\{ \hat{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_R^- \xi^- s^- \right\} d\hat{A} &= \\ &= \int_{\hat{A}} \left\{ \left( \bar{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \bar{t}_R^- \xi^- s^- \right) - \bar{y}_1 \right\} dA. \end{aligned} \quad (8.101)$$

Die Beiträge durch Volumenmomente in (8.92)<sub>2</sub> lassen sich wie folgt umrechnen;

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \hat{\bar{\ell}} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\bar{\ell}} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \\
 & \quad \left. + \hat{\bar{\ell}} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right\} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \frac{\rho}{\sqrt{A}} \left\{ \hat{\bar{\ell}} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\bar{\ell}} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \theta \right. \\
 & \quad \left. + \hat{\bar{\ell}} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) (\theta)^2 \right\} d\theta \\
 & = \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \hat{\bar{\ell}} \times \left( \frac{\bar{P}_{11} \times \bar{P}_{12}}{\sqrt{g}} \right) d\theta,
 \end{aligned} \tag{8.102}$$

wobei die Bedingung der lokalen Massenerhaltung (4.13) benutzt wurde. Mit

$$\bar{g}^3 = \frac{\bar{g}_1 \times \bar{g}_2}{\sqrt{g}} = \frac{\bar{P}_{11} \times \bar{P}_{12}}{\sqrt{g}}$$

und

$$(\bar{P}_{11} \times \bar{P}_{12}) \times \bar{g}^3 = 0$$

sowie (8.93)<sub>2</sub> wird dann

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \hat{\bar{\ell}} \times \left( \frac{\bar{P}_{11} \times \bar{P}_{12}}{\sqrt{g}} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \hat{\bar{\ell}} \times \bar{g}^3 d\theta \\
 & = -\frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} (\bar{P}_{13} \times \bar{P}_{11}) \times \bar{g}^3 T^{NS} d\theta \\
 & = -\frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left\{ (\bar{P}_{11} \times \bar{P}_{13}) (T^{31} - T^{13}) \right. \\
 & \quad \left. + (\bar{P}_{12} \times \bar{P}_{13}) (T^{32} - T^{23}) \right\} \times \bar{g}^3 d\theta.
 \end{aligned} \tag{8.103}$$

Beachtet man den Entwicklungssatz für das Dreifachvektorprodukt und benützt

$$\bar{g}^k \cdot \bar{g}_l = \delta_l^k,$$

dann ist

$$(\bar{P}_{11} \times \bar{P}_{13}) \times \bar{g}^3 = -\bar{P}_{11}$$

$$(\bar{P}_{12} \times \bar{P}_{13}) \times \bar{g}^3 = -\bar{P}_{12}.$$

Daher wird

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \hat{\ell} \times \left( \frac{\bar{p}_{11} \times \bar{p}_{12}}{|\bar{q}'|} \right) d\theta = \\
 & = -\frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left\{ (T^{13} - T^{31}) \bar{p}_{11} + (T^{23} - T^{32}) \bar{p}_{12} \right\} d\theta \\
 & = -\frac{1}{2} \left\{ (M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha}) \bar{r}_{1\alpha} + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} \right\}. \quad (8.104)
 \end{aligned}$$

Mit diesen Umformungen wird aus der zweiten Bedingung (8.92)<sub>2</sub>

$$\begin{aligned}
 & \left\{ g_{R1} \hat{b} + (\hat{t}_R^+ \xi^+ S^+ - \hat{t}_R^- \xi^- S^-) + \frac{1}{2} \left[ \hat{\ell} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \hat{\ell} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \right\} (-1) = \\
 & = g_{R2} \bar{b} + \bar{y}_1 - g_{R2} \ddot{r} - g_{R2} \ddot{d} \\
 & \quad + (M_1^{\alpha \pi} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha \pi} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{3\pi} \bar{d}) : \pi \\
 & \quad - (M_0^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{33} \bar{d}) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \left[ (M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha}) \bar{r}_{1\alpha} + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} \right] \stackrel{!}{=} \bar{0}, \quad (8.105)
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis läßt sich noch auf eine mit der Bewegungsgleichung 2. Art Gl. (8.82) leichter vergleichbare Form transformieren. Mit

$$M_n^{\alpha 3} = M_n^{3\alpha} + (M_n^{\alpha 3} - M_n^{3\alpha}), \quad n=0,1 \quad (8.106)$$

wird nämlich aus (8.105)

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \ddot{\bar{b}} + \ddot{\bar{y}}_1 - \rho_1 \ddot{\bar{r}} - \rho_2 \ddot{\bar{d}} + \\
 & + (M_1^{\alpha\pi} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\pi} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{\beta\pi} \bar{d}) : \pi - \\
 & - (M_0^{\beta\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\beta\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{\beta\beta} \bar{d}) - \\
 & - \frac{1}{2} \left[ (M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}) \bar{r}_{1\alpha} + (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} \right] \stackrel{!}{=} \bar{0}.
 \end{aligned} \tag{8.105}^I$$

Verwenden wir noch die Definition (8.73)<sub>1</sub>, dann läßt sich dafür auch schreiben

$$\bar{b} = M_0^{\beta\beta} \bar{d} + \frac{1}{2} \left[ (M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}) \bar{r}_{1\alpha} + (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} \right]. \tag{8.105}^{II}$$

### 8.3.3 Symmetriebedingungen (Folgerungen aus (8.92)<sub>3</sub> und (8.92)<sub>4</sub>)

Die Bedingungen (8.92)<sub>3</sub> ergeben:

$$\begin{aligned}
 & \hat{\bar{l}} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\bar{l}} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \\
 & = \int_{-s^-}^{s^+} \frac{\rho}{\bar{A}} \left\{ \hat{\bar{l}} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\bar{l}} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \Theta \right\} d\theta \\
 & = - \int_{-s^-}^{s^+} \frac{\sqrt{G}}{\bar{A}} (\bar{p}_{1s} \times \bar{p}_{1N} T^{Ns}) \times \left( \frac{\bar{p}_{1\beta} \times \bar{p}_{1\beta}}{\sqrt{g}} \right) d\theta \stackrel{!}{=} \bar{0}.
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\bar{p}_{1\beta} \times \bar{p}_{1\beta}}{\sqrt{g}} = \exp \bar{g}^\alpha,$$

wird

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{\ell}}_0 \times (\vec{r}_{1\beta} \times \vec{d}) + \hat{\vec{\ell}}_1 \times (\vec{d}_{1\beta} \times \vec{d}) = \\ & = - \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{H}} \left\{ \begin{aligned} & (\vec{p}_{11} \times \vec{p}_{12}) (T^{21} - T^{12}) \\ & + (\vec{p}_{11} \times \vec{p}_{13}) (T^{31} - T^{13}) \\ & + (\vec{p}_{12} \times \vec{p}_{13}) (T^{32} - T^{23}) \end{aligned} \right\} \times e_{\alpha\beta} \vec{g}^\alpha d\theta. \end{aligned}$$

Für  $\beta=1$  wird

$$e_{\alpha\beta} \vec{g}^\alpha = -\vec{g}^\beta$$

$$(\vec{p}_{11} \times \vec{p}_{12}) \times (-\vec{g}^1) = \vec{p}_{11}$$

$$(\vec{p}_{11} \times \vec{p}_{13}) \times (-\vec{g}^1) = \vec{0}$$

$$(\vec{p}_{12} \times \vec{p}_{13}) \times (-\vec{g}^2) = -\vec{p}_{13},$$

so daß

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{\ell}}_0 \times (\vec{r}_{11} \times \vec{d}) + \hat{\vec{\ell}}_1 \times (\vec{d}_{11} \times \vec{d}) = \\ & = \begin{pmatrix} M^{12} & \\ & 0 \end{pmatrix} \vec{r}_{11} + \begin{pmatrix} M^{12} & \\ & 0 \end{pmatrix} \vec{d}_{11} + \begin{pmatrix} M^{32} & \\ & -M^{23} \end{pmatrix} \vec{d} \\ & \stackrel{!}{=} \vec{0}. \end{aligned} \tag{8.107}$$

Analog erhält man für  $\beta=2$

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{\ell}}_0 \times (\vec{r}_{12} \times \vec{d}) + \hat{\vec{\ell}}_1 \times (\vec{d}_{12} \times \vec{d}) = \\ & = \begin{pmatrix} M^{12} & \\ & 0 \end{pmatrix} \vec{r}_{12} + \begin{pmatrix} M^{12} & \\ & 0 \end{pmatrix} \vec{d}_{12} + \begin{pmatrix} M^{13} & \\ & -M^{31} \end{pmatrix} \vec{d} \\ & \stackrel{!}{=} \vec{0}. \end{aligned} \tag{8.108}$$

Aus den Bedingungen (8.92)<sub>4</sub> folgt in entsprechender Weise

$$\begin{aligned} & \hat{\vec{\ell}}_1 \times (\vec{r}_{11} \times \vec{d}) + \hat{\vec{\ell}}_2 \times (\vec{d}_{11} \times \vec{d}) = \\ & = \begin{pmatrix} M^{12} & \\ & 0 \end{pmatrix} \vec{r}_{11} + \begin{pmatrix} M^{12} & \\ & 0 \end{pmatrix} \vec{d}_{11} + \begin{pmatrix} M^{32} & \\ & -M^{23} \end{pmatrix} \vec{d} \\ & \stackrel{!}{=} \vec{0} \end{aligned} \tag{8.109}$$



$$\left. \begin{aligned} & \hat{\vec{l}}_1 \times (\vec{r}_{12} \times \vec{d}) + \hat{\vec{l}}_2 \times (\vec{d}_{12} \times \vec{d}) = \\ & = (M_1^{12} - M_1^{21}) \vec{r}_{12} + (M_2^{12} - M_2^{21}) \vec{d}_{12} + (M_1^{13} - M_1^{31}) \vec{d} \\ & \stackrel{!}{=} \vec{0} \end{aligned} \right\} (8.110)$$

Damit sind die Bedingungen für die mechanischen Zusatzgrößen  $(\hat{\vec{b}}, \hat{\vec{l}}, \hat{\vec{t}}_x)$  Gl. (8.92)<sub>1</sub> - (8.92)<sub>4</sub> ausgewertet. Auf die Bedingungen für die thermischen Zusatzgrößen  $(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{q}}_x)$  soll im übernächsten Kapitel eingegangen werden. Zunächst sollen aus diesen Resultaten noch einfache und übersichtliche Aussagen (die Symmetriebedingungen) abgeleitet werden.

Die vier vektoriellen Bedingungen (8.107) bis (8.110) besagen, daß die linken Seiten Nullvektoren gleichzusetzen sind. Projiziert man diese linken Seiten auf die momentane Basis  $\vec{r}_{11}, \vec{r}_{12}, \vec{d}$ , dann erhält man aus jeder dieser vektoriellen Bedingung drei Komponentengleichungen. Skalarmultiplikation mit  $\vec{d}$  und Auflösung nach dem letzten Term auf der linken Seite ergibt zunächst:

$$\left. \begin{aligned} (M_0^{23} - M_0^{32}) &= \frac{+1}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \left\{ (M_0^{12} - M_0^{21}) \vec{d} \cdot \vec{r}_{11} + (M_1^{12} - M_1^{21}) \vec{d} \cdot \vec{d}_{11} \right\} \\ (M_0^{13} - M_0^{31}) &= \frac{-1}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \left\{ (M_0^{12} - M_0^{21}) \vec{d} \cdot \vec{r}_{12} + (M_1^{12} - M_1^{21}) \vec{d} \cdot \vec{d}_{12} \right\} \\ (M_0^{23} - M_0^{32}) &= \frac{+1}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \left\{ (M_1^{12} - M_1^{21}) \vec{d} \cdot \vec{r}_{11} + (M_2^{12} - M_2^{21}) \vec{d} \cdot \vec{d}_{11} \right\} \\ (M_1^{13} - M_1^{31}) &= \frac{-1}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \left\{ (M_1^{12} - M_1^{21}) \vec{d} \cdot \vec{r}_{12} + (M_2^{12} - M_2^{21}) \vec{d} \cdot \vec{d}_{12} \right\} \end{aligned} \right\} (8.111)$$

Skalarmultiplikation der Bedingung (8.107) mit  $\vec{r}_{11}$  unter Beachtung von (8.111)<sub>1</sub> liefert

$$\begin{aligned} & (M_0^{12} - M_0^{21}) \left[ \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_{11} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}_{11}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} \cdot \vec{r}_{11} \right] + \\ & + (M_1^{12} - M_1^{21}) \left[ \vec{d}_{11} \cdot \vec{r}_{11} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}_{11}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} \cdot \vec{d}_{11} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.112)$$

Wegen

$$(\vec{r}_{11} \times \vec{d}) \cdot (\vec{r}_{11} \times \vec{d}) = (\vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_{11})(\vec{d} \cdot \vec{d}) - (\vec{d} \cdot \vec{r}_{11})(\vec{r}_{11} \cdot \vec{d})$$

und da

$$\bar{d} \cdot \bar{d} \neq 0$$

wird aus (8.112)

$$\begin{aligned} & (M_0^{12} - M_0^{21}) (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) + \\ & + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{d}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) = 0. \end{aligned} \quad (8.113)_1$$

Ganz entsprechend folgt aus der Bedingung (8.107) bei Skalarmultiplikation mit  $\bar{r}_{12}$  und Berücksichtigung von (8.111)<sub>1</sub>

$$\begin{aligned} & (M_0^{12} - M_0^{21}) (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) + \\ & + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{d}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) = 0. \end{aligned} \quad (8.113)_2$$

Die übrigen drei Bedingungen (8.108) bis (8.110) ergeben in analoger Weise bei Skalarmultiplikation mit  $\bar{r}_{11}$  und  $\bar{r}_{12}$  und Beachtung von (8.111).

Aus (8.108) folgt

$$\left. \begin{aligned} & (M_0^{12} - M_0^{21}) (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) + \\ & + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) = 0 \\ & (M_0^{12} - M_0^{21}) (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) + \\ & + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) = 0 ; \end{aligned} \right\} (8.114)$$

aus (8.109) ermittelt man

$$\left. \begin{aligned} & (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) + \\ & + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\bar{d}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) = 0 \\ & (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) + \\ & + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\bar{d}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) = 0 \end{aligned} \right\} (8.115)$$

und aus (8.110) ergibt sich

$$\begin{aligned} & (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \\ & + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) = 0 \end{aligned} \quad (8.116)_1$$

$$\begin{aligned} & (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) + \\ & + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) = 0. \end{aligned} \quad (8.116)_2$$

Die skalaren Gleichungen (8.113) können als ein homogenes lineares Gleichungssystem für  $(M_0^{12} - M_0^{21})$  und  $(M_1^{12} - M_1^{21})$  aufgefaßt werden; aber auch die Gleichungen (8.114) stellen ein homogenes lineares Gleichungssystem für diese Größen dar. Entsprechend stellen die Gleichungen (8.115) und (8.116) zwei homogene lineare Gleichungssysteme für  $(M_1^{12} - M_1^{21})$  und  $(M_2^{12} - M_2^{21})$  dar. Es stellt sich hier sofort die Frage, ob diese homogenen Gleichungssysteme triviale oder auch nicht-triviale, widerspruchsfreie Lösungen für die Momentendifferenzen zulassen.

Wir betrachten dazu zunächst das Gleichungssystem (8.113). Die Determinante ist

$$\begin{aligned} \text{Det} &= [(\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d})][(\bar{d}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d})] \\ &\quad - [(\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d})][(\bar{d}_{11} \times \bar{d}) \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{d})] \\ &= [(\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d})] \cdot [(\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d})]. \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung von  $\bar{d}_{1\alpha}$  bezüglich der Basis  $\bar{r}_{1\alpha}, \bar{d}$

$$\bar{d}_{1\alpha} = \eta^s_\alpha \bar{r}_{1s} + \mu_\alpha \bar{d}$$

wird

$$\text{Det} = \eta^2_{11} [(\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d})] \cdot [(\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d})].$$

Der Vektor in der eckigen Klammer ist aber vom Nullvektor verschieden, denn aufgrund physikalischer Erwägungen (vergl. S. 142) sind  $\bar{r}_{11}, \bar{r}_{12}$  und  $\bar{d}$  von Null verschieden und als linear unabhängig anzusehen. Der Flächentensor  $\eta^{\alpha\beta}$  (bzw. hier die Komponente  $\eta^2_{11}$ ) stellt definitionsgemäß die Parallelprojektionen von  $\bar{d}_{1\alpha}$  bezüglich der Basen in der Tangentialebene der verformten Referenzfläche dar; i. a. sind diese aber von Null verschieden, wenn von speziellen Verformungsprozessen einmal abgesehen wird. Daher ist i. a.

$$\text{Det} \neq 0.$$

Die skalaren Gleichungen (8.113) liefern also i.a. nur triviale Lösungen, d.h.

$$\left( M_0^{12} - M_0^{21} \right) = 0, \quad \left( M_1^{12} - M_1^{21} \right) = 0, \quad (8.117)$$

Die Determinante des linearen Gleichungssystems (8.114) ist

$$\tilde{\text{Det}} = -\eta^2 \left[ (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \right] \cdot \left[ (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \right],$$

so daß auch hier i.a.

$$\tilde{\text{Det}} \neq 0.$$

Damit hat auch dieses Gleichungssystem bis auf Sonderfälle nur die trivialen Lösungen (8.117). Die beiden weiteren Gleichungssysteme (8.115) und (8.116) für  $\left( M_n^{12} - M_n^{21} \right)$ ,  $n=1,2$  haben die entsprechenden Determinanten, so daß sich auch hier nur triviale Lösungen ergeben

$$\left( M_1^{12} - M_1^{21} \right) = 0, \quad \left( M_2^{12} - M_2^{21} \right) = 0. \quad (8.118)$$

Mit (8.117) und (8.118) folgt dann auch, daß die linken Seiten von (8.111) verschwinden müssen. Zusammenfassend ergibt also die Auswertung von (8.92)<sub>3</sub> und (8.92)<sub>4</sub>, daß die schiefsymmetrischen Anteile der Momente  $M_n^{KL}$  verschwinden (Symmetriebedingungen)

$$\left( M_n^{KL} - M_n^{LK} \right) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} n=0,1 & K,L=1,2,3 \\ n=2 & K,L=1,2. \end{cases} \quad (8.119)$$

#### 8.3.4 Vergleich der Bewegungsgleichungen 2. Art

Die Bilanzgleichung (8.105)<sup>I</sup> bzw. (8.105)<sup>II</sup> läßt sich noch mit Hilfe von (8.111) - zunächst ohne (!) Berücksichtigung von (8.119) - auf eine Form bringen, in der die schiefsymmetrischen Ausdrücke

$$\left( M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha} \right), \quad \left( M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha} \right)$$

nicht mehr direkt enthalten sind. Zunächst wird mit (8.111)

$$\begin{aligned} \left( M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha} \right) \bar{r}_{1,\alpha} &= \left( M_0^{12} - M_0^{21} \right) \left\{ -(\bar{d} \cdot \bar{r}_{1,2}) \bar{r}_{1,1} + (\bar{d} \cdot \bar{r}_{1,1}) \bar{r}_{1,2} \right\} \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \\ &+ \left( M_1^{12} - M_1^{21} \right) \left\{ -(\bar{d} \cdot \bar{d}_{1,2}) \bar{r}_{1,1} + (\bar{d} \cdot \bar{d}_{1,1}) \bar{r}_{1,2} \right\} \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} &= (M_1^{12} - M_1^{21}) \left\{ -(\bar{d} \cdot \bar{r}_{12}) \bar{d}_{11} + (\bar{d} \cdot \bar{r}_{11}) \bar{d}_{12} \right\} \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \\ &+ (M_2^{12} - M_2^{21}) \left\{ -(\bar{d} \cdot \bar{d}_{12}) \bar{d}_{11} + (\bar{d} \cdot \bar{d}_{11}) \bar{d}_{12} \right\} \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Entwicklungssätze für die vektoriellen Dreifachprodukte

$$\bar{d} \times (\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{11}), \bar{d} \times (\bar{r}_{12} \times \bar{d}_{11}), \bar{d} \times (\bar{d}_{12} \times \bar{r}_{11}), \bar{d} \times (\bar{d}_{12} \times \bar{d}_{11})$$

wird dann

$$\begin{aligned} (M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha}) \bar{r}_{1\alpha} + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} &= \\ &= \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \bar{d} \times \left\{ (M_0^{12} - M_0^{21}) (\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{11}) \right. \\ &+ (M_1^{12} - M_1^{21}) (\bar{r}_{12} \times \bar{d}_{11} + \bar{d}_{12} \times \bar{r}_{11}) \\ &+ (M_2^{12} - M_2^{21}) (\bar{d}_{12} \times \bar{d}_{11}) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Verwendet man hier noch die Definition (8.73)<sub>2</sub>, dann wird

$$(M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha}) \bar{r}_{1\alpha} + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \bar{d}_{1\alpha} = \frac{\bar{d} \times \bar{c}}{\bar{d} \cdot \bar{d}}$$

und (8.105)<sup>II</sup> lautet dann

$$\bar{b} = M_0^{33} \bar{d} + \frac{1}{2} \frac{\bar{d} \times \bar{c}}{\bar{d} \cdot \bar{d}}, \quad (8.120)$$

Dieses Zwischenergebnis vereinfacht sich aber weiter, denn wegen (8.119) ist

$$\bar{c} = \bar{0}, \quad (8.121)$$

so daß schließlich

$$\bar{b} = M_0^{33} \bar{d}. \quad (8.122)$$

Das hier entwickelte Ergebnis läßt jetzt einen besonders übersichtlichen Vergleich mit den aus den Invarianzforderungen gefundenen Bewegungsgleichungen 2. Art Gl. (8.75) mit (8.76) zu. Alle Größen, die in (8.75) und (8.120) durch gleiche Buchstaben bezeichnet sind, haben natürlich auch im Sinne des 3D-Ersatzproblems die gleiche Bedeutung. Der Unterschied im ersten

Term auf den rechten Seiten ( $\tilde{Q}$  und  $M_{0}^{33}$ ) ist für das folgende unbedeutend;  $\tilde{Q}$  ist in (8.75) eine noch unbestimmte Größe, für die entsprechend Kap. 8.2.2.4 die Existenz einer Stoffgleichung vorausgesetzt wird. Die zweiten Terme, die als Vektoren senkrecht zu  $\bar{d}$  stehen, unterscheiden sich allein durch den Faktor 1/2 (man beachte: die Bedingung (8.119) wird zunächst noch außer acht gelassen). Dieser Unterschied macht deutlich, daß die beiden Bedingungen (8.75) und (8.120) nicht identisch sind, selbst dann, wenn man  $\tilde{Q}$  als beliebig manipulierbar ansieht (z.B. wenn man  $\tilde{Q} = M_{0}^{33}$  setzt). Identität ließe sich nur erreichen, wenn sich aus anderen Gründen (als (8.119))

$$\bar{d} \times \bar{c} \equiv \bar{0}$$

erweisen sollte; solche Gründe liegen aber nicht vor.

In der bisherigen Analyse waren die Bedingungen (A2) zusammen mit der Bedingung (8.70) und die Bedingung (A3) zusammen mit der Hypothese (S. 148) über die Zusatzbelastungen unabhängig voneinander verfolgt worden.

Die Analyse zeigt einen wesentlichen Unterschied in den Bewegungsgleichungen 2. Art. Es stellt sich die Frage, welche Konsequenzen die Forderung nach der gleichzeitigen Erfüllung von (A2) und (8.70) sowie (A3) und (Hypothese S.148) hat. Danach muß (8.75) verträglich mit (8.120) sein. Dies ist dann und nur dann zu erreichen, wenn

$$\tilde{Q} \equiv M_{0}^{33} \tag{8.123}$$

und insbesondere

$$\bar{d} \times \bar{c} \equiv \bar{0} \tag{8.124}$$

Die erste Konsequenz stellt eine Interpretationsvorschrift für  $\tilde{Q}$  dar. Die zweite Konsequenz ist jetzt insbesondere im Zusammenhang mit der früher abgeleiteten Orthogonalitätsbedingung (8.74)

$$\bar{d} \cdot \bar{c} = 0 \tag{8.125}$$

zu sehen: Aus den beiden Bedingungen (8.124) und (8.125) folgt als hinreichende und notwendige Bedingung

$$\bar{c} = \bar{0} \tag{8.126}$$

dieses Ergebnis war aufgrund anderer Argumente, die zu (8.119) geführt haben, schon abgeleitet worden. Es sei hier schließlich noch angemerkt, daß sich aus (8.126) allein die Symmetrie der Momente (8.119) nicht ableiten läßt.

8.3.5 Reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung (Folgerung aus (8.92)<sub>5</sub>)

Die Bedingung (8.92)<sub>5</sub>

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \hat{q}_r - \left[ \hat{q}_r^+ \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \hat{q}_r^- \cdot \bar{N}^- \xi^- \right] = 0$$

besagt, daß die zusätzlichen rein thermischen Energiebeiträge innerhalb eines finiten Linienelements als Ganzes verschwinden. Die Auswertung dieser Bedingung ließe sich nun analog wie oben durch Verwendung des 3D-lokalen nicht-reduzierten Energiesatzes (7.7) durchführen, indem dieser nach  $\hat{r}$  aufgelöst wird und dann die Definition  $\hat{q}_r$  verwendet wird etc. Dieses Vorgehen erübrigt sich aber aufgrund der folgenden Betrachtungen. Die Bedingung (8.92)<sub>5</sub> gilt für jedes Linienelement; daher verschwindet dann auch das Integral über irgendeinen Teilbereich  $\mathcal{A}$  der Referenzfläche, d.h., mit (8.30) und (8.38) gilt

$$\hat{H}_r + \hat{H}_{qL} = 0. \tag{8.127}$$

Nach der allgemeinen integralen Energiegleichung (8.1) des erweiterten Problems ist aber

$$\hat{H}_r + \hat{H}_{qL} = \dot{E} + \dot{K} - \dot{W}_b - \dot{W}_L - \dot{W}_{CF} - H_r - H_{qCF} - H_{qL} - \hat{W}_b - \hat{W}_L - \hat{W}_L,$$

Da  $\hat{W} = 0$  verlangt wird, ist mit (8.127) natürlich auch

$$\hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_L = 0, \tag{8.128}$$

so daß

$$\hat{H}_r + \hat{H}_{qL} = \dot{E} + \dot{K} - \dot{W}_b - \dot{W}_L - \dot{W}_{CF} - H_r - H_{qCF} - H_{qL}. \tag{8.129}$$

Die Integralausdrücke auf der rechten Seite sind aber schon in Kap. 8.1 im einzelnen ermittelt worden. Demnach folgt aus der Bedingung (8.127) die Forderung nach dem Verschwinden der rechten Seite von (8.129). Dies ist aber nichts anderes als die in (8.52) niedergelegte 2D-Energiebilanzgleichung, für die sich natürlich sofort auch die 2D-lokale Form angeben läßt. Daher erübrigt sich eine explizite Auswertung von (8.92)<sub>5</sub> durch Integration der lokalen 3D-Energiegleichung. Diese 3D-Energiegleichung (8.52) enthält

natürlich noch die Größen  $\bar{b}$  und  $\bar{b}$  sowie die Beschleunigungen  $\ddot{\bar{r}}$  und  $\ddot{\bar{d}}$ . Mit den Ergebnissen (8.94) und (8.122) lassen sich diese eliminieren. Man erhält eine reduzierte Energiegleichung, die sich von der Bilanzgleichung (8.84) nur in den Termen

$$\begin{aligned} Q &\longrightarrow M_0^{33} \\ L^\alpha &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

unterscheidet:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \dot{\bar{e}} dA &= \int_{\mathcal{A}} \left\{ M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{, \alpha} \cdot \bar{r}_{, \beta} \right. \\ &\quad + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{, \alpha} \cdot \bar{r}_{, \beta} + \bar{r}_{, \alpha} \cdot \bar{d}_{, \beta}) \\ &\quad + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{, \alpha} \cdot \bar{d}_{, \beta} \\ &\quad + M_0^{3\beta} (\bar{r}_{, \beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{r}}_{, \beta}) \\ &\quad + M_1^{3\beta} (\bar{d}_{, \beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{, \beta}) \\ &\quad + M_0^{33} \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} \\ &\quad + \mathcal{E} - h_{, \beta}^\beta \\ &\quad \left. - [\bar{q}^+ \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + \bar{q}^- \cdot \bar{N}^- \xi^-] \right\} dA. \end{aligned} \tag{8.130}$$

Außerdem ist hier im Gegensatz zu (8.84) zu beachten, daß insbesondere

$$M_n^{\alpha\beta} = M_n^{\beta\alpha}, \quad n = 0, 1, 2.$$



#### 8.4 Diskussion

In diesem Abschnitt sollen die wesentlichsten, soweit erzielten Folgerungen aus den beiden Bedingungen (A2) und (A3) vergleichend gegenübergestellt werden.

Bei der Auswertung der Invarianzbedingung (A2) hinsichtlich der integralen Energiebilanzgleichung hat sich insbesondere gezeigt, daß die Invarianzbedingungen für sich genommen nicht ausreichen, um die Bewegungsgleichungen 2. Art herzuleiten; vielmehr mußte hier noch zusätzlich explizit verlangt werden, daß die gedachten Zusatzbelastungen keinen Beitrag zum Gesamtdrehimpuls eines finiten Linienelements (bezogen auf den Referenzpunkt) liefern darf. Diese Zusatzforderung wurde durch die "Unabhängigkeitsforderung" (S. 108) motiviert: Sie ist plausibel, wenn man bedenkt, daß der Drehimpulsatz der Schale ja weitere Bewegungsgleichungen für die kinematischen Variablen  $\vec{r}$  und  $\vec{d}$  liefern soll und diese Größen unabhängig von der Kenntnis der Zusatzeinwirkungen bestimmbar sein sollen. Aus dem reduzierten lokalen 2D-Drehimpulsatz (= Drehimpulsatz für finites Linienelement bezogen auf Referenzpunkt) lassen sich dann zwei hinreichende und notwendige Bedingungen ableiten, von denen die eine eine vektorielle Gleichung darstellt (Bewegungsgleichungen 2. Art) und die andere eine skalare Bedingung (Orthogonalitätsbedingung).

Die Bewegungsgleichungen 2. Art enthalten noch eine unbestimmte skalare Größe ( $\vec{Q}$  bzw.  $Q$ ). Um eine tautologische Argumentation zu vermeiden, dürfen die Bewegungsgleichungen 2. Art aber nicht als Definitionsgleichung für  $\vec{Q}$  bzw.  $Q$  aufgefaßt werden (vergl. S. 142); daher muß für  $\vec{Q}$  bzw.  $Q$  noch eine von den Bewegungsgleichungen 2. Art unabhängige Bestimmungsgleichung - eine Stoffgleichung - angebar sein. Darauf wird später (Teil 2) noch eingegangen werden.

Die Auswertung der Invarianzbedingung (A2) (zusammen mit der Zusatzforderung  $\hat{D}_{red} = \vec{0}$ ) führt auf insgesamt acht skalare Gleichungen:

##### Bewegungsgleichungen 1. Art:

(Gl. (8.26))  $\implies$  3 skalare Gleichungen

##### Bewegungsgleichungen 2. Art:

(Gl. (8.75) bzw. (8.82))  $\implies$  3 skalare Gleichungen

Orthogonalitätsbedingung:

(Gl. (8.74) bzw. (8.81))  $\implies$  1 skalare Gleichung

Reduzierte Energiebilanzgleichung:

(Gl. (8.84))  $\implies$  1 skalare Gleichung

Dem stehen folgende Feldgrößen, für die Lösungen gesucht werden, gegenüber

Unabhängig veränderliche Größen:

kinematisch  $\bar{\tau}, \bar{d}$   
 thermisch  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$  }  $\implies$  9 skalare Größen

Abhängig veränderliche Größen:

nichtsymmetrische Momente  
 $M_{0,1,2}^{\alpha\beta}, M_{1,2,0}^{\alpha\beta}, M_{2,0,1}^{\alpha\beta}$   
 $M_{0,1}^{\beta\alpha} \equiv Q_{0,1}^{\alpha}, M_{1,2}^{\beta\alpha} \equiv Q_{1,2}^{\alpha}, Q$  }  $\implies$  17 Größen

thermische Größen  
 $\xi, h^{\alpha}$  }  $\implies$  3 Größen

Es versteht sich, daß die abhängig Veränderlichen mit den unabhängig Veränderlichen (und deren Ableitung nach dem Flächenkoordinaten  $\theta^{\alpha}$ )<sup>x</sup> über konstitutive Gleichungen verknüpft sind, für die hier zunächst noch keine Einschränkungen gefordert sind. Auf diese Gleichungen wird in Teil 2 noch im einzelnen eingegangen.

Vergleichen wir die Orthogonalitätsbedingung mit den Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art sowie der reduzierten Energiebilanzgleichung, dann fällt auf, daß diese Bedingung neben mechanischen abhängig Veränderlichen nur kinematische Zustandsvariablen enthält. Sie stellt keine Differentialgleichung dar. Da die mechanischen abhängig Veränderlichen durch die konstitutiven Gleichungen mit den unabhängigen kinematischen und thermischen Zustandsgleichungen verknüpft sind, stellt die Orthogonalitätsbedingung eine Verknüpfung zwischen den kinematischen und thermischen Zustandsvariablen dar. Dies steht aber im Widerspruch zu der Vorstellung, daß die kinematischen und thermischen Zustandsvariablen lokal beliebig und unabhängig voneinander

<sup>x</sup> Hier wird nur der thermoelastische Fall betrachtet.

einstellbar sein sollen. Um dieser Vorstellung gerecht zu werden, müssen daher die in die Orthogonalitätsbedingung eingehenden Stofffunktionen  $M_n^{\alpha\beta}$ ,  $n = 0, 1, 2$  so beschaffen sein, daß die Orthogonalitätsbedingung identisch erfüllt wird. Die Orthogonalitätsbedingung (8.74) bzw. (8.81) stellt demnach eine Restriktion für die Stofffunktionen  $M_n^{\alpha\beta}$   $n = 0, 1, 2$  dar.

Unter Beachtung dieser Interpretation der Orthogonalitätsbedingung stehen als Bestimmungsgleichungen für die neun Größen  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{\Lambda}_n$ ,  $n = 0, 1, 2$  bisher nur sieben Differentialgleichungen zur Verfügung: Die Bewegungsgleichungen 1. Art (3 Gl.), die Bewegungsgleichungen 2. Art (3 Gl.) und die reduzierte Energiegleichung (1 Gl.).

Die Bedingung (A3), daß nämlich die Gesamtleistung der gedachten Zusatzeinwirkungen  $\hat{W}$  verschwinden soll, wie auch immer die aktuellen Einwirkungen beschaffen sein mögen bzw. welche Werte auch die Größen  $\dot{\bar{\tau}}$ ,  $\dot{\bar{d}}$ ,  $\dot{\bar{\tau}}_{,\alpha}$ ,  $\dot{\bar{d}}_{,\alpha}$  unabhängig voneinander annehmen, ist für sich genommen auch zu schwach, um weitere Konsequenzen zu entwickeln. Hier muß noch zusätzlich verlangt werden, daß bestimmte Integrale der gedachten Zusatzeinwirkungen oder in abgeschwächter Form bestimmte Kombinationen dieser Integrale (Hypothese S. 148) unabhängig von den Raten  $\dot{\bar{\tau}}$ ,  $\dot{\bar{d}}$ ,  $\dot{\bar{\tau}}_{,\alpha}$ ,  $\dot{\bar{d}}_{,\alpha}$  der kinematischen Variablen gewählt werden können. Die Kombinationen dieser Integrale der gedachten Zusatzeinwirkungen sind nicht adhoc gewählt, sondern sie stellen die Koeffizienten der Raten  $\dot{\bar{\tau}}$ ,  $\dot{\bar{d}}$  etc. im Leistungsausdruck  $\hat{W}$  (Gl. (8.91)) dar. Ohne diese Zusatzhypothese ließe sich natürlich die Forderung  $\hat{W} = 0$  auch dadurch identisch erfüllen, daß man alle integralen Zusatzgrößen bis auf beispielsweise  $\hat{\tau}_0$  beliebig vorgibt und die Bilanzbedingung  $\hat{W} = 0$  dann benutzt, um  $\hat{\tau}_0$  festzulegen. Allerdings wären dann aus der Bedingung (A3) für sich genommen keine weiteren Konsequenzen zu ziehen.

Die erste und letzte der Zusatzforderungen (8.92) lassen sich - wie oben beschrieben - einfach interpretieren. Die übrigen erlauben anscheinend keine einfache Interpretation; nur für den Fall, daß keine Zusatzvolumenmomente  $\hat{\ell}$  angenommen werden, d.h.

$$\hat{\ell}_n = 0, \quad n = 0, 1, 2$$

verbleibt die zweite Zusatzforderung (8.92)<sub>1</sub>, die dann als Forderung nach dem Verschwinden des Beitrags der gedachten Zusatzeinwirkungen zum Drehimpuls eines finiten Linienelements zu interpretieren ist.

Im Unterschied zu der Ableitung in Kap. 8.2 wird in Kap. 8.3 (Auswertung der Bedingung (A3) zusammen mit der Zusatzhypothese S. 148) explizit von den lokalen Bilanzgleichungen des dreidimensionalen Ersatzproblems Gebrauch gemacht. Diese Auswertung führt auf insgesamt 18 skalare Gleichungen:

Bewegungsgleichungen 1. Art:

(Gl. (8.94))  $\implies$  3 skalare Gleichungen

Zwischen diesen Gleichungen und den in Kap. 8.2 abgeleiteten Bewegungsgleichungen 1. Art Gl. (8.62) besteht kein Unterschied.

Bewegungsgleichungen 2. Art:

(Gl. (8.105)<sup>I</sup> bzw. (8.105)<sup>II</sup>  $\implies$  3 skalare Gleichungen  
oder (8.120) bzw. (8.122)

Hier besteht ein deutlicher Unterschied zu den früher abgeleiteten Bewegungsgleichungen (8.75) bzw. (8.82). Der Unterschied ist zunächst im ersten Term auf den rechten Seiten, u.z.  $\tilde{Q}$  und  $M^{33}$ , zu sehen; dieser Unterschied ist aber von geringer Bedeutung, da  $\tilde{Q}$  in (8.75) eine noch unbestimmte Größe ist, für die bisher noch keine Interpretation im Sinne der dreidimensionalen Theorie vorliegt; allerdings wird für die entsprechend Kap. 8.2.2.4 die Existenz einer Stoffgleichung vorausgesetzt. Von besonderem Interesse ist der zweite Term in (8.75) und bei dem Zwischenergebnis (8.120); diese unterscheiden sich nur durch den Faktor 1/2. Dieser Unterschied macht deutlich, daß die beiden Bedingungen (8.75) und (8.120) nicht identisch sind, selbst dann, wenn man die Unbestimmtheit von  $\tilde{Q}$  außer acht läßt und die Symmetriebedingung (8.119) noch nicht in (8.120) berücksichtigt. Die Symmetriebedingung (8.119) bzw.  $\bar{\tau} \equiv \bar{\sigma}$  führt dann schließlich dazu, daß der zweite Term in (8.120) herausfällt, im Gegensatz zu (8.75), wo zwingende Gründe für ein Verschwinden von  $\bar{\tau}$  oder  $\bar{d} \times \bar{\tau}$  nicht bestehen.

Einschränkungen für Momente

bzw. Symmetriebedingungen:

(Gl. (8.107) bis (8.110) bzw. (8.119))  $\implies$  4 x 3 bzw. 7 skalare Gleichungen

Ebenso wie die oben diskutierte Orthogonalitätsbedingung (8.74) stellen diese Gleichungen im Gegensatz zu den Bewegungsgleichungen und der reduzierten Energiegleichung keine Differentialgleichungen dar. Aus den gleichen Gründen, wie sie bei der Interpretation der Orthogonalitätsbedingung aufgeführt wurden,

müssen diese Bedingungen als Restriktionen für die Stofffunktionen aufgefaßt werden. Wie die Analyse gezeigt hat, enthalten die Bedingungen (8.107) bis (8.110) wohl redundante Aussagen; insbesondere hat aber die Analyse gezeigt, daß sich diese Restriktionen sehr einfach darstellen lassen, nämlich in der Form der Symmetriebedingungen (8.119) für die Momente. Diese Symmetrie führt zu einer Reduktion der Anzahl der erforderlichen Stoffgleichungen für die Momente  $M_n^{kl}$ ,  $n=0,1,2$  von 12 auf 9 Stoffgleichungen.

Reduzierte Energiebilanzgleichung:

(Gl. (8.130))  $\implies$  1 skalare Gleichung

Unter Beachtung der Interpretation der Symmetriebedingungen als Restriktionen für die Stoffgleichungen der Momente  $M_n^{kl}$  stehen als Bestimmungsgleichungen für die neun skalare Felder (je drei Komponenten von  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\alpha}$  sowie  $\Lambda_n$ ,  $n=0,1,2$ ) auch hier nur sieben Differentialgleichungen zur Verfügung.

In der bisherigen Darstellung waren die Bedingungen (A2) und (A3) nebeneinander analysiert worden, und es war gezeigt worden, daß jeweils mit bestimmten Zusatzforderungen zweidimensionale Bilanzgleichungen und Restriktionen für Stoffgleichungen abgeleitet werden können, in denen Zusatzeinwirkungen nicht mehr auftreten. Es stellt sich die Frage, ob die Bedingungen (A2) und (A3) ohne und mit den jeweiligen Zusatzforderungen miteinander verträglich sind. Es ergibt sich folgendes Bild:

- (1) Bedingung (A2) zusammen mit (A3) ohne jegliche Zusatzforderung.  
Die Unabhängigkeitsforderung ist nicht erfüllt.
- (2) Bedingung (A2) mit der Zusatzforderung  $\hat{D}_{red} = 0$ ; die Bedingung (A3) kann dabei automatisch erfüllt werden, indem die Beiträge zu der Zusatzleistung  $\hat{W}$  so zu wählen sind, daß sie sich kompensieren.  
Die Unabhängigkeitsforderung ist erfüllt.
- (3) Bedingung (A3) mit der Zusatzforderung (Hypothese S. 148) an die gedachten Einwirkungen. Die aus den Invarianzbedingungen (A2) folgenden Bedingungen

$$\hat{J} \stackrel{!}{=} \bar{0} \quad , \quad \hat{D}_s + \hat{D} = \hat{D}_s + \hat{D}_{red} \stackrel{!}{=} \bar{0}$$

werden ebenfalls erfüllt, wobei sich hier aber außerdem  $\hat{D}_{red} = \bar{0}$  als logische Folge ergibt und nicht gefordert wird. Die Unabhängigkeitsforderung ist erfüllt.

(4) Gleichzeitige Forderung von (A2) und (A3) einschließlich der jeweiligen Zusatzforderungen, d.h.  $\hat{D}_{red} = \bar{0}$  und die Hypothese (S. 148). Dies ist widerspruchsfrei möglich und ergibt dieselben Gleichungen wie unter (3).

Wie die Auswertung zeigt (Punkt (3)), gehen die Forderungen (8.92) über die im Zusammenhang mit den Invarianzbedingungen (A2) (einschließlich der Zusatzforderung  $\hat{D}_{red} = \bar{0}$ ) erzielten Konsequenzen hinaus. Dies äußert sich insbesondere in den abgeleiteten Symmetriebedingungen (8.119) für die Momente. Im Vergleich dazu liefert die Bedingung (A2) zusammen mit  $\hat{D}_{red} = \bar{0}$  nur die Orthogonalitätsbedingung (8.74) bzw. (8.81), aus der eine Symmetrie der Momente  $M^{kl}$  nicht zwingend ableitbar ist; falls aber die Symmetriebedingungen (8.119) erfüllt werden, dann ist auch die Orthogonalitätsbedingung erfüllt.

Die hier abgeleiteten Symmetriebedingungen sind in der Tat nicht trivial, denn für das dreidimensionale Ersatzproblem war vorausgesetzt worden, daß Volumenmomente  $\hat{Q}$  vorhanden sind; daher ist der Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor 2. Art nicht symmetrisch, so daß auch nichtsymmetrische Momente zu erwarten gewesen wären. Es ist interessant hier zu sehen, daß die Bedingung (A3) zusammen mit der Hypothese (S. 148) zu einer Symmetrie der Integrale  $M^{kl}$  der Spannungstensorkomponenten  $T^{kl}$  führt. Natürlich kann man von der Symmetrie der Momente ausgehend nicht auf die Symmetrie des Spannungstensors schließen. Für das Weitere soll die in Kap. 8.2 (s. Punkt (2)) bzw. in Kap. 8.3 (s. Punkt (3)) entwickelte Vorgehensweise als 1. bzw. 2. schalentheoretisches Konzept bezeichnet werden.

Die abgeleiteten zweidimensionalen Differentialgleichungen und Restriktionen für die Stoffgleichungen sind, welches schalentheoretische Konzept man wählt, logisch noch nicht geschlossen. Denn einmal fehlt noch die Angabe der konstitutiven Gleichungen (Stoffgleichungen), also den Verknüpfungen zwischen den unabhängig Veränderlichen  $\bar{\pi}, \bar{d}, \bar{\Lambda}_n$   $n=0,1,2$  und ihren Ableitungen nach den Flächenkoordinaten einerseits und den abhängig Veränderlichen etc. (S. 167) andererseits. Fügt man die konstitutiven Gleichungen zu der Liste der Gleichungen in Kap. 8.2 oder 8.3 hinzu, dann zeigt sich, daß auch jetzt noch nicht der "Bestimmtheitsforderung" (S. 106) genügt wird. Die beiden verschiedenen abgeleiteten Systeme von zweidimensionalen Differentialgleichungen und Restriktionen für die Stoffgleichungen sind also nicht nur durch die zweidimensionalen Stoffgleichungen zu ergänzen, sondern auch noch durch je zwei weitere zweidimensionale Differentialgleichungen.

In Analogie zum dreidimensionalen Feldproblem sind weitere Restriktionen für die Stoffgleichungen aus der integralen Entropiegleichung zusammen mit der Entropie-Forderung zu erwarten und hier ist auch der Schlüssel für die Klärung des Bestimmtheitsproblems zu suchen.

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen die zum Teil schon angedeuteten, nicht geklärten Fragen zusammengestellt werden:

- Durch welche weitere Forderungen sind die beiden schalentheoretischen Konzepte noch zu ergänzen, um "bestimmte" Differentialgleichungssysteme für  $\bar{\pi}$ ,  $\bar{d}$  und  $\int_n n=0,1,2$  zu bekommen?
- Welche allgemeine Struktur haben die zweidimensionalen Stoffgleichungen unter Beachtung der verschiedenen, bisher gefundenen Restriktionen, der integralen Entropiegleichung und der Entropie-Forderung?
- Führen das 1. und 2. schalentheoretische Konzept nach Auswertung der integralen Entropiegleichung und der Entropie-Forderung sowie nach Klärung der Bestimmtheitsfrage zu äquivalenten Schalentheorien, d.h. zu identischen Lösungen  $\bar{\pi}(\theta^\alpha, t)$ ,  $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ ,  $\int_n(\theta^\alpha, t)$  ?

Diesen Fragen widmet sich der zweite Teil der Abhandlung.

Anhang (1): Zur Transformation der Ortsvektoren zwischen zwei Beobachter-  
systemen; objektive Vektoren und Tensoren

Es werde ein Euklidischer Punktraum  $[66, 79]$  mit dem Ursprung  $\mathcal{O}$  und der (kartesischen) Basis  $\bar{e}_K$  betrachtet (Abb. 9). In diesem Punktraum werde eine andere Basis  $\bar{e}_K^*$  mit dem Ursprung  $\mathcal{O}^*$  gewählt, die durch eine zeitabhängige Koordinatentransformation mit  $\bar{e}_K$  verknüpft sei

$$\begin{aligned} \bar{e}_K^* &= \underline{Q}(t) \bar{e}_K = \bar{e}_K \underline{Q}^T = \bar{e}_K \underline{Q} = \underline{Q}^T \bar{e}_K \\ &= Q_{KH}(t) \bar{e}_H \end{aligned} \tag{A1.1}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= Q_{HN}(t) \bar{e}_H \otimes \bar{e}_N \\ \underline{Q} &= \underline{Q}^T = Q_{NH}(t) \bar{e}_H \otimes \bar{e}_N, \end{aligned} \tag{A1.2}$$

Die Projektion von  $\bar{e}_K^*$  auf  $\bar{e}_L$  ist also

$$\begin{aligned} \bar{e}_K^* \cdot \bar{e}_L &= \bar{e}_K \underline{Q} \bar{e}_L = Q_{KL}(t) \\ &= \bar{e}_K \underline{Q}^T \bar{e}_L, \end{aligned} \tag{A1.3}$$

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= Q_{MN} \bar{e}_M \otimes \bar{e}_N = \bar{e}_M \otimes \bar{e}_M^* \\ \underline{Q} &= \bar{e}_M^* \otimes \bar{e}_M, \end{aligned} \tag{A1.4}$$

Voraussetzungsgemäß sind  $\bar{e}_K$  und  $\bar{e}_K^*$  orthonormierte Basen

$$\begin{aligned} \bar{e}_K \cdot \bar{e}_L &= \delta_{KL} \\ \bar{e}_K^* \cdot \bar{e}_L^* &= \delta_{KL}, \end{aligned} \tag{A1.5}$$



Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{e}_k^* \cdot \bar{e}_l^* &= Q_{kH} \bar{e}_H Q_{LN} \bar{e}_N = Q_{kH} Q_{LN} \\ &= \bar{e}_k \underline{Q} \underline{Q}^T \bar{e}_l = \bar{e}_k \underline{Q}^T \underline{Q} \bar{e}_l, \end{aligned}$$

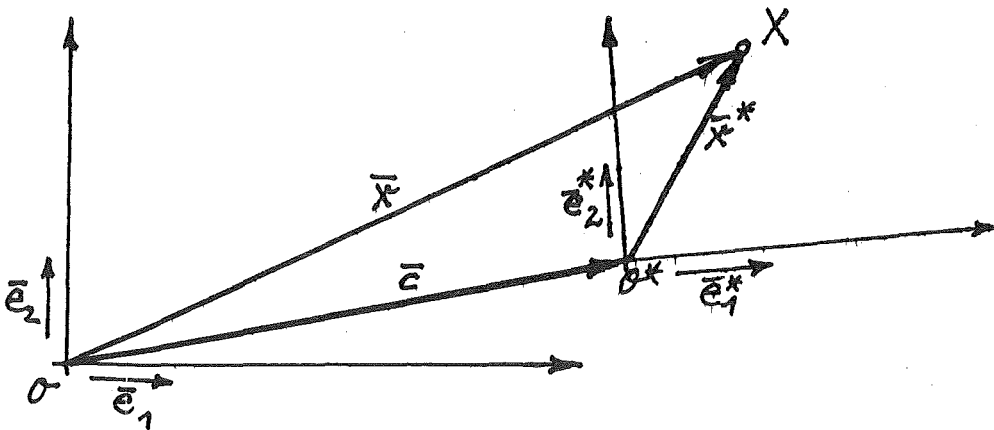
so daß also

$$Q_{kH} Q_{LN} = \delta_{kl}, \quad \underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{1}, \quad \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{1}, \quad (\text{A1.6})$$

Faßt man die zeitabhängigen (aber ortsunabhängigen) Transformationskoeffizienten  $Q_{MN}(t)$  symbolisch zu der Matrix  $[\underline{Q}]$  zusammen, dann gilt

$$\begin{aligned} [\underline{Q}][\underline{Q}]^T &= [\underline{1}], \quad [\underline{Q}]^T[\underline{Q}] = [\underline{1}], \\ [\underline{Q}]^{-1} &= [\underline{Q}]^T. \end{aligned}$$

Der momentane Ortsvektor eines materiellen Punktes  $X$  im Bezug auf die Basis  $\bar{e}_k$  sei  $\bar{X}$  und im Bezug auf  $\bar{e}_k^*$  sei er  $\bar{X}^*$ .



Dann gilt (siehe Skizze)

$$\bar{X}^* = \bar{X} - \bar{c}(t). \quad (\text{A1.7})$$

Dieser Schreibweise entspricht die Vorstellung, daß alle hier angegebenen Vektoren demselben Vektorraum angehören, denn sonst wäre eine Addition und Gleichsetzung nicht erklärt. Da die Basen  $\bar{e}_k$  und  $\bar{e}_k^*$  per definitionem demselben Vektorraum angehören, kann der Vektor  $\bar{x}^*$  sowohl bezüglich der Basis  $\bar{e}_k$  wie auch der Basis  $\bar{e}_k^*$  zerlegt werden. Hier soll die Zerlegung bezüglich der Basis  $\bar{e}_k^*$  erfolgen:

$$\bar{x}^* \cdot \bar{e}_k^* = : x_k^* \quad , \quad \bar{x}^* = x_k^* \bar{e}_k^* \quad (A1.8)$$

Mit der Zerlegung

$$(\bar{x} - \bar{c}) \cdot \bar{e}_k = x_k - c_k \quad (A1.9)$$

wird dann unter Beachtung von (A1.3)

$$(\bar{x} - \bar{c}) \cdot \bar{e}_k^* = (x_M - c_M) \bar{e}_M \cdot \bar{e}_k^* = (x_M - c_M) Q_{KM} \quad (A1.10)$$

Skalare Multiplikation von (A1.7) mit  $\bar{e}_k^*$  und Beachtung von (A1.8) bis (A1.10) liefert dann

$$x_k^* = Q_{KM}(t) (x_M - c_M(t)) \quad (A1.11)$$

diese Beziehung gibt die Verknüpfung zwischen den Komponenten der beiden Ortsvektoren  $\bar{x}$  und  $\bar{x}^*$  an, wenn diese jeweils auf die Bezugssysteme  $(O, \bar{e}_k)$  bzw.  $(O^*, \bar{e}_k^*)$  bezogen werden. Mit den Spaltenmatrizen  $[\bar{x}^*]$  und  $[\bar{x} - \bar{c}]$  läßt sich für (A1.11) auch schreiben

$$[\bar{x}^*] = [Q][\bar{x} - \bar{c}] \quad (A1.11)^I$$

Ferner kann (A1.11) noch auf die folgende Tensorform gebracht werden. Wir multiplizieren (A1.11) mit der Basis  $\bar{e}_k^*$  und verwenden (A1.9), so daß

$$\begin{aligned} x_k^* \bar{e}_k^* &= \bar{x}^* = Q_{KM} \bar{e}_k^* \bar{e}_M \cdot (\bar{x} - \bar{c}) \\ &= Q_{KM} \bar{e}_k^* \otimes \bar{e}_M (\bar{x} - \bar{c}). \end{aligned}$$

Mit

$$\underline{Q} := Q_{KH} \bar{e}_K^* \otimes \bar{e}_H \quad (\text{A1.12})$$

(man beachte den Unterschied zu  $\underline{Q}$  und  $\underline{Q}$ )

ist dann

$$\bar{x}^* = \underline{Q} (\bar{x} - \bar{c}), \quad (\text{A1.11})^{\text{II}}$$

$\underline{Q}$  ist hier ein gemischter Tensor mit den Komponenten  $Q_{KH}$ . Da vorausgesetzt war, daß  $\bar{e}_K$  und  $\bar{e}_K^*$  demselben Vektorraum angehören, gilt wegen (A1.1) und (A1.6), daß (A1.12) die Darstellung des Einheitstensors bei gemischten Basen darstellt, denn mit (A1.1) und (A1.6) läßt sich  $\underline{Q}$  auch als dyadisches Produkt in der Form

$$\underline{Q} = \bar{e}_H \otimes \bar{e}_H = \bar{e}_N^* \otimes \bar{e}_N \quad (\text{A1.12})^{\text{I}}$$

schreiben. Vergleicht man (A1.7) und (A1.11)<sup>II</sup>, dann ist deutlich, daß (A1.7) eine vom Bezugssystem unabhängige Darstellungsform ist, d.h. die hier auftretenden Vektoren können noch bezüglich der verschiedenen Basen zerlegt werden; dagegen bringt (A1.11)<sup>II</sup> zum Ausdruck, daß die Vektoren  $\bar{x}$  und  $\bar{x}^*$  schon bestimmten Bezugssystemen zuzuordnen sind, so daß (A1.11)<sup>II</sup> die Komponententransformation (A1.11) widerspiegelt. Die Form (A1.11)<sup>I</sup> bringt damit deutlicher zum Ausdruck, daß der Ortsvektor, der die Position eines materiellen Punktes angibt, eben relativ zu einem Bezugsrahmen  $(O, \bar{e}_K)$  oder  $(O^*, \bar{e}_K^*)$  dargestellt wird.

Man kann zu der Form (A1.11)<sup>II</sup> noch auf anderem Wege kommen. In der Sprechweise der modernen linearen Algebra sollen die beiden Beobachtersysteme zwei verschiedene Euklidische Punkträume bzw. Vektorräume darstellen [79].

Vektorräume können verschiedene Dimensionen haben, Die Abbildung der Vektoren des einen Vektorraumes auf den anderen erfolgt durch lineare Transformationen, also Tensoren, so daß die algebraische Struktur der Vektorräume erhalten bleibt [76]. In derartigen Vektorräumen lassen sich beliebig viele (linear unabhängige) Basisvektorsysteme angeben. Der Übergang von einem Basissystem

in ein anderes innerhalb eines Vektorraumes erfolgt durch (zeitunabhängige) Koordinatentransformation. Der Übergang von einem Vektorraum in einen anderen erfolgt mit Hilfe eines Transformationstensors  $\underline{T}$ , der eine gemischte Basis hat [76], z.B.

$$\underline{T} := T^{\alpha k} \bar{e}_\alpha^* \otimes \bar{e}_k$$

$$\bar{e}_\alpha^* : \text{Basisvektoren im Vektorraum } \mathcal{V}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \omega$$

$$\bar{e}_k : \text{Basisvektoren im Vektorraum } \mathcal{V}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega \neq n$$

Beispielsweise ist  $\bar{v}^*$ ,

$$\bar{v}^* = \underline{T} \bar{v}$$

$$\bar{v}^* = v^{\alpha} \bar{e}_\alpha^*, \quad \bar{v} = v^k \bar{e}_k,$$

die Abbildung von  $\bar{v}$  im Vektorraum  $\mathcal{V}_\alpha$ . Es ist klar, daß Vektoren, die verschiedenen Vektorräumen (verschiedener Dimension) angehören, nicht addiert werden können und daß aus ihnen kein Skalarprodukt gebildet werden kann.

Haben die beiden betrachteten Vektorräume gleiche Dimension (Abbildung  $\underline{T}$  ist ein Endomorphismus [76]), dann kann die Vorstellung zweier verschiedener Vektorräume beibehalten oder auch aufgegeben werden. Bei der obigen Darstellung (A1.1) bis (A1.11)<sup>I</sup> wurden die beiden Beobachtersysteme nicht als verschiedene Vektorräume aufgefaßt, d.h. das Skalarprodukt  $\bar{e}_\alpha^* \cdot \bar{e}_k$  war definiert.

In der Rationalen Mechanik faßt man dagegen häufig die beiden Beobachtersysteme als verschiedene Vektorräume (trotz gleicher Dimension) auf. Dieser Vorstellung entspricht die Formulierung (A1.11)<sup>II</sup>

$$\bar{x}^* = \underline{Q}(t) (\bar{x} - \bar{c}(t))$$

$$\underline{Q} = Q_{KM} \bar{e}_K^* \otimes \bar{e}_M, \quad \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{1}, \quad \underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{1}^*$$

Diese Transformation läßt sich auffassen als eine "Übersetzungsvorschrift" für die beiden "Bilder"  $\bar{x}$  und  $\bar{x}^*$  desselben physikalischen Objekts - nämlich Ortsvektor eines materiellen Punktes.<sup>x</sup> Der Begriff Ortsvektor bzw. Lage des materiellen Punktes wird hier durch eine Meßvorschrift definiert,

<sup>x</sup> Analogiebeispiel: Ein und derselbe Sachverhalt kann in verschiedenen Sprachen schriftlich dargestellt werden. Um die inhaltliche Identität zweier solcher Texte festzustellen, ist es notwendig, mindestens einen der Texte zu übersetzen, so daß beide Texte in derselben Sprache verglichen werden können.

die sich nicht bei Übergang von einem Beobachtersystem in ein anderes ändert.

Als nächstes soll hier das Transformationsverhalten des Ortsvektors in den Referenzkonfigurationen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}^*$  angegeben werden. Wie erwähnt, wird hier die Referenzkonfiguration dem jeweiligen Beobachtersystem angeheftet, so daß die beiden Referenzkonfigurationen  $\mathcal{R}$  (zugehörig zu  $S(\mathcal{O}, \bar{e}_k)$ ) und  $\mathcal{R}^*$  (zugehörig zu  $S^*(\mathcal{O}^*, \bar{e}_k^*)$ ) eine relative Starrkörperbewegung zueinander ausführen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit soll angenommen werden, daß zum Zeitpunkt  $t=0$ , zu dem der Körper seine Ausgangslage hat, sich die beiden Beobachtersysteme  $S(\mathcal{O}, \bar{e}_k)$  und  $S^*(\mathcal{O}^*, \bar{e}_k^*)$  decken (zusammenfallen). Sind zu diesem Zeitpunkt die Koordinaten eines materiellen Punktes  $X_k$  und  $X_k^*$ , dann gilt

$$X_k = X_k^* \quad , \quad t = 0. \quad (A1.13)$$

Da nun die Ausgangslagen der materiellen Punkte dem Beobachtersystem angeheftet sind, gilt die Beziehung

$$X_k = X_k^* \quad , \quad \text{für alle } t, \quad (A1.14)$$

Die Übersetzung dieser Beziehung in die direkte Tensorschreibweise ergibt sich wie folgt. Es sei

$$\bar{X} = X_k \bar{e}_k$$

der Ortsvektor der Referenzkonfiguration bezüglich  $S$ ; entsprechend ist

$$\bar{X}^* = X_k^* \bar{e}_k^*$$

der Ortsvektor bezüglich  $S^*$ . Nun sind

$$X_k = \bar{X} \cdot \bar{e}_k \quad , \quad X_k^* = \bar{X}^* \cdot \bar{e}_k^*$$

so daß mit (A1.1) aus (A1.14)

$$\bar{X}^* \otimes \bar{e}_k = \bar{X} \bar{e}_k$$

oder

$$(\bar{X}^* \otimes - \bar{X}) \cdot \bar{e}_k = 0$$

folgt. Daher ist der in der Klammer angegebene Ausdruck der Nullvektor; also gilt

$$\bar{X}^* \underline{Q} = \bar{X}$$

und mit (A1.6)<sub>3</sub> erhält man schließlich

$$\bar{X}^* = \underline{Q} \bar{X}. \quad (\text{A1.15})$$

Dies ist die Darstellung von (A1.14) in direkter Schreibweise. Für die Differentiale des Ortsvektors der Referenzkonfiguration gilt dann ganz entsprechend

$$d\bar{X}^* = \underline{Q} d\bar{X}, \quad dX_k^* = dX_k. \quad (\text{A1.16})$$

Dagegen folgt aus (A1.11)<sup>II</sup> für die Differentiale des Ortsvektors in der Momentanposition

$$d\bar{X}^* = \underline{Q} d\bar{X}, \quad dX_k^* = Q_{km} dX_m. \quad (\text{A1.17})$$

Fassen wir die beiden Beobachtersysteme als zwei zeitabhängige Koordinatensysteme desselben Vektorraumes auf, dann ist (A1.15) bzw. (A1.16) eine Transformation, die einer Drehung des Vektors  $\bar{X}$  bzw.  $d\bar{X}$  entspricht; da diese Drehung gleich der Relativedrehung von  $S^*$  bezüglich  $S$  ist, haben die Komponenten  $X_k^*$  bzw.  $dX_k^*$  und  $X_k$  bzw.  $dX_k$  zahlenmäßig die gleichen Werte.

Es ist also festzuhalten, daß sich der Ortsvektor der Momentanlage  $\bar{X}$  eines materiellen Punktes und der Ortsvektor der Referenzlage  $\bar{X}$  desselben materiellen Punktes durch verschiedene Transformationsgesetze transformieren, wenn vom Beobachtersystem  $S$  auf das Beobachtersystem  $S^*$  übergegangen wird.

Schließlich sei hier noch erwähnt, daß die gewählte direkte Notation für die Transformationsgesetze (A1.17) und (A1.16) mnemotechnisch zum Ausdruck bringen soll, daß die Komponenten der Differentiale  $d\bar{X}$  sich mit den Transformationskoeffizienten  $Q_{kl}(t)$  transformieren, während die Komponenten von  $d\bar{X}$  von

der Wahl des Beobachtersystems unabhängig sind. Es wurde daher in direkter Notation der durchstrichene Tensor  $\underline{Q}$  verwendet.

Es werde jetzt davon ausgegangen, daß bestimmte Skalare  $S$ , Vektoren  $\bar{v}$  und Tensoren  $\underline{t}$  sich bei Übergang von einem Beobachtersystem  $S$  in ein anderes Beobachtersystem  $S^*$  wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned} \text{Skalare:} & \quad S^* = S \\ \text{Vektoren:} & \quad \bar{v}^* = \underline{Q} \bar{v} \\ \text{Tensoren:} & \quad \underline{t}^* = \underline{Q} \underline{t} \underline{Q}^T. \end{aligned} \tag{A1.18}$$

Wie diese Transformationsvorschriften zeigen, geht in sie nur die relative Orientierung der beiden Beobachtersysteme (Vektorräume)  $S$  und  $S^*$  ein, die durch  $\underline{Q}(t)$  gegeben ist, nicht aber die anderen Aspekte der Relativbewegung (wie Translations- und Rotationsgeschwindigkeit und -beschleunigung). Diese Feststellung führt dazu, Skalare, Vektoren und Tensoren, die den Beobachtertransformationen (A1.18) genügen, als beobachterinvariant, rahmenindifferent oder kurz objektiv zu bezeichnen [66, 76]. Beispiele für objektive Größen sind

- Skalare: Dichte  $\rho$ , spez. innere Energie  $\epsilon$ , nicht aber die kinetische Energie pro Masseneinheit
- Vektoren: Spannungsvektor  $\bar{t}$ , nicht aber die Geschwindigkeit oder Beschleunigung und die Massenkraftdichte  $\bar{b}$
- Tensoren: Cauchyscher Spannungstensor  $\underline{t}$ , nicht aber der Deformationsgradiententensor  $\underline{F}$

Die Aussage, daß ein Skalar, Vektor oder Tensor objektiv ist, ist nicht Definitionssache, sondern beinhaltet einen physikalischen Sachverhalt; sie gehört mit zu den Axiomen der Theorie.

In Komponentendarstellung sind die Beobachtertransformationen (A1.18)<sub>2,3</sub> nicht völlig eindeutig. Es muß hier streng unterschieden werden zwischen der Darstellung der Vektoren  $\bar{v}$  und Tensoren  $\underline{t}$  in einem Koordinatensystem,

das mit dem jeweiligen Beobachtersystem (starr) verbunden ist und einem mitgeschleppten Koordinatensystem, das an der Bewegung und Deformation des Körpers teilnimmt. Wir betrachten zunächst irgendein krummliniges Koordinatensystem mit der Basis<sup>x</sup>  $\bar{g}_k$  und den Koordinaten  $x^k$ , das im Beobachtersystem  $S$  (Vektorraum) aufgespannt ist. Der Zusammenhang mit der kartesischen Basis  $\bar{e}_M$  und den kartesischen Koordinaten  $z^k$  sei gegeben durch

$$\bar{g}_k = A^M_k \bar{e}_M, \quad x^k = f^k(z^k); \quad (\text{A1.19})^I$$

die Transformationskoeffizienten  $A^M_k$  sind hier zeitunabhängige, aber ortsabhängige Größen. Entsprechend gelte im Beobachtersystem  $S^*$

$$\bar{g}_k^* = A^{*M}_k \bar{e}_M^*, \quad x^{*k} = f^{*k}(z^{*k}). \quad (\text{A1.19})^{II}$$

Die Invertierung der Koordinatentransformation liefert

$$\begin{aligned} \bar{e}_M &= \bar{A}^{-1k}_M \bar{g}_k, & \bar{A}^{-1k}_M A^N_k &= \delta^N_M \\ \bar{e}_M^* &= \bar{A}^{-1k}_M \bar{g}_k^*, & \bar{A}^{-1k}_M A^{*N}_k &= \delta^N_M. \end{aligned} \quad (\text{A1.20})$$

Dann wird aus<sup>xx</sup> (A1.12) mit (A1.20)

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= Q^{MN} \bar{e}_M^* \otimes \bar{e}_N \\ &= \underbrace{Q^{MN} \bar{A}^{-1k}_M \bar{A}^{-1l}_N}_{Q^{kl}} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l \\ &= Q^{kl} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l \\ &= Q^{kl} g_{lm} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}^m \\ &= Q^k_m \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}^m. \end{aligned} \quad (\text{A1.21})$$

<sup>x</sup> Man beachte, daß hier kleine lateinische Buchstaben als Indizes benutzt werden  $\hat{=}$  räumliches oder Eulersches Koordinatensystem.

<sup>xx</sup> In der folgenden Darstellung werden sowohl kartesische wie auch krummlinige Basisvektoren verwendet. Wegen der bei krummlinigen Koordinaten üblichen Summationsvereinbarung über hoch- und tiefgestellte Indizes werden hier die kartesischen Komponenten von  $\underline{Q}$ , d.i.  $Q_{MN}$ , mit hochgestellten Indizes geschrieben.



Man beachte hier, daß der erste Index von  $Q^{kl}$  mit der Metrik  $g^{kl}$  im Beobachtersystem  $S^*$  und der zweite Index mit der Metrik  $g_{mn}$  im Beobachtersystem  $S$  heruntergezogen wird.

Der Vektor  $\bar{v}$  bzw.  $\bar{v}^*$  werde jetzt bezüglich der Basis  $\bar{g}_k$  bzw.  $\bar{g}_k^*$  zerlegt

$$\bar{v} = v^k \bar{g}_k, \quad \bar{v}^* = v^{*k} \bar{g}_k^*. \quad (\text{A1.22})$$

Mit (A1.18)<sub>2</sub> wird dann

$$\begin{aligned} \bar{v}^* &= v^{*k} \bar{g}_k^* = Q v^k \bar{g}_k \\ &= Q^k_m \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}^{om} v^l \bar{g}_l \\ &= Q^k_m v^m \bar{g}_k^*, \end{aligned} \quad (\text{A1.23})$$

so daß

$$v^{*k} = Q^k_m v^m; \quad (\text{A1.24})$$

dies ist die (A1.18)<sub>2</sub> entsprechende Komponentendarstellung, wenn der Vektor  $\bar{v}$  in irgendeinem mit dem Beobachtersystem  $S$  fest verbundenen Koordinatensystem (Basis  $\bar{g}_k$  und Koordinaten  $x^k$ ) dargestellt wird.

Die Komponentendarstellung von (A1.18)<sub>3</sub> erhält man wie folgt, wenn der Tensor  $\underline{t}$  bezüglich eines im Beobachtersystem festen Koordinatensystems dargestellt wird:

$$\underline{t} = t^{kl} \bar{g}_k \otimes \bar{g}_l, \quad \underline{t}^* = t^{*kl} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l^*. \quad (\text{A1.25})$$

Mit (A1.25) und (A1.21) wird aus (A1.18)<sub>3</sub>

$$\begin{aligned} \underline{t}^* &= t^{*kl} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l^* = Q^k_m \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}^m t^{rs} \bar{g}_r \otimes \bar{g}_s Q^l_n \bar{g}^n \otimes \bar{g}_l^* \\ &= Q^k_m t^{mn} Q^l_n \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l^*, \end{aligned} \quad (\text{A1.26})$$

so daß die (A1.18)<sub>3</sub> entsprechende Komponentendarstellung die Form

$$\underline{t}^{*kl} = Q^k_m t^{mn} Q^l_n \quad (\text{A1.27})$$

hat. Ergänzend sei noch angemerkt, wie die Basen  $\bar{g}_k$  und  $\bar{g}_k^*$  miteinander verknüpft sind. Mit (A1.19)<sup>II</sup> und (A1.1) wird

$$\bar{g}_k^* = A^{*H}_k \bar{e}_H^* = \underline{Q} A^{*H}_k \bar{e}_H \quad (\text{A1.28})$$

und mit (A1.20)<sub>1</sub> erhält man daraus

$$\bar{g}_k^* = \underline{Q} A^{*H}_k \bar{A}^{\prime l}_H \bar{g}_l. \quad (\text{A1.29})$$

Dies ist die gesuchte Verknüpfung; sie bekommt eine einfachere und übersichtliche Form, wenn zu dem Zeitpunkt, zu dem die beiden kartesischen Koordinatensysteme  $\bar{e}_H$  und  $\bar{e}_H^*$  zur Deckung kommen, auch  $\bar{g}_k$  und  $\bar{g}_k^*$  sich decken. Dann gilt nämlich

$$A^{*H}_k = A^H_k, \quad (\text{A1.30})$$

so daß

$$A^{*H}_k \bar{A}^{\prime l}_H = \delta^l_k$$

und daher

$$\bar{g}_k^* = \underline{Q} \bar{g}_k. \quad (\text{A1.31})$$

Wegen (A1.1)<sub>1</sub> ist dieses Ergebnis natürlich nicht verwunderlich.

Eine ganz andere Komponentendarstellung von (A1.18)<sub>2</sub> und (A1.18)<sub>3</sub> erhält man, wenn die den Momentanzustand beschreibenden Vektoren und Tensoren in einem mitgeschleppten Koordinatensystem dargestellt werden. Die Basis eines mitgeschleppten Koordinatensystems im Beobachtersystem  $S^1$  bzw.  $S^{1*}$  ist definiert als

$$\bar{g}_k = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial X^k} = \bar{x}^0_{,k}$$

bzw.

$$\bar{g}_k^* = \frac{\partial \bar{x}^{0*}}{\partial X^k} = \bar{x}^{0*}_{,k} ,$$

(A1.32)

so daß wegen (A1.11)<sup>II</sup> und  $\bar{x}^0 \equiv \bar{x}^0$

$$\bar{g}_k^* = Q \bar{g}_k$$

(A1.33)

gilt. Wir stellen jetzt  $\bar{g}_k$  und  $\bar{g}_k^*$  in der kartesischen Basis des jeweiligen Beobachtersystems dar; dann ist

$$\bar{g}_k = B^M_k \bar{e}_M$$

(A1.34)

$$\bar{g}_k^* = \bar{B}^{*M}_k \bar{e}_M^* .$$

Im Unterschied zu den Transformationskoeffizienten  $A^M_k$  und  $A^{*M}_k$  sind  $B^M_k$  und  $\bar{B}^{*M}_k$  orts- und zeitabhängige Transformationskoeffizienten. Die Invertierung von (A1.34) ergibt

$$\begin{aligned} \bar{e}_M &= \bar{B}^{*K}_M \bar{g}_K , & \bar{B}^{*K}_M B^N_K &= \delta^N_M \\ \bar{e}_M^* &= \bar{B}^{*K}_M \bar{g}_K^* , & \bar{B}^{*K}_M B^N_K &= \delta^N_M . \end{aligned}$$

(A1.35)

Damit wird

$$Q = Q^{KL} \bar{e}_K \otimes \bar{e}_L = \underbrace{Q^{KL} \bar{B}^{*M}_K \bar{B}^{*N}_L}_{=: Q^{MN}} \bar{g}_K^* \otimes \bar{g}_L$$

(A1.36)

also

$$Q = Q^{MN} \bar{g}_M^* \otimes \bar{g}_N .$$

Mit der Beobachtertransformation (A1.33) wird jetzt aber

$$\underline{Q} = \mathbb{Q}^{MN} \bar{g}_M^* \otimes \bar{g}_N = \mathbb{Q}^{MN} \underline{Q} (\bar{g}_M \otimes \bar{g}_N). \quad (\text{A1.37})$$

Da der Tensor  $\underline{Q}$  auf beiden Seiten steht, muß  $\mathbb{Q}^{MN} \bar{g}_M \otimes \bar{g}_N$  gleich dem Einheitsstensor sein, d.h.

$$\mathbb{Q}^{MN} \bar{g}_M \otimes \bar{g}_N = \underline{1} = g^{MN} \bar{g}_M \otimes \bar{g}_N. \quad (\text{A1.38})^I$$

Damit folgt aber, daß

$$\mathbb{Q}^{MN} = Q^{KL} \bar{B}_K^* \bar{B}_L^{-1} \stackrel{!}{=} g^{MN} = g^{NM}. \quad (\text{A1.38})^{II}$$

$\mathbb{Q}^{MN}$  ist also gleich den kontravarianten Metrikkoeffizienten des mitgeschleppten Koordinatensystems. Stellt man nun in der Beobachtertransformation (A1.18)<sub>2+3</sub> den Vektor  $\bar{v}$  und den Tensor  $\underline{t}$  im mitgeschleppten Koordinatensystem dar, wie es jeweils in den beiden Beobachtersystemen definiert wird, dann ist

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v^k \bar{g}_k, & \bar{v}^* &= v^{*k} \bar{g}_k^* \\ \underline{t} &= t^{kl} \bar{g}_k \otimes \bar{g}_l, & \underline{t}^* &= t^{*kl} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l^*, \end{aligned} \quad (\text{A1.39})$$

dann wird aus (A1.18)<sub>2+3</sub> mit (A1.36)<sub>2</sub>

$$\begin{aligned} \bar{v}^* &= v^{*k} \bar{g}_k^* = \underline{Q} \bar{v} = \mathbb{Q}^{MN} \bar{g}_M^* \otimes \bar{g}_N v^L \bar{g}_L \\ &= \mathbb{Q}^{MN} g_{NL} v^L \bar{g}_M^* \end{aligned}$$

$$\underline{t}^* = t^{*kl} \bar{g}_k^* \otimes \bar{g}_l^* = \underline{Q} \underline{t} \underline{Q}^T \quad (\text{A1.40})$$

$$= \mathbb{Q}^{MN} \bar{g}_M^* \otimes \bar{g}_N t^{KL} \bar{g}_K \otimes \bar{g}_L \mathbb{Q}^{RS} \bar{g}_S \otimes \bar{g}_R^*$$

$$= \mathbb{Q}^{MN} g_{NK} g_{LS} \mathbb{Q}^{RS} t^{KL} \bar{g}_M^* \otimes \bar{g}_R^*.$$

Wegen (A1.38)<sup>II</sup> wird aber

$$\mathcal{Q}^{MN} g_{NL} = \delta_L^M, \quad (\text{A1.41})$$

so daß

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}}^* &= v^{*K} \underline{\underline{g}}_K^* = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{v}} = v^K \underline{\underline{g}}_K^* \\ \underline{\underline{t}}^* &= t^{*KL} \underline{\underline{g}}_K^* \otimes \underline{\underline{g}}_L^* = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{t}} \underline{\underline{Q}}^T = t^{KL} \underline{\underline{g}}_K^* \otimes \underline{\underline{g}}_L^*; \end{aligned} \quad (\text{A1.42})$$

die Komponentendarstellung ist also

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}}^{*K} &= v^K \\ \underline{\underline{t}}^{*KL} &= t^{KL}, \end{aligned} \quad (\text{A1.43})$$

d.h. bei einer Darstellung im mitgeschleppten Koordinatensystem sind die Komponenten von Vektoren bzw. Tensoren numerisch gleich. Dies ist ein Ergebnis, was naturgemäß zu erwarten war, denn es gibt (objektiv gesehen) nur ein mitgeschlepptes Koordinatensystem, aber natürlich beliebig viele Beobachtersysteme, in denen dieses mitgeschleppte Koordinatensystem dargestellt werden kann; für die Komponenten ist dies aber ohne Bedeutung.

## Anhang (2): Bemerkungen zum Forminvarianzprinzip

Es mag vielleicht auffallend sein, daß hier im Rahmen der nichtrelativistischen Kontinuumsphysik ein Forminvarianzprinzip benützt wird, das eigentlich ein wesentlicher Ausgangspunkt für die allgemeine Relativitätstheorie ist [46, 97]. Abgesehen von der Tatsache, daß sich hier die Entwicklung auf eigentlich orthogonale (i.e. starre) Beobachtertransformationen beschränkt, bedarf dies eines Kommentars mit dem Ziel, die wesentlichen Unterschiede des Forminvarianzprinzips im nichtrelativistischen und relativistischen Bereich anzudeuten.

Wir gehen aus von einem Beobachtersystem, in dem die klassischen Massenerhaltungs-, Energie-, Impuls und Drehimpulssätze bekannt sind und gelten sollen. Es war schon in Kap. 4.2.1 darauf hingewiesen worden, daß innerhalb eines Beobachtersystems verschiedene Koordinatensysteme aufgespannt werden können. Kartesische Koordinatensysteme sind hier durch zeitunabhängige (eigentlich) orthogonale Koordinatentransformationen miteinander verknüpft und krummlinige Koordinatensysteme durch beliebige zeitunabhängige Koordinatentransformationen. Da die physikalischen Gesetze unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems gelten bzw. in allen Koordinatensystemen innerhalb eines Beobachtersystems dieselben sind, sind diese verschiedenen Koordinatensysteme als gleichberechtigt anzusehen. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die physikalischen Gesetze forminvariant gegenüber zeitunabhängigen Koordinatentransformationen sind, ebenso wie die Relationen der (Euklidischen) Geometrie.\* Forminvarianz heißt, daß die funktionale Form der Prinzipie in allen Koordinatensystemen dieselben sind [74]. Diese Forderung wird automatisch dadurch erfüllt, daß physikalische Größen als Skalare, Vektoren und Tensoren (bzw. Tensoren 0., 1., 2. ... Stufe) dargestellt werden, so daß alle physikalischen Gesetze in tensorieller Form geschrieben werden. Tensorielle Größen sind gerade so definiert, daß sie die gewünschte Invarianzeigenschaft bei Übergang von einem Koordinatensystem auf ein anderes besitzen. Die häufig und auch hier verwendete Methode besteht darin, daß Tensoren ohne Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem definiert werden, indem sie durch ein indexfreies Symbol charakterisiert werden. z.B.  $\vec{v}$  (Vektor) oder  $\underline{t}$  (Tensor).

---

\* Nach Einstein [97] bringt dieses Postular die "Isotropie und Homogenität des Raumes" zum Ausdruck. Eringen bezeichnet dies als Koordinateninvarianz [41].

Die Invarianzeigenschaft dieser Größen drückt sich gerade dadurch aus, daß hier ein und dasselbe Symbol für alle Koordinatensysteme verwendet wird. Die Zerlegung der Vektoren oder Tensoren bezüglich der Basis der jeweiligen Koordinatensysteme und die Äquivalenz dieser Zerlegungen führt dann zu den Transformationsformeln für die Komponentendarstellungen der Vektoren und Tensoren. Diese Transformationsregeln stellen bekanntlich eine lineare, homogene Verknüpfung zwischen den Vektor- bzw. Tensorkomponenten dar. Daraus folgt, daß Tensoren, deren sämtliche Komponenten in einem Koordinatensystem verschwinden, auch in jedem anderen Koordinatensystem desselben Beobachtersystems verschwindende Komponenten haben.

Der Übergang von einem Beobachtersystem auf ein anderes darf nicht mit einer Koordinatentransformation innerhalb eines Beobachtersystems verwechselt werden, denn Beobachtersysteme führen ja per definitionem (starre) Relativbewegungen gegeneinander aus. Dieses kann als eine zeitabhängige Koordinatentransformation aufgefaßt werden. Bei diesem Beobachterwechsel transformieren sich die Geschwindigkeit und die kinetische Energie sowie die Beschleunigung nicht wie objektive Skalare oder Vektoren (Anhang 1). Daher können die Komponenten dieser Größen in einem Beobachtersystem wohl verschwinden, sie verschwinden aber nicht in einem anderen Beobachtersystem. Bei einer (zeitunabhängigen) Koordinatentransformation ist dies dagegen gewährleistet. Dies zeigt einen wesentlichen Unterschied zwischen Koordinaten- und Beobachtertransformationen.

Aufgrund der kinematischen Transformationsgesetze und der Annahme, daß sich die Kontaktkräfte - d. s. die Spannungen - wie objektive Vektoren bzw. Tensoren bei Beobachterwechsel transformieren, sowie der Forderung, daß der aus dem Energiesatz abgeleitete Impulssatz ebenfalls forminvariant ist, ergab sich, daß die Massenkraftdichte  $\bar{b}$  nicht objektiv ist; allerdings zeigte sich mit (4.65), daß die Differenz der Massenkraftdichte und Beschleunigung  $(\bar{b} - \ddot{\bar{p}})$  sich wie ein objektiver Vektor transformiert. Daher stellt der im System  $S^*$  wie in einem "abgeschlossenen Kasten" sitzende Beobachter eine andere Massenkraftfeldstärke fest als der Beobachter im System  $S$ , wenn in beiden Beobachtersystemen die Massenkraftfeldstärke nach derselben Meßvorschrift bestimmt wird: Die Massenkraftfeldstärke ist gleich der Beschleunigung, die ein freier

Probekörper (Punktmasse) erfährt.<sup>x</sup> Für den Beobachter innerhalb des Systems  $S^*$  (im Kasten  $S^*$ ) ist es daher meßtechnisch mit den Gesetzen der Mechanik<sup>xxx</sup> nicht möglich zu unterscheiden, ob diese Änderung des Massenkraftfeldes auf eine Änderung der gravitierenden Massen oder auf die Relativbewegung seines Bezugrahmens zurückzuführen ist [98, 99]. Abgesehen von der Frage der "Ursache" der Änderung des Massenkraftfeldes ist man daher nicht gehindert, auch in  $S^*$  das so bestimmte Massenkraftfeld als real anzusehen. Dies begründet die hier gemachte Voraussetzung der physikalischen Gleichberechtigung des relativ zu  $S$  beschleunigt bewegten Beobachtersystems  $S^*$  (Äquivalenzprinzip [97, 98]).

Wenn nun Beobachter in verschiedenen Beobachtersystemen miteinander Informationen austauschen können, dann werden sie feststellen, daß in bestimmten Beobachtersystemen die Massenkraftfelder eine besonders einfache Form erhalten. Dies sind die Inertialsysteme und alle relativ zu diesen unbeschleunigt bewegten Beobachtersystemen. Bei der hier gewählten Betrachtungsweise sind also Inertialsysteme durch ein Einfachheitskriterium für das Massenkraftfeld ausgezeichnet [98, S. 295].

Die durchgeführte Entwicklung und die obigen Erläuterungen erfolgten im Rahmen der nichtrelativistischen Kontinuumsmechanik, wobei aber von dem Begriff des absoluten Bezugs- oder Beobachtersystems und dem von Scheinkräften infolge der Relativbewegung von Beobachtersystemen nicht Gebrauch gemacht wird. Ein wesentlicher Aspekt dieser klassischen Theorie ist die für alle Beobachtersysteme und Raumpunkte gleiche Zeitskala. Infolge dieser Zeitdefinition gibt es neben den Größen, die sich bei Beobachtertransformationen (zeitabhängige Koordinatentransformationen) wie objektive Tensoren 0., 1., 2. ... Stufe transformieren, auch nichtobjektive Tensoren (z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Massenkräfte); deren Komponenten transformieren sich nur dann wie Tensorkomponenten, wenn zeitunabhängige Koordinatentransformationen innerhalb eines Beobachtersystems vorliegen.

Die Aufgabe des absoluten Zeitbegriffes in der Relativitätstheorie erlaubt dagegen sämtliche physikalische Größen auf objektive Tensoren 0., 1., 2. ... Stufe zurückzuführen, so daß alle physikalischen Gesetze gegenüber beliebigen zeitabhängigen Koordinatentransformationen forminvariant sind. Der in der nicht-relativistischen Mechanik notwendige Unterschied zwischen (zeitunabhängigen) Koordinatentransformationen innerhalb eines Beobachtersystems und Beobachtertransformationen entfällt damit, denn zeitabhängige Transformationen erfolgen nach denselben mathematischen Regeln wie zeitunabhängige.

---

<sup>x</sup> Hier ist natürlich die Gleichheit von schwerer und träger Masse impliziert.  
<sup>xxx</sup> Die Heranziehung elektromagnetischer Erscheinungen ändert nichts an dieser Tatsache [98]



Anhang 3: Leistung der hydrostatischen Druckkräfte auf den Schalen-  
laibungen

Der mit (8.9) nur formal angegebene Leistungsbeitrag  $W_L$  der hydrostatischen Druckkräfte errechnet sich im einzelnen wie folgt. Es ist

$$W_L = \oint_{O^+} (-p^+) \bar{n}^+ \cdot \dot{\bar{p}}^+ dO^+ + \oint_{O^-} (-p^-) \bar{n}^- \cdot \dot{\bar{p}}^- dO^-; \quad (A3.1)$$

äußere Laibungsfläche                      innere Laibungsfläche

in dieser Darstellung ist die Integration in der Momentankonfiguration auszuführen. Hier sind

$p^+$   $p^-$  die hydrostatischen Drücke auf der äußeren (+) bzw. inneren (-) Laibungsfläche,

$\bar{p}^+$ ,  $\bar{p}^-$  der momentane Ortsvektor eines materiellen Punktes auf der äußeren bzw. inneren Laibungsfläche,

$\dot{\bar{p}}^+$ ,  $\dot{\bar{p}}^-$  die entsprechende Geschwindigkeit eines materiellen Punktes auf den Laibungsflächen,

$\bar{n}^+$ ,  $\bar{n}^-$  die äußeren Einheitsnormalenvektoren der Laibungsflächen in der Momentankonfiguration,

$dO^+$ ,  $dO^-$  die Flächenelemente der Laibungsflächen in der Momentankonfiguration

Mit (7.1) wird

$$\begin{aligned} \bar{p}^+ &= \bar{r}(\theta^1, \theta^2, t) + s^+(\theta^1, \theta^2) \bar{d}(\theta^1, \theta^2, t) \\ \bar{p}^- &= \bar{r}(\theta^1, \theta^2, t) - s^-(\theta^1, \theta^2) \bar{d}(\theta^1, \theta^2, t), \end{aligned} \quad (A3.2)$$

wobei besonders zu beachten ist, daß  $s^+$  und  $s^-$  keine Funktionen der Zeit sind; die zeitlichen Änderungen der Schalendicke sind hier nur in  $\bar{d}$  enthalten. Damit sind

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}^+ &= \dot{\bar{r}} + s^+ \dot{\bar{d}} \\ \dot{\bar{p}}^- &= \dot{\bar{r}} - s^- \dot{\bar{d}} \end{aligned} \quad (A3.3)$$

Die Ableitungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{,\alpha}^+ &= \bar{r}_{,\alpha} + s^+ \bar{d}_{,\alpha} + s_{,\alpha}^+ \bar{d} \\ \bar{p}_{,\alpha}^- &= \bar{r}_{,\alpha} - s^- \bar{d}_{,\alpha} - s_{,\alpha}^- \bar{d} \end{aligned} \right\} \alpha = 1, 2 \quad (\text{A3.4})$$

sind Tangentenvektoren der äußeren bzw. inneren Laibungsflächen. Daher sind die äußeren Einheitsnormalenvektoren

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}^+ &= \frac{\bar{p}_{,1}^+ \times \bar{p}_{,2}^+}{|\bar{p}_{,1}^+ \times \bar{p}_{,2}^+|} \\ \bar{n}^- &= -\frac{\bar{p}_{,1}^- \times \bar{p}_{,2}^-}{|\bar{p}_{,1}^- \times \bar{p}_{,2}^-|} \end{aligned} \right\} (\text{A3.5})$$

Mit (A3.4) wird

$$\begin{aligned} \bar{p}_{,1}^+ \times \bar{p}_{,2}^+ &= (\bar{r}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) + (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}) s_{,2}^+ + (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}_{,2}) s^+ \\ &\quad + (\bar{d}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) s^+ + (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}) s^+ s_{,2}^+ + (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}_{,2}) (s^+)^2 \\ &\quad + (\bar{d} \times \bar{r}_{,2}) s_{,1}^+ + (\bar{d} \times \bar{d}_{,2}) s^+ s_{,1}^+ . \end{aligned} \quad (\text{A3.6})$$

Die differentiellen Vektoren

$$\bar{p}_{,\alpha}^+ d\theta^\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

spannen ein Flächenelement der Größe

$$dO^+ = |\bar{p}_{,1}^+ \times \bar{p}_{,2}^+| d\theta^1 d\theta^2$$

in der äußeren Laibungsfläche  $O^+$  (Momentankonfiguration) auf. Mit dem Flächenelement  $dA$  der Referenzfläche in der Ausgangskonfiguration ist nach (6.78)

$$d\theta^1 d\theta^2 = \frac{1}{J_A} dA \quad (\text{A3.7})$$

so daß

$$dO^+ = \left| \bar{p}_{1,1}^+ \times \bar{p}_{1,2}^- \right| \frac{dA}{\sqrt{A}}$$

und

$$\bar{n}^+ dO^+ = (\bar{p}_{1,1}^+ \times \bar{p}_{1,2}^+) \frac{dA}{\sqrt{A}}.$$

} (A3.8)

Also wird der erste Term in (A3.1)

$$\begin{aligned} \int_{O^+} (-p^+) \bar{n}^+ \cdot \dot{\bar{p}}^+ dO^+ &= \int_{dA} (-p^+) (\bar{p}_{1,1}^+ \times \bar{p}_{1,2}^+) \cdot \dot{\bar{p}}^+ \frac{dA}{\sqrt{A}} \\ &= \int_{dA} (-p^+) (\bar{p}_{1,1}^+ \times \bar{p}_{1,2}^+) \cdot (\dot{\bar{r}} + s^+ \dot{\bar{d}}) \frac{dA}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

Der zweite Term in (A3.1) wird

$$\int_{O^-} (-p^-) \bar{n}^- \cdot \dot{\bar{p}}^- dO^- = \int_{dA} p^- (\bar{p}_{1,1}^- \times \bar{p}_{1,2}^-) \cdot (\dot{\bar{r}} - s^- \dot{\bar{d}}) \frac{dA}{\sqrt{A}}$$

Das Kreuzprodukt  $\bar{p}_{1,1}^- \times \bar{p}_{1,2}^-$  erhält man aus (A3.6), indem man dort  $S^+$  durch  $-S^-$  ersetzt. Die gesamte hydrostatische Leistung wird damit

$$\begin{aligned} W_L &= - \int_{dA} \left\{ \left[ (p^+ - p^-) (\bar{r}_{1,1} \times \bar{r}_{1,2}) \right. \right. \\ &\quad + (p^+ s^+ + p^- s^-) (\bar{r}_{1,1} \times \bar{d}_{1,2} + \bar{d}_{1,1} \times \bar{r}_{1,2}) \\ &\quad + (p^+ (s^+)^2 - p^- (s^-)^2) (\bar{d}_{1,1} \times \bar{d}_{1,2}) \\ &\quad + (p^+ s_{1,2}^+ + p^- s_{1,2}^-) (\bar{r}_{1,1} \times \bar{d}) \\ &\quad + (p^+ s_{1,1}^+ + p^- s_{1,1}^-) (\bar{d} \times \bar{r}_{1,2}) \\ &\quad + (p^+ s^+ s_{1,1}^+ - p^- s^- s_{1,1}^-) (\bar{d} \times \bar{d}_{1,2}) \\ &\quad \left. + (p^+ s^+ s_{1,2}^+ - p^- s^- s_{1,2}^-) (\bar{d}_{1,1} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \tag{A3.9}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ (p^+ s^+ + p^- s^-) (\bar{r}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) \right. \\
 & \quad + (p^+ (s^+)^2 - p^- (s^-)^2) (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}_{,2} + \bar{d}_{,1} \times \bar{r}_{,2}) \\
 & \quad + (p^+ (s^+)^3 + p^- (s^-)^3) (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}_{,2}) \\
 & \quad + (p^+ s_{,2}^+ s^+ - p^- s_{,2}^- s^-) (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}) \\
 & \quad + (p^+ s_{,1}^+ s^+ - p^- s_{,1}^- s^-) (\bar{d} \times \bar{r}_{,2}) \\
 & \quad + (p^+ (s^+)^2 s_{,1}^+ + p^- (s^-)^2 s_{,1}^-) (\bar{d} \times \bar{d}_{,2}) \\
 & \quad \left. + (p^+ (s^+)^2 s_{,2}^+ + p^- (s^-)^2 s_{,2}^-) (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \left. \vphantom{\left[ \right.} \right\} \frac{dA}{\sqrt{A}}.
 \end{aligned} \tag{A3.9}$$

Wird die Mittelfläche der undeformierten Schale als Referenzfläche gewählt, dann ist

$$s^+ = s^- =: h/2$$

und die Druckleistung wird

$$\begin{aligned}
 W_L = - \int_{\mathcal{A}} \left\{ \right. & \underbrace{(p^+ - p^-) (\bar{r}_{,1} \times \bar{r}_{,2})}_{\text{Term 1}} \\
 & \underbrace{+ (p^+ + p^-) \frac{h}{2} (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}_{,2} + \bar{d}_{,1} \times \bar{r}_{,2})}_{\text{Term 2}} \\
 & \underbrace{+ (p^+ - p^-) \left(\frac{h}{2}\right)^2 (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}_{,2})}_{\text{Term 3}} \\
 & + (p^+ + p^-) \left(\frac{h}{2}\right)_{,2} (\bar{r}_{,1} \times \bar{d}) \\
 & + (p^+ + p^-) \left(\frac{h}{2}\right)_{,1} (\bar{d} \times \bar{r}_{,2}) \\
 & + (p^+ - p^-) \left(\frac{h}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right)_{,1} (\bar{d} \times \bar{d}_{,2}) \\
 & \left. + (p^+ - p^-) \left(\frac{h}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right)_{,2} (\bar{d}_{,1} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}} \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{A3.10}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \underbrace{(\rho^+ + \rho^-) \frac{h}{2} (\bar{\tau}_{1,1} \times \bar{\tau}_{1,2})}_{\text{---}} \right. \\
 & \quad + \underbrace{(\rho^+ - \rho^-) \left(\frac{h}{2}\right)^2 (\bar{\tau}_{1,1} \times \bar{d}_{1,2} + \bar{d}_{1,1} \times \bar{\tau}_{1,2})}_{\text{---}} \\
 & \quad + \underbrace{(\rho^+ + \rho^-) \left(\frac{h}{2}\right)^3 (\bar{d}_{1,1} \times \bar{d}_{1,2})}_{\text{---}} \\
 & \quad + (\rho^+ - \rho^-) \left(\frac{h}{2}\right)_{1,2} \left(\frac{h}{2}\right) (\bar{\tau}_{1,1} \times \bar{d}) \\
 & \quad + (\rho^+ - \rho^-) \left(\frac{h}{2}\right)_{1,1} \left(\frac{h}{2}\right) (\bar{d} \times \bar{\tau}_{1,2}) \\
 & \quad + (\rho^+ - \rho^-) \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right)_{1,1} (\bar{d} \times \bar{d}_{1,2}) \\
 & \quad \left. + (\rho^+ + \rho^-) \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right)_{1,2} (\bar{d}_{1,1} \times \bar{d}) \right] \cdot \bar{d} \left. \right\} \frac{dA}{\sqrt{A}}. \tag{A3.10}
 \end{aligned}$$

Die in (8.9) eingeführten formalen Schalenbelastungsgrößen  $\bar{y}_0$  und  $\bar{y}_1$  sind jetzt hiermit vollständig definiert; man hat

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{y}_0 & := \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ (\rho^+ - \rho^-) (\bar{\tau}_{1,1} \times \bar{\tau}_{1,2}) + \dots \right] \\
 \bar{y}_1 & := \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ \underbrace{(\rho^+ s^+ + \rho^- s^-)}_{\text{bzw.}} (\bar{\tau}_{1,1} \times \bar{\tau}_{1,2}) + \dots \right] \\
 & \quad \underbrace{(\rho^+ + \rho^-) \frac{h}{2}}_{\text{---}}
 \end{aligned} \right\} \tag{A3.11}$$

Bei Wahl der Mittelfläche als Referenzfläche und konstanter Wanddicke in der undeformierten Ausgangskonfiguration erhält man nur die in (A3.10) durch Schlangenlinie gekennzeichneten Terme. Eine entlang der Referenzfläche variable Wandstärke  $h$  macht sich also durch zusätzliche Terme in den Schalenbelastungsgrößen  $\bar{y}_0$  und  $\bar{y}_1$  bemerkbar, nicht aber sonst in den Bewegungsgleichungen.

Bei dünnen Schalen wird im allgemeinen nur der erste Term von  $\bar{y}_0$  zu berücksichtigen sein, sofern die Verformungen, die durch  $\bar{r}$  und  $\bar{d}$  und deren Ableitungen dargestellt werden, nicht zu groß werden. Welche Terme in den Ausdrücken (A3.11) verlässlich zu vernachlässigen sind, muß im Einzelfall nachgewiesen werden.

Literatur

- [1] Ericksen, J.L., Truesdell, C.: Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells, Arch. Rat. Mech. & Anal. 1, S. 285-323, 1957/58
- [2] Günther, W.: Analoge Systeme von Schalengleichungen, Ing. Arch. 30, S. 160-186, 1961
- [3] Green, A.E., Naghdi, P.M., Wainwright, W.L.: A General Theory of a Cosserat Surface, Arch. Rat. Mech. & Anal. 20, S. 287-308, 1965
- [4] Cohen, H., De Silva, C.N.: Theory of Directed Surfaces, J. Math. Phys. 7, S. 960-966, 1966
- [5] Green, A.E., Naghdi, P.M., Osborne, R.B.: Theory of an Elastic-Plastic Cosserat Surface, Int. J. Solids & Structures, S. 907-927, 1968
- [6] Naghdi, P.M.: The Theory of Shells and Plates, aus Flügges Handbuch der Physik, vol VIa/2, Hrsg. C. Truesdell, Springer Verlag, 1972
- [7] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On the Derivation of Shell Theories by Direct Approach, J. Appl. Mech., S. 173-176, March 1974
- [8] Naghdi, P.M.: Direct Formulation of Some Two-Dimensional Problems of Mechanics, Proc. 7th US Natl. Congr. Applied Mechanics, Univ. of Colorado, Boulder Colorado, June 3-7, 1974, ASME United Eng. Center, 1974
- [9] Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie I, ZAMM 29, S. 97-146, 1949
- [10] Zerna, W.: Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen, ZAMM 42, 4/8, S. 333-341, 1962
- [11] Naghdi, P.M.: Foundations of Elastic Shell Theory, Proc. Solid Mech. 4, S. 1-90, North Holland Publ. Comp., 1963
- [12] Habib, L.M., Ebcioğlu, I.K.: On the Equations of Motion of Shells in the Reference State, Ing. Arch. 35, S. 28-32, 1965

- [13] Zerna, W.: Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen, Abh. der Braunschweig. Wiss. Gesellschaft, Band 19, S. 52-71, 1967
- [14] Schmieder, L.: Schalentheorie mit Schubverformungen in allgemeinen Koordinaten, Teil I und II, Zeitschr. Flugwissenschaft 17, Heft 11, S. 391-404, Heft 12, S. 434-445, 1969
- [15] Biricikoglu, V., Kalnins, A.: Large Elastic Deformation of Shells with the Inclusion of Transverse Normal Strain, Int. J. Solids & Structures 7, S. 431-444, 1971
- [16] Epstein, M., Tene, Y.: A Linear Theory of Thin Elastic Shells Based on Conservation of a Non-Normal Straight Line, Int. J. Solid & Structures 9, S. 257-268, 1973
- [17] Yi-Yuan Yu: Application of Variational Equations of Motion to the Non-linear Vibration Analysis of Homogeneous and Layered Plates and Shells, J. Appl. Mech., S. 79-86, March 1963
- [18] Seidel, J.: Beitrag zur geometrisch nichtlinearen Theorie dünner Schalen unter Annahme kleiner Verzerrungen und großer Rotationen, Diss. Univ. Stuttgart, Feb. 1973
- [19] Naghdi, P.M.: On the Theory of Thin Elastic Shells, Quart. Appl. Math., vol XIV, S. 369-380, 1956
- [20] Klingbeil, E.: Das Variationsproblem der allgemeinen linearen Schalentheorie, ZAMM 44, 8/9, S. 379-391, 1964
- [21] Naghdi, P.M.: On a Variational Theorem in Elasticity and its Application to Shell Theory, J. Appl. Mech., S. 647-653, Dec. 1964
- [22] Habib, L.M.: Theory of Elastic Shells in the Reference State, Ing. Arch., 34, S. 228-237, 1965
- [23] Librescu, L.: On the Theory of Anisotropic Elastic Shells and Plates, Int. J. Solids & Structures 3, S. 53-68, 1967



- [24] Malmberg, T.: On some General Variational Principles for Creep with Applications to Thin Shells, *Int. J. Solids & Structures* 10, S. 1137-1154, 1974
- [25] Pietraszkiewicz, W.: Finite Rotations and Lagrangian Description in the Non-Linear Theory of Shells, *Polish Scientific Publ. Warschau*, 1979
- [26] Herrmann, G., Armenákas, A.E.: Dynamic Behavior of Cylindrical Shells under Initial Stress, *Proc. 4th US Natl. Congr. Appl. Mech., ASME*, S. 203-213, 1962
- [27] Kraus, H.: *Thin Elastic Shells*, J. Wiley & Sons, Inc., 1967
- [28] Goldenveizer, A.L.: The Principles of Reducing Three-dimensional Problems of Elasticity to Two-dimensional Problems of the Theory of Plate and Shells, *Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech.*, S. 305-311, 1964
- [29] Goldenveizer, A.L.: Derivation of an Approximate Theory of Shells by Means Asymptotic Integration of the Equation of the Theory of Elasticity, *PMM* 27, 4, 1963
- [30] Green, A.E.: Some Remarks on the Linear Theory of Shells, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* XVIII, S. 257-276, 1965
- [31] Westbrook, D.R.: An Asymptotic Investigation of the Small Strain Theory of Shells, *Int. J. Solids & Structure* 7, S. 901-912, 1971
- [32] Love, A.E.H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth Edition, New York, Dover Publications, 1944
- [33] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Comp., Second Edition 1959
- [34] Girkmann, K.: *Flächentragwerke*, Springer Verlag, 1963
- [35] Novozhilov, V.V.: *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1964

- [36] Flügge, W.: Stresses in Shells, 3. Auflage, Springer Verlag, New York, 1966
- [37] Finlayson, B.A.: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972
- [38] Truesdell, C.: The Classical Field Theories, in Encyclopedia of Physics, vol III/1, Principles of Classical Mechanics and Field Theories, Springer Verlag, 1960
- [39] Eringen, A.C.: Continuum Physics, vol II: Continuum Physics of Single-Substance Bodies, Academic Press, 1975
- [40] Oden, J.T., Reddy, J.N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer Verlag, 1976
- [41] Eringen, A.C.: Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill Book Comp. Inc., 1962
- [42] Green, A.E., Rivlin, R.S.: On Cauchy's Equations of Motion, ZAMP 15, S. 290-292, 1964
- [43] Green, A.E., Rivlin, R.S.: Multipolar Continuum Mechanics, Arch. Rat. Mech. & Anal. 17, S. 113-147, 1964
- [44] Noll, W.: La Mécanique Classique, Basé sur un Axiome d'Objectivité, in "La Méthode Axiométrique dans les Mécanique Classiques et Nouvelles", (Collòque International, Paris, 1959), Gauthier-Villars, Paris, 1963, Nachdruck in: Noll, W.: The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers, Springer Verlag, 1974
- [45] Becker, E., Bürger, W.: Kontinuumsmechanik, Teubner Verlag, 1975
- [46] Schmutzer, E.: Relativistische Physik (Klassische Theorie), B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968
- [47] Gurtin, M.E.: Modern Continuum Thermodynamics, in "Mechanics Today, vol 1, 1972", Hrsg. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press Inc., 1974

- [48] Hutter, K.: The Foundations of Thermodynamics, Its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics, *Acta Mechanica* 27, 1-4, S. 1-54, 1977
- [49] Coleman, B.D., Noll, W.: The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity, *Arch. Rat. Mech. & Anal.* 13, S. 167-178, 1963
- [50] Truesdell, C.: *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1969
- [51] Noll, W.: The Role of the Second Law of Thermodynamics in Classical Continuum Physics, in "Modern Development in Thermodynamics", Hrsg. B. Gal-Or, J. Wiley & Sons, New York, Toronto, Israel University Press, Jerusalem, 1974
- [52] Green, A.E., Laws, N., Naghdi, P.M.: Rods, Plates and Shells, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 69, S. 895-913, 1968
- [53] Green, A.E., Naghdi, P.M.: Non-isothermal Theory of Rods, Plates and Shells, *Int. J. Solids & Structures* 6, S. 209-244, 1970
- [54] Krätzig, W.B.: Thermodynamics of Deformation and Shell Theory, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Technical Reports, Mitteilung Nr. 71-3. April 1971
- [55] Krätzig, W.B.: Allgemeine Schalentheorie beliebiger Werkstoffe und Verformungen, *Ing. Arch.* 40, S. 34-326, 1971
- [56] Krätzig, W.B.: Optimale Schalengrundgleichungen und deren Leistungsfähigkeit, *ZAMM* 54, S. 265-276, 1974
- [57] Hammel, J.: Geometrisch nichtlineare Schalengleichungen als Approximation des dreidimensionalen Kontinuums unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung, *Ingenieur-Archiv*, Bd. 47, S. 75-93, 1978
- [58] Murdoch, A.J.: A Thermodynamical Theory of Elastic Material Interfaces, *Quart. J. of Mech. & Appl. Math.* 29, S. 245-275, 1976

- [59] Murdoch, A.J.: On the Entropy Inequality for Material Interfaces, J. of Appl. Math. & Phys. 27, S. 599-605, 1976
- [60] Zhilin, P.A.: Mechanics of Deformable Directed Surfaces, Int. J. Solids Structures 12, S. 635-648, 1976
- [61] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On Thermal Effects in the Theory of Shells, Proc. R. Soc. Lond. A 365, S. 161-190, 1979
- [62] Simmonds, J.G.: The Nonlinear Thermodynamical Theory of Shells: Descent from 3-Dimensions without Thickness Expansions, in: Euromech Coll. 165 "Flexible Shells", Hrsg. E.L. Axelrad, F.A. Emmerling, Springer Verlag, 1984
- [63] Malmberg, T.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1977
- [64] Brunk, G.: Die Erweiterung des Prinzips der Rahmeninvarianz der Materialgleichungen auf beliebig bewegte Beobachter, Habilitationsschrift, Technische Universität Berlin, 1977
- [65] Schlechtendahl, E.G.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1981
- [66] Truesdell, C., Noll, W.: The Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer Verlag, 1965
- [67] Green, A.E., Naghdi, P.M., Trapp, J.A.: Thermodynamics of a Continuum with Internal Constraints, Int. J. Engng. Sci. 8, S. 891-908, 1970
- [68] Gurtin, M.E., Guidugli, P.P.: The Thermodynamics of Constrained Materials, Arch. Rat. Mech. & Anal. 51, 3, S. 192-308, 1973
- [69] Woźniak, C.: Constrained Continuous Media I, II, III, Bull. de L'Acad. Polon. des Sc., Ser. Sc. Techn. vol XXI, no 3-4, S. 109-116, 167-173, 175-182, 1973
- [70] Woźniak, C.: Nonlinear Mechanics of Constrained Continua I. Foundation of the Theory, Arch. of Mech. 26, 1, S. 105-118, 1974

- [71] Woźniak, C.: Nonlinear Mechanics of Constrained Continua II. Ideal Constraints for Deformations and Stresses, *ibid.*, 28, 2, S. 155-170, 1976
- [72] Woźniak, C.: On the Realization of Constraints and Loosenesses in Continuum Mechanics, *Bull. de L'Acad. Polon. des Sc., Ser. Sc. Techn.* vol 25, no 12, S. 391 [1045] - 396 [1050], 1977
- [73] Woźniak, C.: Thermomechanics of Material Continua with Generalized Constraints, *Mech. Res. Comm.*, vol 3, S. 331-336, 1976
- [74] Jaunzemis, W.: *Continuum Mechanics*, The Macmillan Comp., New York, 1967
- [75] Green, A.E., Zerna, W.: *Theoretical Elasticity*, Second Ed., Oxford, At the Clarendon Press, 1975
- [76] Leigh, D.C.: *Nonlinear Continuum Mechanics*, McGraw-Hill Book Comp., 1968
- [77] Truesdell, C.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, vol 1, Academic Press, 1977
- [78] Haase, R.: *Thermodynamik der irreversiblen Prozesse*, Dr. Dietrich Steinkopf Verlag, Darmstadt, 1963
- [79] Lichnerowicz, A.: *Einführung in die Tensoranalysis*, Bibliographisches Institut, 1966
- [80] Hay, G.E.: *Vector and Tensor Analysis*, Dover Publ. Inc., New York, 1953
- [81] McConnell, A.J.: *Applications of Tensor Analysis*, Dover Publ. Inc., 1957
- [82] Kestin, J.: *A Course in Thermodynamics*, vol 1, Blaisdell Publ. Comp., 1966
- [83] Lavenda, B.H.: *Thermodynamics of Irreversible Processes*, The Macmillan Press Ltd., 1978
- [84] Flügge, S., Hrsg.: *Prinzipien der Thermodynamik und Statistik*, Handbuch der Physik, Band III/2, Springer Verlag, 1959

- [85] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966
- [86] Spencer, A.J.M.: Theory of Invariants, in: Continuum Physics, Bd. 1 - Mathematics, Hrsg. A.C. Eringen, Academic Press, 1971
- [87] Coleman, B.D., Gurtin, M.E.: Thermodynamics with Internal State Variables, The Journal of Chemical Physics, vol 47, no 2, S. 597-613, 1967
- [88] MacVean, D.B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19, S. 157-184, 1968
- [89] Hill, R.: On Constitutive Inequalities for Simple Materials - I, J. Mech. Phys. Sol. 16, S. 229-242, 1968
- [90] Malmberg, T.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1984
- [91] Malmberg, T.: Interne Berichte, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1977
- [92] Malmberg, T.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1978
- [93] Woods, L.C.: On the Local Form of the Second Law of Thermodynamics in Continuum Mechanics, Quart. Appl. Math., S. 119-126, April 1981
- [94] Green, A.E., Laws, N.: On a Global Entropy Production Inequality, The Quart, J. Mech. and Appl. Math. 25, S. 1-11, 1972
- [95] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On Continuum Thermodynamics, Arch. Rat. Mech. Anal. 48, S. 352-378, 1972
- [96] Boley, B.A., Weiner, J.H.: Theory of Thermal Stresses, John Wiley & Sons, 2. Aufl. 1960
- [97] Einstein, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie, Fried. Vieweg & Sohn, 1956
- [98] Born, M.: Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer Verlag, 1969

- [99] Duszek, M.K.: On Conjugate and Objective Measures of Constitutive Variables in the Mechanical Theory of Solids, Bull. de L'Acad. Polon. des Sc., Ser. Sc. Techn. 28, no 11-12, S. 287 [631] - 293 [637], 1980

Abbildungen

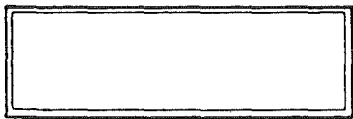
Legende zu den Abbildungen 1 bis 5



: Fundamentalprinzip, Axiom (z.B. integraler Bilanzsatz)



: Deduktiv gewonnenes Zwischenergebnis oder mathematischer Lehrsatz (z.B. Green-Gauß'scher Satz); auch Endresultat, wenn dies nicht besonders hervorgehoben werden muß



: Endresultat (z.B. lokale Bilanzgleichung)



: Ad hoc-Hypothese



: Anmerkung über besondere mathematische Operationen



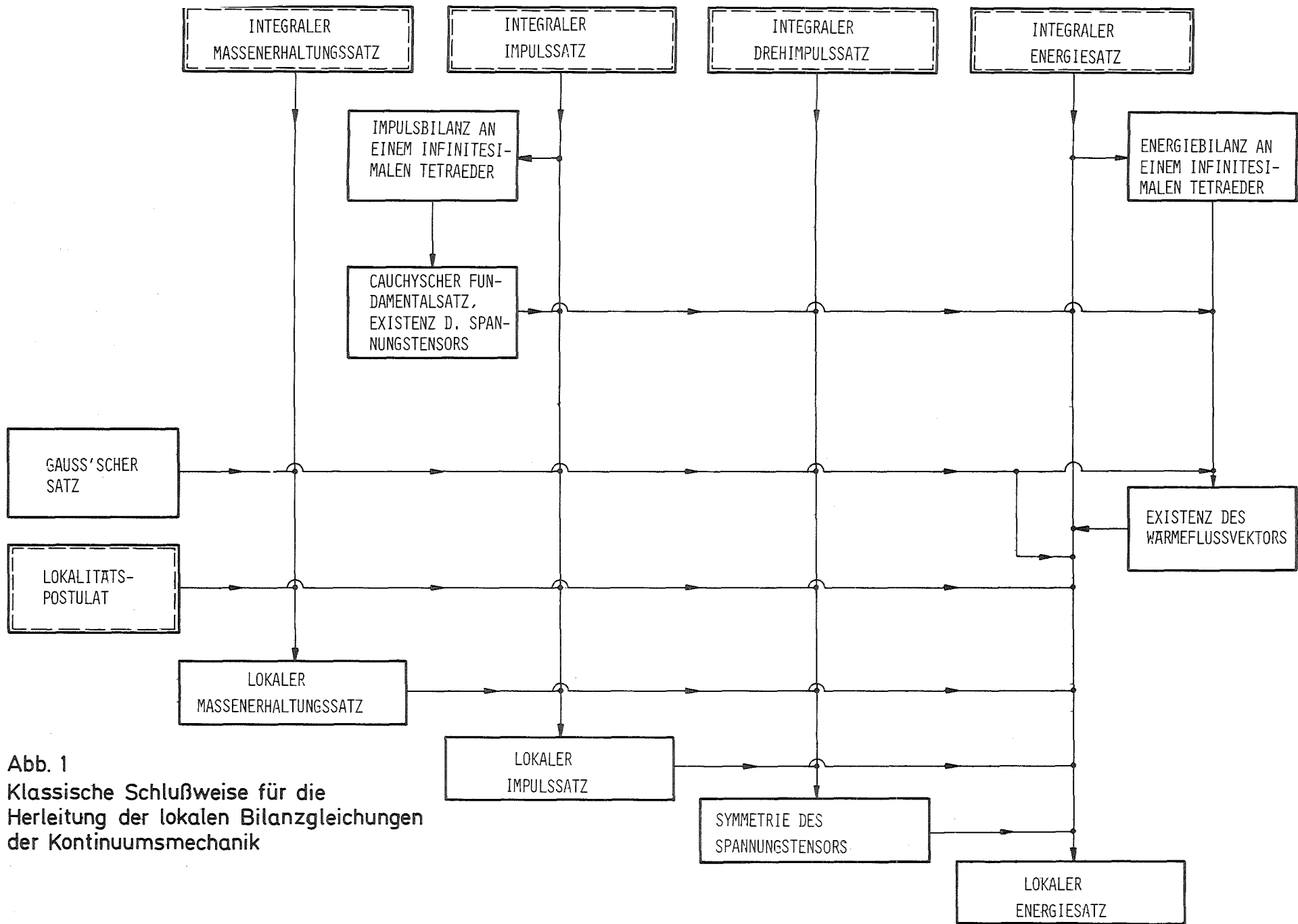


Abb. 1  
 Klassische Schlußweise für die  
 Herleitung der lokalen Bilanzgleichungen  
 der Kontinuumsmechanik

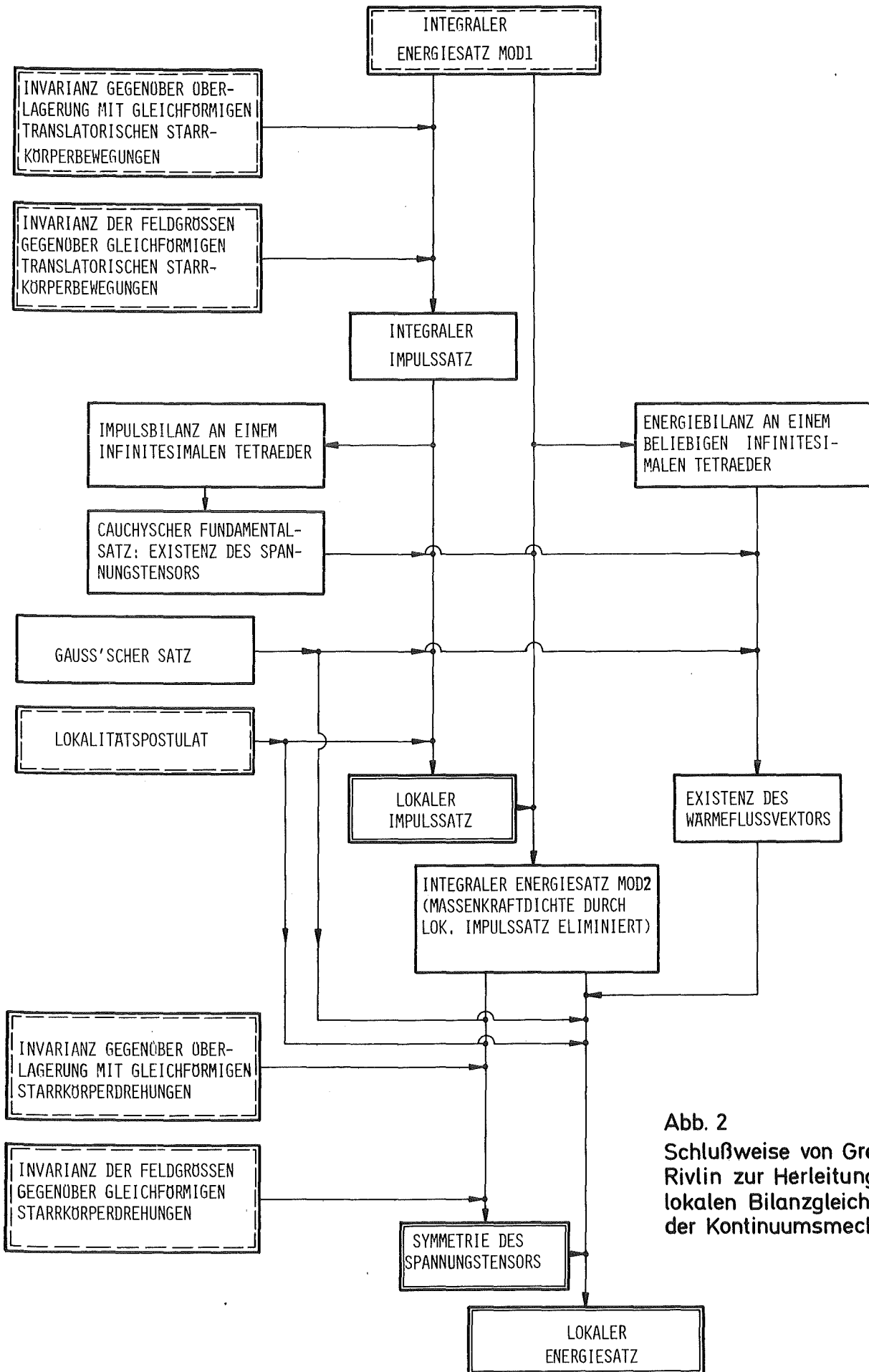


Abb. 2  
Schlußweise von Green-Rivlin zur Herleitung der lokalen Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik

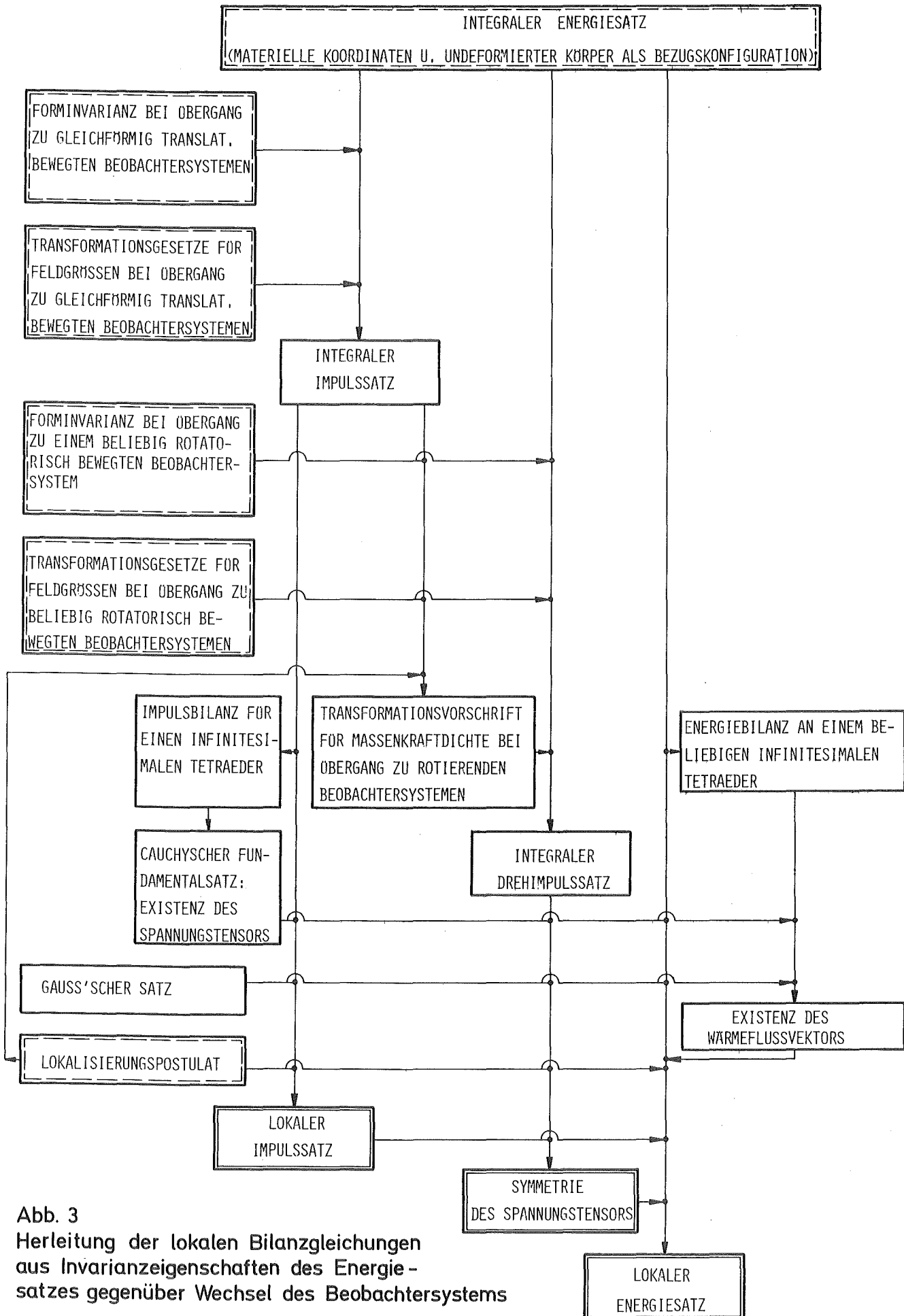


Abb. 3  
Herleitung der lokalen Bilanzgleichungen  
aus Invarianzeigenschaften des Energie-  
satzes gegenüber Wechsel des Beobachtersystems

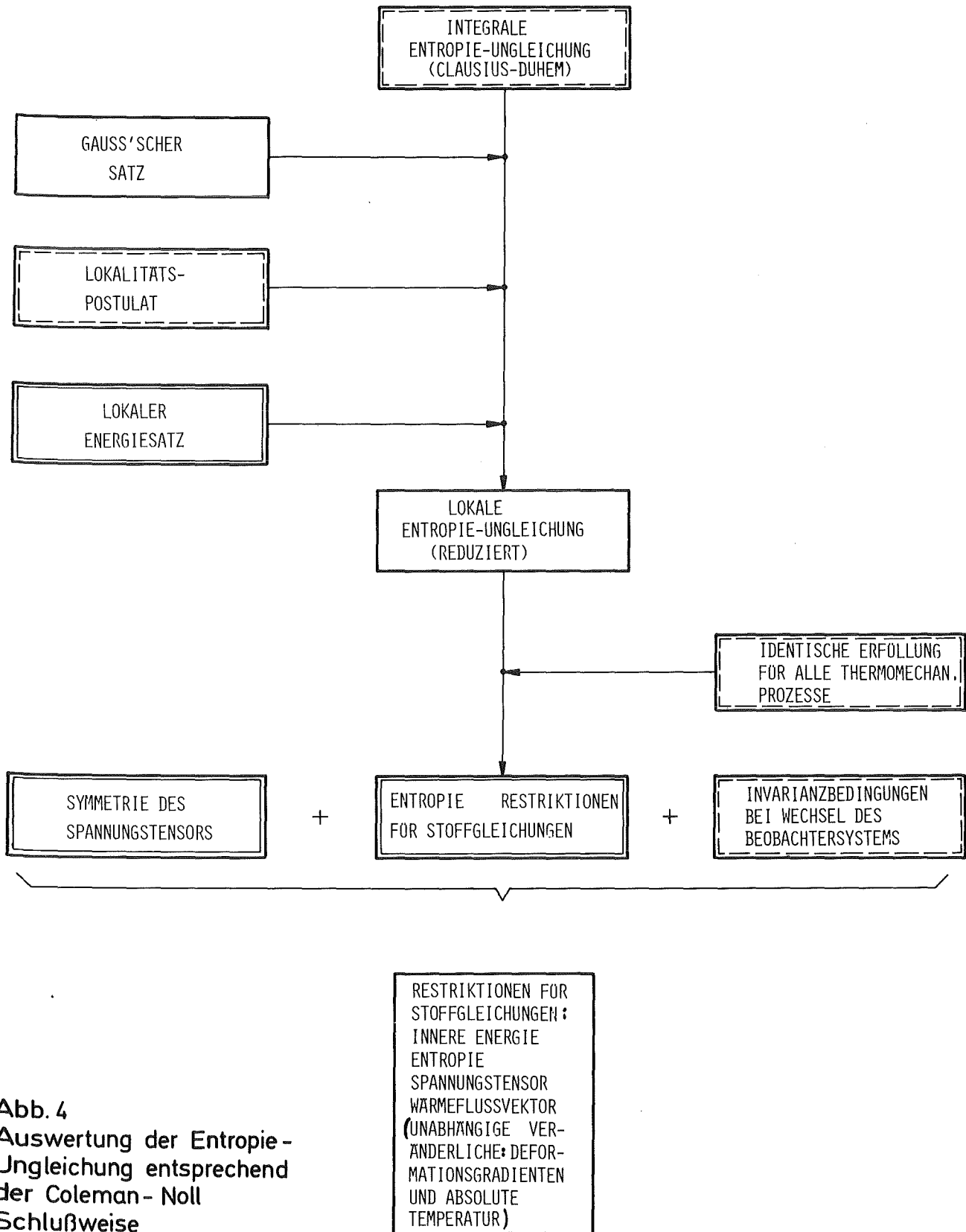


Abb. 4  
Auswertung der Entropie-  
Ungleichung entsprechend  
der Coleman-Noll  
Schlußweise

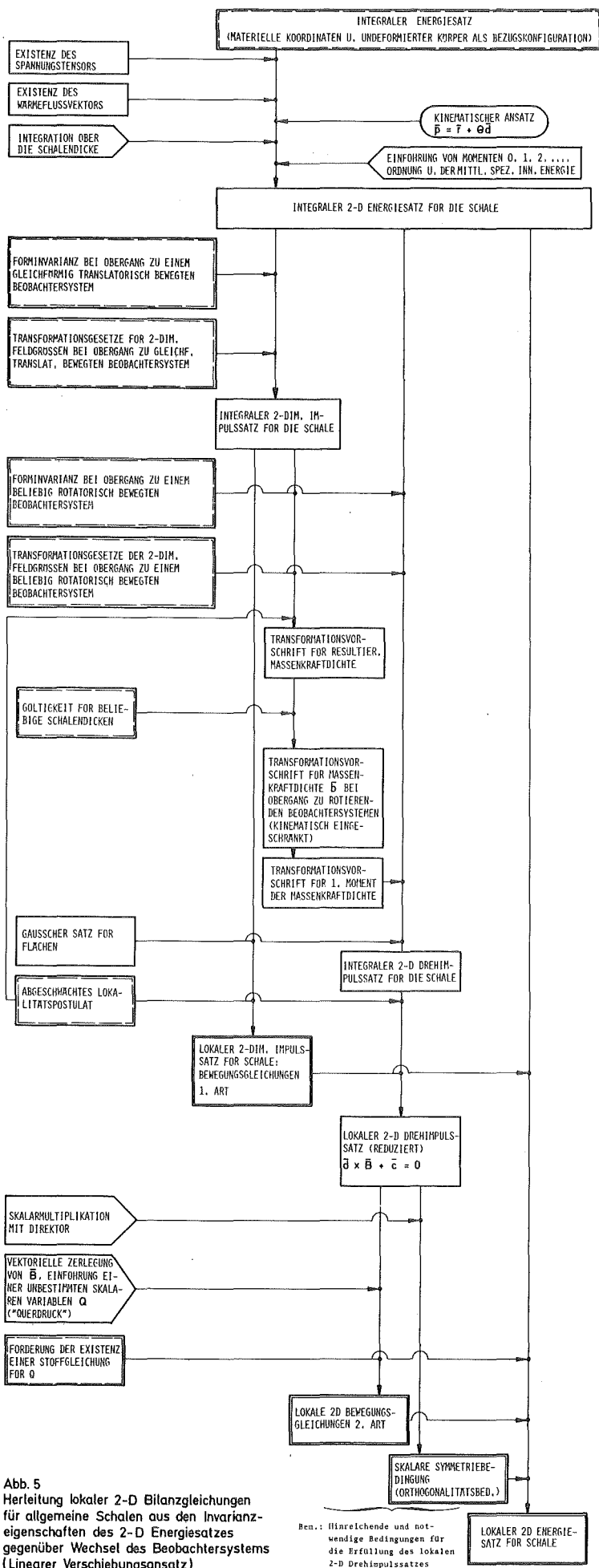


Abb. 5  
Herleitung lokaler 2-D Bilanzgleichungen für allgemeine Schalen aus den Invarianzeigenschaften des 2-D Energiesatzes gegenüber Wechsel des Beobachtersystems (Linearer Verschiebungsansatz)

### Materielles Koordinatensystem in der Ausgangskonfiguration

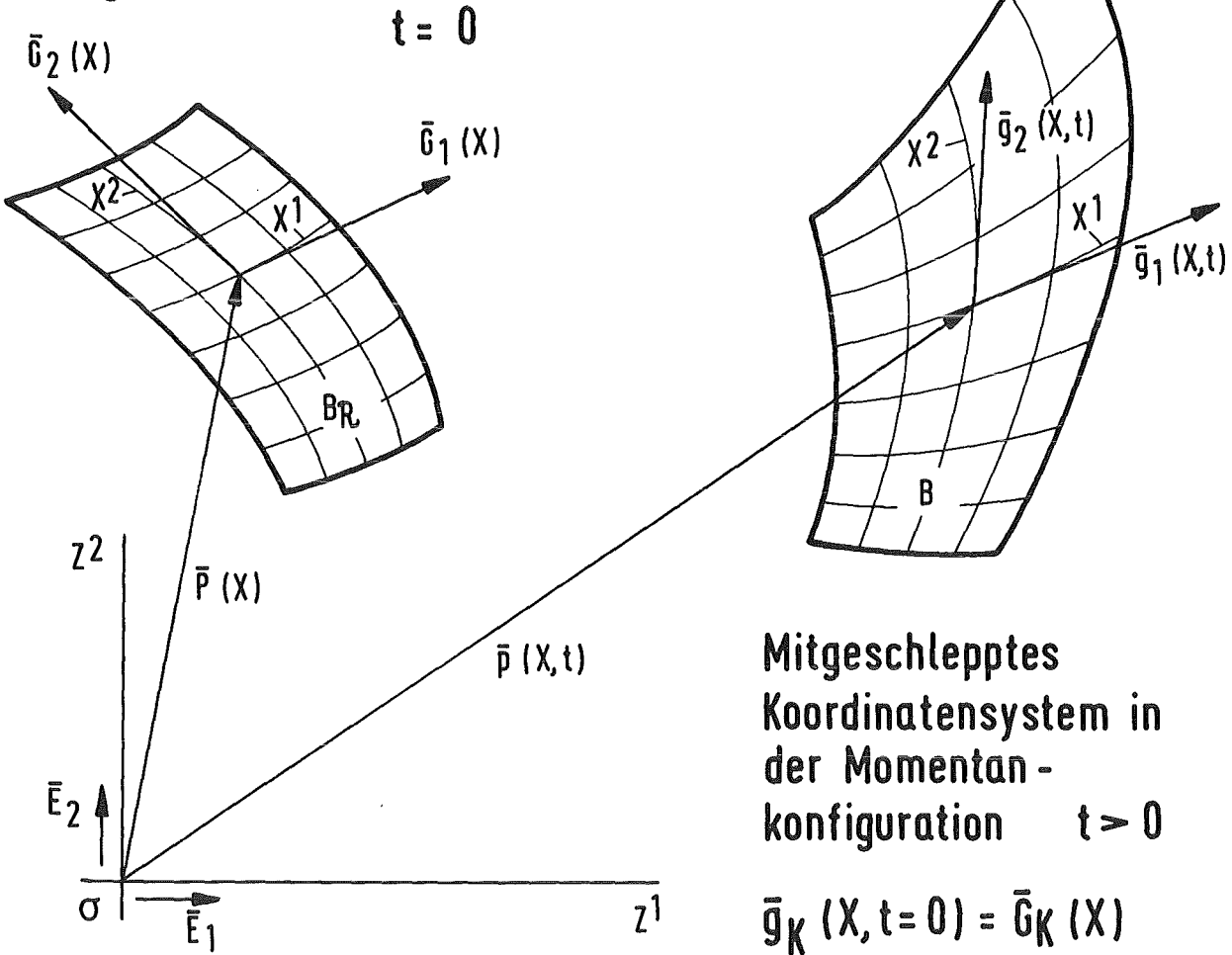


ABB. 6: MATERIELLES UND MITGESCHLEPPTES KOORDINATEN-SYSTEM

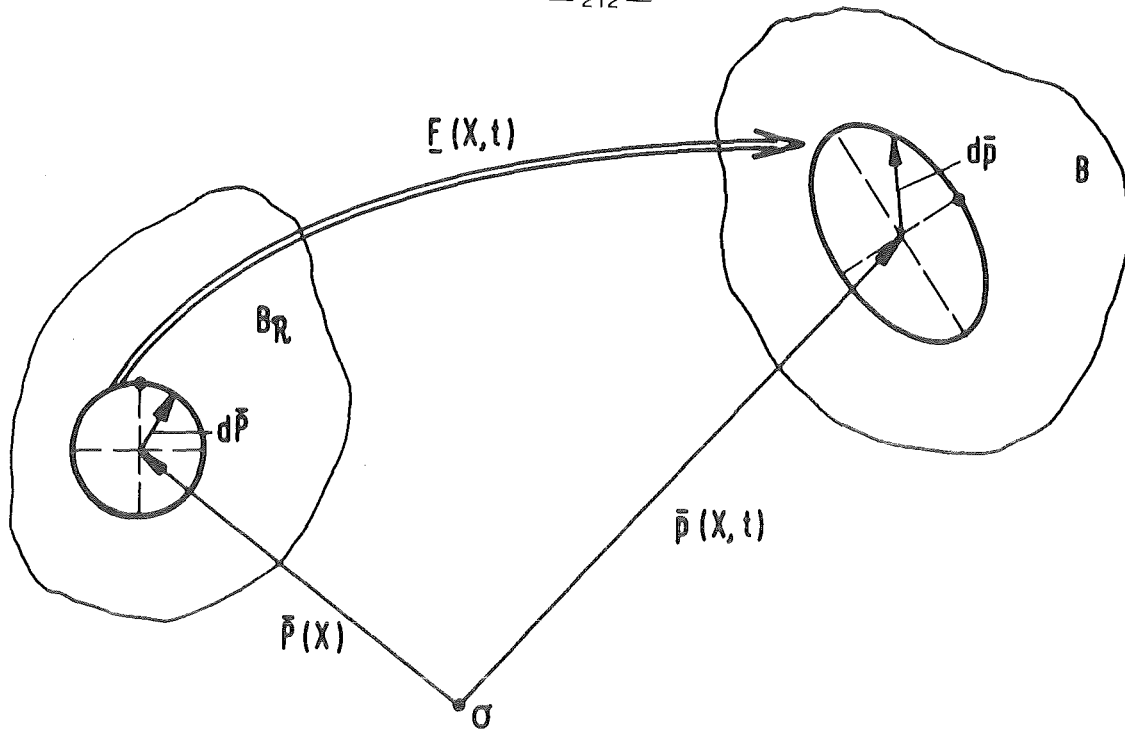


ABB. 7: VERSCHIEBUNG EINES MATERIELLEN PUNKTES  $X$  UND  
 ABBILDUNG SEINER NACHBARSCHAFT DURCH DEN DE-  
 FORMATIONSGRADIENTEN  $\underline{F}(X, t)$

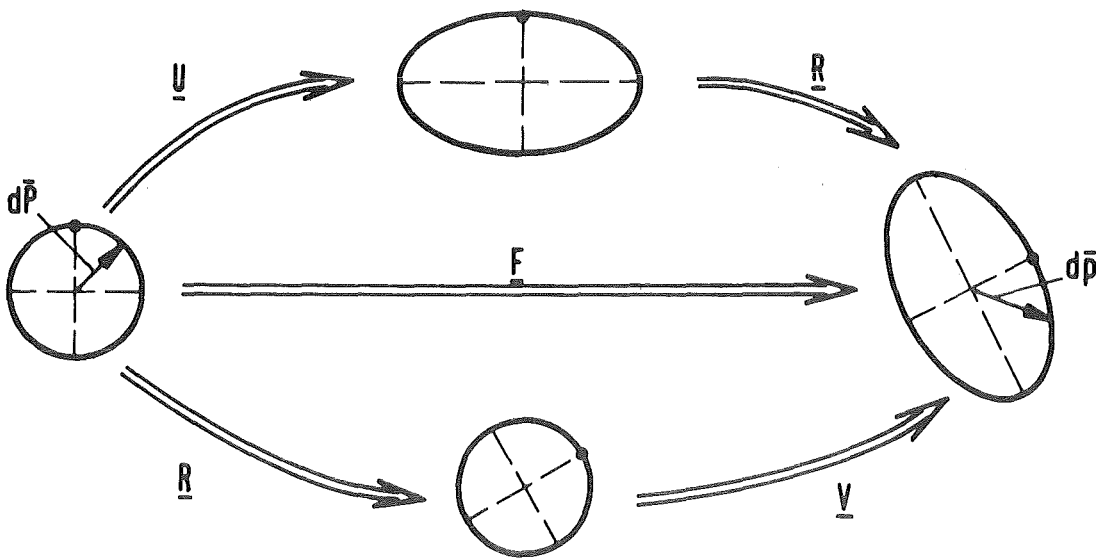


ABB. 8: ABBILDUNG DER NACHBARSCHAFT EINES MATERIELLEN  
 PUNKTES MIT DEM DEFORMATIONSGRADIENTEN  $\underline{F}(X, t)$   
 UND DEUTUNG DES POLARZERLEGUNGSTHEOREMS

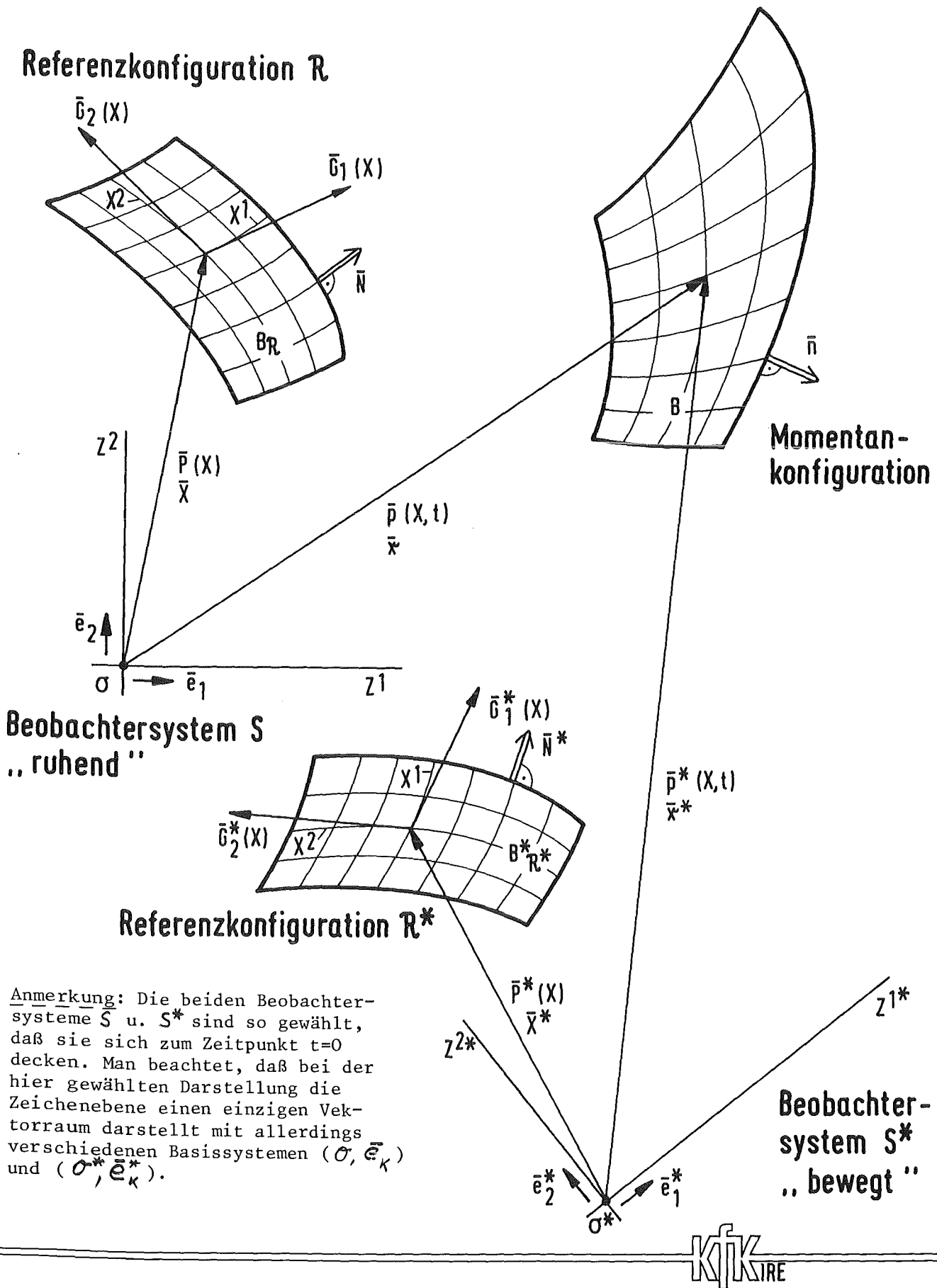


ABB. 9: "RUHENDES" UND "BEWEGTES" BEOBACHTERSYSTEM;  
ZUM TRANSFORMATIONSVERHALTEN DER ORTSVEKTOREN



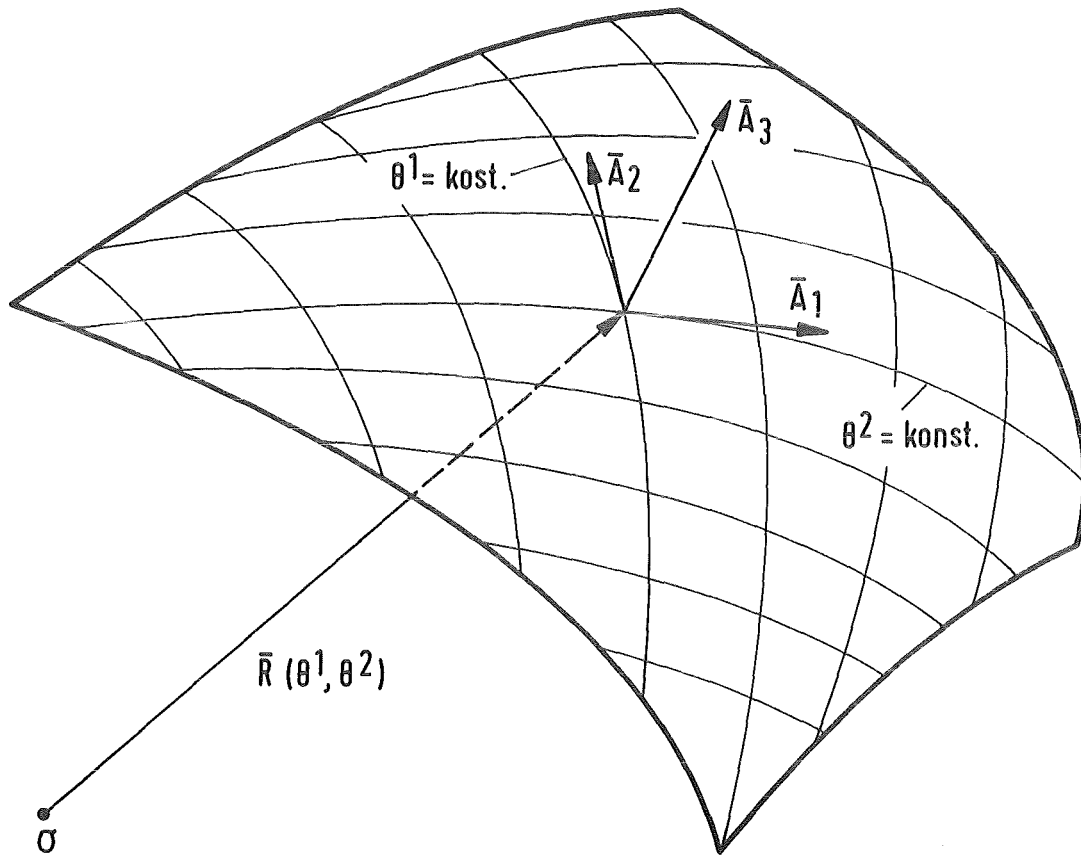
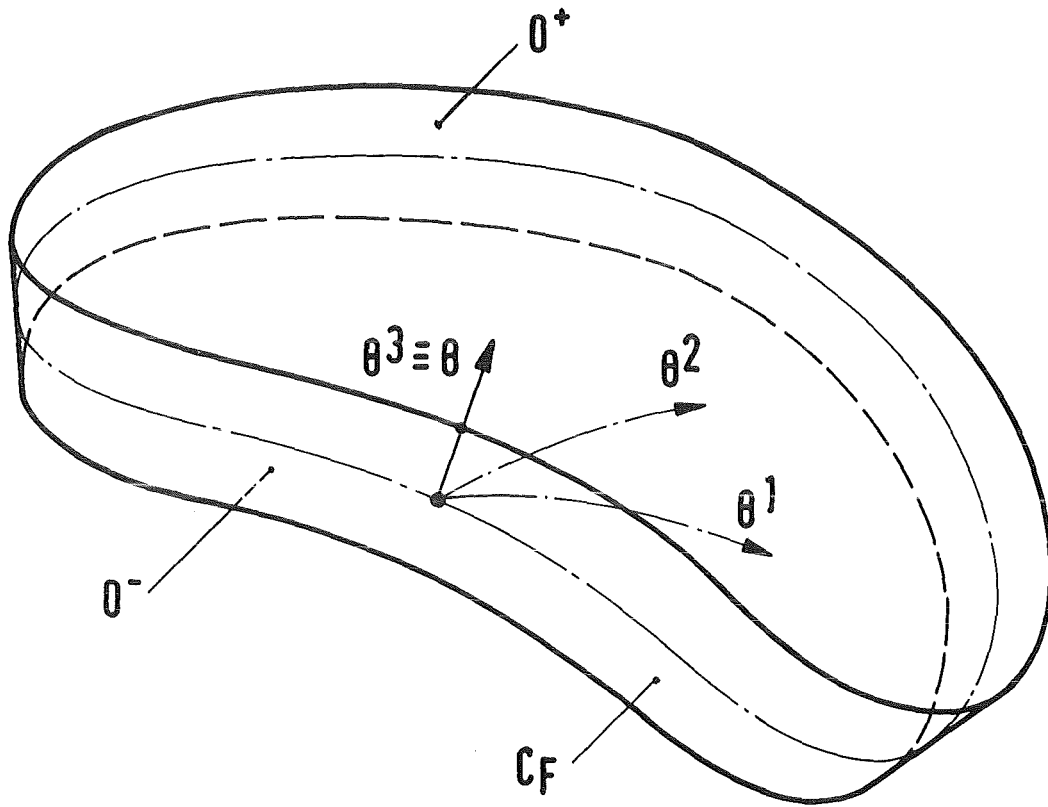


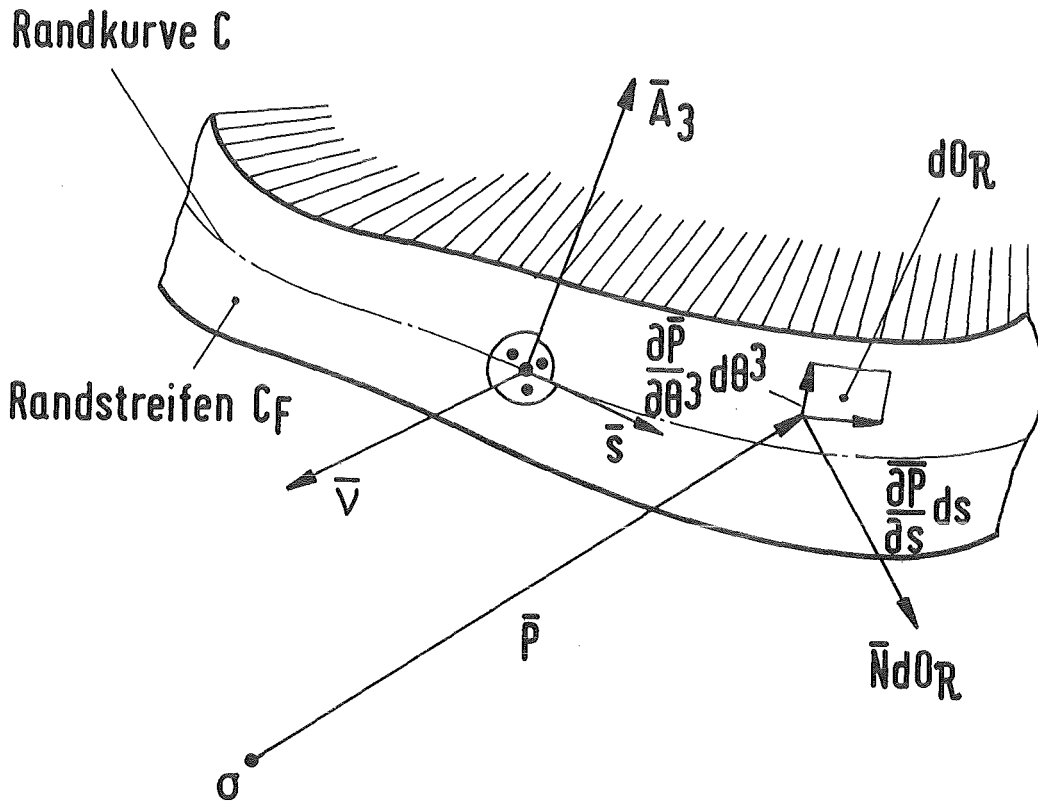
ABB. 10: REFERENZFLÄCHE DER SCHALE UND FLÄCHENKOORDINATEN



$O^+, O^-$  : Schalenlaibungsflächen

$C_F$  : Randstreifen

ABB. 11: SCHALENABSCHNITT IN DER UNDEFORMIERTEN REFERENZ-KONFIGURATION



- $dQ_R$  : Flächenelement im Randstreifen
  - $\bar{N}$  : Äußerer Einheitsnormalenvektor auf dem Randstreifen
  - $\bar{P}$  : Ortsvektor eines Punktes des Randstreifens
  - $\theta^3 \equiv \Theta$  : Dickenkoordinate
  - $s$  : Koordinate der Randkurve  $C$
  - $\bar{s}$  : Einheitstangentenvektor an  $C$
  - $\bar{v}$  : Äußerer Einheitsnormalenvektor der Randkurve  $C$
- (  $\bar{A}_3, \bar{s}, \bar{v}$  bilden ein orthogonales Dreibein auf  $C$  )



ABB. 12: KOORDINATEN, EINHEITSVEKTOREN UND FLÄCHENELEMENT AUF DEM RANDSTREIFEN  $C_F$  IN DER UNDEFORMIERTEN AUSGANGSKONFIGURATION (REFERENZKONFIGURATION)