

KfK 4375
September 1988

Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen

**Teil 2:
Auswertung von
Entropiebilanzbedingungen**

**T. Malmberg
Institut für Reaktorentwicklung**

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Reaktorentwicklung

KfK 4375

Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen

Teil 2: Auswertung von Entropiebilanzbedingungen

von
T. Malmberg

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

NICHT-ISOTHERME THEORIE GROSSER DEFORMATIONEN THERMOELASTISCHER SCHALEN

TEIL 2: AUSWERTUNG VON ENTROPIEBILANZBEDINGUNGEN

Zusammenfassung

Ziel der in Teil 1^x und 2 vorgelegten Abhandlung ist es, einen neuartigen Weg der Herleitung zweidimensionaler Bilanz- und Stoffgleichungen für thermoelastische Schalen beliebiger Geometrie und bei großen Verformungen unter Berücksichtigung thermodynamischer Prinzipie zu erproben. Ausgangspunkt dieser mathematischen Entwicklung ist die Auswertung der Forminvarianz der integralen Energiebilanzgleichung gegenüber Wechsel des Beobachtersystems und die Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropiegleichung entsprechend der Interpretation in der modernen Kontinuumsthermodynamik (Coleman-Noll Schlußweise). Die Einbettung der Herleitung der zweidimensionalen Schalengleichungen in diesen thermodynamischen Rahmen erlaubt, eine thermodynamisch konsistente Schalentheorie zu entwickeln.

Für das Verschiebungsfeld in der Schale wurde einschränkend ein linearer Ansatz und für die Verteilung der Temperaturinversen ein quadratischer Ansatz über die Schalendicke gemacht. Es zeigte sich zunächst, daß die beiden integralen, thermodynamischen Prinzipie nicht ausreichen, um ein vollständiges System zweidimensionaler Bilanzgleichungen zu gewinnen; vielmehr sind noch zusätzliche Forderungen notwendig. Die Auffindung dieser zusätzlichen Bedingungen gelang über eine physikalisch motivierte Interpretation der approximativen Ansätze für die Verschiebungen und die Temperatur. Diese Ansätze werden als innere kinematische bzw. thermische Zwangsbedingungen aufgefaßt, die durch Reaktionsgrößen in der Form zusätzlicher, gedachter Einwirkungen (wie z.B. Volumenkräfte und Wärmequellen) in einem Gedankenexperiment zu realisieren sind. Zur eindeutigen Charakterisierung des neuen Problems werden nun diese Zusatzeinwirkungen physikalisch plausiblen Energie- und Entropie-Forderungen integraler Art unterworfen, die die beiden Hauptsätze ergänzen. Ob diese Forderungen ausreichend sind, um ein vollständiges System zweidimensionaler Bilanzgleichungen für die Schale aufzustellen, muß die weitere Analyse zeigen.

Die Auswertung der integralen Energiebilanzgleichung und der Energieforderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen wurde in Teil 1 durchgeführt. Dabei zeigte sich, daß noch Freiheiten in der Wahl der gedachten Zusatzeinwirkungen vorhanden sind. Zwei Konzepte (1. und 2. schalentheoretisches Konzept), die sich in spezifischen Annahmen für die gedachten Zusatzein-

^x T. Malmberg: Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen, Teil 1: Auswertung von Energiebilanzbedingungen, KfK 4374, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988

wirkungen unterscheiden, wurden verfolgt. Sie führen auf unterschiedliche Bilanzgleichungen für die Schale sowie auf unterschiedliche algebraische Restriktionen für die zweidimensionalen Stoffgleichungen.

Im vorliegenden 2. Teil werden für beide schalentheoretischen Konzepte die Entropie-Forderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen und die integrale Clausius-Duhem Entropieungleichung ausgewertet. Dabei wird von direkten Ansätzen für die zweidimensionalen Stoffgleichungen ausgegangen, die dem Prinzip der Forminvarianz bei Beobachtertransformationen unterworfen werden. Die hier besonders interessierenden zweidimensionalen, mechanischen Stoffgleichungen verknüpfen die über die Schalendicke gewichtet gemittelten Spannungen (z.B. Momente 0., 1. und 2. Ordnung) sowohl mit kinematischen Größen wie auch mit Temperaturgrößen.

Zunächst wird der Fall einer gleichförmigen Temperatur (quasi-isothermer Fall) über die Schalendicke analysiert. Unter dieser Voraussetzung liefern die im 1. Teil durchgeführten energetischen Betrachtungen schon hinreichend viele zweidimensionale Bilanzgleichungen für die Schale, so daß sich aus der Entropie-Forderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen keine weiteren Bilanzgleichungen ableiten lassen. Die Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung liefert eine Reihe von Restriktionen für die zweidimensionalen Stoffgleichungen, wobei sich aber keine Einschränkungen für die Momente höchster Ordnung, das sind die Momente 2. Ordnung, ergeben. Allerdings hat die Wahl der Stofffunktionen für die Momente 2. Ordnung keinen Einfluß auf die Lösungen für das Verschiebungs- und Temperaturfeld; diese Stofffunktionen können deshalb beliebig gewählt werden (M_2 -Theorem). Beide schalentheoretischen Konzepte liefern ein vollständiges System von thermodynamisch konsistenten Schalengleichungen; diese haben wegen des M_2 -Theorems die besondere Eigenschaft, daß alle Beanspruchungsgrößen (Momente) ambivalent sind, nicht aber die Verschiebungen und Temperaturen. Weiter wird gezeigt, daß beide Konzepte zu identischen Lösungen in den Verschiebungen und in den Temperaturen führen. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich, nicht nur Übereinstimmung in den Verschiebungen und in der Temperatur, sondern auch in den Beanspruchungsgrößen beider Konzepte zu erreichen. Eine Potentialfunktion ist jetzt bestimmend für alle Momente und die kinematischen Variablen und die Momente sind konjugiert. Ferner stimmen die entsprechenden zweidimensionalen mechanischen Stoffgleichungen mit den Stoffgleichungen überein, wie man sie aus den klassischen dreidimensionalen thermoelastischen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen durch Integration über die Schalendicke erhält. Für dieses eigentlich unerwartete Resultat wird eine partielle Begründung geliefert.

Bei ungleichförmiger Temperatur über die Schalendicke (allgemeiner, nicht-isothermer Fall) liefern die rein energetischen Betrachtungen (1. Teil) bei beiden schalentheoretischen Konzepten noch nicht hinreichend viele zweidimensionale Bilanzgleichungen. Die Gewinnung weiterer Bilanzgleichungen aus der Entropie-Forderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen stellt einen wesentlichen, neuen Gesichtspunkt dar. Wie im quasi-isothermen Fall werden auch jetzt die beiden schalentheoretischen Konzepte nebeneinander verfolgt. Ziel dieser weiteren Analyse ist zu klären, ob auch in diesem Fall ein vollständiges System von Schalengleichungen für beide Konzepte gewinnbar ist und ob sich hier die ähnlichen Struktureigenschaften wiederfinden lassen, wie sie im quasi-isothermen Fall bestehen.

Die Auswertung der Entropie-Forderung führt nun allerdings auf weitere Beanspruchungsgrößen höherer Ordnung (Momente 3. und 4. Ordnung). Bei beiden schalentheoretischen Konzepten liefert die Auswertung der integralen Entropieungleichung nur summarische Restriktionen für die Beanspruchungsgrößen; insbesondere ergeben sich keine Einschränkungen für die Momente 2. und höherer Ordnung. Im Unterschied zum quasi-isothermen Fall sind hier aber die Lösungen für das Verschiebungs- und Temperaturfeld nicht unabhängig von der Wahl der Stoffgleichungen für die Momente höherer Ordnung. Für diese Stoffgleichungen lassen sich weitere Einschränkungen finden, wenn Annahmen getroffen werden, die über die der quasi-isothermen Theorie hinausgehen. Diese liefern zweidimensionale, thermoelastische Stoffgleichungen für alle Momente, für die jetzt drei Potentialfunktionen bestimmend werden. Diese Stoffgleichungen sind verträglich mit den summarischen Restriktionen. Damit erhält man auch im nicht-isothermen Fall für das 2. schalentheoretische und unter bestimmten Voraussetzungen auch für das 1. schalentheoretische Konzept ein übereinstimmendes, vollständiges System thermodynamisch konsistenter Schalengleichungen.

Die theoretischen Arbeiten werden abgeschlossen mit der Ableitung der entsprechenden kinematischen, dynamischen und thermischen Randbedingungen. Die Entwicklungen werden ergänzt durch eine komponentenweise Darstellung der Schalengleichungen in Lagrangeschen Koordinaten in der undeformierten Ausgangskonfiguration. Diese werden mit anderen Ergebnissen aus der Literatur verglichen.

NON-ISOTHERMAL THEORY OF THERMOELASTIC SHELLS UNDER LARGE DEFORMATIONS

PART 2: EVALUATION OF ENTROPY BALANCE CONDITIONS

Summary

It is the aim of the study presented in part 1^x and 2 to explore a new approach for the derivation of two-dimensional balance equations and constitutive relations for thermoelastic shells of arbitrary geometry and under large deformations. This is done by taking proper account of thermodynamic principles. The starting point for this mathematical development is an evaluation of the form-invariance of the integral energy balance equation under changes of the observer system and an evaluation of the integral Clausius-Duhem entropy inequality and its interpretation in modern continuum thermodynamics (Coleman-Noll approach). The embedding of the derivation of the two-dimensional shell equations in this thermodynamic frame ensures the development of a thermodynamically consistent shell theory.

The displacement field in the shell was approximated by a linear distribution across the thickness of the shell whereas the inverse of the temperature was represented by a quadratic distribution. It was shown that the two integral thermodynamic principles are insufficient to obtain a complete system of two-dimensional balance equations; additional conditions are necessary. These conditions were obtained with the help of a physically motivated interpretation of the approximate ansatz for the displacement and temperature distributions. Both approximate distributions are considered to represent internal kinematic and thermal constraints which are realized in a thought experiment by additional virtual agencies (e.g. volume forces and heat sources). For a unique characterization of this new problem, these agencies are subjected to physically plausible energy and entropy conditions in integral form, which accompany the two basic thermodynamic principles. Whether these conditions are sufficient to obtain a complete set of two-dimensional balance equations for the shell has to be shown by further analysis.

The evaluation of the integral energy balance equation and of the energy condition for the virtual agencies has been done in part 1. It was shown that some freedom is still present in the choice of the additional agencies. Two concepts (1. and 2. shell concept) were conceived which differ with respect

^x T. Malmberg: Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen, Teil 1: Auswertung von Energiebilanzbedingungen, KfK 4374, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988

to specific choices for the additional agencies. These concepts lead to two different sets of two-dimensional balance equations as well as two different algebraic restrictions for the two-dimensional mechanical constitutive relations.

In part 2 presented here the entropy condition for the virtual agencies and the integral Clausius-Duhem entropy inequality are evaluated for both shell concepts. This is accompanied by a direct ansatz for the two-dimensional constitutive relations which have to be form-invariant under observer transformations. The two-dimensional mechanical constitutive relations are of special interest; they relate weighted averages of the stresses across the shell thickness (e.g. moments of 0., 1. and 2. order) and kinematic quantities as well as quantities characterizing the temperature field.

First, the case of a uniform temperature (quasi-isothermal case) across the shell thickness is analysed. Under this condition the energetic considerations in part 1 provided sufficiently many two-dimensional balance equations for the shell; thus the entropy-condition for the virtual agencies gives no additional balance equation. The evaluation of the integral Clausius-Duhem entropy inequality leads to a set of restrictions on the two-dimensional constitutive relations except for the moments of highest order (i.e. 2nd order moments). However, the choice of the constitutive relations for the 2nd order moments does not influence the solutions for the displacement and temperature fields; thus, these relations may be chosen as convenient (M_2 -theorem). Both shell concepts lead to a complete set of thermodynamically consistent shell equations; due to the M_2 -theorem they are subjected to the peculiar property that all moments are ambiguous whereas the displacement and temperature fields are unambiguous. Further, it is proved that both concepts give identical solutions for the shell displacements and temperature. Taking account of certain conditions it is possible to show that agreement may be obtained, not only in the displacements and temperatures, but also in the moments of all orders of both concepts. Further, one potential function determines the moments of all orders and the kinematical variables and the moments are conjugated. The corresponding two-dimensional constitutive relations for the moments are in agreement with relations obtained by integration of the classical three-dimensional stress-strain relation. This unexpected result is explained partially by an extra consideration.

If a nonuniform temperature (general non-isothermal case) across the shell thickness is assumed, the purely energetic considerations in part 1 do not give a sufficient number of two-dimensional balance equations for both concepts. The generation of additional balance equations from the integral entropy condition for the virtual agencies represents an essentially new aspect. Again, the two shell concepts are considered. It is the aim of this further analysis to see, if again a complete set of shell equations can be obtained for both concepts and if the same qualitative structure exists as for the quasi-isothermal case.

The evaluation of the entropy condition makes it necessary to introduce higher order moments (3rd and 4th order moments). Further, from the integral entropy inequality a set of constitutive restrictions is deduced involving all moments; however, no explicit restrictions are obtained for the 2nd and higher order moments. In contrast to the quasi-isothermal case the solutions for the displacement and temperature fields are not independent of the choices for the constitutive relations of the moments of 2nd and higher order. For these relations further restrictions may be obtained if additional assumptions are made which go beyond those of the quasi-isothermal theory. They lead to two-dimensional thermoelastic relations for the moments of all orders. Now, three potential functions determine the moments. These constitutive relations are consistent with the restrictions deduced earlier from the integral entropy inequality. Thus, it is possible to obtain a complete system of thermodynamically consistent shell equations for the 2. shell concept and, with certain conditions implied, the same system is obtained for the 1. shell concept.

The study is concluded by the derivation of the corresponding kinematic, dynamic and thermal boundary conditions. Also the development is supplemented by a component representation of the shell equations referred to the undeformed reference configuration using Lagrangian coordinates. A comparison with results from the literature is included.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
E. Einführung und Anknüpfung an Teil 1	1
9. Auswertung der Entropiebedingungen und der Beobachterinvarianz bei gleichförmiger Temperatur über die Schalendicke	9
9.1 Einschränkungen für die zweidimensionalen Stofffunktionen beim 1. schalentheoretischen Konzept	9
9.1.1 Die zweidimensionale Entropieungleichung und das Dissipationspostulat	9
9.1.2 Ableitung von Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen aus der Beobachterinvarianz	20
9.1.3 Zusammenhang zwischen den kinematischen Zustandsvariablen der Schale und den Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors im Schalenraum	28
9.1.4 Ableitung von Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen aus dem Dissipationspostulat	31
9.1.5 Bedeutung der Momente 2. Ordnung für die 2D-Schalengleichungen: Das M_2^1 -Theorem	39
9.1.6 Alternative Formen der Stoffgleichungen	42
9.1.7 Folgerungen aus der verschärften Beobachterinvarianz für die Massieusche Funktion der Schale	50
9.2 Einschränkungen für die zweidimensionalen Stofffunktionen beim 2. schalentheoretischen Konzept	53
9.2.1 Ableitung von Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen aus der Beobachterinvarianz und aus dem Dissipationspostulat	53
9.2.2 Das M_2^1 -Theorem	59
9.2.3 Identität der Lösungen $\bar{r}, \bar{d}, \bar{\delta}$ des 1. und 2. schalentheoretischen Konzepts	62
9.2.4 Alternative Formen der Stoffgleichungen beim 2. schalentheoretischen Konzept	63

9.3 Zusammenfassung der Ergebnisse, Diskussion und Interpretation	69
9.3.1 Zusammenfassung der Ergebnisse	69
9.3.2 Diskussion und Interpretation	77
10. Auswertung der Entropiebedingungen und der Beobachterinvarianz bei ungleichförmiger Temperaturverteilung über die Schalendicke	92
10.1 Die Problemstellung	92
10.2 Die zweidimensionale Entropieungleichung	93
10.3 Das Problem der Auswertung der zweidimensionalen Entropieungleichung und die Bedeutung der Entropie-Forderung	100
10.4 Konsequenzen der Entropieungleichung und der entropischen Bilanzgleichungen beim 2. schalentheoretischen Konzept	106
10.5 Konsequenzen der konstitutiven Restriktionen beim 2. schalentheoretischen Konzept	134
10.6 Konsequenzen der Entropieungleichung und der entropischen Bilanzgleichungen beim 1. schalentheoretischen Konzept	153
10.6.1 Alternative Strategien	153
10.6.2 Auswertung der Entropieungleichung und der entropischen Bilanzgleichungen mit der reduzierten lokalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems (erste Strategie)	156
10.6.3 Auswertung der Entropieungleichung und der entropischen Bilanzgleichungen mit der nicht-reduzierten lokalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems (zweite Strategie)	167
10.6.3.1 Gewichtete Integration der nicht-reduzierten Energiebilanzgleichung	167
10.6.3.2 Konsequenzen der Beobachterinvarianz der entropischen Bilanzgleichungen	180
10.6.3.3 Verträglichkeitsbedingungen für die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art	199
10.6.3.4 Auswertung der Entropieungleichung	206
10.6.3.5 Diskussion und Schlußfolgerungen	213

11. Randbedingungen	218
11.1 Kinematische Randbedingungen	218
11.2 Dynamische und thermische Randbedingungen	220
11.2.1 Der quasi-isotherme Fall (1. schalentheoretisches Konzept)	221
11.2.2 Der quasi-isotherme Fall (2. schalentheoretisches Konzept)	243
11.2.3 Der nicht-isotherme Fall	247
11.2.4 Umformung der dynamischen Randbedingungen	250
12. Zusammenfassender Rückblick und abschließende Bemerkungen	251
Anhang (4): Minimalität des kinematischen Variablensatzes	265
Anhang (5): Beweis der Äquivalenz der integrierten 3D-Stoff- gleichungen und der direkt abgeleiteten 2D-Stoff- gleichungen	268
Anhang (6): Konjugierte Variablen im 1. schalentheoretischen Konzept	275
Anhang (7): Konstitutive Restriktionen der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung	283
Anhang (8): Verallgemeinerte Leistungsintegrale der äußeren Lasten auf den Laibungsflächen	289
Anhang (9): Bilanz- und Stoffgleichungen sowie Randbedingungen für quasi-isotherme Bedingungen in komponentenweiser Darstellung in der Ausgangskonfiguration und Ver- gleich mit anderen Theorien	292
Literatur	308
Abbildungen	317

E. Einführung und Anknüpfung an Teil 1

Im ersten Teil^x dieser Abhandlung waren zwei Konzepte vorgestellt worden, um die zweidimensionalen Bewegungsgleichungen von thermoelastischen Schalen bei großen Deformationen herzuleiten. Vorausgesetzt wurde dabei eine lineare Verteilung der Verschiebungen und eine quadratische Verteilung der Temperaturinversen über die Schalendicke, wobei die letzte aber bisher noch keine signifikante Bedeutung bei der mathematischen Entwicklung hatte.

Grundlage war die integrale Energiebilanzgleichung (1. Hauptsatz) und seine Forminvarianz gegenüber Beobachtertransformationen. Darüberhinaus wurden die angenommenen Verteilungen der Verschiebungen und der Temperaturinversen als innere kinematische und thermische Zwangsbedingungen interpretiert, die durch Reaktionsgrößen in der Form zusätzlicher, gedachter Einwirkungen (z.B. Volumenkräfte, Wärmequellen) in einem Gedankenexperiment exakt zu realisieren sind. Dies bedeutet eigentlich die Lösung eines neuen, dreidimensionalen Problems (erweitertes Problem). Es lassen sich nun aber beliebig viele gedachte Zusatzeinwirkungen finden, die alle die inneren Zwangsbedingungen realisieren. Diese Willkürlichkeit kann nur durch zusätzliche Forderungen hinsichtlich der gedachten Zusatzeinwirkungen beseitigt werden, die zugleich auch erlauben sollen, das dreidimensionale Feldproblem auf ein zweidimensionales zu reduzieren. Hierzu waren die physikalisch unmittelbar einleuchtende Energie- und Entropie-Forderung für die gedachten Zusatzeinwirkungen definiert worden, die durch zwei Rahmenforderungen - Unabhängigkeits- und Bestimmtheitsforderung - ergänzt wurden (Kap. 7, Teil 1).

In Teil 1 wurde die Energie-Forderung (A) und ihre Nebenbedingungen (A1) bis (A3) spezifiziert:

(A) Formuliert man die integrale Energiebilanzgleichung des erweiterten Problems für einen Schalenabschnitt, der durch die Schalenlaibungen und einen Randstreifen^{xx} begrenzt ist, dann sollen die gedachten Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag zur Gesamtenergiebilanz liefern und zwar

(A1) für jeden beliebigen Schalenabschnitt,

(A2) für alle Beobachtersysteme

^x T. Malmberg: Nicht-isotherme Theorie großer Deformationen thermoelastischer Schalen; Teil 1: Auswertung von Energiebilanzbedingungen, KfK4374, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988

^{xx} Dieser Randstreifen habe keinen Punkt mit dem eigentlichen Schalenrand gemeinsam, auf dem Belastungen oder Verschiebungen vorgeschrieben sind.

(A3) und nicht nur für die vorgegebenen aktuellen äußeren Einwirkungen, sondern für alle schlechthin.

In Teil 1 wurde dann gezeigt, daß diese Forderungen an die gedachten Zusatzeinwirkungen noch nicht ausreichen, um geeignete Bewegungsgleichungen, die der Unabhängigkeitsforderung genügen, zu gewinnen. Zwei Konzepte, die sich u.a. gerade in den hier noch erforderlichen Bedingungen unterscheiden, wurden entwickelt:

Erstes schalentheoretisches Konzept

Bei diesem Konzept wird an keiner Stelle explizit von dreidimensionalen lokalen Bilanzgleichungen Gebrauch gemacht. Die integrale Energiebilanzgleichung und ihre Forminvarianz gegenüber Beobachtertransformationen sowie die Energie-Forderung des erweiterten Problems für einen Schalenabschnitt ist durch eine weitere Bedingung an die gedachten Zusatzeinwirkungen zu ergänzen: Der Beitrag \hat{D}_{red} der gedachten Volumenkräfte und -momente zum zweidimensionalen Drehimpulssatz der Schale soll verschwinden (Kap. 8.2.2.4, Teil 1). Diese Bedingung zusammen mit den Forderungen (A1) - (A3) liefern bestimmte integrale Aussagen darüber, wie die gedachten Zusatzeinwirkungen einzustellen sind.

Man erhält so die folgenden zweidimensionalen Feldgleichungen, in denen die Zusatzeinwirkungen nicht mehr enthalten sind:

Die Bewegungsgleichung 1. Art

$$\begin{aligned} \rho_{,R} \bar{b} + \bar{f}_0 - \rho_{,R} \ddot{\bar{r}} - \rho_{,R} \ddot{\bar{d}} \\ + [M^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q^{\beta} \bar{d}]_{;\beta} = \bar{0} \end{aligned} \quad (E-1)$$

Die Bewegungsgleichung 2. Art

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{S}_{12} \ddot{\bar{b}} + \ddot{\bar{y}}_2 - \mathcal{S}_{12} \ddot{\bar{r}} - \mathcal{S}_{22} \ddot{\bar{d}} \\
 & + [M_1^{\alpha\beta} \ddot{\bar{r}}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \ddot{\bar{d}}_{1\alpha} + Q_1^\beta \ddot{\bar{d}}]_{;\beta} \\
 & - [(Q_0^\beta + L^\beta) \ddot{\bar{r}}_{1\beta} + Q_1^\beta \ddot{\bar{d}}_{1\beta} + Q \ddot{\bar{d}}] = \bar{0}
 \end{aligned} \tag{E-2}$$

mit

$$\begin{aligned}
 L^\alpha &= - (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\beta \\
 &+ \frac{1}{2} (M_2^{\gamma\delta} - M_2^{\delta\gamma}) (\eta_\delta^\alpha \mu_\gamma - \eta_\gamma^\alpha \mu_\delta)
 \end{aligned} \tag{E-3}$$

Die Orthogonalitätsbedingung

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta} [& \frac{1}{2} (M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}) + (M_1^{\alpha\gamma} - M_1^{\gamma\alpha}) \eta_\gamma^\beta \\
 & + \frac{1}{2} (M_2^{\gamma\delta} - M_2^{\delta\gamma}) \eta_\delta^\alpha \eta_\gamma^\beta] = 0
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 & (M_0^{12} - M_0^{21}) + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\eta_1^1 + \eta_2^2) \\
 & + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\eta_2^1 \eta_2^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) = 0
 \end{aligned} \tag{E-4}$$

Die reduzierte Energiebilanzgleichung

$$\begin{aligned}
 \underset{0}{S}_R \dot{\xi} = & \underset{0}{M}^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} \dot{\tau}_{1\beta} \\
 & + \underset{1}{M}^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \dot{\tau}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \dot{d}_{1\beta}) \\
 & + \underset{2}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} \dot{d}_{1\beta} \\
 & + \underset{0}{Q}^\beta (\bar{\tau}_{1\beta} \dot{d} + \bar{d} \dot{\tau}_{1\beta}) \\
 & + \underset{1}{Q}^\beta (\bar{d}_{1\beta} \dot{d} + \bar{d} \dot{d}_{1\beta}) \\
 & + Q \bar{d} \dot{d} \\
 & + L^\beta \bar{\tau}_{1\beta} \dot{d} \\
 & + \underset{0}{S}_R \tau - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-] - \underset{0}{h}^\beta :_\beta .
 \end{aligned}
 \tag{E-5}$$

Hierbei ist Q ein noch nicht interpretierter Skalar, der aber den Charakter einer Beanspruchungsgröße hat und für den die Existenz einer Stoffgleichung vorausgesetzt werden muß. Die Orthogonalitätsbedingung (E-4) ist eine identisch zu erfüllende Restriktion für die Stoffgleichungen der Momente $\underset{0}{M}^{\alpha\beta}$ etc.

Zweites schalentheoretisches Konzept

Beim zweiten Konzept wird explizit von dreidimensionalen lokalen Bilanzgleichungen (Impuls- und Drehimpulssatz) und Randbedingungen des erweiterten Problems Gebrauch gemacht.^x Die Energie-Forderung wird ergänzt durch die Hypothese (Kap. 8.3, Teil 1), daß bestimmte Integralausdrücke der gedachten Zusatzeinwirkungen unabhängig von den Raten $\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{d}}, \dot{\bar{r}}_{,\alpha}$ und $\dot{\bar{d}}_{,\alpha}$ gewählt werden können; diese Integralausdrücke ergeben sich aus der Struktur des Energiebeitrags der gedachten Zusatzeinwirkung in der integralen Energiebilanzgleichung für einen Schalenabschnitt und sind zum Teil direkt physikalisch interpretierbar. Zusammen mit der Energie-Forderung, insbesondere der Forderung (A3) und der lokalen 3D-Bilanzgleichung des erweiterten Problems, liefert dann das zweite Konzept die folgenden zweidimensionalen Feldgleichungen:

Die Bewegungsgleichung 1. Art

(dieselbe wie unter (E-1))

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_R \bar{b}_0 + \bar{y}_0 - \mathcal{S}_R \ddot{\bar{r}} - \mathcal{S}_R \ddot{\bar{d}} \\ & + [M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + M_0^{3\alpha} \bar{d}]_{;\beta} = \bar{0} \end{aligned} \quad (E-6)$$

$$M_0^{3\alpha} \equiv Q^\alpha$$

Die Bewegungsgleichung 2. Art

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_R \bar{b}_2 + \bar{y}_1 - \mathcal{S}_R \ddot{\bar{r}} - \mathcal{S}_R \ddot{\bar{d}} \\ & + [M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + M_1^{3\beta} \bar{d}]_{;\beta} \\ & - [M_0^{3\beta} \bar{r}_{,\beta} + M_1^{3\beta} \bar{d}_{,\beta} + M_0^{33} \bar{d}] = \bar{0} \end{aligned} \quad (E-7)$$

$$M_1^{3\alpha} \equiv Q^\alpha$$

^x Dies kann als gleichbedeutend mit der Annahme der Beobachterinvarianz der dreidimensionalen, lokalen, nicht-reduzierten Energiebilanzgleichung angesehen werden. Es ist dann auch die spezifische innere Energie \mathcal{E} eine beobachterinvariante Größe.

Symmetriebedingungen

$$(M_m^{KL} - M_m^{LK}) = 0 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{ll} m=0,1 & K,L=1,2,3 \\ m=2 & K,L=1,2 \end{array} \right\} \quad (\text{E-8})$$

Die reduzierte Energiebilanzgleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{0R} \dot{\mathcal{S}}_0 &= M_0^{\alpha\beta} \bar{\pi}_{1K} \cdot \dot{\bar{\pi}}_{1\beta} \\ &+ M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1K} \cdot \dot{\bar{\pi}}_{1\beta} + \bar{\pi}_{1K} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\ &+ M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1K} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\ &+ M_0^{\alpha\beta} (\bar{\pi}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{\pi}}_{1\beta}) \\ &+ M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\ &+ M_0^{\alpha\beta} \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} \\ &+ \mathcal{S}_{0R} \bar{\pi}_0 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-] - \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{E-9})$$

Die Symmetriebedingungen (E-8) sind identisch zu erfüllende Restriktionen für die Stoffgleichungen der Momente $M_0^{\alpha\beta}$ etc.

Der Vergleich der beiden Konzepte zeigt, daß die Bewegungsgleichung 1. Art (zweidimensionaler Impulssatz der Schale) in beiden Konzepten diesselbe ist, dagegen bestehen Unterschiede in allen übrigen Bilanzgleichungen und den algebraischen Restriktionen für die Stoffgleichungen der Momente. Weiterhin ist deutlich, daß bei beiden Konzepten nur sieben skalare Differentialgleichungen für die insgesamt neun skalaren Lösungsfunktionen (je drei Komponenten von \bar{r} und \bar{d} sowie Λ_m , $m = 0, 1, 2$) zur Verfügung stehen; d.h. die Bestimmtheitsforderung (Kap. 7, Teil 1) ist noch nicht erfüllt. Eine ausführliche Diskussion dieser Teilergebnisse war in Kap. 8.4, Teil 1 gebracht worden, die mit drei offenen Fragen abschloß:

- Durch welche weiteren Forderungen sind die beiden schalentheoretischen Konzepte noch zu ergänzen, um "bestimmte" Differentialgleichungssysteme für \bar{r} , \bar{d} , Λ_m ($m = 0, 1, 2$) zu bekommen?
- Welche allgemeine Struktur haben die zweidimensionalen Stoffgleichungen unter Beachtung der verschiedenen Restriktionen, der integralen Entropieungleichung und der Entropie-Forderung?
- Führen das 1. und 2. schalentheoretische Konzept nach Auswertung der integralen Entropieungleichung und der Entropie-Forderung sowie nach Klärung der Bestimmtheitsfrage zu äquivalenten Schalentheorien, d.h. zu identischen Lösungen \bar{r} , \bar{d} , Λ_m ($m = 0, 1, 2$)?

Die Klärung dieser offenen Fragen ist aus der Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung und der Entropie-Forderung (Kap. 7, Teil 1) zu erwarten, wobei zunächst generell nur von allgemeinen zweidimensionalen thermoelastischen Stoffgleichungen für die Momente $M^{\alpha\beta}$ etc. ausgegangen wird. Diese Stoffgleichungen müssen auch der Forderung der Forminvarianz gegenüber Beobachtertransformationen genügen. Die Tatsache, daß zunächst nicht von den dreidimensionalen thermoelastischen Stoffgleichungen einschließlich der zugehörigen Restriktionen (vergl. Kap. 5, Teil 1) ausgegangen wird, ist zu beachten, denn im folgenden wurden einige der Bedingungen, unter denen jene Restriktionen abgeleitet wurden, abgeschwächt. Es ist zu erwarten, daß dieses direkte Vorgehen neue Erkenntnisse über die allgemeine Struktur der zweidimensionalen Stoffgleichungen der Schale liefert.

Die Untersuchungen erfolgen im vorliegenden zweiten Teil in zwei Schritten, die sich in ihrem Allgemeingrad unterscheiden. Die erste Analyse setzt eine konstante Temperaturverteilung über die Schalendicke voraus

$(\lambda_0 \neq 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0)$; dieser Fall wird als "quasi-isotherm" bezeichnet.

Beide schalentheoretischen Konzepte werden für diese eingeschränkte Situation analysiert und miteinander verglichen.

In zweiten Schritt wird die Analyse auf den nichtisothermen Fall $\lambda_m \neq 0$, $(m = 0, 1, 2)$ erweitert; auch hier werden beide schalentheoretischen Konzepte verfolgt. Es wird weiter die Frage gestellt, ob die beim quasi-isothermen Fall gefundenen generellen Strukturaussagen, die sich aus dem Vergleich der beiden Konzepte ergeben, auch auf den nicht-isothermen Fall übertragbar sind. Diese Darstellung in zwei Schritten ist sinnvoll, da die Untersuchung des "quasi-isothermen" Falls unerwartete Besonderheiten zeigt, die im allgemeineren Fall nicht erhalten werden.

9. Auswertung der Entropiebedingungen und der Beobachterinvarianz bei gleichförmiger Temperatur über die Schalendicke

9.1 Einschränkungen für die zweidimensionalen Stoffgleichungen beim 1. schalentheoretischen Konzept

9.1.1 Die zweidimensionale Entropieungleichung und das Dissipationspostulat

Unter der Voraussetzung, daß die Temperaturinverse unabhängig von der Dickenkoordinate Θ ist (d.h. keine Temperaturgradienten über die Schale) wird

$$\Lambda = \Lambda_0(\Theta^x, t) > 0, \quad (9.1)$$

die integrale Clausius-Duhem Ungleichung (Entropieungleichung) des erweiterten Problems für einen beliebigen Teilbereich der Schale zwischen den Schalenlaibungen lautet dann

$$\int_{V_R} s_R \dot{\eta} dV_R \geq \int_{V_R} (r + \hat{r}) \Lambda_0 dV_R - \oint_{\partial V_R} \bar{q}_R \cdot \bar{N} \Lambda_0 dQ_R. \quad (9.2)$$

Das Oberflächenintegral für den Entropiefluß durch Wärmeleitung erstreckt sich über die Schalenlaibungen und den Randstreifen C_F (Abb. 11, Teil 1).

Dieses Integral kann leicht ausgewertet werden, indem die Ergebnisse von Kap. 8.1 (S. 122, Teil 1) verwendet werden und dort \bar{q}_R durch $\bar{q}_R \Lambda_0$ ersetzt wird; dabei ist zu beachten, daß auf der Schalenlaibung der

Wärmefluß $\bar{q}_R \bar{N}$ sich aus dem aktuellen, dort vorgegebenen Wärmefluß $\bar{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+$ bzw. $\bar{q}_R^- \cdot \bar{N}^-$ und dem zusätzlichen gedachten Wärmefluß $\hat{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+$ bzw. $\hat{q}_R^- \cdot \bar{N}^-$ zusammensetzt; d.h.

$$\bar{q}_R \cdot \bar{N} = \begin{cases} \bar{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+ + \hat{q}_R^+ \cdot \bar{N}^+ & \text{für } \Theta = S^+ \\ \bar{q}_R^- \cdot \bar{N}^- + \hat{q}_R^- \cdot \bar{N}^- & \text{für } \Theta = S^- \end{cases} \quad (9.3)$$

Mit

$$\eta := \frac{1}{s_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} s_R \eta d\Theta \quad (9.4)$$

und mit den Definitionen ((8.31), (8.32), (8.35), (8.37), (8.38)) erhält man nach formaler Integration über die Schalendicke die folgende zweidimensionale Entropieungleichung

$$\int_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial x} \dot{\eta} d\mathcal{A} \geq \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right) \Lambda - \left(h^\alpha \Lambda \right)_{;\alpha} \right\} d\mathcal{A} + \hat{\mathcal{N}}, \quad (9.5)$$

wobei

$$\hat{\mathcal{N}} := \int_{\mathcal{A}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \hat{\tau} - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right\} \Lambda d\mathcal{A}. \quad (9.6)$$

Hier ist $\hat{\mathcal{N}}$ die Gesamtentropiezufuhr infolge der gedachten Zusatzwärmequellen bzw. -senken und gedachten Zusatzwärmeflüsse auf den Schalenlängen. Entsprechend der Entropie-Forderung (B1) (vergl. S. 109, Teil 1), daß im erweiterten Problem die Gesamtentropiezufuhr infolge der gedachten zusätzlichen äußeren Einwirkungen für jedes beliebige Linienelement (d.h. für jeden beliebigen Integrationsbereich \mathcal{A}) verschwinden soll, ist hier jetzt zu verlangen, daß der Integrand von $\hat{\mathcal{N}}$ verschwindet; da $\Lambda > 0$, ist also

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{\tau} - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad (9.7)$$

zu fordern. Dies bedeutet, daß die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen im Energiesatz ((8.1), Teil 1) des erweiterten Problems für sich genommen verschwinden müssen:

$$\hat{H}_n + \hat{H}_{\mathcal{L}} = 0. \quad (9.7)^I$$

Mit ((8.39), Teil 1) gilt dann auch

$$\hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_e = 0, \quad (9.8)$$

d.h. die Leistungen der gedachten mechanischen Zusatzeinwirkungen verschwinden ebenfalls als Ganzes. Die Entropie-Forderung (B1) führt hier also zu einer Aufspaltung der Bilanzierung der Energiezufuhr der gedachten Zusatzeinwirkungen. Für das Weitere soll immer vorausgesetzt werden, daß (9.7) und dann auch (9.7)^I und (9.8) erfüllt werden. Die Ungleichung (9.5) lautet jetzt

$$\int_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial R} \dot{\eta} d\mathcal{A} \geq \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial R} \tau - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right] \right. \\ \left. - \left(h^\alpha \Lambda \right)_{;\alpha} \right\} d\mathcal{A}. \quad (9.9)$$

Diese 2D-Entropieungleichung ist mathematisch gesehen von analoger Struktur wie die Entropieungleichung im dreidimensionalen Fall ((5.1), Teil 1):
Dem zweidimensionalen Wärmequell- bzw. -senkenterm

$$\frac{\partial}{\partial R} \tilde{\tau} := \underbrace{\frac{\partial}{\partial R} \tau}_{\text{Beitrag durch aktuelle Wärmequellen- und senken im Schalenraum}} - \underbrace{\left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right]}_{\text{Beitrag durch aktuelle Wärme Flüsse auf den Schalenlaibungen}} \quad (9.10)$$

entspricht im dreidimensionalen Fall der Wärmequell- bzw. -senkenterm

$$S_R \tau \quad ; \text{ weiter sind der zweidimensionale Entropiefluß } \frac{h^\alpha \Lambda}{\partial}$$

und die zweidimensionale Schalenentropie η_0 . Analoga des dreidimensionalen Entropieflusses $\frac{q^k}{r^k} \Lambda$ und der Entropie η des dreidimensionalen Problems.

Die gesuchten Lösungsfunktionen $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\Lambda(\theta^\alpha, t)$ stellen insgesamt sieben skalare Größen dar. Für sie stehen sieben Differentialgleichungen zur Verfügung, u.z. je drei skalare Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art (E-1) und (E-2) sowie die (skalare) reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung (E-5) des 1. schalentheoretischen Konzeptes. Die Bestimmtheitsforderung (Kap. 7, Teil 1) ist damit erfüllt, wenn außerdem für ξ , die Momente der Spannungen $M^{\alpha\beta}$ etc. und die unbestimmte Beanspruchungsgröße Q sowie für die mittleren Wärmeflüsse h^α konstitutive Gleichungen zur Verfügung stehen. Die Stoffgleichungen für die Momente der Spannungen müssen allerdings die Orthogonalitätsbedingung (E-4) identisch erfüllen.

Die zweidimensionalen Stoffgleichungen^x des 1. schalentheoretischen Konzeptes seien folgende

$$M_0^{\alpha\beta} = \overset{\nabla}{M}_0^{\alpha\beta}(\bar{r}_{,1\alpha}, \bar{d}_{,1\alpha}, \bar{d}, \Lambda)$$

$$M_1^{\alpha\beta} = \overset{\nabla}{M}_1^{\alpha\beta}(\text{"})$$

$$M_2^{\alpha\beta} = \overset{\nabla}{M}_2^{\alpha\beta}(\text{"})$$

$$M_0^{3\alpha} \equiv Q_0^\alpha = \overset{\nabla}{Q}_0^\alpha(\text{"})$$

$$M_1^{3\alpha} \equiv Q_1^\alpha = \overset{\nabla}{Q}_1^\alpha(\text{"})$$

$$Q = \overset{\nabla}{Q}(\text{"})$$

$$\xi = \overset{\nabla}{\xi}(\text{"})$$

$$h_0^\alpha = \overset{\nabla}{h}_0^\alpha(\Lambda, \Lambda_{,0\alpha}).$$

^x Das Symbol ∇ charakterisiert das darunter stehende Zeichen (z.B. $\overset{\nabla}{M}_0^{\alpha\beta}$) als eine Funktion der angegebenen Argumentenliste; dieses Symbol soll den Unterschied zum Funktionswert (z.B. $M_0^{\alpha\beta}$) deutlich machen.

Verschiedene hier enthaltene ad-hoc-Annahmen werden im folgenden Kapitel diskutiert.

In der Entropieungleichung (9.9) ist noch die mittlere Entropie enthalten, so daß auch für diese Größe eine Stofffunktion der Form

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{r}_{,\alpha}, \bar{d}_{,\alpha}, \bar{d}, \bar{\rho})$$

vorausgesetzt wird.

Das Coleman-Noll'sche Dissipationspostulat (Kap. 5.4, Teil 1) für dieses zweidimensionale Problem stellt sich jetzt wie folgt dar. Für die Definition eines "thermodynamischen Prozesses" bei diesem Schalenmodell ist zunächst die Angabe der folgenden Funktionen erforderlich:

(1) Die Geometrie der Schale im momentanen Zustand definiert durch

$$\bar{r}(\theta^\alpha, t) \quad \text{und} \quad \bar{d}(\theta^\alpha, t) \quad \text{und das Feld der Temperaturinversen} \\ \bar{\Delta}(\theta^\alpha, t).$$

(2) Die Beanspruchungsgrößen

$$M_m^{\alpha\beta}(\theta^\alpha, t), \quad m = 0, 1, 2$$

$$Q_m^\alpha(\theta^\alpha, t), \quad m = 0, 1$$

$$Q(\theta^\alpha, t)$$

(3) Die äußeren Lasten, u. z.

die Flächenlasten $\int_{\bar{S}_R} \bar{b} + \bar{y}_0$

die Flächenmomente $\bar{\rho}_R \bar{\delta} + \bar{\gamma}_R$
 ↑ infolge der Massenkraftdichte ↑ infolge hydrostatischen Druckes

- (4) Die mittlere innere Energie $\varepsilon_0(\theta^\alpha, t)$
- (5) Die mittleren Wärme Flüsse $h_0^\alpha(\theta^\alpha, t)$
- (6) Die Wärmezufuhr der Schale $S_{0R} \gamma_0 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-]$
- (7) Die mittlere Entropie $\eta_0(\theta^\alpha, t)$

Diese Funktionen bilden nun dann einen "thermodynamischen Prozess" für das Schalenmodell, wenn sämtliche zweidimensionalen Bilanzgleichungen, das sind die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung für jeden beliebigen Flächenabschnitt erfüllt werden. Dies impliziert zugleich die Erfüllung bestimmter Bilanzgleichungen für die gedachten mechanischen und thermischen Zusatzeinwirkungen, u. z. ((8.39), (8.49), (8.70), Teil 1). Diese Bilanzen sind aber als entkoppelt zu sehen und brauchen nicht explizit betrachtet zu werden. Um einen thermodynamischen Prozess zu definieren, genügt die Angabe der Funktionen (1), (2), (4), (5) und (7). Die übrigen Funktionen (3) und (6) sind durch die lokalen 2D-Bilanzgleichungen festgelegt.

Dieser so definierte thermodynamische Prozess wird als zulässig bezeichnet, wenn er mit den 2D-Stoffgleichungen verträglich ist. Sind diese also vorgegeben, dann kann zu jedem beliebigen^x Satz von Funktionen $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\Lambda_0(\theta^\alpha, t)$ ein zulässiger thermodynamischer Prozess angegeben werden, denn alle anderen Funktionen des zulässigen thermodynamischen Prozesses sind dann mit den Stoff- und Bilanzgleichungen berechenbar.

Bei Vorgabe der aktuellen äußeren Einwirkungen und der Anfangs- und Randbedingungen für die zweidimensionalen Schalengrößen, auf die später noch einzugehen sein wird, erlauben umgekehrt die zweidimensionalen Bilanz- und Stoffgleichungen die Lösungen $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\Lambda_0(\theta^\alpha, t)$ zu ermitteln. Es ist jetzt wichtig zu beachten, daß die 2D-Entropiegleichung (9.9) nicht erforderlich ist, um diese

^x Hier werden hinreichend stetige Funktionen vorausgesetzt.

Lösungen zu bestimmen. Gleichwohl darf die Ungleichung nicht verletzt werden.

Offensichtlich könnte die Bedeutung der Entropieungleichung im Prinzip in zwei verschiedenen Aspekten liegen:

- Einmal könnte die Entropieungleichung als eine Prozesseinschränkung angesehen werden. Das heißt, ein ermittelter, zulässiger thermodynamischer Prozess wird überprüft, ob er mit der Entropieungleichung verträglich ist. Die Lösung ist, vom Anfangszeitpunkt t_0 an gerechnet, so lange physikalisch akzeptabel, wie an keinem Punkt der Referenzfläche die Entropieungleichung verletzt wird. Sollte dann eine Verletzung eintreten, dann ist das rechnerische Ergebnis von diesem Zeitpunkt an nicht mehr zulässig.

Aus dieser Interpretation sind nun aber weitere Konsequenzen zu ziehen. Es war davon ausgegangen worden, daß für die thermoelastische Schale die Struktur der zweidimensionalen Stofffunktionen $M^{\alpha\beta}$ etc. unabhängig vom zeitlichen Verlauf ihrer Argumente $\bar{r}_{i\alpha}$, $\bar{d}_{i\alpha}$, \bar{d} und \mathcal{A} sind. Ginge man davon aus, daß die zweidimensionalen Stofffunktionen aber sonst in weiten Grenzen beliebig wählbar sind, dann würde eine Verletzung der Entropieungleichung durch einen zulässigen thermodynamischen Prozess als Hinweis zu verstehen sein, daß die vorgegebenen aktuellen äußeren Einwirkungen und die Anfangs- und Randbedingungen mit der Entropieungleichung nicht verträglich sind. Diese Vorstellung ist physikalisch schwerlich akzeptierbar, denn die aktuellen äußeren Einwirkungen etc. werden - allein begrenzt durch die praktische Machbarkeit - als frei manipulierbar angesehen. Aus diesem Grunde kann die Entropieungleichung nicht als eine Einschränkung für die aktuellen äußeren Einwirkungen etc., d.h. als eine Prozesseinschränkung betrachtet werden.

- Die obige Überlegung führt auf die zweite Bedeutung der Entropieungleichung als einer Einschränkung für die zweidimensionalen Stofffunktionen; das ist hier die allein mögliche Alternative zu einer Prozesseinschränkung^x. Dies ist die Coleman-Noll'sche Interpretation, die durch das folgende Dissipationspostulat ausgedrückt wird:

^x Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn die 2D-Stofffunktionen im gesamten Zustandsraum ihrer Argumente unabhängig von der Änderung ihrer Argumente die gleiche Form haben.

"Für jeden zulässigen thermodynamischen Prozess in der Schale muß die zweidimensionale Clausius-Duhem Ungleichung (Entropieungleichung) (9.9) in jedem beliebigen Flächenabschnitt^x der Schale erfüllt sein" Diese Forderung impliziert zugleich, daß die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen die Bilanzgleichung (9.7) erfüllen.

Das Dissipationspostulat bedeutet mit anderen Worten, daß die Stofffunktionen so beschaffen sein müssen, daß jede Lösung $\bar{r}(\theta^x, t)$, $\bar{d}(\theta^x, t)$ und $\Lambda_o(\theta^x, t)$ der zweidimensionalen Feldgleichungen die Entropieungleichung in jedem Flächenabschnitt identisch erfüllen. Dies heißt auch, daß irgendwelche Felder $\bar{r}(\theta^x, t)$, $\bar{d}(\theta^x, t)$ und $\Lambda_o(\theta^x, t)$, die die Entropieungleichung erfüllen sollen, Nebenbedingungen in Form der zweidimensionalen Feldgleichungen unterworfen sind.

Sind schließlich die zweidimensionalen Stofffunktionen so beschaffen, daß das Dissipationspostulat erfüllt wird, dann sollen sie als thermodynamisch konsistent bezeichnet werden.

Da grundsätzlich davon ausgegangen wird, daß die aktuellen äußeren Einwirkungen, d.h. die Funktionen (3) und (6) beliebig einstellbar sind, erfüllt jeder Satz von Funktionen (1), d.i. \bar{r} , \bar{d} und Λ_o die genannten Nebenbedingungen automatisch, denn über die Stoff- und Bilanzgleichungen lassen sich jedem dieser Funktionensätze bestimmte äußere aktuelle Einwirkungen zuordnen.

In der 2D-Entropieungleichung (9.9) treten die aktuellen äußeren thermischen Einwirkungen, die Funktionen (6), explizit auf. Bei beliebiger Wahl des Funktionensatzes (1) sind die Funktionen (6) nicht mehr unabhängig einstellbar. Die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung (E-5) und die 2D-Stoffgleichungen erlauben aber, die aktuellen thermischen Einwirkungen durch \bar{r} , \bar{d} , Λ_o und ihre Ableitungen darzustellen und dadurch aus der 2D-Entropieungleichung (9.9) zu eliminieren.

Nach Lokalisierung erhält man damit aus (9.9) als lokale 2D-Entropieungleichung

^x Die 2D-Entropieungleichung (9.9) ist eine integrale Bedingung im zweidimensionalen Raum der Referenzfläche. Die Forderung nach Gültigkeit in jedem beliebigen Flächenabschnitt ist ein Lokalisierungspostulat.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0 \dot{\mathcal{A}} \geq \mathcal{A} \left\{ \mathcal{S}_0 \dot{\mathcal{E}}_0 - \left[M_0^{\alpha\beta} (\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) \right. \right. \\
 + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 + M_2^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 + Q_0^\beta (\bar{\tau}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) \\
 + Q_1^\beta (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 + L^\alpha (\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) \\
 \left. \left. + Q (\bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}) \right] \right. \\
 \left. + h_0^{\alpha}{}_{:\alpha} \right\} - (h_0^{\alpha}{}_{:\alpha})_{:\alpha}
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Analog zu (Kap. 5.6, Teil 1) kann hier die zweidimensionale Massiesche Funktion ϕ_0

$$\phi_0 := \dot{\mathcal{A}} - \mathcal{E}_0 \mathcal{A} \tag{9.12}$$

eingeführt werden, deren materielle Zeitableitung sich zu

$$\dot{\phi}_0 = \dot{\eta}_0 - \dot{\varepsilon}_0 \Lambda_0 - \dot{\varepsilon}_0 \dot{\Lambda}_0$$

berechnet, so daß

$$\dot{\eta}_0 - \dot{\varepsilon}_0 \Lambda_0 = \dot{\phi}_0 + \dot{\varepsilon}_0 \dot{\Lambda}_0 \quad (9.13)$$

Weiter wird

$$(\dot{h}_0^\alpha \Lambda_0)_{;\alpha} - \dot{h}_0^\alpha{}_{;\alpha} \Lambda_0 = \dot{h}_0^\alpha \Lambda_{0,\alpha} \quad (9.14)$$

Mit (9.13) und (9.14) lautet dann die lokale 2D-Entropiegleichung (9.11)

$$\rho_{0R} \dot{\phi}_0 + \rho_{0R} \dot{\varepsilon}_0 \dot{\Lambda}_0 + \Lambda_0 [M_0^{\alpha\beta} (\dot{\bar{r}}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{\beta}) + \dots + Q(\dot{\bar{d}} \cdot \dot{\bar{d}})] - \dot{h}_0^\alpha \Lambda_{0,\alpha} \geq 0 \quad (9.11)^I$$

Aus dieser Gleichung sollen nun Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen der Schale

$$\dot{\phi}_0, \dot{\varepsilon}_0, M_m^{\alpha\beta} (m=0,1,2), Q_m^{\alpha} (m=0,1), Q \text{ und } \dot{h}_0^\alpha \quad (9.15)$$

abgeleitet werden; als unabhängige Zustandsvariable werden dabei die kinematischen Größen $\bar{r}_{,\alpha}, \bar{d}, \bar{d}_{,\alpha}$ und die thermischen Größen Λ_0 und $\Lambda_{0,\alpha}$ angesehen. Die Orthogonalitätsbedingung als schon bekannte Restriktion für die Momente $M_m^{\alpha\beta} \quad m=0,1,2$ ist dabei zu berücksichtigen. Den Stofffunktionen (9.15) sind die dreidimensionalen Stofffunktionen $\phi, \varepsilon, T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ und q_R^α zugeordnet, wobei allerdings Q bisher noch keine dreidimensionale Interpretation hat^x. Es soll hier aber ausdrücklich nicht auf die Restriktionen der dreidimensionalen Theorie zurückgegriffen werden; falls von diesem Gebrauch gemacht wird, wird darauf hingewiesen werden. Von dieser Vorgehens-

^x Auf Grund der Form des Leistungsterms $Q(\bar{d} \cdot \dot{\bar{d}})$ ist zu vermuten, daß der Variablen Q die Spannungskomponente $T^{\alpha\beta}$ zugeordnet ist.

weise wird erwartet, daß sie weniger restriktive Einschränkung und damit neue Einsicht in die allgemeine Struktur der nichtlinear-thermoelastischen Stoffgleichungen für die Schale liefert. Die Vorgehensweise impliziert die Vorstellung, daß die integrale Entropieungleichung nicht mehr für jeden beliebigen materiellen Abschnitt im Schalenraum für alle thermomechanischen Prozesse identisch erfüllt werden soll, sondern eben nur für die materiellen finiten Linien-elemente auf der Schalenfläche.

Bevor nun konstitutive Einschränkungen aus (9.11)^I entwickelt werden, sollen die zweidimensionalen Stofffunktionen im folgenden Kapitel der Forderung der Beobachterinvarianz unterzogen werden.

9.1.2 Ableitung von Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen
aus der Beobachterinvarianz

Für die zweidimensionalen Stofffunktionen* der Schale sollen folgende Abhängigkeiten von den Variablen $\bar{r}_{,\alpha}$, $\bar{d}_{,\alpha}$, \bar{d} , Λ , $\Lambda_{,\alpha}$ bestehen

$$\left. \begin{aligned}
 M_0^{\alpha\beta} &= M_0^{\nabla\alpha\beta}(\bar{r}_{,\alpha}, \bar{d}_{,\alpha}, \bar{d}, \Lambda) \\
 M_1^{\alpha\beta} &= M_1^{\nabla\alpha\beta}(\text{''}) \\
 M_2^{\alpha\beta} &= M_2^{\nabla\alpha\beta}(\text{''}) \\
 Q_0^\alpha &= Q_0^{\nabla\alpha}(\text{''}) \\
 Q_1^\alpha &= Q_1^{\nabla\alpha}(\text{''}) \\
 Q &= Q^{\nabla}(\text{''}) \\
 \varepsilon_0 &= \varepsilon_0^{\nabla}(\text{''}) \\
 \phi_0 &= \phi_0^{\nabla}(\text{''}) \\
 h_0^\alpha &= h_0^{\nabla\alpha}(\Lambda, \Lambda_{,\alpha}).
 \end{aligned} \right\} (9.16)$$

Zunächst ist anzumerken, daß in der Argumentenliste der momentane Ortsvektor \bar{r} der Bezugsfläche nicht enthalten ist. Man kann zeigen, daß dieser Vektor aus Gründen der Beobachterinvarianz nicht enthalten sein darf; dies kann vom Leser selbst nachvollzogen werden.

Einschränkend ist dagegen die Annahme, daß die integrierten Wärmeflüsse h_0^α nicht von den kinematischen Variablen $(\bar{r}_{,\alpha}, \bar{d}_{,\alpha}, \bar{d})$ abhängen sollen. Geht man davon aus, daß der Wärmeflußvektor \bar{q} in der Momentan-konfiguration des dreidimensionalen Problems unabhängig von kinematischen Zustandsvariablen ist, dann wird dennoch der in der Referenzkonfiguration definierte Wärmefluß \bar{q}_R (Gl. (4.18)) von der Verformung abhängen, denn $\bar{q}_R = \frac{\rho_R}{\rho} F^{-1} \bar{q}$. Da h_0^α aus Komponenten von \bar{q}_R nach (8.35) gebildet wird, muß h_0^α im allgemeinen auch von $\bar{r}_{,\alpha}$, $\bar{d}_{,\alpha}$ und \bar{d} ab-

* Das Symbol ∇ charakterisiert das darunter stehende Zeichen (z.B. $M_0^{\alpha\beta}$) als eine Funktion der angegebenen Argumentenliste; dieses Symbol soll den Unterschied zum Funktionswert (z.B. $M_0^{\alpha\beta}$) deutlich machen.

hängen. Die Annahme (9.16)₉ ist daher im Falle großer Verformungen nicht korrekt. Sie wird hier aber aus Gründen der Einfachheit gemacht; für die anderen Stofffunktionen ist diese Vereinfachung ohne Bedeutung. Ferner sei ange-
merkt, daß die Stofffunktionen (9.16)₁ bis (9.16)₈ nicht vom Gradienten der
Temperaturinversen abhängen sollen. Diese Annahme erscheint ad hoc, ist
aber von der dreidimensionalen Theorie her motiviert. Darüber hinaus kann
aber auch mit der 2D-Entropieungleichung bewiesen werden, daß $\Lambda_{0,\alpha}$ nicht in
den Stofffunktionen $M_0^{\alpha\beta}, \dots, \phi_0$ enthalten sein darf. Auch dieser Beweis
sei dem Leser überlassen.

In Kap. 8.2.2 war schon gezeigt worden, daß die Werte $M_m^{\alpha\beta}$ etc. der
Stofffunktionen $M_m^{\alpha\beta}$ ($m=0,1,2$) etc. sich nicht bei Wechsel des Beobach-
tersystems ändern. Dies soll auch für ϕ_0 und h_0^α verlangt werden, so daß

$$\left. \begin{aligned}
 M_m^{*\alpha\beta} &= M_m^{\alpha\beta} & m=0,1,2 \\
 Q_n^{*\alpha} &= Q_n^\alpha & n=0,1 \\
 Q &= Q \\
 \Sigma_0^* &= \Sigma_0 \\
 \phi_0^* &= \phi_0 \\
 h_0^{*\alpha} &= h_0^\alpha
 \end{aligned} \right\} (9.17)$$

Im ungesternten ("ruhenden") Beobachtersystem lauten die Stoffgesetze wie
unter (9.16) angegeben. Im gesternten ("bewegten") Beobachtersystem haben
sie die Form

$$\left. \begin{aligned}
 M_0^{*\alpha\beta} &= \overset{*}{M}_0^{\alpha\beta} \left(\overset{*}{T}_{1\alpha}, \overset{*}{d}_{1\alpha}, \overset{*}{d}, \overset{*}{\Lambda}_0 \right) \\
 \vdots & \\
 \phi_0^* &= \overset{*}{\phi}_0 (\quad) \\
 h_0^{*\alpha} &= \overset{*}{h}_0^\alpha \left(\overset{*}{\Lambda}_0, \overset{*}{\Lambda}_{0,\alpha} \right)
 \end{aligned} \right\} (9.18)$$

Das Forminvarianzprinzip (Kap. 4.2.1) besagt nun aber im Hinblick auf die Stofffunktionen, daß für zwei im beliebigen Bewegungszustand befindliche Beobachter, deren Koordinatensysteme kontinuierlich auseinander hervorgehen, die Stofffunktionen die gleiche Form haben, d.h.

$$\left. \begin{aligned}
 M_0^{\nabla \alpha\beta}(\bar{r}_{1\alpha}^*, \bar{d}_{1\alpha}^*, \bar{d}^*, \Lambda_0^*) &= M_0^{\nabla \alpha\beta}(\bar{r}_{1\alpha}^*, \bar{d}_{1\alpha}^*, \bar{d}^*, \Lambda_0^*) \\
 \dots \\
 \Phi_0^* &= \Phi_0^* \\
 h_0^{\nabla \alpha}(\Lambda_0^*, \Lambda_{01\alpha}^*) &= h_0^{\nabla \alpha}(\Lambda_0^*, \Lambda_{01\alpha}^*)
 \end{aligned} \right\} (9.19)$$

Mit den Transformationsgesetzen (9.17) und mit (9.16) und (9.18) folgt dann aus dem Forminvarianzprinzip (9.19)

$$\left. \begin{aligned}
 M_0^{\nabla \alpha\beta}(\bar{r}_{1\alpha}, \bar{d}_{1\alpha}, \bar{d}, \Lambda_0) &= M_0^{\nabla \alpha\beta}(\bar{r}_{1\alpha}^*, \bar{d}_{1\alpha}^*, \bar{d}^*, \Lambda_0^*) \\
 \dots \\
 \Phi_0(\bar{r}_{1\alpha}, \bar{d}_{1\alpha}, \bar{d}, \Lambda_0) &= \Phi_0^*(\bar{r}_{1\alpha}^*, \bar{d}_{1\alpha}^*, \bar{d}^*, \Lambda_0^*) \\
 h_0^{\nabla \alpha}(\Lambda_0, \Lambda_{01\alpha}) &= h_0^{\nabla \alpha}(\Lambda_0^*, \Lambda_{01\alpha}^*)
 \end{aligned} \right\} (9.20)$$

Mit den Transformationsgesetzen bei Wechsel des Beobachtersystems für die Vektoren \bar{r} und \bar{d} (Gl. (8.42))

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{r}^* &= \underline{Q}(\bar{r} - \bar{c}) \\
 \bar{d}^* &= \underline{Q}\bar{d}
 \end{aligned} \right\} (9.21)$$

und mit der weiteren Transformationsregel

$$\Lambda_0^* = \Lambda_0 \quad (9.22)$$

wird^x aus (9.20)

$$\left. \begin{aligned} M_0^{\nabla\alpha\beta}(\bar{\tau}_{1\alpha}, \bar{d}_{1\alpha}, \bar{d}, \Lambda) &= M_0^{\nabla\alpha\beta}(Q\bar{\tau}_{1\alpha}, Qd_{1\alpha}, Q\bar{d}, \Lambda) \\ \bar{\Phi}_0^{\nabla}(\dots) &= \Phi_0^{\nabla}(\dots) \end{aligned} \right\} (9.23)$$

und die Identität

$$h_0^{\nabla\alpha}(\Lambda_0, \Lambda_{0,\alpha}) = h_0^{\nabla\alpha}(\Lambda_0, \Lambda_{0,\alpha}), \quad (9.24)$$

Zunächst erkennt man, daß $\bar{C}(t)$ nicht in den Bedingungen (9.23) auftritt. Da $\bar{C}(t)$ die translatorische Relativbewegung zwischen den Beobachtersystemen beschreibt, bedeutet dies, daß das Forminvarianzprinzip bei Übergang zu einem beliebig translatorisch bewegten Beobachtersystem keine Einschränkungen für die Stofffunktionen $M_0^{\nabla\alpha\beta}$ etc. liefert. D.h., durch die angenommene Argumentenliste ist die Forminvarianz der Stofffunktionen gegenüber translatorischen Beobachterwechsel von vornherein sichergestellt.^{xxx} Weiterhin zeigt die Identität (9.24), daß jede Stofffunktion $h_0^{\nabla\alpha}$ mit der angegebenen Argumentenliste der Forminvarianzbedingungen automatisch genügt.

Überträgt man das Cauchysche Representationstheorem (vergl. Kap. 5.5, Teil 1) auf irgendeine der Bedingungen in (9.23), dann bedeutet dies (hier sind fünf Vektoren $\bar{\tau}_{1,1}, \bar{\tau}_{1,2}, \bar{d}_{1,1}, \bar{d}_{1,2}, \bar{d}$ die Argumente!^{xxx}), daß die Stofffunktionen nur von den Skalarprodukten

$\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \bar{\tau}_{1\beta} = : a_{\alpha\beta}$	3 Größen	}	(9.25)
$\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \bar{d} = : d_\alpha$	2 Größen		
$\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} = : d_{\alpha\beta}$	4 Größen		
$\bar{d} \cdot \bar{d} = : \mathcal{I}$	1 Größe		
$\bar{d} \cdot \bar{d}_{1\beta} = : \mathcal{I}_\beta$	2 Größen		
$\bar{d}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} = : \mathcal{I}_{\alpha\beta}$	3 Größen		

^x Man beachte, daß die Flächenkoordinaten θ^α in beiden Beobachtersystemen zahlenmäßig gleich sind, so daß nicht zwischen $\bar{\theta}^\alpha$ und θ^α unterschieden werden muß.

^{xx} Dies wäre anders, wenn $\bar{\tau}$ selbst mit in der Argumentenliste aufgetreten wäre.

^{xxx} Die Temperaturinverse spielt nur die Rolle eines stummen Skalars.

und von den skalaren Dreifachprodukten

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta}) \\
 \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) \\
 \bar{d} \cdot (\bar{d}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) \\
 \bar{d}_{1\alpha} \cdot (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{r}_{1\gamma}) \\
 \bar{d}_{1\alpha} \cdot (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}_{1\gamma})
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 \text{(die anderen denkbaren Spat.-} \\
 \text{produkte sind durch diese unter} \\
 \text{Beachtung des Vorzeichenwechsels} \\
 \text{darstellbar)} \\
 \alpha, \beta = 1, 2
 \end{array} \quad (9.26)$$

abhängen können. Mit der Zerlegung (8.77)

$$\bar{d}_{1\alpha} = \eta_{\alpha}^s \bar{r}_{1s} + \mu_{\alpha} \bar{d} \quad (9.27)$$

wird aus den Spatprodukten

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) &= \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1s}) \eta_{\beta}^s \\
 \bar{d} \cdot (\bar{d}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) &= \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1s} \times \bar{r}_{1\mu}) \eta_{\alpha}^s \eta_{\beta}^{\mu} \\
 \bar{d}_{1\alpha} \cdot (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{r}_{1\gamma}) &= \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{r}_{1\gamma}) \mu_{\alpha} \\
 \bar{d}_{1\alpha} \cdot (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}_{1\gamma}) &= \bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{r}_{1s}) (\eta_{\beta}^s \mu_{\alpha} - \eta_{\alpha}^s \mu_{\gamma})
 \end{aligned} \right\} (9.28)$$

Man sieht also, daß die vier letzten Spatprodukte in (9.26) durch das erste und $\eta_{\beta}^{\alpha}, \mu_{\alpha}$ darstellbar sind. Mit (9.27) wird nun nach skalarer Multiplikation von $\bar{d}_{1\alpha}$ mit $\bar{r}_{1\beta}$ und \bar{d}

$$\bar{d}_{1\alpha} \cdot \bar{r}_{1\beta} = \eta_{\alpha}^s \bar{r}_{1s} \cdot \bar{r}_{1\beta} + \mu_{\alpha} \bar{d} \cdot \bar{r}_{1\beta}, \quad (9.29)$$

d.s. vier Gleichungen,

$$\bar{d}_{1\alpha} \cdot \bar{d} = \eta_{\alpha}^s \bar{r}_{1s} \cdot \bar{d} + \mu_{\alpha} \bar{d} \cdot \bar{d}, \quad (9.30)$$

d.s. zwei Gleichungen.

Die Gleichungen (9.29) und (9.30) stellen ein lineares Gleichungssystem für die sechs Größen η_{α}^s und μ_{α} dar. Aus (9.29) folgt für

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha = 1, \beta = 1 \\
 \eta_1^1 \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,1} + \eta_1^2 \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,1} + \mu_1 \bar{d} \cdot \bar{r}_{1,1} &= \bar{d}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,1} \\
 \alpha = 1, \beta = 2 \\
 \eta_1^1 \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,2} + \eta_1^2 \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,2} + \mu_1 \bar{d} \cdot \bar{r}_{1,2} &= \bar{d}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,2}
 \end{aligned} \right\} (9.31)$$

und aus (9.30.) ergibt sich mit $\alpha = 1$

$$\eta_1^1 \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{d} + \eta_1^2 \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{d} + \mu_1 \bar{d} \cdot \bar{d} = \bar{d}_{1,1} \cdot \bar{d}.$$

Dies ist ein System von drei linearen Gleichungen für die drei Unbekannten $\eta_1^1, \eta_1^2, \mu_1$.

Ganz entsprechend läßt sich auch für η_2^2, η_2^1 und μ_2 ein lineares Gleichungssystem angeben:

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_2^1 \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,2} + \eta_2^2 \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,1} + \mu_2 \bar{d} \cdot \bar{r}_{1,1} &= \bar{d}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,1} \\
 \eta_2^1 \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,2} + \eta_2^2 \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,2} + \mu_2 \bar{d} \cdot \bar{r}_{1,2} &= \bar{d}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,2} \\
 \eta_2^1 \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{d} + \eta_2^2 \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{d} + \mu_2 \bar{d} \cdot \bar{d} &= \bar{d}_{1,2} \cdot \bar{d}
 \end{aligned} \right\} (9.32)$$

Eine eindeutige Lösung für diese beiden Gleichungssysteme existiert, wenn die Koeffizientendeterminante (die für beide Systeme dieselbe ist)

$$D = \begin{vmatrix} \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,1} & \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{r}_{1,2} & \bar{r}_{1,1} \cdot \bar{d} \\ \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,1} & \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{r}_{1,2} & \bar{r}_{1,2} \cdot \bar{d} \\ \bar{d} \cdot \bar{r}_{1,1} & \bar{d} \cdot \bar{r}_{1,2} & \bar{d} \cdot \bar{d} \end{vmatrix} \quad (9.33)$$

nicht verschwindet. Nun gilt aber bekanntlich für drei linear unabhängige Vektoren $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$

$$[\bar{c}_1 \cdot (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3)]^2 = \begin{vmatrix} \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_1 & \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 & \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_3 \\ \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_2 & \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_3 \\ \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_1 & \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_3 \end{vmatrix} = \det(\bar{c}_k \cdot \bar{c}_l) \quad (9.34)$$

bzw.

$$\bar{c}_1 \cdot (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3) = \text{sgn}(\bar{c}_1 \cdot (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3)) \sqrt{\det(\bar{c}_k \cdot \bar{c}_l)}$$

Da $\bar{r}_{1,\alpha}$ und \bar{d} linear unabhängig sind, d.h.

$$\bar{d} \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) = \bar{r}_{11} \cdot (\bar{r}_{12} \times \bar{d}) = \text{sgn}(\bar{d} \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12})) \sqrt{D} \neq 0, \quad (9.35)$$

folgt, daß die Determinate D nicht verschwindet.

Folgende Feststellung ist für das Weitere wesentlich:

Die Determinante D und die rechten Seiten der beiden linearen Gleichungssysteme (9.31) und (9.32) sind allein durch die 12 Skalarprodukte

$a_{\alpha\beta} := \bar{r}_{1\alpha} \cdot \bar{r}_{1\beta}$	3 Variable	}	(9.36)
$d_{\alpha} := \bar{r}_{1\alpha} \cdot \bar{d}$	2 Variable		
$d_{\alpha\beta} := \bar{r}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta}$	4 Variable		
$\bar{d}_{1\alpha} := \bar{d}_{1\alpha} \cdot \bar{d}$	2 Variable		
$\bar{d} \cdot \bar{d}$	1 Variable		
12 Variable			

gebildet, die in dem Satz von 15 Variablen (9.25) enthalten sind. Daraus folgt, daß η_{α}^{β} und μ_{α} allein durch diese 12 Skalarprodukte darstellbar sind.

Mit (9.28) ist damit gezeigt, daß die Spatprodukte (9.26) darstellbar sind durch 12 (Gl.(9.36)) der 15 Skalarprodukte (9.25) und

$$\bar{d} \cdot (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta});$$

wegen (9.35) und (9.33) ist dieses Spatprodukt aber wiederum durch Skalarprodukte, die in (9.36) und damit in (9.25) enthalten sind, und durch

$$\bar{z} = \text{sgn}(\bar{d} \cdot (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12})) \quad (9.37)$$

darstellbar. Wegen (8.78) ändert \bar{z} aber nicht sein Vorzeichen und ist daher konstant; \bar{z} kann also aus der Variablenliste entfallen. Damit ist gezeigt, daß die Stofffunktionen (9.16) aus Invarianzgründen nur von den Skalarprodukten (9.25) abhängen können.

Diese 15 Variablen lassen sich noch weiter reduzieren [6]. Mit der Zerlegung (9.27) wird

$$\begin{aligned} \bar{d}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} &= \eta_{\alpha}^{\sigma} \eta_{\beta}^{\tau} a_{\sigma\tau} + \eta_{\alpha}^{\sigma} \mu_{\beta} d_{\sigma} \\ &+ \mu_{\alpha} \eta_{\beta}^{\mu} d_{\mu} + \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \bar{z}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

woraus sofort folgt, daß das letzte Skalarprodukt in (9.25) durch die übrigen, d.h. durch den Variablensatz (9.36), vollständig bestimmt ist. Die 12 verbleibenden, gegenüber Beobachtertransformationen invarianten Variablen (9.36) stellen also die wesentlichen kinematischen Argumente der Stofffunktionen dar; daß diese Liste von Invarianten tatsächlich nicht weiter reduziert werden kann, also eine minimale Integritätsbasis [87] darstellt, wird in Anhang (4) bewiesen.

Bevor weiter auf die Stoffgleichungen eingegangen wird, werden hier noch kurz Beziehungen angegeben, die es gestatten, die Größen $\eta^{\alpha\beta}$ und μ_α zu berechnen, und zwar einfacher, als wenn von den beiden Gleichungssystemen (9.31) und (9.32) ausgegangen wird. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} &= \bar{r}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} = \eta_{\beta}^s a_{s\alpha} + \mu_\beta d_\alpha \\ \nu_y^e &= \bar{d} \cdot \bar{d}_{1y} = \eta_y^s d_s + \mu_y \mathcal{V}; \end{aligned} \right\} (9.39)$$

aus (9.39)₂ folgt dann

$$\mu_y = \left(\nu_y^e - \eta_y^s d_s \right) \frac{1}{\mathcal{V}}; \quad (9.40)$$

mit diesem Ergebnis erhält man aus (9.39)₁ dann ein lineares Gleichungssystem allein für η_{β}^s

$$\eta_{\beta}^s \left(a_{s\alpha} - d_s d_\alpha \frac{1}{\mathcal{V}} \right) = \lambda_{\alpha\beta} - d_\alpha \nu_\beta^e \frac{1}{\mathcal{V}}, \quad (9.41)$$

dessen Lösung es dann gestattet, auch μ_y explizit als Funktion der 12 kinematischen Variablen (9.36) zu berechnen.

Aus der Forderung der Beobachterinvarianz der Stoffgleichungen (9.23) folgt also, daß sie folgenden allgemeinen Aufbau haben müssen:

$$\left. \begin{aligned} M_m^{\alpha\beta} &= M_m^{\alpha\beta} \left(a_{\alpha\beta}, d_\alpha, d_{\alpha\beta}, \nu_\alpha^e, \nu_y^e, \frac{1}{\mathcal{V}} \right), \quad m=0,1,2 \\ Q_n^\alpha &= Q_n^\alpha \left(\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \right), \quad n=0,1 \end{aligned} \right\} (9.42)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q &= \overset{\vee}{Q} (a_{\alpha\beta}, d_{\alpha}, \lambda_{\alpha\beta}, \overset{\vee}{N}_{\alpha}, \overset{\vee}{N}, \overset{\vee}{\Lambda}) \\
 \varepsilon &= \overset{\vee}{\varepsilon} (\quad \quad \quad) \\
 \phi &= \overset{\vee}{\phi} (\quad \quad \quad) \\
 h_{\circ}^{\alpha} &= \overset{\vee}{h}_{\circ}^{\alpha} (\overset{\vee}{\Lambda}_{\circ}, \overset{\vee}{\Lambda}_{\circ,\alpha}) = \overset{\vee}{h}_{\circ}^{\alpha} (\overset{\vee}{\Lambda}_{\circ}, \overset{\vee}{\Lambda}_{\circ,\alpha})
 \end{aligned} \right\} (9.42)$$

Da der kinematische Variablensatz (12 Variable) minimal ist, können die 12 kinematischen Größen und die Temperaturinverse $\overset{\vee}{\Lambda}_{\circ}$ unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen, sofern nur die aktuellen Belastungen und Randbedingungen geeignet gewählt werden.

9.1.3 Zusammenhang zwischen den kinematischen Zustandsvariablen der Schale und den Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors im Schalenraum

Mit (6.38, Teil 1) und (7.1) wird

$$\begin{aligned}
 d\bar{p} &= (\bar{\tau}_{,\alpha} + \theta \bar{d}_{,\alpha}) d\theta^{\alpha} + \bar{d} d\theta \\
 d\bar{P} &= (\bar{A}_{\alpha} - \theta B_{\alpha}^{\sigma} \bar{A}_{\sigma}) d\theta^{\alpha} + \bar{A}_3 d\theta,
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

so daß mit (9.26) und den Definitionen in Kap. 6.1 (Teil 1)

$$\begin{aligned}
 &d\bar{p} \cdot d\bar{p} - d\bar{P} \cdot d\bar{P} = \\
 &= \left\{ [a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}] \right. \\
 &\quad + \theta [\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} + A_{\alpha\gamma} B_{\beta}^{\sigma} + A_{\gamma\beta} B_{\alpha}^{\sigma}] \\
 &\quad \left. + (\theta)^2 [\overset{\vee}{N}_{\alpha\beta} - A_{\gamma\delta} B_{\alpha}^{\sigma} B_{\beta}^{\delta}] \right\} d\theta^{\alpha} d\theta^{\beta} \\
 &+ \left\{ 2d_{\alpha} + \theta [2\overset{\vee}{N}_{\alpha}] \right\} d\theta^{\alpha} d\theta \\
 &+ \left\{ \overset{\vee}{N} - 1 \right\} (d\theta)^2,
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

Weiter ist mit dem Lagrangeschen Verzerrungstensor \underline{E} (Gl. (3.32), (3.33), Teil 1)

$$\begin{aligned} d\bar{p} \cdot d\bar{p} - d\bar{P} \cdot d\bar{P} &= 2 d\bar{P} \underline{E} d\bar{P} = 2 E_{KL} d\theta^K d\theta^L \\ &= 2 \left\{ E_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta + (E_{\alpha 3} + E_{3\alpha}) d\theta^\alpha d\theta^3 \right. \\ &\quad \left. + E_{33} d\theta^3 d\theta^3 \right\}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Unter Beachtung von $d\theta^3 \equiv d\theta$ erhält man dann nach Koeffizientenvergleich in (9.44) und (9.45)

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2} \left\{ a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \theta [\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} + 2 B_{\alpha\beta}] \right. \\ &\quad \left. + (\theta)^2 [\nu_{\alpha\beta} - B_{\beta\alpha} B_{\beta}^{\alpha}] \right\} \\ E_{\alpha 3} + E_{3\alpha} &= d_{\alpha} + \theta \nu_{\alpha}^{\alpha}, \quad E_{3\alpha} = E_{\alpha 3} \\ \rightarrow E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (d_{\alpha} + \theta \nu_{\alpha}^{\alpha}) \\ E_{33} &= \frac{1}{2} (\nu^{\alpha} - 1) \end{aligned} \right\} \tag{9.46}$$

Als Potenzreihendarstellung in θ wird dann

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha} &= E_0^{\alpha\beta} + \theta E_1^{\alpha\beta} + (\theta)^2 E_2^{\alpha\beta} \\ E_{\alpha 3} = E_{3\alpha} &= E_0^{\alpha 3} + \theta E_1^{\alpha 3} \\ E_{33} &= E_0^{33}, \end{aligned} \right\} \tag{9.47}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 E_{0\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) &= E_{0\beta\alpha} \\
 E_{1\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha} + 2 B_{\alpha\beta}) &= E_{1\beta\alpha} \\
 E_{2\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} - B_{\beta\alpha} B_{\alpha\beta}^2) &= E_{2\beta\alpha} \\
 E_{0\alpha 3} &= \frac{1}{2} d_{\alpha} \\
 E_{1\alpha 3} &= \frac{1}{2} d_{\alpha}^2 \\
 E_{033} &= \frac{1}{2} (N - 1) .
 \end{aligned}
 \tag{9.48}$$

Die linken Seiten von (9.48) stellen 14 beobachterinvariante Variablen dar.

Man erkennt, daß bei Vorgabe der 15 Invarianten (9.25) oder auch der 12 Invarianten (9.36) die Größen $E_{0\alpha\beta}$, $E_{1\alpha\beta}$ etc. vollständig bestimmt sind.

Die Umkehrung gilt allerdings nicht! Es stellt sich jetzt die Frage, in welcher Weise der minimale Variablensatz (9.36) z.T. durch die Variablen $E_{0\alpha 1}, \dots, E_{033}$ ersetzt werden kann. Spaltet man $\lambda_{\alpha\beta}$ in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil auf und beachtet (9.48)₂, dann erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha}) &= E_{1\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} \\
 \frac{1}{2} (d_{\alpha\beta} - d_{\beta\alpha}) &=: O_{\alpha\beta} ,
 \end{aligned}
 \tag{9.49}$$

so daß

$$\lambda_{\alpha\beta} = E_{1\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} + O_{\alpha\beta}
 \tag{9.50}$$

Durch Vergleich von (9.48) und (9.36) unter Beachtung von (9.50) erkennt man, daß sich der minimale Variablensatz (9.36) umkehrbar eindeutig durch die 12 beobachterinvarianten Variablen

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} E_{0\alpha\beta} & E_{1\alpha\beta} & E_{0\alpha 3} & E_{1\alpha 3} & E_{033} & O_{\alpha\beta} \\ 3 \text{ Var.} & 3 \text{ Var.} & 2 \text{ Var.} & 2 \text{ Var.} & 1 \text{ Var.} & 1 \text{ Var.} \\ \text{sym.} & \text{sym.} & & & & \text{schiefsym.} \end{array} \right\} \quad (9.51)$$

ersetzen läßt. Die Variable $E_{2\alpha\beta}$ ist darin nicht enthalten, sie läßt sich aber mit $\dot{v}_{\alpha\beta}$ entsprechend (9.48)₃ durch den Variablensatz (9.36) und damit auch durch (9.51) darstellen. Anstelle der kinematischen Variablen (9.36) können also für die Stofffunktionen auch die kinematischen Variablen (9.51) verwendet werden.

9.1.4 Ableitung von Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen aus dem Dissipationspostulat

Die zweidimensionale Clausius-Duhem Entropieungleichung (9.11)^I für die Schale soll zunächst noch auf eine Form gebracht werden, in der die kinematischen Größen $\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}$, $\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}$ etc. durch den minimalen Satz der unabhängigen kinematischen Zustandsvariablen (9.36) ausgedrückt wird. Dies ist nicht zwingend erforderlich, aber aufgrund der Invarianzstruktur der Stofffunktionen naheliegend. Zunächst ist

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_{\alpha\beta} &= \dot{\bar{\tau}}_{1\alpha} \cdot \bar{\tau}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha} \\ \dot{d}_{\alpha} &= \dot{\bar{\tau}}_{1\alpha} \cdot \bar{d} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \\ \dot{i}_{\alpha\beta} &= \dot{\bar{\tau}}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\ &= \dot{\bar{\tau}}_{1\alpha} \cdot \bar{\tau}_{1\beta} \eta_{\beta}^s + \dot{\bar{\tau}}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} \mu_{\beta} + \dot{\bar{d}}_{1\beta} \cdot \bar{\tau}_{1\alpha} \\ \dot{v} &= 2 \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} \\ \dot{v}_{\alpha} &= \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{1\alpha} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha} = \dot{\bar{d}} \cdot \bar{\tau}_{1\beta} \eta_{\alpha}^s + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{1\alpha} \mu_{\alpha} + \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \cdot \bar{d} \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

Spaltet man $\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}$ in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil auf, dann wird

$$\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} = \frac{1}{2} \dot{a}_{\alpha\beta} + \langle \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} \rangle, \quad (9.53)$$

wobei

$$\langle \bar{r}_{1\alpha}, \dot{\bar{r}}_{1\beta} \rangle := \frac{1}{2} (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} - \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\alpha}). \quad (9.54)$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_{1\alpha} \cdot \bar{d} &= \dot{d}_\alpha - \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \\ \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \cdot \bar{r}_{1\beta} &= \dot{\lambda}_{\beta\alpha} - \dot{\bar{r}}_{1\beta} \cdot \bar{r}_{1\beta} \eta_\alpha^s - \mu_\alpha \dot{\bar{r}}_{1\beta} \cdot \bar{d} \\ &= \dot{\lambda}_{\beta\alpha} - \left(\frac{1}{2} \dot{a}_{s\beta} - \langle \bar{r}_{1\beta}, \dot{\bar{r}}_{1\beta} \rangle \right) \eta_\alpha^s \\ &\quad - (\dot{d}_\beta - \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}}) \mu_\alpha \\ \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \cdot \bar{d} &= \dot{v}_\alpha - \dot{\bar{d}} \cdot \bar{r}_{1\beta} \eta_\alpha^s - \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} \mu_\alpha \\ &= \dot{v}_\alpha - \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} \eta_\alpha^s - \frac{1}{2} \dot{v} \mu_\alpha \\ \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} &= \frac{1}{2} \dot{v}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Für das Weitere werden noch die folgenden Darstellungen benötigt:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} &= \eta_\alpha^s \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} + \mu_\alpha \bar{d} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \\ &= \eta_\alpha^s \left(\frac{1}{2} \dot{a}_{s\beta} + \langle \bar{r}_{1\beta}, \dot{\bar{r}}_{1\beta} \rangle \right) \\ &\quad + \mu_\alpha (\dot{d}_\beta - \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}}) \\ \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} &= \eta_\alpha^s \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} + \mu_\alpha \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\ &= \eta_\alpha^s \dot{\lambda}_{s\beta} - \frac{1}{2} \dot{a}_{s\beta} \eta_\alpha^s \eta_\beta^s \\ &\quad - \langle \bar{r}_{1\beta}, \dot{\bar{r}}_{1\beta} \rangle \eta_\alpha^s \eta_\beta^s - \dot{d}_\beta \eta_\alpha^s \mu_\beta \\ &\quad - \dot{v}_\beta \mu_\alpha - \frac{1}{2} \dot{v} \mu_\alpha \mu_\beta \\ &\quad + \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} (\eta_\alpha^s \mu_\beta - \eta_\beta^s \mu_\alpha) \end{aligned} \quad (9.56)$$

Damit sind die 15 kinematischen Größen $\bar{\gamma}_{\alpha}, \dot{\bar{\gamma}}_{\beta}, \bar{d}_{\alpha}, \dot{\bar{d}}_{\beta}$ etc. in der 2D-Entropieungleichung (9.11)^I durch die Raten der 12 kinematischen Zustandsvariablen $a_{\alpha\beta}, d_{\alpha}, d_{\alpha\beta}$ etc. (9.36) und außerdem durch $\dot{\bar{d}} \cdot \bar{\gamma}_{\beta}$ sowie die schiefsymmetrische Variable $\langle \bar{\gamma}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{\gamma}}_{\beta} \rangle$ ersetzt; $\dot{\bar{d}} \cdot \bar{\gamma}_{\beta}$ und die schiefsymmetrische Größe $\langle \bar{\gamma}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{\gamma}}_{\beta} \rangle$ stellen drei Variablen dar, so daß in diesem neuen Variablensatz ebenfalls 15 Größen vorhanden sind. Einsetzen in die 2D-Entropieungleichung (9.11)^I und Umordnung ergibt

$$\begin{aligned}
 & \underset{0}{S}_R \dot{\phi}_0 - \underset{0}{h}^{\alpha} \underset{0}{\Lambda}_{\alpha} + \underset{0}{S}_R \underset{0}{\Lambda} \underset{0}{\varepsilon} \\
 & + \underset{0}{\Delta} \left\{ \dot{a}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[\underset{0}{M}^{\alpha\beta} + \underset{1}{M}^{\beta\beta} \eta_{\delta}^{\alpha} - \underset{1}{M}^{\beta\delta} \eta_{\delta}^{\alpha} - \underset{2}{M}^{\beta\delta} \eta_{\delta}^{\beta} \eta_{\delta}^{\alpha} \right] \right. \\
 & \quad + \dot{d}_{\alpha\beta} \left[\underset{1}{M}^{\alpha\beta} + \underset{2}{M}^{\beta\beta} \eta_{\delta}^{\alpha} \right] \\
 & \quad + \dot{d}_{\beta} \left[\underset{0}{Q}^{\beta} + \underset{1}{M}^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} - \underset{1}{M}^{\beta\alpha} \mu_{\alpha} - \underset{2}{M}^{\beta\delta} \eta_{\delta}^{\beta} \mu_{\delta} \right] \\
 & \quad + \dot{v}_{\beta} \left[\underset{1}{Q}^{\beta} + \underset{2}{M}^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \right] \\
 & \quad + \dot{v} \frac{1}{2} \left[\underset{0}{Q} - \underset{2}{M}^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \right] \\
 & \quad + \langle \bar{\gamma}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{\gamma}}_{\beta} \rangle \left[\underset{0}{M}^{\alpha\beta} + (\underset{1}{M}^{\beta\beta} - \underset{1}{M}^{\beta\delta}) \eta_{\delta}^{\alpha} - \underset{2}{M}^{\beta\delta} \eta_{\delta}^{\beta} \eta_{\delta}^{\alpha} \right] \\
 & \quad + \bar{\gamma}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \left[\underset{0}{L}^{\alpha} - (\underset{1}{M}^{\beta\alpha} - \underset{1}{M}^{\alpha\beta}) \mu_{\beta} \right. \\
 & \quad \quad \left. + \underset{2}{M}^{\beta\beta} (\eta_{\delta}^{\alpha} \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\delta}) \right] \\
 & \geq 0 .
 \end{aligned} \tag{9.57}$$

Beachtet man jetzt die Definitionsgleichung für L^α ((8.83), Teil 1), dann wird der letzte [...] -Ausdruck im Leistungsterm der Beanspruchungsgrößen

$$\begin{aligned}
 L^\alpha &= (M_1^{\beta\alpha} - M_1^{\alpha\beta}) \mu_\beta + M_2^{\delta\beta} (\eta_\delta^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\delta) \\
 &= \frac{1}{2} (M_2^{\delta\beta} - M_2^{\beta\delta}) (\eta_\beta^\alpha \mu_\delta - \eta_\delta^\alpha \mu_\beta) \\
 &\quad + M_2^{\delta\beta} (\eta_\delta^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\delta) \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{(M_2^{\beta\delta} + M_2^{\delta\beta})}_{\text{symmetrisch}} \underbrace{(\eta_\delta^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\delta)}_{\text{schief-symmetrisch in } \delta, \beta}
 \end{aligned} \tag{9.58}$$

so daß dieser Ausdruck identisch verschwindet.

Der schief-symmetrische Term $\langle \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \rangle$ kann durch eine Zahl φ vollständig beschrieben werden:

$$\varphi := \langle \bar{r}_{11} \cdot \dot{\bar{r}}_{12} \rangle = - \langle \bar{r}_{12} \cdot \dot{\bar{r}}_{11} \rangle. \tag{9.59}$$

Daher wird der vorletzte Term im Leistungsausdruck für die Beanspruchungsgrößen (9.57)

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \rangle &= [M_0^{\alpha\beta} + (M_1^{\delta\beta} - M_1^{\beta\delta}) \eta_\delta^\alpha - M_2^{\delta\beta} \eta_\delta^\beta \eta_\delta^\alpha] \\
 &= \varphi [M_0^{12} - M_0^{21} + (M_1^{\delta 2} - M_1^{2\delta}) \eta_\delta^1 \\
 &\quad - (M_1^{\delta 1} - M_1^{1\delta}) \eta_\delta^2 - M_2^{\delta\beta} \eta_\delta^2 \eta_\delta^1 + M_2^{\delta\beta} \eta_\delta^1 \eta_\delta^2] \\
 &= \varphi [M_0^{12} - M_0^{21} + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\eta_1^1 + \eta_2^2) \\
 &\quad + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\eta_1^1 \eta_2^2 - \eta_1^2 \eta_2^1)].
 \end{aligned} \tag{9.60}$$

Mit der in Kap. 8.2.2.4 abgeleiteten Orthogonalitätsbedingung $\vec{d} \cdot \vec{c} = 0$, die sich auch in der Form ((8.81)^I, Teil 1) darstellen läßt und die eine identisch zu erfüllende Restriktion für die Stoffgleichungen darstellt, folgt aber, daß (9.60) für alle φ identisch verschwinden muß. Damit entfällt auch dieser Term in der 2D-Entropiegleichung.

Die materielle Zeitableitung der Massieschen Funktion wird

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0 = \frac{D}{Dt} \check{\Phi}_0 &= \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} \dot{a}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\beta} \dot{d}_\beta + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\beta} \dot{v}_\beta \\ &+ \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda} \end{aligned} \quad (9.61)$$

Im Weiteren ist zu beachten, daß $\dot{a}_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und daher nur drei unabhängig voneinander einstellbare kinematische Variable darstellt. Mit diesen Zwischenüberlegungen erhält die 2D-Entropiegleichung (9.57) schließlich die folgende Form

$$\begin{aligned} &\dot{a}_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\overset{v}{M}^{(\alpha\beta)} + \overset{v}{N}^{(\alpha\beta)} \right) \Lambda_0 + \frac{1}{2} \mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) \right\} \\ &+ \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \left\{ \left(\overset{v}{M}_1^{\alpha\beta} + \overset{v}{M}_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha \right) \Lambda_0 + \mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} \right) \right\} \\ &+ \dot{d}_\beta \left\{ \left(\overset{v}{Q}_0^{\beta} + \overset{v}{M}_1^{\alpha\beta} \mu_\alpha - \overset{v}{M}_1^{\beta\alpha} \mu_\alpha - \overset{v}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\gamma^\beta \eta_\delta^\alpha \right) \Lambda_0 + \mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\beta} \right) \right\} \\ &+ \dot{v}_\beta \left\{ \left(\overset{v}{Q}_1^{\beta} + \overset{v}{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \right) \Lambda_0 + \mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\beta} \right) \right\} \\ &+ \dot{v} \left\{ \frac{1}{2} \left(\overset{v}{Q} - \overset{v}{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right) \Lambda_0 + \mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v} \right) \right\} \\ &+ \dot{\Lambda} \mathcal{S}_R \left\{ \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \Lambda} + \overset{v}{\xi} \right\} - \left\{ \overset{v}{h}_0^\alpha \Lambda_{0,\alpha} \right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (9.62)$$

wobei $\overset{v}{M}_0^{(\alpha\beta)}$ und $\overset{v}{N}^{(\alpha\beta)}$ symmetrisch sind:

$$\overset{v}{M}_0^{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2} (\overset{v}{M}_0^{\alpha\beta} + \overset{v}{M}_0^{\beta\alpha}) \quad (9.63)$$

$$\left. \begin{aligned} \overset{v}{N}^{\alpha\beta} &:= (\overset{v}{M}_1^{\beta\beta} - \overset{v}{M}_1^{\beta\beta}) \eta_\beta^\alpha - \overset{v}{M}_2^{\beta\beta} \eta_\beta^\alpha \eta_\beta^\alpha \\ \overset{v}{N}^{(\alpha\beta)} &:= \frac{1}{2} (\overset{v}{N}^{\alpha\beta} + \overset{v}{N}^{\beta\alpha}) \end{aligned} \right\} (9.64)$$

Das Dissipationspostulat (Kap. 9.1.1) erlaubt jetzt eine Reihe von Einschränkungen für die Stofffunktionen aus (9.62) abzuleiten. Da die aktuellen äußeren Einwirkungen beliebig manipulierbar sind, können auch die Funktionen $\bar{\pi}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\Lambda_\circ(\theta^\alpha, t) > 0$ beliebig eingestellt werden. Daher können die räumlichen Ableitungen $\bar{\pi}_{, \alpha}$, $\bar{d}_{, \alpha}$, $\Lambda_{\circ, \alpha}$ und die Raten $\dot{\bar{\pi}}$, $\dot{\bar{d}}$, $\dot{\Lambda}_\circ$, $\dot{\bar{\pi}}_{, \alpha}$, $\dot{\bar{d}}_{, \alpha}$, $(\dot{\Lambda}_{\circ, \alpha})^*$ lokal beliebige und voneinander unabhängige Werte annehmen.

Die Stofffunktionen (9.42) hängen aber aus Invarianzgründen nur von bestimmten Kombinationen der Variablen $\bar{\pi}_{, \alpha}$, $\bar{d}_{, \alpha}$, $\dot{\bar{\pi}}$, $\dot{\bar{d}}$, Λ_\circ , $\Lambda_{\circ, \alpha}$ ab, nämlich dem minimalen kinematischen Variablensatz (9.36) sowie Λ_\circ und $\Lambda_{\circ, \alpha}$. Daher können auch diese Variablen bzw. ihre Raten $\dot{a}_{\alpha\beta}, \dots, \dot{v}_{, \alpha}^t, \dot{\Lambda}_\circ$ und $(\dot{\Lambda}_{\circ, \alpha})^*$ lokal beliebig und unabhängig voneinander eingestellt werden.

In die 2D-Entropiegleichung (9.62) gehen diese Raten nur linear ein. Wenn diese Ungleichung für beliebige Raten $\dot{a}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha}$ etc. erfüllt sein soll, dann müssen die Koeffizienten der Raten $\dot{a}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha}, \dots, \dot{v}_{, \alpha}^t$ und $\dot{\Lambda}_\circ$, d.s. die $\{\dots\}$ -Ausdrücke, verschwinden. Man erhält also zunächst die folgenden einschränkenden Verknüpfungen zwischen den Stofffunktionen:

$$\left. \begin{aligned} \overset{v}{M}_0^{(\alpha\beta)} &= - \frac{1}{\Lambda_\circ} \rho_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \phi_\circ^v}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi_\circ^v}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \overset{v}{N}^{(\alpha\beta)} \\ \overset{v}{M}_1^{\alpha\beta} &= - \frac{1}{\Lambda_\circ} \rho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \phi_\circ^v}{\partial \Lambda_{\alpha\beta}} - \overset{v}{M}_2^{\beta\beta} \eta_\beta^\alpha \end{aligned} \right\} (9.65)$$

* Auf einen Beweis wird hier verzichtet; er folgt analog der Darstellung in [88]

$$\begin{aligned}
 \check{Q}_0^{\nu\beta} &= -\frac{1}{\Delta_0} \check{S}_{0R} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\beta} - \left(\check{M}_1^{\nu\alpha\beta} - \check{M}_1^{\nu\beta\alpha} \right) \mu_\alpha + \check{M}_2^{\nu\gamma\delta} \eta_\gamma^\beta \mu_\delta \\
 \check{Q}_1^{\nu\beta} &= -\frac{1}{\Delta_0} \check{S}_{0R} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\beta} - \check{M}_2^{\nu\alpha\beta} \mu_\alpha \\
 \check{Q} &= -\frac{2}{\Delta_0} \check{S}_{0R} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v} + \check{M}_2^{\nu\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \\
 \check{\sigma}_0^\nu &= -\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \Delta}
 \end{aligned}
 \tag{9.65}$$

Die 2D-Entropieungleichung reduziert sich damit auf die Restentropieungleichung

$$\check{h}_0^\nu \Lambda_{0,\alpha} \leq 0. \tag{9.66}$$

Die erste Bedingung (9.65)^I liefert nur eine Einschränkung für den symmetrischen Anteil $\check{M}_0^{(\alpha\beta)}$. Hier erhält jetzt die Orthogonalitätsbedingung (8.74) bzw. (8.81)^I erneut Bedeutung, da sich aus ihr der schiefsymmetrische Anteil $\check{M}_0^{<\alpha\beta>}$ ermitteln läßt:

$$\begin{aligned}
 \check{M}_0^{<\alpha\beta>} &= \frac{1}{2} \left(\check{M}_0^{\alpha\beta} - \check{M}_0^{\beta\alpha} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\check{M}_1^{\nu\alpha\beta} - \check{M}_1^{\nu\beta\alpha} \right) \left(\eta_1^\alpha + \eta_2^\alpha \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\check{M}_2^{\nu\alpha\beta} - \check{M}_2^{\nu\beta\alpha} \right) \left(\eta_1^\alpha \eta_2^\beta - \eta_1^\beta \eta_2^\alpha \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\check{M}_1^{\nu\gamma\delta} - \check{M}_1^{\nu\delta\gamma} \right) \eta_\gamma^\alpha - \left(\check{M}_1^{\nu\gamma\alpha} - \check{M}_1^{\nu\alpha\gamma} \right) \eta_\gamma^\beta \right. \\
 &\quad \left. - \check{M}_2^{\nu\gamma\delta} \left(\eta_\gamma^\beta \eta_\delta^\alpha - \eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{\check{S}_{0R}}{\Delta_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} \right) \eta_\gamma^\alpha + \frac{\check{S}_{0R}}{\Delta_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\alpha}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\gamma}} \right) \eta_\gamma^\beta \right. \\
 &\quad \left. - \check{M}_2^{\nu\mu\beta} \eta_\mu^\gamma \eta_\gamma^\alpha + \check{M}_2^{\nu\mu\alpha} \eta_\mu^\gamma \eta_\gamma^\beta \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{9.67}$$

Daher wird mit (9.64)^I und (9.64)^{II}

$$\begin{aligned} \check{M}_0^{\alpha\beta} &= \check{M}_0^{(\alpha\beta)} + \check{M}_0^{<\alpha\beta>} \\ &= -\frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_\gamma^\alpha \\ &\quad + \check{M}_2^{\mu\nu\rho} \eta_\mu^\delta \eta_\nu^\alpha. \end{aligned} \quad (9.68)$$

In der Bedingung für \check{Q}_0^β (9.65)^{III} lässt sich noch $\check{M}_1^{\alpha\beta}$ durch (9.65)^{II} ausdrücken. Man erhält schließlich die Stofffunktionen der Beanspruchungsgrößen $\check{M}_n^{\alpha\beta}$, \check{Q}_n^α ($n=0,1$) und \check{Q} dargestellt als Funktionen der Massieschen Funktion $\check{\Phi}_0$ und der Beanspruchungsgrößen $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ in der folgenden Form

$$\begin{aligned} \check{M}_0^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_\gamma^\alpha \\ &\quad + \check{M}_2^{\mu\nu\rho} \eta_\mu^\delta \eta_\nu^\alpha \\ \check{M}_1^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} \right) - \check{M}_2^{\gamma\delta\rho} \eta_\gamma^\alpha \\ \check{Q}_0^\beta &= -\frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\beta} \right) + \frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\alpha}} \right) \mu_\alpha + \check{M}_2^{\gamma\delta\rho} \eta_\gamma^\beta \mu_\delta \\ \check{Q}_1^\beta &= -\frac{\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\beta} \right) - \check{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \\ \check{Q} &= -\frac{2\xi_R}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v^2} \right) + \check{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \\ \check{\eta}_c &= -\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \Lambda}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Durch Einführung der freien Energie für die Schale

$$\psi_0^\vee := - \frac{\phi_0^\vee}{\lambda} \quad (9.70)$$

lassen sich die Stofffunktionen $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$, $\overset{\vee}{Q}^\beta$ ($m=0,1$) und $\overset{\vee}{Q}$ auch durch $\overset{\vee}{\psi}_0$ und $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ darstellen; hierbei entfällt dann der Faktor $\frac{1}{\lambda}$ in den entsprechenden Darstellungen.

Es sei noch angemerkt, daß natürlich die rechten Seiten von (9.69)₁ und (9.69)₂ die Orthogonalitätsbedingung (E-4) identisch erfüllen.

Die Bedingungen (9.69) und (9.66) stellen die konstitutiven Einschränkungen für die Stofffunktionen (9.42) dar, wie sie aus der 2D-Entropieungleichung nach der Schlußweise von Coleman und Noll ableitbar sind; man beachte hier, daß Ergebnisse aus der dreidimensionalen Theorie bisher nicht verwendet wurden. Zunächst zeigt (9.69)₅, daß die in Kap. ((8.2.2.4), Teil 1) gemachte Annahme der Existenz einer Stoffgleichung für die Größe Q nicht dazu führt, daß die Stofffunktion $\overset{\vee}{Q}$ unbestimmt und frei wählbar bleibt, sondern daß bei Vorgabe von $\overset{\vee}{\psi}_0$ und $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ auch Q festgelegt ist. Insbesondere zeigt aber das Ergebnis (9.69), daß die Vorgabe der freien Entropie $\overset{\vee}{\psi}_0$ nicht ausreicht, um die anderen Stofffunktionen festzulegen; hier ist noch die Vorgabe der Stofffunktionen $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ erforderlich, die nicht notwendigerweise symmetrisch sein müssen, und für die sich aus dem Dissipationspostulat keine Einschränkungen ergeben haben. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum dreidimensionalen Fall (Kap. 5, Teil 1).

9.1.5 Bedeutung der Momente 2. Ordnung für die 2D-Schalengleichungen:

Das $\overset{\vee}{M}$ -Theorem

Im vorherigen Abschnitt war festgestellt worden, daß sich für die Momente 2. Ordnung $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ keine Einschränkungen aus der 2D-Entropieungleichung und der Orthogonalitätsbedingung ergeben haben; insbesondere ist $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ nicht aus der freien Entropie $\overset{\vee}{\psi}_0$ bestimmbar. Es stellt sich hier jetzt die Frage, ob gegebenenfalls auf eine explizite Angabe der Stofffunktionen $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ bei der Ermittlung der Deformationen bzw. Bewegung der Schale verzichtet werden kann. Oder: Ist die Momentengeometrie der Schale $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ unabhängig von der Wahl der Stofffunktionen $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ bestimmbar?

Diese Frage ist u.a. durch die Feststellungen motiviert, auf die Eringen [41, S. 124] bei bestimmten multipolaren Medien hingewiesen hat: Gewisse kinematische Größen (dort der schiefsymmetrische Anteil des Spannungs- und des Momentenspannungstensors) sind durch ein elastisches Potential nicht darstellbar und bleiben damit unbestimmt; allerdings sind diese schiefsymmetrischen Anteile nicht wesentlich für die Bestimmung des Verschiebungsfeldes.

Mit der Zerlegung von $\bar{d}_{,\alpha}$ Gl. (9.27) und den folgenden, neu eingeführten Definitionen

$$\begin{aligned}
 m_0^{\alpha\beta} &:= M_0^{\alpha\beta} + M_1^{s\beta} \eta_s^\alpha \\
 m_1^{\alpha\beta} &:= M_1^{\alpha\beta} + M_2^{s\beta} \eta_s^\alpha \\
 q_0^\beta &:= Q_0^\beta + M_1^{s\beta} \mu_s \\
 q_1^\beta &:= Q_1^\beta + M_2^{s\beta} \mu_s \\
 \tilde{q}_0^\beta &:= Q_0^\beta + Q_1^\gamma \eta_s^\beta + L^\beta \\
 q &:= Q + Q_1^\gamma \mu_\gamma
 \end{aligned}
 \tag{9.71}$$

erhalten die lokalen Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und der lokale 2D-Energiesatz die folgende Form

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{0R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{1R} \ddot{\bar{d}} &= \mathcal{S}_{0R} \bar{b} + \bar{f}_0 + (m_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + q_0^\beta \bar{d})_{;\beta} \\
 \mathcal{S}_{1R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{2R} \ddot{\bar{d}} &= \mathcal{S}_{1R} \bar{b} + \bar{f}_1 + (m_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + q_1^\beta \bar{d})_{;\beta} \\
 &\quad - \tilde{q}_0^\beta \bar{r}_{,\beta} - q \bar{d} \\
 \mathcal{S}_{0R} \dot{\bar{\epsilon}} &= [q \bar{d} + \tilde{q}_0^\beta \bar{r}_{,\beta}] \cdot \dot{\bar{d}} \\
 &\quad + [m_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + q_0^\beta \bar{d}] \cdot \dot{\bar{r}}_{,\beta} \\
 &\quad + [m_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + q_1^\beta \bar{d}] \cdot \dot{\bar{d}}_{,\beta} \\
 &\quad - h_0^{\beta}{}_{;\beta} + \mathcal{S}_{0R} \bar{r} - [(\bar{q} \cdot \bar{N} \bar{\epsilon})^+ + (\bar{q} \cdot \bar{N} \bar{\epsilon})^-]
 \end{aligned}
 \tag{9.72}$$

Wesentlich für das Weitere ist nun, daß sich mit den konstitutiven Restriktionen (9.69) die neu eingeführten Größen (9.71) allein durch die Massiesche Funktion $\check{\Phi}_0$ oder die freie Energie $\check{\psi}$ Gl. (9.70) darstellen lassen; die Stofffunktionen $\check{M}^{\alpha\beta}$ heben sich in den Differentialgleichungen (9.72) heraus. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned}
 m_0^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\beta\gamma}} \right) \eta_{\gamma}^{\alpha} \\
 m_1^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_{\alpha\beta}} \\
 q^{\beta} &= -\frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_{\beta}} - \frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\beta\gamma}} \mu_{\gamma} \\
 \check{q}^{\beta} &= -\frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\beta}} \\
 \check{q}^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_{\beta}} - \frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\alpha}} \eta_{\alpha}^{\beta} \\
 q &= -\frac{2\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}} - \frac{\xi_{0R}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\alpha}} \mu_{\alpha}
 \end{aligned} \right\} (9.73)$$

Damit ist gezeigt, daß in die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und in die 2D-Energiegleichung nur die freie Entropie $\check{\Phi}_0$ und innere Energie $\check{\epsilon}_0^{\nu}$ als Stofffunktionen eingehen, nicht aber $\check{M}^{\alpha\beta}$. Da diese Differentialgleichungen die bestimmenden Feldgleichungen für die kinematischen Größen $\bar{\tau}$ und \bar{d} und die Temperaturinverse Λ_0 sind, sind die Lösungen $\bar{\tau}, \bar{d}, \Lambda_0$ unabhängig von der Wahl der Stofffunktionen $\check{M}^{\alpha\beta}$. Hier ist allerdings noch vorausgesetzt, daß sich die Randbedingungen der Schale auch in den Variablen der linken Seite von (9.73) darstellen lassen; dies wird später (Kap. 11) nachgewiesen.

Dieses Resultat zeigt, daß die Stofffunktionen $\check{M}^{\alpha\beta}$ im Hinblick auf die Lösungen $\bar{\tau}, \bar{d}, \Lambda_0$ beliebig gewählt werden dürfen; man kann sie also nach "Bequemlichkeitskriterien" festlegen. Das bedeutet aber auch, daß die Beanspruchungsgrößen $\check{M}_m^{\alpha\beta}$, $m=0,1,2$, \check{Q}_n^{α} , $n=0,1$ und Q letztlich unbestimmt bleiben bzw. nur durch eine noch festzulegende Konvention bestimmbar

werden. Dieses Resultat soll weiter kurz als das $\frac{M}{2}$ -Theorem bezeichnet werden. Auf einige mögliche Konventionen wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

9.1.6 Alternative Formen der Stoffgleichungen

Geht man davon aus, daß die Variablen $M_m^{\alpha\beta}, Q_m^\alpha, Q, \phi, \xi$ weiter als die Beanspruchungsgrößen der Schalentheorie beibehalten werden sollen, dann erscheint die Konvention

$$N_2^{\alpha\beta} \equiv 0 \quad (9.74)$$

naheliegender und sinnvoll. Andere Alternativen sind aber vorstellbar, die u.U. auch rechentechnische Vorteile haben. Insbesondere werden andere Konventionen als (9.74) aber Vergleiche mit Ergebnissen noch später darzustellender Vorgehensweisen ermöglichen.

In der bisherigen Darstellung der Stofffunktionen

$$N_2^{\alpha\beta}, m=0,1,2, Q_m^\alpha, m=0,1, Q, \phi, \xi \quad (9.75)$$

war davon ausgegangen worden, daß das Skalarprodukt

$$v_{\alpha\beta} := \bar{d}_{1,\alpha} \cdot \bar{d}_{1,\beta} = v_{\beta\alpha}$$

durch den minimalen Satz kinematischer Variabler (9.36) dargestellt wird, so daß die Funktionen (9.75) explizit nur von den Zustandsgrößen

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_{\alpha\beta}, d_\alpha, v, v_\alpha, \rho$$

abhängen. Da die Errechnung von $v_{\alpha\beta}$ als Funktion der unabhängigen kinematischen Zustandsgrößen u.U. auf praktische Schwierigkeiten stößt, kann es von Vorteil sein, die symmetrische Größe $v_{\alpha\beta}$ in der Argumentenliste der Stofffunktionen beizubehalten, wobei allerdings zu beachten ist, daß $v_{\alpha\beta}$ keine unabhängige Zustandsgröße ist. Anstelle von (9.42) seien die Stoffgleichungen also gegeben durch

$$\begin{aligned}
 M_m^{\alpha\beta} &= M_m^{\check{\alpha}\beta} (a_{\alpha\beta}, d_\alpha, d_{\alpha\beta}, \check{v}_\alpha, \check{v}, \check{v}_{\alpha\beta}, \check{\Lambda}_0) \\
 \vdots & \\
 Q &= \check{Q}(\text{"}) \\
 \Sigma_0 &= \check{\Sigma}_0(\text{"}) \\
 \Phi_0 &= \check{\Phi}_0(\text{"}) \\
 h_0^\alpha &= \check{h}_0^\alpha(\check{\Lambda}_0, \check{\Lambda}_{0,\alpha}) \equiv \check{h}_0^{\check{\alpha}}(\check{\Lambda}_0, \check{\Lambda}_{0,\alpha}),
 \end{aligned}
 \tag{9.76}$$

wobei die Nebenbedingung

$$\check{v}_{\alpha\beta} = \check{v}_{\beta\alpha} = \check{N}_{\alpha\beta}^{\check{\alpha}\beta} (a_{\alpha\beta}, d_{\alpha\beta}, d_\alpha, \check{v}, \check{v}_\alpha)
 \tag{9.77}$$

gilt. Dann wird

$$\begin{aligned}
 \dot{\check{\Phi}}_0 &= \frac{D}{Dt} \check{\Phi}_0 = \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} \dot{a}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_{\alpha\beta}} \dot{d}_{\alpha\beta} \\
 &\quad + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\alpha} \dot{d}_\alpha + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{v}_\beta} \dot{\check{v}}_\beta \\
 &\quad + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{v}} \dot{\check{v}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{N}_{\alpha\beta}^{\check{\alpha}\beta}} \dot{\check{N}}_{\alpha\beta}^{\check{\alpha}\beta} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\Lambda}_0} \dot{\check{\Lambda}}_0,
 \end{aligned}
 \tag{9.78}$$

wobei

$$\dot{\check{N}}_{\alpha\beta}^{\check{\alpha}\beta} = (\dot{\check{d}}_{,\alpha} \cdot \dot{\check{d}}_{,\beta}) = (\dot{\check{d}}_{,\alpha} \cdot \check{d}_{,\beta} + \check{d}_{,\alpha} \cdot \dot{\check{d}}_{,\beta});
 \tag{9.79}$$

die Ableitungen

$$\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}}, \dots, \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{v}}$$

sind für $\check{v}_{\alpha\beta} = \text{konst.}$ auszuführen. Da $\check{v}_{\alpha\beta}$ nicht unabhängig von den anderen kinematischen Variablen einstellbar ist, muß $\check{v}_{\alpha\beta}$ durch (9.79) dargestellt werden. Mit (9.56)₂ erhält man schließlich anstelle von (9.61)

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \check{\Phi}_0 = & \left[\left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_\beta^\alpha \eta_\gamma^\beta \right] \dot{a}_{\alpha\beta} \\
 & + \left[\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} + \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_\beta^\alpha \right] \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \\
 & + \left[\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\beta} - \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \eta_\beta^\alpha \mu_\gamma \right] \dot{d}_\beta \\
 & + \left[\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\beta} + \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \mu_\gamma \right] \dot{v}_\beta \\
 & + \left[\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \mu_\beta \mu_\gamma \right] \dot{v} \\
 & - \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \eta_\alpha^\beta \eta_\gamma^\alpha}_{\text{symmetrisch in } \beta, \gamma} \underbrace{\langle \bar{r}_{\beta\gamma} \cdot \dot{\bar{r}}_{\beta\gamma} \rangle}_{\text{schief-symm.}} \right\} \\
 & + \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\alpha}} \right)}_{\text{symmetrisch in } \alpha, \beta} \underbrace{\left(\eta_\alpha^\beta \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\alpha \right)}_{\text{schief-symmetrisch in } \alpha, \beta} \bar{r}_{\beta\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \right\} \\
 & + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_0} \dot{\lambda}_0 .
 \end{aligned} \tag{9.80}$$

Man stellt leicht fest, daß die beiden {...}-Ausdrücke für sich identisch verschwinden. Dieses Zwischenergebnis wird in die 2D-Entropiegleichung (9.57) eingesetzt, und es wird dann analog wie in Kap. 9.1.4 verfahren, d.h., es wird verlangt, daß die 2D-Entropiegleichung für alle zulässigen thermodynamischen Prozesse (d.h. auch hier für unabhängig voneinander einstellbare Werte $\dot{a}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha}$, $\dot{d}_{\alpha\lambda}$, \dot{d}_{β} , \dot{v}_{β} , \dot{v} , $\dot{\lambda}$) identisch erfüllt sein soll. Ohne weiter auf die formalen Einzelheiten einzugehen, erhält man die folgenden konstitutiven Restriktionen:

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{\checkmark}{M}_0^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \eta_s^\alpha \\
 &\quad + \left[\overset{\checkmark}{M}_2^{\gamma\beta} + \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \right] \eta_s^\gamma \eta_s^\alpha \\
 \overset{\checkmark}{M}_1^{\alpha\beta} &= -\frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} - \left[\overset{\checkmark}{M}_2^{\gamma\beta} + \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\gamma}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\beta}} \right) \right] \eta_s^\alpha \\
 \overset{\checkmark}{Q}_0^\alpha &= -\frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial d_\alpha} - \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\gamma}} - \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial a_{\gamma\alpha}} \right) \mu_s \\
 &\quad + \left[\overset{\checkmark}{M}_2^{\gamma\alpha} + \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\alpha\gamma}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\alpha}} \right) \right] \eta_s^\gamma \mu_s \\
 \overset{\checkmark}{Q}_1^\alpha &= -\frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_\alpha} - \left[\overset{\checkmark}{M}_2^{\gamma\alpha} + \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\alpha\gamma}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\alpha}} \right) \right] \mu_s \\
 \overset{\checkmark}{Q} &= -\frac{2\xi_0 R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v} + \left[\overset{\checkmark}{M}_2^{\gamma\delta} + \frac{\xi_0 R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\delta\gamma}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial v_{\gamma\delta}} \right) \right] \mu_\gamma \mu_\delta \\
 \overset{\checkmark}{\sigma} &= -\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial \Lambda}
 \end{aligned} \right\} (9.81)$$

und wie vorher (vergl. (9.66)) die Ungleichung

$$\checkmark \Lambda_{\alpha}^{\alpha} \leq 0.$$

Wesentlich in dem Ergebnis ist jetzt, daß die Stofffunktionen der Momente 2. Ordnung nur in der Kombination

$$\checkmark \mathcal{D}^{\alpha\beta} := \checkmark M_2^{\alpha\beta} + \frac{\mathcal{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \checkmark \Phi_0}{\partial v_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \checkmark \Phi_0}{\partial v_{\beta\alpha}} \right) \quad (9.82)$$

aufzutreten. Wegen des $\checkmark M_2$ -Theorems könnten jetzt die Stofffunktionen so gewählt werden, daß

$$\checkmark \mathcal{D}^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad (9.83)$$

d.h.

$$\checkmark M_2^{\alpha\beta} \equiv - \frac{\mathcal{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \checkmark \Phi_0}{\partial v_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \checkmark \Phi_0}{\partial v_{\beta\alpha}} \right). \quad (9.84)$$

Damit vereinfachen sich die rechten Seiten von (9.81) erheblich. Durch diese Konvention ist die Massieusche Funktion $\checkmark \mathcal{D}_0$ bzw. die freie Energie $\checkmark \Psi_0$ allein die für die Beanspruchungsgrößen bestimmende thermodynamische Funktion. Beachtenswert ist, daß mit der Konvention (9.84) die Momente 2. Ordnung symmetrisch werden, nicht aber notwendigerweise die Momente 0. und 1. Ordnung.

In Ergänzung zu den alternativen Stoffgleichungen (9.69) und (9.81) (einschließlich der Konvention (9.84)) seien hier noch die entsprechenden Darstellungen unter Verwendung der kovarianten Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors (9.48) angegeben. Es war festgestellt worden, daß der Variablensatz (9.51)

$$\left\{ E_{\alpha\beta}, \checkmark E_{\alpha\beta}, E_{\alpha 3}, \checkmark E_{\alpha 3}, E_{33}, \sigma_{\alpha\beta} \right\} \quad (9.85)$$

dem minimalen kinematischen Variablensatz (9.36) äquivalent ist.

Zunächst soll davon ausgegangen werden, daß alle Stofffunktionen in der 2D-Entropieungleichung Funktionen der kinematischen Variablen (9.85) und der Temperaturinversen $\hat{\theta}$ sind, d.h.

$$\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0(\underset{0}{E}_{\alpha\beta}, \underset{1}{E}_{\alpha\beta}, \underset{0}{E}_{\alpha 3}, \underset{1}{E}_{\alpha 3}, \underset{0}{E}_{33}, \sigma_{\alpha\beta}, \hat{\theta}) \quad \text{etc.} \quad (9.86)$$

Mit Blick auf das Ergebnis (9.69) und unter Beachtung von (9.48) wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{0}{E}_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{0}{E}_{\alpha\beta}} \right) \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\gamma\delta}} &= \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{1}{E}_{\alpha\beta}} \frac{\partial \underset{1}{E}_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_{\gamma\delta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_{\gamma\delta}} \\ &= \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{1}{E}_{\alpha\beta}} \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + \delta_{\beta}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}) + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} - \delta_{\beta}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{1}{E}_{\gamma\delta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{1}{E}_{\delta\gamma}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\gamma\delta}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\delta\gamma}} \right) \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial d_{\alpha}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{0}{E}_{\alpha 3}} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \nu_{\alpha}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{1}{E}_{\alpha 3}} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \nu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \underset{0}{E}_{33}} \end{aligned} \right\} (9.87)$$

Damit kann (9.69) umgeformt werden und man erhält

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_0^{\alpha\beta} &= -\frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) - \frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\beta\alpha}} \right) \eta_\beta^\alpha \\
 &\quad + \tilde{M}_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha \eta_\beta^\alpha \\
 \tilde{M}_1^{\alpha\beta} &= -\frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right) - \frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\beta\alpha}} \right) \\
 &\quad - \tilde{M}_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha \\
 \tilde{Q}_0^\alpha &= -\frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\alpha 3}} - \frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\alpha 3}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{3\alpha}} \right) \mu_\beta \\
 &\quad + \tilde{M}_2^{\gamma\alpha} \eta_\gamma^\beta \mu_\beta \\
 \tilde{Q}_1^\alpha &= -\frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\alpha 3}} - \tilde{M}_2^{\beta\alpha} \mu_\beta \\
 \tilde{Q} &= -\frac{\mathfrak{S}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{033}} + \tilde{M}_2^{\beta\alpha} \mu_\beta \mu_\alpha .
 \end{aligned} \tag{9.88}$$

Für spätere Überlegungen ist die Umformung der Darstellung (9.81) mit der Konvention (9.84) wichtiger. Geht man davon aus, daß in den Stofffunktionen die kinematische Variable $\sigma_{\alpha\beta}$ oder äquivalent $E_{2\alpha\beta}$ beibehalten wird und nicht durch den kinematischen Variablensatz (9.85) ausgedrückt wird, dann ist

$$\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0 (E_{0\alpha\beta}, E_{1\alpha\beta}, E_{0\alpha 3}, E_{1\alpha 3}, E_{033}, \sigma_{\alpha\beta}, E_{2\alpha\beta}, \Lambda_0) \tag{9.89}$$

etc.

Damit erhalten die konstitutiven Restriktionen (9.81) das folgende Aussehen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_0^{\alpha\beta} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) - \frac{g_{02}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_{\beta\alpha}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \right) \eta^\alpha \\
 &\quad + \left[\tilde{M}_2^{\gamma\beta} + \frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{2\beta\gamma}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{2\gamma\beta}} \right) \right] \eta^\gamma \eta^\alpha \\
 \tilde{M}_1^{\alpha\beta} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right) - \frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_{\beta\alpha}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \right) \\
 &\quad - \left[\tilde{M}_2^{\gamma\beta} + \frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{2\beta\gamma}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{2\gamma\beta}} \right) \right] \eta^\gamma \\
 \tilde{Q}_0^{\alpha} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{0\alpha\beta}} - \frac{g_{02}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_{\beta\alpha}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \right) \mu_\beta \\
 &\quad + \left[\tilde{M}_2^{\gamma\alpha} + \frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{2\alpha\gamma}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{2\gamma\alpha}} \right) \right] \eta_\gamma \mu_\beta \\
 \tilde{Q}_1^{\alpha} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{1\alpha\beta}} - \left[\tilde{M}_2^{\gamma\alpha} + \frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{2\alpha\gamma}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{2\gamma\alpha}} \right) \right] \mu_\gamma \\
 \tilde{Q}^{\alpha} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \left[\tilde{M}_2^{\gamma\alpha} + \frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{2\alpha\gamma}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{2\gamma\alpha}} \right) \right] \mu_\gamma \mu_\beta
 \end{aligned} \tag{9.90}$$

Die Konvention (9.84) lautet schließlich wie folgt:

$$\tilde{M}_2^{\alpha\beta} \equiv -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\alpha\beta}}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^{\beta\alpha}}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \tag{9.91}$$

Damit ist auch diese letzte und für das Weitere noch wichtige Umformung abgeschlossen. Auch hier ist das Moment 2. Ordnung symmetrisch; es ist jetzt aber besonders augenfällig, daß das Moment 1. Ordnung definitiv nicht symmetrisch ist.

9.1.7 Folgerungen aus der verschärften Beobachterinvarianz für die Massiesche Funktion der Schale

In der bisherigen Analyse war die Forderung der Beobachterinvarianz nur hinsichtlich der zweidimensionalen Stofffunktionen gestellt worden, also beispielsweise für das Integral der "dreidimensionalen" Massieschen Funktion ϕ

$$\phi_0 = \frac{1}{\int_{S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R} \int_{S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \phi(\bar{r}_{,k}, \Lambda_0) d\theta = \frac{1}{\int_{S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R} \int_{S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \phi(\bar{r}_{,k}, \bar{d}_{,k}, \bar{d}_{,0}, \Lambda_0, \theta) d\theta$$

Im dreidimensionalen Fall muß aber ϕ selbst gegenüber Beobachterwechsel invariant sein. Dies führt dazu, daß ϕ eine Funktion des rechten Cauchy-Green Tensors \underline{C} bzw. des Lagrangeschen Verzerrungstensors \underline{E} sein muß (und der Temperaturinversen). D.h., die Massiesche Funktion ϕ ist allein eine Funktion der invarianten Größen E_{KL} und $\Lambda = \Lambda_0$. Die E_{KL} sind aber durch

$$E_{\alpha\beta}, E_{1\alpha\beta}, E_{0\alpha\beta}, E_{1\alpha\beta}, E_{033}, E_{2\alpha\beta} \tag{9.92}$$

und die Dickenkoordinate θ darstellbar, so daß sich

$$\phi_0 = \frac{1}{\int_{S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R} \int_{S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \phi(E_{0\alpha\beta}, \dots, E_{2\alpha\beta}, \Lambda_0, \theta) d\theta$$

als Funktion der Größen (9.52) und Λ_0 beschreiben läßt

$$\phi_0 = \overset{w}{\phi}_0(E_{0\alpha\beta}, \dots, E_{2\alpha\beta}, \Lambda_0) \tag{9.93}$$

Bedeutsam ist nun, daß im Vergleich zu (9.89) hier die schiefsymmetrische Größe $\theta_{\alpha\beta}$ explizit nicht enthalten ist. Man beachte aber, daß $E_{2\alpha\beta}$ nach wie vor eindeutig durch die Größen (9.85) darstellbar ist, so daß auch jetzt die Massiesche Funktion ϕ_0 auf die Form

$$\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0 \left(E_{\alpha\beta}^0, E_{\alpha\beta}^1, E_{\alpha\beta}^2, E_{\alpha\beta}^3, E_{\alpha\beta}^4, \partial_{\alpha\beta}, 1 \right)$$

reduzierbar ist. Die 12 in (9.85) enthaltenen kinematischen Variablen sind als unabhängige Zustandsgrößen anzusehen, nicht aber die 14 kinematischen Variablen in (9.92).

Da die schiefssymmetrische Größe $\Phi_{\alpha\beta}$ in der Argumentenliste von Φ_0^W fehlt, vereinfachen sich die konstitutiven Restriktionen (9.90), und man erhält schließlich

$$\left. \begin{aligned} M_0^{W\alpha\beta} &= - \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^0} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}^0} \right) + D^{W\delta\beta} \eta_\delta^\alpha \eta_\gamma^\alpha \\ M_1^{W\alpha\beta} &= - \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^1} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}^1} \right) - D^{W\delta\beta} \eta_\delta^\alpha \\ Q_0^{W\alpha} &= - \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^0} + D^{W\delta\alpha} \eta_\delta^\beta \mu_\beta \\ Q_1^{W\alpha} &= - \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^1} - D^{W\alpha\delta} \mu_\delta \\ Q &= - \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^2} + D^{W\delta\beta} \mu_\delta \mu_\beta \end{aligned} \right\} (9.94)$$

wobei

$$D^{W\delta\beta} := M_2^{W\delta\beta} + \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^2} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}^2} \right). \quad (9.95)$$

Das M_2 -Theorem legt die Konvention

$$D^{W\delta\beta} \equiv 0 \quad (9.96)$$

nahe, und dies liefert schließlich de facto eine weitere Stoffgleichung

$$M_2^{W\alpha\beta} = - \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}^2} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}^2} \right), \quad (9.97)$$

Damit wird aus (9.94)

$$\begin{aligned}
 M_0^W{}^{\alpha\beta} &= -\frac{g_R}{\Delta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_0^{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_0^{\beta\alpha}} \right) \\
 M_1^W{}^{\alpha\beta} &= -\frac{g_R}{\Delta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_1^{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_1^{\beta\alpha}} \right) \\
 Q_0^W{}^\alpha &= -\frac{g_R}{\Delta} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_0^{\alpha 3}} \\
 Q_1^W{}^\alpha &= -\frac{g_R}{\Delta} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_1^{\alpha 3}} \\
 Q^W &= -\frac{g_R}{\Delta} \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_0^{33}}
 \end{aligned}
 \tag{9.98}$$

Die anfangs angesprochene verschärfte Beobachterinvarianzforderung für die Massieu-
sche Funktion Φ_0 zusammen mit dem M -Theorem liefert hier jetzt Momente
0., 1. und 2. Ordnung, die alle symmetrisch sind. Durch die Konvention (9.96)
entfallen in den Stoffgleichungen auch die recht komplexen Terme $\eta^\alpha{}^\beta$ und μ_α ,
die nichtlineare Funktion der unabhängigen kinematischen Zustandsvariablen sind.

9.2 Einschränkungen für die zweidimensionalen Stofffunktionen bei dem
2. schalentheoretischen Konzept

In Kap. 8.3, Teil 1 waren für das 2. schalentheoretische Konzept die zweidimensionalen Bilanzgleichungen für die Schale und Symmetriebedingungen für die Momente der Spannungen abgeleitet worden. Außer der Feststellung, daß diese Symmetriebedingungen bei dem 1. schalentheoretischen Konzept (Kap. 8.2, Teil 1) nicht erzielt wurden, unterscheiden sich die zweidimensionalen Bilanzgleichungen, insbesondere die Bewegungsgleichungen 2. Art und die 2D-Energiebilanzgleichungen. Diese Tatsache ist im folgenden bei der Auswertung des Dissipationspostulats für die zweidimensionale Entropieungleichung konsequent zu beachten.

9.2.1 Ableitung von Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen
aus der Beobachterinvarianz und aus dem Dissipationspostulat

Ganz entsprechend wie in Kap. 9.1.1 hat auch hier die 2D-Entropieungleichung zunächst die Form (9.5), aus der mit der Entropie-Forderung (B1) - d.h. mit $\dot{N} = 0$ für alle Flächenabschnitte - dann (9.9) folgt. Die Elimination der aktuellen thermischen Einwirkungen in (9.9) erfolgt jetzt aber mit der lokalen Form der reduzierten 2D-Energiegleichung (E-9). Anstelle von (9.11) erhält man hier

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\alpha R}}{\sigma} \dot{\Omega} \geq \int_{\sigma} \left\{ \frac{S_{\alpha R}}{\sigma} \dot{\epsilon} - \left[M_0^{\alpha\beta} (\bar{\tau}_{,\alpha} \cdot \dot{\tau}_{,\beta}) \right. \right. \\
 + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{,\alpha} \cdot \dot{\tau}_{,\beta} + \bar{\tau}_{,\alpha} \cdot \dot{d}_{,\beta}) \\
 + M_2^{\alpha\beta} (\bar{d}_{,\alpha} \cdot \dot{d}_{,\beta}) \\
 + M_0^{\beta\alpha} (\bar{\tau}_{,\beta} \cdot \dot{d} + \bar{d} \cdot \dot{\tau}_{,\beta}) \\
 + M_1^{\beta\alpha} (\bar{d}_{,\beta} \cdot \dot{d} + \bar{d} \cdot \dot{d}_{,\beta}) \\
 \left. \left. + M_0^{\beta\beta} (\bar{d} \cdot \dot{d}) \right] - h_{\sigma\alpha}^{\alpha} \right\} \\
 - \left(h_{\sigma\alpha}^{\alpha} \right)_{;\alpha} ,
 \end{aligned} \tag{9.99}$$

woraus nach Einführung der Massieschen Funktion $\overset{\circ}{\phi}_0$ Gl. (9.12) und mit (9.14)

$$\sum_{\circ R} \overset{\circ}{\phi}_0 + \sum_{\circ R} \overset{\circ}{\varepsilon} \overset{\circ}{\lambda}_0 - \overset{\circ}{\Lambda} \left[\overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{r}_{1\alpha} \cdot \overset{\circ}{r}_{1\beta} + \dots + \overset{\circ}{M}^{33} \overset{\circ}{d} \cdot \overset{\circ}{d} \right] - \overset{\circ}{h}_0^{\alpha} \overset{\circ}{\lambda}_{0,\alpha} \geq 0 \quad (9.99)^I$$

folgt. Unterschiede zu (9.11)^I sind in dem Leistungsausdruck der Momente ($\overset{\circ}{\Lambda}$ -Ausdruck) vorhanden; insbesondere ist zu beachten, daß die Momente anstelle der Orthogonalitätsbedingung den Symmetriebedingungen unterworfen sind.

Der Forderung der Forminvarianz der Stoffgleichungen (Beobachterinvarianz) führt jetzt ganz analog zu Kap. 9.1 zu 2D-Stoffgleichungen mit der folgenden allgemeinen Struktur

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{M}_m^{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{M}_m^{\nu\alpha\beta} (a_{\alpha\beta}, d_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}, v_\alpha, v^2, \overset{\circ}{\lambda}_0) = \overset{\circ}{M}_m^{\beta\alpha}, \quad m=0,1,2 \\ \overset{\circ}{M}_m^{3\alpha} &= \overset{\circ}{M}_m^{\nu 3\alpha} (\quad) = \overset{\circ}{Q}_m^{\nu\alpha}, \quad m=0,1 \\ \overset{\circ}{M}_0^{33} &= \overset{\circ}{M}_0^{\nu 33} (\quad) \\ \overset{\circ}{\phi}_0 &= \overset{\circ}{\phi}_0^\nu (\quad) \\ \overset{\circ}{\varepsilon} &= \overset{\circ}{\varepsilon}^\nu (\quad) \\ \overset{\circ}{h}_0^\alpha &= \overset{\circ}{h}_0^{\nu\alpha} (\overset{\circ}{\lambda}_0, \overset{\circ}{\lambda}_{0,\alpha}) \end{aligned} \right\} (9.100)$$

Die Einführung der 12 unabhängigen kinematischen Variablen in die 2D-Entropiegleichung (9.99)^I ergibt dann nach Umordnung (vergl. 9.57)

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{S}_R \dot{\phi} - \dot{h}_0^\alpha \dot{\lambda}_{0,\alpha} + \mathfrak{S}_R \dot{\lambda}_0^\varepsilon \\
 & + \dot{\lambda}_0 \left\{ \dot{\alpha}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[\dot{M}_0^{\alpha\beta} + \underbrace{(\dot{M}_1^{\gamma\beta} - \dot{M}_1^{\beta\gamma}) \eta_\gamma^\alpha}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} - \underbrace{\dot{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\beta \eta_\gamma^\alpha}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} \right] \right. \\
 & \quad + \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \left[\dot{M}_1^{\alpha\beta} + \dot{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\alpha \right] \\
 & \quad + \dot{d}_\beta \left[\dot{M}_0^{\beta\beta} - \underbrace{(\dot{M}_1^{\alpha\beta} - \dot{M}_1^{\beta\alpha}) \mu_\alpha}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} - \dot{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\beta \mu_\gamma \right] \\
 & \quad + \dot{\nu}_\beta \left[\dot{M}_1^{\beta\beta} + \dot{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \right] \\
 & \quad + \dot{\nu} \frac{1}{2} \left[\dot{M}_0^{\beta\beta} - \dot{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right] \\
 & \quad + \langle \dot{\pi}_{1\alpha} \cdot \dot{\pi}_{1\beta} \rangle \left[\dot{M}_0^{\alpha\beta} + \underbrace{(\dot{M}_1^{\gamma\beta} - \dot{M}_1^{\beta\gamma}) \eta_\gamma^\alpha}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} - \underbrace{\dot{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\beta \eta_\gamma^\alpha}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} \right] \\
 & \quad + \dot{\pi}_{1\alpha} \cdot \dot{d} \left[\underbrace{(\dot{M}_1^{\alpha\beta} - \dot{M}_1^{\beta\alpha}) \mu_\beta}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} + \underbrace{\dot{M}_2^{\gamma\delta} (\eta_\delta^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\gamma)}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{in } \alpha, \beta}} \right] \left. \right\} \\
 & \equiv 0.
 \end{aligned}
 \tag{9.101}$$

Die mit einer Schlangenlinie gekennzeichneten Terme verschwinden, da die Stofffunktionen $\dot{M}_m^{\gamma\beta}$ die Symmetriebedingungen (E-8) identisch erfüllen müssen. Da ferner das verjüngende Produkt eines symmetrischen und eines schief-symmetrischen Flächentensors identisch verschwindet, entfallen in (9.101) die letzten beiden Zeilen. Mit (9.61) wird dann aus (9.101) nach Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
 & \dot{a}_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\overset{\vee}{M}_0^{\alpha\beta} - \overset{\vee}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\gamma^\beta \eta_\delta^\alpha \right) \Lambda_0 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) \right\} \\
 & + \dot{a}_{\alpha\beta} \left\{ \left(\overset{\vee}{M}_1^{\alpha\beta} + \overset{\vee}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\gamma^\beta \eta_\delta^\alpha \right) \Lambda_0 + \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} \right\} \\
 & + \dot{a}_{\beta\gamma} \left\{ \left(\overset{\vee}{M}_0^{\gamma\beta} - \overset{\vee}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\beta \eta_\gamma^\mu \right) \Lambda_0 + \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\gamma}} \right\} \\
 & + \dot{v}_\beta \left\{ \left(\overset{\vee}{M}_1^{\gamma\beta} + \overset{\vee}{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \right) \Lambda_0 + \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial v_\beta} \right\} \\
 & + \dot{v} \left\{ \frac{1}{2} \left(\overset{\vee}{M}_0^{\gamma\delta} - \overset{\vee}{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right) \Lambda_0 + \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial v} \right\} \\
 & + \Lambda_0 \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \left\{ \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \Lambda_0} - \varepsilon_0 \right\} - \left\{ \overset{\vee}{h}_0^\alpha \Lambda_{0,\alpha} \right\} \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{9.102}$$

Das Dissipationspostulat führt jetzt wegen der beliebigen Einstellbarkeit der Raten $\dot{a}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha}$ etc. mit der gleichen Argumentation wie in Kap. 9.1.4 auf die folgenden Einschränkungen für die Stofffunktionen:

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{\vee}{M}_0^{\alpha\beta} &= - \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) + \overset{\vee}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta \\
 \overset{\vee}{M}_1^{\alpha\beta} &= - \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} - \overset{\vee}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\gamma^\beta \eta_\delta^\alpha \\
 \overset{\vee}{M}_0^{\gamma\beta} &= - \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\gamma}} + \overset{\vee}{M}_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\beta \eta_\gamma^\mu \\
 \overset{\vee}{M}_1^{\gamma\beta} &= - \frac{\mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial v_\beta} - \overset{\vee}{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \\
 \overset{\vee}{M}_0^{\gamma\delta} &= - \frac{2 \mathfrak{g}_R}{\Lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial v} + \overset{\vee}{M}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \\
 \varepsilon_0 &= - \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \Lambda_0}
 \end{aligned} \right\} \tag{9.103}$$

und der schon bekannten Restentropieungleichung

$$\int_0^v h^\alpha \Lambda_{0,\alpha} \leq 0. \quad (9.104)$$

Die schon mehrfach gebrauchte Symmetriebedingung für die Momente

1. Ordnung

$$\check{M}_1^{\alpha\beta} = \check{M}_1^{\beta\alpha} \quad (9.105)$$

ergibt jetzt eine Verknüpfung zwischen der Massieschen Funktion $\check{\Phi}_0^v$ und den Momenten 2. Ordnung $\check{M}_2^{\alpha\beta} = \check{M}_2^{\beta\alpha}$; denn mit (9.105) folgt aus (9.103)₂

$$\frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\beta\alpha}} = \check{M}_2^{\gamma\alpha} \eta_\gamma^\beta - \check{M}_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha. \quad (9.106)$$

Die Aufspaltung von $\partial \check{\Phi}_0^v / \partial \lambda_{\alpha\beta}$ in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

$$\frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\beta\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\beta\alpha}} \right)$$

erlaubt wegen (9.106) die Restriktion für $\check{M}_1^{\alpha\beta}$ Gl. (9.103)₂ in der folgenden Form zu schreiben

$$\check{M}_1^{\alpha\beta} = - \frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0^v}{\partial \lambda_{\beta\alpha}} \right)}_{\text{symmetrisch in } \alpha, \beta} - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\check{M}_2^{\gamma\alpha} \eta_\gamma^\beta + \check{M}_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha \right)}_{\text{symmetrisch in } \alpha, \beta} \quad (9.107)$$

Damit ist die Auswertung der 2D-Entropieungleichung abgeschlossen. Die sonstigen konstitutiven Einschränkungen, wie Symmetrie der Momente und Forminvarianz der Stofffunktionen, sind in dem Ergebnis (9.103)₁, (9.103)₃₊₆ sowie (9.104) und (9.106) berücksichtigt.

Zu diesem Ergebnis sind einige Anmerkungen zu machen. Zunächst ist offenkundig, daß bei Vorgabe der vier Stofffunktionen Φ und $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta} = \overset{v}{M}_2^{\beta\alpha}$ die anderen Stofffunktionen $\overset{v}{M}_0^{\alpha\beta}$, $\overset{v}{M}_0^{\alpha 3}$, $\overset{v}{M}_0^{\beta\alpha}$, $\overset{v}{M}_0^{\beta 3}$ und $\overset{v}{\varepsilon}_0$ nicht mehr frei gewählt werden dürfen, sondern vollständig durch Φ und $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta} = \overset{v}{M}_2^{\beta\alpha}$ bestimmt sind. Es folgt dann weiter, daß mit der Symmetrie von $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ auch die Stofffunktionen $\overset{v}{M}_0^{\alpha\beta}$ und $\overset{v}{M}_0^{\beta\alpha}$, dargestellt durch die rechten Seiten von (9.103)₁ und (9.106), wie vorausgesetzt symmetrisch werden. Es ist weiter offensichtlich, daß mit Ausnahme der Symmetriebedingung

$$\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta} = \overset{v}{M}_2^{\beta\alpha}$$

keine Restriktionen für die Stofffunktionen der Momente 2. Ordnung abgeleitet worden sind, denn es ist ja durchaus zulässig, die Bedingung zwischen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ und Φ , Gl. (9.106), als eine Einschränkung für Φ aufzufassen, wenn die drei Funktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ vorgegeben sind.

Die Tatsache, daß Φ wegen (9.106) nicht mehr unabhängig von $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ vorgegeben werden kann, ist als ein wesentlicher Unterschied zu den in Kap. 8 abgeleiteten Restriktionen für die Stoffgleichungen anzusehen. Dieser Unterschied, wie auch sonst der andersartige Aufbau der Restriktionen (vergl. (9.103) u. (9.107) mit (9.69)) ist wesentlich darauf zurückzuführen, daß hier die weitreichenden Symmetriebedingungen für die Stofffunktionen der Momente erfüllt werden müssen, während dort nur der Orthogonalitätsbedingung genügt werden muß.

Es stellt sich hier natürlich auch die Frage, ob die Funktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ im Hinblick auf die 2D-Differentialgleichungen der Schale unter Beachtung der Restriktionen für die Stofffunktionen frei gewählt werden können. Dieser Frage wird im folgenden Kapitel nachgegangen.

9.2.2 Das \underline{M} -Theorem

Um die Bedeutung der Momente 2. Ordnung für die 2D-Schalengleichungen festzustellen, kann hier wie in Kap. 9.1.5 verfahren werden. Mit den Definitionen

$$\left. \begin{aligned}
 m_0^{\alpha\beta} &:= M_0^{\alpha\beta} + M_1^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha && (\text{nicht symmetrisch}) \\
 m_1^{\alpha\beta} &:= M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha && (\quad \quad) \\
 m_0^{j\beta} &:= M_0^{j\beta} + M_1^{\gamma\beta} \mu_\gamma \\
 m_1^{j\beta} &:= M_1^{j\beta} + M_2^{\gamma\beta} \mu_\gamma \\
 \tilde{m}_0^{j\beta} &:= M_0^{j\beta} + M_1^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\beta \\
 m_0^{j3} &:= M_0^{j3} + M_1^{\gamma 3} \mu_\gamma ,
 \end{aligned} \right\} (9.108)$$

die sich etwas von den Definitionen (9.71) unterscheiden (insbesondere (9.108)₅ von dem entsprechenden Ausdruck in (9.71)), erhalten die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und die reduzierte 2D-Energiegleichung die folgende Form:

Bewegungsgleichungen 1. Art

$$\rho_{2R} \ddot{\bar{r}} + \rho_{1R} \ddot{\bar{d}} = \rho_{2R} \bar{b} + \bar{y}_0 + (m_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + m_0^{j\beta} \bar{d}_j)_{;\beta}$$

Bewegungsgleichungen 2. Art

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{1R} \ddot{\bar{r}} + \rho_{2R} \ddot{\bar{d}} &= \rho_{1R} \bar{b} + \bar{y}_1 + (m_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + m_1^{j\beta} \bar{d}_j)_{;\beta} \\
 &\quad - (\tilde{m}_0^{j\beta} \bar{r}_{1\alpha} + m_0^{j3} \bar{d}_j) ,
 \end{aligned} \right\} (9.109)$$

reduzierte 2D-Energiegleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta R} \dot{\xi} = & \left[m_0^{\alpha\beta} \bar{d} + \tilde{m}_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\beta} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \\
 & + \left[m_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + m_0^{\alpha\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} \\
 & + \left[m_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + m_1^{\alpha\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 & - h_0^{\alpha\beta} \dot{\tau}_{1\beta} \\
 & + \frac{\delta}{\delta R} \tau_0 - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{N} \xi \right)^T + \left(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi \right)^T \right].
 \end{aligned} \tag{9.109}$$

Mit den Restriktionen für die Stofffunktionen (9.103)₁, (9.103)₃₋₆, (9.107) und (9.106) läßt sich zeigen, daß die neuen Größen (9.108) nur durch die Massiesche Funktion $\check{\Phi}_0$ dargestellt werden können; man erhält

$$\begin{aligned}
 m_0^{\alpha\beta} &= - \frac{\delta R}{\delta} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} \eta_s^\alpha \\
 m_1^{\alpha\beta} &= - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} \\
 m_0^{\alpha\beta} &= - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\beta} - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} \mu_s \\
 m_1^{\alpha\beta} &= - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \dot{v}_\beta} \\
 \tilde{m}_0^{\alpha\beta} &= - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_\alpha} - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \dot{v}_\gamma} \eta_s^\beta \\
 m_0^{\alpha\beta} &= - \frac{2\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \dot{v}} - \frac{\delta R}{\delta} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \dot{v}_\gamma} \mu_\gamma.
 \end{aligned} \tag{9.110}$$

In den rechten Seiten von (9.111) sind die Stofffunktionen $\overset{v}{M}^{\alpha\beta}$ nicht mehr enthalten. Setzt man daher (9.110) in die 2D-Differentialgleichungen (9.109) ein, dann sind diese und damit auch ihre Lösungen $\bar{\pi}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{\Delta}(\theta^\alpha, t)$ allein von der Stofffunktion für die Massiesche Funktion $\overset{v}{\Phi}$ abhängig^x. Sieht man also $\overset{v}{\Phi}$ als wesentlichste Stofffunktion vorgegeben an, dann braucht über $\overset{v}{M}^{\alpha\beta}$ keine Aussage mehr gemacht werden. Es besteht wohl noch die Verknüpfung (9.106) mit $\overset{v}{\Phi}$, diese spielt aber keine Rolle, da $\overset{v}{M}^{\alpha\beta}$ in den 2D-Differentialgleichungen nicht auftritt. Die Stofffunktionen $\overset{v}{M}^{\alpha\beta}$ sind also - bis auf die Einschränkung (9.106) - frei wählbar. Die Tatsache wurde in Kap. 9.1.5 als das $\overset{M}{Z}$ -Theorem bezeichnet. Dieses Theorem hat also auch hier seine Gültigkeit.

^x Hier wird - wie schon an anderer Stelle - angenommen, daß auch die Randbedingungen unabhängig von $\overset{v}{M}^{\alpha\beta}$ formuliert werden können.

9.2.3 Identität der Lösungen \bar{r}, \bar{d}, Δ des 1. und 2. schalentheoretischen Konzepts

Eine weitere, besonders bedeutsame Schlußfolgerung kann aus der Tatsache gezogen werden, daß die Schalengleichungen (9.109) und (9.110) bis auf die Benennung einiger Größen mit den Schalengleichungen (9.72) und (9.73) identisch sind; dies erkennt man sofort, wenn die $m_0^{\alpha\beta}$ etc. aus den jeweiligen Gleichungssystemen eliminiert werden. Dies bedeutet, daß das 1. und 2. schalentheoretische Konzept zu denselben Differentialgleichungssystemen für \bar{r}, \bar{d} und Δ führen, wenn sämtliche Beanspruchungsgrößen wie $m_0^{\alpha\beta}$ etc. oder $m_0^{\alpha\beta}$ etc. durch die Massieu'sche Funktion Φ_0^v (oder freie Energie Ψ_0^v) ausgedrückt werden. Damit sind also auch die Lösungen $\bar{r}(\theta^\alpha, t), \bar{d}(\theta^\alpha, t), \Delta(\theta^\alpha, t)$ unter sonst gleichen Bedingungen identisch. In diesem Sinne sind also das 1. und 2. schalentheoretische Konzept als äquivalent anzusehen.

Bei gleichen Funktionen \bar{r}, \bar{d}, Δ unterscheiden sich die Momente $M_0^{\alpha\beta}$ etc. aber erheblich. Zunächst einmal sind bei jedem Konzept für sich gesehen, die Momente $M_0^{\alpha\beta}$ etc. wegen des M_2 -Theorems unbestimmt, bzw. nur durch eine Konvention hinsichtlich $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ festgelegt. Weiter findet man aber, daß selbst bei gleichen Konventionen für $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ bei beiden Vorgehensweisen mit ihren identischen Lösungen \bar{r}, \bar{d}, Δ unterschiedliche Momente $M_0^{\alpha\beta}, \check{M}_1^{\alpha\beta}$ etc. ermittelt werden; dies folgt aus einem Vergleich der rechten Seite von (9.69) mit (9.103)₁, (9.103)₃₋₆ und (9.107), die nicht - selbst bei gleichen Stofffunktionen Φ_0^v und $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ - übereinstimmen. Dieses Ergebnis wird in Kap. 9.3 physikalisch interpretiert werden.

9.2.4 Alternative Formen der Stoffgleichungen beim 2. schalentheoretischen Konzept

Das \check{M} -Theorem erlaubt verschiedene alternative Stoffgleichungen zu entwickeln. Wie schon in Kap. 9.1.5 ist die naheliegendste Konvention

$$\check{M}^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Dann ergibt sich aus (9.106) die Symmetrie

$$\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\nu}_{\beta\alpha}},$$

also eine spezielle Einschränkung für die allgemeine Struktur der Massieu-schen Funktion $\check{\Phi}_0$. Andere Alternativen sind vorstellbar und eine weitere Möglichkeit analog zu Kap. 9.1.6 soll hier angegeben werden.

Geht man davon aus, daß in der Argumentenliste der Stofffunktion die abhängige kinematische Variable $\check{\nu}_{\alpha\beta}$ beibehalten wird, dann haben die Stoffgleichungen unter Berücksichtigung der Forminvarianz zunächst folgende allgemeine Struktur:

$$\left. \begin{aligned} \check{M}_m^{\alpha\beta} &= \check{M}_m^{\alpha\beta}(\check{\nu}_{\alpha\beta}, \check{\nu}_{,\alpha}, \check{\nu}_{,\alpha\beta}, \check{\nu}_{\alpha}^{\cdot}, \check{\nu}^{\cdot}, \check{\nu}_{\alpha\beta}^{\cdot}, \check{\nu}_0) \quad m=0,1,2 \\ \check{M}_m^{3\alpha} &= \check{M}_m^{3\alpha}(\text{''}) \quad , \quad m=0,1 \\ \check{M}_0^{33} &= \check{M}_0^{33}(\text{''}) \\ \check{\varepsilon}_0 &= \check{\varepsilon}_0^{\cdot}(\text{''}) \\ \check{\Phi}_0 &= \check{\Phi}_0^{\cdot}(\text{''}) \\ \check{h}_0^{\alpha} &= \check{h}_0^{\alpha}(\check{\nu}_0, \check{\nu}_{0,\alpha}) = \check{h}_0^{\alpha}(\check{\nu}_0^{\cdot}, \check{\nu}_{0,\alpha}^{\cdot}) \end{aligned} \right\} (9.111)$$

Für $\frac{D}{dt} \overset{\vee}{\phi}_0$ erhält man auch jetzt (9.80), wobei die beiden {...}-Ausdrücke identisch verschwinden. Einsetzen dieses Ergebnisses in (9.101), ordnen der Terme wie in (9.102) und die Anwendung des Dissipationspostulats unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen

$$\overset{\vee}{M}_m^{\alpha\beta} = \overset{\vee}{M}_m^{\beta\alpha}, \quad m = 0, 1, 2$$

liefert schließlich die folgenden Restriktionen für die 2D-Stofffunktionen:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\vee}{M}_0^{\alpha\beta} &= -\frac{\rho_0 R}{\lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) + \overset{\vee}{D}^{\gamma\delta} \eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta \\ \overset{\vee}{M}_1^{\alpha\beta} &= -\frac{\rho_0 R}{\lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} - \overset{\vee}{D}^{\delta\beta} \eta_\delta^\alpha \\ \overset{\vee}{M}_0^{\beta\alpha} &= -\frac{\rho_0 R}{\lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} + \overset{\vee}{D}^{\delta\gamma} \eta_\delta^\beta \eta_\gamma^\alpha \\ \overset{\vee}{M}_1^{\beta\alpha} &= -\frac{\rho_0 R}{\lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial v_\beta} - \overset{\vee}{D}^{\delta\beta} \mu_\delta \\ \overset{\vee}{M}_0^{\beta\beta} &= -\frac{2\rho_0 R}{\lambda_0} \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial v^\beta} + \overset{\vee}{D}^{\delta\gamma} \mu_\delta \mu_\gamma \end{aligned} \right\} \quad (9.112)$$

mit der symmetrischen Größe

$$\overset{\vee}{D}^{\beta\beta} := \overset{\vee}{M}_2^{\beta\beta} + \frac{\rho_0 R}{\lambda_0} \left(\frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial v_{\beta\beta}} + \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial v_{\beta\beta}} \right) = \overset{\vee}{D}^{\beta\beta} \quad (9.113)$$

und ferner

$$\overset{\checkmark}{M}_0^{\alpha\beta} = - \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial \lambda^{\alpha\beta}} \quad (9.114)$$

sowie der Restentropiegleichung (9.107). Außerdem besteht noch die Symmetriebedingung

$$\overset{\checkmark}{M}_1^{\alpha\beta} = \overset{\checkmark}{M}_1^{\beta\alpha}, \quad (9.115)$$

die dann mit $(9.112)_2$ zu einer Einschränkung für $\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0 / \partial \lambda^{\alpha\beta}$ führt, wenn $\overset{\checkmark}{M}_2^{\alpha\beta}$ als wählbar betrachtet wird. Das $\overset{\checkmark}{M}$ -Theorem erlaubt hier wie schon früher die Konvention

$$\overset{\checkmark}{D}^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad (9.116)$$

so daß

$$\overset{\checkmark}{M}_2^{\alpha\beta} = - \frac{\overset{\checkmark}{S}_R}{\overset{\checkmark}{\Delta}} \left(\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial \overset{\checkmark}{v}^{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial \overset{\checkmark}{v}^{\beta\alpha}} \right). \quad (9.117)$$

Dementsprechend vereinfachen sich die Gleichungen (9.112) erheblich und die Symmetriebedingung (9.115) führt zu folgender Einschränkung der Massieschen Funktion

$$\frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial \lambda^{\alpha\beta}} = \frac{\partial \overset{\checkmark}{\Phi}_0}{\partial \lambda^{\beta\alpha}} \quad (9.118)$$

Ein Vergleich mit (9.81) sei noch angefügt. Es ist klar, daß (9.81) und (9.112) nicht übereinstimmen, auch wenn dieselbe Konvention (9.83) bzw. (9.116) verwendet wird. Identität ist nur zu erreichen, wenn auch in (9.81) die Symmetriebedingung (9.118) angenommen wird; dann werden auch in (9.81) die Momente $\overset{\checkmark}{M}_0^{\alpha\beta}$ und $\overset{\checkmark}{M}_1^{\alpha\beta}$ symmetrisch. Für diese Annahme gibt es aber in (9.81), also bei dem 1. schalentheoretischen Konzept, keine zwingenden Gründe. Die Unterschiede zwischen (9.81) und (9.112) sind letztlich auf die weitgehenden Symmetrieforderungen des 2. schalentheoretischen Konzepts zurückzuführen.

Abschließend sei hier noch eine weitere Alternative angegeben, bei der anstelle der Argumentenliste

$$a_{\alpha\beta}, d_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha, \nu, \nu_{\alpha\beta}, \Lambda$$

die äquivalenten Größen

$$E_{\alpha\beta}, \tilde{E}_{\alpha\beta}, E_{\alpha 3}, \tilde{E}_{\alpha 3}, E_{33}, O_{\alpha\beta}, \tilde{E}_{\alpha\beta}, \Lambda$$

in den Stofffunktionen verwendet werden. Es ist also (vergl. (9.89))

$$\Phi_0 = \overset{\sim}{\Phi}_0 \left(\tilde{E}_{\alpha\beta}, \tilde{E}_{\alpha\beta}, E_{\alpha 3}, \tilde{E}_{\alpha 3}, E_{33}, O_{\alpha\beta}, \tilde{E}_{\alpha\beta}, \Lambda \right) \quad (9.119)$$

etc.

Mit (9.48) wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \\ \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial \tilde{E}_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial \tilde{E}_{\beta\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial O_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial O_{\beta\alpha}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.120)$$

etc. sowie

$$\frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial \nu_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial \nu_{\beta\alpha}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\sim}{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right). \quad (9.121)$$

Beachtet man, daß die Stofffunktionen trotz verschiedener Argumentenliste wertgleich sind, d.h.

$$\overset{\sim}{\Phi}_0 = \overset{\sim}{\Phi}_0 \quad \text{etc.}$$

und berücksichtigt die Umrechnungen (9.120-121), dann können aus (9.112) die entsprechenden Restriktionen für $\tilde{M}^{\alpha\beta}$ etc. gewonnen werden. Geht man von vornherein von der Konvention

$$\tilde{D}^{\alpha\beta} := \tilde{M}_2^{\alpha\beta} + \frac{g_R}{1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \equiv 0 \quad (9.122)$$

aus und beachtet die Symmetriebedingung

$$\tilde{M}_1^{\alpha\beta} = \tilde{M}_1^{\beta\alpha},$$

dann gilt

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial d_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial d_{\beta\alpha}}$$

und daraus ermittelt man mit (9.120)₂

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{\sigma}_{\beta\alpha}} \quad (9.123)$$

Mit (9.120-9.122) und (9.123) erhält (9.112) dann die Form

$$\left. \begin{aligned} M_0^{\alpha\beta} &= \tilde{M}_0^{\alpha\beta} = -\frac{g_R}{1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) \\ M_1^{\alpha\beta} &= \tilde{M}_1^{\alpha\beta} = -\frac{g_R}{1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right) \\ M_0^{\alpha 3} &= \tilde{M}_0^{\alpha 3} = -\frac{g_R}{1} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\alpha 3}} \\ M_1^{\alpha 3} &= \tilde{M}_1^{\alpha 3} = -\frac{g_R}{1} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\alpha 3}} \\ M_0^{33} &= \tilde{M}_0^{33} = -\frac{g_R}{1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{033}} \end{aligned} \right\} \quad (9.124)$$

Diese Beziehungen sind zu ergänzen durch die Konvention (9.122) bzw.

$$M_2^{\alpha\beta} = \tilde{M}_2^{\alpha\beta} = - \frac{\sigma_0}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial E_{2\kappa\beta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial E_{2\rho\alpha}} \right). \quad (9.125)$$

Zwei auffallende Feststellungen sind zu dem Ergebnis (9.123) bis (9.125) zu machen:

- (1) In den Stoffgleichungen (9.124) und (9.125) treten keine Ableitungen nach $\tilde{C}_{\alpha/\beta}$ auf, obgleich die Massiesche Funktion $\tilde{\phi}_0$ diese kinematische Variable $\tilde{C}_{\alpha/\beta}$ in ihrer Argumentenliste enthält und $\tilde{\phi}_0$ auch der Bedingung (9.123) unterworfen ist.
- (2) Formal haben die Stoffgleichungen (9.124) und (9.125) dasselbe Aussehen wie die Stoffgleichungen des 1. schalentheoretischen Konzepts nach Anwendung der verschärften Beobachterinvarianz für die Massiesche Funktion (9.98) und (9.97). Diese äußerliche Ähnlichkeit darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Stoffgleichungssystemen besteht. Aufgrund der Argumente in Kap. 9.1.7 ist die Massiesche Funktion $\tilde{\phi}_0$ voraussetzungsgemäß keine Funktion der kinematischen Variablen $\tilde{C}_{\alpha/\beta}$, dagegen kann im allgemeinen $\tilde{\phi}_0$ in (9.119) sehr wohl von $\tilde{C}_{\alpha/\beta}$ abhängen, muß aber der Symmetriebedingung (9.123) genügen. Nur dann, wenn auch hier die Forminvarianz der spezifischen Massieschen Funktion ϕ des dreidimensionalen Falles unterstellt wird und $\tilde{\phi}_0$ aus dieser Größe durch Integration über die Schalendicke erhalten wird, werden die beiden angesprochenen Stoffgleichungssysteme nicht nur äußerlich ähnlich, sondern auch mathematisch identisch.

9.3 Zusammenfassung der Ergebnisse, Diskussion und Interpretation

9.3.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Bevor auf die in Kap. 8.4 (Teil 1) bzw. Kap. E genannten und andere Fragen eingegangen wird, muß noch einmal darauf hingewiesen werden, daß sich die Auswertung des Coleman-Noll'schen Dissipationspostulats und die Auswertung der Entropie-Forderung bisher auf den Fall konstanter Temperatur bzw. Temperaturinversen über die Schalendicke beschränken, d.h.

$$\dot{\Delta} > 0, \quad \dot{\Delta}_1 = 0, \quad \dot{\Delta}_2 = 0. \quad (9.126)$$

Es sind deshalb nur sieben skalare Lösungsfunktionen, u.z. je drei Komponenten von \vec{r} und \vec{d} sowie Δ , gesucht. Für diese stehen aber bei beiden schalentheoretischen Konzepten schon sieben Differentialgleichungen, das sind

- insgesamt sechs Komponentengleichungen der Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art
 - und die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung,
- zur Verfügung. Die erste der drei aufgeführten Fragen stellt sich hier also nicht.

Die zweite Frage bezieht sich auf die Stoffgleichungen. Es ist wesentlich hier zu beachten, daß die zweidimensionalen Stoffgleichungen der Schale nicht einfach durch Integration der dreidimensionalen Stoffgleichungen (Kap. 5.5-6, Teil 1) über die Schalendicke hergeleitet werden. Die besondere mathematische Struktur der 3D-Stoffgleichungen ergibt sich ja aus der Forderung der Forminvarianz für die 3D-Stoffgleichungen und aus der Auswertung der lokalen 3D-Entropiegleichung. Die Bedingungen werden hier dagegen abgeschwächt, indem Forminvarianz gegenüber Beobachtertransformationen nur für integrale Stofffunktionen wie $\int_V M^{\alpha/\beta}$ etc. gefordert wird und nur eine integrale Entropiegleichung (2D-Entropiegleichung) entsprechend dem Dissipationspostulat ausgewertet wird (vergl. S. 18-19). Diese weniger restriktiven Einschränkungen erlauben - wie erwartet (S.19) - einige neue Einsichten in die allgemeine Struktur der zweidimensionalen, nichtlinear thermoelastischen Stoffgleichungen für die Schale.

Als unabhängige Zustandvariablen in den 2D-Stoffgleichungen werden die Variablen

$$\bar{r}_{i\alpha}, \bar{d}_{i\alpha}, \bar{d}, \lambda_0 \quad (9.127)$$

angesehen; ausgenommen ist hier der integrierte Wärmefluss $\int_0^t h_0^\alpha$.

Die Forderung der Forminvarianz der 2D-Stoffgleichungen gegenüber Beobachterwechsel führt u.a. dazu, daß die kinematischen Variablen $\bar{r}_{i\alpha}, \bar{d}_{i\alpha}, \bar{d}$ nicht in beliebiger Form als Argumente in die Stofffunktionen eingehen können, sondern nur in Form der Skalarprodukte, die sich zwischen ihnen bilden lassen (Integritätsbasis)^x:

$$\mathcal{K} := \left\{ \begin{array}{l} a_{\alpha\beta} := \bar{r}_{i\alpha} \cdot \bar{r}_{i\beta} \\ d_\alpha := \bar{r}_{i\alpha} \cdot \bar{d} \\ \lambda_{\alpha\beta} := \bar{r}_{i\alpha} \cdot \bar{d}_{i\beta} \\ \mathcal{N} := \bar{d} \cdot \bar{d} \\ \mathcal{N}_\alpha := \bar{d}_{i\alpha} \cdot \bar{d} \\ \mathcal{N}_{\alpha\beta} := \bar{d}_{i\alpha} \cdot \bar{d}_{i\beta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 15 \text{ kinematische} \\ \text{Variablen} \end{array} \quad (9.128)$$

Es erweist sich, daß dieser Satz von 15 kinematischen Variablen nicht minimal ist: Vielmehr kann die Variable $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ durch die restlichen zwölf Variablen

$$\mathcal{K} := \left\{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}, \mathcal{N}, \mathcal{N}_\alpha \right\} \quad \begin{array}{l} 12 \text{ kinematische} \\ \text{Variablen} \end{array} \quad (9.129)$$

eindeutig dargestellt werden. Dieser reduzierte Satz von Variablen ist minimal (Beweis Anhang 4). Die kinematische Variable $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ ist also nicht unabhängig von den anderen Größen. Diese Tatsache spielt eine wichtige Rolle bei den alternativen Formulierungen der Stoffgleichungen.

^x Bei eigentlich orthogonalen Transformationen (Beobachterwechsel) ist die Integritätsbasis einer Menge von Vektoren (im 3D-Raum) gegeben durch die möglichen Skalarprodukte zwischen den Vektoren und die möglichen skalaren Dreifachprodukte [87]; es läßt sich hier aber zeigen (Kap. 9.1.2), daß dieser Satz von Invarianten auf die Skalarprodukte reduzierbar ist.

Im Blick auf die Entropieungleichung ist nun offensichtlich, daß die über die Schalendicke integrierte Entropieungleichung (9.5) und die Entropie-Forderung $\hat{N} = 0$ ganz unabhängig von den jeweiligen Differentialgleichungssystemen der beiden schalentheoretischen Konzepte gelten. Bei der Auswertung der zweidimensionalen Entropieungleichung (unter Beachtung der Entropie-Forderung $\hat{N} = 0$) ist aber zu berücksichtigen, daß sich die Differentialgleichungssysteme - insbesondere die lokalen, reduzierten^{xx} 2D-Energiebilanzgleichungen - unterscheiden!

Die Auswertung der 2D-Entropieungleichung für das 1. schalentheoretische Konzept auf der Grundlage des Dissipationspostulats (S. 15) und unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung^{xxx} (E-4) liefert für die Stofffunktionen

$$\left. \begin{aligned} \check{M}_m^{\alpha\beta}(\mathcal{K}, \Delta) \quad m = 0, 1, 2 \\ \check{Q}_m^{\alpha}(\mathcal{K}, \Delta) \quad m = 0, 1 \\ \check{Q}(\mathcal{K}, \Delta) \\ \check{E}_0^{\nu}(\mathcal{K}, \Delta) \\ \check{\Phi}_0^{\nu}(\mathcal{K}, \Delta) \\ \check{h}_0^{\alpha}(\Delta, \Delta_{,\alpha}) \end{aligned} \right\} (9.130)$$

eine Reihe von wesentlichen Restriktionen, deren allgemeiner Charakter im folgenden angegeben wird; die Anzahl und Struktur dieser Restriktionen ist dabei bestimmt durch die Anzahl und Wahl der unabhängigen Veränderlichen $\mathcal{K}, \Delta, \Delta_{,\alpha}$ der Stofffunktionen. Folgende Aussagen lassen sich machen:

(1.1) Die 2D-Stofffunktionen (9.130) sind nicht unabhängig voneinander wählbar:

Bei Vorgabe der zweidimensionalen Massieuschen Funktion $\check{\Phi}_0^{\nu}$ und der vier Stofffunktionen $\check{M}_m^{\alpha\beta}$ sind alle anderen Stofffunktionen

$$\check{M}_0^{\alpha\beta}, \check{M}_1^{\alpha\beta}, \check{Q}_0^{\alpha}, \check{Q}_1^{\alpha}, \check{Q}, \check{E}_0^{\nu} \quad (\text{ausgenommen } \check{h}_0^{\alpha}) \quad (9.131)$$

* Das Adjektiv "reduziert" bezieht sich darauf, daß die Leistungsbeiträge der aktuellen eingepprägten Kräfte mit Hilfe der 2D-Bewegungsgleichungen aus der 2D-Energiebilanzgleichung eliminiert wurden.

** Es sei daran erinnert, daß die Orthogonalitätsbedingung (E-4) eine Restriktion für die Stofffunktionen $\check{M}_m^{\alpha\beta} \quad m = 0, 1, 2$ darstellt.

festgelegt. Wie im dreidimensionalen Fall werden diese Stofffunktionen u.a. durch Ableitungen von ϕ_0^v nach den Argumenten \mathcal{K} und Λ dargestellt. Die Stofffunktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ müssen eine Restentropiegleichung erfüllen.

- (1.2) Setzt man diese Restriktionen als gültig voraus, d.h. unter anderem, drückt man die Stofffunktionen (9.131) durch ϕ_0^v und $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ aus, dann werden die 2D-Entropiegleichung und die Orthogonalitätsbedingung identisch erfüllt.
- (1.3) Aus (1.1) folgt insbesondere, daß die Stoffgleichung für die Kraftgröße Q , die nicht durch ein Integral über Spannungen definiert ist, durch ϕ_0^v und $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ festgelegt ist.
- (1.4) Für die Stofffunktionen ϕ_0^v und $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ selbst ergeben sich keine Restriktionen (mit Ausnahme der schon berücksichtigten Forminvarianz), insbesondere ist $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ auch nicht notwendig symmetrisch. Außerdem sind auch $\overset{v}{M}_0^{\alpha\beta}$, $\overset{v}{M}_1^{\alpha\beta}$ nicht symmetrisch, selbst wenn aus anderen Gründen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ als symmetrisch angenommen wird.
- (1.5) Die Frage, ob eine irgendwie geartete Wahl der Stofffunktionen für die Momente 2. Ordnung $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ einen Einfluß auf die Lösungen $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{\Lambda}(\theta^\alpha, t)$ hat, wird durch ein wesentliches Ergebnis, d.i. das M-Theorem, beantwortet: Die Stofffunktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}(\mathcal{K}, \Lambda)$ können beliebig gewählt werden, denn diese Wahl hat keinen Einfluß auf die Lösungen $\bar{r}, \bar{d}, \bar{\Lambda}$. Die Funktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ können durch beliebige Konventionen, z.B. rechentechnischen Bequemlichkeitskriterien, festgelegt werden.
- (1.6) Das M-Theorem hat aber zur Folge, daß die Beanspruchungsgrößen $\overset{v}{M}_0^{\alpha\beta}$, $\overset{v}{M}_1^{\alpha\beta}$, Q^α , Q^α , Q je nach Wahl der willkürlichen Funktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ beliebige Werte annehmen können, wobei dagegen für $\bar{r}, \bar{d}, \bar{\Lambda}$ eindeutige Werte erhalten werden. Die Beanspruchungsgrößen $\overset{v}{M}_m^{\alpha\beta}$ ($m=0,1,2$), Q^α ($m=0,1$) und Q sind daher generell ambivalent; dies wird erst durch die erwähnte Konvention aufgehoben.
- (1.7) Die Einführung des nichtminimalen kinematischen Variablensatzes \mathcal{K} (9.128) anstelle von \mathcal{K} führt zu einer alternativen Struktur der Stoffgleichungen. Die Auswertung der 2D-Entropiegleichung - natürlich unter Beachtung, daß $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}$ auch jetzt vollständig durch den Variablensatz \mathcal{K} bestimmt ist - führt auf Restriktionen, in denen die Stofffunktionen $\overset{v}{M}_2^{\alpha\beta}(\mathcal{K}, \Lambda)$ nur in der Kombination

$$\check{D}^{\alpha\beta} := M_2^{\check{\nu}\alpha\beta} + \frac{g_2}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\alpha}} \right) \quad (9.132)$$

auftreten. Das M_2 -Theorem erlaubt jetzt, die Stofffunktion $M_2^{\check{\nu}\alpha\beta}$ so festzulegen, daß $\check{D}^{\alpha\beta}$ identisch verschwindet. Diese Konvention liefert für die Momente 2. Ordnung die Stoffgleichung

$$M_2^{\alpha\beta} = M_2^{\check{\nu}\alpha\beta} = - \frac{g_2}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_{\beta\alpha}} \right). \quad (9.133)$$

$M_2^{\check{\nu}\alpha\beta}(\mathcal{H}, \Lambda)$ ist also vollständig durch $\check{\Phi}_0$ bestimmt. Man sieht, daß die Momente 2. Ordnung symmetrisch in α und β werden. Dies hat aber noch keine Symmetrie der Momente 0. und 1. Ordnung $M_0^{\alpha\beta}$, $M_1^{\alpha\beta}$ zur Folge.

(1.8) Anstelle des Variablensatzes \mathcal{H} kann auch ein neuer nichtminimaler Satz (vergl. (9.48) und (9.49))

$$\mathcal{H}' = \left\{ E_{0\alpha\beta}, E_{1\alpha\beta}, E_{0\alpha\beta}, E_{1\alpha\beta}, E_{033}, E_{2\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta} \right\} \quad (9.134)$$

mit

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (d_{\alpha\beta} - d_{\beta\alpha}) \quad (9.135)$$

$$E_{2\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} B_{\beta}^{\alpha})$$

in die Argumentenliste der Stofffunktionen $\tilde{M}_0^{\alpha\beta}(\mathcal{H}', \Lambda)$ etc. (9.90) eingeführt werden. Die Massieusche Funktion $\check{\Phi}_0$ ist dann als Funktion von \mathcal{H}' und Λ anzusehen

$$\check{\Phi}_0 = \tilde{\check{\Phi}}_0(\mathcal{H}', \Lambda).$$

Verlangt man jetzt verschärfend, daß sich ϕ_0 aus der beobachterinvarianten, dreidimensionalen, spezifischen Massieschen Funktion

$$\phi = \overset{W}{\phi}(E_{KL}, \Lambda)$$

herleiten läßt, dann muß in der Argumentenliste von $\overset{\sim}{\phi}_0$ die kinematische Variable $\tilde{O}_{\alpha\beta}$ entfallen. Mit

$$\mathcal{H}'' = \left\{ \overset{0}{E}_{\alpha\beta}, \overset{1}{E}_{\alpha\beta}, \overset{0}{E}_{\alpha 3}, \overset{1}{E}_{\alpha 3}, \overset{0}{E}_{33}, \overset{2}{E}_{\alpha\beta} \right\} \quad (9.136)$$

ist dann

$$\phi_0 = \overset{W}{\phi}_0(\mathcal{H}'', \overset{\sim}{\Lambda}) = \frac{1}{\overset{0}{S}_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \overset{0}{S}_R \overset{W}{\phi}(E_{KL}, \Lambda) d\theta.$$

Diese Verschärfung der Beobachterinvarianz zusammen mit dem $\overset{M}{2}$ -Theorem und der Konvention

$$\overset{W}{M}_2^{\alpha\beta} = - \frac{\overset{0}{S}_R}{\overset{\sim}{\Lambda}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{W}{\phi}_0}{\partial \overset{2}{E}_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{W}{\phi}_0}{\partial \overset{2}{E}_{\beta\alpha}} \right) \quad (9.137)$$

führt jetzt dazu, daß nicht nur $\overset{M}{2}^{\alpha\beta}$, sondern auch $\overset{M}{0}^{\alpha\beta}$ und $\overset{M}{1}^{\alpha\beta}$ symmetrisch werden! Die Stoffgleichungen erhalten außerdem eine einfache, übersichtliche Form: Alle Beanspruchungsgrößen lassen sich allein durch Ableitungen von $\overset{W}{\phi}_0$ nach den kinematischen Variablen \mathcal{H}'' darstellen.

Damit sei der zusammenfassende Rückblick auf die konstitutiven Restriktionen des 1. schalentheoretischen Konzeptes beendet.

Für das 2. schalentheoretische Konzept ergeben sich natürlich etwas andere Restriktionen, die hier kurz angesprochen werden sollen. Die Auswertung der 2D-Entropiegleichung erfolgt unter Beachtung der andersartigen reduzierten 2D-Energiegleichung und der Symmetriebedingung für die Momente 0., 1. und 2. Ordnung. Die unabhängigen Variablen sind zunächst auch hier der Satz \mathcal{K} , Gl. (9.129) und $\overset{\sim}{\Lambda}$. Die folgenden Aussagen sind zu machen:

(2.1) Die 2D-Stofffunktionen

$$\overset{V}{M}_m^{\alpha\beta}(\mathcal{K}, \overset{\sim}{\Lambda}), \quad m=0,1,2; \quad \overset{V}{M}_n^{\alpha 3} \equiv \overset{V}{Q}_n^\alpha, \quad n=0,1; \quad \overset{V}{M}_0^{33};$$

$$\overset{V}{\xi}; \quad \overset{V}{\phi}_0; \quad \overset{V}{h}^\alpha$$

sind auch hier nicht unabhängig voneinander wählbar: Bei Vorgabe von $\check{\Phi}_0$ und $\check{M}_2^{\alpha\beta} = \check{M}_2^{\beta\alpha}$ sind

$$\check{M}_0^{\alpha\beta}, \check{M}_1^{\alpha\beta}, \check{M}_0^{\alpha 3}, \check{M}_1^{\alpha 3}, \check{M}_0^{33}, \check{\Sigma}$$

festgelegt und für \check{h}_0^α besteht dieselbe Restentropiegleichung wie beim 1. Konzept. Wegen der weitreichenden Symmetrieforderung

$$\check{M}_m^{\alpha\beta} = \check{M}_m^{\beta\alpha} \quad m = 0, 1, 2 \quad (9.138)$$

besteht hier aber eine Verknüpfung zwischen $\check{\Phi}_0$ und $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ (Gl. 9.106)

$$\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\eta}^{\alpha\beta}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \check{\eta}^{\beta\alpha}} = \check{M}_2^{\delta\alpha} \check{\eta}_\delta^\beta - \check{M}_2^{\delta\beta} \check{\eta}_\delta^\alpha \quad (9.139)$$

Gibt man $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ vor, dann stellt diese Verknüpfung eine Einschränkung für $\check{\Phi}_0$ dar und Entsprechendes gilt umgekehrt. Bis auf die Symmetrie $\check{M}_2^{\alpha\beta} = \check{M}_2^{\beta\alpha}$ und diese Verknüpfungen bestehen keine weiteren Restriktionen für $\check{\Phi}_0$ und $\check{M}_2^{\alpha\beta}$.

(2.2) Das \check{M}_2 -Theorem gilt auch hier: Die Stofffunktionen $\check{M}_2^{\alpha\beta}(\mathcal{H}, \Lambda)$ können beliebig gewählt werden, denn ihre Wahl hat keinen Einfluß auf die Lösungen $\check{\tau}, \check{\alpha}$ und $\check{\Lambda}$. Die Verknüpfung (9.139), aufgefaßt als Restriktion für $\check{\Phi}_0$, ist für die Lösung $\check{\tau}, \check{\alpha}, \check{\Lambda}$ belanglos: $\check{\Phi}_0(\mathcal{H}, \Lambda)$ kann jede Form haben, wenn man alle Beanspruchungsgrößen aus den Differentialgleichungen mittels der Stoffgleichungen eliminiert.

Für die Beanspruchungsgrößen $\check{M}_0^{\alpha\beta}, \check{M}_1^{\alpha\beta}, \check{M}_0^{\alpha 3}, \check{M}_1^{\alpha 3}, \check{M}_0^{33}$ ist aber die Wahl von $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ bestimmend und die Verknüpfung (9.139) muß beachtet werden. Die Beanspruchungsgrößen sind deshalb auch hier generell ambivalent.

(2.3) Alternative Strukturen der Stoffgleichungen lassen sich auch hier durch Verwendung des nichtminimalen Variablensatzes $\check{\mathcal{H}}$ bzw. $\check{\mathcal{H}}'$ und mit einer geeigneten Konvention für $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ angeben. Ist beispielsweise

$$\check{\Phi}_0 = \check{\Phi}_0^{\sim}(\check{\mathcal{H}}', \Lambda)$$

und wird als Konvention

$$\tilde{M}_2^{\alpha\beta} = - \frac{s_{\alpha\beta}}{\lambda_0} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \quad (9.140)$$

angenommen, dann erhält man die Stoffgleichungen (9.124), die aber interessanterweise keine Ableitungen von $\tilde{\phi}_0$ nach $\sigma_{\alpha\beta}$ enthalten, obgleich $\tilde{\phi}_0$ von $\sigma_{\alpha\beta}$ abhängt.

Im weiteren sei auf die Frage nach der Äquivalenz der beiden Schalentheorien eingegangen (3. Frage, S. 7). Es sind folgende Feststellungen zu machen:

(α) "Partielle Äquivalenz"

Wie in Kap. 9.2.3 gezeigt, führen beide Vorgehensweisen bei gleicher Massieu-scher Funktion ϕ_0 und ohne Einschränkungen hinsichtlich ϕ_0 zu demselben Differentialgleichungssystem für $\bar{\tau}, \bar{\alpha}$ und λ_0 , sofern alle Beanspruchungsgrößen eliminiert (d.h. durch ϕ_0 und $M_2^{\alpha\beta}$ ausgedrückt) werden. D.h., die Lösungsfelder $\bar{\tau}(\theta^\alpha, t), \bar{\alpha}(\theta^\alpha, t), \lambda_0(\theta^\alpha, t)$ sind identisch und hängen nicht von der Wahl der Momente 2. Ordnung ab (M_2 -Theorem). Demgegenüber erhält man aber verschiedene Beanspruchungsgrößen $M_m^{\alpha\beta} \quad m=0,1,2$ etc., obgleich diese in gleicher Weise als Integrale der Komponenten des Spannungstensors über die Wanddicke definiert sind.

(β) Selbst dann, wenn man die Konventionen bezüglich des Moments 2. Ordnung in gleicher Weise wählt, erweisen sich die übrigen Beanspruchungsgrößen in den beiden Konzepten als numerisch verschieden.

Es ist auch offensichtlich nicht möglich, durch geeignete unterschiedliche Wahl der Stoffgleichungen für $M_2^{\alpha\beta}$ die restlichen Beanspruchungsgrößen numerisch gleichwertig zu machen.

(γ) "Vollständige Äquivalenz"

Erst wenn bei beiden Konzepten nicht nur gleiche Konventionen für die Momente 2. Ordnung verwandt werden, sondern auch für beide Konzepte die verschärfte Beobachterinvarianz hinsichtlich der freien Entropie ϕ_0 gefordert wird, werden nicht nur die Lösungen $\bar{\tau}(\theta^\alpha, t), \bar{\alpha}(\theta^\alpha, t)$ und $\lambda_0(\theta^\alpha, t)$, sondern auch $M_0^{\alpha\beta}(\theta^\alpha, t), M_1^{\alpha\beta}(\theta^\alpha, t)$ etc. identisch.

(δ) Der Vergleich zeigt auch, daß - wie erwartet - die Beanspruchungsgröße Q ("Querdruck"), die nicht über eine Integraldefinition einer Spannungskomponente eingeführt worden war (Teil 1, Kap. 8.2.2.4), mit dem Moment M_{\circ}^{23} gleichzusetzen ist.

9.3.2 Diskussion und Interpretation

Die vollständige Äquivalenz der beiden Schalentheorien und insbesondere die Struktur der zweidimensionalen Stoffgleichungen (9.98) und (9.97) bzw. (9.124) und (9.125) legen die Frage nahe, ob diese Stoffgleichungen auch erhalten werden, wenn die dreidimensionalen Stoffgleichungen (Teil 1, S. 84)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Gamma}{}^{\circ}K_L &= - \frac{g_{22}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial g_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial g_{LK}} \right) \\ \phi &= \phi(g_{KL}, \Lambda) \end{aligned} \right\} (9.141)$$

formal über die Schälendicke integriert werden. Dies wird, wie im Anhang (5) gezeigt, bestätigt.

Die hier aufgeführten Ergebnisse, insbesondere das M_2 -Theorem, die partielle sowie vollständige Äquivalenz der beiden Schalentheorien und die zuletzt genannte Äquivalenz bestimmter 2D-Stoffgleichungen mit den integrierten 3D-Stoffgleichungen, sind nichttriviale Aussagen. Sie sind bemerkenswert genug, um nach einer weitergehenden physikalisch-mathematischen Interpretation zu fragen, die diese mathematisch hergeleiteten Aussagen u.U. auf anderem Wege einleuchtend begründet. Diese generelle Fragestellung kann durch die folgenden spezifischen Fragen konkretisiert werden:

- (a) Warum ergeben sich aus der Entropiegleichung keine Einschränkungen für die Stofffunktionen der Momente 2. Ordnung?
- (b) Kann man die Existenz des M_2 -Theorems auf anderem Wege argumentativ begründen?
- (c) Wie kann man auf andere Weise klären, daß man letztlich auf symmetrische Momente bei 1. und 2. schalentheoretischen Konzepten kommen kann, obgleich das eigentlich dreidimensionale Ersatzproblem keinen symmetrischen Spannungstensor^x hat?

^x Unter den gedachten Zusatzeinwirkungen waren auch Volumenmomente zugelassen worden, die die Nichtsymmetrie des Spannungstensors bewirken.

- (d) Wie begründet sich argumentativ die Äquivalenz der symmetrischen 2D-Stoffgleichungen und der integrierten 3D-Stoffgleichungen?
- (e) Wie läßt sich die partielle und vollständige Äquivalenz der beiden Schalentheorien interpretieren? Gibt es leicht einsehbare Gründe für diese Äquivalenzen?
- (f) In Teil 1, Kap. 2.2 wurde auf die Herleitung einer isothermen nicht-linearen Schalentheorie, die allein auf den Green-Rivlinschen Invarianzforderungen der Energiebilanzgleichung beruht und die den Begriff der Zusatzeinwirkungen nicht kennt, hingewiesen. Wie ist dieses ältere Konzept im Lichte der neueren Ergebnisse zu interpretieren?

Im folgenden werden diese Fragenkomplexe, die sich zum Teil überlappen, nacheinander angesprochen und soweit wie möglich ausdiskutiert oder auf andere Fragestellungen reduziert.

Zu (a): Diese Fragestellung läßt sich relativ leicht beantworten. Die Anzahl der konstitutiven Restriktionen, die aus der 2D-Entropiegleichung (9.62) oder (9.102) folgen, ist u. a. bestimmt durch die Anzahl der als unabhängig einstellbar angesehenen kinematischen Variablen; hier sind es die 12 Variablen

$$\mathcal{K} = \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_{\alpha}, \lambda_{\alpha\beta}, v^{\alpha}, v^{\alpha}_{,\alpha} \}.$$

Es sei daran erinnert, daß eine Reihe von Ausdrücken in der 2D-Entropiegleichung wegen der Orthogonalitäts- oder der Symmetriebedingung identisch verschwinden. Andererseits sind bei dem 1. schalentheoretischen Konzept die 17 Beanspruchungsgrößen

$$M_m^{\alpha\beta} \quad m=0,1,2, \quad Q_n^{\alpha} \quad n=0,1, \quad Q$$

eingeführt worden; zwischen den $M_m^{\alpha\beta}$ besteht aber eine lineare Verknüpfung, nämlich die Orthogonalitätsbedingung. Daher sind nur 16 Stofffunktionen für die Beanspruchungsgrößen anzugeben, und das sind vier mehr als die Zahl der unabhängigen, kinematischen Variablen. Vier Stofffunktionen können also nicht durch die zweidimensionale Massieusche Funktion, die als gegeben angesehen wird, festgelegt werden. Die Wahl dieser vier Stofffunktionen fällt natürlich auf

$\check{M}_2^{\alpha\beta}$, da $\check{M}_2^{\alpha\beta}$ und $\check{\Phi}_0$ gemeinsam in allen Restriktionen auftreten.

Anmerkung: Anstelle der kinematischen Variablen \mathcal{K} (9.129) könnte man auch die Variabilität der Raten $\dot{\tilde{u}}_i$, $\dot{d}_{i\alpha}$ und \dot{d}_i zum Ausgangspunkt nehmen, was in dieser Studie aber nicht dargestellt wurde. Dies sind insgesamt 15 skalare Größen. Man erhält dann 15 Restriktionen, von denen sich aber zwei als identisch erfüllt erweisen, so daß nur dreizehn verbleiben; diese erfüllen nachweislich identisch die Orthogonalitätsbedingung. Diesen 13 nichttrivialen Restriktionen stehen insgesamt $17 + 1 = 18$ Stofffunktionen (Beanspruchungsgrößen und Massiesche Funktion) gegenüber. Schreibt man auch hier die Massiesche Funktion vor, dann sind wie vorher vier Stofffunktionen nicht bestimmt durch diese Restriktionen.

Man kann jetzt natürlich die Frage stellen, ob und wie neue Beanspruchungsgrößen eingeführt werden können, deren Anzahl mit der Zahl der kinematischen Variablen übereinstimmt. Diese Frage sei im folgenden in einen etwas weiteren Rahmen beantwortet.

In der dreidimensionalen nichtlinearen Kontinuumsmechanik großer Deformationen sind die verschiedensten Maße für Spannungen und Deformationen zumeist unabhängig voneinander eingeführt worden (vergl. z.B. [89]). Auch in dieser Abhandlung ist im dreidimensionalen Fall (Teil 1, Kap. 4) nicht anders verfahren worden. Ebenso wurden hier bei der Entwicklung der Schalentheorien die Beanspruchungsgrößen und die Deformationsgrößen unabhängig voneinander eingeführt, allerdings natürlich unter der Voraussetzung, daß sie durch eine konstitutive Gleichung verknüpft sind. Wie in Teil 1 gezeigt (und im Ergebnis allgemein bekannt), läßt sich der 1. Hauptsatz (die Energiebilanzgleichung) mit Hilfe des Impuls- und Drehimpulssatzes in den (vollständig) reduzierten Energiesatz überführen, indem sich die Spannungen und die Raten der Deformationen generell in einer Bilinearform, der Spannungsleistung [41] oder Elementararbeit [89],

$$Q_k A_{kl} \dot{q}_l \quad (9.142)$$

Q_k : generalisierte Spannungen

q_k : generalisierte Deformationen bzw. Verzerrungen

wiederfinden. Die Matrix A_{kl} , $k=1, \dots, m$, $l=1, \dots, n$ ist nicht notwendig quadratisch. Ist $m > n$, dann sind mehr generalisierte Spannungen vorhanden als

generalisierte Verzerrungen; Beispiele für diese Situation sind die hier diskutierten beiden Schalentheorien. Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Elementarleistung nicht als die Gesamtleistung der generalisierten Spannungen an einem differentiellen materiellen Element zu interpretieren ist, wie manche Beschreibungsweisen (vergl. z.B. [89, 90]) es vermuten lassen; vielmehr stellt dieser Ausdruck nur den beobachterinvarianten Anteil dar, nämlich die Deformationsleistung der generalisierten Spannungen.

Man bezeichnet die Spannungs- und Deformationsgrößen in (9.142) dann als konjugiert^x [89, 90], wenn die Variablen so gewählt sind, daß die Matrix zur Einheitsmatrix wird. Die Elementarleistung wird dann darstellbar als

$$Q_R \dot{\Gamma}_R. \tag{9.143}$$

Hier ist die Zahl der generalisierten Spannungen und Verzerrungen gleich groß.

Die Elementarleistung, definiert als die Bilinearform der generalisierten Spannungen und Verzerrungsraten in der reduzierten Energiebilanzgleichung, kann nun je nach Wahl des Bezugssystems (Ausgangs- oder Momentankonfiguration) auf das unverformte oder verformte Volumenelement bezogen sein. In der Hillschen Definition [90] ist sie a priori auf das unverformte Volumenelement bezogen. Wie in Teil 1, Kap. 4.2.5 gezeigt und allgemein bekannt, ist dann bei Verwendung eines materiellen Koordinatensystems die Elementarleistung gegeben durch

$$t_{\alpha} [\overset{\cdot}{T} \overset{\cdot}{E}] = \overset{\cdot}{T}^{KL} \overset{\cdot}{E}_{LK}.$$

Dies ist also ein Beispiel für die konjugierte Form der Elementarleistung; der symmetrische Anteil des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art und der Lagrangesche Verzerrungstensor sind demnach konjugiert.

Nach diesen Ausführungen und Definitionen sind die kinematischen Variablen und die Beanspruchungsgrößen des ersten und zweiten schalentheoretischen Konzepts im allgemeinen nicht konjugiert. Bei Verwendung der 12 unabhängigen kinematischen Variablen

^x Diese Bezeichnungsweise und Definition wird Hill [100] zugeschrieben.

$$\mathcal{K} = \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_\alpha, d_{\alpha\beta}, v_\alpha^0, v^0 \}$$

ergibt sich als Spannungsleistung für das 1. schalentheoretische Konzept der Klammerausdruck $\{ \dots \}^*$ in (9.57)

$$\begin{aligned} \dot{w}_{in} &:= \dot{a}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} [M_0^{(\alpha\beta)} + N^{(\alpha\beta)}] \\ &+ \dot{d}_{\alpha\beta} [M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha] \\ &+ \dot{d}_\beta [Q_0^\beta + (M_1^{\alpha\beta} - M_2^{\alpha\beta}) \mu_\alpha - M_2^{\gamma\delta} \eta_\delta^\beta \mu_\gamma] \\ &+ \dot{v}_\beta^0 [Q_1^\beta + M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha] \\ &+ \dot{v}^0 \frac{1}{2} [Q - M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta], \end{aligned} \tag{9.144}$$

Aus der Struktur dieses Ausdrucks ist offensichtlich, daß die $a_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ etc. und die $M_0^{\alpha\beta}$, $M_1^{\alpha\beta}$ nicht konjugiert sind. Andererseits ist aber aus (9.144) auch sofort klar, daß die Koeffizienten der Raten der kinematischen Variablen als neue Beanspruchungsgrößen deklariert werden können

$$\left. \begin{aligned} M_0^{\alpha\beta} = M_0^{\beta\alpha} &:= \frac{1}{2} (M_0^{(\alpha\beta)} + N^{(\alpha\beta)}) \\ M_1^{\alpha\beta} &:= M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha \\ Q_0^\alpha &:= Q_0^\alpha + (M_1^{\beta\alpha} - M_2^{\beta\alpha}) \mu_\beta - M_2^{\gamma\delta} \mu_\gamma^\alpha \mu_\delta \\ Q_1^\alpha &:= Q_1^\alpha + M_2^{\gamma\alpha} \mu_\gamma \\ Q &:= \frac{1}{2} (Q - M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta) \end{aligned} \right\} \tag{9.145}$$

* Es sei daran erinnert, daß die restlichen beiden Terme im Klammerausdruck von (9.57) unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingung identisch verschwinden.

Damit wird aus (9.144)

$$\begin{aligned}
 W_m = & \dot{a}_{\alpha\beta} M_0^{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\alpha\beta} M_1^{\alpha\beta} + \dot{d}_\beta Q_0^\beta \\
 & + \dot{v}_\beta Q_1^\beta + \dot{v} Q ;
 \end{aligned}
 \tag{9.146}$$

dieser Ausdruck hat gerade die Form, wie sie bei Verwendung konjugierter Variabler erforderlich ist. Es stellt sich nun die Frage, ob sich die zwei-dimensionalen Stoffgleichungen, die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung und die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art mit diesen neuen Variablen darstellen lassen. Wie erwartet und in Anhang (6) gezeigt, ist diese Frage zu bejahen. Mit den neuen Beanspruchungsgrößen erhält man das folgende System von Gleichungen für das 1. schalentheoretische Konzept:

2D-Stoffgleichungen:

$$\begin{aligned}
 M_0^{\alpha\beta} &= \frac{\rho_{0R}}{\rho_0} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\lambda}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\lambda\alpha}} \right) \\
 M_1^{\alpha\beta} &= \frac{\rho_{0R}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} \right) \\
 Q_0^\alpha &= \frac{\rho_{0R}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d_{\alpha\lambda}} \right) \\
 Q_1^\alpha &= \frac{\rho_{0R}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\alpha} \right) \\
 Q &= \frac{\rho_{0R}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v} \right)
 \end{aligned}
 \tag{9.147}$$

Reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_R \dot{\varepsilon} &= \left\{ M_0^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} + M_1^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} + Q^\alpha \dot{d}_\alpha \right. \\
 &\quad \left. + Q_1^\alpha \dot{v}_\alpha + Q \dot{v} \right\} \\
 &\quad - h_0^\beta \dot{\varepsilon}_\beta + \mathcal{S}_R \dot{\sigma} - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-]
 \end{aligned}
 \tag{9.148}$$

Bewegungsgleichungen 1. Art:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_R \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_R \ddot{\bar{d}} - \mathcal{P}_R \bar{b} - \bar{y}_0 \\
 = [(2 M_0^{\alpha\beta} + M_1^{\alpha\beta} \eta_\alpha^\alpha) \bar{r}_{,\alpha} + (Q^\beta + M_1^{\beta\alpha} \mu_\alpha) \bar{d}]_{;\beta}
 \end{aligned}
 \tag{9.149}$$

Bewegungsgleichungen 2. Art:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_R \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_R \ddot{\bar{d}} - \mathcal{P}_R \bar{b} - \bar{y}_1 \\
 = [M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + Q_1^\beta \bar{d}]_{;\beta} \\
 - \left\{ (Q^\alpha + Q_1^\alpha \eta_\alpha^\alpha) \bar{r}_{,\alpha} + (Q_1^\alpha \mu_\alpha + 2Q) \bar{d} \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{9.150}$$

Dies ist die allgemeine Struktur der zweidimensionalen lokalen Feldgleichungen des 1. schalentheoretischen Konzepts, wenn der minimale kinematische Variablensatz \mathcal{K} (9.129) verwendet wird und wenn neue konjugierte Beanspruchungsgrößen $M_0^{\alpha\beta}$ etc. eingeführt werden.

Die Diskussion der Verwendung konjugierter Variablensätze soll mit der Darstellung einer weiteren wichtigen Möglichkeit abgeschlossen werden. In Kap. 9.1.7 waren die Stoffgleichungen für den Fall abgeleitet worden, daß ein nicht-minimaler Satz kinematischer Variabler verwendet wird und die verschärfte Beobachterinvarianz gilt (d.h., die Variable $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ tritt nicht in der Massieuschen Funktion auf); dieser Variablensatz ist durch \mathcal{K}'' (9.136) gegeben. Mit der Konvention (9.96) für die Momente 2. Ordnung erhält man die Stoffgleichungen (9.97) und (9.98), die symmetrische Momente 0., 1. und 2. Ordnung liefern. Man erhält jetzt für die Formänderungsleistung (vergl. [...] -Ausdruck in (9.11))

$$\begin{aligned}
 W_{in} &= M_0^{\alpha\beta} (\bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &\quad + M_2^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) + Q_0^\beta (\bar{\tau}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) \\
 &\quad + Q_1^\beta (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) + L^\alpha \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} + Q \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} \\
 &= M_0^{\alpha\beta} \dot{E}_{0\alpha\beta} + M_1^{\alpha\beta} E_{1\alpha\beta} + M_2^{\alpha\beta} \dot{E}_{2\alpha\beta} \\
 &\quad + Q_0^\alpha 2 E_{0\alpha 3} + Q_1^\alpha 2 E_{1\alpha 3} + Q \dot{E}_{033} .
 \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$M_0^{j\alpha} := Q_0^\alpha =: M_0^{\alpha 3}$$

$$M_1^{j\alpha} := Q_1^\alpha =: M_1^{\alpha 3}$$

$$M_0^{33} := Q$$

läßt sich auch für die Formänderungsleistung schreiben

$$W_{in} = M_0^{KL} E_{0KL} + M_1^{\alpha L} \dot{E}_{1\alpha L} + M_2^{\alpha\beta} E_{2\alpha\beta} \quad (9.151)$$

$$K, L = 1, 2, 3 \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, 2 .$$

Die mathematische Struktur dieses Ausdrucks zeigt, daß die ursprünglich eingeführten Beanspruchungsgrößen $M_0^{\alpha\beta}$ etc. und die Verzerrungsmaße $E_{0\alpha\beta}$ etc. konjugierte Variable sind, wenn für $M_2^{\alpha\beta}$ eine geeignete Konvention eingeführt wird und die Variable $Q_{\alpha\beta}$ nicht in den Stofffunktionen vorkommt.

Zu (b): Es fällt schwer, eine einfache Erklärung für die Existenz des M_z - Theorems zu geben, ohne eine vergleichbare mathematische Analyse durchzuführen. Im Prinzip wäre es denkbar gewesen, daß die Momente 2. Ordnung sich nicht aus dem Problem eliminieren lassen, ohne zusätzliche ad hoc-Annahmen einzuführen. In Kap. 10 wird der Fall nichtkonstanter Temperatur über die Schallendicke analysiert werden. Hier trifft man auf eine neue Situation: Es wird notwendig, Momente 2. und höherer Ordnung einzuführen, die sich aber nicht aus dem zweidimensionalen Problem eliminieren lassen. Ein analoges Theorem existiert hier also nicht.

Zu (c): Die hier angesprochene Frage nach den Symmetrieeigenschaften der Beanspruchungsgrößen $M_{\alpha\beta}$ etc. gehört mit zu den wesentlichen Fragen dieses Kapitels. Zu ihrer Beantwortung ist es erforderlich, auf die dreidimensionale Feldtheorie (Kap. 4 und 5, Teil 1) und auf dreidimensionale Ersatzprobleme (Kap. 7, Teil 1) zurückzugreifen.

Aus der Analyse der dreidimensionalen Feldtheorie mit Volumenkräften und Volumenmomenten aber ohne Spin und Momentenspannungen ergab sich (Kap. 5.7, Teil 1), daß dreidimensionale Feldprobleme mit Volumenmomenten formal wie ein kontinuumsmechanisches Problem ohne Volumenmomente und mit einem symmetrischen Spannungstensor behandelt werden können; allerdings muß die aktuelle Volumenkraftdichte durch eine modifizierte Volumenkraftdichte, die Gradienten der Volumenmomente enthält, ersetzt werden. Dies gilt ganz unabhängig davon, welche thermodynamischen Restriktionen* für die Stoffgleichungen, u.z. insbesondere für den symmetrischen Teil des Spannungstensors, bestehen. Die Lösung (Verschiebungs- und symmetrisches Spannungsfeld) ist natürlich abhängig davon, ob Volumenmomente vorhanden sind oder nicht.

Dieses Ergebnis läßt sich auf ein dreidimensionales Ersatzproblem übertragen, denn ein 3D-Ersatzproblem mit gedachten Volumenmomenten ist durch dieselben lokalen Bilanzgleichungen, die jetzt aber auch die Zusatzeinwirkungen $\hat{\delta}$, $\hat{\xi}$ und $\hat{\tau}$ enthalten, charakterisiert. Diese Bilanzgleichungen sind durch die Stoffgleichungen zu ergänzen, die der Forderung der Beobachterinvarianz** unterliegen und die thermodynamischen Restriktionen genügen müssen; darüber hinaus bestehen aber insbesondere die inneren thermischen

* Z.B. lokale oder integrale Entropieungleichung

** Die dreidimensionale, nichtreduzierte, lokale Energiebilanzgleichung ist voraussetzungsgemäß beobachterinvariant; daraus ergibt sich nicht nur der lokale Impuls- und Drehimpulssatz, sondern auch eine Restriktion für die Stofffunktion der inneren Energie.

und kinematischen Zwangsbedingungen sowie integrale Energie- und Entropieforderungen für die Zusatzeinwirkungen, die durch weitere Bedingungen hinsichtlich der Zusatzeinwirkungen ergänzt werden müssen. Ein Ersatzproblem läßt sich daher auch mit einem symmetrischen Spannungstensor und einer modifizierten Volumenkraftdichte, die Gradienten der gedachten Volumenmomente enthält, formulieren. Wegen der Unabhängigkeitsforderung sind seine Lösungen $\bar{\tau}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{1}(\theta^\alpha, t)$ unabhängig von den gedachten Zusatzeinwirkungen und damit insbesondere unabhängig davon, ob gedachte Volumenmomente angenommen werden oder nicht. Für die Gesamt-Spannungen (d.i. die Summe aus symmetrischem und schiefsymmetrischem Anteil) und damit auch für ihre Momente gilt dies aber im allgemeinen nur eingeschränkt: Die Momente der Gesamtspannungen sind sicher dann symmetrisch, wenn die gedachten Volumenmomente ignoriert werden, aber im allgemeinen nicht notwendig symmetrisch, wenn die gedachten Volumenmomente berücksichtigt werden. Allerdings muß sich nach dem oben Gesagten jedes 3D-Ersatzproblem - unabhängig davon, ob gedachte Volumenmomente vorhanden sind oder nicht - auf eine Form bringen lassen, in der nur symmetrische Spannungen und damit symmetrische Momente der Spannungen auftreten. Diese Aussagen gelten für jedes schalentheoretische Konzept bzw. System zweidimensionaler Schalengleichungen^x, das durch ein dreidimensionales Ersatzproblem interpretierbar ist.

Das 2. schalentheoretische Konzept macht direkten Gebrauch von den lokalen Bilanzgleichungen (Kap. 8.3, Teil 1) des 3D-Ersatzproblems. Setzt man weiter die verschärfte Invarianz für die Massieusche Funktion (9.93) voraus^{xxx} (vergl. S. 68), dann läßt sich das 2. schalentheoretische Konzept ohne Einschränkungen als eine 3D-Ersatzproblem interpretieren. Allerdings wird in nichtklassischer Weise eine integrale Entropieungleichung vorausgesetzt. Das 2. schalentheoretische Konzept muß daher auf symmetrische Momente der Spannungen führen. Es ist allerdings beachtenswert, daß die Logik des 2. schalentheoretischen Konzepts unsymmetrische Momente der Spannungen nicht zuläßt. Dies beruht auf den speziellen Forderungen an die gedachten Zusatzeinwirkungen (Hypothese S. 148, Teil 1, vergl. Kap. 8.3.3).

^x Die Definitionen für die zweidimensionalen Schalengrößen, insbesondere die Momente, müssen natürlich mit den Definitionen dieses Berichtes übereinstimmen.

^{xxx} D.h. \oint_V^N unabhängig von $\sigma_{\alpha\beta}$

Im Gegensatz dazu sind beim 1. schalentheoretischen Konzept die Momente der Spannungen im allgemeinen nicht symmetrisch; mit dem \hat{M} - Theorem, einer geeigneten Konvention für die Momente 2. Grades und der verschärften Beobachterinvarianz der Massieuschen Funktion kann man aber - eine bestimmte Wahl der kinematischen Variablen vorausgesetzt - eine Gleichungsstruktur erhalten, die ebenfalls nur symmetrische Momente enthält. Dieses Ergebnis ist nicht unmittelbar interpretierbar, denn das 1. schalentheoretische Konzept macht explizit von den lokalen Bilanzgleichungen des 3D-Ersatzproblems keinen Gebrauch, so daß auf den ersten Blick eine Interpretation durch ein 3D-Ersatzproblem nicht möglich erscheint. Ohne auf die Beweisführung hier im einzelnen einzugehen, kann man aber zeigen, daß die zweidimensionalen Schalengleichungen dieses Konzepts, wie die Bewegungsgleichung 1. und 2. Art und die Orthogonalitätsbedingungen, aus dem folgenden 3D-Ersatzproblem ableitbar ist: Es seien die lokalen Bilanzgleichungen und Randbedingungen (8.93) vorausgesetzt. Hinsichtlich der Zusatzeinwirkungen werden u.a. zwei integrale Forderungen gestellt, u.z. (8.49) und (8.70), d.h.

$$\hat{f} = \bar{0} \quad , \quad \hat{D}_{red} = \bar{0} \quad ,$$

Indem man in diesen Forderungen jetzt die integralen Größen \hat{b}_m , \hat{p}_m etc. mit Hilfe der lokalen Bilanzgleichungen und Randbedingungen (8.90) darstellt, erhält man schließlich mit den gleichen Argumenten wie in Kap. 8.2.2.4 (Teil 1) die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und die Orthogonalitätsbedingung des 1. schalentheoretischen Konzeptes. Eine Symmetrie der Momente der Gesamtspannungen ist hieraus noch nicht ableitbar.

Die Voraussetzung der verschärften Beobachterinvarianz der zweidimensionalen Stofffunktionen erlaubt jetzt aber das vollständige System der zweidimensionalen Schalengleichungen des 1. Konzeptes als Gleichungen eines 3D-Ersatzproblems zu deuten, denn ein 3D-Ersatzproblem beinhaltet auch die Beobachterinvarianz der dreidimensionalen Stofffunktionen und nicht nur die Invarianz ihrer Integrale über die Schalendicke.

Damit ist die Tatsache erklärt, daß die zweidimensionalen Schalengleichungen auf eine Struktur mit symmetrischen Momenten M^{ab} etc. zurückführbar ist. Außerdem wird auch die Ambivalenz in den Symmetrieeigenschaften der Momente interpretierbar, denn diese findet sich bei dem

entsprechenden 3D-Ersatzproblem wieder in der Alternative, gedachte Volumenmomente mit einzubeziehen oder zu ignorieren.

Zu (d): Die Spannungs-Verzerrungsbeziehung (9.141) des klassischen dreidimensionalen Feldproblems waren u.a. mit dem Dissipationspostulat unter Voraussetzung einer lokalen Entropieungleichung abgeleitet worden. Die gleiche thermodynamische Forderung kann man im Rahmen eines 3D-Ersatzproblems stellen, die dann zu der gleichen konstitutiven Restriktion (9.141) für den symmetrischen Teil des Spannungstensors führt. Sowohl beim 1. wie auch beim 2. schalentheoretischen Konzept war aber nur eine integrale Entropieungleichung vorausgesetzt worden. Dennoch führen beide schalentheoretische Konzepte bei Forderung der verschärften Beobachterinvarianz auf 2D-Stoffgleichungen für die (symmetrischen) Momente der Spannungen, die mit entsprechenden Integralen der Stoffgleichungen (9.141) ohne Einschränkung übereinstimmen.

Da beide schalentheoretische Konzepte als 3D-Ersatzprobleme, d.h. dreidimensionale Feldprobleme mit inneren thermischen und kinematischen Zwangsbedingungen^{*}, interpretiert werden können, läßt dieses Ergebnis vermuten, daß in einem 3D-Ersatzproblem dieselben dreidimensionalen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen erhalten werden, gleichgültig, ob eine lokale oder integrale Entropieungleichung angenommen wird. Ein Beweis hierzu müßte direkt erbracht werden können, ist aber bisher nicht versucht worden.

Dieses Ergebnis legt auch die Vermutung nahe, daß die integrale^{**} und die lokale Entropieungleichung für einen thermoelastischen Körper mit Wärmeleitung aber ohne innere Zwangsbedingungen zu denselben konstitutiven Restriktionen für die Spannungen führen. Die Überlegungen dazu sind in Anhang (7) und ausführlich in [91] dargestellt. Es zeigt sich, daß der nichtlokale Charakter der integralen Entropieungleichung nur Konsequenzen für die Wärmeleitungsaspekte hat; insbesondere wird damit die Vermutung bestätigt, daß die thermoelastischen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen unabhängig davon sind, ob die Entropieungleichung lokaler oder integraler Natur ist. Diese Aussage gilt unter den Voraussetzungen,

^{*} Sie werden durch äußere, gedachte Zusatzeinwirkungen realisiert und nicht durch Stoffeigenschaften.

^{**} Das Lokalisierungspostulat wird ausdrücklich nur in Bezug auf die integrale Entropieungleichung außer Kraft gesetzt.

daß die integralen Bilanzgleichungen der Energie, des Impulses und Drehimpulses sowie der Masse nachwievor in lokale Gleichungen^x überführbar sind und^{xx} daß die innere Energie, Entropie bzw. Massiesche Funktion und die Spannungen allein von den Verzerrungen, der Temperaturinversen (oder Temperatur) und dem materiellen Teilchen abhängen.

Die Beweisführung ist allerdings nicht auf ein Problem mit inneren Zwangsbedingungen übertragbar, denn bei der Beweisführung wird die Einstellbarkeit beliebiger Verteilungen der Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten und Temperaturen bzw. Temperaturraten vorausgesetzt. Faßt man aber ein 3D-Ersatzproblem als einen Sonderfall eines klassischen dreidimensionalen Feldproblems auf^{xxx}, dann ist die Übertragung zulässig.

Zu (e): Die beiden schalentheoretischen Konzepte bzw. die beiden zugeordneten 3D-Ersatzprobleme unterscheiden sich nicht in den grundlegenden dreidimensionalen Voraussetzungen^{xxxx} und den allgemeinen Invarianzforderungen, auch nicht in den inneren kinematischen und thermischen Zwangsbedingungen, wohl aber in bestimmten zusätzlichen Forderungen an die gedachten Zusatzeinwirkungen, d.h. die Unterschiede betreffen die Art und Weise wie die Zwangsbedingungen durch die gedachten äußeren Zusatzeinwirkungen realisiert werden. Da diese zusätzlichen Forderungen logisch nicht äquivalent sind^{xxxxx}, ist weder die partielle noch die vollständige Äquivalenz der beiden Konzepte unmittelbar einsehbar. Es fällt schwer, andere, möglicherweise sogar übergeordnete Argumente für die Äquivalenzen anzugeben, als die hier durchgeführte mathematische Nachweisführung selbst.

^x Diese Voraussetzung impliziert, daß die lokale nichtreduzierte Energiebilanzgleichung beobachterinvariant ist.

^{xx} Die folgenden Annahmen werden auch bei den beiden schalentheoretischen Konzepten gemacht, wenn verschärfte Beobachterinvarianz unterstellt wird.

^{xxx} Dies ist möglich, da die inneren Zwangsbedingungen durch gedachte äußere Einwirkungen realisiert werden; das Problem stellt daher nur einen speziellen Lastfall dar.

^{xxxx} Die Tatsache, daß das 1. schalentheoretische Konzept von lokalen Bilanzgleichungen (ausgenommen ist die Massenerhaltung) keinen Gebrauch macht, ist hier nicht von Bedeutung (vergl. Anmerkungen zu (c), S. 85).

^{xxxxx} Beispielsweise lassen sich aus der Bedingung $\overset{\Delta}{D}_{red} = 0$ nicht die Gleichungen (8.92)₂ bis (8.92)₇, Teil 1, ableiten; dagegen gilt die Umkehrung.

Zu (f): Zunächst muß hier detaillierter auf die im Teil 1, Kap. 2.2 angedeutete isotherme, nichtlinear elastische Schalentheorie [92] eingegangen werden. Dort waren isotherme Prozesse (keine Wärmeleitung, keine Wärmequellen, gleichförmige konstante Temperatur) vorausgesetzt worden. Ausgangspunkt war die Green-Rivlinsche Invarianzforderung für die über die Schalendicke integrierte Energiebilanzgleichung (zweidimensionale Energiebilanzgleichung). Der Verschiebungsansatz war derselbe wie in der vorliegenden Abhandlung. Wesentlich ist, daß bei diesem Konzept im Rahmen seiner Voraussetzungen kein Gebrauch von gedachten Zusatzeinwirkungen und dem Begriff der inneren Zwangsbedingungen gemacht werden mußte, da es möglich war, ein vollständiges System von zweidimensionalen Feldgleichungen herzuleiten. An eine Interpretation dieses Konzeptes als eines dreidimensionalen Ersatzproblems wurde also nicht gedacht.

Die Auswertung der Invarianzforderungen für die 2D-Energiebilanzgleichung verläuft ähnlich wie in Kap. 8.2 (Teil 1), wobei allerdings alle Betrachtungen und Ableitungen, die die gedachten Zusatzeinwirkungen betreffen, fortzulassen sind. Man erhält dann dieselben Bewegungsgleichungen erster und zweiter Art und die Orthogonalitätsbedingung wie beim 1. schalentheoretischen Konzept. Die reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung bekommt eine sehr einfache Form, da sie keine externen Wärmezufuhren und Wärme Flüsse enthält. Sieht man die über die Schalendicke integrierte innere Energie ξ und die Beanspruchungsgrößen M^{ab} etc. durch Stofffunktionen als gegeben an, dann stellt diese reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung eine Bedingung dar, die durch diese Stofffunktionen für alle Verformungsprozesse identisch erfüllt werden muß. Dabei ist zu beachten, daß die Beanspruchungsgrößen M^{ab} etc. nicht symmetrisch sind, da ja auf lokale Bilanzgleichungen nicht zurückgegriffen werden konnte.

Die Auswertung der identisch zu erfüllenden reduzierten Energiebilanzgleichung liefert Restriktionen für die Stofffunktionen, die mit denen des 1. schalentheoretischen Konzeptes m.E. übereinstimmen, wenn man beispielsweise den minimalen kinematischen Variablensatz zugrunde legt. Dabei bleiben, wie bei näherer Betrachtung leicht einsehbar, auch jetzt die Momente 2. Ordnung unbestimmt. Das M -Theorem gilt natürlich auch jetzt, und daher können die Momente 2. Ordnung durch eine geeignete Konvention festgelegt werden, so daß schließlich auch bei geeigneter Wahl der kinematischen Variablen und bei der verschärften Beobachterinvarianz der inneren Energie ξ zu symmetrischen Beanspruchungsgrößen kommen kann.

Diese mathematischen Ergebnisse, insbesondere die Ambivalenz der Beanspruchungsgrößen, das $\frac{1}{2}$ -Theorem und die Möglichkeit, die Theorie mit symmetrischen Momenten zu formulieren, obgleich nicht auf lokale Bilanzgleichungen zurückgegriffen worden war, verlangte nach einer physikalischen Interpretation. Diese Situation und die Unvollständigkeit der Theorie, wenn man zu komplexeren Verschiebungsansätzen übergeht oder nichtisotherme Prozesse betrachtet, führte dann zu dem Konzept der gedachten Zusatzeinwirkungen und inneren Zwangsbedingungen. Mit den bisherigen Ausführungen ist diese Interpretation aber gegeben: Die Tatsache, daß die Momente sowohl unsymmetrisch wie symmetrisch sein können, hängt u. a. letztlich damit zusammen, daß neben den gedachten Zusatzvolumenkräften auch gedachte Volumenmomente wirken können, deren Präsenz wohl für die Unsymmetrie der Spannungen und deren Momente verantwortlich ist, das Verschiebungsfeld in der Schale aber nicht beeinflußt! Da man die gedachten Volumenmomente aber durch gedachte Volumenkräfte (Gradienten der gedachten Volumenmomente) ersetzen kann, ist das Problem auf eine Aufgabe mit symmetrischen Spannungen und damit symmetrischen Momenten zurückführbar.

10. Auswertung der Entropiebedingungen und der Beobachterinvarianz bei ungleichförmiger Temperaturverteilung über die Schalendicke

10.1 Die Problemstellung

Die im Kapitel E bzw. Kapitel 8.4 (Teil 1) angesprochenen Fragen werden im folgenden für den Fall ungleichförmiger Temperatur über die Schalendicke (nicht-isothermer Fall) analysiert. Während im quasi-isothermen Fall die energetischen Forderungen und Invarianzbedingungen hinreichend viele Bilanzgleichungen für die gesuchten Lösungsfunktionen \bar{r} , \bar{d} und \bar{A}_0 lieferten, sind im nicht-isothermen Fall die beiden weiteren Lösungen \bar{A}_1 und \bar{A}_2 gesucht, so daß zwei weitere Bilanzgleichungen erforderlich sind. Die Auffindung dieser Bilanzgleichungen ist hier ein wesentlicher, neuer Aspekt. Da die energetischen Bedingungen schon ausgeschöpft sind, wird insbesondere die Entropie-Forderung zu analysieren sein.

Die Auswertung der Entropie-Forderung, der integralen 2D-Entropiegleichung und von Invarianzbedingungen soll konsequent für jedes der beiden schalentheoretischen Konzepte mit ihren unterschiedlichen Bilanzgleichungen und unterschiedlichen algebraischen Restriktionen für die Momente erfolgen. Insbesondere soll dabei zunächst nicht die Gültigkeit einer lokalen 3D-Entropiegleichung unterstellt und damit auch nicht auf die thermoelastischen 3D-Stoffgleichungen zurückgegriffen werden.

Es stellt sich dann die Frage, ob für beide Konzepte ein vollständiges System von Gleichungen gewinnbar ist und ob die generellen Struktureigenschaften der quasi-isothermen Theorien, u.z. das M_2 -Theorem oder etwas Entsprechendes, die Ambivalenz der Momente im allgemeinen und speziell die Ambivalenz der Symmetrie der Momente beim ersten schalentheoretischen Konzept sowie die partielle und vollständige Äquivalenz, auf den allgemeinen, nicht-isothermen Fall übertragbar sind.

10.2 Die zweidimensionale Entropieungleichung

Im Unterschied zu (9.1) hat die innere thermische Zwangsbedingung jetzt die Form

$$\Lambda(\theta^\alpha, \theta, t) - [\Lambda_0(\theta^\alpha, t) + \theta \Lambda_1(\theta^\alpha, t) + (\theta)^2 \Lambda_2(\theta^\alpha, t)] = 0,$$

d.h. die Temperaturinverse Λ wird durch einen quadratischen Ansatz in der Dickenkoordinate θ approximiert:

$$\Lambda(\theta^\alpha, \theta, t) = \Lambda_0 + \theta \Lambda_1 + (\theta)^2 \Lambda_2, \quad (10.1)$$

wobei Λ_m ($m=0,1,2$) Funktionen der Gaußschen Koordinaten θ^α und der Zeit t sind. Die integrale Clausius-Duhem Entropieungleichung hat unter Berücksichtigung der zusätzlichen gedachten thermischen Einwirkungen ("erweitertes Problem", S. 106, Teil 1) für irgendeinen beliebigen Teilabschnitt der Schale, der durch die Schalenlaibungen und den Randstreifen C_F (Abb. 11, Teil 1) begrenzt ist und der ganz im Schaleninneren liegt, die Form

$$\int_{V_R} S_R \dot{\eta} dV_R \geq \int_{V_R} S_R (r + \hat{r}) \Lambda dV_R - \oint_{O_R} \bar{q}_r \cdot \bar{N} \Lambda dO_m. \quad (10.2)$$

Das Oberflächenintegral des Entropieflusses durch Wärmeleitung erstreckt sich über die Schalenlaibungen und den Randstreifen (vergl. Kap. 9.1.1). Auf den Laibungen setzt sich der Wärmefluß aus dem aktuellen, dort vorgegebenen Wärmefluß $(\bar{q}_r \cdot \bar{N})^+$ bzw. $(\bar{q}_r \cdot \bar{N})^-$ und dem zusätzlichen gedachten Wärmefluß $(\hat{q}_r \cdot \bar{N})^+$ bzw. $(\hat{q}_r \cdot \bar{N})^-$ entsprechend (9.3) zusammen. Aus (10.2) wird dann

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{A}^-}^{\mathcal{A}^+} \int_{S^-}^{S^+} s_{r2} \dot{\eta} \sqrt{\frac{G}{A}} d\theta dA &\geq \int_{\mathcal{A}^-}^{\mathcal{A}^+} \int_{S^-}^{S^+} s_{r2} (r + \hat{r}) \Lambda \sqrt{\frac{G}{A}} d\theta dA \\
 &\quad - \oint_{C_F} \bar{q}_{r2} \cdot \bar{N} \Lambda d\theta_r \\
 &\quad - \int_{\mathcal{A}^+} (\bar{q}_{r2}^+ + \hat{q}_{r2}^+) \cdot \bar{N}^+ \Lambda^+ \xi^+ dA \\
 &\quad - \int_{\mathcal{A}^-} (\bar{q}_{r2}^- + \hat{q}_{r2}^-) \cdot \bar{N}^- \Lambda^- \xi^- dA,
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

wobei Λ durch (10.1) darzustellen ist und Λ^+ bzw. Λ^- die Λ -Werte auf den Laibungen sind

$$\left. \begin{aligned}
 \Lambda^+ &= \Lambda_0 + S^+ \Lambda_1 + (S^+)^2 \Lambda_2 \\
 \Lambda^- &= \Lambda_0 - S^- \Lambda_1 + (S^-)^2 \Lambda_2.
 \end{aligned} \right\} \tag{10.4}$$

Die Teilintegration von (10.3) über die Schalendicke kann formal nach Einführung einiger Definitionen durchgeführt werden. Besondere Aufmerksamkeit erfordert dabei nur das Integral des Entropieflusses über den Randstreifen C_F : Indem man in dem Integral für den Wärmefluß (8.33, Teil 1) den Wärmeflußvektor \bar{q}_{r2} durch den Entropie-

flußvektor

$$\bar{q}_R \Lambda = \bar{q}_R^0 \Lambda_0 + \bar{q}_R^1 \Lambda_1 + \bar{q}_R^2 \Lambda_2$$

ersetzt und definiert

$$h_m^\alpha := \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} q_R^\alpha(\theta)^m d\theta, \quad m = 0, 1, 2 \quad (10.5)$$

mit

$$\bar{q}_R = q_R^\alpha \bar{G}_\alpha + q_R^3 \bar{G}_3,$$

wird mit derselben Argumentation wie auf S. 122 (Teil 1)

$$\begin{aligned} \oint_{C_F} \bar{q}_R \Lambda \cdot \bar{N} d\Omega_R &= \oint_C [h_0^\alpha \Lambda_0 + h_1^\alpha \Lambda_1 + h_2^\alpha \Lambda_2] v_\alpha ds \\ &= \int_A [h_0^\alpha \Lambda_0 + h_1^\alpha \Lambda_1 + h_2^\alpha \Lambda_2] :_\alpha dA. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Führt man ferner ein

$$\eta := \frac{1}{S_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \eta d\theta \quad (10.7)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \eta \\ \hat{\eta} \\ \eta \\ \hat{\eta} \end{matrix} \right\}_m := \frac{1}{S_{mR}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{mR} \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \hat{\eta} \end{matrix} \right\} (\theta)^m d\theta \quad (10.8)$$

$$m = 0, 1, 2$$

$$S_{mR} := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R(\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2 \quad (10.9)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{N} := \int_A \left\{ \right. & \left[S_{0R} \hat{r}_0 \Lambda_0 + S_{1R} \hat{r}_1 \Lambda_1 + S_{2R} \hat{r}_2 \Lambda_2 \right] \\ & - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \Lambda_0 \\ & - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^- \right] \Lambda_1 \\ & \left. - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2 \right] \Lambda_2 \right\} d\omega A \end{aligned} \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} = \int_A \left\{ \right. & \left(S_{0R} \hat{r}_0 - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right) \Lambda_0 \\ & + \left(S_{1R} \hat{r}_1 - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^- \right] \right) \Lambda_1 \\ & \left. + \left(S_{2R} \hat{r}_2 - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2 \right] \right) \Lambda_2 \right\} d\omega A, \end{aligned}$$

dann wird aus (10.3) nach formaler Integration über die Schalendicke

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{A}} \dot{S}_{\text{OR}} d\mathcal{A} &\geq \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left[\dot{S}_{\text{OR}}^0 \dot{r}^0 \Lambda + \dot{S}_{\text{OR}}^1 \dot{r}^1 \Lambda + \dot{S}_{\text{OR}}^2 \dot{r}^2 \Lambda \right] \right. \\
 &\quad \left. - [(\bar{q}_{\text{R}} \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_{\text{R}} \cdot \bar{N} \xi)^-] \Lambda \right. \\
 &\quad \left. - [(\bar{q}_{\text{R}} \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\bar{q}_{\text{R}} \cdot \bar{N} \xi)^- s^-] \Lambda \right. \quad (10.11) \\
 &\quad \left. - [(\bar{q}_{\text{R}} \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\bar{q}_{\text{R}} \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2] \Lambda \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{1}{\rho} \dot{h}^0 \Lambda + \frac{1}{\rho} \dot{h}^1 \Lambda + \frac{1}{\rho} \dot{h}^2 \Lambda \right]_{;\alpha} \right\} d\mathcal{A} \\
 &\quad + \hat{\mathcal{N}}
 \end{aligned}$$

In der integralen Entropieungleichung (10.11) stellt der Ausdruck $\hat{\mathcal{N}}$ die Gesamtentropiezufuhr durch die gedachten zusätzlichen thermischen Einwirkungen dar. Die Entropie-Forderung (S. 109, Teil 1), daß die Entropiezufuhr durch die gedachten Zusatzeinwirkungen in einem Schalenabschnitt als Ganzes verschwindet, und zwar

- (B1) für jeden beliebigen Schalenabschnitt zwischen den Laibungen
(bzw. für jedes beliebige finite Linienelement)
 - (B2) für alle Beobachtersysteme
 - (B3) und für alle denkbaren aktuellen äußeren Einwirkungen,
- bedeutet jetzt, daß

$$\hat{\mathcal{N}} = 0 \quad (10.12)$$

unter den Bedingungen (B1) bis (B3) zu erfüllen ist. Die Entropie-Forderung (10.12) stellt also eine Entropiebilanzgleichung für die gedachten Zusatzeinwirkungen dar. Die Bedingung (B1) besagt jetzt insbesondere, daß $\hat{\mathcal{N}}$ für beliebige Integrationsbereiche \mathcal{A} verschwinden muß, d.h. der Integrand von (10.10) muß für alle Punkte auf der Schalenfläche gleich Null sein:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\tau}_0^\alpha - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right) \Lambda_0 \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\tau}_1^\alpha - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^- \right] \right) \Lambda_1 \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\tau}_2^\alpha - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2 \right] \right) \Lambda_2 \\
 & = 0 .
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Die Entropiegleichung (10.11) wird damit nach Umordnung

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial x} \dot{\eta} d\mathcal{A} & \geq \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_0^\alpha - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right) \Lambda_0 \right. \\
 & \quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_1^\alpha - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^- \right] \right) \Lambda_1 \\
 & \quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_2^\alpha - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 - (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2 \right] \right) \Lambda_2 \\
 & \quad \left. - \left[\frac{h^\alpha}{0} \Lambda_0 + \frac{h^\alpha}{1} \Lambda_1 + \frac{h^\alpha}{2} \Lambda_2 \right]_{;\alpha} \right\} d\mathcal{A} .
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

Man beachte, daß (10.14) für jeden beliebigen Integrationsbereich \mathcal{A} zu erfüllen ist, so daß als lokale 2D-Entropiegleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial R} \dot{\xi} &\geq \left(\frac{\partial R}{\partial R} \tau_0 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-] \right) \Lambda_0 \\
 &+ \left(\frac{\partial R}{\partial R} \tau_1 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^-] \right) \Lambda_1 \\
 &+ \left(\frac{\partial R}{\partial R} \tau_2 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2] \right) \Lambda_2 \\
 &- \left[h_0^\alpha \Lambda_0 + h_1^\alpha \Lambda_1 + h_2^\alpha \Lambda_2 \right]_{:\alpha}
 \end{aligned} \tag{10.15}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial R} \tau_0 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-] - h_0^\alpha \right) \Lambda_0 \\
 &+ \left(\frac{\partial R}{\partial R} \tau_1 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^-] - h_1^\alpha \right) \Lambda_1 \\
 &+ \left(\frac{\partial R}{\partial R} \tau_2 - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2] - h_2^\alpha \right) \Lambda_2 \\
 &- \left(h_0^\alpha \Lambda_{0,\alpha} + h_1^\alpha \Lambda_{1,\alpha} + h_2^\alpha \Lambda_{2,\alpha} \right)
 \end{aligned}$$

erhalten wird.

10.3 Das Problem der Auswertung der zweidimensionalen Entropiegleichung und die Bedeutung der Entropie-Forderung

Wie in Kap. 9.1.1 gezeigt, ist die lokale 2D-Entropiegleichung (9.9) für den quasi-isothermen Fall analog der lokalen Entropiegleichung ((5.2), Teil 1) des dreidimensionalen Problems aufgebaut. In der lokalen 2D-Entropiegleichung (10.15) für den nicht-isothermen Fall treten nun aber zusätzliche Ausdrücke auf, die mit den Entwicklungsfunktionen $\overset{\frown}{\lambda}_1$ und $\overset{\frown}{\lambda}_2$ der Temperaturinversen verbunden sind. Es sind dies die neuen Größen $\overset{\frown}{\nu}_m$ und $\overset{\frown}{h}_m^d$ ($m=1,2$). Andererseits ist auch jetzt nur eine Entropiefunktion $\overset{\frown}{\eta}$ vorhanden. Damit ist eine Analogie der mathematischen Strukturen des dreidimensionalen Falles und des nicht-isothermen zweidimensionalen Falles nicht mehr gegeben.

Die Auswertung der 2D-Entropiegleichung (10.15) entsprechend der Coleman-Noll-Schlußweise erfordert zunächst die Definition eines thermodynamisch zulässigen Prozesses und damit die Angabe sämtlicher 2D-Bilanzgleichungen sowie die generelle Grundstruktur der zweidimensionalen konstitutiven Gleichungen. Offensichtlich ist nun aber die Bestimmtheitsforderung (Kap. 7, Teil 1; Kap. E, Teil 2) bisher noch nicht erfüllt: Es stehen wohl für die neun unbekanntten skalaren Funktionen \bar{r} , \bar{d} , $\overset{\frown}{\lambda}_m$ ($m=0,1,2$) sieben Differentialgleichungen (Bilanzgleichungen) zur Verfügung, d.s. sechs skalare Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und die reduzierte Energiebilanzgleichung. Nach der Bestimmtheitsforderung fehlen also noch zwei Bilanzgleichungen.

Es stellt sich jetzt die Frage, von welcher Art diese Bilanzgleichungen sein müssen und in welcher Richtung sie zu suchen sind. Die höchsten zeitlichen Ableitungen - sie sind 2. Grades - von \bar{r} und \bar{d} bzw. ihren Gradienten $\bar{r}_{,\alpha}$ und $\bar{d}_{,\alpha}$ treten linear in den sechs skalaren Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art auf; die höchsten zeitlichen Ableitungen von $\overset{\frown}{\lambda}_m$ - sie sind 1. Grades - treten dagegen linear in der reduzierten Energiebilanzgleichung auf. Dies stellt eine skalare Gleichung für die drei Raten $\overset{\circ}{\lambda}_m$ ($m=0,1,2$) dar. Es werden also im Hinblick auf diese Raten noch zwei Bilanzgleichungen gesucht, die erlauben, die drei Raten $\overset{\circ}{\lambda}_m$ zu bestimmen. Diese gesuchten Gleichungen müssen eine ähnliche mathematische Struktur haben wie die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung.^x

^x Man sieht dies leicht ein, wenn man den Fall einer nichtdeformierbaren Schale betrachtet [93]. Dann sind die Bewegungsgleichungen nicht relevant und die kinematischen Zustandsvariablen treten in den Stofffunktionen nicht auf. Die einzige Differentialgleichung für die Raten $\overset{\circ}{\lambda}_m$ wäre dann zunächst nur die 2D-Energiebilanzgleichung.

Einen weiteren Hinweis erhält man aus der 2D-Entropiegleichung (10.15). Die direkte Auswertung einer Entropiegleichung entsprechend der Coleman-Noll-Schlußweise, sei es im dreidimensionalen Fall (Kap. 5.4, Teil 1) oder im zweidimensionalen Fall mit konstanter Temperatur über der Schalendicke (Kap. 9.1.1), erforderte zunächst die Elimination der Wärmequell-dichte $\overset{\sim}{\gamma}$ bzw. $\overset{\circ}{\gamma}$ aus der jeweiligen Ungleichung. Hierzu stand die jeweilige lokale Energiebilanzgleichung, die von einem zulässigen thermodynamischen Prozeß erfüllt werden muß, zur Verfügung; so erlaubt im quasi-isothermen zweidimensionalen Fall^x eine lokale 2D-Energiebilanzgleichung^{xx} die mittlere Wärmequell-dichte $\overset{\circ}{\gamma}$ aus der 2D-Entropiegleichung (9.9) zu eliminieren.

Auch hier läßt sich in (10.15) die mittlere Wärmequell-dichte $\overset{\circ}{\gamma}$ bzw. der Faktor von $\overset{\circ}{\gamma}$:

$$\overset{\circ}{S}_R \overset{\circ}{\gamma} = [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-],$$

der die aktuelle Wärmezufuhr pro Linienelement darstellt, entsprechend dem gewählten schalentheoretischen Konzept mit der jeweiligen lokalen 2D-Energiebilanzgleichung ((8.84), Teil 1) oder ((8.130), Teil 1) aus (10.15) eliminieren. Für $\overset{\sim}{\gamma}$ und $\overset{\circ}{\gamma}$ bzw. die Faktoren von $\overset{\sim}{\gamma}$ und $\overset{\circ}{\gamma}$ in (10.15) sind vergleichbare Bilanzgleichungen aber bisher nicht verfügbar. Von daher ist offensichtlich, daß die beiden gesuchten Bilanzgleichungen die eingepprägten aktuellen thermischen Einwirkungen

$$\overset{\circ}{S}_R \overset{\sim}{\gamma} = [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ s^+ - (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- s^-]$$

$$\overset{\circ}{S}_R \overset{\circ}{\gamma} = [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^2 + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (s^-)^2]$$

enthalten müssen.

Es ist nun klar, daß zur Erfüllung der Bestimmtheitsforderung nicht noch irgendwelche, bisher nicht verwendete, allgemein gültige physikalische Bilanzgleichungen, wie sie ja auch außerhalb einer rein thermomechanischen Theorie noch beachtet werden müßten, herangezogen werden können. Vielmehr muß innerhalb dieser thermomechanischen Theorie nach weiteren Bedingungen gesucht werden. Der einzige Bereich, in dem die Einführung weiterer Be-

^x Ohne Rückgriff auf lokale dreidimensionale Bilanzgleichungen

^{xx} Dabei waren ja nach dem gewählten schalentheoretischen Konzept unterschiedliche 2D-Energiebilanzgleichungen zu beachten.

dingungen physikalisch zulässig ist, umfaßt die zusätzlichen gedachten äußeren Einwirkungen, und zwar insbesondere die thermischen Einwirkungen. Die Entropie-Forderung (10.13) unterwirft die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen bisher nur einer summarischen Bilanzbedingung. Es wird im folgenden gezeigt, wie sie auf verschiedene Weise erfüllt werden kann.

Die Entropie-Forderung (10.13) unterscheidet sich von der entsprechenden Forderung für den quasi-isothermen Fall durch die zusätzlichen Terme $\overset{\wedge}{\gamma}$ und $\overset{\wedge}{\xi}$. Im quasi-isothermen Fall führt die Entropie-Forderung (wegen $\overset{\wedge}{\lambda} \neq 0, \overset{\wedge}{\lambda} = 0 = \overset{\wedge}{\lambda}$) einfach auf die Forderung

$$\sum_{0R} \overset{\wedge}{\gamma} - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-] = 0,$$

d.h., die Gesamtwärmezufuhr der gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen pro Linienelement verschwindet. Bei der Entropie-Forderung im nicht-isothermen Fall bestehen mehrere Strategien. Dabei sind aber in jedem Fall die Bedingungen (B2)

- Erfüllung von (10.13) für alle Beobachtersysteme (vergl. Kap. 7, Teil 1) und (B3)
- Erfüllung von (10.13) für alle denkbaren aktuellen äußeren Einwirkungen zu beachten. Wegen der Beobachtertransformationen (vergl. (8.44), (8.53), (8.56), Teil 1)

$$\left. \begin{aligned} \overset{\wedge}{\gamma}_m^* &= \overset{\wedge}{\gamma}_m, \quad m=0,1,2 \\ \hat{S}_{mR}^* &= \hat{S}_{mR}, \quad m=0,1,2 \\ \overset{\wedge}{\lambda}_m^* &= \overset{\wedge}{\lambda}_m, \quad m=0,1,2 \\ (\hat{q}_R \cdot \bar{N})^{\pm *} &= (\hat{q}_R \cdot \bar{N})^{\pm} \\ \overset{\wedge}{\xi}^{\pm *} &= \overset{\wedge}{\xi}^{\pm} \\ \hat{S}^{\pm *} &= \hat{S}^{\pm} \end{aligned} \right\} (10.16)$$

genügt die Entropie-Forderung der Beobachterinvarianz identisch, so daß dies hier keine weiteren Einschränkungen liefert.

Die Bedingung (B3) besagt, daß die Entropie-Forderung (10.13) für alle denkbaren zulässigen thermischen Prozesse erfüllt sein muß, welche aktuellen Belastungen, Wärmequellverteilungen $r(\theta^\alpha, \theta, t)$ und Wärmeflüsse $\bar{N} \cdot \bar{q}_R^+(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{N} \cdot \bar{q}_R^-(\theta^\alpha, t)$ auf den Laibungsflächen auch vorliegen mögen.

Diese Bedingung läßt sich noch weitergehend interpretieren. Zunächst sei daran erinnert (Kap. 7, Teil 1), daß die gedachten zusätzlichen Wärmequellen (-senken) \hat{r} und die zusätzlichen Wärmeflüsse $(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^\pm$ von außen aufgeprägte Wärmezufuhren sind, die so beschaffen sind, daß sie u.a. nur die Verteilungen der Temperaturinversen Λ entsprechend der thermischen Zwangsbedingung (10.1) bestimmen, nicht aber die Größe der Variablen Λ_0 , Λ_1 und Λ_2 . Wegen der Unabhängigkeitsforderung (Kap. 7, Teil 1) sind die Λ_m ($m=0, 1, 2$) allein durch die aktuellen äußeren Einwirkungen festgelegt. Dies bedeutet dann insbesondere,

- daß die Λ_m Werte annehmen können, die unabhängig von ihren Koeffizienten in der Entropie-Forderung (10.13) sind; dies schließt aber zunächst noch nicht aus, daß die Koeffizienten der Λ_m selbst noch von den Λ_m abhängen.

Die Bedingung (B3) bedeutet dann im Hinblick auf (10.13),

- daß durch eine geeignete Prozeßführung, und zwar durch Manipulation der aktuellen äußeren Einwirkungen allein, die Λ_m beliebig und unabhängig voneinander eingestellt werden können.

Diese beiden Bedingungen genügen nun aber noch nicht, um weitere Schlußfolgerungen aus der Entropie-Forderung zu ziehen. So ist z.B. die folgende Strategie denkbar, die die Entropie-Forderung identisch erfüllt: Man gibt beispielsweise bis auf \hat{r} die gedachten Zusatzgrößen \hat{q}_R , \hat{r} und $(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^\pm$ unabhängig von Λ_m vor und benutzt dann die Entropie-Forderung als Bestimmungsgleichung für die noch freie Zusatzgröße \hat{r} . Dann wird \hat{r} abhängig von Λ_m , was aber nicht im Widerspruch zu dem bisher Gesagten steht.

Eine weitere Strategie kann aber ausgeschlossen werden: Man kann zeigen, daß die Koeffizienten der Λ_m in (10.13) nicht in Abhängigkeit der Λ_m und gegebenenfalls der kinematischen Variablen \bar{r}_K , $\bar{d}_{1\alpha}$ und \bar{d} vorgegeben werden dürfen, ohne daß die Entropie-Forderung identisch erfüllt wird. Denn dann würde die Entropie-Forderung eine Bedingung zwischen den Variablen Λ_m und u.U. \bar{r}_K , $\bar{d}_{1\alpha}$ und \bar{d} darstellen, die im Widerspruch zu der Vorstellung steht, die thermischen und kinematischen Zustandsvariablen Λ_m und \bar{r}_K , $\bar{d}_{1\alpha}$, \bar{d} unabhängig voneinander einstellbar sein sollen.

Es ist nun naheliegend und natürlich, hier ähnlich zu verfahren wie bei der Auswertung der zweidimensionalen Energie-Forderung des zweiten schalentheoretischen Konzeptes. (Kap. 8.3, Teil 1). Die folgende Hypothese wird angenommen:

Hypothese: Es sei vorausgesetzt, daß die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen $(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^\pm$ und \hat{T} bzw. $\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2$ oder bestimmte Kombinationen dieser Größen, wie sie die Koeffizienten der Λ_m in der Entropie-Forderung (10.13) darstellen, unabhängig von den Λ_m gewählt werden können.

Da nun aufgrund der Bedingung (B3) die Λ_m beliebig und unabhängig voneinander eingestellt werden können, folgt dann notwendig und hinreichend aus der Entropie-Forderung (10.13) das Verschwinden der Koeffizienten der Λ_m .

Man hat also im einzelnen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_{0R} \hat{T}_0 - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N})^-] &= 0 \\ \mathcal{S}_{1R} \hat{T}_1 - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^+ s^+ - (\hat{q}_R \cdot \bar{N})^- s^-] &= 0 \\ \mathcal{S}_{2R} \hat{T}_2 - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^+ (s^+)^2 + (\hat{q}_R \cdot \bar{N})^- (s^-)^2] &= 0 \end{aligned} \right\} (10.17)$$

oder kurz

$$\mathcal{S}_{mR} \hat{T}_m - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^+ (s^+)^m + (\hat{q}_R \cdot \bar{N})^- (-s^-)^m] = 0$$

$m = 0, 1, 2$.

Man erkennt, daß diese Hypothese gerade so viele Bedingungen für die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen liefert, wie Entwicklungsfunktionen Λ_m der Temperaturinversen vorhanden sind.

Die Bedingungen (10.17) stellen drei Vorschriften für die Wahl der gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen \hat{T} und $(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^\pm$ dar. Man kann aus ihnen Gewinn ziehen, um die oben beschriebenen offenen Fragen zu klären, wenn man sich daran erinnert, daß das vorliegende Ersatzproblem eigentlich ein dreidimensionales Feldproblem mit inneren kinematischen und thermischen Zwangsbedingungen darstellt, die durch gedachte, äußere Zusatzeinwirkungen realisiert werden. Diesem Problem sind definitionsgemäß exakte lokale dreidimensionale Bilanzgleichungen zugeordnet, in denen die lokalen Werte der gedachten Zusatzeinwirkungen explizit enthalten sind. Die hier primär interessierende

Größe ist die gedachte Wärmequellenverteilung $\hat{r}(\theta, \theta, t)$, die einen Term in der lokalen dreidimensionalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems darstellt. Indem man diese Energiebilanzgleichung nach \hat{r} auflöst und entsprechend über die Schalendicke integriert, lassen sich die drei Größen

$$s_{mR} \hat{\tau}_m = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} s_{mR} \hat{r}(\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2 \quad (10.18)$$

durch die übrigen Terme der lokalen Energiebilanzgleichung beschreiben. Da in der lokalen dreidimensionalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems neben \hat{r} natürlich auch die aktuellen Wärmequellen $r(\theta, \theta, t)$ enthalten sind, liefert (10.17) nach der Integration (10.18) dann Bilanzgleichungen, in denen $\hat{\sigma}$ und insbesondere $\hat{\tau}_1$ oder $\hat{\tau}_2$ explizit auftreten. Inwiefern in diesen Gleichungen dann auch alle anderen gedachten Zusatzgrößen herausfallen, um der Unabhängigkeitsforderung zu genügen, bleibt noch zu zeigen. Darüberhinaus ist zu prüfen, ob diese drei Bilanzgleichungen mit den schon vorher entwickelten, insbesondere mit der 2D-Energiebilanzgleichung, verträglich sind. Denn mit (10.17) hat man nicht nur zwei, sondern drei weitere Bilanzgleichungen gewonnen.

Es muß jetzt daran erinnert werden, daß sich das 1. und 2. schalentheoretische Konzept in einigen grundsätzlichen Voraussetzungen (vergl. Kap. E) unterscheiden. Das 1. schalentheoretische Konzept geht nicht von der Invarianz der dreidimensionalen lokalen Energiebilanzgleichung aus, sondern fordert nur Invarianz in der integralen Form; daher wird hier auch nicht von dem lokalen Impuls- und Drehimpulssatz Gebrauch gemacht. Um hier also konsistent zu bleiben, muß die Wärmequellenverteilung $\hat{r}(\theta, \theta, t)$ aus der dreidimensionalen, lokalen, nichtreduzierten Energiebilanzgleichung ((7.7), Teil 1) ermittelt werden.

Bei dem 2. schalentheoretischen Konzept wird dagegen explizit von den lokalen, dreidimensionalen Bilanzgleichungen der Energie, des Impulses und Drehimpulses des Ersatzproblems ausgegangen; hier muß daher die reduzierte Energiebilanzgleichung zugrunde gelegt werden, um \hat{r} zu ermitteln; diese Energiebilanzgleichung enthält zwangsläufig nur den symmetrischen Anteil des Spannungstensors.

Da die Auswertung der Bilanzgleichungen* (10.17) für das 2. schalentheoretische Konzept mathematisch einfacher durchzuführen ist, soll diese Analyse zuerst vorgenommen werden.

* Die Gleichungen (10.17) sollen im folgenden als entropische Bilanzgleichungen für die thermischen Zusatzeinwirkungen bezeichnet werden, denn sie stehen mit der Entropie-Forderung in ursächlichem Zusammenhang.

10.4 Konsequenzen der Entropiegleichung und der entropischen Bilanzgleichungen beim 2. schalentheoretischen Konzept

Reduziert man die Energiebilanzgleichung ((7.7), Teil 1), indem man die Beiträge der Volumenkräfte \bar{b} und \hat{b} und des Volumenmoments $\hat{\ell}$ mit Hilfe des lokalen dreidimensionalen Impuls- und Drehimpulssatzes des Ersatzproblems ((7.8) und (7.9), Teil 1) eliminiert, dann erhält man als reduzierte lokale Energiebilanzgleichung (vergl. auch mit (4.100), Teil 1)

$$\rho_R \dot{\varepsilon} - \text{tr} [\underline{\hat{T}} \underline{\dot{\varepsilon}}] - \rho_R (\gamma + \hat{\gamma}) + \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R = 0. \quad (10.19)$$

Hier ist $\underline{\hat{T}}$ der symmetrische Teil des Piola-Kirchoffschen Spannungstensors 2. Art

$$\underline{\hat{T}} = \frac{1}{2} (\underline{T} + \underline{T}^T).$$

Auflösung nach den zusätzlichen, gedachten Wärmequellen $\hat{\gamma}$ liefert

$$\rho_R \hat{\gamma} = \rho_R \dot{\varepsilon} - \text{tr} [\underline{\hat{T}} \underline{\dot{\varepsilon}}] - \rho_R \gamma + \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R. \quad (10.20)$$

Diese lokale Bedingung erlaubt, die drei Integrale $\int_{m \in \mathcal{R}} \hat{\gamma}_m$ ($m=0,1,2$) (10.18), die in den entropischen Bilanzgleichungen (10.17) auftreten, durch Integrale der rechten Seiten von (10.20) auszudrücken. Zunächst sind

$$\left. \begin{aligned} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \varepsilon (\theta)^m d\theta &=: \int_{m \in \mathcal{R}} \varepsilon_m \\ \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \gamma (\theta)^m d\theta &=: \int_{m \in \mathcal{R}} \gamma_m \end{aligned} \right\} m=0,1,2 \quad (10.21)$$

Für die Spannungsleistung in (10.20) läßt sich unter Berücksichtigung der inneren kinematischen Zwangsbedingung (7.1) und mit (9.47) schreiben

$$\begin{aligned}
 \text{tr} [\underline{T} \underline{\dot{E}}] &= \overset{3}{T}{}^{kl} \dot{E}_{kl} \\
 &= \overset{3}{T}{}^{\alpha\beta} \dot{E}_{\alpha\beta} + \overset{3}{T}{}^{3\beta} \dot{E}_{3\beta} + \overset{3}{T}{}^{\beta 3} \dot{E}_{\beta 3} + \overset{3}{T}{}^{33} \dot{E}_{33} \\
 &= \overset{3}{T}{}^{\alpha\beta} \dot{E}_{\alpha\beta} + 2 \overset{3}{T}{}^{3\beta} \dot{E}_{\beta 3} + \overset{3}{T}{}^{33} \dot{E}_{33} \\
 &= \overset{3}{T}{}^{\alpha\beta} \left(\dot{E}_{\alpha\beta} + \theta \dot{E}_{\alpha\beta} + (\theta)^2 \dot{E}_{\alpha\beta} \right) \\
 &\quad + 2 \overset{3}{T}{}^{3\beta} \left(\dot{E}_{\beta 3} + \theta \dot{E}_{\beta 3} \right) \\
 &\quad + \overset{3}{T}{}^{33} \dot{E}_{33} \quad , \quad (10.22)
 \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
 M_m^{\alpha\beta} &:= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\beta} (\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2,3,4 \\
 M_n^{3\beta} &:= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{3\beta} (\theta)^n d\theta, \quad n=0,1,2,3 \\
 M_k^{33} &:= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{33} (\theta)^k d\theta, \quad k=0,1,2
 \end{aligned} \quad (10.23)$$

und wegen

$$\begin{aligned}
 \overset{3}{T}{}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}) \\
 \overset{3}{T}{}^{3\beta} &= \frac{1}{2} (T^{3\beta} + T^{\beta 3}) \\
 \overset{3}{T}{}^{33} &= T^{33}
 \end{aligned}$$

wird^{*}

^{*} Die Klammern um die Indizes der Momente in (10.24) bedeuten, daß nur der symmetrische Anteil der Momente zu nehmen ist.

$$\begin{aligned}
 M_m^{(\alpha\beta)} &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\beta}(\theta)^m d\theta \\
 &= \frac{1}{2} (M_m^{\alpha\beta} + M_m^{\beta\alpha}), \quad m=0,1,2,3,4 \\
 M_m^{(3\beta)} &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{3\beta}(\theta)^m d\theta \\
 &= \frac{1}{2} (M_m^{3\beta} + M_m^{\beta 3}), \quad m=0,1,2,3 \\
 M_k^{(33)} &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{33}(\theta)^k d\theta \\
 &= M_k^{33}, \quad k=0,1,2.
 \end{aligned}
 \tag{10.24}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 &\int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T [T \dot{E}] (\theta)^m d\theta \\
 &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left\{ T^{\alpha\beta} \left((\theta)^m \dot{E}_{0\alpha\beta} + (\theta)^{m+1} \dot{E}_{1\alpha\beta} + (\theta)^{m+2} \dot{E}_{2\alpha\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 T^{3\beta} \left((\theta)^m \dot{E}_{0\beta 3} + (\theta)^{m+1} \dot{E}_{1\beta 3} \right) \right. \\
 &\quad \left. + T^{33} (\theta)^m \dot{E}_{033} \right\} d\theta \\
 &= M_m^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{0\alpha\beta} + M_{m+1}^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{1\alpha\beta} + M_{m+2}^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{2\alpha\beta} \\
 &\quad + 2 \left(M_m^{(3\beta)} \dot{E}_{0\beta 3} + M_{m+1}^{(3\beta)} \dot{E}_{1\beta 3} \right) \\
 &\quad + M_m^{(33)} \dot{E}_{033} \quad m=0,1,2.
 \end{aligned}
 \tag{10.25}$$

Es bleibt noch die Integration der Divergenz des Wärmeflusses

$$\int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R (\theta)^m d\theta \quad (10.26)$$

durchzuführen. Mit $\theta = \theta^3$ und

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_R \cdot (\bar{q}_R (\theta)^m) &= \bar{G}^k \frac{\partial}{\partial \theta^k} (\bar{q}_R (\theta^3)^m) \\ &= (\theta)^m \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R + \bar{G}^3 \cdot \bar{q}_R m (\theta^3)^{m-1} \end{aligned}$$

wird

$$(\theta)^m \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R = \bar{\nabla}_R \cdot (\bar{q}_R (\theta)^m) - \bar{q}_R^3 m (\theta)^{m-1}, \quad (10.27)$$

wobei

$$\bar{q}_R^3 = \bar{G}^3 \cdot \bar{q}_R, \quad \bar{q}_R = \bar{q}_R^k \bar{G}_k,$$

Um den Divergenzausdruck auf der rechten Seite von (10.27) bequem integrieren zu können, wird der Term (10.26) zunächst über einen beliebigen Abschnitt der Referenzfläche der Schale integriert, um dann den Green-Gaußschen Satz im Schalenraum anwenden zu können. Es wird

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{A}} \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} (\theta)^m \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R d\theta d\mathcal{A} \\ &= \int_{\mathcal{A}} \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left\{ \bar{\nabla}_R \cdot (\bar{q}_R (\theta)^m) - \bar{q}_R^3 m (\theta)^{m-1} \right\} d\theta d\mathcal{A} \\ &= \int_{V_R} \bar{\nabla}_R \cdot (\bar{q}_R (\theta)^m) dV_R - m \int_{\mathcal{A}} \frac{h^3}{m-1} d\mathcal{A}, \quad (10.28) \end{aligned}$$

wobei

$$h^3 := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} q_r^3(\theta)^{m-1} d\theta, \quad (10.29)$$

Mit dem Green-Gaußschen Satz wird

$$\int_{V_R} \bar{\nabla}_R \cdot (\bar{q}_R(\theta)^m) dV_R = \oint_{O_R} (\theta)^m \bar{q}_R \cdot \bar{N} dO_R, \quad (10.30)$$

Dieses Oberflächenintegral über den Schalenabschnitt besteht aus drei Teilintegralen, und zwar aus den Integralen über den beiden Schalenlaibungen und den Randstreifen C_F . Auf den Laibungen muß der Wärmefluß die Randbedingungen des dreidimensionalen Ersatzproblems erfüllen (9.3). Daher wird

$$\begin{aligned} \oint_{O_R} (\theta)^m \bar{q}_R \cdot \bar{N} dO_R &= \int_{\mathcal{A}} (s^+)^m (\bar{q}_R^+ + \hat{\bar{q}}_R^+) \cdot \bar{N}^+ \zeta^+ d\mathcal{A} \\ &+ \int_{\mathcal{A}} (-s^-)^m (\bar{q}_R^- + \hat{\bar{q}}_R^-) \cdot \bar{N}^- \zeta^- d\mathcal{A} \\ &+ \oint_{C_F} (\theta)^m \bar{q}_R \cdot \bar{N} dO_R, \end{aligned} \quad (10.31)$$

Mit der Definition (10.5) und unter Beachtung der Ableitung (Gl. (8.33 - 8.38), Teil 1) erhält man für das Flächenintegral über den Randstreifen C_F

$$\oint_{C_F} (\theta)^m \bar{q}_R \cdot \bar{N} dO_R = \oint_C h_m^{\rho\alpha} v_\alpha ds = \int_{\mathcal{A}} h_m^{\alpha} v_\alpha d\mathcal{A}, \quad (10.32)$$

hierbei wurde der Green-Gaußsche Satz für Flächentensoren verwendet. Das Volumenintegral (10.28) läßt sich mit (10.28), (10.31) und (10.32) also darstellen als

$$\int_{\mathcal{A}} \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} (\theta)^m \bar{\nabla}_R \cdot \bar{q}_R d\theta d\mathcal{A} = \dots$$

$$m = \int_A \left\{ (s^+)^m (\bar{q}_R^+ + \hat{q}_R^+) \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + (-s^-)^m (\bar{q}_R^- + \hat{q}_R^-) \cdot \bar{N}^- \xi^- \right. \\ \left. + h_m^\alpha \delta_\alpha - m h_{m-1}^3 \right\} dA.$$

Für beliebige Integrationsbereiche A folgt daraus das gesuchte Integral (10.26)

$$\int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}}(\theta)^m \bar{v}_R \cdot \bar{q}_R d\theta = (s^+)^m (\bar{q}_R^+ + \hat{q}_R^+) \cdot \bar{N}^+ \xi^+ \\ + (-s^-)^m (\bar{q}_R^- + \hat{q}_R^-) \cdot \bar{N}^- \xi^- \\ + h_m^\alpha \delta_\alpha - m h_{m-1}^3. \quad (10.33)$$

Die Ergebnisse (10.20), (10.25) und (10.33) erlauben jetzt das Integral (10.18) über die gedachten Wärmequellen \hat{r} darzustellen; man erhält

$$\varrho_{mR} \hat{r}_m = \varrho_{mR} \dot{\hat{E}}_m - \varrho_{mR} r_m \\ - \left[M_m^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_{m+1}^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{1\alpha\beta} + M_{m+2}^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{2\alpha\beta} \right. \\ \left. + 2 \left(M_m^{(3\beta)} \dot{E}_{\beta 3} + M_{m+1}^{(3\beta)} \dot{E}_{1\beta 3} \right) \right. \\ \left. + M_m^{33} \dot{E}_{33} \right] \\ + h_m^\alpha \delta_\alpha - m h_{m-1}^3 \\ + (s^+)^m (\bar{q}_R^+ + \hat{q}_R^+) \cdot \bar{N}^+ \xi^+ + (-s^-)^m (\bar{q}_R^- + \hat{q}_R^-) \cdot \bar{N}^- \xi^-$$

$$m = 0, 1, 2.$$

Einsetzen von (10.34) in die Bilanzgleichungen (10.17) zeigt, daß sich die Beiträge der gedachten Zusatzwärmeflüsse auf den Leibungen jeweils herausheben, so daß (10.17) die folgende Form erhält

$$\begin{aligned}
 \sum_{mR} \dot{\epsilon}_m &= \left[M_m^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_{m+1}^{(\alpha\beta)} E_{\alpha\beta} + M_{m+2}^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad + 2 \left(M_m^{(3\beta)} \dot{E}_{\beta 3} + M_{m+1}^{(3\beta)} E_{\beta 3} \right) \\
 &\quad \left. + M_m^{(33)} \dot{E}_{33} \right] \\
 &\quad + h_m^\alpha - m h_{m-1}^3 \\
 &\quad - \sum_{mR} r_m + \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^{sm} + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (-s^-)^{sm} \right] \\
 &= 0 \quad ; \quad m = 0, 1, 2,
 \end{aligned}
 \tag{10.35}$$

Diese drei Forderungen lauten ausgeschrieben

$$\boxed{m=0} \quad |$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{0R} \dot{\epsilon}_0 &= \left[M_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_1^{(\alpha\beta)} E_{\alpha\beta} + M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad + 2 \left(M_0^{(3\beta)} \dot{E}_{\beta 3} + M_1^{(3\beta)} E_{\beta 3} \right) \\
 &\quad \left. + M_0^{(33)} \dot{E}_{33} \right] \\
 &\quad + h_0^\alpha \\
 &\quad - \sum_{0R} r_0 + \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{10.35}^I$$

$$\boxed{m=1} : \\
 \frac{\partial}{\partial R} \dot{\xi}_1 - \left[M_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_3^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \right. \\
 \left. + 2 \left(M_1^{(\beta\beta)} \dot{E}_{\beta\beta} + M_2^{(\beta\beta)} \dot{E}_{\beta\beta} \right) \right. \\
 \left. + M_1^{33} \dot{E}_{33} \right] \\
 + h_1^\alpha : \alpha - h_0^3 \\
 - \frac{\partial}{\partial R} \hat{\gamma}_1 + \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ S^+ - (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- S^- \right] = 0$$

$$\boxed{m=2} : \\
 \frac{\partial}{\partial R} \dot{\xi}_2 - \left[M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_3^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_4^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \right. \\
 \left. + 2 \left(M_2^{(\beta\beta)} \dot{E}_{\beta\beta} + M_3^{(\beta\beta)} \dot{E}_{\beta\beta} \right) \right. \\
 \left. + M_2^{33} \dot{E}_{33} \right] \\
 + h_2^\alpha : \alpha - 2 h_1^3 \\
 - \frac{\partial}{\partial R} \hat{\gamma}_2 + \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (S^+)^2 + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (S^-)^2 \right] = 0$$

(10.35)^I

Mit dem Ergebnis (10.35) sind die entropischen Bilanzgleichungen (10.17) soweit ausgeschöpft.

Die erste Bedingung (10.17)₁

$$\frac{\partial}{\partial R} \hat{\gamma}_0 - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- \right] = 0$$

war schon bei der Auswertung der Energie-Forderung des 2. schalentheoretischen Konzepts (Kap. 8.3, Teil 1) erhalten worden und hätte hier natürlich auch gleich berücksichtigt werden können. Es war dort gezeigt worden, daß diese Bedingung der lokalen, reduzierten zweidimensionalen Energiebilanzgleichung

(8.130) des 2. Konzepts entspricht (Kap. 8.3.5, Teil 1). Um die Identität von (8.130, Teil 1) und (10.35)^I₁ zu zeigen, differenzieren wir die kinematischen Beziehungen (9.48) und beachten dabei die Definitionsgleichungen (9.25); man erhält

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\bar{E}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \dot{a}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{r}}_{1\alpha} \cdot \bar{r}_{1\beta} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta}) \\
 \dot{\bar{E}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\dot{d}_{\alpha\beta} + \dot{d}_{\beta\alpha}) &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{r}}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 & & \quad + \dot{\bar{r}}_{1\beta} \cdot \bar{d}_{1\alpha} + \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha}) \\
 \dot{\bar{E}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \dot{v}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{d}}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} + \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 \dot{\bar{E}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \dot{d}\alpha &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{r}}_{1\alpha} \cdot \bar{d} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) \\
 \dot{\bar{E}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \dot{v}_{\alpha} &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{1\alpha} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha}) \\
 \dot{\bar{E}}_{33} &= \frac{1}{2} \dot{v} &= \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} .
 \end{aligned} \right\} (10.36)$$

Beachtet man weiter, daß bei dem 2. schalentheoretischen Konzept die Symmetriebedingung (8.116, Teil 1) für die Momente gilt, so daß

$$M_m^{\alpha\beta} = M_m^{(\alpha\beta)} , \quad m = 0, 1, 2 , \quad (10.37)$$

dann folgt nach Einsetzen von (10.36) und (10.37) in (10.35)^I unmittelbar die Übereinstimmung des Integranden von (8.130) mit (10.35)^I₁.

Die Gleichungen (10.35)^I₂ und (10.35)^I₃ stellen nun aber zwei neuartige Bedingungen dar, die zusammen mit (10.35)^I₁ insbesondere Differentialgleichungen für Λ_0, Λ_1 und Λ_2 abgeben, da nur in diesen Bilanzgleichungen - die Entropiegleichung ist hier ausgenommen - ihre Ableitungen 1. Ordnung nach der Zeit auftreten. Man erkennt dies, wenn man beachtet, daß die $\underline{\varepsilon}$ die unabhängigen Zustandsvariablen

$$a_{\alpha\beta} , d\alpha , d_{\alpha\beta} , v_{\alpha} , v , \Lambda_0 , \Lambda_1 , \Lambda_2$$

als Argumente haben und nach der Zeit zu differenzieren sind.

Von besonderer Bedeutung für das Folgende ist nun aber die Feststellung, daß in den Bilanzgleichungen $(10.35)_2^I$ und $(10.35)_3^I$ Größen höherer Ordnung wie die Momente $M_3^{(\alpha\beta)}$, $M_4^{(\alpha\beta)}$, $M_2^{(\alpha\beta)}$, $M_3^{(\alpha\beta)}$ und $M_2^{j\beta}$ auftreten, die in den Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und in der Energiebilanzgleichung (8.130, Teil 1) bzw. $(10.35)_1^I$ nicht vorhanden sind. Vergleichbares gilt für die höheren Wärmeflüsse h_1^α , h_2^α , h_0^j und h_1^j . Darüber hinaus treten in $(10.35)_2^I$ und $(10.35)_3^I$ die extern vorgegebenen Größen $\bar{\tau}$ und $\bar{\tau}^j$ sowie $(\hat{q}_R \cdot \bar{N})^j$ auf, die erstmals in der 2D-Entropiegleichung (10.11) bzw. (10.15) aufgetaucht waren und die dort nicht eliminiert werden konnten.

Für die gesuchten Lösungsfunktionen $\bar{\tau}$, \bar{d} , Λ_m ($m=0,1,2$), die insgesamt neun skalare Größen darstellen, stehen jetzt ebenfalls neun Differentialgleichungen zur Verfügung:

Die Bewegungsgleichung 1. Art	3 skal. Gleichungen
die Bewegungsgleichung 2. Art für das 2. schalentheoretische Konzept	3 skal. Gleichungen
die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung	1 skal. Gleichung
die entropischen Bilanzgleichungen (10.35), wobei die erste mit der red. 2D-Energiebilanzgleichung identisch ist.	3-1 = 2 skal. Gleichungen

Damit ist die Bestimmtheitsforderung (Kap. 7, Teil 1) erfüllt, wenn außerdem für $\bar{\epsilon}$ etc., die Momente der Spannungen $M_0^{\alpha\beta}$ etc. und die Momente der Wärmeflüsse h_0^α etc. konstitutive Gleichungen zur Verfügung stehen; dabei ist zu berücksichtigen, daß die Momente $M_m^{\alpha\beta}$ etc. den Symmetriebedingungen ((8.119), Teil 1)

$$M_n^{KL} - M_n^{LK} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} n=0,1 & K,L = 1,2,3 \\ n=2 & K,L = 1,2 \end{cases} \quad (10.38)$$

genügen. Für die höheren Momente $M_3^{\alpha\beta}$, $M_4^{\alpha\beta}$ etc. bestehen diese Symmetriebedingungen nicht, allerdings ist eine Aussage über ihren antisymmetrischen Anteil auch nicht erforderlich, da nur die Kenntnis des symmetrischen Anteils in $(10.35)_{2+3}^I$ notwendig ist. Da also entweder der antisymmetrische Anteil identisch verschwindet (10.38) oder nicht in den Bilanzgleichungen auftritt,

sind überhaupt nur für den symmetrischen Anteil Stofffunktionen anzugeben.
Die zweidimensionalen Stoffgleichungen des 2. schalentheoretischen Konzepts sind daher folgende

$$\left. \begin{aligned}
 M_m^{(\alpha\beta)} &= \overset{v}{M}_m^{(\alpha\beta)} (a_{\alpha\beta}, d_\alpha, \partial_{\alpha\beta}, v_\alpha, v, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) \quad m=0,1,2,3,4 \\
 M_n^{(j\alpha)} &= \overset{v}{M}_n^{(j\alpha)} (\quad) \quad n=0,1,2,3 \\
 M_k^{j\beta} &= \overset{v}{M}_k^{j\beta} (\quad) \quad k=0,1,2 \\
 \eta &= \overset{v}{\eta} (\quad) \\
 \Sigma_k &= \overset{v}{\Sigma}_k (\quad) \quad k=0,1,2 \\
 h_k^\alpha &= \overset{v}{h}_k^\alpha (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{0,\beta}, \Lambda_{1,\beta}, \Lambda_{2,\beta}) \quad k=0,1,2 \\
 h_p^j &= \overset{v}{h}_p^j (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{0,\beta}, \Lambda_{1,\beta}, \Lambda_{2,\beta}) \quad p=0,1
 \end{aligned} \right\} (10.39)$$

Die zweidimensionale Stoffgleichung für die Entropie η tritt dabei nur in der Entropie-Ungleichung (10.15) auf. Die Struktur dieser Stofffunktionen ist hier von vornherein so beschaffen, daß die Stoffgleichungen den Forderungen der Beobachterinvarianz genügen.

Die Übertragung des Coleman-Noll'schen Dissipationspostulats auf diese Situation bedeutet jetzt Folgendes. Ein "thermodynamischer Prozeß" für diese Schalenmodell wird durch die folgenden Funktionen beschrieben:

- 1) Die Geometrie der Schale im momentanen, verformten Zustand, charakterisiert durch $\overline{\pi}(\theta^\alpha, t)$ und $\overline{d}(\theta^\alpha, t)$, und das Feld der Temperaturinversen, bestimmt durch die drei Funktionen $\Lambda_0(\theta^\alpha, t)$, $\Lambda_1(\theta^\alpha, t)$ und $\Lambda_2(\theta^\alpha, t)$; } (10.40)

2) Die Beanspruchungsgrößen

$$M_m^{\alpha\beta}(\theta^\alpha, t) = M_m^{\beta\alpha}(\theta^\alpha, t) \quad m = 0, 1, 2$$

$$M_m^{\beta\alpha}(\theta^\alpha, t) = M_m^{\alpha\beta}(\theta^\alpha, t) \quad m = 0, 1$$

$$M_m^{\alpha\alpha}(\theta^\alpha, t) \quad m = 0$$

und der symmetrische Teil der höheren Momente

$$M_m^{(\alpha\beta)}(\theta^\alpha, t) \quad m = 3, 4$$

$$M_m^{(\beta\beta)}(\theta^\alpha, t) \quad m = 2, 3$$

$$M_m^{\beta\beta}(\theta^\alpha, t) \quad m = 1, 2$$

3) Die äußeren Lasten, u.z.

die Flächenlasten $\int_R \bar{b}_0 + \bar{f}_0$

die Flächenmomente $\int_R \bar{b}_1 + \bar{y}_1$

↑
infolge hydrosta-
tischen Druckes
infolge der Massenkraftdichte

(10.40)

4) Die Momente der inneren Energie, u.z.

die gemittelte spez. innere Energie der Schale

$$\varepsilon_0(\theta^\alpha, t)$$

und die höheren Momente

$$\varepsilon_n(\theta^\alpha, t), \quad n = 1, 2$$

5) Die Wärmeflußvektoren, u.z. die

die gemittelten Wärme Flüsse in der Schalenfläche

$$h_0^\alpha(\theta^\alpha, t)$$

und die höheren Momente

$$h_n^\alpha(\theta^\alpha, t), \quad n = 1, 2$$

der gemittelte Wärme fluß normal zur Referenzfläche

$$h_0^3(\theta^\alpha, t)$$

und das erste Moment

$$h_1^3(\theta^\alpha, t)$$

6) Die Wärmezufuhr der Schale, u.z.

die gemittelte Wärmezufuhr $\int_R \bar{q} - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-]$

und die höheren Momente $\int_R \bar{q}_n - [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+(s^+)^n + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^-(-s)^n]$

$n = 1, 2$

7) Die gemittelte spezifische Entropie

$$\eta(\theta^\alpha, t) \quad (10.40)$$

Diese Funktionen bilden einen "thermodynamischen Prozeß" für die Schale, wenn sämtliche Bilanzgleichungen, das sind die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art, die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung, und die 2. und 3. entropische Bilanzgleichung für jeden beliebigen Flächenabschnitt erfüllt werden. Um diesen thermodynamischen Prozeß zu definieren, genügt die Angabe der Funktionen unter (1), (2), (4), (5) und (7). Die übrigen Funktionen unter (3) und (6) sind dann eindeutig durch die lokalen 2D-Bilanzgleichungen festgelegt.

Dieser so definierte thermodynamische Prozeß soll als zulässig bezeichnet werden, wenn er mit den 2D-Stoffgleichungen (10.39) verträglich ist. Sind die 2D-Stoffgleichungen also gegeben, dann läßt sich zu jeder beliebigen^x Vorgabe der Größen

$$\bar{r}, \bar{d}, \Lambda_m \quad (m=0,1,2) \quad \text{als Funktionen von } \theta^\alpha \text{ und } t$$

ein zulässiger thermodynamischer Prozeß angeben, denn alle anderen Funktionen des zulässigen thermodynamischen Prozesses sind dann mit den Stofffunktionen und Bilanzgleichungen berechenbar.

Das Dissipationspostulat (S. 76, Teil I) fordert jetzt, daß jede Lösung der zweidimensionalen Feldgleichungen, bestehend aus den Bilanz- und den Stoffgleichungen, der 2D-Entropieungleichung genügen muß. Dies heißt auch, daß irgendwelche Felder

$\bar{r}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\Lambda_m(\theta^\alpha, t)$ ($m=0,1,2$), die die zweidimensionale Entropieungleichungen erfüllen sollen, Nebenbedingungen in Form der zweidimensionalen Feldgleichungen unterworfen sind. Ein zulässiger thermodynamischer Prozeß, der auch dem Dissipationspostulat genügt, soll als ein thermodynamisch konsistenter Prozeß bezeichnet werden.

^x Hinsichtlich der Λ_m besteht aber die Einschränkung, daß die Temperaturinverse $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \theta + \Lambda_2 (\theta)^2$ positiv sein muß; dies ist im folgenden aber ohne Bedeutung.

Da grundsätzlich davon ausgegangen wird, daß die äußeren aktuellen Einwirkungen, d.h. die Funktionen (3) und (6) beliebig einstellbar sind, erfüllt jeder Satz von Funktionen $\bar{r}, \bar{d}, \Lambda$ ($m=0,1,2$) diese Nebenbedingungen automatisch. Bei Vorgabe von \bar{r}, \bar{d} und Λ sind dann aber die äußeren aktuellen Einwirkungen festgelegt. In der 2D-Entropieungleichung (10.15) treten die äußeren aktuellen Wärmezufuhren, die Funktionen (6), explizit auf. Sie müssen daher durch \bar{r}, \bar{d} und Λ ausgedrückt werden, und dies kann nur mit den drei Bilanzgleichungen (10.35) erfolgen. Damit wird die 2D-Entropieungleichung auf eine Form gebracht, in der nur noch Stofffunktionen und unabhängige Zustandsvariable enthalten sind. Aus (10.15) wird daher mit (10.35)

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_R}{\sigma_0} \dot{\sigma} &\geq \frac{\rho_R}{\sigma_0} \dot{\varepsilon}_0 \Lambda + \frac{\rho_R}{\sigma_1} \dot{\varepsilon}_1 \Lambda + \frac{\rho_R}{\sigma_2} \dot{\varepsilon}_2 \Lambda \\
 &- \left[M_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_0^{\alpha\beta} + \dots + M_0^{33} \dot{E}_0^{33} \right] \Lambda_0 \\
 &- \left[M_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_0^{\alpha\beta} + \dots + M_1^{33} \dot{E}_0^{33} \right] \Lambda_1 \\
 &- \left[M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_0^{\alpha\beta} + \dots + M_2^{33} \dot{E}_0^{33} \right] \Lambda_2 \\
 &- h_0^v \Lambda_1 - 2 h_1^v \Lambda_2 \\
 &- \left(h_0^\alpha \Lambda_{0,1\alpha} + h_1^\alpha \Lambda_{1,2\alpha} + h_2^\alpha \Lambda_{2,1\alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

Wie in Kap. 8 wird davon ausgegangen, daß die integrale 3D-Entropieungleichung nicht auf eine lokale 3D-Entropieungleichung zurückführbar sei, so daß analog zu Kap. 9 die Entropieungleichung (10.41) direkt auszuwerten ist.

Es ist naheliegend, eine Funktion ϕ_0 einzuführen, die wie folgt definiert ist:

$$\phi_0 := \sigma - \varepsilon_0 \Lambda - \frac{\rho_R}{\sigma_1} \varepsilon_1 \Lambda - \frac{\rho_R}{\sigma_2} \varepsilon_2 \Lambda, \tag{10.42}$$

Man prüft leicht nach, daß die so definierte Funktion ϕ_0 gerade das Integral der Massiesche Funktion ϕ

$$\phi = \eta - \varepsilon \Lambda \tag{10.43}$$

im dreidimensionalen Fall ist, denn es gilt

$$\phi_0 = \frac{1}{\sigma_R} \int_{-s}^{+s} \sqrt{\frac{G}{A}} \sigma_R \phi d\theta, \tag{10.44}$$

wenn die innere thermische Zwangsbedingung (10.1) berücksichtigt wird. Die materielle Zeitableitung von (10.42) wird

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 = \dot{\eta}_0 - \varepsilon \dot{\Lambda}_0 - \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \varepsilon \dot{\Lambda}_1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \varepsilon \dot{\Lambda}_2 \\ - \dot{\varepsilon}_0 \Lambda - \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \dot{\varepsilon}_1 \Lambda - \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \dot{\varepsilon}_2 \Lambda \end{aligned} \tag{10.45}$$

Damit wird aus der 2D-Entropieungleichung (10.41)

$$\begin{aligned} \sigma_R \dot{\phi}_0 + \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \varepsilon \dot{\Lambda}_0 + \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \varepsilon \dot{\Lambda}_1 + \frac{\sigma_R}{\sigma_R} \varepsilon \dot{\Lambda}_2 \\ + [M_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{0\alpha\beta} + \dots + M_0^{33} \dot{E}_{033}] \Lambda_0 \\ + [M_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{1\alpha\beta} + \dots + M_1^{33} \dot{E}_{133}] \Lambda_1 \\ + [M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{2\alpha\beta} + \dots + M_2^{33} \dot{E}_{233}] \Lambda_2 \\ + h_0^3 \Lambda_1 + 2 h_1^3 \Lambda_1 \\ + h_0^\alpha \Lambda_{0|\alpha} + h_1^\alpha \Lambda_{1|\alpha} + h_2^\alpha \Lambda_{2|\alpha} \geq 0. \end{aligned} \tag{10.46}$$

Führt man noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} &:= M_0^{(\alpha\beta)} \Lambda_0 + M_1^{(\alpha\beta)} \Lambda_1 + M_2^{(\alpha\beta)} \Lambda_2 = \mathcal{M}_0^{(\beta\alpha)} \\
 \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} &:= M_1^{(\alpha\beta)} \Lambda_0 + M_2^{(\alpha\beta)} \Lambda_1 + M_3^{(\alpha\beta)} \Lambda_2 = \mathcal{M}_1^{(\beta\alpha)} \\
 \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} &:= M_2^{(\alpha\beta)} \Lambda_0 + M_3^{(\alpha\beta)} \Lambda_1 + M_4^{(\alpha\beta)} \Lambda_2 = \mathcal{M}_2^{(\beta\alpha)} \\
 \mathcal{M}_0^{(3\alpha)} &:= M_0^{(3\alpha)} \Lambda_0 + M_1^{(3\alpha)} \Lambda_1 + M_2^{(3\alpha)} \Lambda_2 \\
 \mathcal{M}_1^{(3\alpha)} &:= M_1^{(3\alpha)} \Lambda_0 + M_2^{(3\alpha)} \Lambda_1 + M_3^{(3\alpha)} \Lambda_2 \\
 \mathcal{M}_0^{33} &:= M_0^{33} \Lambda_0 + M_1^{33} \Lambda_1 + M_2^{33} \Lambda_2
 \end{aligned}
 \tag{10.47}$$

ein, dann schreibt sich (10.46)

$$\begin{aligned}
 & \rho_R \dot{\phi} + \rho_R \dot{\varepsilon}_0^1 + \rho_R \dot{\varepsilon}_1^1 + \rho_R \dot{\varepsilon}_2^2 \\
 & + \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \\
 & + 2 \left(\mathcal{M}_0^{(3\alpha)} \dot{E}_{\alpha 3} + \mathcal{M}_1^{(3\alpha)} \dot{E}_{\alpha 3} \right) \\
 & + \mathcal{M}_0^{33} \dot{E}_{33} \\
 & + h_0^3 \Lambda_1 + 2 h_1^3 \Lambda_2 \\
 & + h_0^\alpha \Lambda_{01\alpha} + h_1^\alpha \Lambda_{11\alpha} + h_2^\alpha \Lambda_{21\alpha} \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{10.46}^I$$

Die materielle Zeitdifferentiation der zweidimensionalen Massieu-
schen Funktion ϕ_0 ergibt wegen der Symmetrie von $a_{\alpha\beta}$ zu

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) \dot{a}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \phi_0}{\partial d_{\alpha\beta}} \dot{d}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \phi_0}{\partial d_{\alpha}} \dot{d}_{\alpha} \\ &+ \frac{\partial \phi_0}{\partial v_y} \dot{v}_y + \frac{\partial \phi_0}{\partial v} \dot{v} \\ &+ \frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_0} \dot{\Lambda}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_1} \dot{\Lambda}_1 + \frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_2} \dot{\Lambda}_2. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Einsetzen in die Entropiegleichung (10.46)^I und Zusammenfassung aller
Terme mit den gleichen Raten $\dot{\Lambda}_0, \dot{\Lambda}_1, \dot{\Lambda}_2$ ergibt weiter

$$\begin{aligned} &S_{0R} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_0} + \varepsilon_0 \right) \dot{\Lambda}_0 + S_{1R} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_1} + \varepsilon_1 \right) \dot{\Lambda}_1 + S_{2R} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_2} + \varepsilon_2 \right) \dot{\Lambda}_2 \\ &+ S_{0R} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) \dot{a}_{\alpha\beta} + S_{0R} \frac{\partial \phi_0}{\partial d_{\alpha\beta}} \dot{d}_{\alpha\beta} + S_{0R} \frac{\partial \phi_0}{\partial d_{\alpha}} \dot{d}_{\alpha} \\ &+ S_{0R} \frac{\partial \phi_0}{\partial v_y} \dot{v}_y + S_{0R} \frac{\partial \phi_0}{\partial v} \dot{v} \\ &+ \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \\ &+ 2 \mathcal{M}_0^{(\beta\alpha)} \dot{E}_{\alpha 3} + 2 \mathcal{M}_1^{(\beta\alpha)} \dot{E}_{\alpha 3} + \mathcal{M}_0^{\beta 3} \dot{E}_{\alpha 3} \\ &+ h_0^3 \dot{\Lambda}_1 + 2 h_1^3 \dot{\Lambda}_2 \\ &+ h_0^\alpha \dot{\Lambda}_{0,1\alpha} + h_1^\alpha \dot{\Lambda}_{1,1\alpha} + h_2^\alpha \dot{\Lambda}_{2,1\alpha} \geq 0. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Es muß aber beachtet werden, daß in der Entropieungleichung (10.49) nicht unabhängig einstellbare Raten auftreten; das bedeutet insbesondere, daß die kinematischen Variablen $\dot{E}_{\alpha\beta}$ etc. durch den minimalen kinematischen Variablensatz (9.36)

$$\mathcal{K} = \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_\alpha, \dot{\alpha}_{\alpha\beta}, \dot{\nu}_\alpha, \dot{\nu} \} \quad (10.50)$$

ausgedrückt werden müssen. Mit (10.36) und (9.56)₂ ist nun^x

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_0^{\alpha\beta} &= \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} \frac{1}{2} \dot{a}_{\alpha\beta} \\ \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_1^{\alpha\beta} &= \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_{\alpha\beta} + \dot{\alpha}_{\beta\alpha}) = \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} \dot{\alpha}_{\alpha\beta} \\ \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_2^{\alpha\beta} &= \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} \frac{1}{2} \dot{\nu}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} (d_{\alpha\alpha} \cdot \dot{d}_{\beta\beta}) \\ &= \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} \left[\eta_\alpha^3 \dot{\nu}_{\beta\beta} - \frac{1}{2} \eta_\alpha^3 \eta_\beta^3 \dot{a}_{\gamma\delta} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\langle \bar{\pi}_{18}, \bar{\pi}_{15} \rangle}_{\eta_\alpha^3 \eta_\beta^3} \right. \\ &\quad \left. - \eta_\alpha^3 \mu_\beta \dot{d}_\delta + \mu_\alpha \dot{\nu}_\beta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu_\alpha \mu_\beta \dot{\nu} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(\eta_\alpha^3 \mu_\beta - \eta_\beta^3 \mu_\alpha) \bar{\pi}_{15} \cdot \dot{d}} \right] \end{aligned} \right\} (10.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{(3\alpha)} \dot{E}_0^{\alpha 3} &= \mathcal{M}_0^{(3\alpha)} \frac{1}{2} \dot{d}_\alpha \\ \mathcal{M}_1^{(3\alpha)} \dot{E}_1^{\alpha 3} &= \mathcal{M}_1^{(3\alpha)} \frac{1}{2} \dot{\nu}_\alpha \\ \mathcal{M}_0^{33} \dot{E}_0^{33} &= \mathcal{M}_0^{33} \frac{1}{2} \dot{\nu} \end{aligned}$$

^x Die Produkte mit den unterstrichenen Termen fallen wegen der Symmetrie von $\mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)}$ heraus.

Umordnung und Zusammenfassung in der Entropiegleichung (10.49) ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
 & \dot{S}_R \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \Lambda_0} + \varepsilon \right] \dot{\Lambda}_0 + \dot{S}_R \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \Lambda_1} + \varepsilon \right] \dot{\Lambda}_1 + \dot{S}_R \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \Lambda_2} + \varepsilon \right] \dot{\Lambda}_2 \\
 & + \left[\dot{S}_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \mathcal{M}_2^{(S\mu)} \eta_\beta^\alpha \eta_\mu^\alpha \right] \dot{a}_{\alpha\beta} \\
 & + \left[\dot{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta^{\alpha\beta}} + \mathcal{M}_1^{(\alpha\beta)} + \mathcal{M}_2^{(S\beta)} \eta_S^\alpha \right] \dot{\eta}^{\alpha\beta} \\
 & + \left[\dot{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial d_\alpha} + \mathcal{M}_0^{(3\alpha)} - \mathcal{M}_2^{(S\mu)} \eta_\beta^\alpha \mu_\mu \right] \dot{d}_\alpha \\
 & + \left[\dot{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta^\alpha} + \mathcal{M}_1^{(3\alpha)} + \mathcal{M}_2^{(S\alpha)} \mu_S \right] \dot{\eta}^\alpha \\
 & + \left[\dot{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta^\alpha} + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{M}_2^{(\alpha\beta)} \mu_\alpha \mu_\beta \right] \dot{\eta}^\alpha \\
 & + h_0^\alpha \dot{\Lambda}_1 + 2 h_1^\alpha \dot{\Lambda}_2 \\
 & + h_0^\alpha \dot{\Lambda}_{0,\alpha} + h_1^\alpha \dot{\Lambda}_{1,\alpha} + h_2^\alpha \dot{\Lambda}_{2,\alpha} \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{10.52}$$

Dies ist jetzt die Form der zweidimensionalen Entropiegleichung, die eine Auswertung des Dissipationspostulats entsprechend der Coleman-Noll Schlussweise gestattet. Da hiernach die Raten $\dot{\Lambda}_m$ ($m=0,1,2$), $\dot{a}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha}$ etc. beliebig und unabhängig voneinander einstellbar sind und ihre Koeffizienten - die Terme in den eckigen Klammern - unabhängig von den Raten sind, müssen die Klammerterme für alle zulässigen thermodynamischen Prozesse verschwinden:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda} + \xi = 0 \quad \text{etc.}$$

und (10.53)

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \mathcal{M}_2^{(\beta\mu)} \eta_3^\beta \eta_\mu^\alpha = 0$$

etc.

Sieht man die Stofffunktionen $\phi_0^v, \xi_0^v, \xi_1^v, \xi_2^v, M_0^{\alpha\beta}$ etc. als frei vorgebar an, dann würden diese Bedingungen Verknüpfungen zwischen den unabhängigen Zustandsvariablen $a_{\alpha\beta}, \dots, \lambda_0, \lambda_1$ und λ_2 bedeuten; dies steht aber im Widerspruch zu der Vorstellung, daß die unabhängigen Zustandsvariablen lokal beliebig und unabhängig voneinander einstellbar sind. Es müssen daher die Bedingungen (10.53) identisch erfüllt werden. Das bedeutet, die Stofffunktionen $\phi_0^v, \xi_0^v, \xi_1^v, \xi_2^v, M_0^{\alpha\beta}$ etc. sind nicht mehr unabhängig voneinander wählbar, und zwar gelten die folgenden konstitutiven Restriktionen

$$\begin{aligned} \xi_0^v &= - \frac{\partial \phi_0^v}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial}{\partial R} \xi_1^v &= - \frac{\partial \phi_0^v}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial}{\partial R} \xi_2^v &= - \frac{\partial \phi_0^v}{\partial \lambda_2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \xi_0^v \\ \frac{\partial}{\partial R} \xi_1^v \\ \frac{\partial}{\partial R} \xi_2^v \end{aligned}} \right\} (10.54)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{\vee}{\mathcal{M}}_0^{(\alpha\beta)} &= -\mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) + \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(s\mu)} \eta_s^\beta \eta_\mu^\alpha \\
 \overset{\vee}{\mathcal{M}}_1^{(\alpha\beta)} &= -\mathcal{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial d_{\alpha\beta}} - \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(s\alpha)} \eta_s^\alpha \\
 \overset{\vee}{\mathcal{M}}_0^{(\beta\alpha)} &= -\mathcal{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial d_{\alpha\beta}} + \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(s\mu)} \eta_s^\alpha \mu_\mu \\
 \overset{\vee}{\mathcal{M}}_1^{(\beta\alpha)} &= -\mathcal{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial d_{\beta\alpha}} - \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(\beta\alpha)} \mu_\beta \\
 \overset{\vee}{\mathcal{M}}_0^{33} &= -\mathcal{S}_R \frac{\partial \Phi_0}{\partial d} + \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(\alpha\beta)} \mu_\alpha \mu_\beta .
 \end{aligned} \right\} (10.55)$$

Unter Beachtung von (10.54) und (10.55) reduziert sich schließlich (10.52) auf die Restentropieungleichung

$$\begin{aligned}
 &h_0^3 \Lambda + 2 h_1^3 \Lambda \\
 &+ \overset{\vee}{h}_0^\alpha \Lambda_{0|\alpha} + \overset{\vee}{h}_1^\alpha \Lambda_{1|\alpha} + \overset{\vee}{h}_2^\alpha \Lambda_{2|\alpha} \geq 0 .
 \end{aligned} \tag{10.56}$$

In (10.55) ist noch die Symmetrie der Stofffunktionen $\overset{\vee}{\mathcal{M}}_0^{(\alpha\beta)}$, $\overset{\vee}{\mathcal{M}}_1^{(\alpha\beta)}$ etc. zu beachten. Gl. (10.55)₁ erfüllt diese Bedingung identisch, nicht aber (10.55)₂. Mit

$$\overset{\vee}{\mathcal{M}}_0^{(\alpha\beta)} - \overset{\vee}{\mathcal{M}}_0^{(\beta\alpha)} = 0$$

folgt daher analog zu (9.105) und (9.106)

$$\mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) = \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(s\alpha)} \eta_s^\beta - \overset{\vee}{\mathcal{M}}_2^{(s\beta)} \eta_s^\alpha . \tag{10.57}$$

Die Symmetrie von $\overset{\vee}{\eta}^{\alpha\beta}$ ist damit übersetzt in eine konstitutive Restriktion für die Stofffunktionen $\overset{\vee}{\phi}_0$ und $\overset{\vee}{\eta}_2^{\alpha\beta} \equiv \overset{\vee}{\eta}_2^{\beta\alpha}$. Geht man jetzt analog wie auf S. 57 vor und spaltet $\frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}}$ in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil auf und berücksichtigt (10.57), dann läßt sich (10.55)₂ auf eine Form bringen, die der Symmetriebedingung identisch genügt

$$\overset{\vee}{\eta}_1^{\alpha\beta} = -s_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\vee}{\phi}_0}{\partial \lambda_{\beta\alpha}} \right) - \frac{1}{2} \left(\overset{\vee}{\eta}_2^{\alpha\beta} \eta_{\beta\alpha} + \overset{\vee}{\eta}_2^{\beta\alpha} \eta_{\alpha\beta} \right) \quad (10.58)$$

Hinsichtlich (10.55)₃ und (10.55)₄ ist noch anzumerken, daß sowohl $\overset{\vee}{\eta}_n^{\alpha\beta}$ ($n=0,1$) wie auch $\overset{\vee}{\eta}_n^{\alpha\beta}$ ($n=0,1$) durch die rechten Seiten festgelegt sind.

Mit den Ergebnissen (10.54) bis (10.58) ist die Auswertung der zweidimensionalen Entropieungleichung für das 2. schalentheoretische Konzept zunächst abgeschlossen. Es empfiehlt sich aber noch, wie in Kap. 9 diese konstitutiven Restriktionen für einen alternativen Satz kinematischer Variabler zu entwickeln. Anstelle des oben verwendeten minimalen kinematischen Variablensatzes

$$\mathcal{K} = \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \lambda_{\alpha\beta}, d_{\alpha}, \nu_{\alpha}, \nu \} \quad (10.59)$$

sind in Kap. 9 u.a. auch die nichtminimalen kinematischen Variablensätze

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K} &= \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \lambda_{\alpha\beta}, d_{\alpha}, \nu_{\alpha}, \nu, \nu_{\alpha\beta} \} \\ \text{und} \\ \mathcal{K}' &= \{ E_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta} \} \end{aligned} \right\} \quad (10.60)$$

als Zustandsgrößen verwendet werden, wobei (9.48) und (9.49) zu beachten sind.

Es sei daran erinnert, daß $n_{\alpha\beta}^{\dagger}$ bzw. $\dot{E}_{\alpha\beta}$ keine unabhängige Zustandsgröße ist. Im folgenden soll nur der Variablensatz \mathcal{K}' weiter betrachtet werden. Die Stofffunktionen für die Massieu'sche Funktion ϕ_0 , und die Momente der inneren Energie und der Spannungen sind dann

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= \tilde{\phi}_0(\mathcal{K}', \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) \\ \varepsilon_m &= \tilde{\varepsilon}_m(\mathcal{K}', \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) \quad m = 0, 1, 2 \\ M_m^{(\alpha\beta)} &= \tilde{M}_m^{(\alpha\beta)}(\mathcal{K}', \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) \quad m = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} (10.61)$$

etc.

Die materielle Zeitableitung von $\tilde{\phi}_0$ ergibt dann zunächst

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \tilde{\phi}_0 &= \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{E}_{\alpha\beta}} \dot{E}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{E}_{\alpha\beta}} \dot{E}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{E}_{\alpha\beta}} \dot{E}_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{E}_{\alpha 3}} \dot{E}_{\alpha 3} + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{E}_{\alpha 3}} \dot{E}_{\alpha 3} + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{E}_{\alpha 3}} \dot{E}_{\alpha 3} \\ &+ \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{\sigma}_{\alpha\beta}} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{\Lambda}_0} \dot{\Lambda}_0 + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{\Lambda}_1} \dot{\Lambda}_1 + \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial \dot{\Lambda}_2} \dot{\Lambda}_2. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Bei der Auswertung der 2D-Entropiegleichung (10.46)^I unter Berücksichtigung von (10.62) muß jetzt beachtet werden, daß nur der minimale kinematische Variablensatz \mathcal{K} und die thermischen Variablen Λ_m ($m = 0, 1, 2$) unabhängige Zustandsänderungen beschreiben. Sämtliche kinematischen Raten $\dot{E}_{\alpha\beta}$ etc. müssen also durch die Raten des Variablensatzes \mathcal{K}^* dargestellt werden.

* und gegebenenfalls einige weitere kinematische Zusatzgrößen

Differentiation von (9.48) und (9.49)₂, wobei insbesondere

$$\dot{\bar{E}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \dot{\bar{A}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{\bar{a}}_{1\alpha} \cdot \bar{d}_{1\beta} + \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{a}}_{1\beta})$$

und (9.52) - (9.56) zu beachten sind, und Einsetzen in (10.62) ergibt nach Umordnung^x

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \tilde{\Phi}_0 &= \dot{a}_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \eta_{\beta}^s \eta_{\alpha}^s \right] \\ &+ \dot{\lambda}_{\gamma\delta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\gamma\delta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\delta\gamma}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\gamma\delta}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\delta\gamma}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\gamma\delta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\delta\gamma}} \right) \eta_{\beta}^s \right] \\ &+ \dot{d}_s \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{s3}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \eta_{\beta}^s \mu_{\alpha} \right] \\ &+ \dot{\nu}_s \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{s3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{2s\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta 2s}} \right) \mu_{\beta} \right] \\ &+ \dot{\nu} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \right] \\ &- \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \eta_{\alpha}^s \eta_{\beta}^s}_{\text{symmetrisch in } s, \delta} \underbrace{\langle \bar{\tau}_{1\delta} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1s} \rangle}_{\text{schief-symmetrisch}} \right\} \\ &+ \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right)}_{\text{symmetrisch in } \alpha, \beta} \underbrace{(\eta_{\alpha}^s \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^s \mu_{\alpha}) (\bar{\tau}_{1s} \cdot \dot{\bar{a}})}_{\text{schief-symmetrisch in } \alpha, \beta} \right\} \\ &+ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_0} \dot{\lambda}_0 + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_1} \dot{\lambda}_1 + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2. \end{aligned} \tag{10.63}$$

^x Hier muß explizit berücksichtigt werden, daß \dot{a}_{rs} symmetrisch ist und daher nur drei unabhängig einstellbare Komponenten hat.

Die beiden Ausdrücke in den geschweiften Klammern verschwinden identisch, so daß nur die Raten $\dot{a}_{\alpha\beta}$ etc. des minimalen Variablensatzes \mathcal{K} auf der rechten Seite von (10.63) auftreten.

Einsetzen von (10.63) und (10.51) in die 2D-Entropiegleichung (10.46)^I und Ordnen nach den Raten der unabhängigen kinematischen Variablen $a_{\alpha\beta}$ etc. und der thermischen Variablen λ etc. ergibt eine ähnliche mathematische Struktur wie die der Ungleichung (10.52). Dies soll hier im einzelnen nicht aufgeführt werden. Die Auswertung entsprechend der Coleman-Noll-Schlußweise liefert dann die folgenden hinreichenden und notwendigen Bedingungen

$$\tilde{\mathcal{M}}_0^{\alpha\beta} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_0}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{M}}_1^{\alpha\beta}}{\partial \lambda_1} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{M}}_2^{\alpha\beta}}{\partial \lambda_2} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_2} \quad (10.64)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_0^{(\alpha\beta)} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_0} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) + \tilde{\mathcal{D}}^{(\gamma\delta)} \eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta \\ \tilde{\mathcal{M}}_1^{(\alpha\beta)} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right) - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \theta_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \theta_{\beta\alpha}} \right) \\ &\quad - \tilde{\mathcal{D}}^{(\gamma\delta)} \eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta \\ \tilde{\mathcal{M}}_0^{(3\alpha)} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_0} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{0\alpha 3}} + \tilde{\mathcal{D}}^{(\gamma\delta)} \eta_\gamma^\alpha \mu_\delta \\ \tilde{\mathcal{M}}_1^{(3\alpha)} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_1} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{1\alpha 3}} - \tilde{\mathcal{D}}^{(5\omega)} \mu_\omega \\ \tilde{\mathcal{M}}_0^{33} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \lambda_0} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{33}} + \tilde{\mathcal{D}}^{(\gamma\delta)} \mu_\gamma \mu_\delta, \end{aligned} \right\} (10.65)$$

wobei die Abkürzung

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(\alpha\beta)}_1 = \tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_1 + \frac{\mathcal{S}_{OR}}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \quad (10.66)$$

eingeführt wurde. Mit diesen Resultaten vereinfacht sich (10.46)^I auf die reduzierte 2D-Entropieungleichung (10.56), wie sie schon oben abgeleitet wurde.

Aus den oben genannten Gründen (vergl. S. 125) sind auch (10.64) und (10.65) identisch zu erfüllen, ebenso wie die Symmetriebedingungen für die Ausdrücke $\tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_0$, $\tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_1$ etc. Die rechte Seite von (10.65)₁ genügt der Symmetrieforderung

$$\tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_0 - \tilde{\mathcal{M}}^{(\beta\alpha)}_0 \equiv 0,$$

denn sie ist in α und β symmetrisch. Die rechte Seite von (10.65)₂ ist aber nicht symmetrisch in α und β . Aus der Bedingung

$$\tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_1 - \tilde{\mathcal{M}}^{(\beta\alpha)}_1 \equiv 0 \quad (10.67)$$

ergibt sich deshalb

$$\frac{\mathcal{S}_{OR}}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \sigma_{\beta\alpha}} \right) = \tilde{\mathcal{D}}^{(\beta\alpha)}_1 \eta_\beta^\alpha - \tilde{\mathcal{D}}^{(\alpha\beta)}_1 \eta_\alpha^\beta, \quad (10.68)$$

Dies stellt jetzt eine konstitutive Restriktion für $\tilde{\Phi}_0$ und $\tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_1$ dar. Mit dieser Restriktion wird aus (10.65)₂

$$\tilde{\mathcal{M}}^{(\alpha\beta)}_1 = -\frac{\mathcal{S}_{OR}}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) - \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathcal{D}}^{(\beta\alpha)}_1 \eta_\beta^\alpha + \tilde{\mathcal{D}}^{(\alpha\beta)}_1 \eta_\alpha^\beta \right); \quad (10.69)$$

die Symmetriebedingung (10.67) wird jetzt durch die rechte Seite von (10.69) identisch erfüllt, und die Restriktion (10.65)₂ ist damit durch (10.69) zu ersetzen. Man beachte, daß jetzt die konstitutiven Einschränkungen (10.65)₁, (10.65)₃₋₅ und (10.69) keine Ableitung nach der schiefsymmetrischen kinematischen Variable $\sigma_{\alpha\beta}$ enthalten; diese tritt nur noch in der Nebenbedingung (10.68) auf.

Abschließend sei noch auf einen wichtigen Spezialfall hingewiesen. Die Forderung der Forminvarianz der zweidimensionalen Stofffunktionen gegenüber Beobachtertransformationen führte dazu, daß als kinematische Zustandsvariable nur der minimale Variablensatz \mathcal{K} und seine Äquivalente, aber auch der nicht-minimale Variablensatz \mathcal{K} bzw. sein Äquivalent \mathcal{K}' zugelassen sind. Fordert man darüber hinaus aber auch die Forminvarianz der entsprechenden dreidimensionalen Stofffunktionen, beispielsweise die der Massieusche Funktion, wie dies für das dreidimensionale Ersatzproblem ja der Fall zu sein hat, dann wird der Verformungsabhängigkeit der dreidimensionalen Stofffunktionen allein durch Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors E_{KL} dargestellt, z.B.

$$\phi = \overset{W}{\phi}(E_{KL}, \Lambda).$$

Das hat dann aber zur Folge, daß die zugehörigen zweidimensionalen Stofffunktionen nicht mehr von dem schiefsymmetrischen Flächentensor $\Theta_{\alpha\beta}$ abhängen dürfen, d.h., anstelle des kinematischen Variablensatzes \mathcal{K}' tritt der Satz

$$\mathcal{K}'' = \left\{ \overset{W}{E}_{0\alpha\beta}, \overset{W}{E}_{1\alpha\beta}, \overset{W}{E}_{2\alpha\beta}, \overset{W}{E}_{0\alpha 3}, \overset{W}{E}_{1\alpha 3}, \overset{W}{E}_{2\alpha 3}, \overset{W}{E}_{33} \right\}. \quad (10.70)$$

Beispielsweise gilt dann

$$\phi_0 = \overset{W}{\phi}_0(\mathcal{K}'', \overset{W}{\Lambda}_0, \overset{W}{\Lambda}_1, \overset{W}{\Lambda}_2)$$

$$\overset{W}{\Sigma}_m = \overset{W}{\Sigma}_m(\mathcal{K}'', \overset{W}{\Lambda}_0, \overset{W}{\Lambda}_1, \overset{W}{\Lambda}_2) \quad m = 0, 1, 2 \quad (10.71)$$

$$\overset{W}{M}_m^{(\alpha\beta)} = \overset{W}{M}_m^{(\alpha\beta)}(\mathcal{K}'', \overset{W}{\Lambda}_0, \overset{W}{\Lambda}_1, \overset{W}{\Lambda}_2) \quad m = 0, 1, 2, 3, 4$$

etc.

mit den konstitutiven Einschränkungen

$$\frac{\overset{S}{S}_m^{\mathcal{R}}}{\overset{S}{S}_m} \overset{W}{\Sigma}_m = - \frac{\partial \overset{W}{\phi}}{\partial \overset{W}{\Lambda}_m}, \quad m = 0, 1, 2 \quad (10.72)$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{\alpha\beta}^W &= -\frac{S}{OR} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) + \mathcal{D}^{(S\beta)} \eta_s^\alpha \eta_s^\beta \\
 \eta_{\alpha\beta}^W &= -\frac{S}{OR} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\mathcal{D}^{(S\alpha)} \eta_s^\beta + \mathcal{D}^{(S\beta)} \eta_s^\alpha \right)
 \end{aligned}
 \tag{10.72}$$

etc.

Die Nebenbedingung (10.68) vereinfacht sich zu

$$\mathcal{D}^{(S\alpha)} \eta_s^\beta - \mathcal{D}^{(S\beta)} \eta_s^\alpha = 0
 \tag{10.73}$$

aus der aber nicht das identische Verschwinden von $\mathcal{D}^{(S\alpha)}$ notwendig folgt.

Mit diesen Ergebnissen ist die Auswertung der 2D-Entropieungleichung und der Entropie-Forderung zunächst abgeschlossen. Eine Diskussion schließt sich im folgenden Kapitel an.

10.5 Konsequenzen der konstitutiven Restriktionen beim
2. schalentheoretischen Konzept

Aus (10.54) ist zunächst ersichtlich, daß bei Vorgabe der zweidimensionalen Massieschen Funktion ϕ alle energetischen Stofffunktionen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ("innere Energien") festgelegt sind. Sieht man dagegen $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ und ε_2 als wählbar an, dann zeigen die Bedingungen (10.54), die dann ein lineares partielles Differentialgleichungssystem für ϕ darstellen, daß die Funktionen ε_m ($m=0,1,2$) den Integrabilitätsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \lambda_1} - \frac{\rho_{0R}}{\rho_{1R}} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \lambda_0} &= 0 \\ \frac{\rho_{0R}}{\rho_{1R}} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \lambda_2} - \frac{\rho_{0R}}{\rho_{2R}} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ \frac{\rho_{0R}}{\rho_{2R}} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \lambda_0} - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \lambda_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.74)$$

genügen müssen. Die Stofffunktionen ε_m ($m=0,1,2$) müssen also zwangsläufig miteinander kompatibel sein; damit stellen die Integrabilitätsbedingungen (10.74) Prüfbedingungen für die ε_m ($m=0,1,2$) dar, wenn die ε_m ad hoc vorgegeben oder approximativ bestimmt werden.

Die konstitutiven Restriktionen (10.55), (10.57) und (10.58) für die zusammenfassenden Größen $\pi_0^{(\alpha\beta)}$ etc. haben einen analogen Aufbau wie die entsprechenden Restriktionen (9.103), (9.106) und (9.107) für die Momente $M_0^{\alpha\beta}$ etc., bzw. für die Größen $\lambda_0 M_0^{\alpha\beta}$, $\lambda_1 M_1^{\alpha\beta}$ etc.

Die Restriktionen (10.55)₁, (10.55)₃₋₅ und (10.58) müssen noch explizit in den Momenten $M_0^{(\alpha\beta)}$, $M_1^{(\alpha\beta)}$ etc. dargestellt werden. Diese etwas langwierige algebraische Umformung braucht hier nicht im einzelnen nachvollzogen zu werden. Als Ergebnis erhält man:

$$\begin{aligned}
 \check{M}_0^{(\alpha\beta)} = & -\frac{g_{02}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\rho}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial a_{\rho\alpha}} \right) + g_{02} \frac{\Lambda}{(\Lambda)_0^2} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\rho}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\rho\alpha}} \right) \\
 & + \check{M}_2^{(g\mu)} \left[\eta_s^\beta \eta_\mu^\alpha + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \eta_s^\beta + \delta_\mu^\beta \eta_s^\alpha \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^2 \frac{1}{2} \delta_s^\alpha \delta_\mu^\beta \right] \\
 & + \check{M}_3^{(g\mu)} \left[\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \eta_s^\beta \eta_\mu^\alpha + \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \eta_s^\beta + \delta_\mu^\beta \eta_s^\alpha \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \delta_s^\alpha \delta_\mu^\beta \right] \\
 & + \check{M}_4^{(g\mu)} \left[\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \eta_s^\beta \eta_\mu^\alpha + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \eta_s^\beta + \delta_\mu^\beta \eta_s^\alpha \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \check{M}_1^{(\alpha\beta)} = & -\frac{g_{02}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\rho}} + \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\rho\alpha}} \right) \\
 & - \check{M}_2^{(g\mu)} \left[\frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \eta_s^\beta + \delta_\mu^\beta \eta_s^\alpha \right) + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \delta_s^\alpha \delta_\mu^\beta \right] \\
 & - \check{M}_3^{(g\mu)} \left[\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \eta_s^\beta + \delta_\mu^\beta \eta_s^\alpha \right) + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \delta_s^\alpha \delta_\mu^\beta \right] \\
 & - \check{M}_4^{(g\mu)} \left[\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \eta_s^\beta + \delta_\mu^\beta \eta_s^\alpha \right) \right]
 \end{aligned} \tag{10.75}$$

$$\begin{aligned}
 \check{M}_0^{(3\alpha)} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial d\alpha} + g_{02} \frac{\Lambda}{(\Lambda_0)^2} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\alpha} \\
 &+ \check{M}_2^{(3,\mu)} \left[\eta_s^\alpha \mu_\mu + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \rho_\mu^\alpha \mu_s \right] \\
 &+ \check{M}_3^{(3,\mu)} \left[\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \eta_s^\alpha \mu_\mu + \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)^2 \rho_\mu^\alpha \mu_s \right] \\
 &+ \check{M}_4^{(3,\mu)} \left[\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \eta_s^\alpha \mu_\mu + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} \rho_\mu^\alpha \mu_s \right] \\
 &+ \check{M}_2^{(3\alpha)} \left[\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)^2 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} \right] \\
 &+ \check{M}_3^{(3\alpha)} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0}
 \end{aligned}
 \tag{10.75}$$

$$\begin{aligned}
 \check{M}_7^{(3\alpha)} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda_0} \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v_\alpha} - \check{M}_2^{(3\alpha)} \mu_s - \check{M}_3^{(3\alpha)} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \mu_s \\
 &- \check{M}_4^{(3\alpha)} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} \mu_s - \check{M}_2^{(3\alpha)} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} - \check{M}_3^{(3\alpha)} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \check{M}_0^{33} &= -\frac{g_{02}}{\Lambda} 2 \frac{\partial \check{\Phi}_0}{\partial v} + \check{M}_2^{(4\beta)} \mu_\alpha \mu_\beta + \check{M}_3^{(4\beta)} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \mu_\alpha \mu_\beta \\
 &+ \check{M}_4^{(4\beta)} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} \mu_\alpha \mu_\beta - \check{M}_1^{33} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} - \check{M}_2^{33} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0}
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis (10.75) zeigt, daß die Stofffunktionen für den symmetrischen Anteil der Momente links der Strich-Punktlinie des unten angegebenen Schemas

$$\begin{array}{ccccc}
 M_0^{(\alpha\beta)} & M_1^{(\alpha\beta)} & M_2^{(\alpha\beta)} & M_3^{(\alpha\beta)} & M_4^{(\alpha\beta)} \\
 M_0^{(3\alpha)} & M_1^{(3\alpha)} & M_2^{(3\alpha)} & M_3^{(3\alpha)} & \\
 M_0^{33} & M_1^{33} & M_2^{33} & &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} M_0^{(\alpha\beta)} & M_1^{(\alpha\beta)} & M_2^{(\alpha\beta)} & M_3^{(\alpha\beta)} & M_4^{(\alpha\beta)} \\ M_0^{(3\alpha)} & M_1^{(3\alpha)} & M_2^{(3\alpha)} & M_3^{(3\alpha)} & \\ M_0^{33} & M_1^{33} & M_2^{33} & & \end{array}} \right\} (10.76)$$

durch die 2D-Massieusche Funktion ϕ_0 und die höheren Momente, d.s. die Funktionen rechts der (---)-Linie, vollständig festgelegt sind. Wegen (10.38) verschwinden die folgenden schiefsymmetrischen Anteile

$$\begin{aligned}
 M_0^{<\alpha\beta>} = 0, & \quad M_1^{<\alpha\beta>} = 0, & \quad M_2^{<\alpha\beta>} = 0 \\
 M_0^{<3\alpha>} = 0, & \quad M_1^{<3\alpha>} = 0; &
 \end{aligned}$$

alle anderen schiefsymmetrischen Anteile der höheren Momente sind dagegen unbestimmt, aber nach dem oben Gesagten (S. 115) für die Theorie auch nicht von Bedeutung.

Wesentlich ist, daß die 2D-Entropiegleichung keine Einschränkung für die Stofffunktionen der symmetrischen Anteile der höheren Momente liefert^x. Dies ist ein Ergebnis, das nach der Diskussion der quasi-

^x Allerdings besteht zwischen den höheren Momenten und der Massieuschen Funktion die identisch zu erfüllende Bedingung (10.57).

isothermen Theorie (Kap. 9.3.2) auch nicht unerwartet ist. Im quasi-isothermen Fall war nur das höhere Moment 2. Ordnung erhalten worden, für das die Entropieungleichung keine konstitutive Einschränkung geliefert hatte. Es konnte aber gezeigt werden, daß die Stofffunktionen $\overset{v}{M}^{\alpha\beta}$ beliebig gewählt werden dürfen (M_2 -Theorem), da sie sich aus den Bilanzgleichungen eliminieren lassen. Es stellt sich deshalb hier jetzt die Frage, ob eine analoge Situation bei dem komplexeren Fall mit Temperaturänderungen über die Schalendicke besteht. Mit anderen Worten:

Sind die Stofffunktionen für die symmetrischen Anteil der höheren Momente^x der Spannungen beliebig vorgebar, so daß die Lösungen $\bar{\tau}$, \bar{d} und \bigwedge_m ($m=0,1,2$) unabhängig von ihrer Wahl sind?

Wenn dies der Fall ist, dann müssen - unter Beachtung der konstitutiven Restriktionen (10.75) und (10.57) - alle höheren Momente der Spannungen aus allen Bilanzgleichungen herausfallen. Es genügt daher, dies für eine der Bilanzgleichungen genauer zu analysieren.

Betrachtet wird die Bewegungsgleichung 1. Art.

$$\begin{aligned} \rho_0 \bar{\tau} + \rho_0 \bar{d} - \rho_0 \bar{b} - \bar{y}_0 \\ - (M_0^{\alpha\pi} \bar{\tau}_{|\alpha} + M_1^{\alpha\bar{\pi}} \bar{d}_{|\alpha} + M_0^{\beta\bar{\pi}} \bar{d})_{;\bar{\pi}} = \bar{o} \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung

$$\bar{d}_{|\alpha} = \eta_{\alpha} \bar{\tau}_{|\alpha} + \mu_{\alpha} \bar{d}$$

und wegen der Symmetrie

$$M_0^{\alpha\pi} = M_0^{(\alpha\pi)}, \quad M_1^{\alpha\bar{\pi}} = M_1^{(\alpha\bar{\pi})}, \quad M_0^{\beta\bar{\pi}} = M_0^{(\beta\bar{\pi})}$$

^x D.s. die Größen rechts der strichpunktiierten Linie im Schema (10.76)

wird aus dem Divergenzterm

$$M_0^{\alpha\pi} \bar{\pi}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\pi} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{3\pi} \bar{d} = \left(M_0^{(\alpha\pi)} + M_1^{(3\pi)} \eta_3^\alpha \right) \bar{\pi}_{1\alpha} + \left(M_1^{(3\pi)} \eta_3 + M_0^{(3\pi)} \right) \bar{d}.$$

Für die Klammerterme wird mit (10.75) und auch (10.57) nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} & \left(M_0^{(\alpha\pi)} + M_1^{(3\pi)} \eta_3^\alpha \right) = \\ &= - \frac{g_2}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\alpha\pi}} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{\bar{\pi}\alpha}} \right) - \frac{g_2}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_{\gamma\alpha}} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_{\bar{\alpha}\gamma}} \right) \eta_3^\alpha \\ & \quad + \frac{g_2}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_{\gamma\alpha}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_{\bar{\alpha}\gamma}} \right) \eta_3^\alpha \\ & \quad + \frac{\Lambda}{\Lambda} M_1^{(3\pi)} \left(\delta_3^\alpha \eta_3^\pi + \frac{\Lambda}{\Lambda} \delta_3^\alpha \delta_3^\pi - \delta_3^\pi \eta_3^\alpha \right) \\ & \quad + \frac{\Lambda}{\Lambda} M_3^{(3\pi)} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda} \delta_3^\alpha \eta_3^\pi + \frac{\Lambda}{\Lambda} \delta_3^\alpha \delta_3^\pi - \frac{\Lambda}{\Lambda} \eta_3^\alpha \delta_3^\pi \right) \\ & \quad + \frac{\Lambda}{\Lambda} M_4^{(3\pi)} \frac{\Lambda}{\Lambda} \delta_3^\alpha \eta_3^\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (M_0^{(s\pi)})_{\mu_3} + M_0^{(s\pi)} = \\
 = & - \frac{g_{02}}{\Delta} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda_{s\pi}} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda_{\pi s}} \right) \mu_3 - \frac{g_{02}}{\Delta} \frac{\partial \phi_0}{\partial d_{\pi}} + \frac{g_{02}}{\Delta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda_{s\pi}} - \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda_{\pi s}} \right) \mu_3 \\
 & + g_{02} \frac{1}{(\Delta)^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda_{\pi}^2} \\
 & - M_3^{(s\pi)} \mu_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^2 \right) \\
 & + M_4^{(s\pi)} \mu_3 \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \\
 & - M_2^{(s\pi)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^2 \right) \\
 & + M_3^{(s\pi)} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\lambda_2}{\lambda_0} .
 \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß die höheren Momente für den Fall ungleichförmiger Temperatur über die Schalendicke ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$) sich nicht identisch herausheben. Man bestätigt dies auch für die anderen Bilanzgleichungen. Damit besteht folgender beachtenswerter Unterschied zur quasi-isothermen Theorie:

Ein Theorem analog dem M_2 -Theorem der quasi-isothermen Theorie, besteht nicht bei ungleichförmiger Temperaturverteilung über der Schalendicke. D.h. für eine Berechnung des Verformungs- und Temperaturfeldes in der Schale ist eine explizite Angabe der Stofffunktionen für den symmetrischen Anteil der höheren Momente erforderlich und die Lösungen $\bar{\pi}$, \bar{d} , Λ_m ($m=0,1,2$) sind u.a. von diesen Stofffunktionen abhängig.

Diese Situation scheint eine neue Willkürlichkeit in das 2. schalentheoretische Konzept hineinzubringen, die nahelegt, nach weiteren Kriterien zu suchen, um diese Willkür aufzuheben. Man könnte dabei an Einfachheits- oder Bequemlichkeitskriterien denken. Naheliegender ist beispielsweise die Annahme, alle höheren Momente (bis auf $\frac{1}{2} \mu^A$) zu Null zu setzen. Diese Annahme ist verträglich mit den konstitutiven Restriktionen (10.55) bis (10.58) und wird durch die Tatsache nahegelegt, daß die höheren Momente (ausgenommen $\frac{1}{2} \mu^A$) in den Bewegungsgleichungen nicht auftreten und daher nur in den Differentialgleichungen (10.35) für die thermischen Zustandsgrößen A ($A_i = 0, 1, 2$) von Einfluß sind. Diese Annahme läßt sich u.U. auch quantitativ rechtfertigen, wenn alle zweidimensionalen Stoffgleichungen bekannt wären.

Nun kann allerdings eine derartige ad hoc-Wahl vermieden werden indem man sich daran erinnert, daß die zweidimensionalen Schalengleichungen ja einem dreidimensionalen Ersatzproblem zugeordnet sein sollen.

Das aktuelle dreidimensionale Problem ohne gedachte Zusatzwirkungen und damit ohne Einschränkungen für die Verteilungen der Verschiebungen und der Temperaturinversen ist durch die üblichen lokalen Bilanzgleichungen aber voraussetzungsgemäß durch eine integrale Entropiegleichung charakterisiert. Es war nun gezeigt worden (Anhang 6 und $\overline{91}$), daß die Restriktionen für die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen, die aus der integralen Entropiegleichung folgen, dieselben sind^x, wie bei Annahme der Gültigkeit einer lokalen Entropiegleichung (A6.11). Bei dieser Beweisführung war aber explizit davon ausgegangen worden, daß die Verteilung des Geschwindigkeitsfeldes und der Raten der Temperaturinversen beliebig einstellbar sind. Dies ist begründet in der freien Manipulierbarkeit der Volumenkräfte, Wärmequellen und Randbedingungen.

^x Für die reinen Wärmeleitungsaspekte trifft dies nicht zu.

in der freien Manipulierbarkeit der Volumenkräfte, Wärmequellen und Randbedingungen.

Es ist damit offensichtlich, daß diese letzte Aussage bezüglich der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen nicht auf das dreidimensionale Ersatzproblem übertragbar ist, denn dort sind die Verteilungen der Verschiebungen und der Temperaturinversen nicht beliebig; die Gesamtheit der Volumenkräfte, Wärmequellen und mechanischen und thermischen Randbelastungen bestehend aus aktuellen und zusätzlich gedachten Einwirkungen ist eben nicht frei manipulierbar, sondern eingeschränkt derart, daß sich die angenommenen Verteilungen auch einstellen. Beim dreidimensionalen Ersatzproblem, für das eine integrale Entropieungleichung und nichtkonstitutive innere Zwangsbedingungen bestehen, führt die Coleman-Noll-Schlußweise also nicht zwingend auf die klassischen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen (A6.11). Die konstitutiven Restriktionen in Kap. 10.4., die aufgrund der "Offenheit" der höheren Momente für die Spannungen ein großes Spektrum von zweidimensionalen Stofffunktionen prinzipiell zulassen, demonstrieren das.

Um diese Willkürlichkeit der höheren Momente zu beseitigen, sind weitere Einschränkungen notwendig. Die folgende Argumentation liefert hier den Ansatzpunkt. Das ursprüngliche, aktuelle, dreidimensionale Problem ist durch bestimmte Rahmenvorgaben für das thermoelastische Materialverhalten charakterisiert. Die Stofffunktionen unterliegen dabei der Forderung der Beobachterinvarianz; sie sind weiter durch eine integrale Entropieungleichung eingeschränkt und die äußeren aktuellen Einwirkungen sind keinerlei Bedingungen unterworfen, so daß beliebige thermomechanische Prozesse möglich sind. Das dreidimensionale Ersatzproblem unterscheidet sich voraussetzungsgemäß vom ursprünglichen Problem nur durch gewisse Einschränkungen bezüglich der äußeren Einwirkungen, nicht aber in der integralen Entropieungleichung oder in den Invarianzeigenschaften der Stofffunktionen für die dreidimensionalen Feldgrößen. Fordert man jetzt über die Voraussetzungen des 3D-Ersatzproblems hinaus, daß die integrale Entropieungleichung nicht nur für die eingeschränkten äußeren Einwirkungen, sondern auch für alle nur denkbaren Einwirkungen und damit für alle thermomechanischen Prozesse erfüllt wird, dann erhält man natürlich gerade die konstitutiven Einschränkungen des ursprünglichen Problems, d.s. (A6.11):

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{T}^{KL} &= - \frac{g_{Rr}}{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial E_{LK}} \right) \\
 \varepsilon &= - \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \\
 \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \overline{q}_R \cdot \overline{\nabla}_R \Lambda \, d\theta &\geq 0.
 \end{aligned} \right\} (10.77)$$

Hier ist die Massieu'sche Funktion ϕ als lokale Größe des dreidimensionalen Problems nur abhängig von den Lagrangeschen Verzerrungen E_{KL} und der Temperaturinversen Λ , d.h.

$$\phi = \overset{W}{\phi}(E_{KL}, \Lambda),$$

Mit der freien Energie (Helmholtzfunktion) ψ ist

$$\left. \begin{aligned}
 \phi &= - \Lambda \psi \\
 \psi &= \overset{W}{\psi}(E_{KL}, \Lambda)
 \end{aligned} \right\} (10.78)$$

Man beachte, daß $\overset{W}{\phi}$ und $\overset{W}{\psi}$ Funktionen^x aller neun Lagrangeschen Verzerrungen E_{KL} sind. Dann wird bekanntlich aus (10.77)₁

$$\overline{T}^{KL} = g_{Rr} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \psi}{\partial E_{LK}} \right).$$

^x Der Index (\cdot) ^W wird der Einfachheit wegen im folgenden fortgelassen.

Integration über die Schalendicke liefert

$$\begin{aligned}
 M_m^{(\alpha\beta)} &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\beta}(\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2,3,4 \\
 &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) (\theta)^m d\theta.
 \end{aligned}
 \tag{10.79}$$

Nach (9.47) ist

$$E_{\alpha\beta} = E_0^{\alpha\beta} + \theta E_1^{\alpha\beta} + (\theta)^2 E_2^{\alpha\beta}$$

quadratisch in der Dickenkoordinate θ und symmetrisch in α und β .

Dann gilt

$$\frac{\partial E_{lm}}{\partial E_{\alpha\beta}} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu (\theta)^l, \quad l=0,1,2.
 \tag{10.80}$$

Es seien jetzt Momente der freien Energie eingeführt

$$S_R \psi_k := \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \psi(\theta)^k d\theta, \quad k=0,1,2.
 \tag{10.81}$$

Mit (10.78) ist ψ_k als Funktion des kinematischen Variablensatzes \mathcal{K}'' (10.70) und der thermischen Variablen Λ_m ($m=0,1,2$) aufzufassen:

$$\psi_k = \psi_k \left(E_0^{\alpha\beta}, E_1^{\alpha\beta}, E_2^{\alpha\beta}, E_0^{\alpha 3}, E_1^{\alpha 3}, E_3^3, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \right).
 \tag{10.82}$$

Man beachte, daß dabei von der Symmetrie

$$E_{\alpha 3} = E_{3\alpha} = E_0^{\alpha 3} + \theta E_1^{\alpha 3}$$

Gebrauch gemacht wird. Differentiation von Ψ_k nach den kinematischen Variablen $E_{\alpha\beta}$ und Berücksichtigung von (10.79) liefert dann

$$S_R \frac{\partial \Psi_k}{\partial E_{\alpha\beta}} = \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \frac{\partial \Psi}{\partial E_{\alpha\beta}} (\theta)^{k+l} d\theta, \quad k, l = 0, 1, 2 \quad (10.83)$$

Mit $m = k+l = 0, 1, 2, 3, 4$ läßt sich daher (10.79) darstellen als

$$M_{k+l}^{(\alpha\beta)} = S_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Psi_l}{\partial E_{\beta\alpha}} \right), \quad k, l = 0, 1, 2, \quad (10.84)$$

Ganz entsprechend wird

$$M_m^{(3\alpha)} = \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{3\alpha} (\theta)^m d\theta, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (10.85)$$

$$= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E_{3\alpha}} + \frac{\partial \Psi}{\partial E_{\alpha 3}} \right) (\theta)^m d\theta.$$

Ferner ist mit (9.47)

$$E_{\alpha 3} = E_0 \alpha 3 + \theta E_7 \alpha 3 = E_{3\alpha}$$

eine lineare Funktion in θ , so daß

$$\frac{\partial E_{33}}{\partial E_{\alpha 3}} = \rho_{\alpha 3}^3 (\theta)^l = \frac{\partial E_{33}}{\partial E_{\alpha 3}}, \quad l = 0, 1. \quad (10.86)$$

Differentiation von (10.82) unter Beachtung der Definition (10.81)

ergibt

$$S_R \frac{\partial \Psi_k}{\partial E_{\alpha 3}} = \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E_{33}} \frac{\partial E_{33}}{\partial E_{\alpha 3}} + \frac{\partial \Psi}{\partial E_{3\beta}} \frac{\partial E_{3\beta}}{\partial E_{\alpha 3}} \right) (\theta)^k d\theta$$

$$= \dots \quad (10.87)$$

$$= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \left(\frac{\partial \psi}{\partial E_{\alpha 3}} + \frac{\partial \psi}{\partial E_{3\alpha}} \right) (\theta)^{k+l} d\theta, \quad (10.87)$$

so daß dann

$$M_{k+l}^{(\alpha\beta)} = g_{kR} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_k}{\partial E_{\alpha 3}}. \quad (10.88)$$

Schließlich ist noch

$$M_k^{33} = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{33} (\theta)^k d\theta = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \frac{\partial \psi}{\partial E_{33}} (\theta)^k d\theta. \quad (10.89)$$

Mit (9.47) ist aber

$$E_{33} = E_{\circ 33}$$

unabhängig von der Dickenkoordinate θ , und daher wird

$$\begin{aligned} g_{kR} \frac{\partial \psi_k}{\partial E_{\circ 33}} &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \frac{\partial \psi}{\partial E_{33}} \frac{\partial E_{33}}{\partial E_{\circ 33}} (\theta)^k d\theta \\ &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \frac{\partial \psi}{\partial E_{33}} (\theta)^k d\theta. \end{aligned} \quad (10.90)$$

Also ist

$$M_k^{33} = g_{kR} \frac{\partial \psi_k}{\partial E_{\circ 33}}, \quad k=0,1,2. \quad (10.91)$$

Die Ergebnisse (10.84), (10.88) und (10.91) sind im folgenden im einzelnen dargestellt, um die möglichen alternativen Formulierungen noch herauszuheben. Aus (10.84) wird im Detail:

$$M_0^{(\alpha\beta)} = g_{\circ R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{\circ \alpha A}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{\circ \beta \alpha}} \right) \quad (10.84)^I$$

$$M_1^{(\alpha\beta)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right) = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right)$$

$$M_2^{(\alpha\beta)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right)$$

$$= \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right)$$

(10.84)^I

$$M_3^{(\alpha\beta)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right)$$

$$M_4^{(\alpha\beta)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right)$$

Weiter liefert (10.88) und (10.91)

$$M_0^{(3\alpha)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\alpha 3}}$$

$$M_1^{(3\alpha)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{1\alpha 3}} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{0\alpha 3}}$$

(10.88)^I

$$M_2^{(3\alpha)} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{1\alpha 3}} = \frac{g_R}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{0\alpha 3}}$$

$$M_3^{(3a)} = \rho_{2R} \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{1\alpha 3}} \quad \left. \vphantom{M_3^{(3a)}} \right\} (10.88)^I$$

$$M_0^{33} = \rho_{0R} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{033}}$$

$$M_1^{33} = \rho_{1R} \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{033}}$$

$$M_2^{33} = \rho_{2R} \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{033}} \quad \left. \vphantom{M_2^{33}} \right\} (10.91)^I$$

(10.84)^I und (10.88)^I entnimmt man jetzt, daß alle drei Momente der freien Energie erforderlich sind, um alle Momente der Spannungen konstitutiv festzulegen. Bemerkenswert ist, daß insbesondere die höheren Momente (mit Ausnahme von $M_2^{(4A)}$) nicht durch den Mittelwert von ψ d.i. ψ_0 , als Potential darstellbar sind. Eine komplexere Abhängigkeit der höheren Momente (ohne $M_2^{(4A)}$) läßt sich aber aus (10.84)^I ablesen. Bildet man beispielsweise die Ableitungen von $M_3^{(4A)}$ nach $E_{0\alpha\beta}$, dann findet man mit (10.84)^I₃ u. 4

$$\frac{\partial M_0^{(4A)}}{\partial E_{0\beta\gamma}} + \frac{\partial M_3^{(4A)}}{\partial E_{0\beta\gamma}} = \frac{\partial M_2^{(4A)}}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial M_2^{(3B)}}{\partial E_{1\alpha\beta}} ;$$

die rechte Seite läßt sich allein durch ψ_0 darstellen, so daß man hieraus über eine Integration $M_3^{(4A)}$ durch ψ_0 - und noch freie Funktionen - ermitteln könnte. Dieser Gesichtspunkt soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

Der Zusammenhang zwischen ϕ_0 und den Momenten ψ_R ergibt sich einfach aus (10.78) zu

$$S_{0R} \phi_0 = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{0R} \phi \, d\theta = - \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{0R} \Lambda \Psi \, d\theta$$

und mit (10.1) wird daraus

$$S_{0R} \phi_0 = - \left(S_{0R} \psi_0 \Lambda_0 + S_{1R} \psi_1 \Lambda_1 + S_{2R} \psi_2 \Lambda_2 \right), \quad (10.92)$$

wobei die ψ_k ($k=0,1,2$) nach (10.82) natürlich auch noch Funktionen der Λ_k sind.

Die Integration von (10.77)₂ und (10.77)₃ über die Schalendicke liefert nun keine weiteren wesentlichen Ergebnisse, die nicht schon vorher auf direktem Wege gewonnen worden wären (vergl. (10.64) und die Rest-entropieungleichung (10.56)). Die Integration von (10.77)₂ ergibt formal zunächst

$$\left. \begin{aligned} S_{0R} \varepsilon_0 &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{0R} \varepsilon \, d\theta = - \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{0R} \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \, d\theta \\ S_{1R} \varepsilon_1 &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{1R} \varepsilon \theta \, d\theta = - \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{1R} \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \theta \, d\theta \\ S_{2R} \varepsilon_2 &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{2R} \varepsilon (\theta)^2 \, d\theta = - \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{2R} \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} (\theta)^2 \, d\theta. \end{aligned} \right\} (10.93)$$

Führt man Momente der Massieschen Funktion ein

$$S_{kR} \phi_k = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_{kR} \phi (\theta)^k \, d\theta, \quad k=0,1,2, \quad (10.94)$$

wobei ϕ_k dieselben Argumentenliste wie ψ_k (10.82) hat, dann wird mit (10.1) und (10.93)

$$\begin{aligned}
 \rho_{kr} \frac{\partial \phi_k}{\partial \Lambda_m} &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_{kr} \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \Lambda_m} (\theta)^k d\theta \\
 &= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_{kr} \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} (\theta)^{k+m} d\theta
 \end{aligned}
 \tag{10.95}$$

$$= -\rho_{k+m} \varepsilon_{k+m}, \quad m, k = 0, 1, 2.$$

Im einzelnen hat man also die folgenden Alternativdarstellungen

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{0r} \varepsilon_0 &= -\rho_{0r} \frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_0} \\
 \rho_{1r} \varepsilon_1 &= -\rho_{0r} \frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_1} = -\rho_{1r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \Lambda_0} \\
 \rho_{2r} \varepsilon_2 &= -\rho_{0r} \frac{\partial \phi_0}{\partial \Lambda_2} = -\rho_{1r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \Lambda_1} = -\rho_{2r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \Lambda_0}
 \end{aligned} \right\} \tag{10.93}^I$$

etc.; die höheren Momente der Massieuschen Funktion sind hier aber nicht von Interesse, so daß hiernach der Mittelwert $\bar{\phi}$ genügt, um die Momente ε_0 , ε_1 und ε_2 der inneren Energie festzulegen. Dieses Ergebnis war schon oben direkt abgeleitet worden (10.54).

Weiter bestätigt man nach formaler Integration von (10.77)₃, daß dieses Integrationsergebnis nichts anderes darstellt, als die Restentropiegleichung (10.56). Dieser Nachweis sei dem Leser überlassen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Ergebnisse (10.84)^I und (10.88)^I mit den in Kap. 10.5 gewonnenen Restriktionen (10.72) und (10.73) kompatibel sind. Dies ist folgendermaßen leicht einzusehen. Die Stoffgleichungen (10.84)^I, (10.88)^I und (10.91)^I beruhen auf der Gültigkeit der dreidimensionalen, lokalen Spannungs-Verzerrungsbeziehung (10.77)₁, die hier eine Konsequenz der integralen Entropieungleichung sind, wobei innere Zwangsbedingungen nicht vorausgesetzt wurden bzw. beliebige thermomechanische Prozesse unterstellt wurden.

Die Restriktionen (10.72) und (10.73) ergaben sich ebenfalls aus der integralen Entropieungleichung^x, aber unter Einschränkungen hinsichtlich der Beliebigkeit der thermomechanischen Prozesse. Daher müssen aus (10.77)₁ und damit aus (10.84)^I, (10.88)^I und (10.91)^I die Restriktionen (10.72) und (10.73) ableitbar sein; die Umkehrung gilt aber natürlich nicht.

Diese Aussage läßt sich auch durch direktes Einsetzen nachweisen.

Aus der Definitionsgleichung (10.66) wird mit (10.92)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^{(k\beta)} &= \mathcal{M}_2^{(k\beta)} + \rho_{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0^W}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi_0^W}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \\
 &= \int_0^1 \left[M_2^{(k\beta)} - \rho_{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \right] \\
 &\quad + \int_1^2 \left[M_3^{(k\beta)} - \rho_{1R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \right] \\
 &\quad + \int_2^4 \left[M_4^{(k\beta)} - \rho_{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_2}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{10.96}$$

^x U.z. die über die Schalendicke integrierte Form

Mit (10.84)^I erkennt man aber, daß $\overset{W}{\mathcal{D}}^{(\alpha\beta)}$ identisch verschwindet:

$$\overset{W}{\mathcal{D}}^{(\alpha\beta)} = 0 ; \quad (10.97)$$

damit ist auch (10.73) erfüllt. Mit (10.97) wird aus (10.72)₁

$$\overset{W}{M}_0^{(\alpha\beta)} = -g_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{W}{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{W}{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \quad (10.98)$$

und dies liefert mit (10.92) nach Umordnung

$$\begin{aligned} & \Lambda_0 \left[\overset{W}{M}_0^{(\alpha\beta)} - g_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{W}{\Phi}_0}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{W}{\Phi}_0}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \right] \\ & + \Lambda_1 \left[\overset{W}{M}_1^{(\alpha\beta)} - g_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{W}{\Phi}_1}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{W}{\Phi}_1}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \right] \quad (10.99) \\ & + \Lambda_2 \left[\overset{W}{M}_2^{(\alpha\beta)} - g_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{W}{\Phi}_2}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{W}{\Phi}_2}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Man bestätigt sofort, daß (10.84)^I diese Restriktion erfüllt. Die Nachweise, daß die übrigen Bedingungen in (10.72) durch (10.84)^I, (10.88)^I und (10.91)^I erfüllt werden, erfolgen in ähnlicher Weise.

10.6 Konsequenzen der Entropieungleichung und der entropischen Bilanzgleichungen beim 1. schalentheoretischen Konzept

10.6.1 Alternative Strategien

Zunächst sollen die wesentlichen Voraussetzungen und Ergebnisse des 1. schalentheoretischen Konzeptes (Teil I) in Erinnerung gerufen werden. Wie beim 2. schalentheoretischen Konzept war der Ausgangspunkt die integrale Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems und die Energie-Forderung hinsichtlich der gedachten Zusatzeinwirkungen sowie deren Forminvarianz gegenüber Beobachtertransformationen^x. Ergänzt wurde dies durch die Zusatzforderung, daß der auf die Referenzfläche bezogene Drehimpuls der gedachten zusätzlichen Einwirkungen in einem finiten Linienelement verschwindet (d.h. $\bar{D}_{red} = \bar{0}$). Diese Bedingungen führten auf folgende Gleichungen (Kap. E):

Bewegungsgleichungen 1. Art

$$\begin{aligned} \rho_{r_0} \bar{B}_0 + \bar{Y}_0 - \rho_{r_0} \bar{r}'' - \rho_{r_0} \bar{d}'' \\ + \left(M^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^\beta \bar{d} \right)_{;\beta} = \bar{0}; \end{aligned} \quad (10.100)$$

Bewegungsgleichungen 2. Art

$$\begin{aligned} \rho_{r_1} \bar{B}_1 + \bar{Y}_1 - \rho_{r_1} \bar{r}'' - \rho_{r_1} \bar{d}'' \\ + \left(M^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^\beta \bar{d} \right)_{;\beta} \\ - \left((Q^\beta + L^\beta) \bar{\tau}_{1\beta} + Q^\beta \bar{d}_{1\beta} + Q \bar{d} \right) = \bar{0} \end{aligned} \quad (10.101)$$

^x Invarianzbedingung (A2)

Reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{0R} \dot{\bar{\epsilon}} = & \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \right. \\ & + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} + Q_0^\beta (\bar{\tau}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) \\ & + Q_1^\beta (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) + Q \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} \\ & \left. + L^\alpha \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \right] \end{aligned} \quad (10.102)$$

$$+ \frac{h}{\rho} \dot{\rho}^\beta - \mathcal{S}_{0R} \dot{\tau}_0 + [(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \dot{\xi})^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \dot{\xi})^-] = 0,$$

wobei

$$L^\alpha := - (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\beta + \frac{1}{2} (M_2^{\gamma\beta} - M_2^{\beta\gamma}) (\eta_\gamma^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\gamma) \quad (10.103)$$

Orthogonalitätsbedingung

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} (M_0^{\alpha\beta} - M_0^{\beta\alpha}) + (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \eta_\beta^{\gamma\delta} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (M_2^{\gamma\delta} - M_2^{\delta\gamma}) \eta_\beta^{\alpha\gamma} \eta_\delta^{\beta\epsilon} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.104)$$

oder

$$\begin{aligned} (M_0^{12} - M_0^{21}) + (M_1^{12} - M_1^{21}) (\eta_1^1 + \eta_2^2) \\ + (M_2^{12} - M_2^{21}) (\eta_1^1 \eta_2^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) = 0. \end{aligned}$$

Die Unterschiede zu den entsprechenden Gleichungen des 2. schalentheoretischen Konzepts sollen hier nicht im einzelnen wiederholt werden (vergl. Kap. 8.4, Teil 1), aber drei Aspekte sollen herausgehoben werden:

- Das 1. schalentheoretische Konzept führt nicht auf eine Symmetriebedingung für die Momente $M_n^{\alpha\beta}$ ($n=0,1,2$) ; an deren Stelle tritt die Orthogonalitätsbedingung; sie ist wie die Symmetriebedingung als eine konstitutive Restriktion aufzufassen;

- in den Gleichungen ist noch eine skalare Größe Q enthalten, für die eine Interpretation durch dreidimensionale Variable bisher fehlt, für die aber eine zweidimensionale Stoffgleichung vorausgesetzt wird;
- bei dem 1. schalentheoretischen Konzept ist bisher explizit an keiner Stelle auf die lokalen Bilanzgleichungen des dreidimensionalen Ersatzproblems zurückgegriffen worden, und zwar insbesondere nicht auf den dreidimensionalen lokalen Impuls- und Drehimpulssatz.^x Die Zuordnung der beiden schalentheoretischen Konzepte zu entsprechenden dreidimensionalen Ersatzproblemen, die durch lokale Bilanzgleichung zu charakterisieren sind, gestattet aber natürlich einen solchen Rückgriff.

Der letzte Gesichtspunkt ist von einiger Wichtigkeit für die weitere Strategie bei der Auswertung der Entropieungleichung (10.15) und der entropischen Bilanzgleichungen (10.17) für die thermischen Zusatzeinwirkungen. Wie in Kap. 10.3 erläutert, ist es für diese Auswertung erforderlich, auf die dreidimensionale lokale Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems zurückzugreifen. Zwei Formen dieser Energiebilanzgleichung bestehen hier:

- (α) die nicht-reduzierte dreidimensionale Energiebilanzgleichung ((7.7), Teil 1) und
- (β) die reduzierte dreidimensionale Energiebilanzgleichung (vergl. (10.19)), wie sie in Kap. 10.4 beim 2. schalentheoretischen Konzept verwendet wurde.

Die reduzierte Form der lokalen Energiebilanzgleichung erhält man aus der nichtreduzierten durch die Forderung nach der Beobachterinvarianz bzw. durch Elimination der Leistung der äußeren Kräfte und Momente mittels des lokalen dreidimensionalen Impuls- und Drehimpulssatzes. Die Anwendung der reduzierten Energiebilanzgleichung (β) impliziert also die Erfüllung des lokalen Impuls- und Drehimpulssatzes des Ersatzproblems und gleichbedeutend die Invarianz der nichtreduzierten Energiebilanzgleichung (α). Die reduzierte Form ergibt sich damit zwingend bei konsequenter Interpretation der Schalengleichungen durch das dreidimensionale Ersatzproblem.

Die erste Strategie, die hier diskutiert werden wird, geht aus von der reduzierten dreidimensionalen, lokalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems. Wie in Kap. 10.4 führt ihre Anwendung auf die entropischen Bilanz-

^x Es ist allerdings von der Existenz des Spannungstensors Gebrauch gemacht worden; das Cauchysche Fundamentaltheorem, das die Existenz sicherstellt, gebraucht die Gültigkeit des integralen Impulssatzes für einen Tetraeder.

gleichungen (10.35) und die Entropieungleichung (10.41), in denen nur die symmetrischen Anteile der Momente enthalten sind. Diese Bedingungen sind gemeinsam mit den Bewegungsgleichungen (10.100) und (10.101), der 2D-Energiebilanzgleichung (10.102) und der Orthogonalitätsbedingung (10.104) zu analysieren. Auch hier ist eine skalare Feldgleichung mehr vorhanden als gefordert, so daß sich die Frage stellt, inwieweit die 2D-Energiebilanzgleichung (10.102) mit der ersten entropischen Bilanzgleichung (10.35)^I₁ verträglich ist. Da bei dieser ersten Strategie die Erfüllung des lokalen dreidimensionalen Impuls- und Drehimpulssatzes wie beim 2. schalentheoretischen Konzept implizit vorausgesetzt wird, ist zu erwarten, daß man ohne neuartige Hypothesen zu denselben Bilanzgleichungen und konstitutiven Restriktionen kommt, wie beim 2. schalentheoretischen Konzept in Kap. 10.4.

Bei der zweiten Strategie soll von der nichtreduzierten dreidimensionalen Energiebilanzgleichung (7.7) des Ersatzproblems ausgegangen werden. Diese zweite Strategie nimmt Rücksicht auf die Tatsache, daß bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen und der 2D-Energiebilanzgleichung des 1. schalentheoretischen Konzepts (Kap. 8.2, Teil 1) nicht auf den lokalen Impuls- und Drehimpulssatz oder auf die Invarianz der lokalen nichtreduzierten Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems zurückgegriffen werden mußte. In dieser Hinsicht ist die zweite Strategie also konsequenter als die erste, andererseits wird bei diesem Vorgehen aber ignoriert, daß dem 3D-Ersatzproblem ein kompletter Satz lokaler Bilanzgleichungen, wie er nach dem bisherigen Verständnis ein dreidimensionales Ersatzproblem ja definiert, zugeordnet ist. Inwieweit diese Strategie zu einem vollständigen System von Schalengleichungen führt und inwieweit diese den Schalengleichungen der ersten Strategie äquivalent sind, ist zu diskutieren.

10.6.2 Auswertung der Entropieungleichung und der entropischen Bilanzgleichungen mit der reduzierten lokalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems (erste Strategie)

Nach den Ausführungen in Kap. 10.6.1 ist das 1. schalentheoretische Konzept bei der ersten Strategie durch zwei Sätze von Bedingungen gekennzeichnet: Der erste Satz umfaßt

- die Bewegungsgleichungen (10.100) und (10.101),
- die 2D-Energiebilanzgleichung (10.102)
- die Orthogonalitätsbedingung (10.104) als konstitutive Restriktion,

in denen die auftretenden Momente nicht notwendig symmetrisch sind, und der zweite Satz beinhaltet

- die drei entropischen Bilanzgleichungen (10.35) und
- die 2D-Entropieungleichung (10.46).

In diesem zweiten Satz treten natürlich auch wieder die höheren Momente auf; insbesondere aber gehen hier nur die symmetrischen Anteile der Momente ein.

Diese Bedingungen sind durch die generellen zweidimensionalen, thermoelastischen Stoffgleichungen zu ergänzen, u.z.

$$\left. \begin{aligned}
 M_m^{\alpha\beta} &= \overset{v}{M}_m^{\alpha\beta} (a_{\alpha\beta}, d_2, \lambda_{\alpha\beta}, \mathcal{N}_\kappa, \mathcal{N}^2, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2), \quad m=0,1,\dots,4 \\
 M_n^{\beta\alpha} &\equiv Q_n^\alpha = \overset{v}{M}_n^{\beta\alpha} (\quad), \quad n=0,1,2,3 \\
 M_n^{\alpha\beta} &= \overset{v}{M}_n^{\alpha\beta} (\quad), \quad n=0,1,2,3 \\
 Q &= \overset{v}{Q} (\quad) \\
 M_n^{\beta\beta} &= \overset{v}{M}_n^{\beta\beta} (\quad), \quad n=0,1,2 \\
 \mathcal{Q} &= \overset{v}{\mathcal{Q}} (\quad) \\
 \mathcal{E} &= \overset{v}{\mathcal{E}} (\quad), \quad n=0,1,2 \\
 h_n^\alpha &= \overset{v}{h}_n^\alpha (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{0/\beta}, \Lambda_{1/\beta}, \Lambda_{2/\beta}), \quad n=0,1,2 \\
 h_n^\beta &= \overset{v}{h}_n^\beta (\quad), \quad n=0,1
 \end{aligned} \right\} (10.105)$$

man beachte die Unterschiede zu (10.39).

Für die neun gesuchten Lösungsfunktionen, u.z. jeweils drei Komponenten von \bar{r} und \bar{d} sowie \bar{A}_m ($m=0,1,2$), stehen insgesamt zehn skalare Differentialgleichungen zur Verfügung; dies sind die Bewegungsgleichungen, die 2D-Energiebilanzgleichung und die drei entropischen Bilanzgleichungen; die Orthogonalitätsbedingung und die 2D-Entropieungleichung sind von den 2D-Stoffgleichungen (10.105) identisch zu erfüllen.

Es stellt sich hierwie schon beim 2. schalentheoretischen Konzept die Frage, ob eine der Bilanzgleichungen, und zwar die reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung oder die 1. entropische Bilanzgleichung, redundant sind. Für den Fall einer nichtdeformierbaren Schale sind beide Bilanzgleichungen tatsächlich identisch. Es ist klar, daß diese beiden Bilanzgleichungen miteinander verträglich sein müssen, wenn die thermoelastische Schalentheorie konsistent sein soll. Daher soll zunächst geprüft werden, ob durch eine einfache Umformung und Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung die beiden Gleichungen ineinander überführt werden können.

Die Unterschiede in den beiden Bilanzgleichungen beziehen sich ausschließlich auf die Leistungsbeiträge der Beanspruchungsgrößen bzw. der Momente der Spannungen. Diese Leistungsbeiträge in der reduzierten 2D-Energiebilanzgleichung (10.102) läßt sich mit (10.24) und (10.36) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 & M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} + M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) + M_2^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 & + Q^{\beta} (\bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta}) + Q^{\beta} (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 & + Q(\bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}) + L^{\alpha} (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) = \\
 & = (M_0^{\langle\alpha\beta\rangle} + M_0^{\langle\alpha\beta\rangle}) \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \\
 & + (M_1^{\langle\alpha\beta\rangle} + M_1^{\langle\alpha\beta\rangle}) (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{10.106}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \left(M_2^{(\alpha\beta)} + M_2^{<\alpha\beta>} \right) (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{d}_{1\beta}) \\
 & + \left(M_0^{(\beta\beta)} + M_0^{<\beta\beta>} \right) (\bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{d} + \bar{d} \cdot \dot{r}_{1\beta}) \\
 & + \left(M_1^{(\beta\beta)} + M_1^{<\beta\beta>} \right) (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{d} + \bar{d} \cdot \dot{d}_{1\beta}) \\
 & + Q (\bar{d} \cdot \dot{d}) \\
 & + \left(-2 M_1^{<\alpha\beta>} \mu_\beta + M_2^{<\beta\beta>} (\eta_3^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_3) \right) (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{d}) \\
 = & M_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{0\alpha\beta} + M_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{1\alpha\beta} + M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{2\alpha\beta} \\
 & + 2 \left(M_0^{(\beta\beta)} \dot{E}_{0\beta\beta} + M_1^{(\beta\beta)} \dot{E}_{1\beta\beta} \right) \\
 & + \left\{ Q \dot{E}_{033} + M_0^{<\alpha\beta>} (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{r}_{1\beta}) + M_1^{<\alpha\beta>} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{r}_{1\beta} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{d}_{1\beta}) \right. \\
 & + M_2^{<\alpha\beta>} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{d}_{1\beta}) + M_0^{<\beta\beta>} (\bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{d}) + M_1^{<\beta\beta>} (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{d}) \\
 & \left. + \left[-2 M_1^{<\alpha\beta>} \mu_\beta + M_2^{<\beta\beta>} (\eta_3^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_3) \right] (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{d}) \right\}
 \end{aligned}$$

(10.106)

Diese Umformung zeigt, daß die ersten Terme auf der rechten Seite wohl mit Leistungstermen der Momente in der 1. entropischen Bilanzgleichung (10.35)^I, übereinstimmen; unter Beachtung von (9.55), (9.56), (10.36) und auch der Orthogonalitätsbedingung

$$M_0^{<12>} + M_1^{<12>} (\eta_1^1 + \eta_2^2) + M_2^{<12>} (\eta_1^1 \eta_1^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) = 0$$

(10.107)

läßt sich aber nicht zeigen, daß in (10.106) der $\{\dots\}$ -Ausdruck mit $M_{0}^{33} \dot{E}_{533}$ identisch ist; wenn man allerdings voraussetzt, daß auch die schiefsymmetrischen Anteile der Momente verschwinden, dann ist dies der Fall. Es ist damit deutlich, daß die beiden Bilanzgleichungen sich nicht ohne weitere Forderungen ineinander überführen lassen.

Da die beiden diskutierten Bilanzgleichungen auf physikalisch vernünftigen Vorstellungen beruhen und sie im Grenzfall auch identisch werden, gibt es keinen Grund, die eine Gleichung der anderen vorzuziehen. Vielmehr wird jetzt verlangt, daß beide Bilanzgleichungen miteinander verträglich sein müssen, und zwar in allen Beobachtersystemen und für alle thermomechanischen Prozesse. Aus dieser Forderung werden sich zusätzliche Aussagen ableiten lassen, von deren Charakter man erwarten kann, daß es sich um weitere konstitutive Restriktionen handelt, also Bedingungen, die identisch durch die Stofffunktionen zu erfüllen sind. Jedes andere Ergebnis würde neue Probleme aufwerfen. Da die Unterschiede in den beiden zur Diskussion stehenden Bilanzgleichungen sich nur auf die Leistungsbeiträge der Momente der Spannungen beziehen, muß auch nur die Verträglichkeit dieser beiden Terme analysiert werden.

Die Leistungen der Momente der Spannungen in den beiden Bilanzgleichungen werden zunächst auf eine Form gebracht, in der als kinematische Größen nur die Raten des minimalen kinematischen Variablensatzes

$$\mathcal{K} := \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_{\alpha}, \lambda_{\alpha\beta}, \nu_{\alpha}, \nu \}$$

aufzutreten. Dieser Leistungsterm - die Elementarleistung (Anhang 6) - in der 2D-Energiebilanzgleichung (10.102) des 1. schalentheoretischen Konzepts ist schon in Kap. 9.1^x bzw. Anhang (6) entsprechend umgeformt worden. Mit (A5.1) und (A5.3) hat man^{xx}

$$\begin{aligned} W_{in} = & M_{0}^{\alpha\beta} \bar{r}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{\beta} + M_{1}^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1,\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{\beta} + \bar{r}_{1,\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{\beta}) + M_{2}^{\alpha\beta} (\bar{d}_{2,\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{\beta}) \\ & + M_{0}^{\beta\beta} (\bar{r}_{\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{r}}_{\beta}) + M_{1}^{\beta\beta} (\bar{d}_{\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{\beta}) \\ & + Q (\bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}) + L^{\alpha} (\bar{r}_{1,\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) = \dots \end{aligned} \quad (10.108)$$

^x Übergang von Gl. (9.11) auf (9.62)

^{xx} Bei der folgenden Umformung geht die Definitionsgleichung für L^{α} , die Orthogonalitätsbedingung und die Tatsache ein, daß $\dot{a}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\beta\alpha}$ (nur sechs unabhängige einstellbare Raten).

$$\begin{aligned}
 &= \dot{a}_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} M_0^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2} N^{(\alpha\beta)} \right] \\
 &+ \dot{d}_{\alpha\beta} \left[M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\delta\beta} \eta_\delta^\alpha \right] \\
 &+ \dot{d}_{\beta\alpha} \left[M_0^{\beta\alpha} + 2 M_1^{<\alpha\beta>} \mu_\alpha - M_2^{\delta\alpha} \eta_\delta^\beta \mu_\beta \right] \\
 &+ \dot{v}_\beta \left[M_1^{\beta\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \right] \\
 &+ \dot{v}^\beta \left[\frac{1}{2} Q - \frac{1}{2} M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right], \tag{10.108}
 \end{aligned}$$

wobei mit (9.64)

$$\begin{aligned}
 N^{(\alpha\beta)} &:= \frac{1}{2} (N^{\alpha\beta} + N^{\beta\alpha}) \\
 N^{\alpha\beta} &:= 2 M_1^{<\delta\beta>} \eta_\delta^\alpha - M_2^{\delta\beta} \eta_\delta^\alpha \eta_\delta^\beta.
 \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, daß nur die letzte Form auf der rechten Seite von (10.108) beobachterinvariant ist.

Mit (10.36) läßt sich der Leistungsausdruck \tilde{W}_{in}^{\sim} der Momente in der 1. entropischen Bilanzgleichung (10.35)^I₁ entsprechend umformen. Die hier auftretende Rate $\dot{v}_{\alpha\beta}^q$ ist keine unabhängig einstellbare Größe. Mit (9.25)₆ und (9.56)₂ wird aber^x

$$\dot{v}_{\alpha\beta}^q = \underline{\dot{d}_{1\alpha}} \cdot \underline{\dot{d}_{1\beta}} + \underline{\dot{d}_{1\beta}} \cdot \underline{\dot{d}_{1\alpha}} = \dots \tag{10.109}$$

^x Die unterstrichenen Terme heben sich paarweise heraus.

$$\begin{aligned}
 &= \eta_{\alpha}^s \dot{\eta}_{s\beta} - \frac{1}{2} \dot{a}_{\gamma\delta} \eta_{\alpha}^s \eta_{\beta}^{\delta} \\
 &\quad - \underline{\langle \bar{\tau}_{1\delta} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1s} \rangle \eta_{\alpha}^s \eta_{\beta}^{\delta}} - \dot{d}_s \eta_{\alpha}^s \mu_{\beta} \\
 &\quad + \dot{\nu}_{\beta}^s \mu_{\alpha} - \frac{1}{2} \dot{\nu}^s \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \\
 &\quad + \underline{\tau_{1s} \cdot \dot{d} (\eta_{\alpha}^s \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^s \mu_{\alpha})} \\
 &\quad + \eta_{\beta}^s \dot{\eta}_{s\alpha} - \frac{1}{2} \dot{a}_{\gamma\delta} \eta_{\beta}^s \eta_{\alpha}^{\delta} \\
 &\quad - \langle \bar{\tau}_{1\delta} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1s} \rangle \eta_{\beta}^s \eta_{\alpha}^{\delta} - \dot{d}_s \eta_{\beta}^s \mu_{\alpha} \\
 &\quad + \dot{\nu}_{\alpha}^s \mu_{\beta} - \frac{1}{2} \dot{\nu}^s \mu_{\beta} \mu_{\alpha} \\
 &\quad + \underline{\bar{\tau}_{1s} \cdot \dot{d} (\eta_{\beta}^s \mu_{\alpha} - \eta_{\alpha}^s \mu_{\beta})} \\
 &= \dot{\eta}_{s\alpha} (\eta_{\alpha}^s \nu_{\beta}^{\delta} + \eta_{\beta}^s \rho_{\alpha}^{\delta}) \\
 &\quad - \dot{a}_{\gamma\delta} (\eta_{\alpha}^s \eta_{\beta}^{\delta}) \\
 &\quad - \dot{d}_s (\eta_{\alpha}^s \mu_{\beta} + \eta_{\beta}^s \mu_{\alpha}) \\
 &\quad + \dot{\nu}_s (\rho_{\alpha}^s \mu_{\beta} + \rho_{\beta}^s \mu_{\alpha})
 \end{aligned}
 \tag{10.109}$$

und damit darstellbar durch die Raten des minimalen Variablensatzes \mathcal{K} .

Für \tilde{w}_{in} erhält man deshalb

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_{in} &= M_0^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_1^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} + M_2^{(\alpha\beta)} \dot{E}_{\alpha\beta} \\
 &+ 2 \left(M_0^{(\beta\beta)} \dot{E}_{\beta\beta} + M_1^{(\beta\beta)} \dot{E}_{\beta\beta} \right) \\
 &+ M_0^{\beta\beta} \dot{E}_{\beta\beta} \\
 &= \dot{a}_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} M_0^{(\alpha\beta)} - M_2^{(\beta\beta)} \eta_s^\alpha \eta_s^\beta \right] \\
 &+ \dot{d}_{\alpha\beta} \left[M_1^{(\alpha\beta)} + M_2^{(\beta\beta)} \eta_s^\alpha \right] \\
 &+ \dot{d}_s \left[M_0^{(\beta\beta)} - M_2^{(\alpha\beta)} \eta_s^\alpha \mu_\beta \right] \\
 &+ \dot{v}_s \left[M_1^{(\beta\beta)} + M_2^{(\beta\beta)} \mu_\beta \right] \\
 &+ \dot{v} \left[\frac{1}{2} M_0^{\beta\beta} - \frac{1}{2} M_2^{(\alpha\beta)} \mu_\alpha \mu_\beta \right].
 \end{aligned} \tag{10.110}$$

Beide Leistungsausdrücke w_{in} und \tilde{w}_{in} sind beobachterinvariant, da jeder einzelne Faktor beobachterinvariant ist. Alle anderen Ausdrücke in den beiden Bilanzgleichungen (10.102) und (10.35)₁^I sind nicht nur übereinstimmend, sondern auch beobachterinvariant. Es bleibt also zu fordern, daß

$$w_{in} - \tilde{w}_{in} = 0 \tag{10.111}$$

für alle thermomechanischen Prozesse. Da in dieser Bedingung die Raten $\dot{a}_{\alpha\beta}, \dot{d}_{\alpha\beta}$ etc. nur linear auftreten und beliebig und unabhängig voneinander einstellbar sind, müssen ihre jeweiligen Koeffizienten in w_{in} und \tilde{w}_{in} übereinstimmen.

Zunächst werden diese Koeffizienten in (10.108) explizit auf eine Form gebracht, in der die Momente der Spannungen in ihren symmetrischen und schief-symmetrischen Anteil aufgespalten sind. Mit (10.108)₂ wird

$$N^{(\alpha\beta)} = M_1^{<8\beta>} \eta_8^\alpha + M_1^{<8\alpha>} \eta_8^\beta - M_2^{(88)} \eta_8^\alpha \eta_8^\beta,$$

so daß (10.108) das folgende Aussehen erhält:

$$\begin{aligned} W_{in} = & \dot{\alpha}_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} M_0^{(\alpha\beta)} - M_2^{(88)} \eta_8^\alpha \eta_8^\beta + M_1^{<8\beta>} \eta_8^\alpha + M_1^{<8\alpha>} \eta_8^\beta \right] \\ & + \dot{\alpha}_{\alpha\beta} \left[M_1^{(\alpha\beta)} + M_2^{(8\beta)} \eta_8^\alpha + M_1^{<\alpha\beta>} + M_2^{<8\beta>} \eta_8^\alpha \right] \\ & + \dot{d}_\beta \left[M_0^{(3\beta)} + M_2^{(8\beta)} \eta_8^\beta \mu_\beta + M_0^{<3\beta>} + 2 M_1^{<\alpha\beta>} \mu_\alpha - M_2^{<8\beta>} \eta_8^\beta \mu_\beta \right] \\ & + \dot{d}_\beta \left[M_1^{(3\beta)} + M_2^{(\alpha\beta)} \mu_\alpha + M_1^{<3\beta>} + M_2^{<\alpha\beta>} \mu_\alpha \right] \\ & + \dot{v} \left[\frac{1}{2} Q - \frac{1}{2} M_2^{(4\beta)} \mu_\alpha \mu_\beta - M_2^{<\alpha\beta>} \mu_\alpha \mu_\beta \right]. \end{aligned} \quad (10.112)$$

Der Koeffizientenvergleich (Vergleich der [...] -Klammern) in (10.110) und (10.112) führt auf die folgenden Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} M_1^{<8\beta>} \eta_8^\alpha + M_1^{<8\alpha>} \eta_8^\beta &= 0 \\ M_1^{<\alpha\beta>} + M_2^{<8\beta>} \eta_8^\alpha &= 0 \\ M_0^{<3\beta>} + 2 M_1^{<\alpha\beta>} \mu_\alpha - M_2^{<8\beta>} \eta_8^\beta \mu_\beta &= 0 \\ M_1^{<3\beta>} + M_2^{<\alpha\beta>} \mu_\alpha &= 0 \\ M_0^{33} - Q &= 0 \end{aligned} \right\} (10.113)$$

Diese Bedingungen müssen identisch durch die Stoffgleichungen (10.105) für alle Elemente des Variablensatzes \mathcal{K} und Λ_m ($m = 0, 1, 2$) erfüllt werden. Mit (10.113)₂ wird aus (10.113)₁

$$M_2^{<3\beta>} \eta_3^\delta \eta_8^\alpha + M_2^{<3\alpha>} \eta_3^\delta \eta_8^\beta = 0, \quad (10.114)$$

Die linke Seite ist symmetrisch in α und β . Man erhält für

$$\underline{\alpha = 1, \beta = 1}$$

$$-M_2^{<12>} 2 \eta_2^\delta \eta_8^1 = 0.$$

$$\underline{\alpha = 1, \beta = 2}$$

$$M_2^{<12>} (\eta_1^\delta \eta_8^1 - \eta_2^\delta \eta_8^2) = 0$$

$$\underline{\alpha = 2, \beta = 2}$$

$$M_2^{<12>} 2 \eta_1^\delta \eta_8^2 = 0.$$

Diese drei Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn

$$M_2^{<12>} \equiv 0 \quad (10.115)$$

$$\text{oder } \left\{ \begin{array}{l} \eta_2^\delta \eta_8^1 = \eta_2^1 \eta_1^1 + \eta_2^2 \eta_2^2 = 0 \\ \text{und} \\ \eta_1^\delta \eta_8^1 - \eta_2^\delta \eta_8^2 = \eta_1^1 \eta_1^1 - \eta_2^2 \eta_2^2 = 0 \\ \text{und} \\ \eta_1^\delta \eta_8^2 = \eta_1^1 \eta_1^2 + \eta_1^2 \eta_2^2 = 0 \end{array} \right. \quad (10.116)$$

Nun ist η_α^β eindeutig darstellbar durch den minimalen kinematischen Variablensatz \mathcal{K} (vergl. (10.50)). Daher stellen die Bedingungen (10.116) eine Verknüpfung zwischen den unabhängigen kinematischen Variablen \mathcal{K} dar; dies steht

aber im Widerspruch zur vorausgesetzten beliebigen Einstellbarkeit der kinematischen (und thermischen) Zustandsvariablen. Die denkbare identische Erfüllung von (10.116) durch die beliebig einstellbaren Variablen \mathcal{K} im gesamten Bereich der Referenzfläche kann aber ausgeschlossen werden.^x

Um (10.114) zu erfüllen, bleibt also nur die Möglichkeit (10.115). Damit erhält man dann aber aus (10.113) sofort das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 M_{\perp}^{<\alpha\beta>} &\equiv 0 \\
 M_{\perp}^{<\alpha A>} &\equiv 0 \\
 M_0^{<3\alpha>} &\equiv 0 \\
 M_1^{<3\alpha>} &\equiv 0 \\
 Q &\equiv M_0^{33} ;
 \end{aligned}
 \tag{10.117}$$

mit der Orthogonalitätsbedingung (10.104) folgt weiter

$$M_0^{<\alpha\beta>} \equiv 0.
 \tag{10.118}$$

Es ergibt sich also folgender Satz:

Die lokale, reduzierte 2D-Energiebilanzgleichung (10.102) des 1. schalentheoretischen Konzepts und die erste entropische Bilanzgleichung (10.35)^I₁ sind bei beliebiger Einstellbarkeit der unabhängigen kinematischen Variablen \mathcal{K} dann und nur dann miteinander verträglich (bzw. identisch), wenn die Momente $M_n^{\alpha\beta}$ ($n=0,1,2$) und $M_n^{3\alpha}$ ($n=0,1$) symmetrisch sind und wenn $Q \equiv M_0^{33}$.

Die Orthogonalitätsbedingung (10.104) wird damit identisch erfüllt; insbesondere aber erhalten die Bewegungsgleichungen (10.100) und (10.101) und die 2D-Energiebilanzgleichung (10.102) des 1. schalentheoretischen Konzepts eine Struktur, die mit der des 2. schalentheoretischen Konzepts (vergl. mit E6-E9) völlig übereinstimmt. Man kann daher die weitere Analyse der ersten Strategie hier beenden, da alles weitere in Kap. 10.4 enthalten ist.

^x Man zeigt dies leicht, indem man (9.41) nach \mathcal{K}^{α} auflöst, z.B. in (10.116)₂ einsetzt und alle Elemente in \mathcal{K} bis auf $\mathcal{K}_{3\alpha}$ konstant hält, $\mathcal{K}_{3\alpha}$ aber variiert.

10.6.3 Auswertung der Entropiegleichung und der entropischen Bilanzgleichungen mit der nicht-reduzierten lokalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems (zweite Strategie)

10.6.3.1 Gewichtete Integration der nicht-reduzierten Energiebilanzgleichung

Bei der zweiten Strategie wird von der nicht-reduzierten, lokalen Energiebilanzgleichung ((7.7), Teil 1), des Ersatzproblems ausgegangen. Ihre Auflösung nach den zusätzlichen, gedachten Wärmequellen \hat{r} ergibt

$$S_R \hat{r} = S_R \frac{D}{Dt} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\bar{p}} \cdot \dot{\bar{p}} \right) - S_R \left[(\bar{b} + \hat{b}) \cdot \dot{\bar{p}} + \hat{e} \cdot \bar{\omega} + r \right] - \bar{\nabla}_R \cdot \left((EI)^T \dot{\bar{p}} \right) + \bar{\nabla}_R \cdot \hat{q}_R. \quad (10.119)$$

Um die entropischen Bilanzgleichungen (10.17) auszuwerten, werden zunächst die Integrale

$$S_m R \hat{r}_m = \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \hat{r}(\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2 \quad (10.120)$$

bestimmt, wobei $S_R \hat{r}$ durch die rechte Seite von (10.119) dargestellt wird. Hierbei können die Ergebnisse der Integrationen (10.21) und (10.26) berücksichtigt werden, so daß in (10.119) jetzt nur die restlichen Terme integriert werden müssen. Mit

$$\dot{\bar{p}} = \dot{\bar{r}} + \theta \dot{\bar{d}}$$

wird zunächst

$$\int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \frac{1}{2} S_R \dot{\bar{p}} \cdot \dot{\bar{p}}(\theta)^m d\theta = \frac{1}{2} S_m R \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} + S_{m+1} R \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{d}} + \frac{1}{2} S_{m+2} R \dot{\bar{d}} \cdot \dot{\bar{d}} \quad (10.121)$$

$m = 0, 1, 2$

wobei (vergl. (8.3), Teil 1)

$$S_{mR} = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R(\theta)^m d\theta, \quad m = 0, 1, \dots, 4, \quad (10.122)$$

Weiter ist

$$\int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R(\bar{b} + \hat{b}) \cdot \dot{\bar{p}}(\theta)^m d\theta \quad (10.123)$$

$$= S_{mR}(\bar{b}_m + \hat{b}_m) \cdot \dot{\bar{r}} + S_{m+2R}(\bar{b}_{m+2} + \hat{b}_{m+2}) \cdot \dot{\bar{d}}, \quad m = 0, 1, 2$$

mit

$$S_{mR} \begin{Bmatrix} \bar{b}_m \\ \hat{b}_m \end{Bmatrix} = \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \begin{Bmatrix} \bar{b} \\ \hat{b} \end{Bmatrix} (\theta)^m d\theta, \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad (10.124)$$

Der Integralausdruck

$$\int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \bar{v}_R \cdot [(\underline{EI})^T \dot{\bar{p}}] (\theta)^m d\theta$$

wird zunächst über irgendeinen Teilabschnitt A der Referenzfläche der Schale integriert, um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können.

Es wird also

$$\int_A \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \bar{v}_R \cdot [(\underline{EI})^T \dot{\bar{p}}] (\theta)^m d\theta dA \quad (10.125)$$

$$= \int_{V_R} \bar{v}_R \cdot [(\underline{EI})^T \dot{\bar{p}}] (\theta)^m dV_R,$$

wobei dV_R ein Volumenelement im Schalenraum ist und $\theta \equiv \theta^3$,

Mit

$$\begin{aligned} & \bar{\nabla}_R \cdot [(EI)^T \dot{p} (\theta)^m] \\ &= \bar{\nabla}_R \cdot [(EI)^T \dot{p}] (\theta)^m + (EI)^T \dot{p} \bar{G}^k \frac{\partial}{\partial \theta^k} (\theta)^m \quad (10.126) \\ &= \bar{\nabla}_R \cdot [(EI)^T \dot{p}] (\theta)^m + \bar{G}^3 \cdot [(EI)^T \dot{p}]_{,m} (\theta)^{m-1} \end{aligned}$$

wird dann

$$\begin{aligned} & \int_{V_R} \bar{\nabla}_R \cdot [\dot{p} (EI)] (\theta)^m dV_R \quad (10.127) \\ &= \int_{V_R} \left\{ \bar{\nabla}_R \cdot [\dot{p} (EI)] (\theta)^m - \bar{G}^3 \cdot [\dot{p} (EI)]_{,m} (\theta)^{m-1} \right\} dV_R. \end{aligned}$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz läßt sich der erste Term auf der rechten Seite umformen

$$\begin{aligned} \int_{V_R} \bar{\nabla}_R \cdot [\dot{p} (EI)] (\theta)^m dV_R &= \oint_{O_R} (\theta)^m [\dot{p} (EI)] \cdot \bar{N} dO_R \quad (10.128) \\ &= \oint_{O_R} (\theta)^m \dot{p} \cdot (EI \bar{N}) dO_R. \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral besteht aus drei Teilintegralen: den Flächenintegralen über die beiden Laibungsflächen O_R^\pm und dem Integral über den Randstreifen C_F . Daher wird aus (10.128)

$$\begin{aligned} \oint_{O_R} (\theta)^m \dot{p} \cdot (EI \bar{N}) dO_R &= \int_{C_F} (\theta)^m \dot{p} \cdot (EI \bar{N}) dO_R \quad (10.129) \\ &+ \int_{O_R^+} (s^+)^m \dot{p}^+ \cdot (EI \bar{N})^+ dO_R^+ + \int_{O_R^-} (-s^-)^m \dot{p}^- \cdot (EI \bar{N})^- dO_R^-. \end{aligned}$$

Auf den Laibungsflächen sind, dem dreidimensionalen Ersatzproblem entsprechend, die statischen Randbedingungen durch die Spannungen \underline{I} zu erfüllen:

$$((\underline{FI})\bar{N})^\pm = \bar{t}_R^\pm + \hat{t}_R^\pm, \quad (10.130)$$

Hier sind \bar{t}_R^\pm die aktuellen vorgegebenen Laibungsbelastungen und \hat{t}_R^\pm die gedachten Zusatzbelastungen; die aktuellen Lasten werden voraussetzungsgemäß (S. 112, Teil 1) als hydrostatisch angesehen. Mit ((4.18), Teil 1) ist

$$\bar{t}_R^\pm = \bar{t}^\pm \frac{dO^\pm}{dO_R^\pm}, \quad (10.131)$$

wobei \bar{t}^\pm die hydrostatischen Laibungsbelastungen bezogen auf die Momentankonfiguration sind und dO^\pm die zugehörigen Flächenelemente in der Momentankonfiguration. Sind q^+ und q^- die hydrostatischen Drücke auf den beiden Laibungen, dann gilt

$$\bar{t}^\pm = -q^\pm \bar{n}^\pm; \quad (10.132)$$

hier ist \bar{n}^\pm der äußere Normalenvektor auf der jeweiligen Laibungsfläche in der Momentankonfiguration. Die Einzelheiten der Darstellung der beiden Laibungsintegrale erfolgt ganz analog wie in Anhang (3), Teil 1, und ist in Anhang (8) zusammengefaßt. Man erhält

$$\int_{O_R^+} (s^+)^m \dot{p}^+ \cdot (\bar{t}_R^+ + \hat{t}_R^+) dO_R^+ + \int_{O_R^-} (-s^-)^m \dot{p}^- \cdot (\bar{t}_R^- + \hat{t}_R^-) dO_R^- \quad (10.133)$$

$$= \int_A \left\{ \left[\bar{y}_m + \hat{y}_m \right] \cdot \dot{\bar{r}} + \left[\bar{y}_{m+1} + \hat{y}_{m+1} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} dA, \quad m=0,1,2.$$

Die Lastvektoren \bar{f}_m und \hat{f}_m , $m = 0,1,2,3$, sind in Anhang (8) definiert. Die vier Vektoren \bar{f}_m hängen von den Drücken und die Vektoren \hat{f}_m von den gedachten Zusatzlasten ab; beide Vektorgruppen sind außerdem abhängig von der Momentangeometrie der Schale.

Die Umformung des Integrals über den Randstreifen C_F in der Gleichung (10.129) kann jetzt analog der Entwicklung auf S. 113 (Teil 1) erfolgen. Man braucht dort nur $\dot{\bar{p}}$ durch $(\theta)^m \dot{\bar{p}}$ zu ersetzen. Allerdings treten jetzt noch höhere Momente der Spannungen auf, die entsprechend (8.19) und (8.20), Teil 1, zu definieren sind:

$$\left. \begin{aligned} M_m^{\alpha\pi} &:= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\pi} (\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,\dots,4 \\ M_m^{\beta\pi} &:= \int_{-s^-}^{s^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\beta\pi} (\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2,3. \end{aligned} \right\} (10.134)$$

Damit wird (vergl. (8.21), (8.24), Teil 1)

$$\begin{aligned} & \int_{C_F} (\theta)^m \dot{\bar{p}} \cdot (EI) \bar{N} dQ_R \\ &= \oint_C \left\{ M_m^{\alpha\pi} (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}_{1\alpha}) + M_{m+1}^{\alpha\pi} (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{d}_{1\alpha} + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{r}_{1\alpha}) \right. \\ & \quad \left. + M_{m+2}^{\alpha\pi} \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{\beta\pi} \dot{\bar{r}} \cdot \bar{d} + M_{m+1}^{\beta\pi} \dot{\bar{d}} \cdot \bar{d} \right\} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \frac{1}{R} ds \end{aligned} \quad (10.135)$$

$$\begin{aligned} &= \oint_C \left\{ \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{\beta\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\ & \quad \left. + \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\beta\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} \frac{1}{R} ds \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{dA} \left\{ \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 &\quad + \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \bar{d} \\
 &\quad + \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{, \beta} \\
 &\quad \left. + \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \bar{d}_{, \beta} \right\} dA \\
 &\qquad\qquad\qquad m = 0, 1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{10.135}$$

Es bleibt noch das zweite Integral auf der rechten Seite von (10.126) auszuwerten. Es wird

$$\begin{aligned}
 &\int_{V_R} \bar{G}^3 \cdot [\dot{\bar{p}}(EI)]_m(\theta)^{m-1} dV_R \\
 &= m \int_A \left\{ \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} [\bar{G}^3 (EI)^T] \cdot \dot{\bar{p}}(\theta)^{m-1} d\theta \right\} dA.
 \end{aligned}$$

Wegen (vergl. S. 114, Teil 1)

$$\underline{\underline{FT}} = \bar{P}_{,K} \otimes \bar{A}_L \bar{S}_M^{-1K} \tilde{T}^{ML}$$

$$(\underline{\underline{ET}})^T = \bar{A}_L \otimes \bar{P}_{,K} \bar{S}_M^{-1K} \tilde{T}^{ML}$$

$$\bar{G}^3 = \bar{G}_3 = \bar{A}_3, \quad \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_3 = 1, \quad \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_\alpha = 0$$

wird unter Beachtung von ((6.49) und (8.16)₂, Teil 1)

$$\begin{aligned}
 \bar{G}^3 (\underline{F} \underline{I})^T &= (\bar{A}_3 \cdot \bar{A}_3) \bar{p}_{,k} \bar{S}_M^{-1k} \bar{T}^{M3} \\
 &= \bar{p}_{,k} \bar{S}_M^{-1k} \bar{T}^{M3} \\
 &= \bar{p}_{1\alpha} \bar{S}_M^{-1\alpha} \bar{T}^{M3} + \bar{p}_{13} \bar{S}_M^{-13} \bar{T}^{M3} \\
 &= \bar{p}_{1\alpha} \underbrace{\bar{S}_M^{-1\alpha} \bar{S}_R^M \bar{S}_P^3}_{\delta_R^{\alpha 3}} T^{RP} + \bar{p}_{13} \underbrace{\bar{S}_M^{-13} \bar{S}_R^M \bar{S}_P^3}_{\delta_R^{33}} T^{RP} \\
 &= \bar{p}_{1\alpha} \bar{S}_P^3 T^{\alpha P} + \bar{p}_{13} \bar{S}_P^3 T^{3P} \\
 &= \bar{p}_{1\alpha} (\bar{S}_\beta^3 T^{\alpha\beta} + \bar{S}_3^3 T^{\alpha 3}) \\
 &\quad + \bar{p}_{13} (\bar{S}_\beta^3 T^{3\beta} + \bar{S}_3^3 T^{33}) \\
 &= \bar{p}_{1\alpha} T^{\alpha 3} + \bar{p}_{13} T^{33} \\
 &= (\bar{r}_{1\alpha} + \theta \bar{d}_{1\alpha}) T^{\alpha 3} + \bar{d} T^{33},
 \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}
 [\bar{G}^3 (\underline{F} \underline{I})] \cdot \dot{\bar{p}} &= (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}} + \theta \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}} + \theta \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \\
 &\quad + (\theta)^2 \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) T^{\alpha 3} \\
 &\quad + (\bar{d} \cdot \dot{\bar{r}} + \theta \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}) T^{33}.
 \end{aligned}
 \tag{10.136}$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} M_m^{\alpha 3} &= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha 3}(\theta)^m d\theta, \quad m = 0, 1, 2, 3 \\ M_n^{33} &= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{33}(\theta)^n d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (10.137)$$

dann ist schließlich

$$\begin{aligned} & m \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} [\bar{G}^3 (EI)^T] \cdot \dot{\bar{r}}(\theta)^{m-1} d\theta \\ &= m \left\{ M_{m-1}^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}} + M_m^{\alpha 3} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) + M_{m+1}^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\ & \quad \left. + M_{m-1}^{33} \bar{d} \cdot \dot{\bar{r}} + M_m^{33} \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.138)$$

Zusammenfassend wird

$$\begin{aligned} & \int_{V_R} \bar{V}_R \cdot [\dot{\bar{r}}(EI)](\theta)^m dV_R \\ &= \int_{VA} \left\{ \left[\bar{y}_m + \hat{\bar{y}}_m \right] \cdot \dot{\bar{r}} + \left[\bar{y}_{m+1} + \hat{\bar{y}}_{m+1} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\ & \quad \left. + \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right]_{:\beta} \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\ & \quad \left. + \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d} \right]_{:\beta} \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\ & \quad \left. + \dots \right\} \end{aligned} \quad (10.139)$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \\
 & + \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 & - m \left(\left[M_{m-1}^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_m^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m-1}^{33} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 & \left. + \left[M_m^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{33} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right) \} dA.
 \end{aligned} \tag{10.139}$$

Es bleibt noch die Auswertung des Integrals

$$\int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \hat{\bar{l}} \cdot \bar{w} (\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2$$

durchzuführen, wobei man die schon für $m=0$ durchgeführte Integration (vergl. S. 118 ff, Teil I) berücksichtigen kann. Erweitert man den Definitionsbereich von (8.26), Teil I, so daß

$$\hat{\bar{l}}_m = \int_{-S^-}^{S^+} \frac{g}{\sqrt{A}} \hat{\bar{l}} (\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,\dots,4, \tag{10.140}$$

dann wird

$$\begin{aligned}
 & \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_R \hat{\bar{l}} \cdot \bar{w} (\theta)^m d\theta \\
 & = \hat{\bar{l}}_m \cdot \bar{w}_0 + \hat{\bar{l}}_{m+1} \cdot \bar{w}_1 + \hat{\bar{l}}_{m+2} \cdot \bar{w}_2,
 \end{aligned}$$

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{2} \left[(\bar{r}_{12} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{r}}_{11} + (\bar{d} \times \bar{r}_{11}) \times \dot{\bar{r}}_{12} + (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) \times \dot{\bar{d}} \right]$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 = \frac{1}{2} [& (\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{r}}_{11} + (\bar{d} \times \bar{d}_{11}) \times \dot{\bar{r}}_{12} \\ & + (\dot{\bar{r}}_{12} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{d}}_{11} + (\bar{d} \times \dot{\bar{r}}_{11}) \times \dot{\bar{d}}_{12} \\ & + (\dot{\bar{r}}_{11} \times \bar{d}_{12}) \times \dot{\bar{d}} + (\bar{d}_{11} \times \dot{\bar{r}}_{12}) \times \dot{\bar{d}}] \end{aligned}$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2} [(\bar{d}_{12} \times \bar{d}) \times \dot{\bar{d}}_{11} + (\bar{d} \times \bar{d}_{11}) \times \dot{\bar{d}}_{12} + (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \times \dot{\bar{d}}] .$$

Ordnen nach den Raten $\dot{\bar{r}}_{i\alpha}$, $\dot{\bar{d}}_{i\alpha}$, $\dot{\bar{d}}$ ergibt schließlich
(vergl. (8.28)^I, Teil 1)

$$\begin{aligned} & \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \varrho_R \hat{\ell} \cdot \bar{\omega} (\theta)^m d\theta \\ & = \frac{1}{2} \left\{ e^{\alpha\beta} \left[\hat{\ell}_m^{\wedge} \times (\dot{\bar{r}}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_{m+1}^{\wedge} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\alpha} \right. \\ & \quad + e^{\alpha\beta} \left[\hat{\ell}_{m+1}^{\wedge} \times (\dot{\bar{r}}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_{m+2}^{\wedge} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \\ & \quad + \left[\hat{\ell}_m^{\wedge} \times (\dot{\bar{r}}_{11} \times \dot{\bar{r}}_{12}) + \hat{\ell}_{m+1}^{\wedge} \times (\dot{\bar{r}}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \\ & \quad \left. \left. + \hat{\ell}_{m+1}^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \dot{\bar{r}}_{12}) + \hat{\ell}_{m+2}^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} . \end{aligned} \tag{10.141}$$

Mit den Ergebnissen (10.21), (10.33), (10.121), (10.122)–(10.124), (10.139) und (10.141) lassen sich jetzt die Integrale (10.120) als Integrale der rechten Seite von (10.119) darstellen. Setzt man dieses Ergebnis, das hier nicht explizit angegeben zu werden braucht, in die entropischen Bilanzgleichung (10.17) ein, dann heben sich alle gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen heraus und man erhält die folgenden

Bilanzgleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \sum_m \mathcal{R} \hat{r}_m - \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^m + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (-s^-)^m \right] \\
 &= \sum_m \mathcal{R} \dot{\xi}_m - \left[\sum_m \mathcal{R} \bar{b}_m + \bar{y}_m - \sum_m \mathcal{R} \ddot{r}_m - \sum_{m+1} \mathcal{R} \ddot{d}_m \right. \\
 & \quad \left. + (M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d})_{:\beta} \right. \\
 & \quad \left. - m (M_{m-1}^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_m^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m-1}^{33} \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}} \\
 & - \left[\sum_{m+1} \mathcal{R} \bar{b}_{m+1} + \bar{y}_{m+1} - \sum_{m+1} \mathcal{R} \ddot{r}_{m+1} - \sum_{m+2} \mathcal{R} \ddot{d}_{m+2} \right. \\
 & \quad \left. + (M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d})_{:\beta} \right. \\
 & \quad \left. - m (M_m^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{33} \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \\
 & - \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \\
 & - \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 & + h_m^{\alpha} \dot{\alpha} - m h_{m-1}^3 \\
 & - \sum_m \mathcal{R} \hat{r}_m + \left[(\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^m + (\hat{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (-s^-)^m \right] \\
 & - \hat{W}_m = 0, \\
 & \quad m=0,1,2
 \end{aligned}
 \tag{10.142}$$

wobei \hat{W}_m der Beitrag ist, der von den gedachten mechanischen Zusatzeinwirkungen herrührt

$$\hat{W}_m = \hat{W}_{m,b} + \hat{W}_{m,L} + \hat{W}_{m,e}$$

Volumenkraft
Reibungsbelastung
Volumenmomente

mit

$$\hat{W}_{m,b} = \sum_{mR} \hat{b}_m \cdot \dot{\bar{r}} + \sum_{mT} \hat{b}_m \cdot \dot{\bar{d}}$$

$$\hat{W}_{m,L} = \hat{f}_m \cdot \dot{\bar{r}} + \hat{f}_{mT} \cdot \dot{\bar{d}}$$

$$\hat{W}_{m,e} = \frac{1}{2} \left\{ e^{\alpha\beta} \left[\hat{\bar{p}}_m \times (\bar{\tau}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\bar{p}}_{mT} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\alpha} \right. \\ \left. + e^{\alpha\beta} \left[\hat{\bar{p}}_{mT} \times (\bar{\tau}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\bar{p}}_{m+2} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \right. \\ \left. + \left[\hat{\bar{p}}_m \times (\bar{\tau}_{11} \times \bar{\tau}_{12}) + \hat{\bar{p}}_{mT} \times (\bar{\tau}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\bar{p}}_{mT} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) + \hat{\bar{p}}_{m+2} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} \quad (10.143)$$

$m = 0, 1, 2$

Damit ist die Umformung der entropischen Bilanzgleichungen (10.17) abgeschlossen.

Über den Ausdruck \hat{W}_0 läßt sich aufgrund der bisher gemachten Annahmen sofort die Aussage machen, daß

$$\hat{W}_0 = 0. \quad (10.144)$$

Es sei daran erinnert, daß beim 1. (und 2.) schalentheoretischen Konzept verlangt worden war, daß die gedachten mechanischen und thermischen Zusatzeinwirkungen zusammengenommen keinen Beitrag zur Gesamtenergiebilanz irgendeines Schalenabschnitts liefern (Energieforderung vergl. (8.39), Teil 1):

$$\hat{W} := \hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{H}_r + \hat{H}_{qL} + \hat{W}_e \stackrel{!}{=} 0.$$

Die erste entropische Bilanzgleichung (10.17)₁ beinhaltet aber auch die Aussage

$$\hat{H}_r + \hat{H}_{qL} = 0,$$

so daß daher

$$\hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_e = 0.$$

Mit (8.7), (8.11) und (8.28)^I ist jetzt aber

$$\hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_e = \int_A \hat{W}_0^m dA$$

und da dies für alle Flächenabschnitte A gilt, folgt (10.144). Diese Feststellung sowie die Unabhängigkeitsforderung (s. Teil 1) motivieren jetzt die folgende Annahme, daß \hat{W}_m^m für alle m und alle Beobachtungssysteme verschwindet:

$$\hat{W}_m^m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (10.145)$$

Diese Bedingung wird der weiteren Analyse zugrunde gelegt.

10.6.3.2 Konsequenzen der Beobachterinvarianz der entropischen Bilanzgleichungen

Die entropischen Bilanzgleichungen (10.17) für die thermischen Zusatzeinwirkungen sind voraussetzungsgemäß für alle Beobachtersysteme zu erfüllen. Da alle in (10.17) auftretenden Terme beobachterinvariant sind, ist diese Forderung trivialerweise erfüllt. Dies gilt dementsprechend für die linke Seite von (10.142), zunächst aber nicht für deren umgeformte rechte Seite, denn diese basiert auf der beobachterabhängigen Form der lokalen 3D-Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems. Diese Ausdrücke müssen also den Invarianzforderungen gegenüber Beobachtertransformationen unterworfen werden.

Bei Übergang zu einem anderen ("gesternten") Beobachtersystem gelten die folgenden Transformationsgesetze (vergl. Kap. 8.2.1, Teil 1):

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{r}^* &= \underline{Q} (\bar{r} - \bar{c}) \\
 \bar{d}^* &= \underline{Q} \bar{d} \\
 \dot{\bar{r}}^* &= \underline{Q} \dot{\bar{r}} - \dot{\bar{c}}^* - \underline{Q} (\bar{\omega} \times \bar{r}) \\
 \dot{\bar{d}}^* &= \underline{Q} \dot{\bar{d}} - \underline{Q} (\bar{\omega} \times \bar{d}) \\
 \bar{f}_m^* &= \underline{Q} \bar{f}_m, & m = 0, 1, 2 \\
 M_m^{\alpha\beta*} &= M_m^{\alpha\beta}, & m = 0, 1, \dots, 4 \\
 M_n^{3\alpha*} &= M_n^{3\alpha}, & n = 0, 1, 2, 3 \\
 \text{etc.} & \\
 h_m^{\alpha*} &= h_m^{\alpha}, & m = 0, 1, 2 \\
 h_n^{3*} &= h_n^3, & n = 0, 1 \\
 (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^\pm{}^* &= (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^\pm \\
 \varepsilon_m^* &= \varepsilon_m \\
 \gamma_m^* &= \gamma_m \\
 \rho_m^* &= \rho_m
 \end{aligned} \right\} (10.146)$$

und voraussetzungsgemäß

$$\hat{W}_m^* = \hat{W}_m \quad m = 0, 1, 2.$$

Besondere Behandlung erfordern die Volumenkräfte und -momente. Bei Übergang zu einem gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystem, d.h.

$$\underline{Q} = \text{konst.}, \quad \dot{\underline{c}} = \text{konst.}$$

gilt mit ((4.48), Teil 1)

$$\left. \begin{aligned} (\underline{s}_m \underline{r}_m \bar{b}_m)^* &= \underline{Q} (\underline{s}_m \underline{r}_m \bar{b}_m) \\ (\underline{s}_m \underline{r}_m \hat{b}_m)^* &= \underline{Q} (\underline{s}_m \underline{r}_m \hat{b}_m) \\ \hat{\underline{l}}_m^* &= \underline{Q} \hat{\underline{l}}_m \end{aligned} \right\} \quad m = 0, 1, \dots, 4. \quad (10.147)$$

Bei Wechsel zu einem beliebig rotierenden Beobachtersystem, d.h.

$$\underline{\dot{Q}} \neq \underline{0}, \quad \underline{c} = \underline{0}$$

erhält man wegen ((8.47), Teil 1) analog zu ((8.58), Teil 1)

$$\left. \begin{aligned} &(\underline{s}_m \underline{r}_m \bar{b}_m - \underline{s}_m \underline{r}_m \ddot{\bar{r}} - \underline{s}_m \underline{r}_m \ddot{\bar{d}})^* \\ &= \underline{Q} (\underline{s}_m \underline{r}_m \hat{b}_m - \underline{s}_m \underline{r}_m \ddot{\bar{r}} - \underline{s}_m \underline{r}_m \ddot{\bar{d}}) \\ &\quad + \underline{Q} (\underline{s}_m \underline{r}_m \hat{b}_m) - (\underline{s}_m \underline{r}_m \hat{b}_m)^* \\ \hat{\underline{l}}_m^* &= \underline{Q} \hat{\underline{l}}_m \end{aligned} \right\} \quad m = 0, 1, 2 \quad (10.148)$$

Die Forderung der Forminvarianz von (10.142) bei Übergang zu einem gleichförmig translatorisch bewegten Beobachtersystem, die Beachtung der Transformationsgesetze und die Bedingung (10.145) zusammen mit (10.142) liefern jetzt

$$\begin{aligned}
 & -\underline{Q}^T \dot{\bar{c}}^* \cdot \left[s_{m\alpha} \bar{b}_m + \bar{y}_m - s_{m\alpha} \ddot{\bar{r}}_{m+1} - s_{m\alpha} \ddot{\bar{d}}_{m+1} \right. \\
 & \quad + \left(M_{m\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m\alpha\beta}^{3\beta} \bar{d} \right)_{;\beta} \\
 & \quad \left. - m \left(M_{m-1\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m-1\alpha\beta}^{3\beta} \bar{d} \right) \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

für beliebige $\dot{\bar{c}} = -\underline{Q}^T \dot{\bar{c}}^*$ (vergl. (4.50), Teil 1). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 & s_{m\alpha} \bar{b}_m + \bar{y}_m - s_{m\alpha} \ddot{\bar{r}}_{m+1} - s_{m\alpha} \ddot{\bar{d}}_{m+1} \\
 & + \left(M_{m\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m\alpha\beta}^{3\beta} \bar{d} \right)_{;\beta} \tag{10.149} \\
 & - m \left(M_{m-1\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m\alpha\beta}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m-1\alpha\beta}^{3\beta} \bar{d} \right) = \bar{0}, \quad m=0,1,2
 \end{aligned}$$

Die erste ($m=0$) dieser drei Vektorgleichungen stellt, wie der Vergleich mit ((8.62), Teil 1) zeigt und wie zu erwarten war, die Bewegungsgleichung 1. Art dar. Die beiden weiteren Gleichungen sind dagegen neue Aussagen. Die Gleichungen (10.149) sollen im folgenden als die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. Art bezeichnet werden.

Entsprechend folgt aus der Forminvarianz von (10.145) mit (10.143)

$$\hat{W}_m^* = \hat{W}_{mb}^* + \hat{W}_{mL}^* + \hat{W}_{mE}^* = 0$$

$$\hat{W}_{mb}^* = \hat{W}_{mb} - \underline{Q} \left(\underline{S}_{mR} \hat{b}_m \right) \cdot \dot{\hat{c}}^*$$

$$\hat{W}_{mL}^* = \hat{W}_{mL} - \underline{Q} \hat{y}_m \cdot \dot{\hat{c}}^*$$

$$\hat{W}_{mE}^* = \hat{W}_{mE}$$

und damit

$$\hat{W}_m^* = \hat{W}_m - \left(\underline{S}_{mR} \hat{b}_m + \hat{y}_m \right) \cdot \underline{Q} \dot{\hat{c}}^* = 0,$$

so daß

$$-\underline{Q}^T \dot{\hat{c}}^* \cdot \left(\underline{S}_{mR} \hat{b}_m + \hat{y}_m \right) = 0$$

für alle $\dot{\hat{c}}^* = -\underline{Q}^T \dot{\hat{c}}^*$. Dies liefert schließlich die Bedingung

$$\underline{S}_{mR} \hat{b}_m + \hat{y}_m = \bar{0}. \quad (10.150)$$

Die erste ($m=0$) dieser Bedingungen ist schon abgeleitet worden (vergl. (8.49), Teil 1)^x und läßt sich einfach interpretieren (Kap. 8.2.1.2, Teil 1).

Die Analyse der Forminvarianz von (10.142) und (10.145) bei Übergang zu einem beliebig rotierenden Beobachtersystem erfordert ähnliche Überlegungen wie in Kap. 8.2.2.3 (Teil 1). Im "gesternnten" Beobachtersystem wird aus (10.142)

^x Es ist zu beachten, daß $\hat{y}_0 = \bar{t}_R^+ \xi^+ + \bar{t}_R^- \xi^-$

$$\begin{aligned}
 S_{mR}^* \dot{\varepsilon}_m^* &= \left[S_{mR}^* \bar{b}_m^* + \dots \right] \cdot \dot{\bar{r}}^* \\
 &= \left[S_{m+1}^* \bar{b}_{m+1}^* + \dots \right] \cdot \dot{\bar{d}}^* \\
 &= \left[M_{m}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha}^* + \dots \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta}^* \\
 &= \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha}^* + \dots \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}^* \\
 &+ h_{m}^{\alpha d} \dot{\bar{d}}_{1\alpha}^* - m h_{m-1}^{\alpha d} \dot{\bar{d}}_{1\alpha}^* \\
 &= S_{mR}^* \dot{\bar{r}}_m^* + \left[(\bar{g}_{R}^* \cdot \bar{N}_{\alpha}^* \dot{\bar{r}}_{1\alpha}^*) (S^*)^m + \dots \right] \\
 &= W_m^* = 0
 \end{aligned}
 \tag{10.151}$$

$m = 0, 1, 2$

und

$$W_m^* = W_m^b + W_m^L + W_m^R = 0, \tag{10.152}$$

Einsetzen der entsprechenden Transformationsgesetze in (10.151) und Beachtung von (10.142), (10.145) und (10.152) ergibt nach Umordnen die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} \cdot \left\{ \bar{r} \times \left[S_{mR} \bar{b}_m + \bar{f}_m - S_{mR} \ddot{\bar{r}} - S_{m+1} \ddot{\bar{d}} \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(M_{m}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} \right) \right] \right. \\
 \left. - m \left(M_{m-1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m-1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} \right) \right\} \\
 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \bar{d} \times \left[s_{mR} \bar{b}_{mH} + \bar{y}_{mH} - s_{mH} \ddot{r} - s_{m+2} \ddot{d} \right. \\
 & \quad + \left(M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d} \right)_{;\beta} \\
 & \quad \left. - m \left(M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{\alpha\beta} \bar{d} \right) \right] \\
 & + \bar{r}_{1\beta} \times \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{\alpha\beta} \bar{d} \right] \\
 & + \bar{d}_{1\beta} \times \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d} \right] \} \\
 & - \underbrace{\left[\underline{Q} (\dot{\bar{r}} - \bar{\omega} \times \bar{r}) \right]}_{\dot{\bar{r}}^*} \left[\underline{Q} s_{mR} \hat{\bar{b}}_m - s_{mR} \hat{\bar{b}}_m^* \right] \\
 & - \underbrace{\left[\underline{Q} (\dot{\bar{d}} - \bar{\omega} \times \bar{d}) \right]}_{\dot{\bar{d}}^*} \left[\underline{Q} s_{m+1} \hat{\bar{b}}_{m+1} - s_{m+1} \hat{\bar{b}}_{m+1}^* \right] \\
 & = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{10.153}$$

Aufgrund der unvollständigen Transformation (10.148) für die Volumenkräfte treten hier die Terme $\hat{\bar{b}}_m^*$ erneut auf. Ihr Transformationsverhalten bzw. das des Leistungsdruckes

$$\sum_{mR} \hat{b}_m^* \cdot \dot{\bar{r}}^* + \sum_{m+1R} \hat{b}_{m+1}^* \cdot \dot{\bar{d}}^*$$

läßt sich aus (10.152) ableiten. Mit

$$\hat{W}_m^* = \hat{W}_{mb}^* + \hat{W}_{mL}^* + \hat{W}_{mL}^* = 0$$

und

$$\begin{aligned} \hat{W}_{mL}^* &= \hat{y}_{jm}^* \cdot \dot{\bar{r}}^* + \hat{y}_{j,m+1}^* \cdot \dot{\bar{d}}^* \\ &= \hat{W}_{mL}^* - \bar{\omega} \cdot \left\{ \bar{r} \times \hat{y}_{jm}^* + \bar{d} \times \hat{y}_{j,m+1}^* \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_{mL}^* &= \frac{1}{2} \left\{ e^{\alpha\beta} \left[\hat{l}_m^* \times (\bar{r}_{1\beta}^* \times \bar{d}^*) + \dots \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\alpha}^* \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\} \\ &= \hat{W}_{mL}^* - \bar{\omega} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \bar{r}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[\hat{l}_m^* \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{l}_{m+1}^* \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \bar{d}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[\hat{l}_{m+1}^* \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{l}_{m+2}^* \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \bar{d} \times \left[\hat{l}_m^* \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{l}_{m+1}^* \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{l}_{m+1}^* \times (\bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{l}_{m+2}^* \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \right\} \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_{mb}^* &= S_{mR} \hat{b}_m^* \cdot \dot{\bar{r}}^* + S_{m+1R} \hat{b}_{m+1}^* \cdot \dot{\bar{d}}^* \\
 &= -\hat{W}_{mL}^* - \hat{W}_{m+1L}^* \\
 &= -\hat{W}_{mL} - \hat{W}_{m+1L} \\
 &\quad + \bar{\omega} \cdot \left\{ \bar{r} \times \hat{y}_m + \bar{d} \times \hat{y}_{m+1} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\bar{r}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[\hat{\ell}_m \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_{m+1} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \bar{d}_{1\alpha} \times e^{\alpha\beta} \left[\hat{\ell}_{m+1} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_{m+2} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \bar{d} \times \left[\hat{\ell}_m \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_{m+1} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \hat{\ell}_{m+1} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_{m+2} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \right\} \\
 &\quad \left\{ \dots \right\} =: \hat{H}_m \\
 &= \hat{W}_{mb} + \bar{\omega} \cdot \hat{H}_m.
 \end{aligned}$$

Damit werden die letzten beiden Klammerterme in (10.153)

$$\begin{aligned}
 &[Q(\dot{\bar{r}} - \bar{\omega} \times \bar{r})] \cdot [Q S_{mR} \hat{b}_m^* - S_{mR} \hat{b}_m^*] \\
 &+ [Q(\dot{\bar{d}} - \bar{\omega} \times \bar{d})] \cdot [Q S_{m+1R} \hat{b}_{m+1}^* - S_{m+1R} \hat{b}_{m+1}^*] \\
 &= -\bar{\omega} \cdot \hat{H}_m - \bar{\omega} \cdot \left\{ \bar{r} \times S_{mR} \hat{b}_m^* + \bar{d} \times S_{m+1R} \hat{b}_{m+1}^* \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit diesem Zwischenresultat wird aus (10.153) nach Umstellung und Zusammenfassung

$$\bar{\omega} \cdot \left\{ \bar{\mathcal{D}}_m^s + \overset{1}{\bar{\mathcal{D}}}_m \right\} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (10.154)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_{m^s} := & \left\{ \bar{r} \times \left[\underset{m^2}{S_R} \bar{b}_m + \bar{y}_m - \underset{m^2}{S_R} \bar{r}'' - \underset{m+1}{S_R} \bar{d}'' \right. \right. \\ & + \left(\underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{d} \right) / \beta \\ & \left. \left. - m \left(\underset{m-1}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m-1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d} \right) \right] \right. \\ & + \bar{d} \times \left[\underset{m+1}{S_R} \bar{b}_{m+1} + \bar{y}_{m+1} - \underset{m+1}{S_R} \bar{r}'' - \underset{m+2}{S_R} \bar{d}'' \right. \\ & + \left(\underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+2}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d} \right) / \beta \\ & \left. \left. - m \left(\underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{d} \right) \right] \right. \\ & + \bar{r}_{1\beta} \times \left[\underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{d} \right] \\ & \left. + \bar{d}_{1\beta} \times \left[\underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+2}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d} \right] \right\} \quad (10.155) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\bar{D}}_m &= \bar{r} \times \left[s_{m2} \hat{b}_m + \hat{y}_m \right] \\
 &+ \bar{d} \times \left[s_{m1} \hat{b}_m + \hat{y}_{m1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\hat{\ell}_m \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_{m1} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \hat{\ell}_{m1} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\ell}_{m+2} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right) \right] \\
 &+ \bar{r}_{1\alpha} \times \frac{1}{2} e^{i\alpha} \left[\hat{\ell}_m \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_{m1} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \\
 &+ \bar{d}_{1\alpha} \times \frac{1}{2} e^{i\alpha} \left[\hat{\ell}_{m1} \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_{m+2} \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right].
 \end{aligned}
 \tag{10.156}$$

Da (10.154) linear in $\bar{\omega}$ ist und für beliebige $\bar{\omega}$ gilt, erhält man schließlich aus der Invarianzforderung (10.154)

$$\bar{D}_m^s + \hat{D}_m^s = 0, \quad m = 0, 1, 2.
 \tag{10.157}$$

Mit den Bedingungen (10.149) und (10.150) verschwinden die durch die $\llbracket \dots \rrbracket$ -Klammern gekennzeichneten Terme in (10.155) und (10.156). Der auf der rechten Seite von (10.156) verbleibende Restausdruck ist dann

$$\begin{aligned}
 \hat{\bar{D}}_{red}^{\wedge} & := \bar{d} \times \left[\mathcal{S}_{m+1} \bar{b}_{m+1}^{\wedge} + \hat{y}_{m+1}^{\wedge} \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \left(\hat{\bar{L}}_m^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\bar{L}}_{m+1}^{\wedge} \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right. \\
 & \quad \left. \left. + \hat{\bar{L}}_{m+1}^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \hat{\bar{L}}_{m+2}^{\wedge} \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right) \right] \quad (10.158) \\
 & \quad + \bar{r}_{12} \times \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \left[\hat{\bar{L}}_m^{\wedge} \times (\bar{r}_{13} \times \bar{d}) + \hat{\bar{L}}_{m+1}^{\wedge} \times (\bar{d}_{13} \times \bar{d}) \right] \\
 & \quad + \bar{d}_{12} \times \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \left[\hat{\bar{L}}_{m+1}^{\wedge} \times (\bar{r}_{13} \times \bar{d}) + \hat{\bar{L}}_{m+2}^{\wedge} \times (\bar{d}_{13} \times \bar{d}) \right].
 \end{aligned}$$

Für $m=0$ stimmt dieser Ausdruck mit $\hat{\bar{D}}_{red}^{\wedge}$ ((8.68), Teil 1) überein, wenn man die unterschiedliche Namensgebung einzelner Terme beachtet. Nach ((8.70), Teil 1) wird also

$$\hat{\bar{D}}_0^{\wedge} = \bar{0}$$

gefordert. Mit denselben Argumenten, die zu dieser Bedingung führten, soll hier jetzt also generell für alle m

$$\hat{\bar{D}}_m^{\wedge} = \bar{0}, \quad m = 0, 1, 2 \quad (10.159)$$

verlangt werden. Dies entspricht der Forderung, daß die gedachten mechanischen Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag zu den Bilanzgleichungen (10.157) liefern sollen. Damit wird aus (10.157)

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{D}}_{mS} &= \bar{d} \times \left[\underset{m+1}{g}_r \bar{b}_{m+1} + \bar{y}_{m+1} - \underset{m+1}{g}_r \bar{r}^{\ddot{}} - \underset{m+2}{g}_r \bar{d}^{\ddot{}} \right. \\
 &\quad + \left(\underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+2}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{3\beta} \bar{d} \right)_{;\beta} \\
 &\quad \left. - \left(\underset{m}{M}^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{33} \bar{d} \right) \right] \\
 &\quad + \bar{r}_{1\beta} \times \left[\underset{m}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{41} \bar{d} \right] \\
 &\quad + \bar{d}_{1\beta} \times \left[\underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+2}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{3\beta} \bar{d} \right] \\
 &= \bar{0}.
 \end{aligned}
 \tag{10.160}$$

Die weitere Auswertung von (10.160) erfolgt jetzt analog zu der Entwicklung in Kap. 8.2.2.4 (Teil 1). Umordnen von $\bar{\mathcal{D}}_{mS}$ liefert

$$\bar{\mathcal{D}}_{mS} = \bar{d} \times \bar{b}_m + \bar{c}_m \stackrel{!}{=} \bar{0}
 \tag{10.161}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_m &:= \underset{m+1}{g}_r \bar{b}_{m+1} + \bar{y}_{m+1} - \underset{m+1}{g}_r \bar{r}^{\ddot{}} - \underset{m+2}{g}_r \bar{d}^{\ddot{}} \\
 &\quad + \left(\underset{m+1}{M}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+2}{M}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{3\beta} \bar{d} \right)_{;\beta} \\
 &\quad - m \left(\underset{m}{M}^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + \underset{m+1}{M}^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + \underset{m}{M}^{33} \bar{d} \right) \\
 &\quad - \left(\underset{m}{M}^{3\beta} \bar{r}_{1\beta} + \underset{m+1}{M}^{3\beta} \bar{d}_{1\beta} \right), \quad m=0,1,2
 \end{aligned}
 \tag{10.162}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{e}_m &:= -(\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{r}_{1\beta}) \frac{1}{2} (M_m^{\alpha\beta} - M_m^{\beta\alpha}) \\ &\quad - (\bar{r}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) \left(M_{m1}^{\alpha\beta} - M_{m1}^{\beta\alpha} \right) \\ &\quad - (\bar{d}_{1\alpha} \times \bar{d}_{1\beta}) \frac{1}{2} (M_{m2}^{\alpha\beta} - M_{m2}^{\beta\alpha}). \end{aligned} \quad (10.163)$$

Aus (10.161) ergebensich nach skalarer Multiplikation mit \bar{d} die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen

$$\bar{e}_m \cdot \bar{d} = 0, \quad m = 0, 1, 2. \quad (10.164)$$

Entsprechend ((8.75), Teil 1) führt die Zerlegung von \bar{t}_m auf

$$\bar{t}_m = \tilde{Q}_m \bar{d} + \tilde{P}_m (\bar{d} \times \bar{e}_m). \quad (\text{keine Summation}) \quad (10.165)$$

Das Vektorprodukt mit \bar{d} ergibt

$$\bar{d} \times \bar{t}_m = \tilde{P}_m \bar{d} \times (\bar{d} \times \bar{e}_m) = -\tilde{P}_m (\bar{d} \cdot \bar{d}) \bar{e}_m$$

und mit (10.161) folgt daraus sofort

$$\tilde{P}_m (\bar{d} \cdot \bar{d}) = 1,$$

so daß

$$\tilde{P}_m = \frac{1}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \quad (10.166)$$

für alle m .

Mit der Zerlegung (vergl. (8.77), Teil 1)

$$\bar{d}_{1\alpha} = \eta_\alpha^{\beta} \bar{r}_{1\beta} + \mu_\alpha \bar{d}$$

läßt sich für die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen (10.164) schreiben (vergl. S. 142-144, Teil 1)

$$\epsilon_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} (M_m^{\alpha\beta} - M_m^{\beta\alpha}) + (M_{m+1}^{\alpha\beta} - M_{m+1}^{\beta\alpha}) \eta_8^\beta \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (M_{m+2}^{\alpha\beta} - M_{m+2}^{\beta\alpha}) (\eta_8^\alpha \eta_8^\beta) \right] = 0$$

bzw.

$$m = 0, 1, 2$$

$$(M_m^{12} - M_m^{21}) + (M_{m+1}^{12} - M_{m+1}^{21}) (\eta_1^1 + \eta_2^1) \\ + (M_{m+2}^{12} - M_{m+2}^{21}) (\eta_1^1 \eta_2^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) = 0$$

(10.164)^I

oder

$$(M_m^{\alpha\beta} - M_m^{\beta\alpha}) + (M_{m+1}^{\alpha\beta} - M_{m+1}^{\beta\alpha}) \text{tr}(\eta_8^\beta) \\ + (M_{m+2}^{\alpha\beta} - M_{m+2}^{\beta\alpha}) \det(\eta_8^\beta) = 0.$$

Aus (10.165) wird schließlich analog zu ((8.82), Teil 1)

$$\bar{b}_m = \tilde{Q}_m \bar{d} + \tilde{P}_m (\bar{d} \times \bar{e}) = Q_m \bar{d} + L_m^\alpha \bar{r}_{1\alpha}$$

bzw. mit der Definitionsgleichung (10.162)

$$\begin{aligned} & \sum_{m+1}^3 \bar{b}_{m+1} + \tilde{r}_{m+1} - \sum_{m+1}^3 \bar{r}_{m+1} - \sum_{m+2}^3 \bar{d}_{m+2} \\ & + (M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\beta\beta} \bar{d})_{;\beta} \\ & - m (M_m^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{\beta 3} \bar{d}) \\ & - (M_m^{\beta\beta} \bar{r}_{1\beta} + M_{m+1}^{\beta\beta} \bar{d}_{1\beta}) \\ & - Q_m \bar{d} - L_m^\alpha \bar{r}_{1\alpha} = \bar{0}, \end{aligned} \tag{10.167}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 Q_m^{\alpha} &:= \tilde{Q}_m^{\alpha} + \frac{\bar{d} \cdot \bar{F}_{\alpha}}{\bar{d} \cdot \bar{d}} \left[\left(M_{m1}^{\alpha\beta} - M_{m1}^{\beta\alpha} \right) \mu_{\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(M_{m2}^{\beta\gamma} - M_{m2}^{\gamma\beta} \right) \left(\eta_{\gamma}^{\alpha} \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\gamma} \right) \right] \\
 L_m^{\alpha} &:= - \left(M_{m1}^{\alpha\beta} - M_{m1}^{\beta\alpha} \right) \mu_{\beta} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(M_{m2}^{\beta\gamma} - M_{m2}^{\gamma\beta} \right) \left(\eta_{\gamma}^{\alpha} \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\gamma} \right) .
 \end{aligned}
 \tag{10.168}$$

Auch hier ist die erste ($m=0$) der Vektorgleichungen (10.167) schon bekannt: Wie der Vergleich mit (E-2) zeigt und auch natürlich zu erwarten ist, stimmt sie mit der Bewegungsgleichung 2. Art überein. Die beiden weiteren ($m=1,2$) sind dagegen ein neues Ergebnis. Im weiteren sollen die Gleichungen (10.167) als die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 2. Art bezeichnet werden.

Die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art, auf die im folgenden Kapitel weiter eingegangen werden muß, erlauben jetzt, in den entropischen Bilanzgleichungen (10.142) die eingepprägten aktuellen Lasten und die Trägheitsterme zu eliminieren. Mit (10.145) reduziert sich damit (10.142) auf

$$\begin{aligned}
 \sum_{mR} \dot{E}_m^{\alpha} &- \sum_m W_{iu} \\
 &+ \sum_m h_m^{\alpha} : d - \sum_{m-1} h_m^{\alpha} \\
 &- \sum_{mR} \dot{\gamma}_m^{\alpha} + \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^{\alpha})^m + (\bar{q}_R \cdot \bar{N} \xi)^- (-s^{\alpha})^m \right] \\
 &= 0 , \quad m=0,1,2 ,
 \end{aligned}
 \tag{10.169}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 W_{m\text{in}} &:= \left[Q_m \bar{d} + L_m^\alpha \bar{r}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{r}_{1\beta} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d}_{1\beta} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \\
 &+ \left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} \\
 &+ \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+2}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{m+1}^{3\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 &= M_m^{\alpha\beta} (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta}) \\
 &+ M_{m+1}^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} + \bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &+ M_{m+2}^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &+ M_m^{3\beta} (\bar{d} \cdot \dot{\bar{r}}_{1\beta} + \bar{r}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}}) \\
 &+ M_{m+1}^{3\beta} (\bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} + \bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}}) \\
 &+ Q_m (\bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}) \\
 &+ L_m^\alpha (\bar{r}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}) .
 \end{aligned}
 \tag{10.170}$$

Für ($m=0$) stellt (10.169) erwartungsgemäß nichts anderes dar als die reduzierte, lokale 2D-Energiebilanzgleichung des 1. schalentheoretischen Konzepts (vergl. (E-5)). Es sollen deshalb die Bedingungen (10.169) als die verallgemeinerten, reduzierten 2D-Energiebilanzgleichungen der Schale bezeichnet werden. Dementsprechend heißen die Ausdrücke $W_{m\text{in}}$ die verallgemeinerten Elementarleistungen der Momente.

Die kinematischen Variablen in (10.170) können mit (9.53) bis (9.56) durch den minimalen kinematischen Variablensatz \mathcal{K} analog zu (10.108) ausgedrückt werden. Man erhält für die Elementarleistungen der Momente

$$\begin{aligned}
 W_m^{\dot{a}_{\alpha\beta}} &= \dot{a}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[M_m^{\alpha\beta} + (M_{m+1}^{\gamma\beta} - M_{m+1}^{\beta\gamma}) \eta_\gamma^\alpha - M_{m+2}^{\delta\gamma} \eta_\gamma^\beta \eta_\delta^\alpha \right] \\
 &+ \dot{a}_{\alpha\beta} \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} + M_{m+2}^{\gamma\beta} \eta_\gamma^\alpha \right] \\
 &+ \dot{a}_\beta \left[M_m^{\gamma\beta} + (M_{m+1}^{\alpha\beta} - M_{m+1}^{\beta\alpha}) \mu_\alpha - M_{m+2}^{\delta\gamma} \eta_\delta^\beta \mu_\gamma \right] \\
 &+ \dot{a}_\beta \left[M_m^{\gamma\beta} + M_{m+2}^{\delta\beta} \mu_\delta \right] \\
 &+ \dot{a}^\alpha \frac{1}{2} \left[Q_m - M_{m+2}^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right] \\
 &+ \langle \bar{r}_{\alpha}^{\dot{r}_{\beta}} \rangle \left[M_m^{\alpha\beta} + (M_{m+1}^{\gamma\beta} - M_{m+1}^{\beta\gamma}) \eta_\gamma^\alpha - M_{m+2}^{\delta\gamma} \eta_\delta^\beta \eta_\delta^\alpha \right] \\
 &+ \bar{r}_{\alpha}^{\dot{a}} \left[L_m^\alpha - (M_{m+1}^{\beta\alpha} - M_{m+1}^{\alpha\beta}) \mu_\beta + M_{m+2}^{\gamma\beta} (\eta_\gamma^\alpha \mu_\beta - \eta_\beta^\alpha \mu_\gamma) \right]
 \end{aligned}
 \tag{10.170}^I$$

Unter Beachtung der verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen (10.164)^I verschwindet die vorletzte Zeile identisch und mit der Definitionsgleichung (10.168)₂ für L_m^α verschwindet die eckige Klammer der letzten Zeile. Berücksichtigt man außerdem, daß $\dot{a}_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und daher nur der symmetrische Teil des Klammerterms $[M_m^{\alpha\beta} + \dots]$ einen Beitrag liefert, dann wird schließlich aus (10.170)^I

$$\begin{aligned}
 W_m^{in} &= \dot{a}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[M_m^{(\alpha\beta)} + N_m^{(\alpha\beta)} \right] \\
 &+ \dot{d}_{\alpha\beta} \left[M_{m+1}^{\alpha\beta} + M_{m+2}^{\delta\beta} \eta_\delta^\alpha \right] \\
 &+ \dot{d}_{\alpha\beta} \left[M_m^{\beta\delta} + (M_{m+1}^{\alpha\beta} - M_{m+1}^{\beta\alpha}) \mu_\alpha - M_{m+2}^{\delta\delta} \eta_\delta^\beta \mu_\alpha \right] \\
 &+ \dot{v}_\beta \left[M_m^{\beta\delta} + M_{m+2}^{\alpha\delta} \mu_\alpha \right] \\
 &+ \dot{v}^\alpha \frac{1}{2} \left[Q_m - M_{m+2}^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right]
 \end{aligned}
 \tag{10.170}^{II}$$

mit

$$\begin{aligned}
 M_m^{(\alpha\beta)} &:= \frac{1}{2} \left(M_m^{\alpha\beta} + M_m^{\beta\alpha} \right) \\
 N_m^{(\alpha\beta)} &:= \frac{1}{2} \left(N_m^{\alpha\beta} + N_m^{\beta\alpha} \right) \\
 N_m^{\alpha\beta} &:= \left(M_{m+1}^{\delta\beta} - M_m^{\beta\delta} \right) \eta_\delta^\alpha - M_{m+2}^{\delta\delta} \eta_\delta^\beta \eta_\delta^\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{10.171}$$

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Analyse werden durch die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art (10.149) und (10.167), die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen (10.164)^I und die verallgemeinerten 2D-Energiebilanzgleichungen (10.169) mit den Elementarleistungen (10.170)^{II} dargestellt. Sie schließen alle in Teil I für das 1. schalentheoretische Konzept abgeleiteten wesentlichen Gleichungen (eigentliche Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art etc.) mit ein.

Vier Struktureigenschaften, mit denen sich diese Gleichungen wesentlich von denen des 2. schalentheoretischen Konzepts (Kap. 10.4) unterscheiden, sollen angemerkt werden:

- (1) Es treten Bewegungsgleichungen höherer Ordnung auf; diese Ordnungsänderung bezieht sich aber nur auf die Momente der Spannungen und der Dichte, nicht auf den Grad der Zeitableitung der kinematischen Größen \bar{r} und \bar{d} .
- (2) Die Momente der Spannungen sind nicht notwendig symmetrisch.
- (3) Es mußten unbestimmte Beanspruchungsgrößen Q_m ($m=0,1,2$) eingeführt werden, für die eine Interpretation durch Integrale der Spannungen noch fehlt. Als Arbeitshypothese muß die Existenz konstitutiver Gleichungen für die Q_m vorausgesetzt werden.
- (4) Die in den Differentialgleichungen auftretenden (nichtsynchronen) Beanspruchungsgrößen sind in dem folgenden Schema zusammengefaßt:

$$M_0 := \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccccc} M_0^{\alpha\beta} & M_1^{\alpha\beta} & M_2^{\alpha\beta} & M_3^{\alpha\beta} & M_4^{\alpha\beta} \\ M_0^{\beta\alpha} & M_1^{\beta\alpha} & M_2^{\beta\alpha} & M_3^{\beta\alpha} & M_4^{\beta\alpha} \end{array} \right] \\ \left. \begin{array}{l} M_0^{\alpha 3} \quad M_1^{\alpha 3} \quad M_2^{\alpha 3} \quad M_3^{\alpha 3} \\ M_0^{\beta 3} \quad M_1^{\beta 3} \quad M_2^{\beta 3} \\ Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \end{array} \right\} := M_{II} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Nicht in den verallgemeinerten,} \\ \text{reduzierten 2D-Energiebilanz-} \\ \text{gleichungen vorhanden} \end{array} \right\} \quad (10.172)$$

Für den Fall konstanter Temperatur über die Schalendicke ($\lambda_1 = 0 = \lambda_2$) ergeben sich nur die bekannten Gleichungen 0. Ordnung ($m=0$); in diesen treten als Beanspruchungsgrößen nur die durch eine gestrichelte Linie eingerahmten Größen auf.

Von besonderer Bedeutung ist, daß die Momente $M_m^{\alpha 3}$ ($m=0,1,2,3$) und $M_m^{\beta 3}$ ($m=0,1,2$) nur in den Bewegungsgleichungen höherer Ordnung vorhanden sind und nicht in den verallgemeinerten, reduzierten 2D-Energiebilanzgleichungen. Dies bedeutet, daß offensichtlich keine Möglichkeit besteht, für diese Gruppe von Momenten konstitutive Einschränkungen aus der 2D-Entropiegleichung, in die die verallgemeinerten 2D-Energiebilanzgleichungen eingehen, zu gewinnen. Selbst wenn man diese Gruppe von Beanspruchungsgrößen für den Augenblick von der Betrachtung ausnimmt, ist die Anzahl der übrigen Beanspruchungsgrößen größer als die Anzahl der beliebig einstellbaren Variablen im minimalen kinematischen Variablensatz \mathcal{K} . Damit dürften nur "summarische" konstitutive Restriktionen aus der Entropiegleichungen zu erwarten sein.

Andererseits stellen die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art insgesamt sechs Vektorgleichungen (Differentialgleichungen) für \bar{r} und \bar{d} dar. Diese Gleichungen müssen verträglich und auf zwei Vektorgleichungen reduzierbar sein. Man kann vermuten, daß aus dieser Forderung weitere, insbesondere konstitutive Einschränkungen folgen, die möglicherweise die hier aufgeworfenen Fragen lösen.

10.6.3.3 Verträglichkeitsbedingungen für die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art

Die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art stellen insgesamt sechs vektorielle Differentialgleichungen dar. Nach Auflösung hinsichtlich der Trägheitsterme in (10.149) und (10.167) erhält man im einzelnen für $m = 0, 1, 2$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_{0R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{1R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{10} \\ \mathcal{S}_{1R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{2R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{11} \\ \mathcal{S}_{2R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{3R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{12} \end{aligned} \right\} \text{aus (10.149)} \quad (10.149)^I$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_{1R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{2R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{20} \\ \mathcal{S}_{2R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{3R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{21} \\ \mathcal{S}_{3R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{4R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{22} \end{aligned} \right\} \text{aus (10.167)} \quad (10.167)^I$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{10} &:= \mathcal{S}_{0R} \bar{b}_0 + \bar{y}_0 + [M_{00}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{01}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{00}^{\beta\beta} \bar{d}]_{;\beta} \\ \bar{f}_{11} &:= \mathcal{S}_{1R} \bar{b}_1 + \bar{y}_1 + [M_{11}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{12}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{11}^{\beta\beta} \bar{d}]_{;\beta} \\ &\quad - [M_{01}^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{10}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_{00}^{\beta\beta} \bar{d}] \end{aligned} \right\} (10.173)$$

$$\bar{f}_{12} := \frac{g}{2R} \bar{b}_2 + \bar{f}_2 + \left[M_2^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_2^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} - 2 \left[M_1^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{33} \bar{d} \right]$$

$$\bar{f}_{12} := \frac{g}{2R} \bar{b}_2 + \bar{f}_2 + \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} - \left[M_0^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d} + L_0^{\alpha} \bar{r}_{1\alpha} \right]$$

$$\bar{f}_{21} := \frac{g}{2R} \bar{b}_2 + \bar{f}_2 + \left[M_2^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_2^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} - \left[M_1^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{33} \bar{d} \right] - \left[M_1^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d} + L_1^{\alpha} \bar{r}_{1\alpha} \right] \quad (10.173)$$

$$\bar{f}_{22} := \frac{g}{3R} \bar{b}_3 + \bar{f}_3 + \left[M_3^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_4^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_3^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} - 2 \left[M_2^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_2^{33} \bar{d} \right] - \left[M_2^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d} + L_2^{\alpha} \bar{r}_{1\alpha} \right]$$

Von diesen verallgemeinerten Bewegungsgleichungen (10.149)^I und (10.167)^I haben für $m=1,2$ je zwei identische

Trägheitsterme

$$\frac{g}{mR} \ddot{\bar{r}} + \frac{g}{m+1R} \ddot{\bar{d}},$$

externe Belastungsterme

$$\frac{g}{mR} \bar{b}_m + \bar{f}_m$$

und identische Divergenzterme

$$\left[M_m^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_{m+1}^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_m^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta}$$

Da gefordert werden muß, daß die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen miteinander verträglich sind, ist zunächst

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{11} &= \bar{f}_{20} \\ \bar{f}_{12} &= \bar{f}_{21} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(Merkmal: Summe der} \\ \text{Indizes gleich)} \end{array} \quad (10.174)$$

Die externen Belastungsterme und die Divergenzterme heben sich in (10.174) heraus, und es bleiben die folgenden Bedingungen nach Vorzeichenwechsel

$$\left. \begin{aligned} &M_0^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{33} \bar{d} \\ &= M_0^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d} + L_0^{\alpha} \bar{r}_{1\alpha} \quad , \\ &2 \left(M_1^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{33} \bar{d} \right) \\ &= M_1^{\alpha 3} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha 3} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{33} \bar{d} \\ &\quad + M_1^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d} + L_1^{\alpha} \bar{r}_{1\alpha} \end{aligned} \right\} (10.175)$$

Mit den Definitionsgleichungen (10.168)₂ für L_m^{α} und der Zerlegung von $\bar{d}_{1\alpha}$ wird aus (10.175)

$$\left. \begin{aligned} &[(M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha}) + (M_1^{\beta 3} - M_1^{3\beta}) \eta_{\beta}^{\alpha}] \\ &+ (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_{\beta} - \frac{1}{2} (M_2^{\beta 3} - M_2^{3\beta}) (\eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\beta}) \bar{r}_{1\alpha} \\ &+ [(M_0^{33} - Q) + (M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) \mu_{\alpha}] \bar{d} = \bar{0} \end{aligned} \right\} (10.176)$$

$$\left. \begin{aligned} &[(M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha}) + (M_2^{\beta 3} - M_2^{3\beta}) \eta_{\beta}^{\alpha}] \\ &+ (M_2^{\alpha\beta} - M_2^{\beta\alpha}) \mu_{\beta} - \frac{1}{2} (M_3^{\beta 3} - M_3^{3\beta}) (\eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\beta} - \eta_{\beta}^{\alpha} \mu_{\beta}) \bar{r}_{1\alpha} \\ &+ [(M_1^{33} - Q) + (M_2^{\alpha 3} - M_2^{3\alpha}) \mu_{\alpha}] \bar{d} = \bar{0} \end{aligned} \right\}$$

Da \bar{r}_α und \bar{d} eine linear unabhängige Vektorbasis darstellen, müssen die Komponenten in (10.175) verschwinden; man erhält also schließlich

$$\left. \begin{aligned}
 & \left(M_0^{\alpha 3} - M_0^{3\alpha} \right) + \left(M_1^{\beta 3} - M_1^{3\beta} \right) \eta_\beta^\alpha \\
 & + \left(M_1^{\alpha \beta} - M_1^{\beta \alpha} \right) \mu_\beta - \frac{1}{2} \left(M_2^{\delta \delta} - M_2^{\delta \delta} \right) \left(\eta_\delta^\alpha \mu_\delta - \eta_\delta^\alpha \mu_\delta \right) = 0 \\
 & \left(M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha} \right) + \left(M_2^{\beta 3} - M_2^{3\beta} \right) \eta_\beta^\alpha \\
 & + \left(M_2^{\alpha \beta} - M_2^{\beta \alpha} \right) \mu_\beta - \frac{1}{2} \left(M_3^{\delta \delta} - M_3^{\delta \delta} \right) \left(\eta_\delta^\alpha \mu_\delta - \eta_\delta^\alpha \mu_\delta \right) = 0 \\
 & \left(M_0^{33} - Q \right) + \left(M_1^{\alpha 3} - M_1^{3\alpha} \right) \mu_\alpha = 0 \\
 & \left(M_1^{33} - Q \right) + \left(M_2^{\alpha 3} - M_2^{3\alpha} \right) \mu_\alpha = 0
 \end{aligned} \right\} (10.177)$$

Diese Bedingungen sollen als Verträglichkeitsbedingungen 1. Art bezeichnet werden. Es ist offensichtlich, daß sie für symmetrische Momente und $M_0^{33} = Q$, $M_1^{33} = Q$ erfüllt werden. Unterstellt man, daß für alle Beanspruchungsgrößen konstitutive Gleichungen vorgegeben werden können, dann müssen diese Gleichungen durch die Stofffunktionen identisch erfüllt werden, denn andernfalls würden sie Verknüpfungen zwischen den kinematischen und thermischen Zustandsvariablen darstellen, die aber als unabhängig einstellbar angesehen werden.

Mit (10.177) reduzieren sich die sechs verallgemeinerten Bewegungsgleichungen auf vier, und zwar

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{0R} \ddot{\bar{r}} + \rho_{2R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{10} \\
 \rho_{1R} \ddot{\bar{r}} + \rho_{2R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{20} (= \bar{f}_{11}) \\
 \rho_{2R} \ddot{\bar{r}} + \rho_{3R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{21} (= \bar{f}_{12}) \\
 \rho_{3R} \ddot{\bar{r}} + \rho_{4R} \ddot{\bar{d}} &= \bar{f}_{22}
 \end{aligned} \right\} (10.178)$$

Die ersten beiden Gleichungen mit den rechten Seiten \bar{f}_{10} und \bar{f}_{20} stellen die bekannten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art dar, wie sie bei der quasi-isothermen Theorie entwickelt wurden. Sie sollen auch hier als die wesentlichen Bewegungsgleichungen angesehen werden.

Die vier Gleichungen für die beiden Beschleunigungen $\ddot{\bar{r}}$ und $\ddot{\bar{d}}$ stellen ein überbestimmtes lineares System von Vektorgleichungen dar. Wenn es eine gemeinsame Lösung für die beiden Beschleunigungen zulassen soll, also verträglich ist, dann müssen die beiden höheren Bewegungsgleichungen (10.178)₃ und (10.178)₄ als Linearkombinationen der bekannten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art (10.178)₁₊₂ darstellbar sein. Mit

$$\Delta := \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (10.179)$$

erhält man damit die folgenden Bedingungen für die rechten Seiten von (10.178)₃₊₄:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{21} &= \frac{1}{\Delta} (g_{22} g_{23} - g_{32} g_{22}) \bar{f}_{10} + \frac{1}{\Delta} (g_{22} g_{33} - g_{12} g_{23}) \bar{f}_{20} \\ \bar{f}_{22} &= \frac{1}{\Delta} (g_{32} g_{22} - g_{22} g_{12}) \bar{f}_{10} + \frac{1}{\Delta} (g_{32} g_{23} - g_{12} g_{33}) \bar{f}_{20} . \end{aligned} \right\} (10.180)$$

Mit (10.173) wird daraus

$$\left. \begin{aligned} & (g_{22} g_{23} - g_{32} g_{22}) \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{\beta\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \\ & + (g_{32} g_{22} - g_{22} g_{12}) \left\{ \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{\beta\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \right. \\ & \quad \left. - \left[M_0^{\beta\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\beta\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d} + L_0^{\alpha} \bar{r}_{1\alpha} \right] \right\} \end{aligned} \right\} (10.180)^I$$

— ...

$$\begin{aligned}
 & - \Delta \left\{ \left[M_2^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_2^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \right. \\
 & \quad - \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{3\beta} \bar{d} \right] \\
 & \quad \left. - \left[M_1^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1 \bar{d} + L_1^\alpha \bar{r}_{1\alpha} \right] \right\} \\
 = & \Delta \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2R & 2 \end{smallmatrix} \bar{b} + \bar{y}_2 \right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2R & 2R \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3R & 3R \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0R & 0 \end{smallmatrix} \bar{b} + \bar{y}_0 \right) \\
 & \quad - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0R & 3R \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1R & 2R \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1R & 1 \end{smallmatrix} \bar{b} + \bar{y}_1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3R & 2R \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 4R & 1R \end{smallmatrix} \right) \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \\
 + & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0R & 4R \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1R & 3R \end{smallmatrix} \right) \left\{ \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \right. \\
 & \quad \left. - \left[M_0^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0 \bar{d} + L_0^\alpha \bar{r}_{1\alpha} \right] \right\} \\
 & - \Delta \left\{ \left[M_3^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_4^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_3^{3\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \right. \\
 & \quad - 2 \left[M_2^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_2^{3\beta} \bar{d} \right] \\
 & \quad \left. - \left[M_2^{3\alpha} \bar{r}_{1\alpha} + M_3^{3\alpha} \bar{d}_{1\alpha} + Q_2 \bar{d} + L_2^\alpha \bar{r}_{1\alpha} \right] \right\} \\
 = & \Delta \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3R & 0 \end{smallmatrix} \bar{b} + \bar{y}_3 \right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1R & 2R \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 4R & 1R \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0R & 0 \end{smallmatrix} \bar{b} + \bar{y}_0 \right) \\
 & \quad - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0R & 4R \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1R & 3R \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1R & 1 \end{smallmatrix} \bar{b} + \bar{y}_1 \right).
 \end{aligned}$$

(10.180)^I

Die Bedingungen (10.180) oder (10.180)^I stellen sechs skalare Gleichungen dar, die als Verträglichkeitsbedingungen 2. Art bezeichnet werden sollen.

Die Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art, die insgesamt 12 skalare Komponentengleichungen umfassen, sind insbesondere dadurch gekennzeichnet, daß die Trägheitsterme eliminiert sind. Sie ersetzen die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen mit den rechten Seiten $\bar{f}_m, \bar{f}_{m2}, \bar{f}_{m1}, \bar{f}_{m2}$.

Auf zwei wesentliche Unterschiede zwischen den Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art soll hingewiesen werden: Die Verträglichkeitsbedingungen 1. Art sind algebraische Beziehungen für die Beanspruchungsgrößen und externe mechanische Einwirkungen sind in den Beziehungen nicht vorhanden; die Verträglichkeitsbedingungen 2. Art sind dagegen Differentialgleichungen für die Beanspruchungsgrößen und die externen Einwirkungen sind nicht eliminierbar.*

Die Gesamtheit aller bisher abgeleiteten Beziehungen kann jetzt dahingehend analysiert werden, in wieweit ein Teil dieser Beziehungen entkoppelt von den anderen behandelt werden kann. Dazu ist es wichtig festzustellen, daß ein Teil der Beanspruchungsgrößen (Untermenge M_{II}), u.z.

$$M_{II} := \left\{ \begin{array}{cccc} M_{0\alpha 3} & M_{1\alpha 3} & M_{2\alpha 3} & M_{3\alpha 3} \\ M_{0\beta 3} & M_{1\beta 3} & M_{2\beta 3} & \end{array} \right\}, M_{II} \subset M_0 \quad (10.181)$$

nur in die Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art eingehen; sie gehen nicht in die folgenden Beziehungen ein:

- Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art, (10.149)^I₁, (10.167)^I₁
- Verallgemeinerte, reduzierte** 2D-Energiebilanzgleichungen (10.169)
- Verallgemeinerte Orthogonalitätsbedingungen (10.164)^I
- Entropiegleichung (10.15) bzw. die daraus resultierenden Restriktionen;

} (10.182)

* Man kann beispielhaft zeigen, daß die Beiträge der Massenkraftdichte sich nicht identisch herausheben.

** Diese Form setzt die Erfüllung sämtlicher verallgemeinerter Bewegungsgleichungen und der verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen voraus.

hier gehen von den Beanspruchungsgrößen nur (Untermenge M_I)

$$M_I := \left\{ \begin{array}{l} M_m^{\alpha\beta} \\ M_m^{\beta\alpha} \\ Q_m \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} m = 0, 1, \dots, 4 \\ m = 0, 1, 2, 3 \\ m = 0, 1, 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} M_I \subset M_0 \\ M_0 = M_I \cup M_{\bar{I}} \end{array} \right\} \quad (10.183)$$

ein. Geht man davon aus, daß für diese Größen Stofffunktionen angegeben werden können, dann sind die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen und die Entropieungleichung als identisch zu erfüllende, konstitutive Restriktionen anzusehen. Für die wesentlichen Lösungsfunktionen $\bar{r}(\theta^{\alpha}, t)$, $\bar{d}(\theta^{\alpha}, t)$ und $\bar{\Lambda}_m(\theta^{\alpha}, t)$ ($m=0, 1, 2$), die in der Argumentenliste der Stofffunktionen auftreten, sind insgesamt neun skalare Differentialgleichungen gesucht und durch die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und die verallgemeinerten, reduzierten 2D-Energiebilanzgleichungen gegeben. Das erste System von Beziehungen (10.182) ist also unter dem Aspekt der Bestimmtheitsforderung lösbar, und zwar entkoppelt von dem zweiten System, den Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art.^x

Bevor diese beiden Systeme weiter diskutiert werden (Kap. 10.6.3.5) soll im folgenden Kapitel die Auswertung der Entropieungleichung durchgeführt werden; erst dadurch ist das erste System formal vollständig beschrieben. Für das Verständnis der weiteren Diskussion der beiden Systeme können aber die Details dieser Auswertung übergangen werden.

10.6.3.4 Auswertung der Entropieungleichung

Für den Fall nichtkonstanter Temperatur über die Schalendicke ist die Entropieungleichung (10.15) maßgebend, in der vorausgesetzt wurde, daß die gedachten Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag liefern. Mit den verallgemeinerten, reduzierten 2D-Energiebilanzgleichungen (10.169) lassen sich in (10.15) die äußeren Einwirkungen

$$\sum_{m \in R} \sum_{m \in r} - \left[(\bar{q}_r \cdot \bar{N} \xi)^+ (s^+)^m + (\bar{q}_r \cdot \bar{N} \xi)^- (-s^-)^m \right] \\ m = 0, 1, 2$$

^x Hierbei wird implizit angenommen, daß die Randbedingungen auch geeignet "entkoppelt" sind.

eliminieren. Mit (10.170)^{II} und den Definitionen

$$\left. \begin{aligned}
 m_m^{\alpha\beta} &:= M_m^{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} M_{m+1}^{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} M_{m+2}^{\alpha\beta} \\
 m_m^{3\beta} &:= M_m^{3\beta} + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} M_{m+1}^{3\beta} + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} M_{m+2}^{3\beta} \\
 Q &:= Q_0 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} Q_1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} Q_2
 \end{aligned} \right\} (10.184)$$

wird aus der Entropiegleichung

$$\begin{aligned}
 & \dot{S}_R \dot{\eta} - \dot{S}_R \dot{\xi}_0 \Lambda_0 - \dot{S}_R \dot{\xi}_1 \Lambda_1 - \dot{S}_R \dot{\xi}_2 \Lambda_2 \\
 & + \dot{a}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \Lambda_0 \{ m_0^{(\alpha\beta)} + n^{(\alpha\beta)} \} \\
 & + \dot{d}_{\alpha\beta} \Lambda_0 \{ m_1^{\alpha\beta} + m_2^{\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \} \\
 & + \dot{d}_{\beta} \Lambda_0 \{ m_0^{3\beta} + (m_1^{\alpha\beta} - m_1^{\beta\alpha}) \mu_{\alpha} - m_2^{\beta\alpha} \gamma_{\alpha}^{\beta} \mu_{\alpha} \} \\
 & + \dot{v}_{\beta} \Lambda_0 \{ m_1^{3\beta} + m_2^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \} \\
 & + \dot{v} \Lambda_0 \{ Q_0 - m_2^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \} \\
 & + h_0^{\alpha} \Lambda_{0,\alpha} + h_1^{\alpha} \Lambda_{1,\alpha} + h_2^{\alpha} \Lambda_{2,\alpha} \\
 & + h_0^3 \Lambda_1 + 2 h_1^3 \Lambda_2 \\
 & \geq 0 ;
 \end{aligned} \tag{10.185}$$

hierbei sind

$$m_0^{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2} (m_0^{\alpha\beta} + m_0^{\beta\alpha})$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\beta\alpha})$$

(10.186)

$$\eta^{\alpha\beta} := (m_1^{\gamma\beta} - m_1^{\beta\gamma}) \eta_1^\alpha - m_2^{\gamma\delta} \eta_2^\beta \eta_2^\delta \eta_1^\alpha,$$

Setzt man jetzt

$$\mathcal{S}_R \phi := \mathcal{S}_R \eta - \mathcal{S}_R \xi_0^1 - \mathcal{S}_R \xi_1^1 - \mathcal{S}_R \xi_2^1 - \mathcal{S}_R \xi_2^1 \quad (10.187)$$

ein und beachtet, daß die Stofffunktionen $\sum_{m=0,1,2}^{\check{v}}$, $\check{\eta}$ und $\check{\phi}_0$ sowie $M_m^{\alpha\beta}$ ($m=0,1,2$) etc. im allgemeinen Funktionen des Variablensatzes

$$\{ \mathcal{H}, \Delta, \Lambda_1, \Lambda_2 \}$$

sind, dann wird aus (10.185) nach Einführung der integrierten Massieschen Funktion $\check{\phi}_0$

$$\begin{aligned} & \dot{\Lambda}_0 \left[\mathcal{S}_R \xi_0^{\check{v}} + \mathcal{S}_R \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \Lambda_0} \right] \\ & + \dot{\Lambda}_1 \left[\mathcal{S}_R \xi_1^{\check{v}} + \mathcal{S}_R \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \Lambda_1} \right] \\ & + \dot{\Lambda}_2 \left[\mathcal{S}_R \xi_2^{\check{v}} + \mathcal{S}_R \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \Lambda_2} \right] \\ & + \dot{a}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[\Lambda_0 (m_0^{(\alpha\beta)} + \eta^{(\alpha\beta)}) + \mathcal{S}_R \left(\frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) \right] \\ & + \dot{d}_{\alpha\beta} \left[\Lambda_1 (m_1^{\alpha\beta} + m_2^{\alpha\beta} \eta_2^\alpha) + \mathcal{S}_R \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\alpha\beta}} \right] \end{aligned}$$

(10.188)

+ ...

$$\begin{aligned}
 & \dots + \dot{a}_\beta \left[\Delta \left(\overset{\vee}{m}_0^{3\beta} + \left(\overset{\vee}{m}_1^{\alpha\beta} - \overset{\vee}{m}_1^{\beta\alpha} \right) \mu_\alpha - \overset{\vee}{m}_2^{s\beta} \eta_s^\beta \mu_\beta \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \dot{a}_\beta} \right] \\
 & + \dot{v}_\beta \left[\Delta \left(\overset{\vee}{m}_1^{3\beta} + \overset{\vee}{m}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \dot{v}_\beta} \right] \\
 & + \dot{v} \left[\Delta \frac{1}{2} \left(\overset{\vee}{Q} - \overset{\vee}{m}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \dot{v}} \right] \\
 & + \overset{\vee}{h}_0^\alpha \Delta_{0,\alpha} + \overset{\vee}{h}_1^\alpha \Delta_{1,\alpha} + \overset{\vee}{h}_2^\alpha \Delta_{2,\alpha} \\
 & + \overset{\vee}{h}_0^3 \Delta_1 + \overset{\vee}{h}_1^3 \Delta_2 \\
 & \geq 0.
 \end{aligned} \tag{10.188}$$

Mit der üblichen Argumentation erhält man hieraus die folgenden hinreichenden und notwendigen Bedingungen

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{S}_{0R} \overset{\vee}{\xi}_0 + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \overset{\vee}{\Lambda}} &= 0 \\
 \mathcal{S}_{1R} \overset{\vee}{\xi}_1 + \mathcal{S}_{1R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \overset{\vee}{\Lambda}} &= 0 \\
 \mathcal{S}_{2R} \overset{\vee}{\xi}_2 + \mathcal{S}_{2R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \overset{\vee}{\Lambda}} &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{10.189}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \left(\overset{\vee}{m}_0^{\alpha\beta} + \overset{\vee}{n}^{\alpha\beta} \right) + \mathcal{S}_{0R} \left(\frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) &= 0 \\
 \Delta \left(\overset{\vee}{m}_1^{\alpha\beta} + \overset{\vee}{m}_2^{s\beta} \eta_s^\alpha \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial \lambda_{\alpha\beta}} &= 0 \\
 \Delta \left(\overset{\vee}{m}_0^{3\beta} + \left(\overset{\vee}{m}_1^{\alpha\beta} - \overset{\vee}{m}_1^{\beta\alpha} \right) \mu_\alpha - \overset{\vee}{m}_2^{s\beta} \eta_s^\beta \mu_\beta \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial d_\beta} &= 0 \\
 \Delta \left(\overset{\vee}{m}_1^{3\beta} + \overset{\vee}{m}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial v_\beta} &= 0 \\
 \Delta \frac{1}{2} \left(\overset{\vee}{Q} - \overset{\vee}{m}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta \right) + \mathcal{S}_{0R} \frac{\partial \overset{\vee}{\Phi}_0}{\partial v} &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{10.190}$$

und die Restentropieungleichung

$$\begin{aligned} h_0^\alpha \Lambda_{0|\alpha} + h_1^\alpha \Lambda_{0|\alpha} + h_2^\alpha \Lambda_{0|\alpha} \\ h_0^{\nu 3} \Lambda_1 + h_1^{\nu 3} \Lambda_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (10.191)$$

Die konstitutiven Bedingungen sollen noch nach den summarischen Beanspruchungsgrößen (10.184) und nach $\underline{\varepsilon}_m$ aufgelöst werden. Aus den verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen (10.167) folgt zunächst ($m=0,1,2$):

$$\begin{aligned} \check{M}_m^{\langle \alpha\beta \rangle} &:= \frac{1}{2} \left(\check{M}_m^{\nu\alpha\beta} - \check{M}_m^{\nu\beta\alpha} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\check{M}_{m+1}^{\nu\alpha\beta} - \check{M}_{m+1}^{\nu\beta\alpha} \right) (\eta_1^1 + \eta_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \left(\check{M}_{m+2}^{\nu\alpha\beta} - \check{M}_{m+2}^{\nu\beta\alpha} \right) (\eta_1^1 \eta_2^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) \right\}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \check{m}_0^{\langle \alpha\beta \rangle} &= \check{M}_0^{\langle \alpha\beta \rangle} + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \check{M}_1^{\langle \alpha\beta \rangle} + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} \check{M}_2^{\langle \alpha\beta \rangle} \\ &= - \left\{ \check{m}_1^{\langle \alpha\beta \rangle} (\eta_1^1 + \eta_2^2) + \check{m}_2^{\langle \alpha\beta \rangle} (\eta_1^1 \eta_2^2 - \eta_2^1 \eta_1^2) \right\}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\check{m}_1^{\langle \alpha\beta \rangle} (\eta_1^1 + \eta_2^2) = \check{m}_1^{\langle \gamma\beta \rangle} \eta_8^\alpha - \check{m}_1^{\langle \gamma\alpha \rangle} \eta_8^\beta,$$

so daß mit (10.190)₂

$$\begin{aligned} \check{m}_0^{\langle \alpha\beta \rangle} &= -\frac{1}{2} \left\{ -\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0^\nu}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0^\nu}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} \right) \eta_8^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\Lambda_0} \left(\frac{\partial \check{\Phi}_0^\nu}{\partial \lambda_{\gamma\alpha}} - \frac{\partial \check{\Phi}_0^\nu}{\partial \lambda_{\alpha\gamma}} \right) \eta_8^\beta \right. \\ &\quad \left. - \check{m}_2^{\nu\beta\gamma} \eta_8^\delta \eta_8^\alpha + \check{m}_2^{\nu\alpha\gamma} \eta_8^\delta \eta_8^\beta \right\}. \end{aligned} \quad (10.192)$$

Daher wird dann schließlich wegen (10.190) und (10.192)

$$\begin{aligned}
 \check{m}_0^{\alpha\beta} &= \check{m}_0^{(\alpha\beta)} + \check{m}_0^{<\alpha\beta>} \\
 &= -\check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - \check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\gamma\beta}} \right) \eta_\gamma^\alpha \\
 &\quad + \check{m}_2^{\beta\gamma} \eta_\gamma^\alpha \eta_\gamma^\alpha \\
 \check{m}_1^{\alpha\beta} &= -\check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\alpha\beta}} - \check{m}_2^{\beta\gamma} \eta_\gamma^\alpha \\
 \check{m}_0^{\beta\gamma} &= -\check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\beta\gamma}} + \check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\beta\alpha}} \right) \mu_\alpha \\
 &\quad + \check{m}_2^{\alpha\delta} \eta_\delta^\beta \mu_\gamma \\
 \check{m}_1^{\beta\gamma} &= -\check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial d_{\beta\gamma}} - \check{m}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \\
 \check{Q} &= -2\check{s}_{0R} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \mathcal{V}} + \check{m}_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta
 \end{aligned}
 \tag{10.193}$$

und ferner folgt aus (10.189)

$$\begin{aligned}
 \check{s}_{0R} \check{\Sigma}_0^\vee &= -\check{s}_{0R} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \Delta} \\
 \check{s}_{1R} \check{\Sigma}_1^\vee &= -\check{s}_{0R} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \Delta_1} \\
 \check{s}_{2R} \check{\Sigma}_2^\vee &= -\check{s}_{2R} \frac{\partial \check{\phi}_0}{\partial \Delta_2}
 \end{aligned}
 \tag{10.194}$$

Die Restriktionen (10.193)₁ und (10.193)₂ erfüllen identisch die Summe der drei verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen, nicht aber die einzelnen Bedingungen (10.164)^I

Der Vergleich von (10.193) mit den Restriktionen für den quasi-isothermen Fall (9.69) zeigt Strukturidentität, wenn man in (9.69) die Stofffunktionen $\overset{\vee}{M}_0^{\alpha\beta}$ etc. durch die entsprechenden summarischen Größen $\overset{\vee}{m}^{\alpha\beta}$ etc. ersetzt.

Die Restriktionen (10.193) lassen sich noch explizit in den Beanspruchungsgrößen $\overset{\vee}{M}^{\alpha\beta}$ etc. darstellen. Mit (10.92)

$$-s_R \phi_0 = s_R \psi_0 \Lambda_0 + s_R \psi_1 \Lambda_1 + s_R \psi_2 \Lambda_2,$$

wird beispielsweise aus (10.193)₁ nach Umordnen

$$\begin{aligned} & \left[\overset{\vee}{M}_0^{\alpha\beta} - s_{0R} \left(\frac{\partial \psi_0^{\vee}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0^{\vee}}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - s_{0R} \left(\frac{\partial \psi_0^{\vee}}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \psi_0^{\vee}}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_{\gamma}^{\alpha} \right. \\ & \quad \left. - \overset{\vee}{M}^{s\beta} \eta_s^{\delta} \eta_{\delta}^{\alpha} \right] \\ & + \frac{\Lambda_1}{\Delta} \left[\overset{\vee}{M}_1^{\alpha\beta} - s_{1R} \left(\frac{\partial \psi_1^{\vee}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_1^{\vee}}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - s_{1R} \left(\frac{\partial \psi_1^{\vee}}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \psi_1^{\vee}}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_{\gamma}^{\alpha} \right. \\ & \quad \left. - \overset{\vee}{M}^{s\beta} \eta_s^{\delta} \eta_{\delta}^{\alpha} \right] \\ & + \frac{\Lambda_2}{\Delta} \left[\overset{\vee}{M}_2^{\alpha\beta} - s_{2R} \left(\frac{\partial \psi_2^{\vee}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_2^{\vee}}{\partial a_{\beta\alpha}} \right) - s_{2R} \left(\frac{\partial \psi_2^{\vee}}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \psi_2^{\vee}}{\partial \lambda_{\gamma\beta}} \right) \eta_{\gamma}^{\alpha} \right. \\ & \quad \left. - \overset{\vee}{M}^{s\beta} \eta_s^{\delta} \eta_{\delta}^{\alpha} \right] \\ & = 0. \end{aligned}$$

Da Λ_0, Λ_1 und Λ_2 hier auch in den eckigen Klammern enthalten sind und daher nicht-linear eingehen, läßt sich nicht zwingend schließen, daß die [...]-Ausdrücke für sich verschwinden.

10.6.3.5 Diskussion und Schlußfolgerungen

Das erste und zweite System von Gleichungen, definiert in Kap. 10.6.3.3, kann getrennt voneinander diskutiert werden, da formal die beiden Systeme entkoppelt sind.

Die konstitutiven Restriktionen (10.193), die Bestandteil des ersten Systems sind, lassen sich nach den Beanspruchungsgrößen

$$M_I^* := \left\{ M_0^{\alpha\beta}, M_1^{\alpha\beta}, M_0^{3\alpha}, M_1^{3\alpha}, Q \right\} \quad (10.195)$$

auflösen, wobei diese Größen dann durch die Stofffunktionen ϕ_0^v bzw. ψ_0, ψ_1, ψ_2 und $\check{M}_2^{\alpha\beta}, \check{M}_3^{\alpha\beta}, \check{M}_4^{\alpha\beta}$ und gegebenenfalls auch $\check{M}_2^{3\alpha}$ und $\check{M}_3^{3\alpha}$ dargestellt werden können. Es stellt sich jetzt die Frage, ob sich die Stofffunktionen für die höheren Momente $\check{M}_2^{\alpha\beta}, \check{M}_3^{\alpha\beta}, \check{M}_4^{\alpha\beta}$ etc. aus den Differentialgleichungen des ersten Systems identisch herausheben, so daß die Lösungen $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$, $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{\lambda}_m(\theta^\alpha, t)$ ($m=0,1,2$) unabhängig von der Wahl der Stofffunktionen für die höheren Momente werden; dann sind diese beliebig wählbar und die Lösungen \bar{r}, \bar{d} und $\bar{\lambda}_m$ wären u.a. nur durch die Stofffunktionen ϕ_0^v bzw. ψ_m ($m=0,1,2$) festgelegt.

Die Analyse, die hier nicht im einzelnen vorgeführt werden soll, zeigt, daß sich die höheren Momente - die Menge $(M_I - M_I^*)$ - im allgemeinen nicht herausheben; ausgenommen ist der quasi-isotherme Fall $\lambda \neq 0, \lambda = 0 = \lambda$. Das bedeutet, daß ein Theorem - analog dem \check{M} -Theorem in der quasi-isothermen Theorie - nicht existiert: Die höheren Momente sind aus dem ersten System von Gleichungen nicht eliminierbar; damit sind explizite Angaben nicht nur über die Stofffunktionen ϕ_0^v , sondern auch $\check{M}_2^{\alpha\beta}, \check{M}_3^{\alpha\beta}, \check{M}_4^{\alpha\beta}$ etc. erforderlich, und die Lösungen \bar{r}, \bar{d} und $\bar{\lambda}_m$ hängen von dieser Wahl ab.

Das zweite System von Gleichungen, die Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art, muß neben dem ersten System erfüllt werden. Ob dieses realisierbar ist, soll zunächst unter der Annahme (α) analysiert werden, daß für alle Beanspruchungsgrößen Stofffunktionen spezifizierbar sind. Es müssen dann nicht nur die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen und die Entropieungleichung identisch erfüllt werden, sondern auch die Verträglichkeitsbedingungen 1. Art, die damit konstitutive Restriktionen* darstellen;

* Die Verträglichkeitsbedingungen 1. Art sind wie die Orthogonalitätsbedingungen algebraische Restriktionen für die Beanspruchungsgrößen.

andernfalls würden die Verträglichkeitsbedingungen 1. Art Verknüpfungen zwischen den als unabhängig einstellbar angesehenen Variablen \mathcal{K} und Λ_m ($m=0,1,2$) darstellen.

Die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen 2. Art kann allerdings nicht dadurch erreicht werden, daß sie als identisch zu erfüllende, konstitutive Restriktionen angesehen werden, denn in diesen Differentialgleichungen treten vorgegebene aktuelle äußere Einwirkungen auf. Da weiter die Lösungen \bar{r}, \bar{d} und Λ_m ($m=0,1,2$) unabhängig von den Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art gewonnen werden können und alle Beanspruchungsgrößen bei Vorgabe der Stofffunktionen* dann bekannt sind, können die Verträglichkeitsbedingungen 2. Art wegen der Präsenz vorgegebener aktueller äußerer Einwirkungen nicht erfüllt werden.

Aufgrund dieser Feststellung ist die Annahme (α), daß für alle Beanspruchungsgrößen Stofffunktionen angegeben werden können, mit den Verträglichkeitsbedingungen 2. Art nicht kompatibel.

Es liegt jetzt nahe, die folgende Annahme (β) zu untersuchen: Für alle Beanspruchungsgrößen des ersten Systems - Menge M_I - können nach wie vor Stofffunktionen spezifiziert werden, nicht aber notwendig für alle Beanspruchungsgrößen

$$M_{II} = \left\{ M_0^{\alpha 3}, M_1^{\alpha 3}, M_2^{\alpha 3}, M_3^{\alpha 3}, M_0^{\beta 3}, M_1^{\beta 3}, M_2^{\beta 3} \right\},$$

die nur im zweiten System vorhanden sind. Die Frage ist jetzt, ob die Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art erlauben, diese 11 Größen festzulegen. Die Analyse der Verträglichkeitsbedingungen 1. Art (10.177) zeigt, daß diese sechs skalaren Gleichungen nach den sechs Größen

$$M_{III} = \left\{ M_0^{\alpha 3}, M_1^{\alpha 3}, M_0^{\beta 3}, M_1^{\beta 3} \right\}, M_{III} \subset M_{II} \quad (10.196)$$

aufgelöst werden können und daß diese durch die restlichen Beanspruchungsgrößen der Menge M_0 , d.i. $(M_0 - M_{III})$, darstellbar sind. Diese algebraischen Beziehungen zwischen den Elementen der Menge M_{III} und denen der Restmenge $(M_0 - M_{III})$ sind linear. Die fünf Größen

* Es wird hier unterstellt, daß alle konstitutiven Restriktionen erfüllt werden.

$$M_{IV} := \left\{ M_2^{\alpha 3}, M_3^{\alpha 3}, M_2^{\beta 3} \right\}, M_{IV} = M_{II} - M_{III} \quad (10.197)$$

aus der Menge M_{II} sind also noch nicht festgelegt. Die Verträglichkeitsbedingungen 2. Art sind noch zu erfüllen, sie stellen aber sechs skalare Differentialgleichungen für die fünf Funktionen (10.197) dar.

Eine genauere Betrachtung von (10.180)^I zeigt, daß die erste Vektorgleichung (10.180)₁^I nach Eliminieren von $M_1^{\alpha 3}$ und $M_1^{\beta 3}$ ($M_0^{\alpha 3}$ und $M_0^{\beta 3}$ treten nicht auf) eine Bestimmungsgleichung allein für $M_2^{\alpha 3}$ wird; in skalarer Komponentenform stellt dies drei lineare, algebraische Gleichungen für die zwei Größen $M_2^{\alpha 3}$ dar. Bei (10.180)₂^I ist ein Eliminationsprozess der Elemente der Menge M_{III} nicht erforderlich, hier treten die Elemente von M_{IV} direkt auf; die Komponentengleichungen von (10.180)₂^I stellen demnach drei lineare, skalare algebraische Gleichungen für die fünf Größen $M_2^{\alpha 3}$, $M_3^{\alpha 3}$ und $M_2^{\beta 3}$ dar.

Dieses überbestimmte System von linearen Gleichungen - insbesondere (10.180)₁^I - läßt im allgemeinen natürlich nur Lösungen zu, wenn die Gleichungen linear abhängig sind. Dies bedeutet, daß die rechten Seiten, die lineare Funktionen der aktuellen äußeren Einwirkungen sowie der Beanspruchungsgrößen in der Menge M_I (10.183) und ihrer Ableitungen sind, bestimmte Bedingungen erfüllen müssen. Diese Bedingungen, die hier nicht dargestellt werden, sind aber im allgemeinen nicht realisierbar, denn die Beanspruchungsgrößen in der Menge M_I sind bestimmte Lösungen des ersten Systems von Gleichungen (10.182), die in keiner Weise mit den aktuellen äußeren Einwirkungen $(\bar{s}_2, \bar{b}_2 + \bar{f}_2)$ und $(\bar{s}_2, \bar{b}_2 + \bar{f}_2)$ im Zusammenhang stehen. Aus diesen Betrachtungen ist der Schluß zu ziehen, daß es auch unter der Annahme (β) nicht möglich ist, eine Lösung zu finden, die alle Bedingungen erfüllt.

Eine dritte Annahme (γ) soll noch kurz angesprochen werden. Man könnte davon ausgehen, daß nicht alle höheren Momente in der Menge M_I , das sind die Elemente der Menge $(M_I - M_I^*)$, durch Stoffgesetze zu charakterisieren sind, sondern daß sie z.T. Reaktionsgrößen sind, die im Rahmen der Problemlösung zu ermitteln sind. Trifft man diese Annahme, dann ist die Herleitung der konstitutiven Restriktionen aus der 2D-Entropieungleichung mit der Coleman-Noll-Schlußweise im allgemeinen nicht mehr möglich, da über die Abhängig-

keiten dieser Reaktionsgrößen von den Raten der unabhängigen Zustandvariablen nichts ausgesagt werden kann. Die konstitutiven Restriktionen (10.193) etc. sind daher nur noch hinreichende Bedingungen für die Erfüllung des Dissipationspostulats.

Stellt man diesen Einwand beiseite und akzeptiert zunächst die Annahme (γ), dann ist das erste System von Gleichungen (10.182) nicht mehr unabhängig von dem zweiten System, den Verträglichkeitsbedingungen 1. und 2. Art, lösbar. Läßt man die verschiedenen Wärmeflüsse außer acht, dann sind insgesamt 55 unbekannte Variable vorhanden, und zwar die 42 Beanspruchungsgrößen in der Menge M_0 , die neun skalaren Größen, charakterisiert durch \bar{r}, \bar{d} und Λ_m sowie ϕ_0 und ξ_m ($m=0,1,2$). Dem stehen zunächst die folgenden 41 Bedingungen zwischen diesen Größen gegenüber:

- 6 skalare Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art;
- 3 verallgemeinerte Energiebilanzgleichungen;
- 16 konstitutive Restriktionen^{*}, die es einmal erlauben, einen Teil der Beanspruchungsgrößen durch andere bzw. die Funktion ϕ_0 darzustellen, und die ferner die Größen ξ_m durch ϕ_0 festlegen;
- 6 Verträglichkeitsbedingungen 1. Art, die ebenfalls die Beanspruchungsgrößen verknüpfen und schließlich
- 6 Verträglichkeitsbedingungen 2. Art.

Von der Bestimmtheitsforderung her fehlen $55 - 41 = 14$ Gleichungen. Dies können nur zusätzlich zu definierende Stoffgleichungen für die Beanspruchungsgrößen sein. In der Menge $(M_I - M_I^k)$ der höheren Momente sind insgesamt 18 Elemente enthalten; man könnte also im Prinzip 14 dieser höheren Momente durch zusätzliche Stoffgleichungen charakterisieren, um der Bestimmtheitsforderung zu genügen. Diese formale "Abzählungsstrategie" ist aber unzureichend, da es im Rahmen der zweiten Strategie keine Kriterien für eine geeignete Wahl dieser 14 Stofffunktionen gibt; es besteht also eine weitreichende Willkürlichkeit, die sich natürlich auch in den wesentlichen Lösungen \bar{r}, \bar{d} und Λ_m ($m=0,1,2$) wiederfinden würde.

^{*} Die Restentropiegleichung und die Wärmeflüsse können außer Betracht bleiben.

Die Analyse hat also gezeigt, daß bei ungleichförmiger Temperaturverteilung über die Schalendicke die zweite Strategie (Kap. 10.6.1) beim 1. schalentheoretischen Konzept nicht zu einem vollständigen, konsistenten System von Schalengleichungen führt. Offensichtlich ist die der zweiten Strategie eigentümliche Grundannahme - Verzicht auf eine konsequente Interpretation durch ein dreidimensionales Ersatzproblem^x - zu schwach, um ohne weitere Annahmen zu einer vollständigen Schalentheorie zu kommen.

^x Dies beinhaltet insbesondere den Verzicht auf die Forderung der Beobachterinvarianz der nicht reduzierten lokalen 3D-Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems.

11. Randbedingungen

11.1 Kinematische Randbedingungen

Als kinematische Randbedingungen können auf der Randkurve \tilde{C} der momentane Ortsvektor \bar{r} und der Direktor \bar{d} vorgeschrieben werden; das sind an einem Randpunkt maximal sechs skalarwertige Funktionen der Zeit. Durch diese Vorgabe ist die momentane Geometrie des Randstreifens \tilde{C}_ε festgelegt. Es sei \bar{u} der Verschiebungsvektor der Referenzfläche

$$\bar{u}(\theta^\alpha, t) := \bar{r}(\theta^\alpha, t) - \bar{R}(\theta^\alpha) \quad (11.1)$$

eingeführt. Ferner sei ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem auf der Randkurve \tilde{C} in der Ausgangskonfiguration betrachtet, das durch den Einheitstangentenvektor \bar{s} , den Einheitsnormalenvektor \bar{v} , der in Tangentialebene der Referenzfläche am Rande liegt, und den Normalenvektor \bar{A}_3 auf der Referenzfläche gebildet wird. Die Zerlegung der Verschiebung \bar{u} auf diese Basis liefert

$$\bar{u} = \underset{(s)}{V} \bar{s} + \underset{(v)}{V} \bar{v} + \underset{(3)}{V} \bar{A}_3 \quad \text{auf } \tilde{C} \quad (11.2)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \underset{(s)}{V} &= \bar{u} \cdot \bar{s} \\ \underset{(v)}{V} &= \bar{u} \cdot \bar{v} \\ \underset{(3)}{V} &= \bar{u} \cdot \bar{A}_3 \end{aligned} \right\} (11.3)$$

Weiter sei noch der Differenzdirektor

$$\bar{f}(\theta^\alpha, t) := \bar{d}(\theta^\alpha, t) - \bar{A}_3(\theta^\alpha) \quad (11.4)$$

mit

$$\bar{f} = \underset{(s)}{F} \bar{s} + \underset{(v)}{F} \bar{v} + \underset{(3)}{F} \bar{A}_3 \quad (11.5)$$

eingeführt. Da vor Belastung zum Zeitpunkt $t=0$

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta^\alpha, 0) &= \bar{R}(\theta^\alpha) \\ \bar{d}(\theta^\alpha, 0) &= \bar{A}_3(\theta^\alpha), \end{aligned} \quad (11.6)$$

ist dann generell

$$\begin{aligned} \bar{u}(\theta^\alpha, 0) &= \bar{o} \\ \bar{f}(\theta^\alpha, 0) &= \bar{o} \end{aligned} \quad (11.7)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{V}(\theta^\alpha, 0) &= \underset{(2)}{V}(\theta^\alpha, 0) = \underset{(3)}{V}(\theta^\alpha, 0) = 0 \\ \underset{(1)}{F}(\theta^\alpha, 0) &= \underset{(2)}{F}(\theta^\alpha, 0) = \underset{(3)}{F}(\theta^\alpha, 0) = 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen stellen sich jetzt einige übliche kinematische Randbedingungen wie folgt dar:

Eingespannter Rand oder Teil des Randes \tilde{C}

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(\theta^\alpha, t) &= \bar{o} \\ \bar{f}(\theta^\alpha, t) &= \bar{o} \end{aligned} \right\} \text{für alle } t$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \underset{(1)}{V} &= \underset{(2)}{V} = \underset{(3)}{V} = 0 \\ \underset{(1)}{F} &= \underset{(2)}{F} = \underset{(3)}{F} = 0 \end{aligned} \right\} \text{für alle } t;$$

Gelenkige Lagerung

$$\bar{u}(\theta^\alpha, t) = \bar{o} \quad \text{für alle } t \quad (11.9)$$

bzw.

$$\underset{(1)}{V} = \underset{(2)}{V} = \underset{(3)}{V} = 0,$$

Darüber hinaus können auch Randbedingungen vorliegen, bei denen nur einzelne Komponenten von \bar{u} und \bar{f} vorgeschrieben sind, z.B. eine gelenkige Lagerung mit Verschiebungsmöglichkeit tangential und normal zur Randkurve; hier ist

nur

$$\overset{!}{(3)} = 0$$

zu fordern.

Anstelle der Vorgabe der Komponenten von \bar{r} und \bar{d} bzw. von \bar{u} und \bar{f} können auch zweidimensionale Verzerrungsmaße und Rotationen des Randstreifens \tilde{C}_F vorgegeben werden; auch hiermit ist es möglich, die Geometrien des Randstreifens \tilde{C}_F implizit bis auf Starrkörperdrehungen festzulegen [25, S. 43]. Die Umrechnung auf Verschiebungsgrößen \bar{u} und \bar{f} ist aber mathematisch sehr komplex, und es kann nicht erwartet werden, daß sie analytisch realisiert werden kann.

11.2 Dynamische und thermische Randbedingungen

Insbesondere bei fortgeschrittenen Schalentheorien sind die dynamischen und auch thermischen Randbedingungen nicht so einfach anhand der Anschauung festzulegen, wie die kinematischen. Vom mathematischen Standpunkt her ist es notwendig, daß gerade so viele Randbedingungen (kinematische, dynamische und thermische zusammengekommen) zur Verfügung stehen, wie sie von der Zahl der wesentlichen Lösungsfunktionen und von der Struktur der Differentialgleichungen her erforderlich sind, um eine vollständige und eindeutige Lösung zu bekommen. Von der physikalischen Seite her ist es notwendig, daß die Herleitung der Randbedingung keine Annahmen enthält, die im Widerspruch zu den Annahmen stehen, die bei der Gewinnung der zweidimensionalen Feldgleichungen gemacht wurden. Dies läßt sich hier weitgehend dadurch erreichen, daß auch bei der Ableitung der Randbedingungen dieselben physikalischen Prinzipien wie bei den Feldgleichungen verwendet werden.

11.2.1 Der quasi-isotherme Fall (1. schalentheoretisches Konzept)

Es soll zunächst der Fall konstanter Temperatur bzw. Temperaturinversen über die Schalendicke betrachtet werden.

Während bei Entwicklung der zweidimensionalen Feldgleichungen die Energiebilanzgleichung eines Schalenabschnitts betrachtet wurde, dessen Randstreifen C_F keinen Punkt mit dem Randstreifen \tilde{C}_F der Gesamtschale gemeinsam hatte, wird jetzt ein Schalenabschnitt zugrunde gelegt, dessen Randstreifen zunächst über einen endlichen Bereich $\partial\tilde{C}_F$ mit dem Randstreifen \tilde{C}_F zusammenfällt. Der entsprechende Abschnitt der Referenzfläche sei ∂A . Dieser Flächenabschnitt sei ferner durch die Koordinatenlinien Θ^1 und Θ^2 begrenzt (Abb. 13).

Die integrale Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems für einen Schalenabschnitt am Schalenrand (Abb. 13) lautet

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\mathcal{E} + K) &= W_b + W_L + W_{\partial C_F} + W_{\partial C_{F2}} + W_{\partial \tilde{C}_F} \\ &+ H_r + H_{qL} + H_{q\partial C_{F1}} + H_{q\partial C_{F2}} + H_{q\partial \tilde{C}_F} \quad (11, 10) \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} \hat{W}_b + \hat{W}_L \\ + \hat{H}_r + \hat{H}_{qL} \end{array} \right. + \left. \begin{array}{l} + \hat{W}_{\partial \tilde{C}_F} + \hat{W}_L \\ + \hat{H}_{q\partial \tilde{C}_F} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Hierbei sind

\mathcal{E} die innere Energie des Schalenabschnittes

$$\mathcal{E} = \int_{\partial A} \rho_R \epsilon_0 dA,$$

K die kinetische Energie des Schalenabschnittes

$$K = \int_{\partial A} \left\{ \frac{1}{2} \rho_R \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + 2 \rho_R \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{d}} + \rho_R \dot{\vec{d}} \cdot \dot{\vec{d}} \right\} dA,$$

W_b die Leistung der aktuellen Volumenkräfte

$$W_b = \int_{\partial A} \left\{ \underline{s}_0 \cdot \bar{\underline{b}} \cdot \dot{\underline{r}} + \underline{s}_1 \cdot \bar{\underline{b}} \cdot \dot{\underline{d}} \right\} dA,$$

W_L die Leistung der aktuellen Laibungsbelastungen

$$W_L = \int_{\partial A} \left\{ \bar{y}_0 \cdot \dot{\underline{r}} + \bar{y}_1 \cdot \dot{\underline{d}} \right\} dA,$$

W_{PCF_1} und W_{PCF_2} die Leistung der inneren Spannungen

$$W_{PCF_1} = \int_{\partial C_1} \left\{ \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{d} \right] \cdot \dot{\underline{r}} + \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d} \right] \cdot \dot{\underline{d}} \right\} \nu_\beta ds,$$

wobei $\bar{\underline{v}} = \nu_\beta \bar{A}^\beta$ äußerer Einheitsnormalenvektor von ∂C_1 auf dem Kurvenabschnitt ∂C_1 ist und ds das Bogenelement von ∂C_1 .

W_{PCF_2} hat die entsprechende Form.

$W_{\tilde{P}C_F}$ die Leistung der vorgegebenen aktuellen Spannungen $\tilde{\underline{t}}_R$ auf dem Randstreifenabschnitt $\tilde{\partial C}_F$

$$W_{\tilde{P}C_F} = \int_{\tilde{\partial C}_F} \tilde{\underline{t}}_R \cdot \dot{\underline{p}} dQ_R, \quad \dot{\underline{p}} = \dot{\underline{r}} + \Theta^s \dot{\underline{d}},$$

wobei dQ_R das Flächenelement des Randstreifenabschnittes $\tilde{\partial C}_F$ ist.

H_r die zugeführte Wärme pro Zeiteinheit durch die aktuellen Wärmequellen τ

$$H_r = \int_{\partial A} \sigma_R \tau \, dA,$$

$H_{q\partial C_{F1}}$ und $H_{q\partial C_{F2}}$ die Wärmeflüsse durch die Randstreifen ∂C_{F1} und ∂C_{F2}

$$H_{q\partial C_{F1}} = \int_{\partial C_{F1}} \frac{h}{\sigma} v_\alpha \, ds \quad \text{etc.},$$

$H_{q\partial \tilde{C}_F}$ der Wärmefluß durch den Randstreifen $\partial \tilde{C}_F$ infolge der lokalen, vorgegebenen aktuellen Wärmeflüsse $(\tilde{q} \cdot \bar{N}) = \tilde{q}_R^{(N)}$

$$H_{q\partial \tilde{C}_F} = \int_{\partial \tilde{C}_F} \tilde{q}_R^{(N)} \, dO_R.$$

Die Terme in der geschweiften Klammer von (11.10) sind die Beiträge infolge der gedachten Zusatzeinwirkungen, auf die weiter unten eingegangen wird,

Die Beiträge $H_{q\partial \tilde{C}_F}$ und $H_{g\partial \tilde{C}_F}$ müssen noch auf Linienintegrale zurückgeführt werden. Mit ((8.13)^I, Teil 1) gilt für das gerichtete Oberflächenelement $\bar{N} \, dO_R$ auf dem Randstreifenabschnitt $\partial \tilde{C}_F$

$$\bar{N} \, dO_R = \bar{A}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} S_\beta^\omega \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \, d\theta^3 \, ds$$

$$S_\beta^\omega = \delta_\beta^\omega - \theta^3 B_\beta^\omega;$$

dann ist

$$\begin{aligned} dO_R &= (\bar{N} \, dO_R \cdot \bar{N} \, dO_R)^{1/2} \\ &= \left[H_{\beta\omega} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \frac{\partial \theta^\omega}{\partial s} (d\theta^3)^2 (ds)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$H_{\beta\omega} := \bar{A}^\alpha \cdot \bar{A}^\beta \epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s S_\beta^\alpha S_\omega^\gamma$$

$$= \epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s$$

$$- \theta^3 \left[\epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s B_\omega^\gamma + \epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s B_\beta^\alpha \right]$$

$$+ (\theta^3)^2 \epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s B_\beta^\alpha B_\omega^\gamma,$$

wobei

$$\bar{A}^\alpha \cdot \bar{A}^\beta = A^{\alpha\beta}, \quad \epsilon_{\alpha\beta}^s = A^{\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\beta}^s, \quad \epsilon_{\gamma\delta}^s = A^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta}^s.$$

Man kann nun zeigen, daß

$$\epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s = \delta_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s = \epsilon_{\alpha\beta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s A_{\mu\nu} = A_{\beta\omega},$$

und daher wird

$$H_{\beta\omega} = A_{\beta\omega} - \theta^3 2 B_{\beta\omega} + (\theta^3)^2 B_{\gamma\beta} B_\omega^\gamma. \quad (11.11)$$

Es sei jetzt das Koordinatensystem auf dem Randkurvenabschnitt $\partial\tilde{C}$ eingeführt, u.z. sei

$$\tilde{\theta}^1 = \nu \quad (\text{Bogenlänge in Richtung } \bar{\nu})$$

$$\tilde{\theta}^2 = s \quad (\text{Bogenlänge auf Randkurvenabschnitt } \partial\tilde{C})$$

$$\tilde{\theta}^3 = \theta^3;$$

dann ist

$$\frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} = \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \tilde{\theta}^2}$$

Der Ausdruck

$$\tilde{H}_{\gamma\delta} = H_{\beta\omega} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \tilde{\theta}^\gamma} \frac{\partial \theta^\omega}{\partial \tilde{\theta}^\delta} \quad (11.11)$$

ist dann die Transformierte des Flächentensors $H_{\beta\omega}$ im Koordinatensystem der Randkurve $\mathcal{P}^{\tilde{c}}$. Speziell ist

$$H_{\beta\omega} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \frac{\partial \theta^\omega}{\partial s} = \tilde{H}_{22} \quad (11.12)$$

Im einzelnen wird

$$A_{\beta\omega} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \frac{\partial \theta^\omega}{\partial s} = \tilde{A}_{22} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\theta}^2} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\theta}^2} = 1,$$

da $\tilde{\theta}^2$ die Bogenlänge ist. Weiter ist

$$\tilde{B}_{\gamma\delta} = B_{\beta\omega} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \tilde{\theta}^\gamma} \frac{\partial \theta^\omega}{\partial \tilde{\theta}^\delta} \quad (11.14)$$

die Transformierte des Fundamentaltensors 2. Ordnung, so daß dann

$$B_{\beta\omega} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial s} \frac{\partial \theta^\omega}{\partial s} = \tilde{B}_{22} \quad (11.15)$$

Die Inversion der Transformation (11.14) ergibt

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{\theta}^\alpha}{\partial \theta^\mu} \frac{\partial \tilde{\theta}^\beta}{\partial \theta^\nu} \tilde{B}_{\alpha\beta};$$

damit wird

$$\begin{aligned}
 B_{\gamma\beta} B_{\omega}^{\eta} \frac{\partial \theta^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial \theta^{\omega}}{\partial s} &= B_{\gamma\beta} B_{\omega\delta} A^{\delta\eta} \frac{\partial \theta^{\beta}}{\partial \tilde{\theta}^{\lambda}} \frac{\partial \theta^{\omega}}{\partial \tilde{\theta}^{\lambda}} \\
 &= \tilde{B}_{\alpha\lambda} \tilde{B}_{\delta\lambda} \frac{\partial \tilde{\theta}^{\alpha}}{\partial \theta^{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\theta}^{\delta}}{\partial \theta^{\lambda}} A^{\delta\eta} \\
 &= \tilde{B}_{\alpha\lambda} \tilde{B}_{\delta\lambda} \tilde{A}^{\delta\alpha} \\
 &= \tilde{B}_{\alpha\lambda} \tilde{B}_{\lambda}^{\alpha} = \tilde{B}_{12} \tilde{B}_{\lambda}^1 + \tilde{B}_{22} \tilde{B}_{\lambda}^2 .
 \end{aligned}$$

Da

$$\left| \tilde{A}_{\alpha\beta} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \left| \tilde{A}^{\alpha\beta} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

wird schließlich

$$\tilde{B}_{\alpha\lambda} \tilde{B}_{\lambda}^{\alpha} = (\tilde{B}_{12})^2 + (\tilde{B}_{22})^2 .$$

Mit diesen Zwischenergebnissen erhält man

$$H_{\rho\omega} \frac{\partial \theta^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial \theta^{\omega}}{\partial s} = \tilde{H}_{\lambda\lambda}$$

(11.16)

$$= 1 - \theta^3 \tilde{B}_{22} + (\theta^3)^2 [(\tilde{B}_{12})^2 + (\tilde{B}_{22})^2]$$

und für das Flächenelement dO_R in $\partial\tilde{C}_F$ erhält man

$$dO_R = (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3 ds, \quad (11.17)$$

Der Leistungsbeitrag $W_{\partial\tilde{C}_F}$ wird damit

$$W_{\partial\tilde{C}_F} = \int_{\partial\tilde{C}_F} \tilde{t}_R \cdot \dot{\tilde{r}} dO_R = \int_{\partial\tilde{C}} \left\{ \tilde{m}_0 \cdot \dot{\tilde{r}} + \tilde{m}_1 \cdot \dot{\tilde{d}} \right\} ds,$$

wobei

$$\tilde{m}_0 = \int_{-s^-}^{s^+} \tilde{t}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3, \quad \tilde{m}_1 = \int_{-s^-}^{s^+} \tilde{t}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} \theta^3 d\theta^3 \quad (11.18)$$

als vorgegebene Randbelastungen anzusehen sind.

Der aktuelle Wärmefluß, normal zum Randstreifen \tilde{C}_F , wird

$$H_{q\partial\tilde{C}_F} = \int_{\partial\tilde{C}_F} \tilde{q}_R dO_R = \int_{\partial\tilde{C}} \tilde{h} ds$$

mit

$$\tilde{h} = \int_{-s^-}^{s^+} \tilde{q}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3, \quad (11.19)$$

Es bleibt noch, die Leistungsbeiträge der gedachten Zusatzeinwirkungen anzugeben. Es wird

$$\hat{W}_b = \int_{\partial A} \left\{ \hat{s}_{0R} \hat{b}_0 \cdot \dot{\hat{r}} + \hat{s}_{1R} \hat{b}_1 \cdot \dot{\hat{d}} \right\} dA$$

$$\hat{W}_L = \int_{\partial A} \left\{ \left[\hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^- \right] \cdot \dot{\hat{r}} + \left[\hat{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_R^- \xi^- s^- \right] \cdot \dot{\hat{d}} \right\} dA,$$

$$\hat{W}_{\mathcal{C}_F} = \int_{\mathcal{C}_F} \hat{\vec{t}}_R \cdot \dot{\vec{p}} \, dO_R = \int_{\mathcal{C}} \left\{ \hat{\vec{m}}_0 \cdot \dot{\vec{r}} + \hat{\vec{m}}_1 \cdot \dot{\vec{d}} \right\} ds$$

mit

$$\hat{\vec{m}}_0 = \int_{-S^-}^{S^+} \hat{\vec{t}}_R (\hat{H}_{22})^{1/2} d\theta^3, \quad \hat{\vec{m}}_1 = \int_{-S^-}^{S^+} \hat{\vec{t}}_R (\hat{H}_{12})^{1/2} \theta^3 d\theta^3, \quad (11.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_L = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_A} \left\{ e^{\alpha\beta} \left[\hat{\vec{l}}_0^\Delta \times (\bar{\vec{r}}_{1\beta} \times \bar{\vec{d}}) + \hat{\vec{l}}_1^\Delta \times (\bar{\vec{d}}_{1\beta} \times \bar{\vec{d}}) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_{1\alpha} \right. \\ \left. + e^{\alpha\beta} \left[\hat{\vec{l}}_1^\Delta \times (\bar{\vec{r}}_{1\beta} \times \bar{\vec{d}}) + \hat{\vec{l}}_2^\Delta \times (\bar{\vec{d}}_{1\beta} \times \bar{\vec{d}}) \right] \cdot \dot{\vec{d}}_{1\alpha} \right. \\ \left. + \left[\hat{\vec{l}}_0^\Delta \times (\bar{\vec{r}}_{11} \times \bar{\vec{r}}_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\vec{l}}_1^\Delta \times (\bar{\vec{r}}_{11} \times \bar{\vec{d}}_{12} + \bar{\vec{d}}_{11} \times \bar{\vec{r}}_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\vec{l}}_2^\Delta \times (\bar{\vec{d}}_{11} \times \bar{\vec{d}}_{12}) \right] \cdot \dot{\vec{d}} \right\} dA, \end{aligned}$$

$$\hat{H}_r = \int_{\mathcal{C}_A} \mathcal{G}_R \hat{\vec{r}}_0^\Delta \, dA,$$

$$\hat{H}_{\mathcal{F}_L} = - \int_{\mathcal{C}_A} \left[(\hat{\vec{q}}_R \cdot \bar{\vec{N}} \xi)^+ + (\hat{\vec{q}}_R \cdot \bar{\vec{N}} \xi)^- \right] dA,$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_g \delta \tilde{C}_F &= \int_{\tilde{C}_F^{(M)}} \hat{q}_{r2}^{(M)} d\Omega_{r2} \quad , \quad \hat{q}_{r2}^{(M)} = (\hat{q}_{r2} \cdot \vec{N}) \\
 &= \int_{\tilde{C}_F^{(M)}} \hat{h}_{(v)}^{(M)} ds \quad , \\
 \hat{h}_{(v)}^{(M)} &:= \int_{-s^-}^{s^+} \hat{q}_{r2}^{(M)} (\hat{H}_{r2})^{1/2} d\theta^s \quad , \quad (11.21)
 \end{aligned}$$

Damit sind alle Terme in (11.10) explizit durch Flächen- bzw. Linienintegrale dargestellt. Wie bei der Entwicklung der zweidimensionalen Feldgleichungen ist auch die Bilanzgleichung (11.10) durch die Energie-Forderung (S. 109, Teil 1) zu ergänzen, die hier die Form

$$\hat{W} := \hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_{\delta \tilde{C}_F} + \hat{W}_L + \hat{H}_r + \hat{H}_{g_L} + \hat{H}_g \delta \tilde{C}_F = 0 \quad (11.22)$$

annimmt, d.h., die gedachten Zusatzeinwirkungen sollen keinen Beitrag zur Gesamtenergiebilanz (11.10) liefern, und zwar

- (A1) für jeden beliebigen Abschnitt δA am Schalenrand
- (A2) für alle Beobachtersysteme
- (A3) und nicht nur für alle vorgegebenen, aktuellen äußeren Einwirkungen, sondern für alle denkbaren.

Mit (11.22) wird aus (11.10)

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} (\mathcal{E} + \mathcal{K}) &= \hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_{\delta \tilde{C}_F_1} + \hat{W}_{\delta \tilde{C}_F_2} + \hat{W}_{\delta \tilde{C}_F} \\
 &\quad + \hat{H}_r + \hat{H}_{g_L} + \hat{H}_{g_{\delta \tilde{C}_F_1}} + \hat{H}_{g_{\delta \tilde{C}_F_2}} + \hat{H}_{g_{\delta \tilde{C}_F}} \quad , \quad (11.23)
 \end{aligned}$$

Gilt nun (11.22) unter den Bedingungen (A1) bis (A3), dann gilt auch (11.23) unter diesen Bedingungen. Bevor aus diesen Bedingungen Schlußfolgerungen gezogen werden, sei in (11.23) die materielle Zeitdifferentiation durchgeführt; nach Umordnen wird aus (11.23)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial A} \mathfrak{S}_{\circ R} \dot{\xi}_{\circ} dA \\
 &= \int_{\partial A} \left\{ \left[\mathfrak{S}_{\circ R} \bar{b}_{\circ} + \bar{y}_{\circ} - \mathfrak{S}_{\circ R} \ddot{\bar{r}} - \mathfrak{S}_{\circ R} \ddot{\bar{d}} \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 & \quad \left. + \left[\mathfrak{S}_{\circ R} \bar{b}_{\circ} + \bar{y}_{\circ} - \mathfrak{S}_{\circ R} \ddot{\bar{r}} - \mathfrak{S}_{\circ R} \ddot{\bar{d}} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} dA \\
 &+ \int_{\partial C_1 + \partial C_2} \left\{ \left[M_{\circ}^{\alpha\beta} \bar{r}_{\circ\alpha} + M_{\circ}^{\alpha\beta} \bar{d}_{\circ\alpha} + Q^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\
 & \quad \left. + \left[M_{\circ}^{\alpha\beta} \bar{r}_{\circ\alpha} + M_{\circ}^{\alpha\beta} \bar{d}_{\circ\alpha} + Q^{\beta} \bar{d} \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} \nu_{\beta} ds \\
 &+ \int_{\partial \tilde{C}} \left\{ \tilde{m}_{\circ} \cdot \dot{\bar{r}} + \tilde{m}_{\circ} \cdot \dot{\bar{d}} \right\} ds \\
 &+ \int_{\partial A} \left\{ \mathfrak{S}_{\circ R} \bar{\sigma}_{\circ} - \left[(\bar{q}_{\circ R} \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\bar{q}_{\circ R} \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right\} dA \\
 &- \int_{\partial C_1 + \partial C_2} h_{\circ}^{\alpha} \nu_{\alpha} ds - \int_{\partial \tilde{C}} h_{\circ}^{\alpha} ds,
 \end{aligned} \tag{11.24}$$

Aus der Bilanzgleichung (11.24) läßt sich mit der Forderung (A1) noch keine Schlußfolgerung ziehen, denn den Linienintegralen lassen sich keine Divergenzausdrücke zuordnen. Die rechte Seite von (11.24) läßt sich also nicht unmittelbar in ein Flächenintegral umformen. An dieser Tatsache ändert sich auch nichts, wenn man zusätzlich die Energiebilanz für einen etwas anderen Integrationsbereich $\rho A'$ in Randnähe wählt, so daß der Rand von $\rho A'$ keinen Punkt mit der Randkurve \tilde{c} gemeinsam hat.

Läßt man jetzt aber den Integrationsbereich ρA gegen Null gehen, indem man P und P'' gegen P' laufen läßt (Abb. 13) und nimmt an, daß die Integranden aller Integrale stetig und damit beschränkt sind, was physikalisch vernünftig ist, dann lassen sich weitere Schlußfolgerungen wie folgt gewinnen.

Zunächst kann wegen der Stetigkeit aller Integranden in (11.24) der Mittelwertsatz der Integralrechnung angewendet werden.

Als Mittelwert für ein Linien- und Flächenintegral

$$\int_{\rho c} f(\theta^1, \theta^2) ds \quad , \quad \int_{\rho A} f(\theta^1, \theta^2) dA$$

sind definiert

$$\left. \begin{aligned} \overline{f} &:= f(\check{\theta}^1, \check{\theta}^2) = \int_{\rho c} f(\theta^1, \theta^2) ds / \int_{\rho c} ds \\ \overline{f} &:= f(\check{\theta}^1, \check{\theta}^2) = \int_{\rho A} f(\theta^1, \theta^2) dA / \int_{\rho A} dA \end{aligned} \right\} (11.25)$$

wobei $\check{\theta}^1, \check{\theta}^2$ die Koordinaten eines Zwischenpunktes auf ρc sind bzw. $\check{\theta}^1, \check{\theta}^2$ die eines Punktes in Bereich ρA .

Faßt man in (11.24) die Flächenintegrale zusammen und wendet den Mittelwertsatz an, dann wird aus (11.24)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta \mathcal{L}_A}{\delta \dot{\mathbf{r}}_0} \dot{\mathbf{r}}_0 + \left[\frac{\delta \mathcal{L}_A}{\delta \dot{\mathbf{b}}_0} \dot{\mathbf{b}}_0 + \dots \right] \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + \left[\frac{\delta \mathcal{L}_A}{\delta \dot{\mathbf{d}}_0} \dot{\mathbf{d}}_0 + \dots \right] \cdot \dot{\mathbf{d}}_0 \\
 & - \frac{\delta \mathcal{L}_A}{\delta \mathbf{r}_0} \mathbf{r}_0 + \left[\left(\frac{\delta \mathcal{L}_A}{\delta \mathbf{N}} \cdot \mathbf{N} \right)^+ + \left(\frac{\delta \mathcal{L}_A}{\delta \mathbf{N}} \cdot \mathbf{N} \right)^- \right] \Delta \mathcal{A} \\
 & = \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta \dot{\mathbf{r}}_0} \left\{ \left[M_0^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{r}}_{1\alpha} + \dots \right] \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + \left[M_1^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{r}}_{1\alpha} + \dots \right] \cdot \dot{\mathbf{d}}_0 \right\} v_\beta \Delta S_1 \\
 & + \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta \dot{\mathbf{r}}_0} \left\{ \left[M_0^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{r}}_{1\alpha} + \dots \right] \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + \left[M_1^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{r}}_{1\alpha} + \dots \right] \cdot \dot{\mathbf{d}}_0 \right\} v_\beta \Delta S_2 \\
 & + \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \dot{\mathbf{m}}_0} \left\{ \tilde{m}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + \tilde{m}_1 \cdot \dot{\mathbf{d}}_0 \right\} \Delta S \\
 & - \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta v_\alpha} v_\alpha \Delta S_1 - \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta v_\alpha} v_\alpha \Delta S_2 - \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta v} v \Delta S
 \end{aligned} \tag{11.26}$$

mit

$$\Delta \mathcal{A} = \int_{\delta \mathcal{L}_A} d\mathcal{L}_A$$

$$\Delta S_{1,2} = \int_{\delta \mathcal{L}_{1,2}} ds$$

$$\Delta S = \int_{\delta \mathcal{L}} ds$$

(11.27)

Für kleine ΔS gilt (Abb. 14)

$$\bar{v} \Delta S \approx \frac{1}{\sqrt{A^{22}}} \bar{A}^2 \Delta S_1 + \frac{1}{\sqrt{A^{11}}} \bar{A}^1 \Delta S_2, \quad (11.28)$$

wobei

$$\bar{v} = \gamma_\alpha \bar{A}^\alpha \quad (11.29)$$

der äußere Einheitsnormalenvektor auf $\partial \tilde{C}$ in P' ist. Aus (11.28) und (11.29) folgt

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S_1}{\Delta S} &= \sqrt{A^{22}} \nu_2 \\ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S_2}{\Delta S} &= \sqrt{A^{11}} \nu_1 \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

Die äußeren Einheitsnormalenvektoren auf ∂C_1 und ∂C_2 für $\Delta S \rightarrow 0$ sind

$$\begin{aligned} \bar{\nu}^1 &= \gamma_\alpha \bar{A}^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{A^{22}}} \bar{A}^2 \\ \bar{\nu}^2 &= \gamma_\alpha \bar{A}^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{A^{11}}} \bar{A}^1, \end{aligned}$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^1 &= 0, & \nu_2^1 &= -\frac{1}{\sqrt{A^{22}}} \\ \nu_1^2 &= -\frac{1}{\sqrt{A^{11}}}, & \nu_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

Ferner ist

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} l \Delta S = 0, \quad (11.32)$$

Dividiert man jetzt (11.26) durch ΔS und führt den Grenzübergang $\Delta S \rightarrow 0$ durch, wobei zu beachten ist, daß die Mittelwerte beschränkt sind und in die

entsprechenden Funktionswerte im Randpunkt (P') übergehen, dann wird aus (11.26)

$$\begin{aligned} & \left\{ \tilde{m}_0 \cdot \dot{\tilde{r}} + \tilde{m}_1 \cdot \dot{\tilde{d}} \right\} \\ & - \left\{ \left[M_0^{\alpha\beta} \tilde{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \tilde{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \tilde{d} \right] \cdot \dot{\tilde{r}} \right. \\ & \quad \left. + \left[M_1^{\alpha\beta} \tilde{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \tilde{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \tilde{d} \right] \cdot \dot{\tilde{d}} \right\} v_\beta \\ & + \tilde{h}_0^\alpha v_\alpha - \tilde{h}_{(P')}^\alpha v_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (11.33)$$

Diese auf die Länge ΔS der Randkurve $\mathcal{P}\tilde{C}$ bezogene Energiebilanzgleichung ist nicht mehr von ΔS bzw. $\Delta \mathcal{A}$ abhängig. Umordnung ergibt

$$\begin{aligned} & \left\{ \tilde{m}_0 - \left[M_0^{\alpha\beta} \tilde{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \tilde{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \tilde{d} \right] v_\beta \right\} \cdot \dot{\tilde{r}} \\ & + \left\{ \tilde{m}_1 - \left[M_1^{\alpha\beta} \tilde{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \tilde{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \tilde{d} \right] v_\beta \right\} \cdot \dot{\tilde{d}} \\ & + \tilde{h}_0^\alpha v_\alpha - \tilde{h}_{(P')}^\alpha v_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (11.33)^I$$

Ohne auf die Einzelheiten jetzt eingehen zu müssen, liefert die Invarianzforderung (A2) die folgenden Aussagen:

Invarianz gegenüber gleichförmig translatorischen Bewegungen des Beobachtersystems ergibt

$$\tilde{m}_0 - \left[M_0^{\alpha\beta} \tilde{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \tilde{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \tilde{d} \right] v_\beta = \bar{0} \quad (11.34)$$

und Invarianz von (11.33)' bei Übergang an einem rotierenden Beobachtersystem liefert

$$\begin{aligned} & \bar{r} \times \left(\frac{\tilde{m}}{0} - [M^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^{\beta} \bar{d}] \nu_{\beta} \right) \\ & + \bar{d} \times \left(\frac{\tilde{m}}{1} - [M^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{2\alpha} + Q^{\beta} \bar{d}] \nu_{\beta} \right) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Mit (11.34) wird daraus

$$\bar{d} \times \left(\frac{\tilde{m}}{1} - [M^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{2\alpha} + Q^{\beta} \bar{d}] \nu_{\beta} \right) = \bar{0}. \quad (11.35)$$

Diese beiden Aussagen lassen sich unmittelbar physikalisch interpretieren: Die Gleichung (11.34) besagt, daß die Resultierende aller Kräfte am Randstreifen des Schalenabschnitts ∂A ($\partial A \rightarrow 0$) verschwindet und (11.35) bedeutet das Verschwinden des resultierenden Momentes. Es ist offensichtlich, daß diese zweite Forderung auch dann erfüllt ist, wenn der (\dots) -Ausdruck in (11.35) parallel zu \bar{d} orientiert ist. Es ist (11.35) dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\tilde{m}}{1} - [M^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{2\alpha} + Q^{\beta} \bar{d}] \nu_{\beta} = k \bar{d}, \quad (11.36)$$

wobei k ein noch unbekannter Skalar ist, der auch identisch verschwinden kann. Damit vereinfacht sich (11.33)^I zu

$$k \frac{1}{2} \mathcal{N} + \frac{1}{2} \nu_{\alpha} - \frac{\tilde{h}}{(v)} = 0 \quad (11.37)$$

mit

$$\mathcal{N} = \bar{d} \cdot \bar{d}.$$

Die Bedingung (11.34) ist eine der gesuchten dynamischen Randbedingungen und (11.36) eine zweite, die aber erst dann vollständig ist, wenn k bekannt ist. Die weiteren Überlegungen zielen also darauf ab, die Größe k festzulegen.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die Forderung (A3) hinsichtlich der Energiebilanzgleichung (11.33)^I unter bestimmten Bedingungen zu weiteren Aussagen führt. Geht man davon aus, daß die aktuellen, eingepprägten Randgrößen \tilde{m}_0, \tilde{m}_1 und \tilde{h}_0^α unabhängig von den Geschwindigkeiten $\dot{\bar{r}}$ und $\dot{\bar{d}}$ sind und beachtet weiter, daß die Stofffunktionen für $M_0^{\alpha\beta}, M_1^{\alpha\beta}, M_2^{\alpha\beta}, Q_0^\beta, Q_1^\beta$ und h_0^α voraussetzungsgemäß von diesen Raten unabhängig sind, dann sind $\dot{\bar{r}}$ und $\dot{\bar{d}}$ in (11.33)^I lokal unabhängig einstellbare Größen. Durch Manipulierbarkeit der aktuellen mechanischen und thermischen Einwirkungen können nämlich bei gleichen Verteilungen von \bar{r}, \bar{d} und Λ_0 örtlich und zeitlich lokal verschiedene Raten dieser Größen erzeugt werden.

Mit (A3) folgen daher aus (11.33)^I die folgenden Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_0 - [M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^\beta \bar{d}] \nu_\beta &= \bar{0} \\ \tilde{m}_1 - [M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d}] \nu_\beta &= \bar{0} \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

$$h_0^\alpha \nu_\alpha - \tilde{h}_0^\alpha = 0 \quad (11.39)$$

Die Gleichungen (11.38) stellen die dynamischen Randbedingungen dar und (11.39) ist die thermische Randbedingung. Unter den oben angeführten Voraussetzungen ergibt sich also

$$k \equiv 0 \quad (11.40)$$

Die Energie-Forderung (11.22) für die gedachten Zusatzeinwirkungen lautet im einzelnen

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \hat{W}_b + \hat{W}_L + \hat{W}_{\delta CF} + \hat{W}_e + \hat{H}_r + \hat{H}_{g_L} + \hat{H}_{\delta CF} \\ &= \int_{\delta A} \left\{ \left(s_{\alpha R} \hat{b}_0^\alpha + [\hat{t}_R^+ \xi^+ + \hat{t}_R^- \xi^-] \right) \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\ &\quad \left. + \left(s_{\alpha R} \hat{b}_1^\alpha + [\hat{t}_R^+ \xi^+ s^+ - \hat{t}_R^- \xi^- s^-] \right) \cdot \dot{\bar{d}} \right. \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (11.22)^I$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{1}{2} \left(e^{\alpha\beta} \left[\hat{\ell}_0^\wedge \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_1^\wedge \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{r}}_1 \right. \\
 & \quad + e^{\alpha\beta} \left[\hat{\ell}_1^\wedge \times (\bar{r}_{1\beta} \times \bar{d}) + \hat{\ell}_2^\wedge \times (\bar{d}_{1\beta} \times \bar{d}) \right] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\alpha} \\
 & \quad + \left[\hat{\ell}_0^\wedge \times (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) \right. \\
 & \quad \quad + \hat{\ell}_1^\wedge \times (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) \\
 & \quad \quad \left. + \hat{\ell}_2^\wedge \times (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \left. \right\} dA \\
 & + \int_{\partial \bar{C}} \left\{ \hat{m}_0^\wedge \cdot \dot{\bar{r}} + \hat{m}_1^\wedge \cdot \dot{\bar{d}} \right\} ds \\
 & + \int_{\partial A} \left\{ \hat{s}_{02}^\wedge \cdot \bar{r} - \left[(\hat{q}_{12}^\wedge \cdot \bar{N} \xi)^+ + (\hat{q}_{12}^\wedge \cdot \bar{N} \xi)^- \right] \right\} dA \\
 & - \int_{\partial \bar{C}} \hat{h}_{(v)}^\wedge ds = 0.
 \end{aligned}
 \tag{11.22}^I$$

Hier sei vorausgesetzt, daß alle Integranden stetig und damit auch beschränkt sind.

Division durch ΔS und Grenzübergang gegen $\Delta S \rightarrow 0$ liefert die Bilanzgleichung

$$\hat{m}_0^\wedge \cdot \dot{\bar{r}} + \hat{m}_1^\wedge \cdot \dot{\bar{d}} - \hat{h}_{(v)}^\wedge = 0, \tag{11.41}$$

die von ΔS bzw. ΔA unabhängig ist. Die Forderung nach Beobachterinvarianz (A2) ergibt:

Invarianz gegenüber gleichförmig translatorischen Bewegungen liefert

$$\hat{m}_0 = \bar{0} \quad \text{auf } \tilde{C} \quad (11.42)$$

und Invarianz gegenüber rotatorischen Bewegungen des Beobachtersystems führt auf

$$\bar{r} \times \hat{m}_0 + \bar{d} \times \hat{m}_1 = \bar{0} \quad \text{auf } \tilde{C} \quad (11.43)$$

bzw. mit (11.42)

$$\bar{d} \times \hat{m}_1 = \bar{0} \quad \text{auf } \tilde{C}. \quad (11.44)$$

Die Bedingungen (11.42) und (11.44) stellen das Kräfte- und Momentengleichgewicht der gedachten Randspannungen \hat{t}_R auf $\partial\tilde{C}_F$ dar. Mit anderen Worten: Die gedachten Randspannungen \hat{t}_R auf $\partial\tilde{C}_F$ sind selbstequilibriert.

Die Gleichung (11.44) ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\hat{m}_1 = \hat{\mathcal{K}} \bar{d}, \quad (11.45)$$

wobei $\hat{\mathcal{K}}$ nicht notwendig verschwindet und daher noch unbestimmt ist. Damit vereinfacht sich die Bilanzgleichung (11.41) zu

$$\hat{\mathcal{K}} \frac{1}{2} \hat{v} - \hat{h}_{(0)} = 0. \quad (11.46)$$

Wenn keine weiteren Aussagen über $\hat{\mathcal{K}}$ gemacht werden können, dann kann man $\hat{\mathcal{K}}$ so festlegen, daß (11.46) identisch erfüllt wird. Damit ist dann automatisch der Forderung (A3) genügt.

Die dynamische Randbedingung (11.38)₂ und damit die Aussage $k \equiv 0$, kann noch auf anderem Wege abgeleitet werden. Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung 2. Art (E-2), die für einen Punkt im Innern der Schalenfläche A gilt. Es werde ein Abschnitt $\partial A'$ der Referenzfläche

entsprechend Abb. 15 betrachtet, dessen Randkurvenabschnitt $\partial C'$ parallel der Randkurve \tilde{C} verläuft. Integriert man über diesen Bereich die Bewegungsgleichung 2. Art und wendet den Gaußschen Integralsatz für Flächen an, dann erhält man

$$\int_{\partial A'} \left\{ \frac{\rho}{r} \bar{b} + \bar{y}_1 - \frac{\rho}{r} \ddot{r} - \frac{\rho}{r} \ddot{d} - \frac{Q^\beta}{\rho} \bar{r}_{1\beta} - \frac{Q^\beta}{\rho} \bar{d}_{1\beta} - Q \bar{d} - L^\alpha \bar{r}_{1\alpha} \right\} dA \quad (11.47)$$

$$+ \int_{\partial C'_1 + \partial C'_2 + \partial C'} \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^\beta \bar{d} \right] \nu_\beta ds = \bar{0},$$

Das Linienintegral über $\partial C'$ bedeutet im Dreidimensionalen

$$\int_{\partial C'} \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q^\beta \bar{d} \right] \nu_\beta ds \quad (11.48)$$

$$= \int_{\partial C'} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{T}_R (H_{22}')^{1/2} \Theta^3 d\Theta^3 ds,$$

Es wird jetzt angenommen, daß die Spannungsverteilung des dreidimensionalen Ersatzproblems im Innern der Schale stetig ist; das bedeutet insbesondere, daß die Spannungen bei Annäherung an den Rand stetig in die Randwerte übergehen; im dreidimensionalen Ersatzproblem gilt aber auf $\partial \tilde{C}_F$

$$\bar{T}_R = \tilde{\bar{T}}_R + \hat{\bar{T}}_R \quad \text{auf } \partial \tilde{C}_F. \quad (11.49)$$

Verschiebt man also die Kurve $\partial C'$ zur Randkurve $\partial \tilde{C}^*$, dann wird

$$\lim_{\partial C' \rightarrow \partial \tilde{C}} \int_{\partial C'} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{T}_R (H_{22}')^{1/2} \Theta^3 d\Theta^3 ds$$

$$= \int_{\partial \tilde{C}} \int_{-s^-}^{s^+} (\tilde{\bar{T}}_R + \hat{\bar{T}}_R) (H_{22}')^{1/2} \Theta^3 d\Theta^3 ds.$$

* Das ist gleichbedeutend mit dem Grenzübergang: Abstand $\partial C'$ und $\partial \tilde{C} \rightarrow 0$

Mit

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_1 &= \int_{-S^-}^{S^+} \tilde{t}_r (\tilde{H}_{22})^{1/2} \Theta d\Theta^3 \\ \hat{m}_1 &= \int_{-S^-}^{S^+} \hat{t}_r (\tilde{H}_{22})^{1/2} \Theta^3 d\Theta^3 \end{aligned} \right\} (11.50)$$

wird also

$$\begin{aligned} \lim_{\partial C' \rightarrow \partial \tilde{C}} \int_{\partial C'} [M^{\alpha\beta} \tilde{\tau}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d}] \nu_\beta ds \\ = \int_{\partial \tilde{C}} (\tilde{m}_1 + \hat{m}_1) ds, \end{aligned} \quad (11.51)$$

Division von (11.47) durch $\Delta S'$ und gleichzeitiger Grenzübergang von $\Delta S' \rightarrow 0$ und $\partial C' \rightarrow \partial \tilde{C}$ führt mit (11.51) unter Beachtung der Beschränktheit des Integranden des Flächenintegrals auf

$$\tilde{m}_1 + \hat{m}_1 - [M^{\alpha\beta} \tilde{\tau}_{1\alpha} + M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q \bar{d}] \nu_\beta = \bar{0}. \quad (11.52)$$

Diese dynamische Randbedingung enthält die gedachten äußeren Einwirkungen \hat{m}_1 . Die Unabhängigkeitsforderung (S. 108, Teil 1) verlangt jetzt, daß auch in den Randbedingungen der zweidimensionalen Feldgleichungen die gedachten äußeren Einwirkungen nicht auftreten; dementsprechend muß man hier

$$\hat{m}_1 = \bar{0} \quad \text{auf} \quad \tilde{C} \quad (11.53)$$

fordern. Diese Bedingung ist offensichtlich mit (11.44) verträglich. Zerlegt man \hat{m}_1 auf die Basis $(\tilde{\tau}_{1\alpha}, \bar{d})$, dann ist aus (11.44) und (11.45) zu schließen, daß \hat{m}_1 höchstens eine von Null verschiedene Komponente haben darf, nämlich die Komponente in Richtung \bar{d} (vergl. (11.44)). Mit (11.53) ergibt sich also, daß auch

$$\hat{\mathcal{H}} = 0 \quad (11.54)$$

zu verlangen ist. Dieses Ergebnis läßt sich direkt anschaulich deuten. Die Komponente von $\hat{\tau}_R$ in Richtung \bar{d} stellt eine Schubspannung im Randstreifenabschnitt $\rho\tilde{C}_F$ dar. Nimmt man an, daß die Verteilung dieser Komponente punktsymmetrisch ist (Abb. 16), dann ist $\hat{\alpha}$ von Null verschieden; eine solche Verteilung würde am Rande der Schale zu einer Dickenänderung der Schale durch die gedachten Zusatzrandspannungen führen. Die Bedingung (11.54) schließt diesen Einfluß vernünftigerweise aus.

Damit wird also die unter speziellen Voraussetzungen gefundene Aussage $k \equiv 0$ bestätigt. Es bleibt noch zu untersuchen, welche Schlußfolgerungen aus der integralen Entropieungleichung am Schalenrand zu ziehen sind.

Die integrale Entropieungleichung des Ersatzproblems, angewandt auf einen Teilabschnitt (Abb. 13) am Rand der Schale, lautet:

$$\int_{\rho dA} \hat{g}_{\alpha R} \hat{\sigma} \, dA \geq \int_{\rho dA} \left\{ \hat{g}_{\alpha R} \hat{\sigma} - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N}\xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N}\xi)^-] \right\} \hat{\Delta} \, dA$$

$$- \int_{\rho C_1 + \rho C_2} \hat{h}_{\alpha} \hat{\nu}_{\alpha} \hat{\Delta} \, ds - \int_{\rho \tilde{C}} \hat{h}_{\alpha} \hat{\nu}_{\alpha} \hat{\Delta} \, ds \quad (11.55)$$

$$+ \hat{N}$$

wobei die Entropiezufuhr infolge der gedachten Zusatzeinwirkungen durch

$$\hat{N} = \int_{\rho dA} \left\{ \hat{g}_{\alpha R} \hat{\sigma} - [(\hat{q}_R \cdot \bar{N}\xi)^+ + (\hat{q}_R \cdot \bar{N}\xi)^-] \right\} \hat{\Delta} \, dA$$

$$- \int_{\rho \tilde{C}} \hat{h}_{\alpha} \hat{\nu}_{\alpha} \hat{\Delta} \, ds \quad (11.56)$$

gegeben ist. Im Unterschied zu (9.6) ist hier noch der Entropiefluß $\hat{h}_0 \overset{\wedge}{\Lambda}$ auf \tilde{C} zu berücksichtigen. Die Entropie-Forderung verlangt jetzt, daß

$$\hat{N} = 0 ; \quad (11.57)$$

d.h. die gedachten Zusatzeinwirkungen sollen keinen Beitrag zur Gesamtentropiebilanz liefern, und zwar

- (B1) für jeden beliebigen Schalenabschnitt
- (B2) für alle Beobachtersysteme und
- (B3) für alle aktuellen äußeren Einwirkungen ,

Es ist auch hier erforderlich, den Grenzübergang $\Delta S \rightarrow 0$ bzw. $\Delta A \rightarrow 0$ in (11.55) und (11.57) durchzuführen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Integranden der Flächenintegrale stetig und damit beschränkt bleiben. Mit (11.56) folgt aus (11.55) nach Division durch ΔS und dem Grenzübergang $\Delta S \rightarrow 0$

$$\left(\hat{h}_0 \hat{v}_\alpha - \tilde{h}_0 \overset{\sim}{\Lambda} \right) \overset{\wedge}{\Lambda} \leq 0 \quad \text{auf } \tilde{C} \quad (11.58)$$

und entsprechend folgt aus (11.57)

$$\hat{h}_0 \overset{\wedge}{\Lambda} = 0 \quad \text{auf } \tilde{C} . \quad (11.59)$$

Da voraussetzungsgemäß

$$\overset{\wedge}{\Lambda} > 0 ,$$

folgt aus (11.58) und (11.59)

$$\hat{h}_0 \hat{v}_\alpha - \tilde{h}_0 \overset{\sim}{\Lambda} \leq 0 \quad \text{auf } \tilde{C} \quad (11.58)^I$$

$$\hat{h}_0 \overset{\wedge}{\Lambda} = 0 \quad \text{auf } \tilde{C} . \quad (11.59)^I$$

Die aus Energiebetrachtungen folgende thermische Randbedingung (11.39) ist verträglich mit (11.58)^I und sogar weitergehend. Wegen $\hat{\mathcal{E}} = 0$ ist auch die aus energetischen Überlegungen gewonnene Forderung (11.46) in Übereinstimmung mit (11.59)^I. Aus der Entropie-Ungleichung und der Entropieforderung ergeben sich also keine neuen Aussagen.

Bei den hier dargelegten Ableitungen war davon ausgegangen worden, daß auf dem Randstreifen $\partial\tilde{C}_F$ der aktuelle Wärmefluß \hat{q}_R bzw. sein Integral $\int_{(\partial)} \hat{h}$ vorgegeben ist. Alternativ ist es hier aber auch möglich, die Temperaturinverse $\hat{\theta}$ vorzugeben. Natürlich kann dann nicht zugleich der Wärmefluß \hat{h} aufgeprägt werden und damit ist dann auch ein zusätzlicher, gedachter Wärmefluß \hat{h}^* hier nicht möglich, d.h. $\hat{q}_R \equiv 0$. Das Ergebnis (11.39)

$$\hat{h}^* \nu_\alpha - \hat{h} = 0 \quad \text{auf } \tilde{C}$$

ist formal auch jetzt gültig, nur ist es keine Bedingungsgleichung mehr, sondern eine Definitionsgleichung für \hat{h} . Sie entfällt daher in den Randbedingungen.

11.2.2 Der quasi-isotherme Fall (2. schalentheoretisches Konzept)

Beim 2. schalentheoretischen Konzept wurde bei der Herleitung der zweidimensionalen Feldgleichungen u.a. von der Energie-Forderung, den lokalen dreidimensionalen Bilanzgleichungen des Ersatzproblems und einer weiteren Hypothese über die gedachten Zusatzeinwirkungen ausgegangen. Bei der Ableitung der Randbedingungen wird daher analog verfahren, wobei hier jetzt aber konsequent auch alle Randbedingungen des dreidimensionalen Ersatzproblems benötigt werden.

Der schon in Kap. 11.2.1 durchgeführte Grenzübergang $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \hat{N} = 0$ führte auf (vergl. (11.41))

$$\frac{\hat{m}}{\theta} \cdot \dot{r} + \frac{\hat{m}}{\theta} \cdot \dot{d} - \hat{h} = 0 \quad \text{auf } \tilde{C}.$$

Mit der Hypothese (vergl. S. 148, Teil 1)

daß auch die gedachten Zusatzeinwirkungen bzw. $\frac{\lambda}{m_0}$, $\frac{\lambda}{m_1}$ und $\frac{\lambda}{h_0}$ unabhängig von \dot{r} und \dot{d} gewählt werden können,

führt dann die Forderung (A3) (S. 229), die die beliebige Einstellbarkeit von \dot{r} , \dot{d} etc. beinhaltet, zu den folgenden Konsequenzen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{m_0} &= \bar{0} \\ \frac{\lambda}{m_1} &= \bar{0} \\ \frac{\lambda}{h_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \tilde{C}, \quad (11.60)$$

Die Bedingungen sind verträglich mit der Invarianzforderung (A2). Sie sind schon in Kap. 11.2.1 mit anderen Argumenten gewonnen worden. Hier soll aus ihnen mit Hilfe der Randbedingungen des dreidimensionalen Ersatzproblems die zweidimensionalen Randbedingungen der Schale entwickelt werden.

Die Randbedingungen des Ersatzproblems auf $\partial\tilde{C}_F$ lauten* (vergl. (11.49))

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_r &= \tilde{t}_r + \hat{t}_r \\ \hat{q}_r &= \tilde{q}_r + \hat{q}_r \end{aligned} \right\} \text{ auf } \tilde{C}, \quad (11.61)$$

wobei \tilde{q}_r bzw. \hat{q}_r der von außen aufgeprägte aktuelle bzw. gedachte Wärmefluß normal zum Flächenelement des Randstreifenabschnitts ist.

Mit den Definitionsgleichungen (11.20) und (11.21) und wegen (11.61) wird dann zunächst

$$\frac{\lambda}{m_0} = \int_{-s^-}^{s^+} \hat{t}_r (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3 = \int_{-s^-}^{s^+} (\bar{t}_r - \tilde{t}_r) (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3 \quad (11.62)$$

* Hier ist stetiger Übergang der Spannungen und des Wärmeflusses in die Randwerte vorausgesetzt.

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_1^{\wedge} &= \int_{-s^-}^{s^+} \hat{t}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} \theta^3 d\theta^3 = \int_{-s^-}^{s^+} (\bar{t}_R - \tilde{t}_R) (\tilde{H}_{22})^{1/2} \theta^3 d\theta^3 \\ \hat{h}_0^{\wedge} &= \int_{-s^-}^{s^+} \hat{q}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3 = \int_{-s^-}^{s^+} (\bar{q}_R - \tilde{q}_R) (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3. \end{aligned} \right\} (11.62)$$

Nun sind

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_R &= (E I) \bar{N} \\ \bar{q}_R &= \bar{q}_R \cdot \bar{N}. \end{aligned} \right\} (11.63)$$

Daher wird mit den Ergebnissen von Kap. 8.1, Teil 1,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{C}} \int_{-s^-}^{s^+} \bar{t}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3 ds &= \int_{\partial \tilde{C}_F} \bar{t}_R dO_R \\ &= \int_{\partial \tilde{C}} [M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha A} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d}] \nu_{\beta} ds \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{C}} \int_{-s^-}^{s^+} \tilde{t}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} \theta^3 d\theta^3 ds &= \int_{\partial \tilde{C}} [M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha A} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d}] \nu_{\beta} ds \\ \int_{\partial \tilde{C}} \int_{-s^-}^{s^+} \hat{q}_R (\tilde{H}_{22})^{1/2} d\theta^3 ds &= \int_{\partial \tilde{C}_F} \hat{q}_R dO_R \\ &= \int_{\partial \tilde{C}} h_0^{\alpha} \nu_{\alpha} ds. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man weiter (11.18) und (11.19), dann läßt sich die rechte Seite von (11.62) schließlich darstellen durch

$$\left. \begin{aligned} \hat{\bar{m}}_0^{\wedge} &= \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d} \right] v_{\beta} - \bar{\tilde{m}}_0^{\wedge} \\ \hat{\bar{m}}_1^{\wedge} &= \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d} \right] v_{\beta} - \bar{\tilde{m}}_1^{\wedge} \\ \hat{h}_{(v)}^{\wedge} &= h_0^{\alpha} v_{\alpha} - \hat{h}_{(v)}^{\wedge} \end{aligned} \right\} (11.64)$$

Beachtet man noch den Bezeichnungswechsel

$$\begin{aligned} M_0^{\alpha\beta} &\equiv Q_0^{\beta} \\ M_1^{\alpha\beta} &\equiv Q_1^{\beta} \end{aligned} ,$$

dann hat man mit (11.60) schließlich als dynamische und thermische Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_0^{\beta\beta} \bar{d} \right] v_{\beta} - \bar{\tilde{m}}_0^{\wedge} &= \bar{0} \\ \left[M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + M_1^{\beta\beta} \bar{d} \right] v_{\beta} - \bar{\tilde{m}}_1^{\wedge} &= \bar{0} \\ h_0^{\beta} v_{\beta} - \hat{h}_{(v)}^{\wedge} &= 0 \end{aligned} \right\} (11.65)$$

$$\hat{h}_{(v)}^{\wedge} = 0 \quad (11.66)$$

Diese Randbedingungen stimmen erwartungsgemäß mit den Randbedingungen des 1. schalentheoretischen Konzeptes (11.38) und (11.39) überein.

11.2.3 Der nicht-isotherme Fall

Es wird hier der allgemeinere Fall

$$\Lambda_m \neq 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (11.67)$$

d.h. ungleichförmige Temperaturverteilung über die Schalendicke, betrachtet. Aufgrund der Ergebnisse in Kap. 10.6 werden nur die Randbedingungen für das 2. schalentheoretische Konzept entwickelt.

Es ist zunächst wesentlich, festzustellen, daß die Annahme $\Lambda_1 \neq 0$, $\Lambda_2 \neq 0$ keine Konsequenzen für die Form der integralen Energiebilanzgleichung und der Energie-Forderung des Ersatzproblems hat. Aus der Energie-Forderung ergeben sich also auch unter den Voraussetzungen (11.67) die in (11.38) und (11.39) bzw. (11.65) und (11.66) angegebenen Randbedingungen.

Während im quasi-isothermen Fall die Entropieungleichung und die Entropie-Forderung zu keinen weiteren Bedingungen führt, sind hier jetzt weitere Aussagen zu erwarten. Die integrale Entropieungleichung des Ersatzproblems für einen Teilabschnitt der Schale am Rand lautet

$$\int_{dA} \sigma_{\alpha\beta} \dot{\eta} \, dA \geq \int_{dA} \left\{ \left(\sigma_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N}) \xi \right]^+ + (\bar{q}_R \cdot \bar{N}) \xi^- \right) \Lambda_0 \right. \\ \left. + \left(\sigma_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N}) \xi \right]^+ s^+ - (\bar{q}_R \cdot \bar{N}) \xi^- s^- \right) \Lambda_1 \right. \\ \left. + \left(\sigma_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} - \left[(\bar{q}_R \cdot \bar{N}) \xi \right]^+ (s^+)^2 + (\bar{q}_R \cdot \bar{N}) \xi^- (s^-)^2 \right) \Lambda_2 \right\} dA$$

$$- \int_{d\tilde{c} + d\tilde{c}_2} \left\{ \left(\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\alpha} \Lambda \right) + \left(\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\alpha} \Lambda \right) + \left(\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\alpha} \Lambda \right) \right\} d\tilde{c} \quad (11.68)$$

$$- \int_{d\tilde{c}} \left\{ \left(\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\alpha} \Lambda \right) + \left(\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\alpha} \Lambda \right) + \left(\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\alpha} \Lambda \right) \right\} d\tilde{c} \\ + \hat{N}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{N}} = & \int_{\partial A} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \sigma_{02} \\ \sigma_{02} \end{smallmatrix} \tau_0 - \left[\left(\hat{q}_{r2} \cdot \bar{N} \xi \right)^+ + \left(\hat{q}_{r2} \cdot \bar{N} \xi \right)^- \right] \right) \Lambda_0 \right. \\ & + \left(\begin{smallmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{12} \end{smallmatrix} \tau_1 - \left[\left(\hat{q}_{r2} \cdot \bar{N} \xi \right)^+ s^+ - \left(\hat{q}_{r2} \cdot \bar{N} \xi \right)^- s^- \right] \right) \Lambda_1 \\ & \left. + \left(\begin{smallmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{22} \end{smallmatrix} \tau_2 - \left[\left(\hat{q}_{r2} \cdot \bar{N} \xi \right)^+ (s^+)^2 + \left(\hat{q}_{r2} \cdot \bar{N} \xi \right)^- (s^-)^2 \right] \right) \Lambda_2 \right\} dA \\ & - \int_{\partial \tilde{C}} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \hat{h} \\ \hat{h} \\ \hat{h} \end{smallmatrix} \Lambda \right) + \left(\begin{smallmatrix} \hat{h} \\ \hat{h} \\ \hat{h} \end{smallmatrix} \Lambda \right) + \left(\begin{smallmatrix} \hat{h} \\ \hat{h} \\ \hat{h} \end{smallmatrix} \Lambda \right) \right\} ds, \end{aligned} \quad (11.69)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{h}_{(v)}^m = & \int_{-s^-(v)}^{s^+} \tilde{q}_{r2} (\theta^3)^m d\theta^3, \quad \hat{h}_{(v)}^m = \int_{-s^-(v)}^{s^+} \hat{q}_{r2} (\theta^3)^m d\theta^3, \\ & m=0,1,2. \end{aligned} \quad (11.70)$$

Die Entropie-Forderung bedeutet

$$\hat{\mathcal{N}} = 0 \quad (11.71)$$

unter den Bedingungen (B1) bis (B3) (vergl. S. 242). Nach Division durch ΔS und Grenzübergang $\Delta S \rightarrow 0$ ergibt sich aus (11.68) mit (11.71)

$$\left(\begin{smallmatrix} \hat{h}^\alpha \\ \hat{h}^\alpha \end{smallmatrix} \nu_\alpha - \hat{h}_{(v)}^0 \right) \Lambda_0 + \left(\begin{smallmatrix} \hat{h}^\alpha \\ \hat{h}^\alpha \end{smallmatrix} \nu_\alpha - \hat{h}_{(v)}^1 \right) \Lambda_1 + \left(\begin{smallmatrix} \hat{h}^\alpha \\ \hat{h}^\alpha \end{smallmatrix} \nu_\alpha - \hat{h}_{(v)}^2 \right) \Lambda_2 \leq 0 \quad (11.72)$$

und aus (11.71) folgt

$$\hat{h}_{(v)}^0 \Lambda_0 + \hat{h}_{(v)}^1 \Lambda_1 + \hat{h}_{(v)}^2 \Lambda_2 = 0, \quad (11.73)$$

Mit der gleichen Argumentation wie in Kap. 10.3 wird hier die Hypothese gemacht,

daß die gedachten thermischen Einwirkungen $\hat{q}_R^{(m)}$ bzw. $\hat{h}_m^{(v)}$ unabhängig von den $\overset{\wedge}{\Lambda}_m$ eingestellt werden können.

Daher führt die Bedingung (B3) (vergl. S. 242), die die beliebige Einstellbarkeit von $\overset{\wedge}{\Lambda}_m$ beinhaltet, zu

$$\hat{h}_m^{(v)} = 0, \quad m = 0, 1, 2. \quad (11.74)$$

Mit der thermischen Randbedingung (11.61)₂ des dreidimensionalen Ersatzproblems wird

$$\hat{h}_m^{(v)} = \int_{-S^-}^{S^+} \hat{q}_R^{(m)} (\hat{H}_{22})^{1/2} (\theta^3)^m d\theta^3 = \int_{-S^-}^{S^+} (\hat{q}_R - \tilde{q}_R^{(m)}) (\hat{H}_{22})^{1/2} (\theta^3)^m d\theta^3;$$

analog zu der Ableitung auf S. 245 wird daraus mit (11.74)

$$\hat{h}_m^{(v)} = \hat{h}_m^\alpha \nu_\alpha - \tilde{h}_m^{(v)} = 0, \quad m = 0, 1, 2.$$

Das Ergebnis für $m=0$ war schon aus der Energie-Forderung entwickelt worden. Hier werden als neue Aussagen zwei weitere thermische Randbedingungen gewonnen:

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_1^\alpha \nu_\alpha - \tilde{h}_1^{(v)} &= 0 \\ \hat{h}_2^\alpha \nu_\alpha - \tilde{h}_2^{(v)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \tilde{C}.$$

Diese Bedingungen sind verträglich mit (11.72).

Anstelle der Wärmeflüsse lassen sich auch hier wieder die Größen $\overset{\wedge}{\Lambda}_1, \overset{\wedge}{\Lambda}_2$ auf \tilde{C} vorschreiben, aber natürlich nicht zugleich die zugehörigen Flüsse $\tilde{h}_m^{(v)}$ (vergl. dazu S. 243). Darüberhinaus ist es formal möglich, gemischte thermische Randbedingungen vorzugeben, z.B. $\overset{\wedge}{\Lambda}_1, \overset{\wedge}{\Lambda}_2$ und $\tilde{h}_2^{(v)}$. Physikalisch dürfte eine solche Randbedingung aber schwer zu interpretieren sein.

11.2.4 Umformung der dynamischen Randbedingungen

In Kap. 9.1.5 war beim Beweis des M_2^1 -Theorems für das 1. schalentheoretische Konzept vorausgesetzt worden, daß sich die (dynamischen) Randbedingungen in den Variablen (9.73) darstellen lassen. Damit treten dann in den Randbedingungen keine Stofffunktionen für die Momente 2. Ordnung auf. Dies bestätigt man leicht, indem man in den dynamischen Randbedingungen (11.38) die Zerlegung ((8.77), Teil 1) für $\bar{d}_{,\alpha}$ einführt und entsprechend den Definitionsgleichungen (9.71) zusammenfaßt. Man erhält aus den dynamischen Randbedingungen (11.38)

$$\left. \begin{aligned} [m_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{,\alpha} + g^{\alpha\beta} \bar{d}] v_\beta - \tilde{m}_0^{\alpha\beta} &= \bar{0} \\ [m_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{,\alpha} + g^{\alpha\beta} \bar{d}] v_\beta - \tilde{m}_1^{\alpha\beta} &= \bar{0} \end{aligned} \right\} (11.75)$$

12. Zusammenfassender Rückblick und abschließende Bemerkungen^x

Ziel der Abhandlung ist es, einen neuartigen Weg der Herleitung zweidimensionaler Bilanz- und Stoffgleichungen für thermoelastische Schalen beliebiger Geometrie und bei großen Verformungen unter Berücksichtigung thermodynamischer Prinzipie zu erproben. Ausgangspunkt dieser mathematischen Entwicklung ist die Auswertung der Forminvarianz der integralen Energiebilanzgleichung gegenüber Wechsel des Beobachtersystems und die Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung entsprechend der Interpretation in der modernen Kontinuumsthermodynamik (Coleman-Noll-Schlußweise). Die Einbettung der Herleitung der zweidimensionalen Schalengleichungen in diesen thermodynamischen Rahmen erlaubt, eine thermodynamisch konsistente Schalentheorie zu entwickeln.

Es ist bekannt, daß die klassische Mechanik nur für makroskopische Phänomene eine physikalisch adäquate Theorie ist; deshalb sollten ihre Basisgesetze oder Axiome für Körper mit endlich großem Volumen formuliert sein (2a, S. 228). Aus diesem und anderen Gründen haben integrale Bilanzgleichungen im Vergleich zu lokalen eine umfassendere, übergeordnete Bedeutung (Kap. 1, Teil 1). Es war daher in früheren Arbeiten [92] zunächst das Ziel verfolgt worden, eine Schalentheorie ohne expliziten Rückgriff auf lokale dreidimensionale Bilanz- und Stoffgleichungen zu entwickeln. Neben der übergeordneten Bedeutung der integralen Bilanzsätze war auch ein weiteres Argument, daß approximative Theorien wie die Schalentheorie die klassischen, lokalen Bilanzgleichungen nicht exakt erfüllen, so daß diese nicht als axiomatische Basis genommen werden sollten.

Für den Fall eines linearen Verschiebungsansatzes über die Schalendicke und isotherme Bedingungen gelang es [92], ein vollständiges, zweidimensionales Gleichungssystem aufzustellen. Dazu wurde allein die Forminvarianz der integralen, für einen endlich großen Schalenabschnitt (Abb. 11) formulierten Energiebilanzgleichung unter Verwendung eines "abgeschwächten" Lokalisierungspostulat^{xxx} ausgewertet, und für die zweidimensionalen Stoffgleichungen wurde ein direkter Ansatz gemacht und der Forderung der Beobachter-

^x Die folgende Darstellung schließt an die Kapitel 1, 2 und 7 von Teil 1 an, präzisiert an einigen Stellen die dort beschriebenen Vorstellungen und erläutert u.a. verschiedene Abwandlungen des ursprünglichen Konzeptes.

^{xxx} Das Lokalisierungspostulat bedeutet, daß die integralen Bilanzgleichungen nicht nur für den gesamten betrachteten Körper gültig sind, sondern für jeden beliebigen Teilbereich.

invarianz unterworfen. Diese zweidimensionalen Stoffgleichungen verknüpfen die über die Schalendicke gewichtet gemittelten Spannungen (Momente 0., 1. und 2. Ordnung) mit den kinematischen Größen $\bar{r}(\theta^\alpha, t)$ und $\bar{d}(\theta^\alpha, t)$, die entsprechend dem linearen Verschiebungsansatz die Schalenbewegung und -verformung charakterisieren. Die Entropiegleichung wurde hier nicht berücksichtigt.

Dieses Konzept läßt sich aber nicht ohne weiteres auf komplexere Verschiebungsansätze und insbesondere nicht auf ungleichförmige Temperaturfelder erweitern (vergl. Kap. 2.2, Teil 1), da es in dieser Form selbst bei Berücksichtigung der Entropiegleichung nicht hinreichend viele zweidimensionale Bilanzgleichungen liefert.

Besonders offensichtlich ist dieser Mangel bei einer wärmeleitenden, aber nichtdeformierbaren Schale. Eine konsequente Verfolgung des ursprünglichen Konzeptes würde hier nur eine integrale Bilanzgleichung (Energie) und die integrale Entropiegleichung liefern, die aber nicht genügen, wenn eine ungleichförmige Temperatur über die Dicke des Wärmeleiters anzunehmen ist [93].

Eine strikte Beibehaltung des Konzeptes, das Lokalisierungspostulat abzuschwächen, um ausschließlich von integralen Bilanzgleichungen auszugehen, erscheint nicht realisierbar (Kap. 2.2, Teil 1). Es stellt sich damit die Frage, ob es möglich ist, die abzuleitenden approximativen zweidimensionalen Schalengleichungen als Bestandteil einer exakten dreidimensionalen Theorie, die den Rückgriff auf lokale Bilanzgleichungen erlaubt, zu interpretieren. Dabei sind neue Begriffsbildungen erwartungsgemäß nicht auszuschließen, denn diese neue dreidimensionale Theorie kann nicht mit der ursprünglichen dreidimensionalen Theorie, die es zu ersetzen gilt, identisch sein.

In Kap. 2.2 und 7, Teil 1 wird dazu ein physikalisch motiviertes Konzept skizziert, das zunächst für einen starren Wärmeleiter analysiert wurde [93] und das dann in dieser Abhandlung für eine thermoelastische Schale mit verschiedenen Abwandlungen erprobt wird. Der wesentliche Gesichtspunkt ist dabei, die Ansätze für die Verschiebung und die Temperatur oder Temperaturinverse als innere kinematische bzw. thermische Zwangsbedingung aufzufassen, die in einem Gedankenexperiment durch zusätzliche, gedachte äußere Einwirkungen, die zu den aktuellen äußeren Einwirkungen hinzukommen, exakt zu realisieren sind. Dabei ist allerdings nicht von vornherein klar,

welche Typen von gedachten äußeren Einwirkungen zu den aktuellen hinzukommen müssen, um die inneren Zwangsbedingungen zu realisieren. Es ist naheliegend anzunehmen, daß es Einwirkungen vom gleichen Typus sein müssen, wie sie im aktuellen Problem vorliegen, also stetig verteilte Volumenkräfte und Wärmequellen bzw. -senken in der Schale und Belastungen und Wärmeflüsse auf den Schalenlaibungen und dem Schalenrand. Darüber hinaus werden aber auch stetig verteilte, gedachte Volumenmomente berücksichtigt. Ob dieses System zusätzlicher gedachter Einwirkungen ausreichend ist, muß dann die Analyse zeigen.

Es wird also zunächst ein neues, um die Zwangsbedingungen und Zusatzeinwirkungen erweitertes dreidimensionales Problem betrachtet, für das lokale, um die gedachten Zusatzeinwirkungen erweiterte Bilanzgleichungen gelten sollen. Zu seiner eindeutigen Charakterisierung sind allerdings noch Forderungen an die gedachten Zusatzeinwirkungen zu stellen, die u. a. so beschaffen sein sollen, daß sich das erweiterte dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales reduziert, zu dessen Lösung die Kenntnis der Zusatzeinwirkungen nicht erforderlich ist.

Im Blick auf die integrale Energiebilanzgleichung und die integrale Clausius-Duhem Entropieungleichung werden die physikalisch unmittelbar einleuchtende Energie-Forderung (A) und Entropie-Forderung (B) an die gedachten Zusatzeinwirkungen gestellt. Diese integralen Forderungen besagen, daß die Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag zur Energiebilanz bzw. Entropiebilanz eines Schalenabschnitts, der durch die Laibungen und einen Randstreifen begrenzt ist, liefern sollen, und zwar

- (1) für jeden beliebigen Schalenabschnitt,
- (2) für alle zugelassenen Beobachtersysteme
- (3) und nicht nur für vorgegebene, aktuelle, äußere Einwirkungen, sondern auch für alle denkbaren.

Diese Forderungen sind durch zwei ebenso einleuchtende mathematische Rahmenbedingungen - die Unabhängigkeits- und die Bestimmtheitsforderung (Kap. 7, Teil 1) - zu ergänzen. Dieses neue, um die gedachten Zusatzeinwirkungen erweiterte dreidimensionale Problem soll als Ersatzproblem bezeichnet werden. Den hier angedeuteten Forderungen an die gedachten

Zusatzeinwirkungen und den beiden Rahmenbedingungen kann allerdings nicht angesehen werden, ob sie ausreichen, um ein vollständiges System von Schalengleichungen zu gewinnen, sondern dies muß die im 1. und 2. Teil dargestellte mathematische Analyse zeigen.

Im ersten Teil dieser Abhandlung werden zunächst nur die Energieforderung und die Energiebilanzgleichung sowie ihre Forminvarianz ausgewertet, um zweidimensionale Bewegungsgleichungen zu gewinnen. Vorausgesetzt wird dabei ein linearer Verschiebungsansatz über die Schalendicke. Zwei unterschiedliche Vorgehensweisen werden dabei verfolgt.

Bei dem 1. schalentheoretischen Konzept wird von dem ursprünglichen Konzept des dreidimensionalen Ersatzproblems insofern abgegangen, als hier auf die lokalen, dreidimensionalen Bilanzgleichungen (Impuls, Drall, Energie) des Ersatzproblems nicht explizit zurückgegriffen wird; es wird nur für irgendeinen Schalenabschnitt die Gültigkeit der integralen Energiebilanzgleichung einschließlich der gedachten Zusatzeinwirkungen und die integrale Energieforderung an die Zusatzeinwirkungen sowie ihre Forminvarianz unterstellt. Das bedeutet, daß hier für das dreidimensionale Ersatzproblem das Lokalisierungspostulat abgeschwächt wird. Die Auswertung der energetischen Forderungen und Invarianzbedingungen zeigt, daß die Bedingungen an die Zusatzeinwirkungen nicht ausreichen, um der Unabhängigkeitsforderung zu genügen. Eine weitere, physikalisch plausible integrale Forderung an die Zusatzeinwirkungen ist notwendig ($\hat{D}_{red} = \bar{0}$; (8.70), Teil 1).^x Damit liefern dann diese Forderungen die folgenden zweidimensionalen Schalengleichungen: Die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art, die reduzierte, zweidimensionale Energiebilanzgleichung und eine algebraische Bedingung für die Momente der Spannungen, das ist die sogenannte Orthogonalitätsbedingung, die als konstitutive Restriktion aufzufassen ist; eine Symmetrie der Momente der Spannungen läßt sich hier nicht ableiten.

Es stellt sich dann die Frage (Kap. 9.3.2), ob dieses Ergebnis auch gewonnen werden kann, wenn dem ursprünglichen Konzept eines dreidimensionalen Ersatzproblems ohne Abschwächung des Lokalisierungspostulats gefolgt wird. Eine Analyse, die von den lokalen, dreidimensionalen Bilanzgleichungen ausgeht und die entsprechenden integralen Forderungen an die gedachten Zusatzeinwirkungen ausgewertet, bestätigt dies. Das bedeutet, daß diesen

^x Dies läßt sich als die Forderung interpretieren, daß die gedachten Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag in der Drehimpulsbilanzgleichung der Schale liefern.

Bilanzgleichungen des 1. schalentheoretischen Konzepts auch ein 3D-Ersatzproblem der ursprünglichen Konzeption zugeordnet werden kann.

Bei dem 2. schalentheoretischen Konzept wird die Erfüllung der Energieforderung für alle denkbaren aktuellen Einwirkungen (bzw. alle zulässigen thermomechanischen Prozesse) zum Ausgangspunkt genommen; darüber hinaus wird hier im Unterschied zum 1. Konzept von vornherein die Gültigkeit lokaler, dreidimensionaler Bilanzgleichungen des Ersatzproblems explizit vorausgesetzt. Mit der weiteren Annahme, daß bestimmte Integralwerte der gedachten Zusatzeinwirkungen von den kinematischen Größen $\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{d}}, \dot{\bar{r}}_{,\alpha}, \dot{\bar{d}}_{,\alpha}$ unabhängig gewählt werden können (S. 149, Teil 1), erhält man aus der Energieforderung eine Reihe von Bilanzgleichungen für die Zusatzeinwirkungen, die über die beim 1. schalentheoretischen Konzept ermittelten hinausgehen. Mit den lokalen 3D-Bilanzgleichungen des Ersatzproblems lassen sich daraus dann Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art, eine reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung und die sehr weitgehenden Symmetriebedingungen für die Momente der Spannungen ableiten, die ebenfalls den Invarianzbedingungen genügen. Der Vergleich der beiden Konzepte zeigt, daß sowohl Unterschiede in den zweidimensionalen Bilanzgleichungen für die Schale wie auch in den konstitutiven Restriktionen für die Momente vorhanden sind; eine genaue Betrachtung zeigt, daß diese Unterschiede primär auf den Symmetrieeigenschaften der Momente beruhen.

Weiterhin ist festzustellen, daß die Auswertung der energetischen Forderungen nur sieben skalare Differentialgleichungen liefert. Der lineare Verschiebungsansatz beinhaltet aber sechs unbekannte Funktionen (je drei Komponenten von $\bar{r}(\theta^{\alpha}, t)$ und $\bar{d}(\theta^{\alpha}, t)$) und die angenommene quadratische Verteilung der Temperaturinversen Λ über die Schalendicke enthält die drei gesuchten Funktionen $\Lambda_m(\theta^{\alpha}, t)$ $m = 0, 1, 2$. Für den quasi-isothermen Fall (d.i. $\Lambda_0 \neq 0$, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$)^x, also gleichförmige Temperatur über die Schalendicke, stehen deshalb gerade so viele Differentialgleichungen zur Verfügung wie Lösungsfunktionen gesucht werden, so daß der Bestimmtheitsforderung genügt wird; für den allgemeinen nicht-isothermen Fall ist die Bestimmtheitsforderung aber noch nicht erfüllt; weitere Differentialgleichungen sind erforderlich.

Der Vergleich der beiden Konzepte führt auf eine Reihe von Fragen (Kap. 8.4, Teil 1; Kap. E, Teil 2), deren Klärung aus der Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung und der Entropie-Forderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen zu erwarten ist. Diese Analyse ist Gegenstand des zweiten Teils.

^x Λ_0 ist die Inverse der mittleren Wandtemperatur

Der Unterschied in der Erfüllung der Bestimmtheitsforderung legt nahe, die weitere Auswertung für die beiden Konzepte in zwei Schritten - entsprechend dem quasi-isothermen und allgemeinen nicht-isothermen Fall - vorzunehmen.

Im quasi-isothermen Fall wird bei beiden schalentheoretischen Konzepten das ursprüngliche, dreidimensionale Ersatzproblem, das nicht nur die Gültigkeit lokaler dreidimensionaler Bilanzgleichungen beinhaltet, sondern auch eine lokale, dreidimensionale Entropieungleichung, abgewandelt, indem eine lokale, dreidimensionale Entropieungleichung nicht vorausgesetzt wird. Das Lokalisierungspostulat wird also für die integrale Entropieungleichung im Rahmen des Ersatzproblems abgeschwächt. Dadurch kann auf die klassischen dreidimensionalen, thermoelastischen Stoffgleichungen, die die identische Erfüllung der lokalen Entropieungleichung und der lokalen Bilanzgleichungen voraussetzen, nicht zurückgegriffen werden. Diese Annahme soll einige neue Einsichten in die Struktur zweidimensionaler Stoffgleichungen für die Schale erlauben. Es wird also bei beiden Konzepten ein direkter Ansatz für die zweidimensionalen Stoffgleichungen, die die Momente der Spannungen mit den kinematischen Variablen und der mittleren Wandtemperatur der Schale verknüpfen, gemacht. Von diesem Ansatz wird nur verlangt, daß er forminvariant gegenüber Beobachtertransformationen ist; sonstige Struktureigenschaften werden nicht vorausgesetzt.

Die Auswertung der Entropie-Forderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen und die Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung entsprechend der Coleman-Noll Schlußweise unter Berücksichtigung der Unterschiede in den zweidimensionalen Bilanzgleichungen und in den konstitutiven Restriktionen für die Momente der beiden Konzepte ergibt eine Reihe bemerkenswerter Ergebnisse (Kap. 9.3). Die wichtigsten Aussagen, die zugleich die für den quasi-isothermen Fall in Kap. E aufgeworfenen Fragen beantwortet, sind im folgenden zusammengestellt.

- (1) Die Entropie-Forderung an die gedachten (thermischen) Zusatzeinwirkungen erlaubt zunächst, den Entropiebeitrag dieser Zusatzeinwirkung aus der integralen Entropieungleichung zu eliminieren. Ansonsten ergibt sich beim 1. schalentheoretischen Konzept keine weitere Bilanzgleichung für die Schale, die auch im quasi-isothermen Fall nicht erforderlich ist. Beim 2. schalentheoretischen Konzept wird die Entropie-Forderung aufgrund vorher abgeleiteter energetischen Bedingungen an die thermischen Zusatzeinwirkungen identisch erfüllt.

- (2) Die Auswertung der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung für alle zulässigen thermomechanischen Prozesse entsprechend der Coleman-Noll Schlußweise und unter Beachtung der Unterschiede in den zweidimensionalen Bilanzgleichungen etc. der beiden schalentheoretischen Konzepte liefert unterschiedliche Restriktionen für die zweidimensionalen Stofffunktionen der beiden Konzepte.
- (3) Bei Vorgabe der mittleren Massieuschen Funktion ϕ_0 und der Momente 2. Ordnung $M_2^{\alpha\beta}$ der Spannungen sind die Stofffunktionen der anderen Spannungsmomente $M_0^{\alpha\beta}, M_1^{\alpha\beta}$ etc. und der integrierten inneren Energie ξ festgelegt. Für die Momente 2. Ordnung ergeben sich aber bei beiden Konzepten keine Einschränkungen.
- (4) Das M_2 -Theorem: Die Wahl der Stofffunktionen für die Momente 2. Ordnung ist ohne Einfluß auf Lösungen $\bar{\pi}(\theta^\alpha, t), \bar{\alpha}(\theta^\alpha, t)$ und $\Delta(\theta^\alpha, t)$; diese Momente können deshalb über eine Konvention beliebig festgelegt werden, z.B. als verschwindend definiert werden.
- (5) Die Beanspruchungsgrößen (Momente) $M_0^{\alpha\beta}, M_1^{\alpha\beta}, Q_0^\alpha$ bzw. $M_0^{\alpha\beta}$ etc. sind wegen des M_2 -Theorems bei beiden schalentheoretischen Konzepten ambivalent.
- (6) Partielle Äquivalenz: Beide schalentheoretischen Konzepte führen auf identischen Lösungen für die Schalenverformung $\bar{\pi}(\theta^\alpha, t), \bar{\alpha}(\theta^\alpha, t)$ und die mittlere Temperaturinverse $\Delta(\theta^\alpha, t)$, sofern die mittlere Massieusche Funktion ϕ_0 dieselbe ist; dies gilt unabhängig von der Konvention für die Momente 2. Ordnung. Die Momente der Spannungen $M_0^{\alpha\beta}, M_1^{\alpha\beta}$ etc. sind dagegen im allgemeinen nicht identisch, selbst wenn man die gleiche Konvention für die Momente 2. Ordnung $M_2^{\alpha\beta}$ bei beiden Konzepten wählt. Allerdings lassen sich Linearkombinationen der $M_0^{\alpha\beta}, M_1^{\alpha\beta}, M_2^{\alpha\beta}$ etc. als neue Momente einführen, die durch Ableitungen der Massieuschen Funktion ϕ_0 festgelegt sind, so daß dann in diesen neuen abhängigen Variablen Übereinstimmung besteht.
- (7) Vollständige Äquivalenz: Beide schalentheoretischen Konzepte führen auf identische Lösungen nicht nur für die Schalenverformungen und die Temperaturinverse, sondern auch für die Momente $M_m^{\alpha\beta}, m=0,1,2$ etc., wenn der nichtminimale kinematische Variablensatz \mathcal{H} oder \mathcal{H}' in den Stofffunktionen eingeführt, die verschärfte Beobachterinvarianz für die

mittlere Massieusche Funktion gefordert^x und eine geeignete Konvention der Momente 2. Ordnung für beide Konzepte gewählt wird. Hier sind alle Momente symmetrisch. Momente und nichtminimale kinematische Variablen sind konjugiert. Die so erzielten Stoffgleichungen für die Momente stimmen mit jenen überein, die man durch Integration der klassischen dreidimensionalen, thermoelastischen Stoffgleichungen erhält.

(8) Es ist bemerkenswert, daß das zweite schalentheoretische Konzept und auch das erste unter gewissen Voraussetzungen auf symmetrische Momente der Spannungen führen, obgleich die Spannungen unsymmetrisch sind.^{xx} Hierfür konnten erklärende Gründe angegeben werden (Kap. 9.3.2).

(9) Aufgrund des M_2 -Theorems ist, vergleichbar mit dem klassischen, dimensional Problem, nur eine Potentialfunktion - hier die mittlere Massieusche Funktion ϕ_0 - für die mechanischen Stoffgleichungen maßgebend.

Diese Ergebnisse sind zum Teil unerwartet und auch nicht ohne weiteres durch andere Argumentationen einsehbar. Hier sind insbesondere

- die Symmetrieeigenschaften und Ambivalenz der Momente der Spannungen,
- die Äquivalenzeigenschaften der beiden schalentheoretischen Konzepte
- und die unter gewissen Voraussetzungen erhaltene Überstimmung der Stoffgleichungen für die Momente der Spannungen mit den Beziehungen, die man durch Integration der klassischen, thermoelastischen Stoffgleichungen erhält,

zu nennen. Eine Diskussion und Interpretation ist in Kap. 9.3 enthalten und soll hier nicht wiederholt werden. Eine generelle, beachtenswerte Feststellung soll hier aber noch angefügt werden.

Die Unterschiede in den Bilanzgleichungen - den Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art und in der reduzierten Energiegleichung - des 1. und 2. schalentheoretischen Konzepts beruhen primär auf einigen Unterschieden in den Annahmen hinsichtlich der gedachten Zusatzeinwirkungen. Diese Unterschiede hätten leicht zu dem voreiligen Schluß führen können, daß auch die Lösungen differieren. Dieser Schluß ist natürlich insofern verfrüht, als

^x D.h., es ist nicht nur die integrierte Größe $S_{\alpha\alpha} \phi_0 = \int_{-S}^{+S} \sqrt{\frac{E'}{A}} s \phi d\theta$ beobachterinvariant, sondern auch die Massieusche Funktion ϕ .

^{xx} Es werden gedachte Volumenmomente angenommen, die die Unsymmetrie der Spannungen zur Folge haben.

die Stoffgleichungen in den Vergleich noch mit einbezogen werden müssen. Wesentlich ist nun aber, daß die thermodynamische Einbettung der beiden Konzepte dazu führt, daß eine enge Verknüpfung zwischen den Bewegungsgleichungen und der Energiegleichung einerseits besteht, die Form dieser Bilanzgleichungen aber andererseits über die identisch zu erfüllende Entropieungleichung für die Restriktionen der Stoffgleichungen bedeutsam ist. Diese Verknüpfungen machen verständlich, daß das 1. und 2. schalentheoretische Konzept bei unterschiedlichen Bilanz- und Stoffgleichungen zu identischen Lösungen für die Verschiebungen und die Temperatur führen konnten. Damit zeigt der Vergleich der beiden Konzepte für den quasi-isothermen Fall, daß man die approximativen Bilanz- und Stoffgleichungen einer Schale nicht unabhängig voneinander entwickeln sollte. Allerdings sollte man nicht unterstellen, daß allein die thermodynamische Einbettung eine wechselseitige Bedingtheit der Bilanz- und Stoffgleichungen einer Schalentheorie bewirkt. Eine Verflechtung ist ebenfalls gegeben, wenn die approximativen Gleichungen einer rein mechanischen Schalentheorie aus einem Variationsprinzip gewonnen werden, das als Euler-Lagrangesche Gleichungen die Bewegungs- und mechanischen Stoffgleichungen liefert.

Beim allgemeinen nicht-isothermen Fall liefern die energetischen Betrachtungen noch nicht hinreichend viele zweidimensionale Bilanzgleichungen für die Schale, denn hier sind die zwei weiteren Lösungsfunktionen $\lambda(\theta^i, t)$ und $N(\theta^i, t)$ gesucht. Die Gewinnung dieser Bilanzgleichungen aus der Entropie-Forderung an die gedachten Zusatzeinwirkungen stellt hier einen wichtigen, neuen Gesichtspunkt dar. Wie im quasi-isothermen Fall werden auch hier die beiden schalentheoretischen Konzepte nebeneinander verfolgt und die Gültigkeit einer lokalen, dreidimensionalen Entropieungleichung wird zunächst nicht unterstellt. Wesentliche Fragen sind, ob auch in diesem Fall ein vollständiges System von Schalengleichungen für beide Konzepte gewinnbar ist und ob sich hier ähnliche Struktureigenschaften wiederfinden lassen, wie sie im quasi-isothermen Fall bestehen.

Zunächst stellt sich heraus, daß die Entropie-Forderung (B) und ihre Nebenbedingungen (B1)-(B3) nicht ausreichen, um weitere Bilanzgleichungen zu gewinnen, wenn man nicht ergänzende Forderungen (Kap. 10.3) an die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen stellt. Diese Situation ist vergleichbar der bei der Auswertung der Energie-Forderung. Mit diesen ergänzenden Forderungen an die thermischen Zusatzeinwirkungen erhält man aus der summarischen Entropie-Forderung gerade so viele weitere integrale "entropische"

Bilanzgleichungen für die gedachten Zusatzeinwirkungen, wie Entwicklungskoeffizienten \hat{m} der Temperaturinversen vorhanden sind, und zwar drei. Dies ist formal gesehen zunächst eine Bedingung mehr, als für die Erfüllung der Bestimmtheitsforderung nötig ist. Unterstellt man jetzt die Gültigkeit einer lokalen, dreidimensionalen Energiebilanzgleichung, die entsprechend dem dreidimensionalen Ersatzproblem um die gedachten Zusatzeinwirkungen erweitert ist, dann lassen sich durch Integration und Elimination die drei entropischen Bilanzgleichungen auf eine Form bringen, in der die gedachten Zusatzeinwirkungen nicht mehr enthalten sind. Bei diesem Prozess muß aber zwischen dem 1. und 2. schalentheoretischen Konzept unterschieden werden:

Beim 1. Konzept werden aufgrund unterschiedlicher Voraussetzungen zwei Strategien betrachtet. Die erste Strategie geht explizit davon aus, daß auch dem 1. Konzept ein 3D-Ersatzproblem im ursprünglichen Sinn zugeordnet werden kann, so daß hier der lokale dreidimensionale Impuls- und Drehimpulssatz gilt. Damit wird hier von der lokalen, reduzierten Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems ausgegangen. Bei der zweiten Strategie wird wohl die Gültigkeit der lokalen, nicht-reduzierten Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems unterstellt, nicht aber seine Invarianz bei Beobachtertransformationen. Das heißt unter anderem, daß die Erfüllung des lokalen dreidimensionalen Impuls- und Drehimpulssatzes nicht verlangt wird; diese Annahme entspricht der Vorgehensweise des 1. schalentheoretischen Konzepts bei der Auswertung der integralen Energiebedingungen (Kap. 8.2, Teil 1).

Beim 2. Konzept wird von der lokalen reduzierten Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems ausgegangen, so daß hier konzeptgemäß die Gültigkeit der übrigen lokalen Bilanzgleichungen des Ersatzproblems impliziert ist.

Zunächst sollen hier die Ergebnisse beim 2. Konzept dargestellt werden. Man erhält aus den drei entropischen Bilanzgleichungen für die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen drei Differentialgleichungen, aus denen die gedachten thermischen und die mechanischen Zusatzeinwirkungen eliminiert werden können und die invariant gegenüber Beobachtertransformationen sind; diese Gleichungen können als über die Schalendicke gewichtet gemittelte Energiebilanzgleichungen aufgefaßt werden. Wesentlich ist, daß in diesen Bilanzgleichungen noch weitere Momente der Spannungen mit höherer Ordnung ($M_3^{\alpha\beta}$, $M_4^{\alpha\beta}$ und andere) auftreten, als sie im quasi-isothermen Fall vorhanden sind und auch in den Bewegungsgleichungen der Schale auftreten. Für diese werden geeignete zweidimensionale Stoffgleichungen verlangt, die die integrale Entropieungleichung identisch erfüllen müssen. Die Analyse des 2. schalentheoretischen Konzepts, insbeson-

dere die der integralen Entropieungleichung unter Berücksichtigung der umgeformten entropischen Bilanzgleichungen des 2. Konzepts, liefert folgende Ergebnisse:

- (1) Das System von Differentialgleichungen erfüllt die Bestimmtheitsforderung, denn die reduzierte zweidimensionale Energiebilanzgleichung der Schale und die erste entropische Bilanzgleichung sind identisch.
- (2) Die Auswertung der integralen Entropieungleichung liefert summarische Restriktionen für die mechanischen Stofffunktionen, Verknüpfungen zwischen den Momenten $\underline{\varepsilon}_m$, $m=0,1,2$ der inneren Energie und ϕ_0 und eine Restentropieungleichung für die integralen Wärmeflüsse. Bei Vorgabe der mittleren Massieschen Funktion ϕ_0 und der symmetrischen Anteile aller höheren Momente der Spannungen $M^{(\alpha\beta)}$, $M^{(\alpha\beta)}$, $M^{(\alpha\beta)}$, $M^{(\alpha\beta)}$ etc. sind die symmetrischen Momente $M_0^{(\alpha\beta)}$, $M_1^{(\alpha\beta)}$, $M_0^{(3\alpha)}$, $M_1^{(3\alpha)}$ und M_0^{33} konstitutiv festgelegt. Für die symmetrischen Anteile der höheren Momente $M^{(\alpha\beta)}$ etc. ergeben sich keine Einschränkungen; insbesondere sind diese nicht aus einem Potential ableitbar.
- (3) Ein Theorem - analog dem $\frac{1}{2}M$ -Theorem der quasi-isothermen Theorie - existiert nicht, da sich die Momente höherer Ordnung nicht aus dem Problem eliminieren lassen: Die Lösungen für \bar{r} , \bar{d} und $\bigwedge_m m=0,1,2$ hängen von den Stofffunktionen der höheren Momente ab. Die Stoffgleichungen für die Momente höherer Ordnung sind damit nicht beliebig wählbar, wenn eindeutige Lösungen für \bar{r} , \bar{d} und \bigwedge_m angestrebt werden.
- (4) Durch eine weitere Bedingung können zusätzliche Einschränkungen für die Stofffunktionen der höheren Momente gewonnen werden: Es wird verlangt, daß über die Voraussetzungen des dreidimensionalen Ersatzproblems hinaus die integrale Entropieungleichung nicht nur für alle äußeren Einwirkungen, die den inneren Zwangsbedingungen genügen, erfüllt wird, sondern auch für alle nur denkbaren Einwirkungen. Unter dieser Annahme kann gezeigt werden, daß die lokalen dreidimensionalen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen identisch sind mit den klassischen thermoelastischen Stoffgleichungen. Aus diesen können durch Integration über die Schalendicke alle zweidimensionalen mechanischen Stoffgleichungen gewonnen werden; sie sind verträglich mit den summarischen Restriktionen.
- (5) Für diese mechanischen Stoffgleichungen sind im Unterschied zum quasi-isothermen Fall und zum dreidimensionalen Fall drei Potentialfunktionen - Integrale der Helmholtz Funktion (freie Energie) ψ_m , $m=0,1,2$ - maßgebend.

Die Analyse des 1. schalentheoretischen Konzepts mit der ersten Strategie ist jetzt relativ einfach. Man erhält auf etwas anderem Wege dasselbe System von zweidimensionalen Schalengleichungen wie beim 2. schalentheoretischen Konzept. Unter anderem bedeutet dies, daß die schiefsymmetrischen Anteile der Momente der Spannungen entweder in den Gleichungen nicht auftreten oder nachweislich verschwinden.

Die Analyse mit der zweiten Strategie ist komplexer. Die entropischen Bilanzgleichungen für die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen werden mit der lokalen, nicht-reduzierten, dreidimensionalen Energiebilanzgleichung des Ersatzproblems umgeformt. Man erhält damit drei Bilanzgleichungen, die die gedachten thermischen Zusatzeinwirkungen nicht mehr enthalten, dafür aber noch die aktuellen und die gedachten Volumenkräfte und -momente. Wegen der Unabhängigkeitsforderung ist hier jetzt zusätzlich zu verlangen, daß die gedachten mechanischen Zusatzeinwirkungen keinen Beitrag in diesen umgeformten, entropischen Bilanzgleichungen liefern (S. 179), unabhängig von der Wahl des Beobachtersystems. Ferner sollen die entropischen Bilanzgleichungen selbst forminvariant gegenüber Beobachtertransformationen sein. Mit diesen Bedingungen und einer weiteren Forderung an die gedachten mechanischen Zusatzeinwirkungen (i.e. $\frac{\delta \sigma_{red}}{\delta m} = 0, m=0,1,2$, Gl. (10.159)) erhält man aus den umgeformten entropischen Bilanzgleichungen vier Gruppen von Gleichungen: Die sogenannten verallgemeinerten Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art, die verallgemeinerten, reduzierten 2D-Energiebilanzgleichungen und die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen. In diesen Gleichungen sind alle gedachten Zusatzeinwirkungen eliminiert. Es handelt sich hier um jeweils drei Gleichungen, wobei die erste ($m=0$) jeder Gruppe schon aus den früheren energetischen Analysen zum 1. schalentheoretischen Konzept bekannt ist. Die Gleichungen für $m=2$ und 3 stellen dagegen neue Aussagen dar. Diese Ergebnisse unterscheiden sich in ihrer Struktur wesentlich von denen des 2. schalentheoretischen Konzepts. Natürlich sind die Momente der Spannungen nicht symmetrisch, insbesondere aber treten Bewegungsgleichungen höherer Ordnung auf, in denen aber auch nur Zeitableitungen 2. Grades der kinematischen Größen $\bar{\gamma}$ und \bar{d} vorhanden sind. Wegen der Vielzahl der Momente der Spannungen erlaubt die Auswertung der integralen Entropiegleichung auch nur "summarische" Restriktionen für die Momente.

Dieses System von Gleichungen wird auf seine Verträglichkeit mit der Bestimmtheitsforderung analysiert. Die Überprüfung zeigt, daß sich aus diesen Gleichungen mit den verschiedensten Annahmen über die zweidimensionalen Stoff-

gleichungen kein vollständiges, konsistentes System von Schalengleichungen gewinnen läßt, sofern man auf radikale und formale ad hoc-Annahmen verzichtet. Offensichtlich ist die Grundannahme, die Erfüllung dreidimensionaler lokaler Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichungen nicht zu unterstellen und damit vom ursprünglichen Konzept eines dreidimensionalen Ersatzproblems abzuweichen, zu schwach, um ohne weitere ad hoc-Annahmen zu einer vollständigen Schalentheorie zu kommen.

Zusammenfassend ist damit für den nicht-isothermen Fall festzustellen, daß das 2. schalentheoretische Konzept und die 1. Strategie beim 1. schalentheoretischen Konzept zu demselben vollständigen, thermodynamisch konsistenten System von Bilanz- und Stoffgleichungen für die Schale führen. Die zweite Strategie beim 1. schalentheoretischen Konzept liefert dagegen kein vollständiges, konsistentes Gleichungssystem. Wegen der höheren Momente, die sich nicht aus den beiden Konzepten eliminieren lassen, sind Annahmen notwendig (S. 138ff.), die über die der quasi-isothermen Theorie hinausgehen. Damit finden sich wesentliche qualitative Eigenschaften der quasi-isothermen Theorie hier nicht wieder.

Eine Abgrenzung gegenüber anderen Entwicklungen thermodynamisch begründeter Schalentheorien ist in der Einführung zu Teil I erfolgt und braucht nicht wiederholt zu werden. Hier soll aber noch auf einen direkten Vergleich der abgeleiteten Bewegungs- und Stoffgleichungen mit den entsprechenden Gleichungen entkoppelter oder rein mechanischer Theorien, die die gleichen kinematischen Ansätze verwenden, hingewiesen werden. Da diese Theorien [12, 22, 25] eine komponentenweise Darstellung mit materiellen Koordinaten in der Ausgangskonfiguration (Lagrangesche Koordinaten) verwenden, ist eine entsprechende Darstellung noch erforderlich (Anhang 9). Geht man von den Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art des 1. schalentheoretischen Konzepts aus, und entwickelt sie bezüglich der Basisvektoren \bar{A}_α , $\alpha=1,2$ und \bar{A}_3 der Ausgangskonfiguration, dann findet man eine vollständige Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Habip [22], sofern Symmetrie der Momente $M_{m\alpha\beta}^{\alpha\beta}$, $m=0,1,2$ unterstellt wird. Unter bestimmten Voraussetzungen ist dies ja beim 1. schalentheoretischen Konzept zulässig (Kap. 9.1.7). Übereinstimmung ist auch bei den dynamischen Randbedingungen vorhanden. Unter gewissen, nur approximativ zu erfüllenden Voraussetzungen stimmen ebenso die mechanischen Stoffgleichungen überein. Der Vergleich zeigt

auch eine vollständige Übereinstimmung mit den Bewegungsgleichungen von Pietraszkiewicz [25]. Damit ist die von Pietraszkiewicz gemachte Feststellung, daß in den Gleichungen von Habip und Ebcioğlu [12, 22] bestimmte Terme unzulässigerweise ignoriert werden, nicht zutreffend; vielmehr hat Piétrazkiewicz nicht berücksichtigt, daß in seinen Gleichungen gewisse Terme sich herausheben. Mit den dynamischen Randbedingungen von Pietraszkiewicz besteht keine Übereinstimmung; hier scheint in [25] ein systematischer Druckfehler vorzuliegen. In den mechanischen Stoffgleichungen ist Übereinstimmung zu finden, sofern isotherme Prozesse angenommen werden (Anhang 9).

Anhang (4): Minimalität des kinematischen Variablensatzes

Im folgenden soll die Minimalität (Nicht-Reduzierbarkeit) des kinematischen Variablensatzes

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \{ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, d_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}, \nu_\alpha, \nu \} \\ &= \{ \bar{r}_\alpha \cdot \bar{r}_{1\beta}, \bar{r}_\alpha \cdot \bar{d}, \bar{r}_\alpha \cdot \bar{d}_{1\beta}, \bar{d} \cdot \bar{d}_{1\alpha}, \bar{d} \cdot \bar{d} \} \end{aligned}$$

gezeigt werden.

Der Übersichtlichkeit wegen sollen zunächst folgende Definitionen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &:= \bar{r}_{11} & \bar{c}_4 &= \bar{d}_{11} \\ \bar{c}_2 &:= \bar{r}_{12} & \bar{c}_5 &= \bar{d}_{12} \\ \bar{c}_3 &:= \bar{d} \end{aligned}$$

wobei \bar{c}_i $i=1, \dots, 5$ dreidimensionale Vektoren sind. Ferner sei

$$f = \check{f}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_5)$$

eine skalarwertige Funktion dieser fünf Vektoren, und es sei \check{f} invariant gegenüber eigentlich orthogonalen Transformationen^{*}, d.h.

$$\check{f}(Q\bar{c}_1, \dots, Q\bar{c}_5) = \check{f}(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_5)$$

$$Q^T = Q^{-1}, \quad \det Q = +1.$$

Mit dem Cauchyschen Representationstheorem (Kap. 9.1.2) beweist man, daß dann f nur eine Funktion der

Skalarprodukte $c_{ij} = \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j$

und der Spatprodukte $\bar{c}_i \cdot (\bar{c}_j \times \bar{c}_k), \quad i \neq j \neq k$

ist. Wie in Kap. 9.1.2 gezeigt, lassen sich die Spatprodukte durch die Skalarprodukte $\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j$ und durch $\bar{c}_i \cdot (\bar{c}_j \times \bar{c}_k)$ ersetzen. Die Vektoren $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ sollen linear unabhängig sein und eine rechtshändige Basis bilden, d.h.

$$\bar{c}_1 \cdot (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3) > 0,$$

^{*} Primär sind dies Beobachtertransformationen

In Kap. 9.1.2 wurde schon erläutert, daß die 15 Skalarprodukte $C_{ij} = C_{ji}$ keine minimale Integritätsbasis bilden, denn die Elemente C_{44} , $C_{45} = C_{54}$ und C_{55} der symmetrischen Matrix (C_{ij})

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ \times & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ \times & \times & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ \times & \times & \times & C_{44} & C_{45} \\ \times & \times & \times & \times & C_{55} \end{pmatrix}$$

lassen sich durch die übrigen Elemente vollständig darstellen. Sind beispielsweise \bar{C}_1, \bar{C}_2 und \bar{C}_3 orthogonal, so daß \bar{C}_4 und \bar{C}_5 entsprechend

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 &= C_{41} \bar{C}_1 + C_{42} \bar{C}_2 + C_{43} \bar{C}_3 \\ \bar{C}_5 &= C_{51} \bar{C}_1 + C_{52} \bar{C}_2 + C_{53} \bar{C}_3 \end{aligned}$$

entwickelt werden können, dann ist

$$C_{44} = (C_{41})^2 C_{11} + (C_{42})^2 C_{22} + (C_{43})^2 C_{33}$$

etc.

Dieses Beispiel demonstriert die Abhängigkeit der Elemente C_{44} etc.

Die eigentliche Frage ist, ob die übrigen Skalarprodukte in der Matrix (C_{ij}) eine minimale Integritätsbasis bilden. Zunächst ist offensichtlich, daß die Elemente

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \times & C_{22} & C_{23} \\ \times & \times & C_{33} \end{pmatrix}$$

nicht weiter reduzierbar sind, da \bar{C}_1, \bar{C}_2 und \bar{C}_3 als linear unabhängig vorausgesetzt wurden. Betrachtet man die Elemente

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ \times & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ \times & \times & C_{33} & C_{34} \end{pmatrix}$$

dann ist deutlich, daß auch dieser Satz von Skalarprodukten nicht reduzierbar ist, sofern nur $\bar{C}_4 = \bar{d}_{11}$ nicht ständig während des Deformationsprozesses in einer der Ebenen liegt, die von je zwei der drei Vektoren $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$

aufgespannt werden. In diesem Fall würde eine Verknüpfung zwischen den Elementen der obigen Untermatrix bestehen.*

Entsprechendes gilt auch für die Skalarprodukte c_{15}, c_{25}, c_{35} . Hier darf \bar{c}_5 nicht ständig in einer der Ebenen liegen, die von je zwei der vier Vektoren $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_4$ aufgespannt werden.

Damit ist gezeigt, daß die Skalarprodukte

$$(c_{ij}) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j = 1, \dots, 5$$

unabhängig voneinander, d.h. nicht weiter reduzierbar sind, sofern nur alle durch je zwei der fünf Vektoren $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_5$ aufgespannten Ebenen verschieden voneinander sind. Diese Voraussetzung dürfte aber i.a. gegeben sein. Andernfalls würde hier eine besondere kinematische Einschränkung bestehen.

* Man setze $\bar{c}_4 = A\bar{c}_1 + B\bar{c}_2$ und berechne dann c_{14}, c_{24}, c_{34} .

Anhang (5): Beweis der Äquivalenz der integrierten 3D-Stoffgleichungen und der direkt abgeleiteten 2D-Stoffgleichungen

Die thermodynamischen Restriktionen für das allgemeine thermoelastische 3D-Feldproblem lauten für den symmetrischen Anteil des Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T}{}^s_{KL} &= -\frac{1}{\Lambda} g_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial g_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial g_{LK}} \right) \\ \phi &= \phi(g_{KL}, \Lambda). \end{aligned} \right\} \text{(A5.1)}$$

Mit (3.33), Teil (1) wird

$$g_{KL} = 2 E_{KL} + G_{KL};$$

man kann daher die freie Entropie auch als Funktion der E_{KL} auffassen, so daß aus (A5.1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T}{}^s_{KL} &= -\frac{1}{\Lambda} g_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^N}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \phi^N}{\partial E_{LK}} \right) \\ \phi &= \phi^N(E_{KL}, \Lambda). \end{aligned} \right\} \text{(A5.2)}$$

folgt; hierbei werden E_{KL} und E_{LK} - obwohl zahlenmäßig gleich - als unabhängig angesehen. Insbesondere ist dann zunächst

$$\frac{1}{T}{}^s_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\Lambda} g_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^N}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi^N}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \quad \text{(A5.3)}$$

Die Momente sind definiert als ((8.19), Teil 1)

$$M_m^{\alpha\beta} = \int_{-S}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\beta}(\theta)^m d\theta, \quad m=0,1,2 \quad \text{(A5.4)}$$

und daher liegt die Definition

$$M_{m \alpha\beta}^s = \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^s{}_{\alpha\beta}(\theta)^m d\theta \quad (A5.4)$$

nahe. Wegen der Voraussetzung konstanter Temperaturverteilung über die Wanddicke

$$\Lambda = \Lambda_0(\theta^1, \theta^2, t), \quad (A5.5)$$

ist dann mit (A5.3)

$$M_{m \alpha\beta}^s = -\frac{1}{\Lambda_0} \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_{R\alpha} \left(\frac{\partial \Phi^W}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi^W}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) (\theta)^m d\theta, \quad (A5.6)$$

Unter Benutzung des $\frac{M}{2}$ -Theorems, einer geeigneten Konvention für die Momente 2. Ordnung und der verschärften Beobachterinvarianzforderung für die mittlere Massieusche Funktion Φ_0^W wurden nun zweidimensionale Stoffgesetze für die Momente abgeleitet, die symmetrische Momente liefern, und zwar

$$\left. \begin{aligned} M_{m \alpha\beta}^s &= -\frac{1}{\Lambda_0} g_{R\alpha} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi_0^W}{\partial E_{\beta\alpha}} \right), \quad m=0,1,2 \\ \Phi_0^W &= \frac{1}{g_{R\alpha}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_{R\alpha} \Phi^W d\theta. \end{aligned} \right\} (A5.7)$$

Es sei noch angemerkt, daß

$$\begin{aligned}
 M_m^{\alpha\beta} &= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \left\{ T^{\alpha\beta} + \frac{a}{T} \alpha\beta \right\} (\theta)^m d\theta \\
 &= M_m^{\alpha\beta} + \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\beta} (\theta)^m d\theta
 \end{aligned}
 \tag{A5.8}$$

und da $M_m^{\alpha\beta}$ entsprechend (A5.7) symmetrisch ist, muß das Integral

$$\int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{\alpha\beta} (\theta)^m d\theta
 \tag{A5.9}$$

verschwinden^x.

Es ist jetzt zu zeigen, daß das Integral (A5.6) der 3D-Stoffgleichung den zweidimensionalen Stoffgleichungen (A5.7) äquivalent ist.

Dazu wird nachgewiesen, daß die rechte Seite von (A5.7) auf dieselbe Form wie die rechte Seite von (A5.6) gebracht werden kann. Mit (9.47) ist

$$E_{\alpha\beta} = E_0^{\alpha\beta} + \theta E_1^{\alpha\beta} + (\theta)^2 E_2^{\alpha\beta} = \sum_{m=0}^2 E_m^{\alpha\beta} (\theta)^m
 \tag{A5.10}$$

und es wird

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_0^N}{\partial E_m^{\alpha\beta}} &= \frac{\partial}{\partial E_m^{\alpha\beta}} \frac{1}{S_0^N} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \phi^N S_N d\theta \\
 &= \dots
 \end{aligned}
 \tag{A5.11}$$

^x Das bedeutet nicht, daß $\frac{a}{T} \alpha\beta$ notwendigerweise identisch verschwindet.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{g_{0R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_{0R} \frac{\partial \phi^N}{\partial E_{KL}} \frac{\partial E_{KL}}{\partial E_{\alpha\beta}} d\theta \\
 &= \frac{1}{g_{0R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_{0R} \frac{\partial \phi^N}{\partial E_{\lambda\mu}} \underbrace{\frac{\partial E_{\lambda\mu}}{\partial E_{\alpha\beta}}}_{\delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\mu} (\theta)^m} d\theta \\
 &= \frac{1}{g_{0R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_{0R} \frac{\partial \phi^N}{\partial E_{\alpha\beta}} (\theta)^m d\theta.
 \end{aligned} \tag{A5.11}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial \phi_0^N}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi_0^N}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) \\
 &= \frac{1}{g_{0R}} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} g_{0R} \left(\frac{\partial \phi^N}{\partial E_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \phi^N}{\partial E_{\beta\alpha}} \right) (\theta)^m d\theta.
 \end{aligned} \tag{A5.12}$$

Einsetzen in (A5.7) bestätigt die Behauptung der Gleichheit der rechten Seiten von (A5. 6) und (A5. 7).

Es muß noch gezeigt werden, daß auch die Integrale der Stoffgleichungen

$$\left. \begin{aligned} T^{3L} &= -\frac{1}{\Lambda} g_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^W}{\partial E_{3L}} + \frac{\partial \phi^W}{\partial E_{L3}} \right) \\ T^{33} &= -\frac{1}{\Lambda} g_R \frac{\partial \phi^W}{\partial E_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5.13})$$

und zwar

$$\begin{aligned} M_n^{3\alpha} &:= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{3\alpha}(\theta)^n d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \frac{1}{\Lambda} g_R \left(\frac{\partial \phi^W}{\partial E_{3\alpha}} + \frac{\partial \phi^W}{\partial E_{\alpha 3}} \right) (\theta)^n d\theta, \quad n=0,1 \end{aligned} \quad (\text{A5.14})$$

und

$$\begin{aligned} M_0^{33} &:= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{33} d\theta \\ &= \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \frac{1}{\Lambda} g_R \frac{\partial \phi^W}{\partial E_{33}} d\theta, \end{aligned} \quad (\text{A5.15})$$

mit den entsprechenden zweidimensionalen Stoffgleichungen (9.98)

$$\begin{aligned} M_n^{3\alpha} &= Q_n^\alpha = \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} T^{3\alpha}(\theta)^n d\theta \\ &= -\frac{1}{\Lambda} g_{0R} \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_0^W}{\partial E_{\alpha 3}^n}, \quad n=0,1 \end{aligned} \quad (\text{A5.16})$$

$$M_{\circ}^{33} = Q = - \frac{1}{\Lambda} \int_{\circ} \rho_R \frac{\partial \phi_{\circ}^W}{\partial E_{33}} \quad (\text{A5.17})$$

übereinstimmen. Hierbei ist

$$\phi_{\circ}^W = \frac{1}{\rho_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \phi^W d\theta \quad (\text{A5.18})$$

und

$$\phi^W = \phi^W (E_{\alpha\beta}, E_{\alpha 3}, E_{3\alpha}, E_{33}, \Lambda).$$

Wegen

$$E_{\alpha 3} = E_{3\alpha} = E_{\circ\alpha 3} + \theta E_{\gamma\alpha 3}$$

$$E_{33} = E_{\circ 33}$$

wird dann aus (A5.18)

$$\phi_{\circ}^W = \phi_{\circ}^W (E_{\circ\alpha\beta}, E_{\gamma\alpha\beta}, E_{\delta\alpha\beta}, E_{\circ\alpha 3}, E_{\gamma\alpha 3}, E_{\circ 33}, \Lambda);$$

Man beachte, daß bei diesem formalen Integrationsprozeß $E_{\alpha 3}$ und $E_{3\alpha}$ nicht als unabhängig angesehen werden. Der gesuchte Nachweis wird geführt, in dem die Gleichheit der rechten Seiten, z.B. von (A5.14) und (A5.16), nachgewiesen wird.

Es wird für $n=0,1$

$$\frac{\partial \phi_{\circ}^W}{\partial E_{\alpha 3}^n} = \frac{1}{\rho_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} \rho_R \frac{\partial \phi^W}{\partial E_{\alpha 3}^n} d\theta \quad (\text{A5.19})$$

$$= \frac{1}{S_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial E_{\mu 3}} \frac{\partial E_{\mu 3}}{\partial E_{\alpha 3}} + \frac{\partial \Phi^N}{\partial E_{3\mu}} \frac{\partial E_{3\mu}}{\partial E_{\alpha 3}} \right) d\theta \quad (\text{A5.19})$$

und wegen

$$\frac{\partial E_{\mu 3}}{\partial E_{\alpha 3}} = \int_{\alpha}^{\mu} (\theta)^n = \frac{\partial E_{3\mu}}{\partial E_{\alpha 3}} \quad (\text{A5.20})$$

ist dann

$$\frac{\partial \Phi_0^N}{\partial E_{\alpha 3}} = \frac{1}{S_R} \int_{-S^-}^{S^+} \sqrt{\frac{G}{A}} S_R \left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial E_{\alpha 3}} + \frac{\partial \Phi^N}{\partial E_{3\alpha}} \right) (\theta)^n d\theta. \quad (\text{A5.21})$$

Einsetzen von (A5.21) in (A5.16) und Beachtung von $\lambda = \hat{\lambda}$ zeigt schließlich die Äquivalenz von (A5.14) und (A5.16). Der Nachweis der Gleichheit von (A5.15) und (A5.17) erübrigt sich.

Anhang (6): Konjugierte Variablen im l. schalentheoretischen Konzept

Die Ableitung konjugierter Variablen soll hier einschränkend nur für das l. schalentheoretische Konzept erfolgen. Für diesen Fall ist die vollständig reduzierte, zweidimensionale Energiebilanzgleichung gegeben durch ((8.84), Teil 1) und die Elementarleistung \dot{W}_{in} hat die alternativen Formen (vergl. (8.84), Teil 1):

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_{in} &:= [Q \bar{d} + L^{\beta} \bar{\tau}_{1\beta} + Q_0^{\beta} \bar{\tau}_{1\beta} + Q_1^{\beta} \bar{d}_{1\beta}] \cdot \bar{d} \\
 &+ [M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d}] \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} \\
 &+ [M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d}] \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta} \\
 &= M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} \\
 &+ M_1^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta} + \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &+ M_2^{\alpha\beta} (\bar{d}_{1\alpha} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &+ Q_0^{\beta} (\bar{\tau}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{\tau}}_{1\beta}) \\
 &+ Q_1^{\beta} (\bar{d}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}_{1\beta}) \\
 &+ L^{\beta} \bar{\tau}_{1\beta} \cdot \dot{\bar{d}} + Q \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}}.
 \end{aligned} \tag{A6.1}$$

Nach Elimination der aktuellen, von außen eingeprägten Wärmequellen bzw. -senken und der Wärmeflüsse auf den Schalenlaibungen in der 2D-Entropiegleichung (9.9) tritt diese Elementarleistung auch in der umgeformten 2D-Entropiegleichung (9.11) auf. Es war nun davon ausgegangen worden, daß die kinematischen Variablen durch die 12 unabhängigen Größen

$$\mathcal{K} = \begin{cases} a_{\alpha\beta} = \bar{r}_{1\alpha} \cdot \bar{r}_{1\beta} = a_{\beta\alpha} \\ d_{\alpha} = \bar{r}_{1\alpha} \cdot \bar{d} \\ \lambda_{\alpha\beta} = \bar{r}_{1,\alpha} \cdot \bar{d}_{1,\beta} \\ \nu_{\beta} = \bar{d} \cdot \bar{d}_{1\beta} \\ \mathcal{J} = \bar{d} \cdot \bar{d} \end{cases} \quad (\text{A6.2})$$

gegeben seien. Mit diesen Variablen und unter Beachtung der identisch verschwinden Ausdrücke (9.58) und (9.60) lässt sich die Elementarleistung der Schale wie folgt darstellen (vergl. (9.57) und (9.62)):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{in} = & \frac{1}{2} \left(M_0^{(\alpha\beta)} + N^{(\alpha\beta)} \right) \dot{a}_{\alpha\beta} \\ & + \left(M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\beta\gamma} \eta_{\gamma}^{\alpha} \right) \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \\ & + \left(Q_0^{\beta} + \left(M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\alpha\alpha} \right) \mu_{\alpha} - M_2^{\beta\gamma} \eta_{\gamma}^{\alpha} \mu_{\alpha} \right) \dot{d}_{\beta} \\ & + \left(Q_1^{\beta} + M_2^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \right) \dot{\nu}_{\beta} \\ & + \frac{1}{2} \left(Q - M_2^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} \mu_{\beta} \right) \dot{\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (\text{A6.3})$$

Diese Bilinearform in $M_0^{\alpha\beta}$, $\dot{a}_{\alpha\beta}$ etc. lässt sich sofort auf eine konjugierte Form bringen, wenn neue Beanspruchungsgrößen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} M_0^{\alpha\beta} & := M_0^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(M_0^{(\alpha\beta)} + N^{(\alpha\beta)} \right) \\ M_1^{\alpha\beta} & := M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\beta\gamma} \eta_{\gamma}^{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6.4})$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_0^B &:= Q_0^B + (M_1^{\alpha\beta} - M^{\beta\alpha}) \mu_\alpha - M_2^{\beta\gamma} \eta_\beta^\beta \mu_\gamma \\
 Q_1^B &:= Q_1^B + M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \\
 Q &:= \frac{1}{2} (Q - M_2^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta) .
 \end{aligned} \right\} \text{(A6.4)}$$

Damit wird die Elementarleistung

$$\begin{aligned}
 W_{in} &= M_0^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} + M_1^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \\
 &+ Q_0^B \dot{d}_\beta + Q_1^B \dot{d}_\beta + Q \dot{j} ;
 \end{aligned} \tag{A6.5}$$

die Größen $M_0^{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ etc. sind konjugiert. Die Einführung derartiger konjugierter Beanspruchungsgrößen hat nur dann einen Sinn, wenn nicht nur die reduzierte Energiebilanzgleichung und damit auch die Entropieungleichung mit diesen Größen dargestellt werden kann, sondern auch die übrigen zweidimensionalen Feldgleichungen, nämlich die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art. Aufgrund des M_2 -Theorems ist dies zu erwarten.

Für das 1.schalentheoretische Konzept lauten diese Bewegungsgleichungen

Bewegungsgleichungen 1. Art:

$$\frac{\partial}{\partial x^R} \bar{\pi}^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^R} \bar{d}^{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x^R} \bar{b}_0 - \bar{f}_0 = \left[M_0^{\alpha\beta} \bar{\pi}_{1\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + Q_0^B \bar{d} \right]_{;\beta} \tag{A6.6}$$

Bewegungsgleichungen 2. Art:

$$\begin{aligned} \overset{S}{1R} \ddot{\bar{r}} + \overset{S}{2R} \ddot{\bar{d}} \quad \bar{b} - \bar{y}_1 = & \left[\overset{1}{1} M^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \overset{1}{2} M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \overset{0}{1} Q^{\beta} \bar{d} \right]_{;\beta} \\ & - \left[\left(\overset{0}{0} Q^{\beta} + \overset{0}{L} \right) \bar{r}_{1\beta} + \overset{0}{1} Q^{\beta} \bar{d}_{1,\rho} + \overset{0}{0} Q \bar{d} \right] \end{aligned} \quad (\text{A6.7})$$

Es gilt die Ausdrücke in der $[\dots]$ -Klammer umzuformen. Mit

$$\bar{d}_{1\alpha} = \eta_{\alpha}^s \bar{r}_{1s} + \mu_{\alpha} \bar{d} \quad (\text{A6.8})$$

wird zunächst

$$\begin{aligned} \left[\overset{0}{0} M^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + \overset{1}{1} M^{\alpha\beta} \bar{d}_{1\alpha} + \overset{0}{0} Q \bar{d} \right] = & \left(\overset{0}{0} M^{\alpha\beta} + \overset{1}{1} M^{s\beta} \eta_s^{\alpha} \right) \bar{r}_{1\alpha} \\ & + \left(\overset{1}{1} M^{\alpha\beta} \mu_{\alpha} + \overset{0}{0} Q^{\beta} \right) \bar{d}, \end{aligned} \quad (\text{A6.9})$$

Die Aufspaltung von $\overset{0}{0} M^{\alpha\beta}$ in den symmetrischen und schiefssymmetrischen Anteil liefert

$$\left(\overset{0}{0} M^{\alpha\beta} + \overset{1}{1} M^{s\beta} \eta_s^{\alpha} \right) = \overset{0}{0} M^{(\alpha\beta)} + \overset{0}{0} M^{<\alpha\beta>} + \overset{1}{1} M^{s\beta} \eta_s^{\alpha}, \quad (\text{A6.10})^I$$

Mit der Orthogonalitätsbedingung wird aber entsprechend der Umformung auf S. 37

$$\begin{aligned}
 M_0^{<\alpha\beta>} = & -\frac{1}{2} \left\{ (M_1^{\gamma\beta} - M_1^{\beta\gamma}) \eta_\gamma^\alpha \right. \\
 & - (M_1^{\gamma\alpha} - M_1^{\alpha\gamma}) \eta_\gamma^\beta \\
 & \left. - M_2^{\gamma\beta} (\eta_\gamma^\beta \eta_\gamma^\alpha - \eta_\gamma^\alpha \eta_\gamma^\beta) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{A6.11}$$

Unter Beachtung der Definition von $N^{\alpha\beta}$ (Gl. (9.64)) wird

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta} = & M_1^{<\gamma\beta>} \eta_\gamma^\alpha + M_1^{<\gamma\alpha>} \eta_\gamma^\beta \\
 & - M_2^{(\beta\gamma)} \eta_\gamma^\alpha \eta_\gamma^\beta \\
 N^{<\alpha\beta>} = & M_1^{<\gamma\beta>} \eta_\gamma^\alpha - M_1^{<\gamma\alpha>} \eta_\gamma^\beta \\
 & + M_2^{<\gamma\beta>} \eta_\gamma^\alpha \eta_\gamma^\beta.
 \end{aligned}
 \tag{A6.12}$$

Daher ist aber

$$N^{<\alpha\beta>} = - M_0^{<\alpha\beta>}.
 \tag{A6.13}$$

Mit

$$N^{<\alpha\beta>} = N^{\alpha\beta} - N^{(\alpha\beta)}$$

wird jetzt aus (A6.10)^I

$$\begin{aligned} (M_0^{\alpha\beta} + M_1^{s\beta} \eta_s^\alpha) &= M_0^{(\alpha\beta)} - N^{<\alpha\beta>} + M_1^{s\beta} \eta_s^\alpha \\ &= M_0^{(\alpha\beta)} + N^{(\alpha\beta)} - N^{\alpha\beta} + M_1^{s\beta} \eta_s^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A6.10})^{\text{II}}$$

Weiter wird mit (9.64)

$$N^{\alpha\beta} - M_1^{s\beta} \eta_s^\alpha = - (M_1^{\beta\gamma} + M_2^{s\gamma} \eta_s^\beta) \eta_\gamma^\alpha.$$

Damit wird schließlich mit den Definitionen (A6.4)

$$\begin{aligned} M_0^{\alpha\beta} + M_1^{s\beta} \eta_s^\alpha &= M_0^{(\alpha\beta)} + N^{(\alpha\beta)} + (M_1^{\beta\gamma} + M_2^{s\gamma} \eta_s^\beta) \eta_\gamma^\alpha \\ &= 2 M_0^{\alpha\beta} + M_1^{\beta\gamma} \eta_\gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A6.10})^{\text{III}}$$

Weiter erhält man durch "Addition von Null"

$$\begin{aligned} Q^\beta + M_1^{\alpha\beta} \mu_\alpha &= Q^\beta + (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\alpha - M_2^{s\gamma} \eta_s^\beta \mu_\gamma \\ &\quad + M_1^{\beta\alpha} \mu_\alpha + M_2^{s\gamma} \eta_s^\beta \mu_\gamma \end{aligned} \quad (\text{A6.14})^{\text{I}}$$

und wegen (A6.4) wird daraus

$$Q_0^\beta + M_1^{\alpha\beta} \mu_\alpha = Q_0^\beta + M_1^{\beta\alpha} \mu_\alpha, \quad (\text{A6.14})^{\text{II}}$$

Die Bewegungsgleichung 1. Art erhält also die Form

$$\begin{aligned} S_{0R} \ddot{\bar{r}} + S_{1R} \ddot{\bar{d}} - S_{00} \bar{b} - \bar{y}_0 = & \left[(2M_0^{\alpha\beta} + M_1^{\beta\gamma} \eta_\gamma^\alpha) \bar{r}_{,\alpha} \right. \\ & \left. + (Q_0^\beta + M_1^{\beta\alpha} \mu_\alpha) \bar{d} \right]_{;\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A6.6})^{\text{II}}$$

Der erste Klammerausdruck $[\dots]$ in der Bewegungsgleichung 2. Art (A6.7) läßt sich mit der Zerlegung (A6.8) und unter Beachtung von (A6.4) auf die Form

$$\begin{aligned} [M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_1^\beta \bar{d}] &= (M_1^{\alpha\beta} + M_2^{\alpha\gamma} \eta_\gamma^\beta) \bar{r}_{,\alpha} \\ &+ (Q_1^\beta + M_2^{\beta\alpha} \mu_\alpha) \bar{d} \quad (\text{A6.15}) \\ &= M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{,\alpha} + Q_1^\beta \bar{d} \end{aligned}$$

bringen. Der zweite Klammerausdruck wird mit (A6.8) und der Definitionsgleichung für L^β ((8.83) Teil 1)

$$\begin{aligned}
 & (Q_0^\beta + L^\beta) \bar{r}_{1\beta} + Q_1^\beta \bar{d}_{1\beta} + Q \bar{d} \\
 &= [Q_0^\beta - (M_1^{\beta\alpha} - M_1^{\alpha\beta}) \mu_\alpha \\
 &\quad + \frac{1}{2} (M_2^{s\beta} - M_2^{s\beta}) (\eta_s^\beta \mu_s - \eta_s^\beta \mu_s) + Q_1^\alpha \eta_\alpha^\beta] \bar{r}_{1\beta} \\
 &\quad + [Q_1^\alpha \mu_\alpha + Q] \bar{d} \\
 &= [Q_0^\beta + (M_1^{\alpha\beta} - M_1^{\beta\alpha}) \mu_\alpha \\
 &\quad + M_2^{s\beta} (\eta_s^\beta \mu_s - \eta_s^\beta \mu_s) + Q_1^\alpha \eta_\alpha^\beta] \bar{r}_{1\beta} \tag{A6.16} \\
 &\quad + [Q_1^\alpha \mu_\alpha + Q] \bar{d} \\
 &= [Q_0^\beta + Q_1^\alpha \eta_\alpha^\beta] \bar{r}_{1\beta} \\
 &\quad + [(Q - M_2^{s\alpha} \mu_s \mu_\alpha) + (Q_1^\alpha + M_2^{s\alpha} \mu_s) \mu_\alpha] \bar{d} \\
 &= [Q_0^\beta + Q_1^\alpha \eta_\alpha^\beta] \bar{r}_{1\beta} + [2Q + Q_1^\alpha \mu_\alpha] \bar{d}.
 \end{aligned}$$

Mit (A6.15) und (A6.16) kann die Bewegungsgleichung 2. Art (A6.7) also ebenfalls mit den konjugierten Beanspruchungsgrößen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{S}_{1R} \ddot{\bar{r}} + \mathcal{S}_{2R} \ddot{\bar{d}} - \mathcal{S}_{1R} \bar{b} - \bar{f}_1 \\
 &= [M_1^{\alpha\beta} \bar{r}_{1\alpha} + Q_1^\beta \bar{d}]_{;\beta} \\
 &\quad - [(Q_1^\alpha + Q_1^s \eta_s^\alpha) \bar{r}_{1\alpha} + (2Q + Q_1^\alpha \mu_\alpha) \bar{d}]. \tag{A6.17}
 \end{aligned}$$

Anhang (7): Konstitutive Restriktionen der integralen Clausius-Duhem Entropieungleichung

In Kap. 9.3.2 war im Zusammenhang mit der Symmetrie der Momente die Vermutung ausgesprochen worden, daß auch eine integrale Entropieungleichung, die nicht auf eine lokale Form zurückführbar ist, zu denselben konstitutiven Restriktionen für die Spannungen in einem thermoelastischen Körper führt, wie die lokale Entropieungleichung. Diese Vermutung ist aber im Zusammenhang mit einer ad hoc-Voraussetzung der Schalentheorie zu sehen, nämlich der a priori-Unabhängigkeit der Massieschen Funktion von den Temperaturgradienten.

Zur Motivation, daß möglicherweise die lokale Formulierung der Entropieungleichung ihren physikalischen Sinn verliert und nur noch integral z.B. für den Gesamtkörper oder endlich große Teilbereiche angebar ist, sei noch folgendes angemerkt. Woods [94] hat mit Argumenten, die aus der Statistischen Thermodynamik herrühren, darauf hingewiesen, daß die lokale Entropieproduktionsrate

$$\sigma = \rho_R \dot{\eta} + \bar{\nabla}_R \cdot (\bar{q}_R \lambda) - \rho_R r \quad (\text{A7.1})$$

durch den 2. Hauptsatz in der Form

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{V_R} \sigma(x^A, t) dV_R \right\} dt \geq 0 \quad (\text{A7.2})$$

begrenzt ist. Eine räumliche und zeitliche Lokalisierung durch Annahme der Gültigkeit von (A7.2) für beliebige Volumen V_R und Zeitintervalle $t_2 - t_1$, wie klein sie auch sein mögen, führt natürlich auf die lokale Entropieungleichung

$$\sigma \geq 0. \quad (\text{A7.3})$$

Die integrale Ungleichung (A7.2) ist nun aber statistischer Natur. Bei hinreichend großen Volumen V_R und langem Zeitintervall $t_2 - t_1$ würden lokale Fluktuationen unterdrückt, so daß eine Verletzung von

(A7.3) sehr unwahrscheinlich würde. Daher können Aussagen, die auf der lokalen Ungleichung (A7.3) beruhen, falsch sein, wenn sie als allgemein gültige Aussagen angesehen werden; sie stellen also nur erste Approximationen dar. Genauere Aussagen müßten dann aber charakteristische Längenskalen und Zeitkonstanten enthalten, die die endlich großen Volumenbereiche und Zeitintervalle definieren.

Im folgenden soll nur die räumliche Lokalisierung der Entropieungleichung in Übereinstimmung mit dem Vorgehen bei den Schalentheorien aufgehoben werden. Die integralen Bilanzgleichungen der Energie, des Impulses, des Drehimpulses und der Masse sollen aber nach wie vor dem uneingeschränkten Lokalisierungspostulat unterliegen; sie seien also in lokale Gleichungen überführbar. Es sei angenommen, daß die Entropieungleichung

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_R} \rho \eta \, dV_R \geq \int_{V_R} \rho r \, dV_R - \oint_{Q_R} \bar{q}_R \cdot \bar{N} \, dQ_R \quad (\text{A7.4})$$

physikalischen Sinn nur noch für endlich große, aber sonst beliebige Teilbereiche des Körpers habe; das Volumen dieses Teilbereiches sei durch V_R und seine Oberfläche durch Q_R gegeben. Eigenschaftsänderung im Innern dieser Teilbereiche seien "glatt", d.h. stetig und (hinreichend oft) stetig differenzierbar. Die minimale Größe dieses Teilbereiches ("Grenzteilbereich"), die nicht unterschritten werden darf, sei beispielsweise durch die Masse oder durch die kleinste Längenabmessung (z.B. Durchmesser eines kugelförmigen Bereichs oder Kantenlänge eines Rechkants) festgelegt. Die integrale Entropieungleichung sei also für den Grenzteilbereich und alle größeren Teilbereiche von der Form (A7.4). Insbesondere soll angenommen werden, daß i.a. die Grenzteilbereiche sehr viel kleiner seien als die üblicherweise betrachteten Gesamtkörper, für die dann die integrale Entropieungleichung auch die Form (A7.4) hat.

Unter Beachtung der lokalen reduzierten Energiebilanzgleichung und mit der Massieschen Funktion

$$\phi = \eta - \lambda \varepsilon \quad , \quad \lambda = \frac{1}{T} \quad (\text{A7.5})$$

erhält man aus (A7.4) durch Elimination der Wärmequellenverteilung η [91_7

$$\int_{V_R} \left\{ s_R (\dot{\phi} + \dot{\lambda} \varepsilon) + \lambda \operatorname{tr} [\bar{T} \dot{E}] + \bar{q}_R \cdot \bar{N} \dot{\lambda} \right\} dV_R \geq 0. \quad (\text{A7.6})$$

Die Stofffunktionen ε , ϕ oder η und \bar{T} seien allein abhängig von den Lagrangeschen Verzerrungen E_{KL} ; der Temperaturinversen λ und dem materiellen Teilchen, charakterisiert durch die Lagrangeschen Koordinaten X^K . Diese Annahmen sind in Übereinstimmung mit den entsprechenden Voraussetzungen bei der Schalentheorie (9.16). Es gilt also

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \bar{\phi}^v(E_{KL}, \lambda, X^P) \\ \varepsilon &= \bar{\varepsilon}^v(\text{''}) \\ \bar{T}^{KL} &= \bar{T}^{KLv}(\text{''}) \end{aligned} \right\} (\text{A7.7})$$

Für den Wärmefluß $\bar{q}_R = q_R^k \bar{G}_k$ sei eine Stofffunktion der Form

$$q_R^k = \bar{q}_R^{kv}(E_{KL}, \lambda, \lambda_{,M}, X^P) \quad (\text{A7.8})$$

angenommen, wobei hier natürlich der Temperaturgradient eingeht. Man beachte, daß die Stoffgleichungen (A7.7, A7.8) aufgrund der angegebenen Struktur beobachterinvariant sind. Unter Beachtung der Symmetrie $E_{KL} = E_{LK}$ wird

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial E_{LK}} \right) \dot{E}_{KL} + \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \quad (\text{A7.9})$$

und (A7.6) erhält die Form

$$\int_{V_R} \left\{ \left[s_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial E_{LK}} \right) + \lambda \bar{T}^{KL} \right] \dot{E}_{KL} + s_R \left[\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \varepsilon \right] \dot{\lambda} - \bar{q}_R \cdot \bar{v}_R \dot{\lambda} \right\} dV_R \geq 0. \quad (\text{A7.10})$$

Es werde jetzt irgendein Teilbereich des Körpers betrachtet, der größer oder gleich dem Grenzteilbereich ist. Nach dem Coleman-Noll'schen Dissipationspostulat (Teil 1) wird verlangt, daß die integrale Entropieungleichung (A7.10) für alle zulässigen thermodynamischen Prozesse (d.h. für alle Verschiebungsfelder und Temperaturverteilungen, die mit den Bilanzgleichungen - Energie, Impuls, Drehimpuls und Masse - verträglich sind) identisch er-

füllt sein muß. Diese beliebigen Prozesse können durch geeignete Wahl der Volumenkräfte und Wärmequellen im Innern des Teilbereichs sowie durch Manipulation der Randbedingungen des Teilbereichs erzielt werden. Die integrale Ungleichung ist also nicht nur für eine spezielle aktuelle Problemsituation zu erfüllen, für alle theoretisch denkbaren.

Im Gegensatz zur Auswertung der lokalen Entropieungleichung muß jetzt besonders beobachtet werden, welche Größen als unabhängig einstellbar angesehen werden dürfen. So sind die Verteilung der Momentanposition $\bar{\rho}(X^p, t)$ der Teilchen und die ihrer Geschwindigkeit $\bar{v} = \dot{\bar{\rho}}(X^p, t)$ und ebenso die Verteilung der Temperaturinversen $\Lambda(X^p, t)$ und die ihrer Rate $\dot{\Lambda}(X^p, t)$ momentan unabhängig voneinander einstellbar. Dann sind aber die Verteilungen der entsprechenden Ableitungen nach den Lagrangeschen Koordinaten X^p nicht mehr unabhängig manipulierbar; so sind die Funktionen $\dot{\bar{\rho}}$ und $\dot{\bar{\rho}}_{,k} = \partial \dot{\bar{\rho}} / \partial X^k$ bzw. $\dot{\Lambda}$ und $\dot{\Lambda}_{,k} = \partial \dot{\Lambda} / \partial X^k$ nicht unabhängig. Andererseits ist es durch geeignete Prozessführung noch möglich, die Verteilung von $\bar{\rho}$ und $\bar{v} = \dot{\bar{\rho}}$ und ebenso Λ und $\dot{\Lambda}$ beliebig^x und unabhängig voneinander einzustellen^{xx}. Nun treten in der integralen Entropieungleichung (A7.10) die hier als abhängig beschriebenen Verteilungen nicht paarweise auf; so sind in (A7.10) nicht $\dot{\bar{\rho}}$ sondern nur $\dot{\bar{\rho}}_{,k}$ und $\bar{\rho}_{,k}$ und nicht $\dot{\Lambda}_{,k}$ sondern nur $\dot{\Lambda}$ (und Λ sowie $\Lambda_{,k}$) enthalten. Man könnte jetzt voreilig annehmen, daß die drei Vektorfunktionen $\dot{\bar{\rho}}_{,k}$ bzw. die sechs skalaren Funktionen \dot{E}_{KL} unabhängig voneinander einstellbar seien. Diese Annahme würde aber die Tatsache verletzen, daß man die Größen $\dot{\bar{\rho}}_{,k}$ dem Geschwindigkeitsfeld $\bar{v} = \dot{\bar{\rho}}$ zuordnen können muß; andernfalls wäre den Kompatibilitätsbedingungen nicht genügt. Die integrale Entropieungleichung muß daher auf eine Form gebracht werden, in der $\bar{v} = \dot{\bar{\rho}}$ und nicht die Gradienten $\dot{\bar{\rho}}_{,k}$ explizit enthalten sind. Dies erfordert die partielle Integration des ersten Terms in (A7.10). Dies und die weitere, nichttriviale Auswertung ist [91] zu entnehmen. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei hier nur angemerkt, daß die Auswertung im Rahmen einer materiellen, auf die Ausgangskonfiguration bezogene Darstellung (wie sie (A7.10) darstellt), auf erhebliche mathematische Schwierigkeiten stößt; erst die Verwendung eines mitgeschleppten Koordinatensystems und Darstellung in der Momentankonfiguration hat zu leicht interpretierbaren Ergebnissen geführt. Man erhält die folgenden konstitutiven Restriktionen

^x Hier sei angenommen, daß \bar{v} und $\dot{\Lambda}$ zweimal stetig differenzierbar in den Lagrangeschen Koordinaten X^p seien und einmal stetig differenzierbar in der Zeit.

^{xx} Dies wäre nicht mehr möglich, wenn die Lokalisierung im Zeitbereich aufgehoben worden wäre.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{T} \kappa_L &= -s_R \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \phi}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \phi}{\partial E_{LK}} \right) \\
 \varepsilon &= - \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} \\
 \int_{V_R} \bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R \Lambda \, dV_R &\geq 0.
 \end{aligned} \right\} (A7.11)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von den Restriktionen, die aus der lokalen Clausius-Duhem Entropieungleichung folgen [Teil 1, S. 84], nur in der dritten Bedingung, die dort die Form

$$\bar{q}_R \cdot \bar{\nabla}_R \Lambda \geq 0. \tag{A7.12}$$

annimmt. Der Vergleich zeigt, daß der nichtlokale Charakter der Entropieungleichung nur Konsequenzen für die Wärmeleitungsaspekte hat, das heißt für das Skalarprodukt des Wärmeflusses mit dem Gradienten der Temperaturinversen. Insbesondere wird die Vermutung bestätigt, daß die thermoelastischen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen unabhängig davon sind, ob die Entropieungleichung lokaler oder integraler Natur ist. Diese Aussage gilt zunächst nur unter der ad hoc-Voraussetzung, daß die innere Energie, Entropie bzw. Massieu'sche Funktion und die Spannungen allein von den Verzerrungen, der Temperaturinversen und dem materiellen Teilchen abhängen.

Es sei darauf hingewiesen, daß Green und Laws [95] von der nur für den Gesamtkörper gültigen Clausius-Duhem Entropieungleichung ausgegangen sind und den komplexeren Fall untersucht haben, daß alle Stofffunktionen auch noch vom Temperaturgradienten abhängen. Unter den entsprechenden Voraussetzungen läßt sich aus ihrem Ergebnis das in [91] abgeleitete Resultat (A7.11) gewinnen.

Hutter [83] hat die Annahme, daß die Entropieungleichung nur global (d.h. für den Gesamtkörper) gelte, kritisiert. Er bemerkt, daß diese Annahme die Additivität der Entropie aufhebe und dies sei im Widerspruch zu Ergebnissen der Statistischen Mechanik. Die Interpretation in den Arbeiten von

Green, Laws und Naghdi [95, 96] solle deshalb abgelehnt werden, wenigstens für Theorien, die nicht irgendeine die Nichtlokalität charakterisierende Größe enthalte. Bei der oben beschriebenen Argumentation - Gültigkeit der Clausius-Duhem Entropieungleichung nur für endlich große Teilbereiche eines Körpers - ist die Additivität der Entropie (und anderer Größen) solange gewährleistet, wie die Integrationsbereiche eine bestimmte Mindestgröße nicht unterschreiten.

Anhang (8): Verallgemeinerte Leistungsintegrale der äußeren Lasten auf den Laibungsflächen

Die Leistungsintegrale über die beiden Laibungsflächen σ_n^+ und σ_n^- in der Gl. (10.129) lassen sich mit der Randbedingung (10.130) in der Form

$$W_m := \int_{\sigma_n^+} (s^+)^m (\bar{t}_n^+ + \hat{t}_n^+) \cdot \dot{\bar{p}}^+ d\sigma_n^+ + \int_{\sigma_n^-} (-s^-)^m (\bar{t}_n^- + \hat{t}_n^-) \cdot \dot{\bar{p}}^- d\sigma_n^- \quad (\text{A8.1})$$

$m = 0, 1, 2$

darstellen, wobei

$$\bar{p}^+ = \bar{r} + s^+ \bar{d}$$

$$\bar{p}^- = \bar{r} - s^- \bar{d}$$

die momentanen Ortsvektoren der beiden Laibungsflächen sind und \bar{t}_n^\pm die aktuellen und \hat{t}_n^\pm die gedachten Laibungsbelastungen darstellen. Mit

$$d\sigma_n^\pm = \xi^\pm dA$$

wird dann

$$\begin{aligned} W_m &= \int_{\mathcal{A}} \left\{ (s^+)^m \xi^+ (\bar{t}_n^+ + \hat{t}_n^+) \cdot (\dot{\bar{r}} + s^+ \dot{\bar{d}}) \right\} dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}} \left\{ (-s^-)^m \xi^- (\bar{t}_n^- + \hat{t}_n^-) \cdot (\dot{\bar{r}} + (-s^-) \dot{\bar{d}}) \right\} dA \quad (\text{A8.2}) \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left\{ \left[(s^+)^m \xi^+ (\bar{t}_n^+ + \hat{t}_n^+) + (-s^-)^m \xi^- (\bar{t}_n^- + \hat{t}_n^-) \right] \cdot \dot{\bar{r}} \right. \\ &\quad \left. + \left[(s^+)^{m+1} \xi^+ (\bar{t}_n^+ + \hat{t}_n^+) + (-s^-)^{m+1} \xi^- (\bar{t}_n^- + \hat{t}_n^-) \right] \cdot \dot{\bar{d}} \right\} dA \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_m &:= (s^+)^m \xi^+ \bar{t}_R^+ + (-s^-)^m \xi^- \bar{t}_R^- \\ \hat{y}_m &:= (s^+)^m \xi^+ \hat{t}_R^+ + (-s^-)^m \xi^- \hat{t}_R^- \end{aligned} \right\} \quad (\text{A8.3})$$

dann wird ($m = 0, 1, 2$)

$$W_m^{\pm} = \int_A \left\{ [\bar{y}_m + \hat{y}_m] \cdot \vec{r} + [\bar{y}_{m+1} + \hat{y}_{m+1}] \cdot d\vec{r} \right\} dA \quad (\text{A8.4})$$

Werden die aktuellen Laibungsbelastungen durch hydrostatische Drücke q^+ und q^- erzeugt, dann wird mit (10.131) und (10.132)

$$\bar{t}_R^{\pm} = \bar{t}^{\pm} \frac{d\theta^{\pm}}{d\theta_R^{\pm}} = -q^{\pm} \bar{n}^{\pm} \frac{d\theta^{\pm}}{d\theta_R^{\pm}} \quad (\text{A8.5})$$

Mit den Ergebnissen von Anhang (3), Teil 1, hat man

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}^{\pm} &= (\pm) \frac{\bar{p}_{,1}^{\pm} \times \bar{p}_{,2}^{\pm}}{|\bar{p}_{,1}^{\pm} \times \bar{p}_{,2}^{\pm}|} \\ \frac{d\theta^{\pm}}{d\theta_R^{\pm}} &= \frac{|\bar{p}_{,1}^{\pm} \times \bar{p}_{,2}^{\pm}|}{\xi^{\pm} \sqrt{A}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A8.6})$$

Damit wird aus (A8.3)

$$\bar{y}_m = - \frac{1}{\sqrt{A}} \left[(s^+)^m \bar{q}^+ (\bar{p}_{11}^+ \times \bar{p}_{12}^+) - (-s^-)^m \bar{q}^- (\bar{p}_{11}^- \times \bar{p}_{12}^-) \right]. \quad (\text{A8.7})$$

Mit (A3.6), Teil 1, ist

$$\begin{aligned} \bar{p}_{11}^\pm \times \bar{p}_{12}^\pm &= (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) \\ &+ (\bar{r}_{11} \times \bar{d}_{12} + \bar{d}_{11} \times \bar{r}_{12}) (\pm s^\pm) \\ &+ (\bar{d}_{11} \times \bar{d}_{12}) (\pm s^\pm)^2 \\ &+ (\bar{r}_{11} \times \bar{d}) (\pm s^\pm)_{,2} \\ &+ (\bar{d} \times \bar{r}_{12}) (\pm s^\pm)_{,1} \\ &+ (\bar{d} \times \bar{d}_{12}) (\pm s^\pm) (\pm s^\pm)_{,1} \\ &+ (\bar{d}_{11} \times \bar{d}) (\pm s^\pm) (\pm s^\pm)_{,2}. \end{aligned} \quad (\text{A8.8})$$

Der erste Term des Lastvektors \bar{y}_m stellt sich dann wie folgt dar

$$\bar{y}_m = - \frac{1}{\sqrt{A}} \left[((s^+)^m \bar{q}^+ - (-s^-)^m \bar{q}^-) (\bar{r}_{11} \times \bar{r}_{12}) + \dots \right]. \quad (\text{A8.9})$$

Anhang (9): Bilanz- und Stoffgleichungen sowie Randbedingungen für quasi-isotherme Bedingungen in komponentenweiser Darstellung in der Ausgangskonfiguration und Vergleich mit anderen Theorien

Um einen direkten Vergleich mit nichtlinearen Schalentheorien zu haben, die mit derselben kinematischen Voraussetzung, aber ohne thermodynamische Einbettung auf anderen Wegen entwickelt wurden, seien hier, vom 1. schalentheoretischen Konzept im quasi-isothermen Fall ausgehend, die entsprechenden Gleichungen angegeben.

Die Verschiebung \bar{v} der Referenzfläche der Schale ist definiert als

$$\bar{v} = \bar{r} - \bar{R} \tag{A9.1}$$

und der Differenzdirektor \bar{f} ist gegeben durch

$$\bar{f} = \bar{d} - \bar{A}_3, \tag{A9.2}$$

In Bezug auf die Basis der undeformierten Referenzfläche gelte die folgende Komponentenerlegung

$$\begin{aligned} \bar{v} &= V^s \bar{A}_s + W \bar{A}_3 \\ \bar{f} &= F^s \bar{A}_s + F \bar{A}_3. \end{aligned} \tag{A9.3}$$

Dann wird mit (6.14) und (6.30), Teil 1

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{r}} &= \ddot{\bar{v}} + \ddot{\bar{R}} = \ddot{\bar{v}} = \ddot{V}^s \bar{A}_s + \ddot{W} \bar{A}_3 \\ \ddot{\bar{d}} &= \ddot{\bar{f}} + \ddot{\bar{A}}_3 = \ddot{\bar{f}} = \ddot{F}^s \bar{A}_s + \ddot{F} \bar{A}_3 \\ \bar{r}_{, \alpha} &= \bar{v}_{, \alpha} + \bar{R}_{, \alpha} = \bar{v}_{, \alpha} + \bar{A}_\alpha \\ &= (\mathcal{L}_\alpha^s + V_{, \alpha}^s - W B_\alpha^s) \bar{A}_s + (W_{, \alpha} + V^s B_{s\alpha}) \bar{A}_3 \end{aligned} \tag{A9.4}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_{1\alpha} &= \bar{f}_{1\alpha} + \bar{A}_{3,\alpha} \\ &= (F^s_{;\alpha} - (1+F)B^s_\alpha) \bar{A}_s + (F_{,s} + B_{s\alpha} F^s) \bar{A}_3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\bar{d}_{1\alpha}} \right\} \text{(A9.4)}$$

Die Bewegungsgleichungen 1. und 2. Art des 1. schalentheoretischen Konzepts sind durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{0R} \ddot{\bar{\gamma}} + \mathcal{G}_{1R} \ddot{\bar{d}} &= [M^{AB} \bar{\gamma}_{1\alpha} + M^{AB} \bar{d}_{1\alpha} + Q^B \bar{d}]_{;\beta} \\ &\quad + \mathcal{G}_{0R} \bar{b}_0 + \bar{\gamma}_0, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\mathcal{G}_{0R} \ddot{\bar{\gamma}} + \mathcal{G}_{1R} \ddot{\bar{d}}} \right\} \text{(A9.5)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1R} \ddot{\bar{\gamma}} + \mathcal{G}_{2R} \ddot{\bar{d}} &= [M^{AB} \bar{\gamma}_{1\alpha} + M^{AB} \bar{d}_{1\alpha} + Q^B \bar{d}]_{;\beta} \\ &\quad - (Q^B + L^B) \bar{\gamma}_{1\beta} - Q^B \bar{d}_{1\beta} - Q \bar{d} \\ &\quad + \mathcal{G}_{1R} \bar{b}_1 + \bar{\gamma}_1 \end{aligned}$$

gegeben. Mit (A9.4) wird

$$\mathcal{G}_{0R} \ddot{\bar{\gamma}} + \mathcal{G}_{1R} \ddot{\bar{d}} = (\mathcal{G}_{0R} \ddot{V}^s + \mathcal{G}_{1R} \ddot{F}^s) \bar{A}_s + (\mathcal{G}_{0R} \ddot{W} + \mathcal{G}_{1R} \ddot{F}) \bar{A}_3 \quad \left. \vphantom{\mathcal{G}_{0R} \ddot{\bar{\gamma}} + \mathcal{G}_{1R} \ddot{\bar{d}}} \right\} \text{(A9.6)}$$

$$\mathcal{G}_{1R} \ddot{\bar{\gamma}} + \mathcal{G}_{2R} \ddot{\bar{d}} = (\mathcal{G}_{1R} \ddot{V}^s + \mathcal{G}_{2R} \ddot{F}^s) \bar{A}_s + (\mathcal{G}_{1R} \ddot{W} + \mathcal{G}_{2R} \ddot{F}) \bar{A}_3$$

Die aktuellen äußeren Lasten haben die folgende Komponentendarstellung

$$\left. \begin{aligned} s_{0R} \bar{b}_0 + \bar{y}_0 &= (s_{0R} b_0^s + y_0^s) \bar{A}_s + (s_{0R} b_0 + y_0) \bar{A}_3 \\ s_{1R} \bar{b}_1 + \bar{y}_1 &= (s_{1R} b_1^s + y_1^s) \bar{A}_s + (s_{1R} b_1 + y_1) \bar{A}_3 \end{aligned} \right\} \quad (A9.7)$$

Mit der Definition

$$[\dots]_{:\beta} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \sqrt{A} [\dots]_{,\beta} + (\sqrt{A})_{,\beta} [\dots] \right\}$$

und wegen [75]

$$\frac{1}{\sqrt{A}} (\sqrt{A})_{,\beta} = \Gamma_{\lambda\beta}^{\lambda}$$

wobei $\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}$ das Christoffelsymbol auf der Referenzfläche ist, gilt

$$\left. \begin{aligned} & [M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{,\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{,\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d}]_{:\beta} \\ &= [M_0^{\alpha\beta} (p_{\alpha}^s + V_{i\alpha}^s - N B_{\alpha}^s) \bar{A}_s + M_0^{\alpha\beta} (N_{,\alpha} + V^s B_{s\alpha}) \bar{A}_3 \\ &\quad + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_{\alpha}^s) \bar{A}_s + M_1^{\alpha\beta} (F_{,\alpha} + F^s B_{s\alpha}) \bar{A}_3 \\ &\quad + Q_0^{\beta} F^s \bar{A}_s + Q_0^{\beta} (1+F) \bar{A}_3]_{:\beta} \\ &= \left\{ [M_0^{\alpha\beta} (p_{\alpha}^s + V_{i\alpha}^s - N B_{\alpha}^s) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_{\alpha}^s) \right. \\ &\quad \left. + Q_0^{\beta} F^s]_{:\beta} \right. \\ &\quad \left. - B_{\beta}^s [M_0^{\alpha\beta} (N_{,\alpha} + V^s B_{s\alpha}) + M_1^{\alpha\beta} (F_{,\alpha} + F^s B_{s\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + Q_0^{\beta} (1+F)] \right\} \bar{A}_s + \dots \end{aligned} \right\} \quad (A9.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \left\{ \left[M_0^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^s B_{s\alpha}) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^s B_{s\alpha}) \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + Q_0^\beta (1+F) \right]_{;\beta} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad + B_\beta^s \left[M_0^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^s + V_{i\alpha}^s - W B_\alpha^s) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_\alpha^s) + Q_0^\beta F^s \right] \left. \right\} \bar{A}_3,
 \end{aligned} \tag{A9.8}$$

ganz entsprechend stellt sich der Ausdruck

$$\left[M_1^{\alpha\beta} \bar{\pi}_{i\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{i\alpha} + Q_1^\beta \bar{d} \right]_{;\beta}$$

in der Bewegungsgleichung 2. Art dar. Für die restlichen Terme in der Bewegungsgleichung 2. Art gilt schließlich

$$\begin{aligned}
 & (Q_0^A + L^B) \bar{\pi}_{iA} + Q_1^B \bar{d}_{iB} + Q \bar{d} \\
 & = \left\{ (Q_0^B + L^B) (\rho_B^s + V_{iB}^s - W B_B^s) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + Q_1^B (F_{iB}^s - (1+F) B_B^s) + Q F^s \right\} \bar{A}_2 \\
 & + \left\{ (Q_0^B + L^A) (W_{iA} + V^s B_{sA}) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + Q_1^B (F_{iA} + F^s B_{sA}) + Q (1+F) \right\} \bar{A}_3,
 \end{aligned} \tag{A9.9}$$

wobei

$$L^{\beta} := - \left(M_1^{\beta\delta} - M_1^{\delta\beta} \right) \mu_{\delta} + \frac{1}{2} \left(M_2^{\delta\beta} - M_2^{\beta\delta} \right) \left(\eta_{\delta}^{\beta} \mu_{\delta} - \eta_{\delta}^{\beta} \mu_{\delta} \right). \quad (\text{A9.10})$$

Mit diesen Komponentenzersetzungen werden die Bewegungsgleichungen 1. Art

\bar{A}_2 -Richtung:

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{S}_{OR} \ddot{V}^s + \mathcal{S}_{OR} \ddot{F}^s \\ & = \left[M_0^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^s + V_{i\alpha}^s - W B_{\alpha}^s) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_{\alpha}^s) + Q_0^{\beta} F^s \right]_{i\beta} \\ & \quad - B_{\beta}^s \left[M_0^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^s B_{s\alpha}) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^s B_{s\alpha}) + Q_0^{\beta} (1+F) \right] \\ & \quad + \mathcal{S}_{OR} b_0^s + \bar{y}_0^s \end{aligned} \right\} (\text{A9.11})$$

\bar{A}_3 -Richtung:

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{S}_{OR} \ddot{W} + \mathcal{S}_{OR} \ddot{F} \\ & = \left[M_0^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^s B_{s\alpha}) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^s B_{s\alpha}) + Q_0^{\beta} (1+F) \right]_{i\beta} \\ & \quad + B_{s\beta} \left[M_0^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^s + V_{i\alpha}^s - W B_{\alpha}^s) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_{\alpha}^s) + Q_0^{\beta} F^s \right] \\ & \quad + \mathcal{S}_{OR} b_0 + \bar{y}_0 \end{aligned} \right\} (\text{A9.12})$$

Bewegungsgleichungen 2. Art

\bar{A}_2 -Richtung:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{iR} \ddot{V}^S + \sum_{iR} \ddot{F}^S \\
 &= \left[M^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^{\beta} + V_{i\alpha}^S - W B_{\alpha}^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^S - (1+F) B_{\alpha}^S) + Q^{\beta} F^{\alpha} \right]_{i\beta} \\
 & - B_{\beta}^S \left[M^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V_{S\alpha}^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^S B_{S\alpha}) + Q^{\beta} (1+F) \right] \\
 & - \left[(Q^{\beta} + L^{\beta}) (\delta_{\beta}^S + V_{i\beta}^S - W B_{\beta}^S) + Q^{\beta} (F_{i\beta}^S - (1+F) B_{\beta}^S) \right. \\
 & \quad \left. + Q F^S \right] \\
 & + \sum_{iR} b_i^S + \gamma_1^S
 \end{aligned} \tag{A9.13}$$

\bar{A}_3 -Richtung:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{iR} \ddot{W} + \sum_{iR} \ddot{F} \\
 &= \left[M^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V_{S\alpha}^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^S B_{S\alpha}) + Q^{\beta} (1+F) \right]_{i\beta} \\
 & + B_{S\beta} \left[M^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^S + V_{i\alpha}^S - W B_{\alpha}^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^S - (1+F) B_{\alpha}^S) \right. \\
 & \quad \left. + Q^{\beta} F^S \right] \\
 & - \left[(Q^{\beta} + L^{\beta}) (W_{i\beta} + V_{S\beta}^S) + Q^{\beta} (F_{i\beta} + F^S B_{S\beta}) + Q (1+F) \right] \\
 & + \sum_{iR} b_i + \gamma_1.
 \end{aligned} \tag{A9.14}$$

Auf den rechten Seiten dieser Komponentendarstellungen lassen sich einige Terme noch zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 & [Q_0^B F^S]_{;\beta} - B_\beta^S [Q_0^B (1+F)] \\
 &= Q_0^B{}_{;\beta} F^S + Q_0^B (F^S{}_{;\beta} - (1+F) B_\beta^S) \\
 & [Q_0^B (1+F)]_{;\beta} + B_{S\beta} [Q_0^B F^S] \\
 &= Q_0^B{}_{;\beta} (1+F) + Q_0^B (F_{;\beta} + F^S B_{S\beta}) \\
 & [Q_1^B F^S]_{;\beta} - B_\beta^S [Q_1^B (1+F)] - Q_1^B (F^S{}_{;\beta} - (1+F) B_\beta^S) \quad \text{(A9.15)} \\
 &= Q_1^B{}_{;\beta} F^S \\
 & [Q_1^B (1+F)]_{;\beta} + B_{S\beta} [Q_1^B F^S] - Q_1^B (F_{;\beta} + F^S B_{S\beta}) \\
 &= Q_1^B{}_{;\beta} (1+F).
 \end{aligned}$$

Damit stellen sich die Komponentengleichungen wie folgt dar:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_R \ddot{V}^S + \mathcal{D}_R \ddot{F}^S \\
 &= [M_0^{\alpha\beta} (\mathcal{D}_\alpha^S + V_{;\alpha}^S - W B_\alpha^S) + M_1^{\alpha\beta} (F_{;\alpha}^S - (1+F) B_\alpha^S)]_{;\beta} \\
 & - B_\beta^S [M_0^{\alpha\beta} (W_{;\alpha} + V^S B_{S\alpha}) + M_1^{\alpha\beta} (F_{;\alpha} + F^S B_{S\alpha})] \quad \text{(A9.16)} \\
 & + Q_0^B{}_{;\beta} F^S + Q_0^B (F^S{}_{;\beta} - (1+F) B_\beta^S) \\
 & + \mathcal{D}_R \mathcal{D}_0^S + \mathcal{D}_0^S
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{S}{1R} \ddot{V}^S + \frac{S}{2R} \ddot{F}^S \\
 &= \left[M^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^S + V_{i\alpha}^S - W B_\alpha^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^S - (1+F) B_\alpha^S) \right]_{:\beta} \\
 & - B_\beta^S \left[M^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^S B_{S\alpha}) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^S B_{S\alpha}) \right] \\
 & - \left[(Q^\beta + L^\beta) (\rho_\beta^S + V_{i\beta}^S - W B_\beta^S) - Q_{i\beta}^\beta F^S + Q F^S \right] \\
 & + \frac{S}{1R} b^S + \frac{S}{1} \gamma^S
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{S}{0R} \ddot{W} + \frac{S}{1R} \ddot{F} \\
 &= \left[M^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^S B_{S\alpha}) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^S B_{S\alpha}) \right]_{:\beta} \\
 & + B_{S\beta} \left[M^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^S + V_{i\alpha}^S - W B_\alpha^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^S - (1+F) B_\alpha^S) \right] \\
 & + Q_{i\beta}^\beta (1+F) + Q^\beta (F_{i\beta} + F^S B_{S\beta}) \\
 & + \frac{S}{0R} b + \frac{S}{1} \gamma_0
 \end{aligned}$$

(A9.16)

$$\begin{aligned}
 & \frac{S}{1R} \ddot{W} + \frac{S}{2R} \ddot{F} \\
 &= \left[M^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^S B_{S\alpha}) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^S B_{S\alpha}) \right]_{:\beta} \\
 & + B_{S\beta} \left[M^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^S + V_{i\alpha}^S - W B_\alpha^S) + M^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^S - (1+F) B_\alpha^S) \right] \\
 & - \left[(Q^\beta + L^\beta) (W_{i\beta} + V^S B_{S\beta}) - Q_{i\beta}^\beta (1+F) + Q (1+F) \right].
 \end{aligned}$$

Die dynamischen Randbedingungen sind

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_0^{\sim} - [M_0^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{i\alpha} + M_1^{\alpha\beta} \bar{d}_{i\alpha} + Q_0^{\beta} \bar{d}] v_{\beta} &= \bar{0} \\ \tilde{m}_1^{\sim} - [M_1^{\alpha\beta} \bar{\tau}_{i\alpha} + M_2^{\alpha\beta} \bar{d}_{i\alpha} + Q_1^{\beta} \bar{d}] v_{\beta} &= \bar{0}, \end{aligned} \right\} \text{(A9.17)}$$

Mit

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_0^{\sim} &= \tilde{m}_0^s \bar{A}_s + \tilde{m}_0^v \bar{A}_3 \\ \tilde{m}_1^{\sim} &= \tilde{m}_1^s \bar{A}_s + \tilde{m}_1^v \bar{A}_3 \end{aligned} \right\} \text{(A9.18)}$$

erhält man

\bar{A}_s -Richtung:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_0^s - [M_0^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^s + V_{i\alpha}^s - W B_{\alpha}^s) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_{\alpha}^s) + Q_0^{\beta} F^s] v_{\beta} &= 0 \\ \tilde{m}_1^s - [M_1^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^s + V_{i\alpha}^s - W B_{\alpha}^s) + M_2^{\alpha\beta} (F_{i\alpha}^s - (1+F) B_{\alpha}^s) + Q_1^{\beta} F^s] v_{\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(A9.19)}$$

\bar{A}_3 -Richtung:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_0^v - [M_0^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^s B_{s\alpha}) + M_1^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^s B_{s\alpha}) + Q_0^{\beta} (1+F)] v_{\beta} &= 0 \\ \tilde{m}_1^v - [M_1^{\alpha\beta} (W_{i\alpha} + V^s B_{s\alpha}) + M_2^{\alpha\beta} (F_{i\alpha} + F^s B_{s\alpha}) + Q_1^{\beta} (1+F)] v_{\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(A9.20)}$$

Schließlich seien noch die Beziehungen zwischen den Verschiebungskomponenten und kinematischen Variablen \mathcal{H}' angegeben. Mit (9.48) gilt

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\bar{r}_{, \alpha} \cdot \bar{r}_{, \beta} - A_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ V_{\alpha;\beta} + V_{\beta;\alpha} - 2WB_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad + (V_{;\alpha}^{\beta} - WB_{\alpha}^{\beta})(V_{;\beta} - WB_{\beta}) \\ &\quad \left. + (W_{, \alpha} + V^{\beta}B_{\beta\alpha})(W_{, \beta} + V^{\beta}B_{\beta\alpha}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha} - 2B_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\bar{r}_{, \alpha} \cdot \bar{d}_{\beta} + \bar{r}_{, \beta} \cdot \bar{d}_{, \alpha} - 2B_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ F_{\alpha;\beta} + F_{\beta;\alpha} - 2FB_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad - (V_{;\alpha}^{\beta} - WB_{\alpha}^{\beta})B_{\beta\beta} - (V_{;\beta}^{\alpha} - WB_{\beta}^{\alpha})B_{\beta\alpha} \\ &\quad + (V_{;\alpha}^{\beta} - WB_{\alpha}^{\beta})(F_{;\beta}^{\alpha} - FB_{\beta\alpha}) \\ &\quad \left. + (V_{;\beta}^{\alpha} - WB_{\beta}^{\alpha})(F_{;\alpha}^{\beta} - FB_{\alpha\beta}) \right\} \end{aligned} \quad (A9.21)$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(v_{\alpha\beta} - B_{\beta\alpha}B^{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{d}_{, \alpha} \cdot \bar{d}_{, \beta} - B_{\beta\alpha}B^{\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2FB_{\alpha}^{\beta}B_{\beta\alpha} - (F_{;\alpha}^{\beta}B_{\beta\alpha} + F_{;\beta}^{\alpha}B_{\beta\alpha}) \right. \\ &\quad - F(F_{;\alpha}^{\beta}B_{\beta\alpha} + F_{;\beta}^{\alpha}B_{\beta\alpha}) \\ &\quad \left. + (F_{, \alpha} + B_{\beta\alpha}F^{\beta})(F_{, \beta} + B_{\beta\alpha}F^{\beta}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{0\alpha 3} &= \frac{1}{2} d_\alpha = \frac{1}{2} \bar{\tau}_{1\alpha} \cdot \bar{d} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ F_\alpha + (W_{1\alpha} + V^3 B_{3\alpha}) \right. \\
 &\quad \left. + F_3 (V^3_{;\alpha} - W B_\alpha^3) + F(W_{1\alpha} + V^3 B_{3\alpha}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{1\alpha 3} &= \frac{1}{2} v_\alpha = \frac{1}{2} \bar{d}'_{1\alpha} \cdot \bar{d} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ F_{1\alpha} + F_{1\alpha} F + F_3 F^3_{;\alpha} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{033} &= \frac{1}{2} (v-1) = \frac{1}{2} (\bar{d} \cdot \bar{d} - 1) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 2F + (F)^2 + F^3 F_3 \right\}.
 \end{aligned}$$

(A9.22)

Setzt man jetzt die verschärfte Beobachterinvarianzbedingung für die mittlere Massieusche Funktion ϕ_0 voraus (vergl. Kap. 9.1.7), dann hängt ϕ_0 nicht von $\sigma_{\alpha\beta}$ ab, und es erübrigt sich, diese kinematische Variable hier anzugeben. Mit denselben Argumenten wie in Kap. 9.1.7 erhält man dann die in den Gleichungen (9.98), (9.97) und (9.81)₆ angegebenen zweidimensionalen Stoffgleichungen, die sich mit der mittleren freien Energie ψ_0

$$\psi_0 = - \phi_0 / \Lambda = \psi_0 (E_{0\alpha\beta}, E_{1\alpha\beta}, \dots, E_{033}, T)$$

und der mittleren absoluten Wandtemperatur

$$T_0 = 1/\Lambda$$

auch wie folgt darstellen lassen:

$$\begin{aligned}
 M_0^{\alpha\beta} &= \sum_{OR} \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) \\
 M_1^{\alpha\beta} &= \sum_{OR} \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{1\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{1\beta\alpha}} \right) \\
 M_2^{\alpha\beta} &= \sum_{OR} \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{2\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{2\beta\alpha}} \right) \\
 Q_0^\alpha &= \sum_{OR} \frac{1}{L} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\alpha 3}} \equiv M_0^{3\alpha} \\
 Q_1^\alpha &= \sum_{OR} \frac{1}{L} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{1\alpha 3}} \equiv M_1^{3\alpha} \\
 Q &= \sum_{OR} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{033}} \equiv M_0^{33}
 \end{aligned}
 \tag{A9.23}$$

$$\varepsilon_0 = \psi_0 + \Delta \frac{\partial \psi_0}{\partial \Delta} = \psi_0 - T_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial T_0} .
 \tag{A9.24}$$

Da die Momente symmetrisch werden, wird

$$L^\alpha \equiv 0$$

und die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich entsprechend. Die reduzierte lokale 3D-Energiebilanzgleichung (E-5) lautet dann

$$\sum_{OR} \dot{\varepsilon}_0 - \dot{w}_{in} + \frac{1}{L} \dot{\psi}_0^R - \sum_{OR} \dot{\tau}_0 + [(\vec{q}_R \cdot \vec{N} \xi)^+ - (\vec{q}_R \cdot \vec{N} \xi)^-] = 0, \tag{A9.25}$$

wobei \dot{W}_{in} die Elementarleistung der Schale ist:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{in} = & M_0^{\alpha\beta} \dot{E}_{0\alpha\beta} + M_1^{\alpha\beta} \dot{E}_{1\alpha\beta} + M_2^{\alpha\beta} \dot{E}_{2\alpha\beta} \\ & + 2(Q_0^\alpha \dot{E}_{0\alpha 3} + Q_1^\alpha \dot{E}_{1\alpha 3}) + Q \dot{E}_{033}, \end{aligned} \quad (A9.26)$$

Mit den konstitutiven Beziehungen (A9.23) und (A9.24) wird dann

$$\begin{aligned} s_{0R} \dot{E}_0 - \dot{W}_{in} &= s_{0R} \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial T_0} \dot{T}_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) \dot{E}_{0\alpha\beta} + \dots + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{033}} \dot{E}_{033} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \psi_0}{\partial T_0} \dot{T}_0 - T_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial T_0} \right\} - \dot{W}_{in} \end{aligned} \quad (A9.27)$$

$$= -s_{0R} T_0 \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{D\psi_0}{Dt}$$

$$= -s_{0R} T_0 \frac{\partial}{\partial T_0} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial T_0} \dot{T}_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{0\beta\alpha}} \right) \dot{E}_{0\alpha\beta} + \dots + \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{033}} \dot{E}_{033} \right]$$

$$= -s_{0R} T_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial T_0^2} \dot{T}_0 - T_0 \frac{\partial}{\partial T_0} (\dot{W}_{in}),$$

Schließlich seien der Vollständigkeit halber hier noch die thermischen Randbedingungen angegeben:

$$h_0^\beta \gamma_\beta - \tilde{h}_0^{(2)} = 0, \quad (\text{A9.28})$$

Außerdem sei an die Restentropiegleichung (9.66) erinnert.

Diese Umformungen erlauben jetzt einen direkten Vergleich mit nicht-linearen Schalentheorien zu führen, die mit derselben kinematischen Voraussetzung aber ohne thermodynamische Einbettung entwickelt wurden. Führt man die Bezeichnungen von Habip [22] ein,

$$\begin{aligned} {}^1N^{\alpha\beta} &:= M_0^{\alpha\beta} & Q^\alpha &:= Q_0^\alpha \\ {}^1M^{\alpha\beta} &:= M_1^{\alpha\beta} & T^\alpha &:= Q_1^\alpha \\ {}^1K^{\alpha\beta} &:= M_2^{\alpha\beta} & N^{33} &:= Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha &:= Y_\alpha & \psi_\alpha &:= F_\alpha \\ u_3 &:= W & \psi_3 &:= F \end{aligned}$$

und beachtet die Symmetrie der Momente,

$$M_m^{\alpha\beta} = M_m^{\beta\alpha}, \quad m = 0, 1, 2$$

dann stimmen die Bewegungsgleichungen (A9.18), die dynamischen Randbedingungen (A9.19) und die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (A9.22) mit denen von Habip und Ebzioglu [12, 22] überein. Formale Übereinstimmung ist auch in den mechanischen Stoffgleichungen zu erzielen, wenn man die Formänderungsenergie Σ in Darstellung von Habip [22, Gl. (31) und (32)] durch die mittlere freie Energie

$$\Sigma := \int_{\mathcal{R}} \psi_0$$

interpretiert und dabei folgendes beachtet:

(1) In der Argumentenliste von Σ werden die kinematischen Größen

$$\begin{aligned} \gamma_{m\alpha\beta} &:= E_{m\alpha\beta} \quad , \quad \gamma_{m\beta\alpha} := E_{m\beta\alpha} \quad , \quad m = 0, 1, 2 \quad , \quad \gamma_{n\alpha 3} := E_{n\alpha 3} \quad , \\ \gamma_{3\alpha} &:= E_{n\alpha 3} \quad , \quad n = 0, 1 \quad , \quad \gamma_{033} := E_{033} \end{aligned}$$

als unabhängige Argumente betrachtet, so daß hier insbesondere auch $\gamma_{3\alpha}$ als Argument auftritt. Bei der Darstellung von ψ_0 ist dagegen $\gamma_{n\beta\alpha}$ kein von $E_{n\alpha 3}$ unabhängiges Argument. Um vollständige formale Übereinstimmung in (A7.23) zu erhalten, sind also die Abhängigkeiten von Σ bezüglich $\gamma_{n\beta\alpha}$ oder ψ_0 bezüglich $E_{n\beta\alpha}$ neu zu definieren.

(2) Eine explizite Annahme hinsichtlich der Temperaturverteilung über die Schalendicke wird von Habip nicht gemacht, es wird aber unterstellt, daß diese Verteilung in der gesamten Schale vorgegeben und zeitlich unveränderlich ist. Geht man davon aus, daß die Temperatur konstant über die Schalendicke ist (aber sonst örtlich veränderlich), dann muß in der Darstellung von Habip die Formänderungsenergie Σ neben den kinematischen Variablen allein von dem Temperaturparameter T_0 abhängen. Damit ist dann eine volle Entsprechung aller Schalengleichungen gegeben, ausgenommen die 2D-Energiebilanzgleichung und die thermische Randbedingung.

Die Schalentheorie von Habip bedarf natürlich noch einer thermodynamischen Rechtfertigung, da in ihr die 2D-Energiebilanzgleichung und die thermische Randbedingung keine Rolle spielen. Zwei Argumentationen sind im Prinzip denkbar:

Man kann die Annahme von Habip als ein Spezialfall der hier entwickelten, thermodynamisch begründeten Theorie ansehen, wenn man annimmt, daß die aktuellen thermischen Belastungen gerade so sind, daß sich die angenommene Temperaturverteilung einstellt und zeitlich unveränderlich ist; hier ist dann auch die 2D-Energiebilanzgleichung exakt erfüllt. Im allgemeinen und für beliebige thermoelastische Medien wird dies aber nicht realisierbar sein, denn die aktuellen thermischen Einwirkungen sind zumeist aufgrund ganz anderer Bedingungen vorgegeben.

Die zweite Argumentation faßt die Vorgehensweise von Habip als eine Approximation auf. In der Terminologie von Boley und Weiner [97] verwendet Habip eine entkoppelte Theorie, d.h., das Temperaturfeld wird unab-

hängig von den mechanischen Aspekten ermittelt.* Dies setzt voraus, daß die Verzerrungen der Schalen nur einen kleinen Einfluß auf die Temperatur haben. Damit dies gewährleistet ist, müssen sowohl die konstitutiven Eigenschaften, d.h. die mathematische Struktur von ψ_0 und die Größe der hier eingehenden Materialparameter sowie der thermomechanische Prozessablauf selbst, also insbesondere die Größe der Verzerrungsraten und der Temperaturrate bestimmten Bedingungen genügen. Sie lassen sich aus (A9.27) ableiten (vergl. auch [97]).

Schließlich sei noch auf einen Vergleich mit den Ergebnissen von Pietraszkiewicz [25] hingewiesen. Pietraszkiewicz hat eine rein mechanische, nichtlineare Schalentheorie, ausgehend vom Hamiltonschen Prinzip, entwickelt, wobei der gleiche kinematische Ansatz gewählt wurde. Beachtet man auch hier die unterschiedlichen Bezeichnungen, so ergibt sich ebenfalls eine vollständige Übereinstimmung in den Bewegungs- und Stoffgleichungen, sofern man isotherme Prozesse unterstellt. In den dynamischen Randbedingungen ist aber ein systematischer (Druck-) Fehler enthalten.

Abschließend sei noch angemerkt, daß die hier angegebenen Komponenten-gleichungen in der Ausgangskonfiguration nur eine Möglichkeit darstellt. Mit einer anderen Konvention für die Momente 2. Ordnung oder einer Neudefinition der Momente (vergl. z.B. (9.71)), die auf nichtsymmetrische Momente führen, lassen sich alternative Bilanz- und Stoffgleichungen in der Ausgangskonfiguration angeben.

* Eine Entkopplung ist formal dann exakt gegeben, wenn $\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial T_0^2}$ unabhängig von den Verzerrungen $\sum_0 \alpha_{rs}$ etc. ist und wenn die Ableitungen $\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{\alpha rs}}$ etc. unabhängig von der Temperatur T_0 sind (vergl. (A9.27)). Dies ist beispielsweise dann gegeben, wenn die freie Energie sich additiv aufspalten läßt in einen Verzerrungs- und Temperaturterm

$$\psi_0(E_{\alpha rs}, \dots, E_{\beta \gamma \delta}, T_0) = \psi_0^E(E_{\alpha rs}, \dots, E_{\beta \gamma \delta}) + \psi_0^T(T_0)$$

Die Annahme - $\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{\alpha rs}}$ etc. unabhängig von T_0 - bedeutet aber, daß (ungleichförmige) Temperaturfelder keine Wärmespannungen erzeugen. Das ist unrealistisch.

Literatur

- [1] Ericksen, J.L., Truesdell, C.: Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells, Arch. Rat. Mech. & Anal. 1, S. 285-323, 1957/58
- [2] Günther, W.: Analoge Systeme von Schalengleichungen, Ing. Arch. 30, S. 160-186, 1961
- [3] Green, A.E., Naghdi, P.M., Wainwright, W.L.: A General Theory of a Cosserat Surface, Arch. Rat. Mech. & Anal. 20, S. 287-308, 1965
- [4] Cohen, H., De Silva, C.N.: Theory of Directed Surfaces, J. Math. Phys. 7, S. 960-966, 1966
- [5] Green, A.E., Naghdi, P.M., Osborne, R.B.: Theory of an Elastic-Plastic Cosserat Surface, Int. J. Solids & Structures, S. 907-927, 1968
- [6] Naghdi, P.M.: The Theory of Shells and Plates, aus Flügges Handbuch der Physik, vol VIa/2, Hrsg. C. Truesdell, Springer Verlag, 1972
- [7] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On the Derivation of Shell Theories by Direct Approach, J. Appl. Mech., S. 173-176, March 1974
- [8] Naghdi, P.M.: Direct Formulation of Some Two-Dimensional Problems of Mechanics, Proc. 7th US Natl. Congr. Applied Mechanics, Univ. of Colorado, Boulder Colorado, June 3-7, 1974, ASME United Eng. Center, 1974
- [9] Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie I, ZAMM 29, S. 97-146, 1949
- [10] Zerna, W.: Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen, ZAMM 42, 4/8, S. 333-341, 1962
- [11] Naghdi, P.M.: Foundations of Elastic Shell Theory, Proc. Solid Mech. 4, S. 1-90, North Holland Publ. Comp., 1963
- [12] Habib, L.M., Ebcioğlu, I.K.: On the Equations of Motion of Shells in the Reference State, Ing. Arch. 35, S. 28-32, 1965

- [13] Zerna, W.: Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen, Abh. der Braunschweig. Wiss. Gesellschaft, Band 19, S. 52-71, 1967
- [14] Schmieder, L.: Schalentheorie mit Schubverformungen in allgemeinen Koordinaten, Teil I und II, Zeitschr. Flugwissenschaft 17, Heft 11, S. 391-404, Heft 12, S. 434-445, 1969
- [15] Biricikoglu, V., Kalnins, A.: Large Elastic Deformation of Shells with the Inclusion of Transverse Normal Strain, Int. J. Solids & Structures 7, S. 431-444, 1971
- [16] Epstein, M., Tene, Y.: A Linear Theory of Thin Elastic Shells Based on Conservation of a Non-Normal Straight Line, Int. J. Solid & Structures 9, S. 257-268, 1973
- [17] Yi-Yuan Yu: Application of Variational Equations of Motion to the Non-linear Vibration Analysis of Homogeneous and Layered Plates and Shells, J. Appl. Mech., S. 79-86, March 1963
- [18] Seidel, J.: Beitrag zur geometrisch nichtlinearen Theorie dünner Schalen unter Annahme kleiner Verzerrungen und großer Rotationen, Diss. Univ. Stuttgart, Feb. 1973
- [19] Naghdi, P.M.: On the Theory of Thin Elastic Shells, Quart. Appl. Math., vol XIV, S. 369-380, 1956
- [20] Klingbeil, E.: Das Variationsproblem der allgemeinen linearen Schalentheorie, ZAMM 44, 8/9, S. 379-391, 1964
- [21] Naghdi, P.M.: On a Variational Theorem in Elasticity and its Application to Shell Theory, J. Appl. Mech., S. 647-653, Dec. 1964
- [22] Habib, L.M.: Theory of Elastic Shells in the Reference State, Ing. Arch., 34, S. 228-237, 1965
- [23] Librescu, L.: On the Theory of Anisotropic Elastic Shells and Plates, Int. J. Solids & Structures 3, S. 53-68, 1967

- [24] Malmberg, T.: On some General Variational Principles for Creep with Applications to Thin Shells, *Int. J. Solids & Structures* 10, S. 1137-1154, 1974
- [25] Pietraszkiewicz, W.: Finite Rotations and Lagrangian Description in the Non-Linear Theory of Shells, *Polish Scientific Publ. Warschau*, 1979
- [26] Herrmann, G., Armenákas, A.E.: Dynamic Behavior of Cylindrical Shells under Initial Stress, *Proc. 4th US Natl. Congr. Appl. Mech., ASME*, S. 203-213, 1962
- [27] Kraus, H.: *Thin Elastic Shells*, J. Wiley & Sons, Inc., 1967
- [28] Goldenveizer, A.L.: The Principles of Reducing Three-dimensional Problems of Elasticity to Two-dimensional Problems of the Theory of Plate and Shells, *Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech.*, S. 305-311, 1964
- [29] Goldenveizer, A.L.: Derivation of an Approximate Theory of Shells by Means Asymptotic Integration of the Equation of the Theory of Elasticity, *PMM* 27, 4, 1963
- [30] Green, A.E.: Some Remarks on the Linear Theory of Shells, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* XVIII, S. 257-276, 1965
- [31] Westbrook, D.R.: An Asymptotic Investigation of the Small Strain Theory of Shells, *Int. J. Solids & Structure* 7, S. 901-912, 1971
- [32] Love, A.E.H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth Edition, New York, Dover Publications, 1944
- [33] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Comp., Second Edition 1959
- [34] Girkmann, K.: *Flächentragwerke*, Springer Verlag, 1963
- [35] Novozhilov, V.V.: *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1964

- [36] Flügge, W.: Stresses in Shells, 3. Auflage, Springer Verlag, New York, 1966
- [37] Finlayson, B.A.: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972
- [38] Truesdell, C.: The Classical Field Theories, in Encyclopedia of Physics, vol III/1, Principles of Classical Mechanics and Field Theories, Springer Verlag, 1960
- [39] Eringen, A.C.: Continuum Physics, vol II: Continuum Physics of Single-Substance Bodies, Academic Press, 1975
- [40] Oden, J.T., Reddy, J.N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer Verlag, 1976
- [41] Eringen, A.C.: Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill Book Comp. Inc., 1962
- [42] Green, A.E., Rivlin, R.S.: On Cauchy's Equations of Motion, ZAMP 15, S. 290-292, 1964
- [43] Green, A.E., Rivlin, R.S.: Multipolar Continuum Mechanics, Arch. Rat. Mech. & Anal. 17, S. 113-147, 1964
- [44] Noll, W.: La Mécanique Classique, Basée sur un Axiome d'Objectivité, in "La Méthode Axiométrique dans les Mécanique Classiques et Nouvelles", (Colloque International, Paris, 1959), Gauthier-Villars, Paris, 1963, Nachdruck in: Noll, W.: The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers, Springer Verlag, 1974
- [45] Becker, E., Bürger, W.: Kontinuumsmechanik, Teubner Verlag, 1975
- [46] Schmutzer, E.: Relativistische Physik (Klassische Theorie), B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968
- [47] Gurtin, M.E.: Modern Continuum Thermodynamics, in "Mechanics Today, vol 1, 1972", Hrsg. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press Inc., 1974

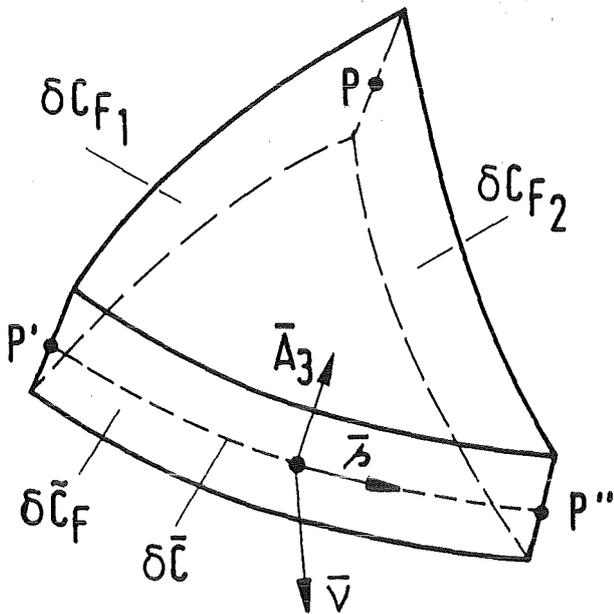
- [48] Hutter, K.: The Foundations of Thermodynamics, Its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics, *Acta Mechanica* 27, 1-4, S. 1-54, 1977
- [49] Coleman, B.D., Noll, W.: The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity, *Arch. Rat. Mech. & Anal.* 13, S. 167-178, 1963
- [50] Truesdell, C.: *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1969
- [51] Noll, W.: The Role of the Second Law of Thermodynamics in Classical Continuum Physics, in "Modern Development in Thermodynamics", Hrsg. B. Gal-Or, J. Wiley & Sons, New York, Toronto, Israel University Press, Jerusalem, 1974
- [52] Green, A.E., Laws, N., Naghdi, P.M.: Rods, Plates and Shells, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 69, S. 895-913, 1968
- [53] Green, A.E., Naghdi, P.M.: Non-isothermal Theory of Rods, Plates and Shells, *Int. J. Solids & Structures* 6, S. 209-244, 1970
- [54] Krätzig, W.B.: Thermodynamics of Deformation and Shell Theory, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Technical Reports, Mitteilung Nr. 71-3. April 1971
- [55] Krätzig, W.B.: Allgemeine Schalentheorie beliebiger Werkstoffe und Verformungen, *Ing. Arch.* 40, S. 34-326, 1971
- [56] Krätzig, W.B.: Optimale Schalengrundgleichungen und deren Leistungsfähigkeit, *ZAMM* 54, S. 265-276, 1974
- [57] Hammel, J.: Geometrisch nichtlineare Schalengleichungen als Approximation des dreidimensionalen Kontinuums unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung, *Ingenieur-Archiv*, Bd. 47, S. 75-93, 1978
- [58] Murdoch, A.J.: A Thermodynamical Theory of Elastic Material Interfaces, *Quart. J. of Mech. & Appl. Math.* 29, S. 245-275, 1976

- [59] Murdoch, A.J.: On the Entropy Inequality for Material Interfaces, J. of Appl. Math. & Phys., 27, S. 599-605, 1976.
- [60] Zhilin, P.A.: Mechanics of Deformable Directed Surfaces, Int. J. Solids Structures 12, S. 635-648, 1976.
- [61] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On Thermal Effects in the Theory of Shells, Proc. R. Soc. Lond. A 365, S. 161-190, 1979.
- [62] Simmonds, J.G.: The Nonlinear Thermodynamical Theory of Shells: Descent from 3-Dimensions without Thickness Expansions, in: Euromech Coll. 165 "Flexible Shells", Hrsg. E.L. Axelrad, F.A. Emmerling, Springer Verlag, 1984.
- [63] Malmberg, T.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1977.
- [64] Brunk, G.: Die Erweiterung des Prinzips der Rahmeninvarianz der Materialgleichungen auf beliebig bewegte Beobachter, Habilitationsschrift, Technische Universität Berlin, 1977.
- [65] Schlechtendahl, E.G.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1981.
- [66] Truesdell, C., Noll, W.: The Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer Verlag, 1965.
- [67] Green, A.E., Naghdi, P.M., Trapp, J.A.: Thermodynamics of a Continuum with Internal Constraints, Int. J. Engng. Sci. 8, S. 891-908, 1970.
- [68] Gurtin, M.E., Guidugli, P.P.: The Thermodynamics of Constrained Materials, Arch. Rat. Mech. & Anal. 51, 3, S. 192-308, 1973.
- [69] Woźniak, C.: Constrained Continuous Media I, II, III, Bull. de L'Acad. Polon. des Sc., Ser. Sc. Techn. vol XXI, no 3-4, S. 109-116, 167-173, 175-182, 1973.
- [70] Woźniak, C.: Nonlinear Mechanics of Constrained Continua I. Foundation of the Theory, Arch. of Mech. 26, 1, S. 105-118, 1974.

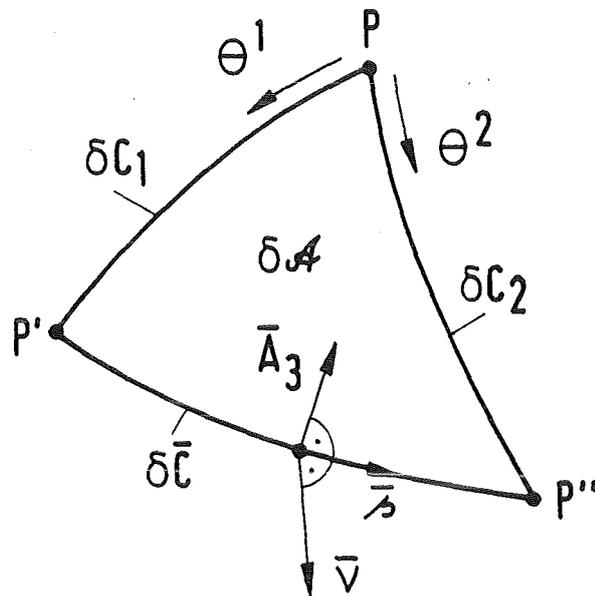
- [71] Woźniak, C.: Nonlinear Mechanics of Constrained Continua II. Ideal Constraints for Deformations and Stresses, *ibid.*, 28, 2, S. 155-170, 1976
- [72] Woźniak, C.: On the Realization of Constraints and Loosenesses in Continuum Mechanics, *Bull. de L'Acad. Polon. des Sc., Ser. Sc. Techn.* vol 25, no 12, S. 391 [1045] - 396 [1050], 1977
- [73] Woźniak, C.: Thermomechanics of Material Continua with Generalized Constraints, *Mech. Res. Comm.*, vol 3, S. 331-336, 1976
- [74] Jaunzemis, W.: Continuum Mechanics, The Macmillan Comp., New York, 1967
- [75] Green, A.E., Zerna, W.: Theoretical Elasticity, Second Ed., Oxford, At the Clarendon Press, 1975
- [76] Leigh, D.C.: Nonlinear Continuum Mechanics, McGraw-Hill Book Comp., 1968
- [77] Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics, vol 1, Academic Press, 1977
- [78] Haase, R.: Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, Dr. Dietrich Steinkopf Verlag, Darmstadt, 1963
- [79] Lichnerowicz, A.: Einführung in die Tensoranalysis, Bibliographisches Institut, 1966
- [80] Hay, G.E.: Vector and Tensor Analysis, Dover Publ. Inc., New York, 1953
- [81] McConnell, A.J.: Applications of Tensor Analysis, Dover Publ. Inc., 1957
- [82] Kestin, J.: A Course in Thermodynamics, vol 1, Blaisdell Publ. Comp., 1966
- [83] Lavenda, B.H.: Thermodynamics of Irreversible Processes, The Macmillan Press Ltd., 1978
- [84] Flügge, S., Hrsg.: Prinzipien der Thermodynamik und Statistik, Handbuch der Physik, Band III/2, Springer Verlag, 1959

- [85] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966
- [86] Spencer, A.J.M.: Theory of Invariants, in: Continuum Physics, Bd. 1 - Mathematics, Hrsg. A.C. Eringen, Academic Press, 1971
- [87] Coleman, B.D., Gurtin, M.E.: Thermodynamics with Internal State Variables, The Journal of Chemical Physics, vol 47, no 2, S. 597-613, 1967
- [88] MacVean, D.B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19, S. 157-184, 1968
- [89] Hill, R.: On Constitutive Inequalities for Simple Materials - I, J. Mech. Phys. Sol. 16, S. 229-242, 1968
- [90] Malmberg, T.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1984
- [91] Malmberg, T.: Interne Berichte, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1977
- [92] Malmberg, T.: Interner Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1978
- [93] Woods, L.C.: On the Local Form of the Second Law of Thermodynamics in Continuum Mechanics, Quart. Appl. Math., S. 119-126, April 1981
- [94] Green, A.E., Laws, N.: On a Global Entropy Production Inequality, The Quart, J. Mech. and Appl. Math. 25, S. 1-11, 1972
- [95] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On Continuum Thermodynamics, Arch. Rat. Mech. Anal. 48, S. 352-378, 1972
- [96] Boley, B.A., Weiner, J.H.: Theory of Thermal Stresses, John Wiley & Sons, 2. Aufl. 1960
- [97] Einstein, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie, Fried. Vieweg & Sohn, 1956
- [98] Born, M.: Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer Verlag, 1969

- [99] Duszek, M.K.: On Conjugate and Objective Measures of Constitutive Variables in the Mechanical Theory of Solids, Bull. de L'Acad. Polon. des Sc., Ser. Sc. Techn. 28, no 11-12, S. 287 [631] - 293 [637], 1980



Teilabschnitt der Schale am
Schalenrand



Teilabschnitt der Referenzfläche
am Schalenrand

$\delta \tilde{C}_F$: Teilabschnitt des Randstreifens \tilde{C}_F der Schale

$\delta \tilde{C}$: Teilstück der Randkurve \tilde{C} der Referenzfläche

δA : Teilabschnitt der Referenzfläche, deren Berandung das Teilstück $\delta \tilde{C}$ der Randkurve \tilde{C} enthält

\bar{s} : Einheitstangentenvektor der Randkurve \tilde{C}

$\bar{v} = (\bar{s} \times \bar{A}_3)$: Äußerer Einheitsnormalenvektor des Randstreifenabschnitts $\delta \tilde{C}_F$

Abb. 14

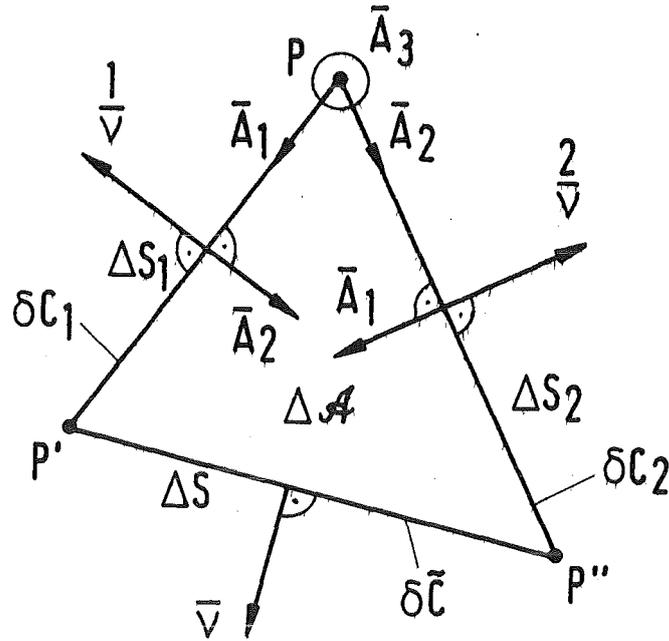


Abb. 15

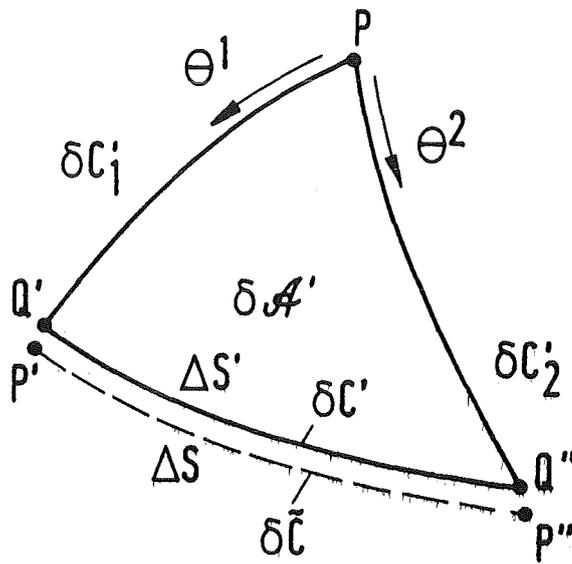


Abb. 14 FLÄCHENELEMENT DER REFERENZFLÄCHE AM SCHALENRAND

Abb. 15 FLÄCHENELEMENT IN RANDNÄHE; INTEGRATIONSBEREICH DER BEWEGUNGSGLEICHUNG 2. ART

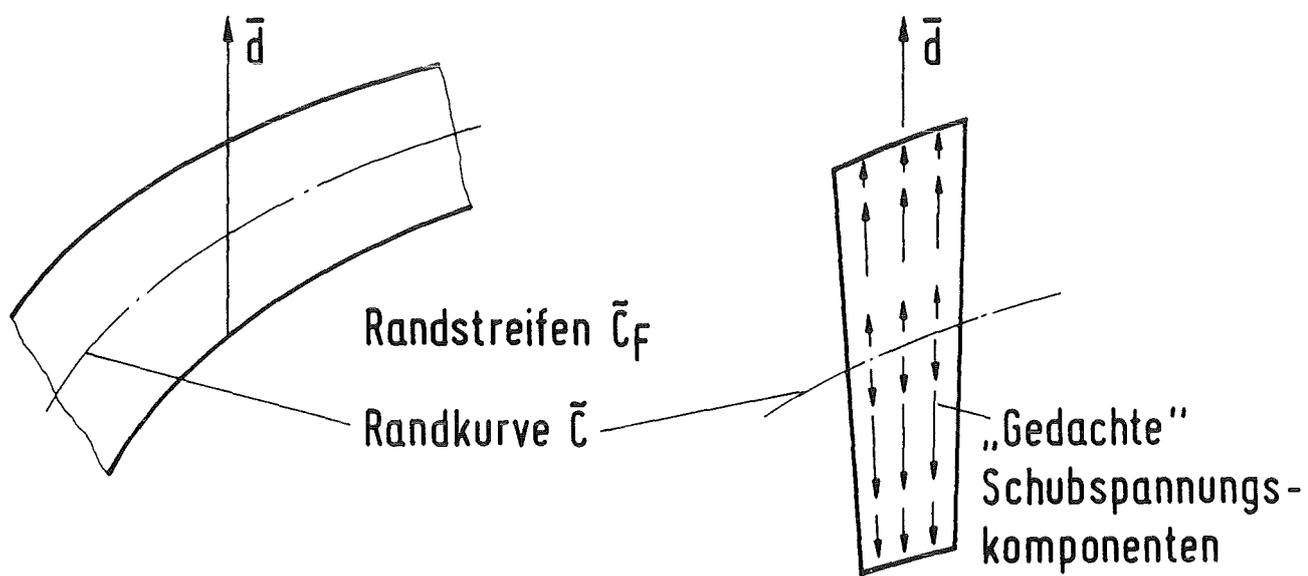


Abb. 16 SELBSTEQUILIBRIERTE VERTEILUNG DER SCHUBSPANNUNGSKOMPONENTE DER "GEDACHTEN" SPANNUNGEN \hat{t}_R AM SCHALENRAND IN DIE RICHTUNG DES MOMENTANEN DIREKTORS \bar{d}