

KfK 4718
Juni 1990

Überprüfung verschiedener Theorien zur Berechnung der Stoßausbreitung in querschnittsvariierenden Kanälen

J. Keller, W. Merzkirch, Q. Han, M. Neuberger
Laboratorium für Aerosolphysik und Filtertechnik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Laboratorium für Aerosolphysik und Filtertechnik

Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

KfK 4718

**Überprüfung verschiedener Theorien zur Berechnung der
Stoßausbreitung in querschnittsvariierenden Kanälen**

J. Keller^x, W. Merzkirch^x, Q. Han^x

M. Neuberger

^x Universität GHS Essen

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Überprüfung verschiedener Theorien zur Berechnung der Stoßausbreitung in querschnittsvariierenden Kanälen

Zusammenfassung

Verschiedene Theorien beschreiben die Intensitätsänderung einer Stoßwelle in Abhängigkeit von der Querschnittsänderung auf gasdynamischer Grundlage, d.h. ohne Berücksichtigung reibungsbedingter Verluste. Chester benutzt die Theorie von Lighthill über die Beugung einer Stoßwelle an einer abknickenden Wand und kommt zu einer analytischen Beziehung zwischen lokalem Wert der Stoßmachzahl M_s und dem Querschnitt A des Kanals. Dieselbe Beziehung wird von Chisnell auf anderem Weg hergeleitet; er fügt eine Reihe von Strömungsgebieten unterschiedlicher gasdynamischer Zustände unter Einführen von Kontaktfronten, ausgehend von den Knickstellen im Kanal, bei der Verwendung stationärer Strömungsbedingungen zusammen. Schließlich leitet auch Whitham dieselbe Gleichung auf der Basis einer Charakteristikenrechnung her. Es konnten jedoch sowohl Chester als auch Chisnell Fehler in ihren Herleitungen der beschreibenden Differentialgleichung nachgewiesen werden. Somit bringt nur Whitham eine konsistente Ableitung des in der Literatur als "Chester-Chisnell'sche Kanalformel" eingegangenen Zusammenhangs zwischen Stoßstärke und Flächenänderung.

Investigation of several theories for modelling the propagation of a shock wave through a duct with variable cross section

Abstract

A number of theories describe the variation in shock strength as functions of the cross section geometry and gas dynamic fundamentals without taking into account friction losses. Chester used the theory of Lighthill for the bending of a shock wave at a bent wall and developed an analytical relationship between the local value of the Mach number, M_s , and the duct cross sectional area, A . The same relationship was obtained by Chisnell with a different derivation: he assumed steady - state flow conditions and coupled together a series of flow areas with different gas dynamic states using contact fronts initialized from the wall discontinuity. Using the method of characteristics, Whitham arrived at the same relationship. The derivations of both Chester and Chisnell leading to the described differential equation are shown to contain errors. As a result, only Whitham provides a consistent derivation for the Chester - Chisnell duct equation, which describes the relationship between shock strength and the change in cross sectional area.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	4
2.1. Allgemeine Erhaltungssätze	4
2.1.1. Massenerhaltungssatz	4
2.1.2. Impulserhaltungssatz	6
2.1.3. Energieerhaltungssatz	8
2.2. Kompressible, eindimensionale Strömungen	9
2.2.1. Isentrope Düsenströmung	9
2.2.2. Senkrechter Verdichtungsstoß	10
2.2.3. Instationärer, senkrechter Verdichtungsstoß	12
3. Überprüfung der Ableitung von Whitham (1958)	13
3.1. Aufstellen der Erhaltungssätze	14
3.2. Überführen in die Charakteristikenform	18
3.3. Ableitung der Differentialgleichung nach dA und dM bzw. dz	23
4. Erarbeitung der Zwischenschritte sowie der mathematischen und physikalischen Voraussetzungen der Ableitungen von Lighthill (1948) und Chester (1953)	32
4.1. Einseitige Begrenzung eines instationären, senkrechten Verdichtungsstoßes durch eine abknickende Wand (Lighthill, 1948)	32
4.1.1. Mathematischer Ansatz	33
4.1.2. Eliminierung von u und v	45
4.1.3. Busemanns Transformation	51
4.1.4. Lösung der Potentialgleichung	60
4.2. Zweiseitige Begrenzung eines instationären, senkrechten Verdichtungsstoßes durch abknickende Wände (Chester, 1953)	69
4.2.1. Transformation	70
4.2.2. Druckverteilung über dem Stoß	72

5.	Nachvollziehen der Ableitung von Chester (1954) bis zur Erstellung der Differentialgleichung	84
5.1.	Übergangsbeziehungen über einen geraden Verdichtungsstoß entsprechend dem §2 von Chester (1954)	85
5.2.	Randbedingungen eines nicht gleichförmigen Stoßes entsprechend dem §3 von Chester (1954)	89
5.3.	Bewegungsgleichungen in der gestörten Strömung entsprechend dem §4 von Chester (1954)	93
5.4.	Anwendung der Bilanzgleichung bezüglich der Strömungsverhältnisse im Stoßwellenrohr entsprechend dem §5 von Chester (1954)	95
6.	Diskussion und Vergleich der verschiedenen Ableitungen	114
7.	Ergebnis und Schlußfolgerungen	116
8.	Literaturverzeichnis	117

Nomenklatur

Die Nomenklatur in diesem Bericht orientiert sich an den Nomenklaturen der Veröffentlichungen, die hier nachvollzogen werden sollen. Damit können auch durchaus für eine Größe mehrere Bezeichnungen in dem Bericht auftreten.

Lateinische Buchstaben

a	Schallgeschwindigkeit
a_0	Schallgeschwindigkeit des Fluids vor dem Stoß
a_1	Schallgeschwindigkeit des Fluids hinter dem Stoß, aber noch stromauf der Kante
A	Querschnittsfläche des Kanals
A	Variable
A	Variable
A_A	Variable
A_B	Variable
A'	Querschnittsflächenänderung des Kanals
A'	Variable
A''	Variable
B	Variable
B	Variable
B_A	Variable
B_B	Variable
B'	Variable
B''	Variable
c	Grenzpunkt
C	Variable
C	Variable
C_A	Variable
C_B	Variable
C_+	positive Charakteristik
C_-	negative Charakteristik
C'	Variable
C''	Variable
d	Differenz von einem Parameter
D	totales oder substantielles Differential von einem Parameter
D	Variable
D_A	Variable

D_b	Variable
D''	Variable
e	innere Energie
E'	Variable
E''	Variable
F	Lösungsfunktion
g	Erdbeschleunigung
G	Lösungsfunktion
\mathbf{h}	Normalenvektor zur Stoßnormalen
k	Berechnungsvariable
k'	Funktion in Abhängigkeit von k
K	Berechnungsvariable
m	Masse
m_0	Quotient aus Nachlaufgeschwindigkeit q_1 und der Schallgeschwindigkeit a_1
M	Machzahl
M_s	Stoßmachzahl
M_0	Machzahl des Fluids vor dem Stoß
M_1	Machzahl des Fluids hinter dem Stoß, aber noch stromaufwärts der Kante
M^*	Lavalzahl
\mathbf{n}	Normale
n	Anzahl der Dirichlet'schen Summationen
p	Druck
p_1	allgemeiner Druck p vor dem Stoß
p_{11}	allgemeiner Druck p nach dem Stoß
p_x	Kesseldruck (Ruhedruck)
p_t	Differential des Druckes p bezüglich der Zeit t
p_x	Differential des Druckes p in x -Richtung
p_0	Druck vor dem Stoß
p_1	Druck hinter dem Stoß, aber noch stromaufwärts der Kante
p_2	Druck hinter dem Stoß, aber schon stromabwärts der Kante
p_θ	Differential des Druckes bezogen auf den Winkel θ
$p_{\theta\theta}$	doppeltes Differential des Druckes bezogen auf den Winkel θ
P	Lösungsfunktion
q_1	absolute Nachlaufgeschwindigkeit des Fluids hinter dem Stoß, aber noch stromaufwärts der Kante
\mathbf{q}_2	Nachlaufgeschwindigkeitsvektor des Fluids hinter dem Stoß, aber schon stromabwärts der Kante
\dot{Q}	Wärmezufuhr durch Konvektion und Strahlung
r	Radius des zylindrischen Koordinatensystems von Chester (1954)

R	willkürliche Randbedingung in Zylinderkoordinaten
R_x	Differential der Randbedingung in x-Richtung
R_θ	Differential der Randbedingung bezogen auf den Winkel θ
s	Entropie
s_0	Entropie vor dem Stoß
s_1	Entropie hinter dem Stoß, aber noch stromaufwärts der Kante
s_2	Entropie hinter dem Stoß, aber schon stromabwärts der Kante
S	ursprüngliche Querschnittsfläche
t	Zeit
th	Orthogonalvektor von der Kante zur Stoßtangente
T	mittlere, thermodynamische Temperatur
T_I	allgemeine, mittlere Temperatur T vor dem Stoß
T_{II}	allgemeine, mittlere Temperatur T nach dem Stoß
T_K	Kesseltemperatur (Ruhetemperatur)
u	mittlere Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung
u_I	allgemeine, mittlere Strömungsgeschwindigkeit u vor dem Stoß
u_{II}	allgemeine, mittlere Strömungsgeschwindigkeit u nach dem Stoß
u_t	Differential der Geschwindigkeit u nach der Zeit t
u_x	Differential der Geschwindigkeit u in x-Richtung
U	Stoßgeschwindigkeit
U_0	Stoßgeschwindigkeit U
v	mittlere Strömungsgeschwindigkeit in y-Richtung
V	Geschwindigkeitsvektor
V_1	Geschwindigkeitsvektor des Fluids hinter dem Stoß, aber noch stromauf der Kante
V_n	Normalenanteil des Geschwindigkeitsvektors V
V_n	Normalgeschwindigkeit
V_0	Normalenanteil der Stoßgeschwindigkeit (gilt auch stromab der Kante)
V_0	Normalenanteil der Stoßgeschwindigkeit V ₀
w	Lösungsfunktion
\dot{W}_{Welle}	Wellenarbeit
x	Kartesische Koordinate
x_1	Realteil der Transformation von z,
X	Koordinate des zweidimensionalen, kartesischen Koordinatensystems
x'	Koordinate des zylindrischen Koordinatensystems von Chester (1954) relativ zur x-Achse
y	Kartesische Koordinate
y_1	Imaginärteil der Transformation von z,
Y	Koordinate des zweidimensionalen, kartesischen Koordinatensystems
z	Kartesische Koordinate
z'	Transformationsfunktion
Z	Transformationsfunktion

Griechische Buchstaben

α	Lösungsfunktion der z_1 -Ebene
β	Lösungsfunktion der z_1 -Ebene
γ	Isentropenexponent
δ	Abknickwinkel der ebenen Wand
ΔS	geänderte Querschnittsfläche S
$\Delta S'$	einfaches Differential der geänderten Querschnittsfläche s in x -Richtung
$\Delta S''$	doppeltes Differential der geänderten Querschnittsfläche in x -Richtung
∂	Differential von einem Parameter
ζ	Transformationskomponente
η	Transformationskomponente
Θ	Winkel des zylindrischen Koordinatensystems von Chester (1954)
λ	Parameter zur Charakterikenbildung
λ	Grenze der Dirichlet'schen Summation
λ_+	Parameter zur Charakterikenbildung
λ_-	Parameter zur Charakterikenbildung
λ_s	Parameter zur Charakterikenbildung
μ	Berechnungsvariable
μ_v	Viskosität
v_1	untere Grenze von n
v_2	obere Grenze von n
ξ	Transformationskomponente
O	Zeitverschiebung im Koordinatensystem
π	3,141592654
ρ	Dichte
ρ_1	Dichte vor dem Verdichtungsstoß
ρ_{11}	Dichte nach dem Verdichtungsstoß
ρ_K	Dichte des Ruhezustandes im Kessel
ρ_t	Differential der Dichte ρ nach der Zeit t
ρ_x	Differential der Dichte ρ in x -Richtung
ρ_0	Dichte des Fluids vor dem Stoß
ρ_1	Dichte des Fluids hinter dem Stoß, aber noch stromaufwärts der Kante
P	Partikelbahn
Φ	spitzer Winkel
χ	Winkel der Lösungsfunktion des Druckes p
Ψ	Winkel zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{V}

Deutsche Buchstaben

a	Beschleunigung
\mathcal{A}	Querschnittsfläche in einer Düse an der Stelle x
\mathcal{A}^*	Querschnittsfläche in einer Düse am kritischen Punkt, wo $M = 1$
f	Kraft pro Masseneinheit
\mathfrak{F}	Kraftvektor
\mathcal{E}	Streckenelement aus dem Kontrollvolumen
\mathcal{B}	Volumenelement aus dem Kontrollvolumen

Sonderzeichen

div	Divergenz
f	Störfunktion
f_r	Differential der Störfunktion f in Radialrichtung im Zylinderkoordinatensystem
f_t	Differential der Störfunktion f nach der Zeit t
$f_{\theta,r}$	zweifaches Differential der Störfunktion f in Bezug auf den Winkel θ und den Radius r im Zylinderkoordinatensystem
f'	Ableitung der Störfunktion in y -Richtung
∇	Nabla-Operator
\int	Integral
\oint	Oberflächenintegral
\iiint	Volumenintegral
\Rightarrow	daraus folgt direkt durch mathematische Umformung
∞	unendlich

Indizes

i	vor dem Stoß
ii	nach dem Stoß
κ	Kessel- bzw. Ruhezustand
s	isentrop
o	Parameter vor dem Stoß
1	Parameter nach dem Stoß, aber noch vor der Kante
2	Parameter nach dem Stoß, aber nach dem Brechen an der Kante
\cdot	positiver Lösungsanteil
$\cdot\cdot$	negativer Lösungsanteil
\pm	sowohl positiver als auch negativer Lösungsanteil
$*$	kritisch, daß heißt bei Schallgeschwindigkeit $M = 1$

Kennzahlen

La	Lavalzahl
M	Machzahl
M [*]	kritische Machzahl

1. Einleitung

Zur Berechnung der Stoßausbreitung in querschnittsvariierenden Kanälen wurden in der Literatur bereits von mehreren Autoren Theorien vorgestellt. Dabei kommen Chester (1954), Chisnell (1957) und Whitham (1958) trotz unterschiedlicher Herleitungen zu demselben formalen Zusammenhang, der die Änderung der Stoßstärke eines instationären Verdichtungsstoßes in Abhängigkeit der Flächenänderung des Strömungskanals bestimmt. Dabei ist es unerheblich, wie der Querschnitt des Strömungskanals geformt ist. Allgemein bekannt in den Lehrbüchern der Gasdynamik ist dieser formale Zusammenhang unter dem Begriff: "Kanalformel von Chester und Chisnell".

Erste theoretische Untersuchungen auf diesem Gebiet wurden bereits von Lighthill (1948) und Chester (1953) durchgeführt. Basierend auf einer Arbeit von Sommerfeld (1901) und den theoretischen Ableitungen von Busemann (1943) entwickelte Lighthill (1948) zuerst eine Theorie zur Berechnung der Stoßstärkeänderung eines instationären Verdichtungsstoßes entlang einer abknickenden, ebenen Wand, wie dies Abb.(1.1) zeigt.

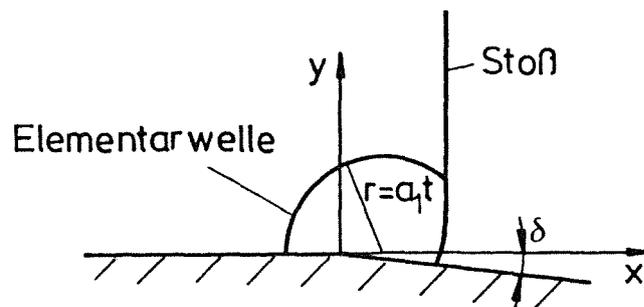


Abb. 1.1: Verlauf eines Instationären Verdichtungsstoßes entlang einer konvexen Wandkante

In seiner Arbeit interessiert sich Lighthill (1948) primär für den Einfluß eines konvexen Wandknicks auf einen instationären Verdichtungsstoß. Für einen negativen Abknickwinkel δ könnte mit der Theorie von Lighthill (1948) auch eine konkave Kante untersucht werden. In jedem Falle läuft die instationäre Stoß-

welle vor der Kante immer orthogonal zur ebenen Wand. Außerdem fließt in die Theorie von Lighthill (1948) der Einfluß der Elementarwelle ein, welche sich durch die Brechung der Stoßwelle an einer konvexen Kante der Wand ausbildet.

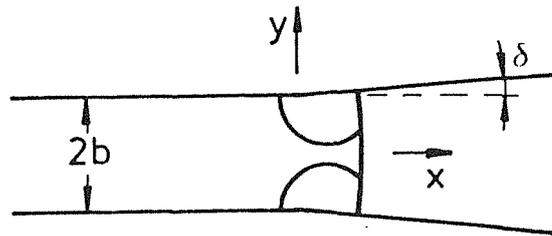


Abb. 1.2: *Begrenzung des instationären Verdichtungsstoßes und der Nachlaufströmung durch zwei konvex abknickende Wände*

Um einer Kanalströmung näher zu kommen, griff Chester (1953) den Ansatz von Lighthill (1948) auf und begrenzte den Verdichtungsstoß auf zwei Seiten durch konvex abknickende Wände, siehe Abb.(1.2). Damit erzielt Chester (1953) für eine Unterschallströmung eine Düsenkonfiguration und für eine Überschallströmung eine Diffusorkonfiguration. Beide Fälle werden in der Arbeit von Chester (1953) explizit unterschieden.

Ein Jahr später stellte Chester (1954) eine neue Theorie vor, bei der der Verdichtungsstoß zum ersten Male durch einen vollständigen, rundherum begrenzten Kanal mit sich änderndem Querschnitt bewegt. Für den formalen Zusammenhang zwischen der Stoßstärkenänderung und der Querschnittsvariation ist es dabei unerheblich, welche Form der Kanal annimmt.

Drei Jahre später veröffentlichte Chisnell (1957) eine wesentlich unkompliziertere Theorie, als wie sie zuerst von Chester (1954) für einen kompletten Kanal vorgestellt wurde. Mit Hilfe der Rankine-Hugoniot Beziehung und den Stoßbeziehungen für Druck, Dichte und Geschwindigkeit bei stationären Strömungsverhältnissen erzielte Chisnell (1957) dieselbe Lösung wie Chester (1954).

Als dritter veröffentlichte Whitham (1958) eine weitere Herleitung des formalen Zusammenhanges zur Bestimmung der Stoßstärkenänderung unter Quer-

schnittsvariation, wie dieser bereits von Chester (1954) und Chisnell (1957) aufgezeigt wurde. Die theoretische Herleitung von Whitham (1958) bezieht sich dabei auf die allgemeinen differentiellen Erhaltungssätze der Masse, der Energie und des Impulses. Darüber hinaus fließen auch die Stoßbeziehungen des Drucks, der Dichte und der Geschwindigkeit ein. Zur Lösung transformiert Whitham (1958) die Bilanzgleichungen in Charakteristikenform.

Nun hat Gajewski (1988) in der theoretischen Herleitung von Chisnell (1957) einen Fehler nachgewiesen. Dort fehlt in der Arbeit auf der Seite 290 in der Gleichung (2.11) bei der Machzahl M_3 ein Quadrat. Es handelt sich dabei nicht um einen Druckfehler, da sich dieser Fehler in den folgenden Berechnungen fortsetzt. Eine Korrektur des Fehlers führt für die Theorie von Chisnell (1957) zu keinem physikalisch sinnvollen Ergebnis. Damit liegt der Verdacht nahe, daß vielleicht auch in den Arbeiten von Chester (1954) und Whitham (1958) Fehler vorhanden sein könnten. Aus diesem Grunde werden in dieser Arbeit die Herleitungen von Chester (1954) und Whitham (1958) nachvollzogen. Sofern sich dabei Druck- oder Rechenfehler zeigen, werden diese korrigiert und die Herleitung mit den korrekten Gleichungen weitergeführt.

Zum besseren Verständnis der mathematischen und physikalischen Voraussetzungen wird ein Einblick in die ursprünglichen Arbeiten von Lighthill (1948) und Chester (1953) gegeben, bevor die ausführliche Herleitung der Arbeit von Chester (1954) erfolgt. Sollten trotz der unterschiedlichen physikalischen Randbedingungen in den Veröffentlichungen von Lighthill (1948), Chester (1953) und Chester (1953) Gemeinsamkeiten in der Herleitung der Theorien bestehen, so werden diese dargelegt.

2. Theoretische Grundlagen

Zur Herleitung einer Beziehung zur Bestimmung der Stoßstärkenänderung eines Verdichtungsstoßes bei einem sich ändernden Strömungsquerschnitt greifen Chester (1954), Chisnell (1957) und Whitham (1958) auf die in der Strömungsmechanik allgemein bekannten Erhaltungssätze zurück. Dies gilt auch für die Betrachtungen von Lighthill (1948) und Chester (1953), die das Verhalten eines instationären Verdichtungsstoßes entlang abknickender Wände untersuchten.

In diesem Kapitel sollen daher die allgemeinen strömungsmechanischen Grundgleichungen und die Erhaltungssätze eines Verdichtungsstoßes vorgestellt werden.

2.1. Allgemeine Erhaltungssätze

Das zu betrachtende Strömungsfeld kann mit verschiedenen Parametern gekennzeichnet werden, es sind dies z.B. der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{V} , bzw. dessen Komponenten u , v , und w , weiterhin der Druck p , die Dichte ρ oder die Fluidtemperatur T . Diese verschiedenen Strömungsfeldparameter sind dabei Funktionen sowohl des Ortes als auch der Zeit t . Für den Ort kann dazu einerseits ein kartesisches Koordinatensystem (x,y,z) oder je nach vorherrschenden Randbedingungen ein Zylinderkoordinatensystem (r,ζ,x) oder andere Koordinatensystemformen gewählt werden.

Zur Bestimmung eines unbekanntem Strömungsparameter wird jeweils eine unabhängige Bestimmungsgleichung benötigt, wobei man sich in der Strömungsmechanik im allgemeinen zuerst auf die bekannten Erhaltungssätze der Masse, des Impulses und der Energie stützt. Weiterhin gehen Randwertbedingungen ein, die sich z.B. aus der vorhandenen Körpergeometrie ergeben, oder man stützt sich auf Anfangsbedingungen.

2.1.1. Massenerhaltungssatz

Durchströmt ein Fluid ein Kontrollvolumen, so setzt sich die allgemeine Kontinuitätsbilanz aus dem Massenfluß

$$-\oint_S \rho \, d\mathbf{V} \cdot d\mathbf{e}$$

der die gesamte Oberfläche durchströmt, und der zeitlichen Änderung der Masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \, d\mathcal{V}$$

innerhalb des Kontrollvolumens zu der Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \, d\mathcal{V} + \oint \rho \, d\mathbf{V} \, d\mathcal{S} = 0 \quad (2.1)$$

zusammen. Einen anschaulichen Eindruck über das Kontrollvolumen bietet dabei die Abb.(2.1).

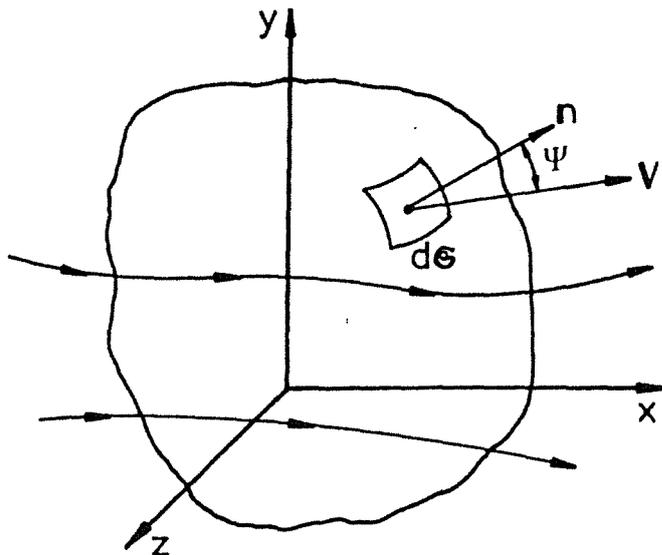


Abb. 2.1: Kontrollvolumen des Fluids

Für eine Strömung ohne Quellen und Senken hat der Massenerhaltungssatz die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.2)$$

und in der Komponentenschreibweise die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (2.3)$$

Ist die Strömung darüber hinaus auch noch inkompressibel ($\rho = \text{konstant}$) und eben, so erhält man den Zusammenhang:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Letztendlich reduziert sich die Kontinuitätsbilanz im eindimensionalen Fall von

$$\dot{m} = \rho (u \cos(\Psi)) d\mathcal{E} = \rho \mathbf{V}_n d\mathcal{E} = \rho \mathbf{V} d\mathcal{E} \quad (2.5)$$

zu der Form

$$\dot{m} = \rho u A \quad (2.6)$$

2.1.2. Impulserhaltungssatz

Der Impuls setzt sich aus den Einzelkräften zusammen, die auf einen Körper wirken. In Vektorform entspricht dies der Bilanz

$$\mathfrak{F} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{V}) \quad (2.7)$$

und für eine konstante Masse resultiert daraus

$$\mathfrak{F} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = m \mathbf{a} \quad (2.8)$$

Bezogen auf das Kontrollvolumen der Abb.(2.1) setzt sich die Impulsbilanz aus mehreren Teilkräften zusammen, den inneren Körperkräften aufgrund von Gravitation und Elektromagnetismus

$$\iiint_V \rho \mathbf{f} d\mathfrak{V}$$

und den Oberflächenkräften aufgrund des Drucks und der Scherung

$$-\oint_S p d\mathcal{E}$$

Zusammen ergeben sie den Kraftvektor

$$\mathfrak{F} = \iiint_V \rho \mathbf{f} d\mathfrak{V} - \oint_S p d\mathcal{E} \quad (2.9)$$

der auf das Kontrollvolumen einwirkt. Über die Summe des Impulsaustausches

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{V}) = \oint_{\xi} (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{e}) + \oint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} d\mathfrak{B} \quad (2.10)$$

erhält man schließlich für Gl.(2.7) mit Gl.(2.9) und Gl.(2.10) die allgemeine Impulsbilanz:

$$\oint_{\xi} (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{e}) + \oint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} d\mathfrak{B} = \oint_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{f} d\mathfrak{B} - \oint_{\xi} p d\mathbf{e} \quad (2.11)$$

Wird der Einfluß der Schwerkraft, des Elektromagnetismus und der Reibung vernachlässigt, so folgt mit Hilfe der Definition der substantiellen Ableitung (in Abhängigkeit von x, y, z, t)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.12)$$

bzw. mit

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.13)$$

die bekannte Euler-Gleichung:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (2.14)$$

Bei einer stationären und ebenen Strömung reduziert sich die Euler-Gleichung (2.14) zu:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.15a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.15b)$$

2.1.3. Energieerhaltungssatz

Die Energiebilanz bezogen auf das Kontrollvolumen der Abb.(2.1) lautet in allgemeiner Form für ein nicht-viskoses Fluid:

$$\begin{aligned} \dot{Q} + \dot{W}_{\text{welle}} + \dot{W}_{\text{viskos}} - \oint_{\mathcal{S}} p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{e} + \oint_{\mathcal{V}} \rho [\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}] d\mathcal{V} \\ = \oint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left[c + \frac{u^2}{2} + gz \right] \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \rho \left[e + \frac{u^2}{2} + gz \right] \mathbf{V} \cdot d\mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Energiebilanz setzt sich dabei aus

- der Wärmezufuhr durch Konvektion und Strahlung: \dot{Q}
- der Wellenarbeit: \dot{W}_{welle}
- der Arbeit aufgrund der Druckkräfte: $\oint_{\mathcal{S}} p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{e}$
- der Arbeit aufgrund der Körperkräfte: $\oint_{\mathcal{V}} \rho [\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}] d\mathcal{V}$
- dem Netto-Energiefluß über die Kontrollfläche:

$$\oint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left[e + \frac{u^2}{2} + gz \right] \right] d\mathcal{V}$$

und

- die Energierate aufgrund der Umwandlung von innerer Energie in Bewegungsenergie:

$$\oint_{\mathcal{S}} \rho \left[e + \frac{u^2}{2} + gz \right] \mathbf{V} \cdot d\mathbf{e}$$

zusammen.

Für eine horizontale, adiabate, reibungslose Strömung ohne Energiezufuhr resultiert für ein perfektes Gas die Energiebilanz:

$$\frac{1}{2} u^2 + c_p T = \text{konstant} \quad (2.17)$$

2.2. Kompressible, eindimensionale Strömungen

2.2.1. Isentrope Düsenströmungen

Die Strömungsparameter einer stationären, eindimensionalen Strömung analog zur Stromfadentheorie sind nur eine Funktion der Ortskoordinate x , dabei wird aber eine Änderung des Querschnitts \mathfrak{A} in Abhängigkeit von x zugelassen.

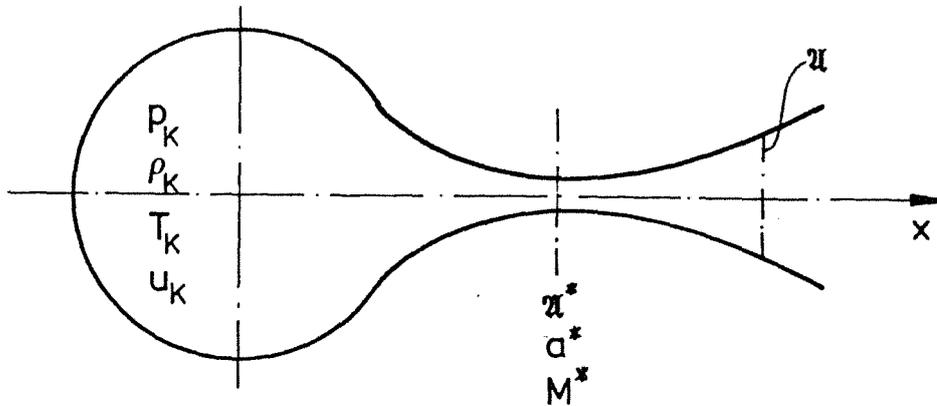


Abb. 2.2: Düsenströmung

Strömt ein Gas aus einem Behälter mit den Ruhemesswerten ($p_K, \rho_K, T_K, u=0$) und danach durch eine Düse, so ergeben sich für eine isentrope Zustandsänderung in der Düse folgende Beziehungen der Strömungsparameter in Bezug zu den Kesselgrößen:

$$\frac{p}{p_K} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-(\gamma/(\gamma-1))} \quad (2.18)$$

$$\frac{\rho}{\rho_K} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-(1/(\gamma-1))} \quad (2.19)$$

$$\frac{T}{T_K} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (2.20)$$

Dabei ändert sich die Machzahl M in einer Düse in Abhängigkeit des Düsenquerschnitts \mathfrak{A} nach der Beziehung

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma-1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} \quad (2.21)$$

wobei hier die Querschnittsfläche \mathfrak{A} auf die kritische Querschnittsfläche \mathfrak{A}^* bezogen ist. An der kritischen Querschnittsfläche \mathfrak{A}^* soll dabei $M=1$ vorherrschen. Bezogen auf die kritische Schallgeschwindigkeit a^* ergibt sich mit der Lavalzahl

$$La = M^* = u/a^* \quad (2.22)$$

der Zusammenhang zwischen M und M^* :

$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1) M^2}{2 + (\gamma-1) M^2} \quad (2.23)$$

2.2.2. Senkrechter Verdichtungsstoß

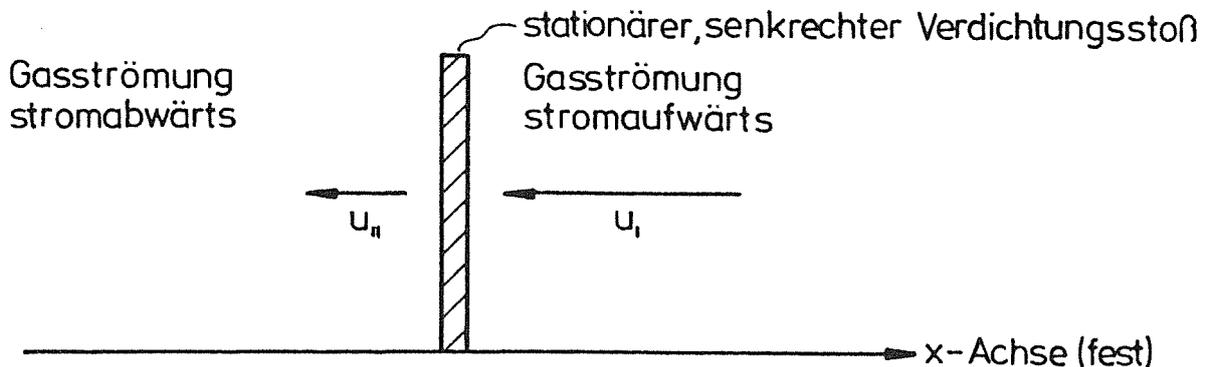


Abb. 2.3: Senkrechter Verdichtungsstoß

Für eine horizontale, adiabate und reibungslose Strömung ohne Energiezufuhr gelten über einem geraden Stoß die Erhaltungssätze in der Form

$$\rho_I u_I = \rho_{II} u_{II} \quad (2.24)$$

für die Kontinuitätsbeziehung,

$$p_I + \rho_I u_I^2 = p_{II} + \rho_{II} u_{II}^2 \quad (2.25)$$

für den Impulssatz und

$$c_p T_I + \frac{u_I^2}{2} = c_p T_{II} + \frac{u_{II}^2}{2} \quad (2.26)$$

für den Energiesatz. Dabei herrscht der Zustand (I) vor dem Stoß und der Zustand (II) nach dem Stoß vor, wie dies Abb.(2.3) zeigt. Weiterhin gilt für einen Stromfaden über dem nicht-isentropen Verdichtungsstoß die Prandtl-Beziehung:

$$u_I u_{II} = a^{*2} \quad (2.27)$$

Mit Hilfe der Laval-Beziehung (2.22) folgt aus Gl.(2.27) die kritischen Machzahlen

$$M_{II}^* = 1/M_I^* \quad (2.28)$$

Wird die Gl.(2.23) nun in der Gl.(2.27) eingesetzt, so folgt der formale Zusammenhang zwischen der Machzahl hinter dem Stoß zu der Machzahl vor dem Stoß:

$$M_{II}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_I^2}{\gamma M_I^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \quad (2.29)$$

Unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsbilanz (2.24) resultiert aus der Prandtl-Beziehung (2.27) die Geschwindigkeits- und die Dichteänderung über dem Stoß:

$$\frac{u_I}{u_{II}} = \frac{u_I^2}{u_I u_{II}} = \frac{u_I^2}{a^{*2}} = M_I^{*2} = \frac{(\gamma + 1) M_I^2}{2 + (\gamma - 1) M_I^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\rho_{II}}{\rho_I} = \frac{u_I}{u_{II}} = \frac{(\gamma + 1) M_I^2}{2 + (\gamma - 1) M_I^2} \quad (2.31)$$

Dabei ist die Dichte ρ_{II} und die Geschwindigkeit u_{II} nun abhängig von der Machzahl M_I der Anströmung vor dem Stoß. Durch Anwendung des Impulssatzes (2.25) folgt schließlich auch eine Druckbeziehung über den Stoß:

$$\frac{p_{II}}{p_I} = 1 + \frac{2 \gamma}{\gamma + 1} [M_I^2 - 1] \quad (2.32)$$

$$\frac{\Delta p}{p_I} = \frac{2 \gamma}{\gamma + 1} [M_I^2 - 1] \quad (2.33)$$

Eine Verbindung zwischen den einzelnen Zustandsgrößen u , ρ und p über dem Stoß stellt die Rankine-Hugoniot-Beziehung her, die aus den Gl.(2.30) - (2.32) hergeleitet werden kann. Sie lautet:

$$\frac{\rho_{II}}{\rho_I} = \frac{u_I}{u_{II}} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\frac{p_{II}}{p_I} \right]}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \left[\frac{p_{II}}{p_I} \right]} \quad (2.33)$$

2.2.3. Instationärer, senkrechter Verdichtungsstoß

Um die Ausbreitung eines instationären Stoßes nach der Stromfadentheorie berechnen zu können, wird das Koordinatensystem mit dem Stoß mitbewegt.

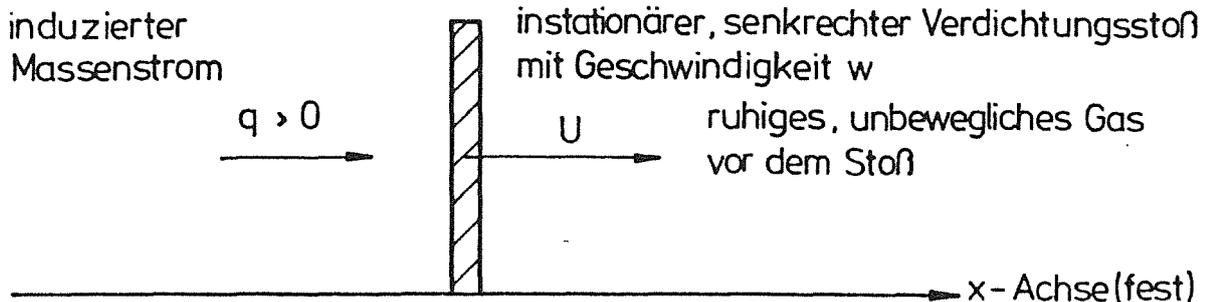


Abb. 2.4: Koordinatensystem eines instationären Verdichtungsstoßes

Der instationäre Verdichtungsstoß soll in ein ruhendes Medium laufen und in seinem Nachlauf einen Massenstrom induzieren, wie dies Abb.(2.4) verdeutlicht. Die Stoßmachzahl

$$M_s = U/a_1 \quad (2.34)$$

bezieht sich dabei auf die Stoßgeschwindigkeit U und die Machzahl des Mediums vor dem Stoß a_1 . Die Bestimmung des Druckverhältnisses über dem Stoß

$$\frac{p_{II}}{p_I} = 1 + \frac{2 \gamma}{\gamma + 1} [M_s^2 - 1] \quad (2.35)$$

entwickelt sich analog wie bei Gl.(2.33), nur daß hier statt der Machzahl M_1 jetzt die Stoß-Machzahl M_s eingesetzt wird. Die Geschwindigkeit des Massenstromes im Nachlauf des instationären Verdichtungsstoßes beträgt in Abhängigkeit der Stoßmachzahl:

$$q = \frac{2 U}{\gamma + 1} [1 - M_s^{-2}] \quad (2.36)$$

3. Herleitung des Ansatzes nach Whitham (1958)

Der Ansatz von Whitham (1958) stützt auf die Veröffentlichungen von Moeckel (1952), Chester (1955) und Chisnell (1957). Whitham (1958) geht von der Korrektheit der Ergebnisse jener Arbeiten aus und versucht mit den allgemeingültigen Erhaltungssätzen und mit einer Überführung der gegebenen Strömungszustände in Charakteristikenform einen eigenen Weg herzuleiten.

Der Ansatz von Whitham (1958) bezieht sich auf die Strömungsverhältnisse in einem Stoßwellenrohr, bei dem entlang der Ausbreitungsrichtung x ab der Stelle $x=0$ ein geänderter Querschnitt $A(x)$ vorliegt. Dabei ist es für die Betrachtungen unerheblich, wie das Profil des Stoßwellenrohres geformt ist und ob eine Verengung oder Erweiterung des Strömungsquerschnitts $A(x)$ für $x>0$ auftritt.

Breitet sich die Stoßwelle mit einer konstanten Geschwindigkeit U_1 entlang des konstanten Querschnitts A_1 aus, so herrschen hinter dem Stoß die Zustände p_1 , ρ_1 , a_1 und u_1 .

Erreicht der Stoß die Stelle $x=0$ im Stoßrohr, so breiten sich Störungen entgegen der Strömungsrichtung aus, wie dies Abb.(3.1) zeigt. Dabei ändert sich das Ausbreitungsverhalten des Stoßes. Die reflektierten Störungen breiten sich hingegen entlang der negativen Charakteristiken C_- aus, und die Entropievariationen entwickeln sich entlang der Partikelwege P . Physikalisch spielen die positiven Charakteristiken C_+ zwar eine untergeordnete Rolle, aber bei der Herleitung des Ansatzes von Whitham (1958) fließen sie trotzdem ein.

Für $x<0$ liegt für die Charakteristiken C_+ jeweils eine einfache Ausbreitungswelle vor, die gerade ist und deren Ausbreitung sich analog zu dem formalen Zusammenhang

$$2 a / (\gamma - 1) + u = 2 a_1 / (\gamma - 1) + u_1 \quad (3.1)$$

verhält.

Sollte sich eine reflektierte Stoßwelle außerhalb des Betrachtungsraumes ausbilden, so wird dies analog zum Ansatz von Whitham (1958) vernachlässigt.

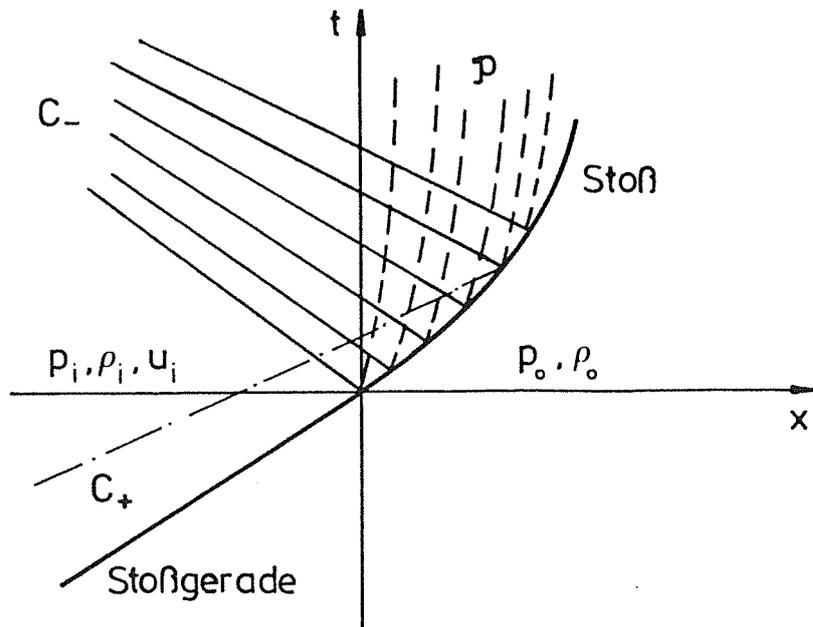


Abb. 3.1: Schema zur Darstellung der Ausbreitung einer Stoßwelle in einem Stoßwellenrohr mit partiell varlierendem Querschnitt

3.1. Aufstellen der Erhaltungssätze

Zu Beginn der Herleitung des Ansatzes von Whitam (1958) sollen die Erhaltungssätze in den jeweiligen Formen abgeleitet werden, wie sie Whitham (1958) in seiner Veröffentlichung vorstellt. Den Anfang bildet die Kontinuitätssbilanz.

Für den Massenfluß gilt die allgemeine Beziehung

$$\dot{m} = \rho (u \cos(\Psi)) d\mathcal{E} = \rho \mathbf{V}_n \cdot d\mathcal{E} = \rho \mathbf{V} \cdot d\mathcal{E} \quad (2.5)$$

für die Kontrollfläche $d\mathcal{E}$, wie sie in Abb.(2.1) vorgestellt wurde.

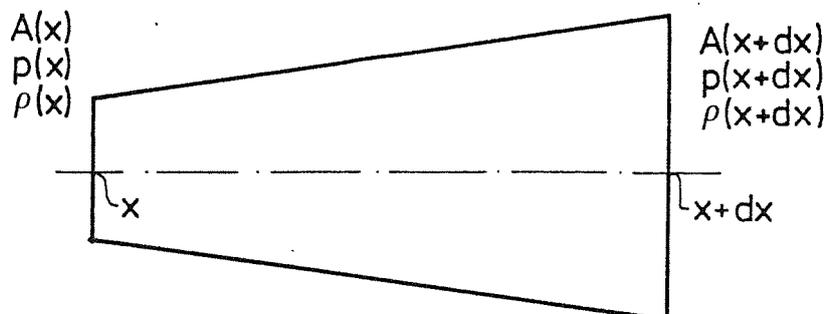


Abb. 3.2: Darstellung der Parameter in Differenzenform für einen variablen Kanalquerschnitt zur Beschreibung der Herleitung der Kontinuitätsgleichung

Führt man nun eine differentiell kleine Änderung des Querschnitts wie in Abb. (3.2) ein, so gilt für den eindimensionalen Fall folgende Vereinfachung:

$$\rho(t+dt, x+dx) u(x+dx) A(x+dx) - \rho(x, t) u(x) A(x) = 0 \quad (3.2)$$

Als Taylorreihe entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen folgt:

$$\left[\rho(x, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \dots \right] \left[u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \dots \right] \left[A(x) + \frac{dA}{dx} dx + \dots \right] - \rho(x, t) u(x, t) A(x) = 0 \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \left[u \rho(x, t) + u \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dt dx + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx^2 + \rho \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dt^2 + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \right] \left[A(x) + \frac{dA}{dx} dx + \dots \right] - \rho(x, t) u(x, t) A(x) = 0 \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow u A \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \rho u A + \rho u \frac{dA}{dx} dx + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dA}{dx} dx^2 + u A \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dA}{dx} dx^2 + A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dA}{dx} dx^3 + A \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dt dx + \frac{d\rho}{dt} \frac{du}{dx} dt dx dA + A \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dt + A \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dt^2 + A \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dt dA + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dt^2 dA + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt dA - \rho u A = 0. \quad (3.5)$$

Mit

$$u dt = \frac{\partial x}{\partial t} dt \quad (3.6)$$

bzw.

$$u dt = dx \quad (3.7)$$

und unter Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung folgt:

$$A \rho_t dx + \left[\rho u \frac{dA}{dx} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} + u A \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] dx = 0 \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow A \rho_t dx + \left[A u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left[u \frac{dA}{dx} + A \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right] dx = 0 \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow A \rho_t dx + A \left[u \rho_x + \rho \left[\frac{u}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right] dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow A \rho_t dx + A \left[u \rho_x + \rho \left[u_x + u \frac{A'}{A} \right] \right] dx = 0 \quad (3.11)$$

Letztendlich resultiert hieraus:

$$\underline{\underline{\rho_t + u \rho_x + \rho \left[u_x + u \frac{A'}{A} \right] = 0}} \quad (3.12/W.5a)$$

Ausgangspunkt für die Eulergleichung (3.12/W.5b) in der Theorie von Whitham (1958) ist der strömungsmechanische Impulssatz (Navier-Stokes-Gleichung):

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g = \mu_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.13)$$

Druck-
Schwer-
Reibungskräfte
kraft
kraft

Unter Vernachlässigung der Schwerkraft und der Wirkung der viskosen Kräfte (Reibungskräfte nur in der kleinen, wandnahen Grenzschicht) folgt für den ein-dimensionalen Fall die Euler-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0}} \quad (3.15/W.5b)$$

Zur Herleitung der idealen Gasgleichung (3.26/W.5c) in dem Ansatz von

Whithem (1958) soll die allgemeine thermodynamische Beziehung der Schallgeschwindigkeit dienen

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad \text{bzw.} \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (3.16)$$

die in Differenzenform lautet

$$dp - a^2 d\rho = 0 \quad (3.17)$$

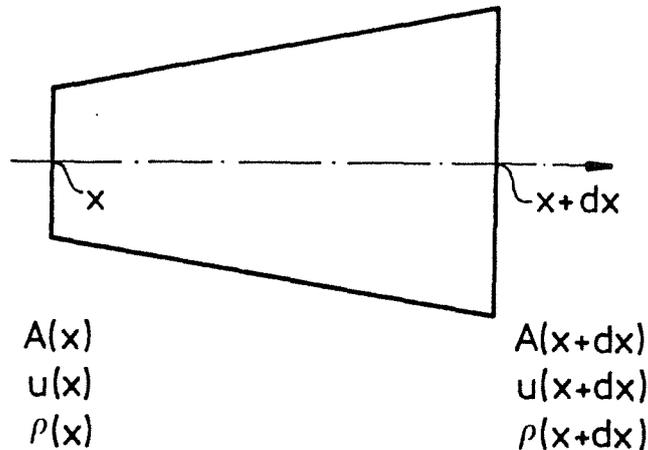


Abb. 3.3: Darstellung der Parameter in Differenzenform bei einem Kanalquerschnitt

Wird entsprechend zu Gl.(3.2) eine allgemeine Bilanz bezüglich eines querschnittsvariierenden Kanalprofils (siehe Abb. 3.3) durchgeführt, wobei die Bilanzgleichung von der Zeit t und dem Ort x abhängig ist, so folgt

$$\rho(x+dx, t+dt) - \rho(x, t) a^2 - [\rho(x, t) - \rho(x, t) a^2] = 0 \quad (3.18)$$

und als abgebrochene Taylorreihe

$$\left[\rho(x, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \dots \right] - \left[\rho(x, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \dots \right] a^2 - \rho(x, t) + \rho(x, t) a^2 = 0 \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} dt - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = 0 \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow [\rho_t + a^2 \rho_x] dt - [p_x + a^2 \rho_x] dx = 0 \quad (3.21)$$

Weiterhin folgt mit $u dt = \frac{dx}{dt} dt$:

$$[\rho_t + a^2 \rho_x] dt - [p_x + a^2 \rho_x] u dt = 0 \quad (3.22)$$

so daß schließlich die Bewegungsgleichung (3.23/W.5c) von Whitham (1958) resultiert:

$$\underline{\underline{\rho_t + u \rho_x - a^2 [\rho_t + u \rho_x] = 0}} \quad (3.23/W.5c)$$

3.2. Herleitung der Charakteristiken

Ausgangspunkt für die Bilanzgleichung (3.39/W.6a) ist die Eulergleichung

$$u_t + u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \quad (3.15/W.5b)$$

multipliziert mit der Dichte ρ folgt

$$\rho [u_t + u u_x] + p_x = 0 \quad (3.24)$$

ferner multipliziert mit der Schallgeschwindigkeit a

$$\rho a [u_t + u u_x] + a p_x = 0 \quad (3.25)$$

so daß mit einer Addition von Gl.(3.23/W.5c)

$$\rho_t + u \rho_x - a^2 [\rho_t + u \rho_x] = 0 \quad (3.23/W.5c)$$

schließlich aus Gl.(3.24) folgt:

$$\rho_t + u \rho_x - a^2 [\rho_t + u \rho_x] + \rho a [u_t + u u_x] + a p_x = 0 \quad (3.26)$$

Durch Umsortieren erhält man zuerst aus Gl.(3.26) den Zusammenhang

$$\rho_t + u \rho_x + a p_x + \rho a [u_t + u u_x] - a^2 [\rho_t + u \rho_x] = 0 \quad (3.27)$$

und mit einer Umformung aus Gl.(3.12/W.5a)

$$\rho_t + u \rho_x = - \rho \left[u_x + \frac{u A'}{A} \right] \quad (3.28)$$

folgt schließlich durch Austausch der Terme aus Gl.(3.27):

$$\rho_t + u \rho_x + a \rho_x + \rho a \left[u_t + u u_x \right] + a^2 \rho \left[u_x + \frac{u A'}{A} \right] = 0 \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \rho_t + u \rho_x + a \rho_x + \rho a u_t + \rho a u u_x + a^2 \rho u_x + \frac{\rho a^2 u A'}{A} = 0 \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \left[\rho_t + (u + a) \rho_x \right] + \rho a \left[u_t + (u + a) u_x \right] + \frac{\rho a^2 u A'}{A} = 0 \quad (3.31)$$

Wird die Gl.(3.31) durch $(u + a)$ dividiert so resultiert der positive Anteil der Whitham'schen Gl.(3.39/W.6a):

$$\left[\frac{\rho_t}{(u + a)} + \rho_x \right] + \rho a \left[\frac{u_t}{(u + a)} + u_x \right] + \frac{\rho a^2 u A'}{(u + a) A} = 0 \quad (3.32/W.6a+)$$

Der negative Anteil der Whitham'schen Beziehung (2.41/W.6a) wird analog zu Gl.(2.34/W.6a+) hergeleitet.

Dazu wird die Gl.(3.24) mit (-1) multipliziert

$$- \rho a \left[u_t + u u_x \right] - a \rho_x = 0 \quad (3.33)$$

und mit Hilfe einer Addition von Gl.(2.36) folgt schließlich

$$\rho_t + u \rho_x - a^2 \left[\rho_t + u \rho_x \right] - \rho a \left[u_t + u u_x \right] - a \rho_x = 0 \quad (3.34)$$

$$\Rightarrow \rho_t + u \rho_x - a \rho_x - \rho a \left[u_t + u u_x \right] + a^2 \rho \left[u_x + \frac{u A'}{A} \right] = 0 \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow \rho_t + u \rho_x - a \rho_x - \rho a u_t - \rho a u u_x + a^2 \rho u_x + \frac{\rho a^2 u A'}{A} = 0 \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow \left[p_t + (u - a) p_x \right] - \rho a \left[u_t + (u - a) u_x \right] + \frac{\rho a^2 u A'}{A} = 0 \quad (3.37)$$

Wird die Gl.(3.37) durch $(u - a)$ dividiert, so folgt

$$\underline{\underline{\left[\frac{p_t}{(u - a)} + p_x \right] - \rho a \left[\frac{u_t}{(u - a)} + u_x \right] + \frac{\rho a^2 u A'}{(u - a) A} = 0}} \quad (3.38/W.6a-)$$

GL.(3.32/W.6a+) und Gl.(3.38/W.6a-) ergeben zusammen die Bilanzgleichung (3.39/W.6) nach dem Ansatz von Whitham (1958):

$$\underline{\underline{\left[\frac{p_t}{(u \pm a)} + p_x \right] \pm \rho a \left[\frac{u_t}{(u \pm a)} + u_x \right] + \frac{\rho a^2 u A'}{(u \pm a) A} = 0}} \quad (3.39/W.6a)$$

Aus der Bilanzgleichung

$$p_t + u p_x - a^2 \left[p_t + u p_x \right] = 0 \quad (3.23/W.5c)$$

folgt durch Dividieren mit u schließlich die Bilanzgleichung (3.40/W.6b) nach Whitham (1958):

$$\underline{\underline{\left[\frac{p_t}{u} + p_x \right] - a^2 \left[\frac{p_t}{u} + p_x \right] = 0}} \quad (3.40/W.6b)$$

Im nächsten Schritt werden nun die Bilanzgleichungen (3.39/W.6a) und (3.40/W.6b) in Charakteristikenform überführt. Dazu dient folgender Ansatz

$$\frac{du}{dx} = u_x + \lambda_x u_t \quad (3.41)$$

$$\text{mit } \lambda_x = \frac{dt}{dx} \quad (3.42)$$

Dabei gilt für die positive Charakteristik

$$c_+ = \frac{dx}{dt} = u + a \Rightarrow \lambda_+ = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{(u + a)} \quad (3.43a+b)$$

und für die negative Charakteristik

$$c_{\pm} = \frac{dx}{dt} = u \pm a \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{(u \pm a)} \quad (3.44a+b)$$

so daß schließlich folgt:

$$\frac{du}{dx} = u_x + \frac{u_t}{(u \pm a)} \quad (3.45)$$

Weiterhin gilt auch für den Druck

$$\frac{dp}{dx} = p_x + \lambda_{\pm} p_t \quad (3.46)$$

und mit

$$\lambda_{\pm} = \frac{dt}{dx} \quad (3.47)$$

folgt

$$\frac{dp}{dx} = p_x + \frac{p_t}{(u \pm a)} \quad (3.48)$$

Werden die Gl.(3.45) und (3.48) in die Bilanzgleichung (3.39/W.6a) eingesetzt, so folgt

$$\frac{dp}{dx} \pm \rho a \frac{du}{dx} + \rho a^2 u \frac{A'}{A} \frac{dt}{dx} = 0 \quad (3.49)$$

und einer Multiplikation mit dx dann

$$dp \pm \rho a du + \frac{\rho a^2 u}{(u \pm a)} \frac{A'}{A} dt \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3.50)$$

und mit

$$A' dx = dA \quad (3.51)$$

folgen dann schließlich die Bilanzgleichungen (3.52/W.7a+7b) in Charakteristikenform von Whitham (1958):

$$\underline{\underline{dp \pm \rho a du + \frac{\rho a^2 u}{(u \pm a)} \frac{dA}{A} = 0}} \quad (3.52/W.7a+b)$$

Zur Herleitung der Charakteristikenform der idealen Gasgleichung wird analog zu den Gleichungen (3.45a+b) und (3.46a+b) der Ansatz

$$\frac{dp}{dx} = p_x + \lambda p_t \quad (3.53)$$

und

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_x + \lambda \rho_t \quad (3.54)$$

mit

$$\lambda = \frac{dt}{dx} \quad (3.55)$$

und

$$P = \frac{dx}{dt} = u \quad (3.56/W.7c)$$

eingeführt, so daß

$$\lambda = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} \quad (3.57)$$

und

$$\frac{dp}{dx} = p_x + \frac{p_t}{u} \quad (3.58)$$

und weiterhin

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_x + \frac{\rho_t}{u} \quad (3.59)$$

ergibt. Werden die Gleichungen (3.58) und (3.59) in die Bilanzgleichung (3.40/W.6b) eingesetzt, so resultiert schließlich

$$\frac{dp}{dx} - a^2 \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (3.60)$$

und

$$\underline{\underline{dp - a^2 d\rho = 0}} \quad (3.61/W.7c)$$

3.3 Ableitung der Differentialgleichung nach dA und dM bzw. dz

Zur Herleitung der Differentialgleichung von Whitham (1958) sollen zuerst die gasdynamischen Beziehungen über dem Stoß hergeleitet werden.

Ausgangspunkt für das Druckverhältnis über dem Stoß ist die allgemein gültige Beziehung Gl.(2.32), die in der Nomenklatur nach Whitham (1958) lautet:

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{2 \gamma}{(\gamma + 1)} [M^2 - 1] \quad (3.62)$$

Durch Umformen aus Gl.(3.62)

$$p = p_0 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right] \quad (3.63)$$

$$\Rightarrow p = p_0 \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 + \frac{\gamma + 1 - 2\gamma}{\gamma + 1} \right] \quad (3.64)$$

Mit dem idealen Gasgesetz für den Strömungszustand vor dem Stoß

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R T_0 \quad (3.65)$$

und der Schallgeschwindigkeit a_0 für den Strömungszustand vor dem Stoß

$$a_0^2 = \gamma R T_0 \quad (3.66)$$

folgt direkt

$$p = \frac{\rho_0 a_0^2}{\gamma} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \quad (3.67)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p = \rho_0 a_0^2 \left[\frac{2}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma (\gamma + 1)} \right]}} \quad (3.68/W.8a)$$

Aus einer Umformung des Dichteverhältnises, Gl.(2.31), über dem Stoß

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - \frac{1}{M^2} \right] \quad (3.69)$$

resultiert durch Umformen

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{2}{(\gamma + 1)} + \frac{2}{(\gamma + 1) M^2} \quad (3.70)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1) M^2}{(\gamma + 1) M^2 - 2 M^2 + 2} \quad (3.71)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2} \quad (3.72)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho = \rho_0 \frac{(\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2}}} \quad (3.73/W8b)$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Beziehung (2.30) durch Transformation des Koordinatensystems nach Kapitel (2.2.3.) der Zusammenhang:

$$\frac{U - u}{U} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - \frac{1}{M^2} \right] \quad (3.74)$$

$$\Rightarrow u = U - U \left[1 - \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - \frac{1}{M^2} \right] \right] \quad (3.75)$$

$$\Rightarrow u = \frac{2 U}{(\gamma + 1)} \left[1 - \frac{1}{M^2} \right] \quad (3.76)$$

$$\Rightarrow u = \frac{2 U}{(\gamma + 1) M} \left[M - \frac{1}{M} \right] \quad (3.77)$$

und mit Hilfe der Stoßmachzahl

$$U = a_0 M \quad (3.78)$$

resultiert die Beziehung

$$\underline{\underline{u = a_0 \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[M - \frac{1}{M} \right]}} \quad (3.79)$$

Zur Ableitung der Differentialgleichung nach dA und dM soll zuerst die Differenz dp

$$\underline{\underline{dp = \rho_0 a_0^2 \frac{4 M dM}{\gamma + 1}}} \quad (3.80)$$

und du

$$du = \frac{2 a_0}{\gamma + 1} \left[dM + \frac{dM}{M^2} \right] \quad (3.81)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{du = \frac{2 a_0 dM}{\gamma + 1} \left[1 + \frac{1}{M^2} \right]}} \quad (3.82)$$

und weiterhin die Terme (u + a) aus Gl.(3.79)

$$u + a = a + a_0 \frac{2}{\gamma + 1} \left[M - \frac{1}{M} \right] \quad (3.83)$$

$$\Rightarrow u + a = a + \frac{2 a_0 (M^2 - 1)}{(\gamma + 1) M} \quad (3.84)$$

$$\Rightarrow u + a = \frac{a M (\gamma + 1) + 2 a_0 (M^2 - 1)}{(\gamma + 1) M} \quad (3.85)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u + a = \frac{a M (\gamma + 1) + 2 a_0 (M + 1) (M - 1)}{(\gamma + 1) M}}} \quad (3.86)$$

und (a u)

$$a u = a a_0 \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[M - \frac{1}{M} \right] \quad (3.87)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a u = \frac{2 a a_0 (M^2 - 1)}{(\gamma + 1) M}}} \quad (3.88)$$

hergeleitet werden. Erweitert man die Differentialgleichung

$$dp + \rho a du + \frac{\rho a^2 u}{u + a} \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.50)$$

mit dem Term (u + a), so folgt:

$$\frac{u + a}{\rho a^2 u} dp + \frac{(u + a) \rho a}{\rho a^2 u} du + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.89)$$

$$\Rightarrow \frac{u+a}{\rho a^2 u} dp + \frac{(u+a)}{a u} du + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.90)$$

$$\Rightarrow \frac{(u+a) \left[(\gamma - 1) M^2 + 2 \right]}{2 a^2 a_0 \rho_0 (M^2 - 1) M} \rho_0 a_0^2 \frac{4 M dM}{(\gamma + 1)} + \frac{(u+a) (\gamma + 1) M}{2 a a_0 (M^2 - 1)} \cdot \frac{2 a_0 dM}{(\gamma + 1)} \left[1 + \frac{1}{M^2} \right] + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.91)$$

$$\Rightarrow \frac{2 M dM}{(M^2 - 1)} \left[(u+a) \left[\frac{((\gamma - 1) M^2 + 2) a_0}{a^2 M (\gamma + 1)} + \frac{(1 + (1/M^2))}{2 a} \right] \right] + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.92)$$

folgt schließlich die Differentialgleichung nach dA und dM

$$\frac{2 M}{(M^2 - 1)} \frac{dM}{K(M)} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.93)$$

mit einer Größe $K^{-1}(M)$

$$\underline{\underline{K^{-1}(M) = \left[(u+a) \left[\frac{((\gamma - 1) M^2 + 2) a_0}{a^2 M (\gamma + 1)} + \frac{(1 + (1/M^2))}{2 a} \right] \right]}} \quad (3.94)$$

Durch Umformung der Berechnungsvariablen der Gl.(3.94) folgt:

$$K^{-1}(M) = \frac{(u+a)}{a^2 M (\gamma + 1)} \left[a_0 ((\gamma - 1) M^2 + 2) + \frac{a}{2 M} (M^2 + 1) (\gamma + 1) \right] \quad (3.95)$$

Für weitere Umformungen müssen zuerst folgende Herleitungen erfolgen, wobei mit Geschwindigkeit, Gl.(3.79)

$$u = \frac{2 a_0}{(\gamma + 1)} \frac{M^2 - 1}{M} \quad (3.96)$$

für die Addition $(u + a)$ resultiert

$$u + a = \frac{2 a_0 (M^2 - 1)}{(\gamma + 1) M} + a \quad (3.97)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u + a = \frac{2 a_0 (M^2 + 1) + a M (\gamma + 1)}{(\gamma + 1) M}}} \quad (3.98)$$

Es soll weiterhin der Term

$$\mu^2 = \left[\frac{U - u}{a} \right]^2 \quad (3.100)$$

mit

$$U = a_0 M \quad (3.78)$$

und

$$u = \frac{2 a_0}{(\gamma + 1)} \frac{M^2 - 1}{M} \quad (3.79)$$

gelten, so daß folgt:

$$\mu^2 = \left[\frac{a_0 M - u}{a} \right]^2 \quad (3.100)$$

$$\Rightarrow \mu^2 = \left[\frac{a_0 M - \frac{2 a_0}{(\gamma - 1)} \frac{M^2 - 1}{M}}{a} \right]^2 \quad (3.101)$$

$$\Rightarrow \mu^2 = \frac{a_0^2}{a^2} \left[M - \frac{2 (M^2 - 1)}{(\gamma + 1) M} \right]^2 \quad (3.102)$$

$$\Rightarrow \mu^2 = \frac{a_0^2}{a^2} \frac{1}{(\gamma + 1)} \left[M^2 (\gamma + 1) - 2 (M^2 - 1) \right]^2 \quad (3.103)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu^2 = \frac{a_0^2}{a^2} \frac{1}{(\gamma + 1)^2 M^2} \left[(\gamma - 1) M^2 + 2 \right]^2}} \quad (3.104)$$

oder

$$\underline{\underline{\mu = \frac{a_0}{a} \frac{1}{(\gamma + 1) M} \left[(\gamma - 1) M^2 + 2 \right]}} \quad (3.105)$$

bzw.

$$\frac{a_0}{a} \frac{1}{(\gamma + 1) M} = \frac{\mu}{M^2 (\gamma - 1) + 2} \quad (3.106)$$

Weiterhin kann für schwache Stöße eine annähernd konstante Entropie angenommen werden, so daß mit der Schallgeschwindigkeit

$$a^2 = \gamma R T \quad (3.107)$$

und dem idealen Gasgesetz

$$\frac{p}{\rho} = R T \quad (3.108)$$

zuerst die Beziehung

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (3.109)$$

folgt, und durch Einsetzen der Gl.(3.68/W.8a) und (3.73/W.8b) sich schließlich ergibt:

$$a^2 = \gamma \frac{\rho_0 a_0^2 \left[\frac{2}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma (\gamma + 1)} \right]}{\rho_0 \frac{(\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2}} \quad (3.110)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a_0^2} = \gamma \frac{\frac{2}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma (\gamma + 1)}}{\frac{(\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2}} \quad (3.111)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a_0^2} = \gamma \frac{2 M^2 \gamma - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) \gamma} \frac{(\gamma - 1) M^2 + 2}{(\gamma + 1) M^2} \quad (3.112)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{[2 M^2 \gamma - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M^2} \quad (3.113)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{a_0^2 [2 M^2 \gamma - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M^2 + 2]}{a^2 (\gamma + 1)^2 M^2} \quad (3.114)$$

Durch Erweiterung

$$[(\gamma - 1) M^2 + 2] = \frac{a_0^2 [2 M^2 \gamma - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M^2 + 2]^2}{a^2 (\gamma + 1)^2 M^2} \quad (3.115)$$

ergibt sich durch Umformung schließlich der Ausdruck:

$$\frac{[(\gamma - 1) M^2 + 2]}{[2 M^2 \gamma - (\gamma - 1)]} = \frac{a_0^2 [(\gamma - 1) M^2 + 2]^2}{a^2 (\gamma + 1)^2 M^2} = \mu^2 \quad (3.116)$$

Nach diesen Herleitungen resultiert für den Term $K^{-1}(M)$ aus Gl.(3.95) unter der Berücksichtigung der Gl.(3.86):

$$K^{-1}(M) = \frac{2 a_0 (M^2 - 1) + a M (\gamma + 1)}{(\gamma + 1) M} \frac{a_0 [(\gamma - 1) M^2 + 2] + (a/(2M)) (M^2 + 1) (\gamma + 1)}{a^2 M (\gamma + 1)} \quad (3.117)$$

$$= \frac{2 a_0 (M^2 - 1) + a M (\gamma + 1)}{a (\gamma + 1) M} \frac{a_0 [(\gamma - 1) M^2 + 2] + (a/(2M)) (M^2 + 1) (\gamma + 1)}{a M (\gamma + 1)} \quad (3.118)$$

mit Gl. (3.105)

$$= \frac{2 a_0 (M^2 - 1) + a M (\gamma + 1)}{a (\gamma + 1) M} \left[\mu + \frac{M^2 + 1}{M^2} \right] \quad (3.119)$$

$$= \left[\frac{2 a_0 (M^2 - 1)}{a (\gamma + 1)} \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.120)$$

mit Gl.(3.106)

$$= \left[\frac{2 \mu (M^2 - 1)}{M^2 (\gamma - 1) + 2} + 1 \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.121)$$

mit Gl.(3.116)

$$\mu^2 = \frac{(\gamma - 1) M^2 + 2}{2 \gamma M^2 - (\gamma - 1)} \quad (3.116)$$

$$\Rightarrow (\gamma - 1) M^2 + 2 = \mu^2 (2 \gamma M^2 - (\gamma - 1)) \quad (3.122)$$

schließlich für

$K^{-1}(M)$

$$= \left[\frac{2 \mu (M^2 - 1)}{\mu^2 (2 \gamma M^2 - (\gamma - 1))} + 1 \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.123)$$

Erweitert mit $(\gamma + 1)$

$$= \left[1 + \frac{2 (\gamma + 1)}{(\gamma + 1)} \frac{(M^2 - 1)}{\mu (2 \gamma M^2 - (\gamma - 1))} \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.124)$$

$$= \left[1 + \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{\gamma M^2 - \gamma + M^2 - 1}{\mu (2 \gamma M^2 - (\gamma - 1))} \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.125)$$

und nach nochmaliger Erweiterung

$$= \left[1 + \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{2 \gamma M^2 - \gamma M^2 - \gamma + 1 - 2 + M^2}{\mu (2 \gamma M^2 - (\gamma - 1))} \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.126)$$

$$= \left[1 + \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{[2 \gamma M^2 - (\gamma - 1)] - [(\gamma - 1) M^2 + 2]}{\mu (2 \gamma M^2 - (\gamma - 1))} \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.127)$$

$$= \left[1 + \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{1 - \frac{(\gamma - 1) M^2 + 2}{[2 \gamma M^2 - (\gamma - 1)]}}{\mu} \right] \frac{1}{2} (2 \mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.128)$$

$$= \left[1 + \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right] \frac{1}{2} (2\mu + 1 + M^{-2}) \quad (3.129)$$

resultiert letztendlich der Whitham'sche Term Gl.(3.130/W.9a+b)

$$K(M) = 2 \left[\left(1 + \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) (2\mu + 1 + M^{-2}) \right]^{-1} \quad (3.130/W.9a)$$

mit
$$\mu^2 = \left[\frac{U - u}{a} \right]^2 = \frac{(\gamma - 1) M^2 + 2}{2 \gamma M^2 - (\gamma - 1)} \quad (3.131/W.9b)$$

4. Erarbeitung der Zwischenschritte sowie der mathematischen und physikalischen Voraussetzungen der Ableitungen von Lighthill (1948) und Chester (1953)

Vor der Überprüfung der Ableitung von Chester (1954) in Kapitel 5 sollen zuerst hier in Kapitel 4 die mathematischen und physikalischen Voraussetzungen der Ableitungen von Lighthill (1946) und Chester (1953) geschaffen werden.

4.1. Einseitige Begrenzung eines instationären, senkrechten Verdichtungsstoßes durch eine abknickende Wand (Lighthill, 1948)

Lighthill (1946) betrachtet in seiner Arbeit die Ausbreitung einer ebenen Stoßfront in ruhender Luft, wobei der Stoß einseitig von einer ebenen Wand begrenzt wird. Diese ebene Wand besitzt an einer bestimmten Stelle eine konvexe Kante, wie dies Abb.(4.1) zeigt.

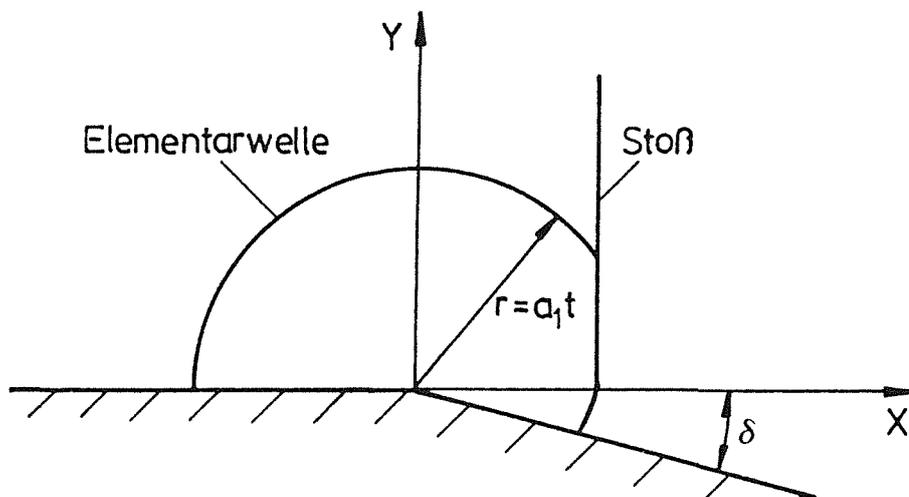


Abb. 4.1: Darstellung der Randbedingungen der Strömungsverhältnisse bezüglich des theoretischen Ansatzes von Lighthill (1948)

Der Wert des Winkels dieser konvexen Abknickung beträgt $\pi - \delta$. Beim Erreichen der Kante wird der Stoß gebrochen, so daß er sich ab jener Stelle nicht mehr eben ausbreitet. In der Nähe der Wand ist der Stoß dann schwächer als im übrigen Bereich.

Bei der mathematischen Herleitung der physikalischen Verhältnisse des Stoßes vernachlässigt Lighthill (1948) die viskosen Kräfte und Wärmeleitung, da bei der Ausbreitung des Stoßes aufgrund seiner hohen Geschwindigkeit zu wenig Zeit bleibt, in der sich diese genannten Effekte ausbilden könnten.

Zur Beschreibung der Strömungsverhältnisse stützt sich Lighthill (1948) auf die konstanten Größen: mittlere Stoßgeschwindigkeit U , Druck p_0 und Dichte ρ_0 der ruhenden Luft vor dem Stoß und den Winkel δ . Dabei sind die genannten Größen abhängig von den Raumkoordinaten X und Y und der Zeit t , die hier in der Kombination von X/t und Y/t auftreten sollen. Weiterhin sollen nur kleine Variationen des Winkels δ und der Geschwindigkeit und des Druckes hinter dem Stoß nach der Abknickung auftreten. Lighthill (1948) weist weiterhin darauf hin, daß auch negative Winkel δ mit seiner Theorie betrachtet werden können. Damit können auch die Strömungsverhältnisse eines Stoßes nach der Brechung an einer konkaven Abknickungen der ebenen Wand mit dieser Theorie bestimmt werden.

4.1.1. Mathematischer Ansatz

Zur Darstellung des mathematischen Ansatzes führt Lighthill (1948) zuerst die strömungsmechanischen Größen hinter der Stoßfront ein, bevor diese die Abknickung erreicht. Es handelt sich dabei um die Geschwindigkeit q_1 , den Druck p_1 und um die Dichte ρ_1 . Danach werden die Bilanzgleichungen zur Erhaltung der Masse, der Energie und des Impulses über den ungebeugten Stoß hergeleitet.

Dazu soll zuerst der Massenerhaltungssatz hergeleitet werden. Für eine konstante Fläche

$$A = A_0 = A_1$$

erhält man aus der Kontinuitätsgleichung mit dem relativen Koordinatensystem eines instationären, senkrechten Verdichtungsstoßes

$$\rho_0 U A_0 = \rho_1 (U - q_1) A_1 \quad (4.1)$$

aufgrund der Gleichheit der Flächen sofort den Zusammenhang

$$\underline{\underline{\rho_1 (U - q_1) = \rho_0 U}} \quad (4.2/L.1a)$$

Wird analog zu dem Koordinatensystem in Kapitel (2.2.3.) die Impulsbilanz formuliert, so erhält man mit

$$\rho_0 A_0 + \rho_0 U^2 A_0 = \rho_1 A_1 + \rho_1 (U - q_1)^2 A_1 \quad (4.3)$$

unter der Berücksichtigung von $A=A_0=A_1$, nach algebraischer Umformung schließlich den Zusammenhang

$$\underline{\rho_0 U q_1 = p_1 - p_0} \quad (4.4/L.1b)$$

Für die Energiebilanz erhält man mit

$$h_0 + \frac{U^2}{2} = h_1 + \frac{(U - q_1)^2}{2} \quad (4.5)$$

und der Definition der Entropie

$$h_0 = c_p T_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_0 \quad (4.6a)$$

$$h_1 = c_p T_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_1 \quad (4.6b)$$

aus der Gl.(4.5) entweder die Beziehung

$$c_p T_0 + \frac{U^2}{2} = c_p T_1 + \frac{(U - q_1)^2}{2} \quad (4.7)$$

oder den Zusammenhang

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_0 + \frac{U^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_1 + \frac{(U - q_1)^2}{2} \quad (4.8)$$

Mit Hilfe des idealen Gasgesetzes folgt für den Strömungszustand vor dem Stoß die Beziehung

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R T_0 \quad (4.9a)$$

und nach dem Stoß die Beziehung

$$\frac{p_1}{\rho_1} = R T_1 \quad (4.9b)$$

die zusammen mit Gl.(4.8) den Zusammenhang

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{U^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(U - q_1)^2}{2} \quad (4.9)$$

ergeben. Für ein adiabatisch perfektes Gas wie Luft gilt für den Isentropenexponenten

$$\gamma = 1,4 \quad (4.10)$$

bzw. auch

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{7}{2} \quad (4.11a)$$

oder

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} \quad (4.11b)$$

Mit Gl.(4.10) und Gl.(4.11a) folgt aus Gl.(4.9) der Zusammenhang

$$\frac{7}{2} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{U^2}{2} = \frac{7}{2} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(U - q_1)^2}{2} \quad (4.12)$$

und durch algebraische Umformung schließlich:

$$\frac{U^2}{2} - \frac{U^2 - 2 U q_1 + q_1^2}{2} = \frac{7}{2} \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{7}{2} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow U q_1 - \frac{q_1^2}{2} = \frac{7}{2} \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{7}{2} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U q_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{2} + \frac{7}{2} \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{7}{2} \frac{p_0}{\rho_0}}} \quad (4.15)$$

Durch Einsetzen der Gl.(4.2/L.1a) und Gl.(4.4/L.1b) ließ sich keine Übereinstimmung mit Lighthill (1948) und seiner Beziehung

$$\underline{\underline{\rho_0 U \left[\frac{1}{2} \frac{q_1^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{5}{2} \frac{p_0}{\rho_0} \right] = p_1 q_1}} \quad (4.16/L.1c)$$

erzielen. Die Gl.(4.16/L.1c) geht im weiteren Verlauf der Herleitung des Ansatzes von Lighthill (1948) allerdings nicht mehr weiter ein.

Trotzdem sollte noch einmal hervorgehoben werden, daß hier eine Unstimmigkeit in der Arbeit von Lighthill (1948) auftritt.

Als nächstes sollen nun die Beziehungen der Nachlaufgeschwindigkeit q_1 , des Druckes p_1 , und der Dichte ρ_1 in Abhängigkeit der Stoßgeschwindigkeit U und der Schallgeschwindigkeit vor dem Stoß a_0 hergeleitet werden. Mit der Beziehung

$$q = \frac{2 U}{\gamma + 1} \left[1 - M_0^{-2} \right] \quad (2.36)$$

folgt mit Hilfe der Machzahl der Zusammenhang für die Nachlaufgeschwindigkeit von dem Brechen an der Kante

$$q_1 = \frac{2 U}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{U^2} \right] \quad (4.17)$$

Mit Gl.(4.10) erhält man zuerst

$$q_1 = \frac{2}{2,4} U \left[1 - \frac{a_0^2}{U^2} \right] \quad (4.18)$$

und dann schließlich die Beziehung für die Nachlaufgeschwindigkeit des Stoßes

$$\underline{\underline{q_1 = \frac{5}{6} U \left[1 - \frac{a_0^2}{U^2} \right]}} \quad (4.19/L.2a)$$

Formt man die Gleichung

$$\rho_0 U q_1 = p_1 - p_0 \quad (4.4/L.1b)$$

um, so erhält man zuerst

$$p_1 = \rho_0 U q_1 + p_0 \quad (4.20)$$

und mit Gl.(4.19/L.2a) folgt dann die Beziehung

$$p_1 = \frac{5}{6} \rho_0 U^2 \left[1 - \frac{a_0^2}{U^2} \right] + p_0 \quad (4.21)$$

bzw.

$$p_1 = \frac{5}{6} \rho_0 [U^2 - a_0^2] + p_0 \quad (4.22)$$

Unter Zuhilfenahme der Schallgeschwindigkeit und des idealen Gasgesetzes ergibt sich für Luft die Beziehung

$$a_0^2 = \frac{7}{5} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (4.23)$$

bzw. nach einer Umformung der Zusammenhang

$$p_0 = \frac{5}{7} a_0^2 \rho_0 \quad (4.24)$$

der in die Gl.(4.22) eingesetzt wird, so daß man die Beziehung

$$p_1 = \frac{5}{6} \rho_0 U^2 - \frac{5}{6} \rho_0 a_0^2 + \frac{5}{7} a_0^2 \rho_0 \quad (4.25)$$

und schließlich die Beziehung für den Druck hinter dem Stoß

$$\underline{\underline{p_1 = \frac{5}{6} \rho_0 \left[U^2 - \frac{1}{7} a_0^2 \right]}} \quad (4.26/L.2b)$$

erhält.

Mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$\rho_1 [U - q_1] = \rho_0 U \quad (4.2/L.1a)$$

bzw. deren algebraische Umformung

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{U}{U - q_1} \quad (4.27)$$

ergibt sich mit Gl.(4.19/L.2a) der Zusammenhang

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{U}{U - \frac{5}{6} U \left[1 - \frac{a_0^2}{U^2} \right]} \quad (4.28)$$

aus dem durch einfache algebraische Umformungen schließlich für die Dichte hinter dem Verdichtungsstoß folgt:

$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{1}{1 - \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \frac{a_0^2}{U^2}} \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{a_0^2}{U^2}} \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho_1 = 6 \rho_0 \frac{1}{1 + 5 \frac{a_0^2}{U^2}}}} \quad (4.31/L.2c)$$

Mit der Schallgeschwindigkeitsbeziehung der Gl.(4.23) und der Machzahl $M_1 = q_1/a_1$, resultiert für die Machzahl der einheitlichen Strömung hinter dem Stoß zuerst die Beziehung

$$M_1 = q_1 \left[\frac{7 \rho_1}{5 \rho_1} \right]^{-1/2} \quad (4.32)$$

bzw. deren algebraische Umformung

$$M_1 = \frac{q_1}{\left[\frac{7 \rho_1}{5 \rho_1} \right]^{1/2}} \quad (4.33)$$

Durch Einsetzen der Gl.(4.31/L.2c) und mit dem Quotienten U/a_0 erhält man einen Zusammenhang zwischen der Machzahl der Strömung vor dem Stoß und der Machzahl der Strömung nach dem Stoß:

$$M_1 = \frac{5/6 U [1 - M^2]}{\left[\frac{7}{5} \frac{5}{6} \rho_0 [U^2 - (1/7) a_0^2] [1 + (5 a_0^2)/U^2] \right]} \quad (4.34)$$

Durch einfache algebraische Umformung folgt aus Gl.(4.34):

$$M_1 = \frac{5 U [1 - M^{-2}]}{\left[7 \left(U^2 - \frac{1}{7} a_0^2\right) (1 + 5 M^{-2})\right]^{1/2}} \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{5 (M^2 - 1)}{\underline{\underline{\left[(7 M^2 - 1) (M^2 + 5)\right]^{1/2}}}} \quad (4.36/L.3)$$

Für $M > 2,068$ herrscht im Nachlaufgebiet des Stoßes vor dem Erreichen der Abknickkante Überschall ($M_1 > 1$) und für $M < 2,068$ liegt dort Unterschall ($M_1 < 1$) vor. Lighthill nennt diese Strömungszustände im weiteren Verlauf seiner Theorie von nun an immer den "supersonic case" und den "subsonic case".

Als nächstes sollen nun die formalen Grundgleichungen für die strömungsmechanischen Größen nach der Beugung des Stoßes aufgelistet werden. Die Nomenklatur der strömungsmechanischen Größen für das Gebiet hinter dem Stoß nach seiner Beugung an der Kante lauten für die Nachlaufgeschwindigkeit, den Druck, die Dichte und die Entropie dann q_2 , p_2 , ρ_2 und s_2 . Der Ursprung des Koordinatensystems (X,Y) wird in die Ecke der Kante gelegt, wobei die X-Achse entlang des ursprünglichen Wandverlaufs (1) verläuft.

Ausgangspunkt für die formalen Zusammenhänge der strömungsmechanischen Größen sind die bekannten Erhaltungssätze in substantieller Form. Es ist dies einerseits der Massenerhaltungssatz

$$\underline{\underline{\frac{D\rho_2}{Dt} + \rho_2 \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = 0}} \quad (4.37/L.4a)$$

weiterhin der Impulssatz

$$\underline{\underline{\frac{D\mathbf{q}_2}{Dt} + \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 = 0}} \quad (4.38/L.4b)$$

und sofern kein Wärmeaustausch zwischen den Fluidelementen aufgrund von Wärmeleitung oder Wärmestrahlung auftritt gilt für die Entropie:

$$\underline{\underline{\frac{Ds_2}{Dt} = 0}} \quad (4.39)$$

Unter der Annahme, daß \mathbf{q}_2 , p_2 und ρ_2 nur geringfügig von den Werten $(q_1, 0)$, ρ_1 und ρ , variieren, können die Bewegungsgleichungen in folgender Form approximiert werden. Dann gilt für den Massenerhaltungssatz der Zusammenhang

$$\underline{\underline{\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + q_1 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = 0}} \quad (4.40/L.5a)$$

für den Impulssatz

$$\underline{\underline{\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial t} + q_1 \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1} \nabla p_2 = 0}} \quad (4.41/L.5b)$$

und für die Entropiebilanz

$$\underline{\underline{\frac{\partial s_2}{\partial t} + q_1 \frac{\partial s_2}{\partial X} = 0}} \quad (4.42/L.5c)$$

Mit Hilfe der Definition der Schallgeschwindigkeit

$$\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial p_1} \right] = \frac{1}{a_1^2} \quad (4.43)$$

lassen sich nun die Dichte- und Entropieänderungen durch die Druckvariationen nach folgendem Schema ersetzen:

$$\underline{\underline{\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial p_1} \right] \left[\frac{\partial p_2}{\partial t} + q_1 \frac{\partial p_2}{\partial X} \right] = \frac{1}{a_1^2} \left[\frac{\partial p_2}{\partial t} + q_1 \frac{\partial p_2}{\partial X} \right]}} \quad (4.44/L.6)$$

Mit den Transformationsgrößen

$$\underline{\underline{\frac{X - q_1 t}{a_1 t} = x}} \quad (4.45/L.7a)$$

$$\underline{\underline{\frac{Y}{a_1 t} = y}} \quad (4.46/L.7b)$$

$$\frac{q_2}{q_1} = [1 + u, v] \quad (4.47/L.7c)$$

und

$$\frac{p_2 - p_1}{a_1 q_1 \rho_1} = p \quad (4.48/L.7d)$$

und der Tatsache, daß u, v und w nur von X und Y abhängen folgt aus den Bilanzgleichngen (4.40/L.5a), (4.41/L.5b) und (4.42/L.5c) die Zusammenhänge:

$$x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.49/L.8a)$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.50/L.8b)$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.51/L.8c)$$

Lighthill (1948) weist darauf hin, daß der Ursprung der Koordinatensystems auf einer Linie entlang des ursprünglichen, nicht abgeknickten Wand liegt und derjenige Teil des Stoßes, der nach der Beugung noch immer gerade ist, sich entlang einer Linie

$$x = \frac{U - q_1}{a_1} = M_1 \left[\frac{U}{q_1} - 1 \right] = \left[\frac{M^2 + 5}{7M^2 - 1} \right]^{1/2} = k < 1 \quad (4.52/L.9)$$

befindet. Die Strömungsverhältnisse auf einem Punkt unmittelbar hinter dem Stoß hängen nach Lighthill (1948) von der Normalkomponente der Stoßgeschwindigkeit U ab, gegeben durch die rechten Seiten der Gl.(4.19/L.2a), (4.26/L.2b) und (4.31/L.2c), sofern die Geschwindigkeit U durch die Normalkomponente ersetzt wird. Zur Verdeutlichung der verschiedenen Größen wird auf die Abb(4.2) verwiesen. Hier wird die Stoßnormale \mathbf{h} sowohl für Unterschallströmungen als auch bei Überschallströmungen sichtbar. Weiterhin ist der Vektor \mathbf{th} sichtbar, der orthogonal zu \mathbf{h} steht und entlang der Linie Beugungsecke-Tan-

gente des Stoßes verläuft. Für die Randbedingung soll damit nach Lighthill (1948) gelten:

$$\underline{\underline{q_2 = \frac{5}{6} h \left[1 - \frac{a_0^2}{h^2} \right]}} \quad (4.53/L.10a)$$

$$\underline{\underline{p_2 = \frac{5}{6} \rho_0 \left[h^2 - \frac{1}{7} a_0^2 \right]}} \quad (4.54/L.10b)$$

Durch Einführung eines neuen Koordinatensystems $x=k+f(y)$, wobei $f(y)$ eine Funktion mit kleinen Werten analog zum Abknickwinkel δ ist, folgt für einen nahezu geraden Stoß direkt:

$$\underline{\underline{th \simeq \left[X - Y \frac{dX}{dY}, -X \frac{dX}{dY} \right]}} \quad (4.55/L.11)$$

Mit $X=a_1 t x + q_1 t = U t + a_1 t f(y)$ und $Y=a_1 t y$ ergibt sich durch Einsetzen in Gl.(4.55/L.11) sofort der Zusammenhang:

$$\underline{\underline{h = \left[U + a_1 f(y) - a_1 y f'(y), -U f'(y) \right]}} \quad (4.56/L.12)$$

Ziel von Lighthill (1948) ist es nun nach Angabe der Randbedingungen für die Geschwindigkeiten

$$u = a_1 \left[f(y) - y f'(y) \right] \frac{d}{dU} \log \left[\frac{5}{6} U \left[1 - \frac{a_0^2}{U^2} \right] \right] \quad (4.57)$$

$$\underline{\underline{u = \frac{a_1}{U} \left[f(y) - y f'(y) \right] \frac{M^2 + 1}{M^2 - 1}}} \quad (4.58/L.13a)$$

und

$$\underline{\underline{v = -f'(y)}} \quad (4.59/L.13b)$$

und den Druck

$$p = \frac{\rho_1}{a_1 q_1 \rho_1} a_1 [f(y) - y f'(y)] \frac{d}{dU} \log \left[U^2 - \frac{1}{7} a_0^2 \right] \quad (4.60)$$

$$p = \frac{\rho_1}{q_1 \rho_1} [f(y) - y f'(y)] \frac{2 U}{U^2 - \frac{1}{7} a_0^2} \quad (4.61/L.13c)$$

in Abhängigkeit der Störfunktion $f(y)$ für die Gleichungen

$$u = A p \quad (4.62/L.14a)$$

$$y \, dv/\partial y = B \, \partial p/\partial y \quad (4.63/L.14b)$$

mit

$$A = \frac{a_1 q_1 \rho_1 \left[M^2 - \frac{1}{7} \right] [M^2 + 1]}{2 \rho_1 M^2 [M^2 - 1]} \quad (4.64)$$

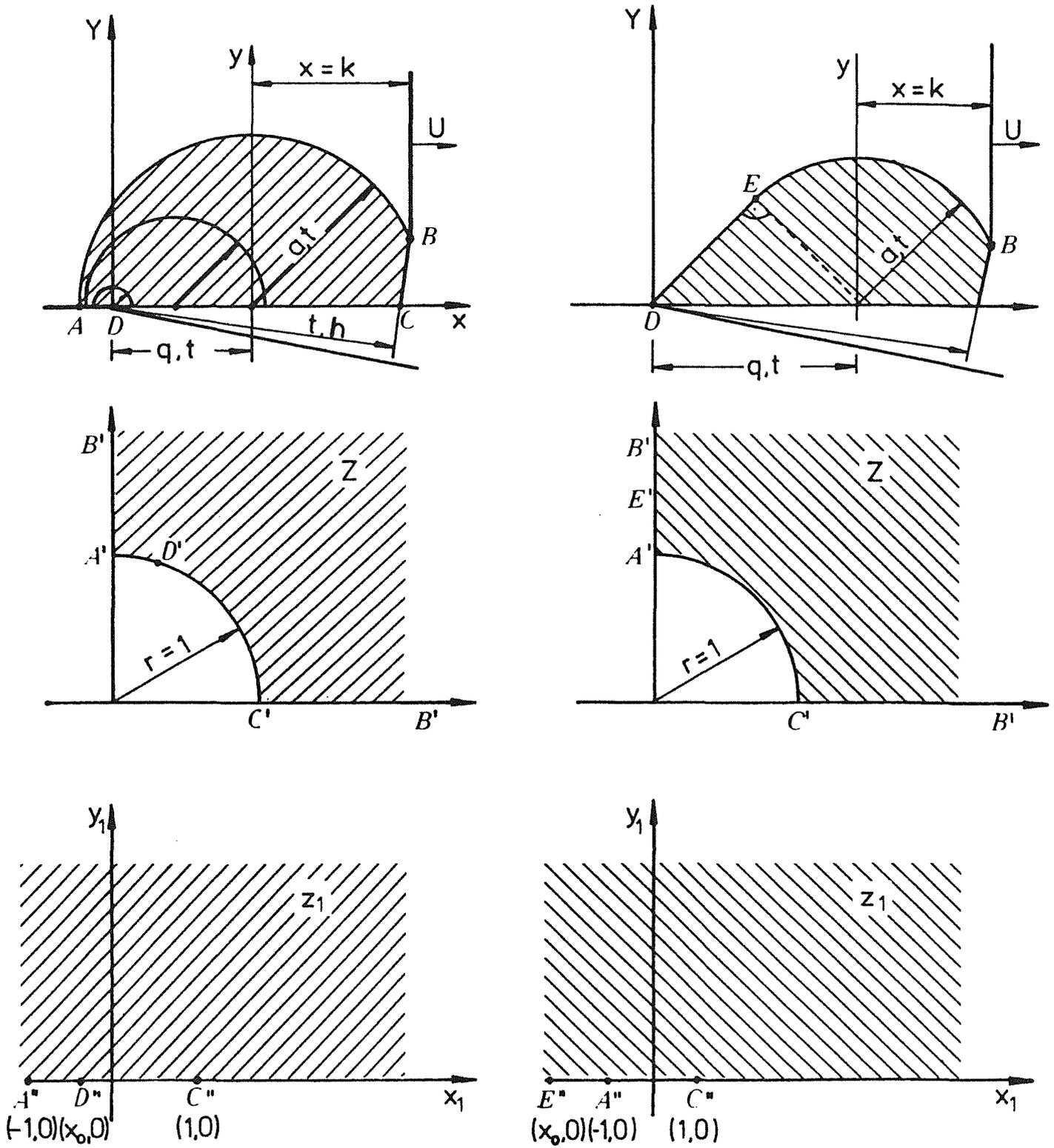
$$B = \frac{M^2 + 1}{2 M^2} \left[\frac{7 M^2 - 1}{M^2 + 5} \right]^{1/2} \quad (4.65/L.15a)$$

und

$$B = \frac{\rho_1 q_1}{\rho_1} \frac{U^2 - \frac{1}{7} a_0^2}{2 U} \quad (4.66)$$

$$B = \frac{3 [M^2 - 1]}{M^2 + 5} \quad (4.67/L.15b)$$

an der Stelle $x=k$ eine Lösung zu finden, daß die Differentialgleichungen (4.49/L.8a), (4.46/L.8b) und (4.47/L.8c) erfüllt sind. Dazu müssen die Differentialgleichungen 4.49/L.8a), (4.46/L.8b) und (4.47/L.8c) für die Randbedingungen $y=0$, $v=-\delta$ für $x>-M_1$ und $v=0$ für $x<-M_1$ gelöst werden, so daß die Gl.(4.63/L.14a) bis (4.67/L.15b) für $x=k$ gelten und an der Grenze zwischen der ungestörten und der gestörten Strömung die Bedingung $u = v = p = 0$ gilt.



a) Unterschall

b) Überschall

Abb. 4.2: Transformationsebenen von Lighthill (1948) für eine Unterschall und eine Überschallströmung

4.1.2. Eliminierung von u und v

Die Differentialgleichungen (4.49/L.8a), (4.50/L.8b) und (4.51/L.8c) wurden bereits von Busemann (1943) untersucht. In seiner Arbeit beschäftigt sich Busemann (1943) mit einer stationären Überschallströmung, deren strömungsmechanische Größen nur kleine Abweichungen vom jeweiligen Mittelwert besitzen, so daß die Entropieänderungen vernachlässigt werden können. Weiterhin sind die Geschwindigkeiten konstant entlang der Geraden, die den Ursprung schneiden. Lighthill (1948) bezeichnet dies als "Konus-Problematik".

Da die Geschwindigkeitskomponenten u und v in der x bzw. y-Richtung orthogonal zur mittleren Strömungsrichtung stehen, wobei die Größenordnung von x, y und dem Druck p wesentlich größer als die der Geschwindigkeitskomponenten u und v ist, sind die Gleichungen (4.49/L.8a), (4.50/L.8b) und (4.51/L.8c) mit der Bedingung der Drehungsfreiheit

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.68)$$

hinreichend zur Lösung der Problemstellung.

Durch Einsetzen der bekannten Differentialgleichungen

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.50/L.8b)$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.51/L.8c)$$

in die Gl.(4.49/L.8a) und unter Annahme der Drehungsfreiheit

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.68)$$

erhält man für das Nablaquadrat des Druckes sofort:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.69)$$

Um den Beweis der Gültigkeit von

$$\nabla^2 p = \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right] \left[x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \right] \quad (4.70/L.16)$$

antreten zu können, wird die bekannte Differentialgleichung

$$x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.49/L.8a)$$

dazu benutzt, um durch Tausch des zweiten Klammerausdruckes dann den Zusammenhang

$$\nabla^2 p = \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right] \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (4.71)$$

zu erhalten. Durch weitere algebraische Umformungen erhält man dann:

$$\nabla^2 p = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.72)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 p = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}{\partial y} + y \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.73)$$

Mit einem Wechsel analog zu

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.68)$$

erhält man aus Gl.(4.73) die Beziehung

$$\nabla^2 p = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.74)$$

und durch Umsortierung schließlich die Gleichung

$$\nabla^2 p = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.69)$$

Damit ist die Beziehung

$$\nabla^2 p = \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right] \left[x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \right] \quad (4.75/L.16)$$

bewiesen. Nach Busemann (1943) ist für $x^2+y^2>1$ die Differentialgleichung (4.66/L.16) eine hyperbolische Dgl. und für $x^2+y^2<1$ eine elliptische Dgl.. Die Charakteristiken liegen somit alle auf der Tangente des Kreises $x^2+y^2=1$. Auf einem Teilbereich des Kreises kann nun nach Lighthill eine konstante Lösung für die Randbedingungen gefunden werden. Demnach scheint es nach Lighthill (1948) sinnvoll anzunehmen, daß die Region der gestörten Strömung hinter dem Stoß der kleinste Anteil in der Lösung innerhalb des Halbkreises ist (siehe Abb.(4.2)). Dabei liegt die Abknickkante für Unterschallströmungen innerhalb des Halbkreises und für Überschallströmungen außerhalb des Halbkreises. Die Lösungsgebiete der Differentialgleichungen sind in Abb.(4.2) als schraffierte Flächen dargestellt. Die Abb.(4.3) und (4.4) zeigen darüber hinaus sehr deutlich das Brechen des Stoßes an der Kante mit der Entwicklung der gestörten Nachlaufströmung sowohl für eine Unterschallströmung, als auch für eine Überschallströmung.

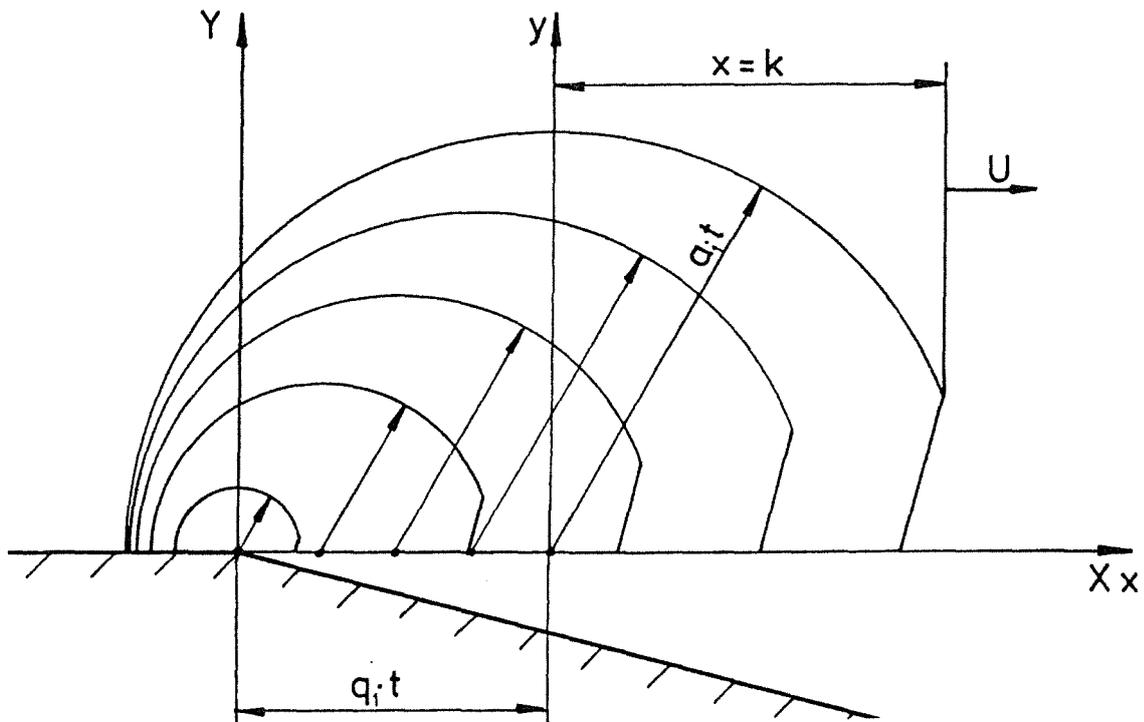


Abb. 4.3: Brechung einer Unterschallnachlaufströmung an einer konvexen Kante mit einer Ausbreitung der Schallwellen

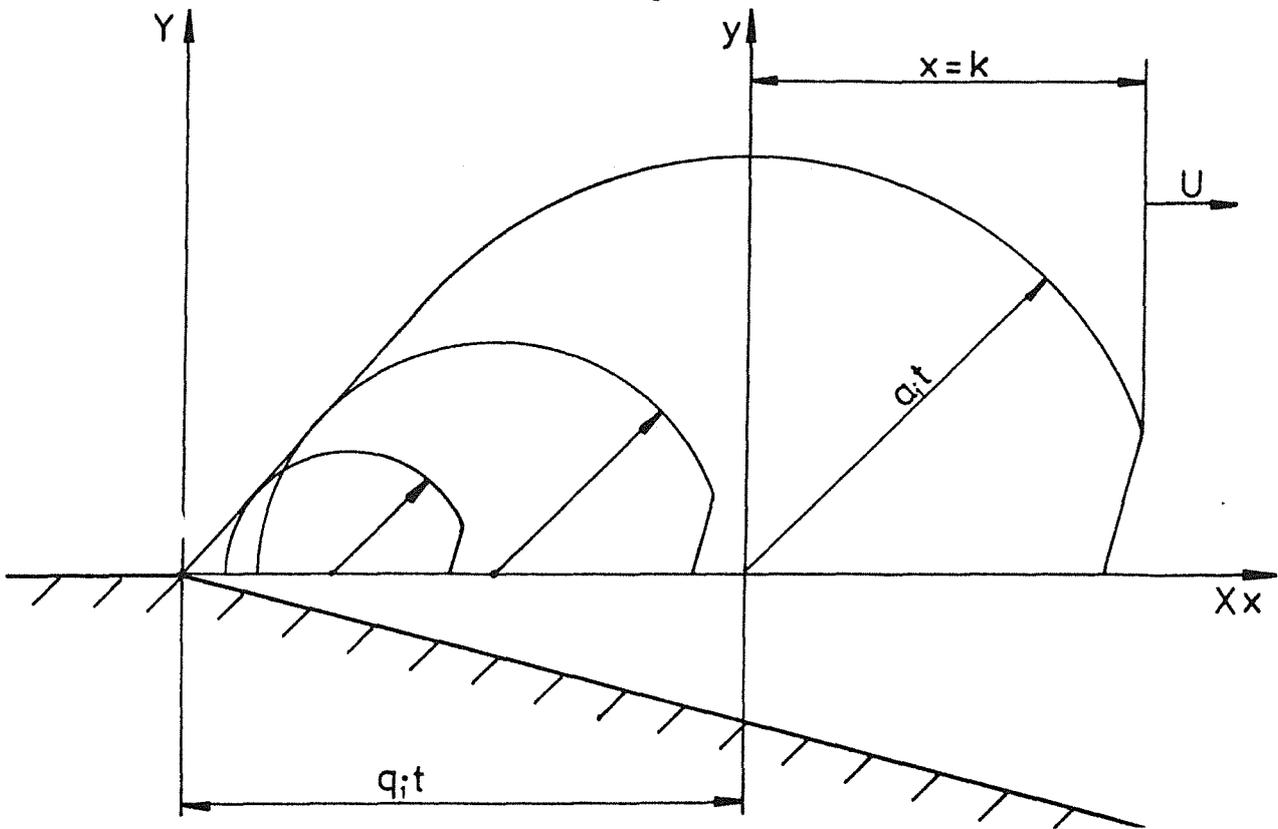


Abb. 4.4: Brechung einer Überschallnachlaufströmung an einer konvexen Kante mit der Ausbreitung der Schallwellen

Während die Grenzwerte der Lösung der Differentialgleichung (4.66/L.16) auf dem Kreis für eine Überschallströmung nicht kontinuierlich ist, läßt sich hingegen für eine Unterschallströmung eine konstante Strömung entwickeln. Mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.51/L.8c)$$

und wenn an der Abknickkante

$$x = -M_1 \quad (4.76)$$

für $y = 0$ ist (siehe Abb.(4.5),

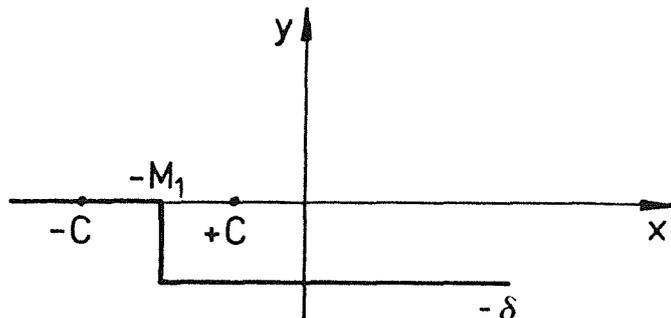


Abb. 4.5: Randbedingung

dann erhält man aus Gl.(4.51/L.8c) den Zusammenhang

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -M_1 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.77)$$

und nach einer Aufintegration schließlich:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-M_1-c}^{-M_1+c} \frac{\partial p}{\partial y} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-M_1-c}^{-M_1+c} -M_1 (-\delta) = -M_1 (-\delta) = M_1 \delta$$

(4.78/L.18) .

Dabei steigt von der Ecke (k,0) der Wert $v=-\delta$ an. Aus der Gleichung

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = B \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.63/L.14b)$$

erhält man mit deren Integral

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (4.79)$$

in den Grenzen von $-r$ bis 0 schließlich δ :

$$\int_{-r}^0 \partial v = \int \frac{B}{y} \partial p = \delta$$

(4.80/L.20)

Wird die Differentialgleichung

$$x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.49/L.8a)$$

an dem Punkt $x = k$ angesetzt, so erhält man mit

$$u = A p \quad (4.62/L.14a)$$

bzw. mit dessen Differential

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.81)$$

und mit

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = B \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.63/14b)$$

durch Einsetzen schließlich den Zusammenhang:

$$k \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.82)$$

Multipliziert man die Gl.(4.78) mit k, so folgt der Ausdruck

$$k \left[k \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \right] = k A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k B}{y} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.83)$$

Aus der Differentialgleichung

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.50/L.8b)$$

erhält man an der Stelle $x=k$ mit $U=Ap$ durch Einsetzen sofort den Zusammenhang

$$k A \frac{\partial p}{\partial x} + y A \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.84)$$

der nach einer Umformung in

$$k A \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - y A \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.85)$$

schließlich in Gl.(4.79) eingesetzt wird, so daß der Ausdruck

$$\underline{\underline{k \left[k \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \frac{\partial p}{\partial x} - y A \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{k B}{y} \frac{\partial p}{\partial y}}} \quad (4.86/L.19)$$

resultiert. Damit ist Problemstellung nur noch von dem Druck p abhängig und die Geschwindigkeiten u und v lassen sich über die Differentialgleichungen (4.50/L.8b) und (4.51/L.8c) ermitteln.

4.1.3. Busemanns Transformation

Als nächstes soll nun die Transformation von Busemann (1943) dargestellt werden. Mit den Polarkoordinaten

$$x = r \cos(\Theta) \quad (4.87)$$

und

$$y = r \sin(\Theta) \quad (4.88)$$

ergibt sich nach der Transformation aus dem Druckgradienten zweiter Ordnung der Gl.(4.75/L.16) der Zusammenhang:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} \quad (4.89)$$

Dabei gilt für das Differential des Druckes nach x in Polarkoordinaten der Ausdruck

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \cos(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\sin(\Theta)}{r} \quad (4.90)$$

und multipliziert mit x bzw. $r \cos(\Theta)$, analog zu Gl.(4.83), folgt dann der Zusammenhang

$$x \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \cos(\Theta) r \cos(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\sin(\Theta)}{r} r \cos(\Theta) \quad (4.91)$$

Nach dem gleichen Verfahren erhält man für das Differential des Druckes in y-Richtung den Ausdruck

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \sin(\Theta) + \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\cos(\Theta)}{r} \quad (4.92)$$

und mit Gl.(4.89) schließlich den Zusammenhang:

$$y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \sin(\Theta) r \sin(\Theta) + \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\cos(\Theta)}{r} r \sin(\Theta) \quad (4.93)$$

Addiert man die Ausdrücke der Gl.(4.91) und (4.93), so ergibt sich die Gleichung

$$x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = r \frac{\partial p}{\partial r} [\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta)] \quad (4.94)$$

bzw. mit $\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta) = 1$ folgt:

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = r \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.95)$$

Mit Gl.(4.95) resultiert aus Gl.(4.89) und Gl.(4.75/L.16) schließlich der Zusammenhang für den Gradienten des Druckes zweiter Ordnung:

$$\nabla^2 p = \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right] \left[x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \left[r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right] \left[r \frac{\partial p}{\partial r} \right] \quad (4.96/L.21)$$

Über die andere Form des Druckgradienten zweiter Ordnung

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} \quad (4.89)$$

soll nun der Quotient $\partial p / \partial x / \partial p / \partial y$ in Abhängigkeit der Dichte ρ und des Druckes p hergeleitet werden.

Mit dem bekannten Störansatz der Dichte

$$\rho = \frac{1 - (1 - r^2)^{1/2}}{r} \quad (4.97a)$$

bzw. mit dessen algebraischer Umformung

$$r = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \quad (4.97b)$$

erhält man an der Stelle $x=k$ mit der Polarkoordinaten

$$x = r \cos(\Theta) \quad (4.87)$$

bzw. deren Umformung

$$r \cos(\Theta) = k$$

über (4.97b) zuerst den Ausdruck

$$\frac{2 \rho}{1 + \rho^2} \cos(\Theta) = K \quad (4.98)$$

und nach einer Umformung den Zusammenhang

$$2 \rho \cos(\Theta) = K (1 + \rho^2) \quad (4.99)$$

Bildet man dann den Quotienten aus den Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \cos(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\sin(\Theta)}{r} \quad (4.100a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \sin(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\cos(\Theta)}{r} \quad (4.100b)$$

so folgt durch einfache algebraische und trigonometrische Umformungen:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial r} \cos(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\sin(\Theta)}{r}}{\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial r} \sin(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\cos(\Theta)}{r}} \\ \Rightarrow & \frac{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial r} \cot(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{r}}{\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\cot(\Theta)}{r}} \\ \Rightarrow & \frac{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \cot(\Theta) - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{r}}{\frac{\partial p}{\partial y} \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\cot(\Theta)}{r}} \\ \Rightarrow & \frac{\frac{\partial p}{\partial x} r \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} \cot(\Theta) - \frac{\partial p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}{\frac{\partial p}{\partial y} r \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\partial p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \Theta} \cot(\Theta)} \quad (4.101/L.23) \end{aligned}$$

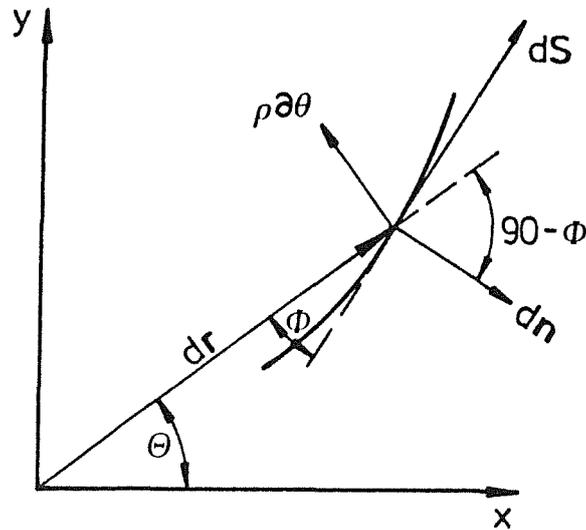


Abb. 4.6: Koordinatentransformation von (x,y) auf (r,θ)

Sind die Differenzen dn und ds jeweils Elemente normal und tangential zu dem Kreisbogen, analog zur Abb.(4.6), so ist

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial s} \sin(90^\circ - \Phi) + \frac{\partial p}{\partial n} \cos(90^\circ - \Phi) \quad (4.102)$$

bzw.

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial s} \cos(\Phi) + \frac{\partial p}{\partial n} \sin(\Phi) \quad (4.103)$$

Außerdem gilt nach Abb.(4.6) der Zusammenhang

$$\frac{\partial p}{\rho \partial \rho} = \cos \frac{\partial p}{\partial(-n)} + \frac{\partial p}{\partial s} \sin(\Phi) \quad (4.104)$$

bzw.

$$\frac{\partial p}{\rho \partial \rho} = - \frac{\partial p}{\partial n} \cos(\Phi) + \frac{\partial p}{\partial s} \sin(\Phi) \quad (4.105)$$

Bildet man den Quotienten aus den Gl.(4.103) und (4.105), so folgt zuerst

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial p}{\partial s} \cos(\Phi) + \frac{\partial p}{\partial n} \sin(\Phi)}{\frac{\partial p}{\rho \partial \rho} - \frac{\partial p}{\partial n} \cos(\Phi) + \frac{\partial p}{\partial s} \sin(\Phi)} = \quad (4.105)$$

und nach einer trigonometrischen Umformung schließlich der Zusammenhang:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial \rho}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial s} \cot(\Phi) + \frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\rho \partial \rho} - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial n} \cot(\Phi)} \quad (4.106/L.24)$$

Weiterhin folgt aus dem Quotienten

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}} = \frac{r \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} \cot(\Phi) - \frac{\partial p}{\rho \partial \Theta}}{r \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\partial p}{\rho \partial \Theta} \cot(\Theta)} \quad (4.101/L.23)$$

durch einfache trigonometrische und algebraische Umformungen:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}} = \frac{r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho}}{\frac{\partial p}{\rho \partial \Theta}} \cot(\Theta) - 1}{\frac{\partial p}{\rho \partial \Theta}} \quad (4.107)$$

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}} = r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho}}{\frac{\partial p}{\rho \partial \Theta}} + \cot(\Theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}} = \frac{\left[r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} \cot(\Theta) \cot(\Phi) - 1 \right] \frac{\partial p}{\partial s} + \left[r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} \cot(\Theta) + \cot(\Phi) \right] \frac{\partial p}{\partial n}}{\left[r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} \cot(\Phi) + \cot(\Theta) \right] \frac{\partial p}{\partial s} + \left[r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} - \cot(\Phi) \cot(\Theta) \right] \frac{\partial p}{\partial n}} \quad (4.108/L.25).$$

Mit Radius

$$r = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \quad (4.97b)$$

erhält man durch Differenzieren nach ρ den Ausdruck

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{2(1 - \rho^2)}{(1 + \rho^2)^2} \quad (4.109)$$

bzw. durch Kehrwertbildung auch den Zusammenhang

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{(1 + \rho^2)^2}{2(1 - \rho^2)} \quad (4.110)$$

Multipliziert mit r/ρ folgt

$$\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{r(1 + \rho^2)^2}{2\rho(1 - \rho^2)} \quad (4.111)$$

und durch algebraische Umformungen erhält man dann:

$$\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{(1 + \rho^2)^2}{(1 + \rho^2)(1 - \rho^2)} \quad (4.112)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \quad (4.113)$$

Da an dem Stoß für $x=k$ der Zusammenhang

$$2\rho \cos(\Theta) = k(1 + \rho^2) \quad (4.99)$$

gilt, ergibt sich durch Einsetzen der Gl.(4.99) in Gl.(4.113) die Gleichung

$$\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{2\rho \cos(\Theta)}{k} \frac{1}{1 - \rho^2} = \frac{\rho \cos(\Theta)}{k - \rho \cos(\Theta)} \quad (4.114)$$

Mit einer weiteren algebraischen und trigonometrischen Umformung aus

$$2\rho \cos(\Theta) = k(1 + \rho^2) \quad (4.97)$$

$$\Rightarrow 2\rho k \cos(\Theta) = k^2(1 + \rho^2) \quad (4.115)$$

$$\Rightarrow \rho^2(\cos^2(\Theta)) = k^2 - 2\rho k + \rho^2 \cos^2(\Theta) \quad (4.116)$$

$$\Rightarrow \rho(\cos^2(\Theta) - k^2) = (k - R \cos(\Theta))^2 \quad (4.117)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{k - \rho \cos(\Theta)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\Theta) - k^2}} \quad (4.118)$$

erhält man durch das Einsetzen der Beziehung (4.118) in Gl.(4.114) die Gleichung

$$r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} = \frac{\rho \cos(\Phi)}{k - \rho \cos(\Theta)} \quad (4.119)$$

und mit der Kreisbogenbeziehung

$$\cos(\Phi) = (1 - k^2)^{-1/2} \sin(\Theta) \quad (4.120)$$

schließlich den Ausdruck:

$$r \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho \cos(\Theta)}{k - \rho \cos(\Theta)} \cot(\Theta) \cot(\Phi) \quad (4.121)$$

Wird der Ausdruck Gl.(4.121) entsprechend in die Gl.(4.108/L.25) eingesetzt, so folgt direkt

$$\frac{\frac{\partial \rho}{\partial p}}{\frac{\partial \rho}{\partial y}} = \tan(\Theta) \sin^2(\Phi) \left[\cot^2(\Phi) \cot^2(\Theta) - 1 + \frac{1}{\sin^2(\Theta)} \cot(\Phi) \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}}}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} \right] \quad (4.122/L.26)$$

und nach einer trigonometrischen Umformung

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial \rho}{\partial p}}{\frac{\partial \rho}{\partial y}} = \cos^2(\Phi) \cot(\Theta) - \sin^2(\Phi) \tan(\Theta) + \frac{\sin^2(\Phi)}{\cos(\Theta)} \frac{\sin(\Theta)}{\sin^2(\Theta)} \frac{\cos(\Phi)}{\sin(\Phi)} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}}}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} \quad (4.123)$$

Durch das Einfügen des Ausdruckes Gl.(4.120) resultiert:

$$\frac{\frac{\partial \rho}{\partial p}}{\frac{\partial \rho}{\partial y}} = \frac{\sin^2(\Theta) \cot(\Theta)}{1 - k^2} - [1 - \cos^2(\Theta)] \tan(\Theta) + \frac{\sin(\Phi) \cos(\Phi)}{\cos(\Theta) \sin(\Theta)} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}}}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} \quad (4.124)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{k^2}{1 - k^2} \tan(\Theta) + \frac{1}{1 + k^2} \sqrt{\frac{\cos^2(\Theta) - k^2}{\cos^2(\Theta)}} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (4.125)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{k^2}{1 - k^2} \tan(\Theta) + \frac{1}{1 - k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\Theta)} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (4.126)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$k \left[k \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \frac{\partial p}{\partial x} - A y \frac{\partial p}{\partial y} + B k y^{-1} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.86/L.19)$$

ergibt sich durch Umformung der Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{y (A + k) - B K y^{-1}}{1 - k^2} \quad (4.127)$$

der nun in die Gl.(4.126) eingesetzt werden kann, so daß schließlich der Zusammenhang resultiert:

$$\frac{y (A + k) - B k y^{-1}}{1 - k^2} = \frac{k^2}{1 - k^2} \tan(\Theta) + \frac{1}{1 - k^2} \sqrt{1 - k^2 \sec^2(\Theta)} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (4.128/L.27).$$

Wenn am Stoß $x = k$ ist, so ist

$$y = k \tan(\Theta) \quad (4.129)$$

und man erhält die Gleichung

$$k \tan(\Theta) (k + A) - \frac{B k}{k \tan(\Theta)} = k^2 \tan(\Theta) + \sqrt{1 - k^2 \sec^2(\Theta)} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (4.130)$$

in die nun noch der Ausdruck (4.97) einfließt, wodurch resultiert:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \frac{k A \tan(\Theta) - B \cot(\Theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sec^2(\Theta)}} \quad (4.131/L.28)$$

Mit den in Polarkoordinaten transformierten Differentialen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \Theta} d\Theta = \cos(\Theta) dr + r (-\sin(\Theta)) d\Theta \quad (4.132)$$

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial r} dp + \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} d\Theta = \cos(\Theta) dp + \rho (-\sin(\Theta)) d\Theta \quad (4.133)$$

erhält man für die Randbedingung einer Unterschallströmung Gl.(4.74/L.18) mit $\xi = \rho \cos(\Theta)$ und $\eta = \rho \sin(\Theta)$ in dem Abknickpunkt $\xi = -(1 - (1 - M_1^2)^{1/2}) / M_1$ bzw. $\eta = 0$ die Beziehungen aus den Gl.(4.132) und (4.133)

$$dx = \cos(\Theta) dr \quad (4.134)$$

$$d\xi = \cos(\Theta) dp \quad (4.135)$$

bzw.

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dr}{dp} \quad (4.136)$$

oder

$$dx = \frac{dr}{dp} d\xi \quad (4.137)$$

die eingesetzt in die Randbedingung für eine Unterschallströmung die Beziehung ergeben:

$$\int_{\eta \rightarrow 0}^{-M_1+c} \frac{\partial p}{\partial y} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\xi_1-c}^{\xi_1+c} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dr}{dp} d\xi = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\xi_1-c}^{\xi_1+c} \frac{\rho}{r} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dr}{dp} d\xi = M_1 \delta \quad (4.138)$$

Zieht man noch die Beziehung

$$r \rho^{-1} \left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=M_1} = \frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}} \quad (4.139)$$

heran, so erhält man für den Unterschall den Zusammenhang

$$\int_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \left[r \rho^{-1} \frac{dp}{dr} \right]_{r=M_1} M_1 \delta = \frac{M_1 \delta}{\sqrt{1-M_1^2}} \quad (4.140/L.30)$$

4.1.4. Lösung der Potentialgleichung

Nachdem nun laut Lighthill (1948) der Druck p als harmonische Funktion gegeben ist und diverse Randbedingungen in einem Dreieck **ABC** erfüllt, soll nun in diesem Abschnitt eine Lösung entsprechend der anstehenden Problematik entwickelt werden.

Ausgangspunkt ist das Dreieck **ABC**, das aus den Kreisbögen **AB** und **BC** und dem Segment **AC** besteht, siehe dazu auch Abb.(4.2). Nach der geometrischen Inversion dieses Dreiecks in Bezug auf **B** erhält man ein Dreieck **A'B'C'** wobei **B'** im unendlichen liegt. Zum genaueren Verständnis, wie nun dieser transformierte Raum Z aussieht, wurde in Abb.(4.2) auch für diesen Fall jeweils für eine Unterschallströmung und für eine Überschallströmung eine entsprechende Abbildung dargestellt.

Die Transformation nach Lighthill (1948) lautet für $\zeta = \rho \exp(i \Theta)$:

$$Z = (k + i k') \left[i - \frac{2 k'}{\zeta - (k + i k')} \right] \quad (4.141/L.31)$$

Dabei soll der Punkt **B** bei $\zeta = k + i k'$ liegen, wie zum Beispiel bei $k'=(1-k^2)^{1/2}$.

Ist nun ζ auf dem Kreisbogen $2\rho \cos(\Theta) = k(1+\rho^2)$ so ist

$$Z = \frac{\sqrt{\cos^2(\Theta) - k^2}}{k' \cos(\Theta) - k \sin(\Theta)} \quad (4.142/L.32)$$

bzw.

$$Z = \frac{\sqrt{1 - k^2 (1 + \tan^2(\Theta))}}{k' - k \tan(\Theta)} \quad (4.143)$$

Durch Umformung folgt aus Gl.(4.143)

$$Z^2 (k' - k \tan(\Theta))^2 = 1 - k^2 (1 + \tan^2(\Theta)) \quad (4.144)$$

$$\Rightarrow Z^2 k'^2 - 2 k k' Z^2 \tan(\Theta) + Z^2 k^2 \tan^2(\Theta) - 1 + k^2 + k^2 \tan^2(\Theta) = 0 \quad (4.145)$$

mit $k'^2 = 1-k^2$ erhält man weiter

$$\tan(\Theta) = \frac{2 k k' Z^2 \pm \sqrt{4 k^2 k' Z^4 - 4 (Z^2 k^2 + k^2) (k^2 - 1 + Z^2 k')}}{Z k^2 (Z^2 + 1)} \quad (4.146)$$

$$\Rightarrow \tan(\Theta) = \frac{k' Z^2 \pm \sqrt{k'^2 Z^4 - (Z^2 - 1) k'^2}}{k (Z^2 + 1)} \quad (4.147)$$

$$\Rightarrow \tan(\Theta) = \frac{k' Z^2 \pm k'}{k (Z^2 + 1)} \quad (4.148)$$

Für

$$\Theta \leq \arctan \frac{k'}{k} \quad (4.149)$$

wird der negative Anteil genommen, so daß die Beziehung

$$\tan(\Theta) = \frac{k' (Z^2 - 1)}{k (Z^2 + 1)} \quad (4.150/L.33)$$

folgt. Durch trigonometrische und algebraische Umformungen resultiert aus der Gl.(4.150/L.33):

$$\sec^2(\Theta) = \frac{1}{\cos^2(\Theta)} = 1 + \tan^2(\Theta) = 1 + \frac{k'^2 (Z^2 - 1)^2}{k^2 (Z^2 + 1)^2} \quad (4.151)$$

$$\Rightarrow \sec^2(\Theta) = \frac{1}{\cos^2(\Theta)} = 1 + \tan^2(\Theta) = \frac{k^2 (Z^2 + 1)^2 + (1 - k^2) (Z^2 - 1)^2}{k^2 (Z^2 + 1)^2} \quad (4.152)$$

$$\Rightarrow \sec^2(\Theta) k^2 = \frac{(Z^2 + 1)^2 k^2 + (1 - k^2) (Z^2 - 1)^2}{(Z^2 + 1)^2} = \frac{k'^2 4 Z^2}{(Z^2 + 1)^2} \quad (4.153)$$

Mit dem Druckquotienten

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{A k \tan(\Theta) - B \cot(\Theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sec^2(\Theta)}} \quad (4.131/L.28)$$

erhält man dann die transformierte Randbedingung des Stoßes aus Gl.(4.153):

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{A k \frac{k' (Z^2 - 1)}{k (Z^2 + 1)} - B \frac{k (Z^2 + 1)}{k' (Z^2 - 1)}}{\frac{2 k' Z}{Z^2 + 1}} \quad (4.154/L.34)$$

Aus Gl.(4.154/L.34) erhält man nach dem Umstellen die Beziehung

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{A (Z^2 - 1)^2 - \frac{B k}{1 - k^2} (Z^2 + 1)^2}{2 Z (Z^2 - 1)} \quad (4.155)$$

Damit die Differentialgleichung (4.155) gelöst werden kann soll noch einmal mit

$$z_1 = 0,5 [Z^2 + Z^{-2}] \quad (4.156)$$

bzw. mit

$$Z^2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} \quad (4.157)$$

transformiert werden, so daß man den Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{A (z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} - 1)^2 - \frac{B k}{1 - k^2} (z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} - 1)}{2 \sqrt{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}} [z_1 - 1 + \sqrt{z_1^2 - 1}]} \quad (4.158)$$

erhält. Formt man die Gl.(4.158) zu dem Zusammenhang

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{\left[A (z_1 - 1) - \frac{B k}{1 - k^2} (z_1 + 1) \right] [\sqrt{z_1 + 1} + \sqrt{z_1 - 1}]}{2 \sqrt{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}} [z_1 - 1 + \sqrt{z_1^2 - 1}]} \quad (4.159)$$

um, und berücksichtigt man den Ausdruck

$$\sqrt{z_1 + 1} + \sqrt{z_1 - 1} = \sqrt{2} \sqrt{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}} \quad (4.160)$$

so erhält man aus Gl.(4.159)

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{\left[A (z_1 - 1) - \frac{B k}{1 - k^2} (z_1 + 1) \right] \sqrt{2} \sqrt{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}}}{2 \sqrt{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}} [z_1 - 1 + \sqrt{z_1^2 - 1}]} \quad (4.161)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{\left[A (z_1 - 1) - \frac{B k}{1 - k^2} (z_1 + 1) \right]}{\sqrt{2} \sqrt{z_1^2 - 1}} \quad (4.162)$$

die Randbedingung des Stoßes in der Form mit $z_1 = x_1$:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y_1}}{\frac{\partial p}{\partial x_1}} = - \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{\left[\frac{B k}{1 - k^2} (x_1 + 1) - A (x_1 - 1) \right]}{\sqrt{2} \sqrt{x_1^2 - 1}} \quad (4.163/L.36)$$

für $x_1 > 1$ bei $y_1 = 0$. Aufgrund der einheitlichen Transformation gilt dabei für den Stoß:

$$\partial s \rightarrow \partial x_1 \quad (4.164)$$

$$\partial n \rightarrow \partial y_1 \quad (4.165)$$

Für eine Unterschallströmung ergibt sich in der Ecke für den diskontinuierlichen Fall aus Gl.(4.138/L.29) die Beziehung

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int \frac{\partial p}{\partial y_1} dx_1 = \frac{M_1 \delta}{(1 - M^2)^{1/2}} \quad (4.166)$$

die in der z_1 -Ebene dabei die folgende Form annimmt:

$$z_1 = - \frac{(M_1 + k)^2 + (M_1^2 - 1)(1 - k^2)}{(M_1 k + 1)^2} = x_0 > -1 \quad (4.167/38)$$

Im Überschallbereich erhält man in der z_1 -Ebene den Zusammenhang

$$E'' = - \frac{(M_1 + k)^2 + (M_1^2 - 1)(1 - k^2)}{(M_1 k + 1)^2} < -1 \quad (4.168)$$

für die Ecke, siehe dazu auch die Abb.(4.2). Analog zur Prandtl-Meyer Expansion erhält man für den Druck in der Ecke die Beziehung

$$p = -M_1 \delta (M_1^2 - 1)^{-1/2} \quad (4.169)$$

die nach der Differentiation nach s die Form

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -M_1 \delta (M_1^2 - 1)^{-1/2} \quad (4.170)$$

annimmt. setzt man dies in die Gl.(4.169) ein so erhält man die Randbedingung

des für eine Überschallströmung:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \int_{E'-c}^{E'+c} \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 = \frac{-M_1 \delta}{(M_1^2 - 1)^{1/2}} \quad (4.171/L.39)$$

Die Bedingung auf der dritten Grenze lautet nach Lighthill (1948) $\partial p / \partial x_1 = 0$ wenn $x_1 < -1$ und $y_1 = 0$ ist. Dies wird mit Gl.(4.171/L.39) erreicht, wobei dies in der z_1 -Ebene für $\zeta = -M_1^{-1} + i(1 - M_1^{-2})$ gültig ist. Dieser Punkt kann auch für x_0 über die Beziehung (4.167/L.38) gefunden werden, wobei allerdings für eine Überschallströmung nach Lighthill (1948) $x_0 < -1$ sein muß.

Eine Lösung kann mit Hilfe des Ansatzes

$$w(z_1) = \frac{\partial p}{\partial y_1} + i \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (4.172)$$

gefunden werden, sofern sich der Druck p harmonisch in der oberen Halbebene verhält. Auf dem Stoß gilt mit der Bedingung $x_1 > 1$ und $y_1 = 0$ mit dem Kehrwert der Gl.(4.163/L.36) über Gl.(4.172) die Beziehung

$$\arctan w(z_1) = \frac{\frac{\partial p}{\partial x_1}}{\frac{\partial p}{\partial y_1}} = \arctan \frac{\sqrt{2} \sqrt{x_1 - 1}}{B k (1 - k^2)^{-1} (x_1 + 1) - A (x_1 - 1)} \quad (4.173/L.41).$$

Als nächstes soll nun eine Lösung für Gl.(4.173/L.41) gefunden werden. Dazu soll der Ansatz

$$w(z_1) = \frac{1}{(\alpha - i\sqrt{z_1 - 1})(\beta - i\sqrt{z_1 - 1})} \quad (4.174)$$

für die Stoßrandbedingung $z_1 = x_1$ überprüft werden. Durch Umformung erhält man zuerst den Ausdruck

$$w(z_1) = \frac{2\beta - (x_1 - 1) + i(\alpha + \beta)\sqrt{x_1 - 1}}{(\alpha^2 + x_1 - 1)(\beta^2 - x_1 - 1)} \quad (4.175)$$

und mit dem Arcus-Tangens schließlich:

$$\arctan w(z_1) = \frac{(\alpha + \beta) \sqrt{x_1 - 1}}{\alpha \beta - (x_1 - 1)} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{x_1 - 1}}{\frac{2 B k}{1 - k^2} - (A - \frac{B k}{1 - k^2})(x_1 - 1)} \quad (4.176)$$

$$\Rightarrow \arctan w(z_1) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{x_1 - 1}}{\frac{2 B k}{1 - k^2} - (x_1 + 1) - A + x_1 - 1} \quad (4.177 / L.41).$$

Damit läßt sich die Gleichung

$$w(z_1) = (2 - i\sqrt{z_1 - 1}) (\beta - i\sqrt{z_1 - 1})^{-1/2} \quad (4.174 / L.44)$$

in die Gl.(4.173/L.41) überführen. Durch genaues Schauen kann aus dem Lösungsansatz (4.174/L.44) nach Lighthill die Lösung

$$w(z_1) = \frac{C \delta [D (z_1 - x_0) - 1]}{(z_1^2 - 1)^{1/2} (z_1 - x_0) [\alpha - i(z_1 - 1)^{1/2}][\beta - i(z_1 - 1)^{1/2}]} \quad (4.178 / L.45)$$

für

$$w(z_1) = \frac{\partial p}{\partial y_1} + i \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (4.172)$$

gefunden werden, die alle Randbedingungen erfüllt. Wenn auf dem Stoß in der x-y Ebene gilt $x=k$ und $y=k \tan(\Theta)$, dann kann man mit der Gleichung

$$\tan(\Theta) = \frac{k' (z^2 - 1)}{k (z^2 + 1)} \quad (4.150 / L.33)$$

bzw. mit

$$y = k \frac{k' (z^2 - 1)}{k (z^2 + 1)} = k' \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad (4.179)$$

über eine Koordinatenrücktransformation

$$Z^2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} \quad (4.157 / L.35b)$$

von dem z_1 -Transformationsraum für die Randbedingungen auf die x - y Ebene mit

$$y = k' \frac{z_1 - 1 + \sqrt{z_1^2 - 1}}{z_1 + 1 + \sqrt{z_1^2 - 1}} = \frac{k' \sqrt{z_1 - 1}}{\sqrt{z_1 + 1}} \quad (4.180)$$

bzw. mit

$$y = k' \frac{\sqrt{x_1 - 1}}{\sqrt{x_1 + 1}} \quad (4.181/L.47)$$

geschlossen werden. Für den frei gewählten, aber kleinen Winkel

$$\delta = \int_1^\infty \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 = \int_1^\infty \frac{B}{k'} \left[\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right]^{1/2} \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 \quad (L.20)$$

kann nun in Abhängigkeit des Druckgradienten eine Lösung gefunden werden. Dazu wird das Ringintegral des Lösungsansatzes (4.178/L.45) gebildet, um für den Druckgradienten zu erhalten:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \oint w(z_1) \Big|_{y_1=0} = \oint \left[\frac{C \delta [D(x_1 - x_0) - 1]}{(x_1^2 - 1)^{1/2} (x_1 - x_0) (2 - i\sqrt{x_1 - 1}) (\beta - i\sqrt{x_1 - 1})} \right] \quad (4.182)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_1} = \oint \left[\frac{C \delta [D(x_1 - x_0) - 1] [(\alpha + i\sqrt{x_1 - 1})(\beta + i\sqrt{x_1 - 1})]}{(x_1^2 - 1)^{1/2} (x_1 - x_0) (2^2 + x_1 - 1) (\beta^2 + x_1 - 1)} \right] \quad (4.183)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{C \delta [D(x_1 - x_0) - 1] [\alpha + \beta] \sqrt{x_1 - 1}}{\sqrt{x_1^2 - 1} (x_1 - x_0) (2^2 + x_1 - 1) (\beta^2 + x_1 - 1)} \quad (4.184)$$

Durch Einsetzen der Gl.(4.183) in die Gl.(L.20) folgt für den Abknickwinkel δ :

$$\delta = \int_1^\infty \frac{B}{k'} \left[\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right]^{1/2} \frac{C \delta [D(x_1 - x_0) - 1] [\alpha + \beta] \sqrt{x_1 - 1}}{\sqrt{x_1^2 - 1} (x_1 - x_0) (2^2 + x_1 - 1) (\beta^2 + x_1 - 1)} dx_1 \quad (4.185)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{B C \delta}{k'} (\alpha + \beta) \int_1^{\infty} \frac{D (x_1 - x_0) - 1}{\sqrt{x_1^2 - 1} (x_1 - x_0) (2^2 + x_1 - 1) (\beta^2 + x_1 - 1)} dx_1 \quad (4.186)$$

Mit $x_1=x$ und $dx_1=dx$ und $1-x_0=r^2$ ergibt sich aus Gl.4.186)

$$\Rightarrow \delta = \frac{B C \delta}{k'} (\alpha + \beta) \int_0^{\infty} \frac{D (x_1 - x_0) - 1}{\sqrt{x} (\alpha^2 + x) (\beta^2 + x) (r^2 + x)} dx \quad (4.187)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{B C \delta}{k'} (\alpha + \beta) \pi \frac{(D r^2 - 1) \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha \beta \gamma} + D}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma) (\gamma + \alpha)} \quad (4.188/L.48)$$

Sofern für

$$C = \frac{[\alpha + (1 - x_0)^{1/2}][\beta + (1 - x_0)^{1/2}][1 - x_0^2]^{1/2} M_1}{\pi |1 - M_1^2|^{1/2}} > 0 \quad (4.189/L.46)$$

mit

$$x_0 = 1 - \frac{2 [M_1 + k]^2}{[M_1 k + 1]^2} \quad (4.190)$$

bzw.

$$1 + x_0 = \frac{2 (1 - k^2)(1 - M_1^2)}{(M_1 k + 1)^2} \quad (4.191/L.49)$$

gilt, erhält man durch Umformung aus (4.189/L.46) den Ausdruck für C:

$$\frac{C}{(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)} = \frac{M_1}{\pi |1 - M_1^2|^2} \left| \frac{2 (M_1 + k)^2}{(M_1 k + 1)^2} \right|^2 \frac{(1 - k^2) (1 - M_1^2)^{1/2}}{(M_1 k + 1)^2} \quad (4.192)$$

$$\Rightarrow \frac{C}{(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)} = \frac{2 M_1 k' (M_1 + k)}{\pi (M_1 k + 1)^2} \quad (4.193)$$

Für kleine Winkeländerungen δ ergibt sich aus Gleichung

$$\delta = \frac{\beta C \delta (\alpha + \beta)}{k'} \pi \frac{(D \gamma^2 - 1) \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha \beta \gamma} + D}{(\alpha + \beta) (\beta + \gamma) (\gamma + \alpha)} \quad (4.188/L.48)$$

mit Gl.(4.193) sofort

$$\frac{(M_1 k + 1)^2}{2 \beta M_1 (M_1 + k)} = D \gamma^2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha \beta \gamma} + D - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha \beta \gamma} \quad (4.194)$$

$$\Rightarrow \frac{(M_1 k + 1)^2}{2 \beta M_1 (M_1 + k)} = \frac{D (\alpha + \beta + \gamma) + D \alpha \beta}{\alpha \beta} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha \beta \gamma} \quad (4.195)$$

$$\Rightarrow \frac{(M_1 k + 1)^2}{2 \beta M_1 (M_1 + k)} = \frac{D}{\alpha \beta} (\gamma \alpha + \beta \gamma + \gamma^2 + \alpha \beta) - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha \beta \gamma} \quad (4.196)$$

$$\Rightarrow \frac{(M_1 k + 1)^2}{2 \beta M_1 (M_1 + k)} = \frac{D}{\alpha \beta} (\gamma + \beta)(\gamma + \alpha) - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha \beta \gamma} \quad (4.197/L.51)$$

Damit ist nun ein Lösung für einen instationären Stoß gefunden worden, der sich entlang einer abknickenden Wand bewegt.

4.2. Zweiseitige Begrenzung eines instationären, senkrechten Verdichtungsstoßes durch abknickende Wände (Chester, 1953)

Um die Strömungsverhältnisse eines instationären Stoßes in einen querschnittsvariierenden Kanal bestimmen zu können, greift Chester (1953) den Ansatz von Lighthill (1943) auf, und begrenzte den Stoß auch auf der gegenüberliegenden Seite durch eine abknickende Wand, analog zu der Abb.(4.7).

Zur Lösung der Problemstellung greift Chester (1953) auf eine lineare Theorie zurück. Aus diesem Grunde dürfen nur kleine Änderungen im Querschnitt auftreten.

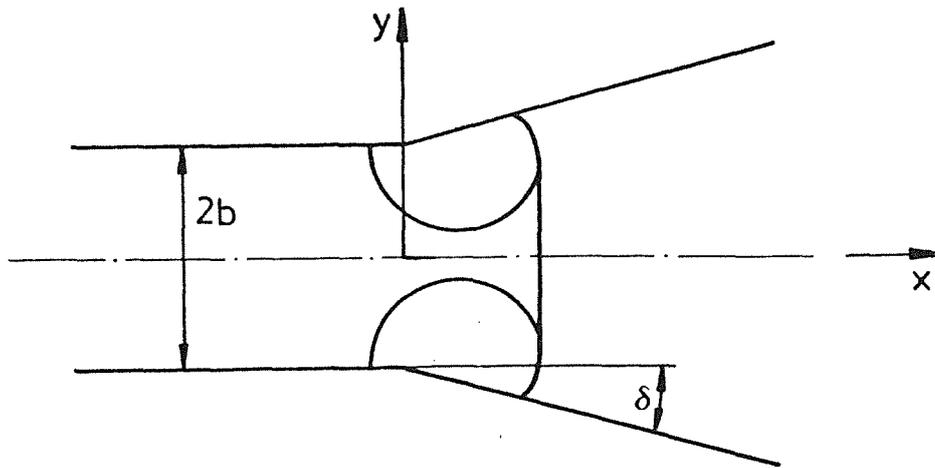


Abb. 4.7: Kanalform von Chester (1953)

4.2.1. Transformation

Um für diesen Fall nun den Druck p in der Nähe des Stoßes bestimmen zu können, griff Chester auf die bereits in diesem Kapitel hergeleiteten Formeln zurück. Dabei führte Chester (1953) allerdings den Lösungsansatz der Potentialfunktion

$$Z = (k + ik') \left[i - \frac{2 k'}{\zeta - (k + ik')} \right] \quad (4.141/L.31)$$

in eine andere Form über. Mit $k'^2 + k^2 = 1$ bzw. mit $k + i k' = \exp(i \alpha)$ erhält man über $\zeta = \rho \exp(i \Theta)$ die abgewandelte Form des Lösungsansatzes:

$$Z = \exp(i \alpha) \left[i - \frac{2 k'}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \alpha)} \right] \quad (4.198)$$

Durch einfache Umformungen folgt aus Gl.(4.198):

$$Z = \exp(i \alpha) \frac{i \exp(i \Theta) \rho - \exp(i \alpha) - 2 k'}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \alpha)} \quad (4.199)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \alpha)} \left[i \rho \exp(i(\Theta + \alpha)) - i \exp(i 2 \alpha) - 2 k' \exp(i \alpha) \right] \quad (4.200)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \chi)} \left[i \rho \exp(i(\Theta + \chi)) - i \left[\cos(2 \chi) + i \sin(2 \chi) \right] - 2 \sin(\chi) \left[\cos(\chi) + i \sin(\chi) \right] \right] \quad (4.201)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \chi)} \left[i \rho \exp(i(\Theta + \chi)) - i \cos(2 \chi) - i 2 \sin^2(\chi) \right] \quad (4.202)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \chi)} \left[i \rho \exp(i(\Theta + \chi)) - i + 2 i \sin^2(\chi) - i 2 \sin^2(\chi) \right] \quad (4.203)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{i \left[\rho \exp(i(\Theta + \chi)) - 1 \right]}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \chi)} \quad (4.204)$$

Dabei ergibt sich für die z_1 -Transformationsebene nach der Transformation mit

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[Z^2 + Z^{-2} \right] \quad (4.156)$$

schließlich durch den Einsatz von Gl.(4.204) die Beziehung:

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{i \left[\rho \exp(i(\Theta + \chi)) - 1 \right]}{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \chi)} \right]^2 + \left[\frac{\rho \exp(i \Theta) - \exp(i \chi)}{i \left[\rho \exp(i(\Theta + \chi)) - 1 \right]} \right]^2 \right] \quad (4.205/C.5).$$

Für komplexe Werte gilt dabei mit

$$Z = X + i Y = \gamma \cos(\Theta) + i \gamma \sin(\Theta) = \gamma \exp(i \Theta) \quad (4.206)$$

und der Umformung aus Gl.(4.97)

$$\gamma = \frac{2 \rho}{1 + \rho^2} \quad (4.207)$$

auch für das Koordinatensystem (X,Y) die Beziehung:

$$\underline{\underline{X + i Y = \frac{2 \rho \exp(i \Theta)}{1 + \rho^2}}} \quad (4.208/C.6)$$

4.5 Druckverteilung über dem Stoß

Für einen kleinen Abknickwinkel δ stellen Lighthill (1948) und Chester (1953) analog zur linearen Theorie eine Beziehung auf, bei der sich der Druck p , hinter dem instationären Verdichtungsstoß proportional verändert. Der Ansatz lautet:

$$p_2 - p_1 = (p_1 - p_0) p \left[\frac{x - q_1 t}{a_1 t}, \frac{y}{a_1 t} \right] \delta = (p_1 - p_0) p(X, Y) \delta \quad (4.209/C.1),$$

bzw. dessen Lösungsansatz bezogen auf den Excessdruck:

$$\begin{aligned} \delta (p_1 - p_0) P(x, y, t) = \delta (p_1 - p_0) \sum_n p \left[\frac{x - q_1 t}{a_1 t}, \frac{(2n+1)b - y}{a_1 t} \right] \\ + p \left[\frac{x - q_1 t}{a_1 t}, \frac{(2n+1)b + y}{a_1 t} \right] \end{aligned} \quad (4.210/C.10).$$

Um über den Lösungsansatz (4.210/C.10) eine passende Lösung zu finden, wird dieser Ansatz zuerst mit einer Dirichlet'schen Summation

$$\sum_{\nu_1 \leq n \leq \nu_2} f(n) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=-\lambda}^{\lambda} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(z) \exp(2 \pi i n z) dz \quad (4.211/C.17)$$

transformiert. Mit

$$z = \frac{a_1 t y + y}{2 b} - \frac{1}{2} \quad (4.212)$$

und

$$dz = \frac{a_1 t}{2 b} dy \quad (4.213)$$

erhält man nach der Transformation aus Gl.(4.210/C.10):

$$P = \frac{1}{2} p \left[\frac{x - q_1 t}{a_1 t}, \frac{b - y}{a_1 t} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{x - q_1 t}{a_1 t}, \frac{b - y}{a_1 t} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{b-y}{a_1 t}}^{\sqrt{1-\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}\right]^2}} p\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}, y\right] \\
 & \cdot \exp\left[2\pi i n \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 t Y + y}{b} - 1\right] \frac{a_1 t}{2 b}\right] dY \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{b+y}{a_1 t}}^{\sqrt{1-\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}\right]^2}} p\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}, y\right] \\
 & \cdot \exp\left[2\pi i n \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 t Y + y}{b} - 1\right] \frac{a_1 t}{2 b}\right] dY
 \end{aligned}
 \tag{4.214}$$

$$= \frac{1}{2} p\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}, \frac{b-y}{a_1 t}\right] + \frac{1}{2} p\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}, \frac{b-y}{a_1 t}\right] + \frac{a_1 t}{2 b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{b+y}{a_1 t}}^{\sqrt{1-\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}\right]^2}} p\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}, y\right] \right. \\
 & \cdot \exp\left[\pi i n \left[\frac{a_1 t Y + y}{b}\right]\right] \exp\left[2\pi i n \frac{1}{2}\right] dY \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{b+y}{a_1 t}}^{\sqrt{1-\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}\right]^2}} p\left[\frac{x-q_1 t}{a_1 t}, y\right] \\
 & \cdot \exp\left[\pi i n \left[\frac{a_1 t Y + y}{b}\right]\right] (-1)^n dY \left. \right]
 \end{aligned}$$

(4.215/C.18).

Für einen festen Abstand hinter dem Stoß erhält man mit

$$x = U t - \text{Konstante} \quad (4.216/C.19)$$

den Zusammenhang

$$\begin{aligned} 1 - \frac{[x_1 - q_1 t]^2}{a_1 t} &= 1 - \left[\frac{U t - q_1 t - C}{a_1 t} \right] = 1 - \left[\frac{U - q_1}{a_1} \right] = 1 - K^2 \\ &= 1 - \cos^2(\chi) = \sin^2(\chi) \end{aligned} \quad (4.217)$$

Weiterhin ergibt sich mit

$$\frac{b + y}{a_1 t} \rightarrow v \qquad \frac{b - y}{a_1 t} \rightarrow v$$

der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{n \pi i}{b} [a_1 t Y + y] \right] &= \exp \left[\frac{n \pi i}{b} [a_1 t Y] \right] \left[\cos \left(\frac{n \pi y}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left(\frac{n \pi y}{b} \right) \right] = i \exp \left[\frac{n \pi i}{b} a_1 t Y \right] \sin \left[\frac{n \pi}{b} y \right] \\ &\quad + \exp \left[\frac{n \pi i}{b} a_1 t Y \right] \cos \left[\frac{n \pi}{b} y \right] \end{aligned} \quad (4.218)$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int i \exp \left[\frac{n \pi i}{b} a_1 t Y \right] \sin \left[\frac{n \pi}{b} y \right] dY = 0 \quad (4.219)$$

Unter Zuhilfenahme der Gl.(4.217), (4.218) und (4.219) erhält man aus Gl. (4.215/C.18) die Vereinfachung wenn t groß ist:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\sin(\chi)} (-1)^n p[\cos(\chi), Y] \exp \left[\frac{n \pi i a_1 t Y}{b} \right] \cos \left[\frac{n \pi}{b} y \right] dY \\ &\quad + \mathbf{A} + O \left[\frac{1}{t} \right] \end{aligned}$$

Mit einer Aufspaltung der Summation in

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (\text{au\ss}er\ 0)}}^{\infty} P_n \quad (4.221)$$

ergibt sich mit

$$P_0 = \frac{a_1 t}{2b} \int_0^{\sin(x)} p[\cos(x), Y] dY \quad (4.222)$$

dann aus Gl.(4.220/C.20) der Zusammenhang:

$$P = \frac{a_1 t}{b} \int_0^{\sin(x)} p[\cos(x), Y] dY \frac{a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\sin(x)} (-1)^n p[\cos(x), Y] \cdot \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] \left[\cos\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] + i \sin\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] \right] dY + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.223)$$

$$\Rightarrow P = \frac{a_1 t}{b} pY \Big|_0^{\sin(x)} - \frac{a_1 t}{b} \int_0^{\sin(x)} Y dP + \frac{a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] \int_0^{\sin(x)} p[\cos(x), Y] \left[\cos\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] + i \sin\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] \right] dY + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.224)$$

$$\Rightarrow P = \frac{a_1 t}{b} [0 \sin(x) - p \cdot 0] - \frac{a_1 t}{b} \int_0^{\sin(x)} Y dP + \frac{a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] \int_0^{\sin(x)} p[\cos(x), Y] \left[\cos\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] + i \sin\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] \right] dY + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.225)$$

$$\Rightarrow P = -\frac{a_1 t}{b} \int_0^{\sin(x)} Y dP + \frac{a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] \int_0^{\sin(x)} p[\cos(x), Y] \cdot \cos\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] dY + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.226)$$

$$\Rightarrow P = -\frac{a_1 t}{b} \int \sin(x) Y dP + \frac{2 a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] (-1)^n \int_0^{\sin(x)} p[\cos(x), Y] \cdot \cos\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] dY + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right]$$

(4.227)

$$\Rightarrow P = -\frac{a_1 t}{b} \int_0^{\sin(x)} Y dP + \frac{2 a_1 t}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] (-1)^n \left[p[\cos(x), Y] \frac{b}{n \pi a_1 t} \sin\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] \Big|_0^{\sin(x)} - \frac{b}{n \pi a_1 t} \int_0^{\sin(x)} \sin\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] p dY \right] + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right]$$

(4.228)

$$\Rightarrow P = -\frac{a_1 t}{b} \int_0^{\sin(x)} Y dP - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left[\frac{n \pi y}{b}\right] (-1)^n \int_0^{\sin(x)} \sin\left[\frac{n \pi a_1 t y}{b}\right] dp + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right]$$

(4.229/C.21)

Damit ist nun eine Lösung für die Nachlaufströmung gefunden worden. Auf dem Stoß gilt $y_1=0$ und mit Gl.(4.205/C.5) und (4.208/C.6) gilt auch analog zu Gl.(4.181/L.47)

$$\left[\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right]^{1/2} \sin(\chi) = Y \quad (4.230/C.22),$$

wobei x von 1 bis ∞ verläuft. Wie für den Lösungsansatz in Gl.(4.174/L.45) soll hier eine Lösung für P der Gl.(4.229/L.21) gefunden werden. Dazu sollen zuerst ein paar Umformungen vorab durch geführt werden, bevor diese in die Gl.(4.229/L.21) eingesetzt werden. Es soll die Beziehung

$$\int_0^{\infty} \frac{2 [D (x^2 + r^2) - 1] x^2 dx}{(x^2 + 2) (x^2 + \alpha^2) (x^2 + \beta^2) (x^2 + \gamma^2)} = \int_0^{\infty} 2 \frac{D x^2 dx}{(x^2 + 2) (x^2 + \alpha^2) (x^2 + \beta^2)} - \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2) (x^2 + \alpha^2) (x^2 + \beta^2) (x^2 + \gamma^2)}$$

(4.231)

umgeformt werden. Dies geschieht mit

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)} = \frac{A_A}{(x^2 + 2)} + \frac{B_A}{(x^2 + \alpha^2)} + \frac{C_A}{(x^2 + \beta^2)} \quad (4.232)$$

wobei

$$A_A = \frac{2}{(\beta^2 - 2)(2 - \alpha^2)} \quad \int_0^\infty 2 \frac{D x^2 dx}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}$$

$$B_A = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(2 - \alpha^2)}$$

$$C_A = \frac{\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - 2)}$$

ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{D x^2 dx}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)} \\ &= D \int_0^\infty \frac{A_A}{x^2 + 2} dx + D \int_0^\infty \frac{B_A}{x^2 + \alpha^2} dx + D \int_0^\infty \frac{C_A}{x^2 + \beta^2} dx \\ &= D \left[A_A \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + B_A \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{2} + C_A \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} D \left[\frac{\sqrt{2} [\alpha^2 - \beta^2] + \alpha [\beta^2 - 2] + \beta [2 - \alpha^2]}{[\beta^2 - 2][2 - \alpha^2][\alpha^2 - \beta^2]} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} D \left[\frac{\sqrt{2} [\alpha + \beta] - 2 - \alpha \beta}{[\alpha + \beta][2 - \alpha^2][\beta^2 - 2]} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{D}{[\alpha + \beta][\sqrt{2} + \alpha][\sqrt{2} + \beta]} \quad (4.233) \end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\frac{x^2}{[x^2 + 2][x^2 + \alpha^2][x^2 - \beta^2][x^2 + \gamma^2]} = \frac{A_b}{x^2 + 2} + \frac{B_b}{x^2 + \alpha^2} + \frac{C_b}{x^2 + \beta^2} + \frac{D_b}{x^2 + \gamma^2} \quad (4.234)$$

mit

$$A_b = \frac{2}{[\alpha^2 - 2][\beta^2 - 2][2 - \gamma^2]}$$

$$B_b = \frac{\alpha^2}{[2 - \alpha^2][\beta^2 - \alpha^2][\alpha^2 - \gamma^2]}$$

$$C_b = \frac{\beta^2}{[2 - \beta^2][\alpha^2 - \beta^2][\beta^2 - \gamma^2]}$$

$$D_b = \frac{\gamma^2}{[2 - \gamma^2][\alpha^2 - \gamma^2][\gamma^2 - \beta^2]}$$

Weiterhin kann man sagen, daß

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{x^2}{[x^2 + 2][x^2 + \alpha^2][x^2 + \beta^2][x^2 + \gamma^2]} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left[2 \frac{A_b}{x^2 + 2} + \frac{B_b}{x^2 + \alpha^2} + \frac{C_b}{x^2 + \beta^2} + \frac{D_b}{x^2 + \gamma^2} \right] dx \\ &= A_b \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + B_b \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{2} + C_b \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2} + D_b \frac{1}{\gamma} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{[\alpha^2 - 2][\beta^2 - 2][2 - \gamma^2]} + \frac{\alpha}{[2 - \alpha^2][\beta^2 - \alpha^2][\alpha^2 - \gamma^2]} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\beta}{[2 - \beta^2][\alpha^2 - \beta^2][\beta^2 - \gamma^2]} + \frac{\gamma}{[2 - \gamma^2][\alpha^2 - \gamma^2][\gamma^2 - \beta^2]} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2} + \beta + \gamma + \alpha}{[\alpha + \beta][\alpha + \gamma][\beta + \gamma][\sqrt{2} + \gamma][\sqrt{2} + \beta][\sqrt{2} + \alpha]} \end{aligned} \quad (4.235)$$

ist. So folgt letztlich für Gl.(4.231) durch Einfügen der Gl.(4.232) -Gl.(4.235) der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{[D(x^2+\gamma^2) - 1] x^2 dx}{[x^2+2][x^2+\alpha^2][x^2+\beta^2][x^2+\gamma^2]} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{D}{[\alpha+\beta][\sqrt{2}+\alpha][\sqrt{2}+\beta]} - \frac{\sqrt{2} + \beta + \gamma + \alpha}{[\alpha+\beta][\alpha+\gamma][\beta+\gamma][\sqrt{2}+\gamma][\sqrt{2}+\beta][\sqrt{2}+\alpha]} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{D[\sqrt{2}+\gamma][\alpha+\gamma][\beta+\gamma] - [\alpha+\beta+\gamma+\sqrt{2}]}{[\alpha+\beta][\alpha+\gamma][\beta+\gamma][\sqrt{2}+\gamma][\sqrt{2}+\beta][\sqrt{2}+\alpha]} \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{[D\gamma^2-1][\beta+\sqrt{2}+\gamma+\alpha] + D[\sqrt{2}\alpha\beta+\sqrt{2}\gamma\beta+\sqrt{2}\alpha\gamma+\alpha\beta\gamma]}{[\alpha+\beta][\alpha+\gamma][\beta+\gamma][\sqrt{2}+\gamma][\sqrt{2}+\beta][\sqrt{2}+\alpha]}
 \end{aligned} \tag{4.236}$$

Werden nun die Stoßbedingungen $y_1=0$ und Gl.(4.230) in die Gl.(4.229) eingesetzt, so folgt der Zusammenhang

$$P = -\frac{a_1 t}{b} \int_0^{\infty} \frac{[x_1 - 1]^{1/2}}{[x_1 + 1]^{1/2}} \pi x \frac{\partial p}{\partial x} dx_1 + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \tag{4.237}$$

und mit Gl.(4.231) der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{a_1 t}{b} \int_0^{\infty} \frac{[x_1 - 1]^{1/2}}{[x_1 + 1]^{1/2}} C \times \frac{C [D(x_1-1+\gamma^2) - 1] [\alpha+\beta] \sec(x)}{[x_1 + 1]^{1/2} [x_1-1+\gamma^2] [x_1-1+\alpha^2] [x_1-1+\beta^2]} dx_1 \\
 &+ \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right]
 \end{aligned} \tag{4.238}$$

Mit

$$x_1 - 1 = x^2$$

und

$$dx_1 = 2 x dx$$

erhält man aus Gl.(4.238) den Zusammenhang:

$$P = -\frac{a_1 t}{b} \int_0^\infty \frac{x C [D(x^2 + \gamma^2) - 1] [\alpha + \beta] \tan(x) dx}{[x^2 + 2][x^2 + \gamma^2][x^2 + \alpha^2][x^2 + \beta^2]} + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.239)$$

$$\Rightarrow P = -\frac{2 a_1 t}{b} C [\alpha + \beta] \tan(x) \int_0^\infty \frac{[D(x^2 + \gamma^2) - 1] x^2 dx}{[x^2 + 2][x^2 + \gamma^2][x^2 + \alpha^2][x^2 + \beta^2]} + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.239)$$

Durch das Einfügen von

$$a_1 = \frac{U}{M_1 + \cos(x)}$$

resultiert mit Gl.(4.236) für P:

$$P = -\frac{2 t}{b} \frac{U}{M_1 + \cos(x)} C [\alpha + \beta] \tan(x) \frac{\pi [D\gamma^2 - 1][\sqrt{2 + \alpha + \beta + \gamma}] + D[\sqrt{2\alpha\beta} + \sqrt{2\alpha\gamma} + \sqrt{2\beta\gamma} + \alpha\beta\gamma]}{2 [\alpha + \beta][\alpha + \gamma][\beta + \gamma][\sqrt{2 + \gamma}]\sqrt{2 + \beta}[\sqrt{2 + \alpha}]} \quad (4.240)$$

bzw.

$$P = -\frac{K U t}{b} + \mathbf{A} + O\left[\frac{1}{t}\right] \quad (4.241/C.24)$$

Die Konstante K besitzt dabei in Gl.(4.241/C.24) die Form:

$$K = \frac{C \pi [\alpha + \beta] \tan(x)}{M_1 + \cos(x)} \frac{[D\gamma^2 - 1][\sqrt{2 + \alpha + \beta + \gamma}] + D[\sqrt{2\alpha\beta} + \sqrt{2\alpha\gamma} + \sqrt{2\beta\gamma} + \alpha\beta\gamma]}{[\alpha + \beta][\alpha + \gamma][\beta + \gamma][\sqrt{2 + \gamma}]\sqrt{2 + \beta}[\sqrt{2 + \alpha}]} \quad (4.241/C.25).$$

Mit

$$\alpha + \beta = \sqrt{2} M^2 \cos(x) \quad (4.242)$$

und

$$\alpha \beta = 2 M^2 \quad (4.243)$$

und ferner

$$\gamma = \frac{\sqrt{2} [M_1 + \cos(\alpha)]}{M_1 \cos(\alpha) + 1} \quad (4.244)$$

erhält man aus Gl.(4.241/C.25) die geänderte Form für die Konstante

$$K = \frac{2 M_1 [M_1 + \cos(\alpha)] \sin(\alpha) [\beta + \gamma] [\gamma + \alpha]}{\pi [M_1 \cos(\alpha) + 1]^2} \quad (4.245)$$

Letztlich erhält man nun für die Druckänderung aufgrund der Querschnittsvariation über die Gleichung

$$\delta (p_1 - p_0) P(x,y,t) = \int_0^\infty (p_1 - p_0) P(x-\xi, y, t-\frac{\xi}{t}) \delta' d\xi \quad (4.210/C.10)$$

mit

$$\frac{dy}{d\xi} = \delta'(\xi) = \delta \quad (4.246)$$

den Zusammenhang

$$\delta (p_1 - p_0) P(x,y,t) = \int_0^\infty (p_1 - p_0) P(x-\xi, y, t-\frac{\xi}{t}) g'' d\xi \quad (4.247)$$

bzw.

$$\delta (p_1 - p_0) P(x,y,t) = \int_0^\infty (p_1 - p_0) P(x-\xi, y, t-\frac{\xi}{t}) dg'(s) \quad (4.248)$$

da die Heaviside Einheitsfunktion die Form

$$dy/dx = \int_0^\infty H(x-\xi) dg'(\xi) = g'(x) \quad (4.249)$$

für $H(x) = 1$ bei $x > 0$ und $H(x) = 0$ bei $x < 0$ annimmt. Durch die Begrenzung des Integrals folgt damit aus Gl.(4.248) schließlich die Druckdifferenz:

$$p_0 - p_1 = \int_0^{x_1} (p_1 - p_0) P(x-\xi, y, t-\frac{\xi}{t}) g'' d\xi \quad (4.250)$$

Nach der Umformung folgt schließlich:

$$p - p_1 = (p_1 - p_0) \int_0^{x_1} -K U \frac{\left[\frac{t - \xi}{t} \right]}{b} g'' d\xi + (p_1 - p_0) \int_0^{x_1} \mathbf{A} g'' d\xi \quad (4.251)$$

$$\Rightarrow p - p_1 = (p_1 - p_0) \frac{K}{b} \int_0^{x_1} [U t - \xi] g'' d\xi + A_1 \quad (4.252)$$

$$\Rightarrow p - p_1 = (p_1 - p_0) \frac{K}{b} \left[[U t - \xi] g' \Big|_0^{x_1} + \int_0^{x_1} g' d\xi \right] + A_1 \quad (4.253)$$

$$\Rightarrow p - p_1 = (p_1 - p_0) \frac{K}{b} \left[[U t - \xi] g' \Big|_{x=x_1} + A_2 \right] + A_1 \quad (4.254)$$

$$\Rightarrow [P - p_1]_{B_1} - [P - p_1]_B = - (p_1 - p_0) \frac{K}{b} \left[[U t - \xi] g' \Big|_{x=x_1} + (-x_1) g' \Big|_{x=x_1} \right] \quad (4.255)$$

$$\Rightarrow [P - p_1]_{B_1} - [P - p_1]_B = (p_1 - p_0) \frac{K}{b} x_1 g' \Big|_{x=x_1} \quad (4.256)$$

$$\Rightarrow [P - p_1]_{B_1} - [P - p_1]_B = \frac{K (p_1 - p_0) x_1}{b} \frac{c - b}{x_1} \quad (4.257)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{[P - p_1]_{B_1} - [P - p_1]_B = K (p_1 - p_0) \left[\frac{c}{b} - 1 \right]}} \quad (4.258/C.28)$$

Variiert man die Konstante K für p_1/p_0 von 1 bis ∞ , so zeigt sich der bekannte Funktionsverlauf, wie er sich auch angeblich bei Chester (1954), Chisnell (1957) und bei Whitham (1958) für eine Kanalströmung mit variiertem Querschnitt zeigt. Hier, bei Lighthill (1943) und Chester (1948) ist die Strömung zwar nur an zwei Seiten begrenzt, dafür fließt aber auch der Einfluß einer rücklaufenden, schwachen Stoßwelle für Unterschallströmungen in den Berechnungsalgorithmus der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ ein.

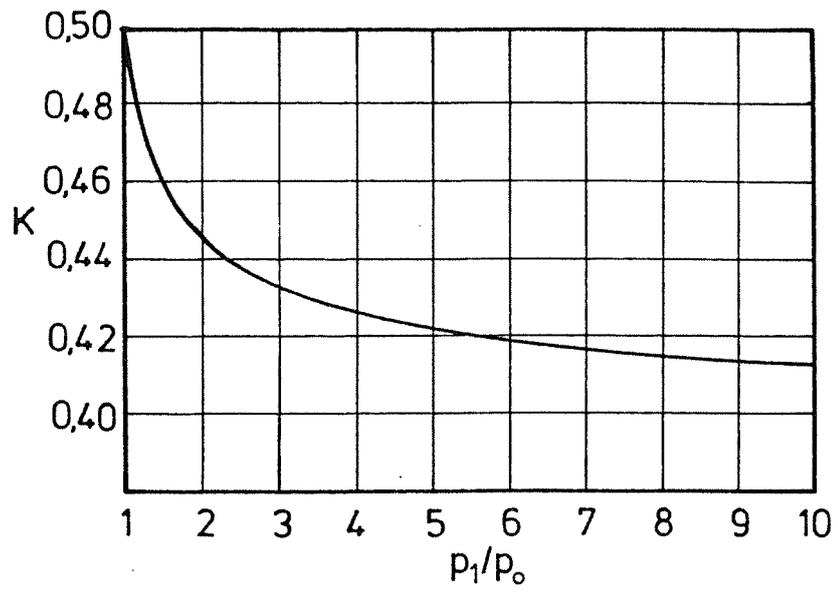


Abb. 4.7: Darstellung der Funktion $K(p_0/p_1)$

5. Nachvollziehen der Ableitung von Chester (1954) bis zur Erstellung der Differentialgleichung und Vergleich mit den Ableitungen von Chester (1953) und Lighthill (1948)

In einer zweiten Arbeit untersucht Chester (1954) noch einmal die Ausbreitung einer instationären Stoßwelle in einem Kanal mit veränderlichem Querschnitt. Im Gegensatz zu seiner früheren Arbeit aus dem Jahre 1953 kann hier die Stoßstärke und die Form des Kanalquerschnitts willkürlich gewählt werden. Es zeigt sich dabei in der Arbeit von Chester (1954), daß die Änderung des Druckverhältnisses über dem instationären Stoß nur von der Querschnittsänderung und nicht von dem speziellen Profil des Kanals abhängt.

Chester (1954) leitet dazu eine Beziehung her, wie sie später auch von Chisnell (1957) und Whitham (1958) unter leicht geänderten Voraussetzungen bestätigt wurden. Während dies bereits in dieser Arbeit für Whitham (1958) detailliert nachvollzogen werden konnte, zeigte bereits Neuberger (1988) und Gajewski (1988), daß der Ansatz von Chisnell (1957) fehlerbehaftet ist und bei einer Korrektur zu keinem physikalisch deutbaren Ergebnis führt.

In diesem Abschnitt soll nun nachgewiesen werden, daß der Ansatz von Chester (1954) auch fehlerbehaftet ist, und bei einer Korrektur zu einem anderen Ergebnis führt. Ein direkter Vergleich zu der früheren Arbeit von Lighthill (1948) und Chester (1953) ist dadurch erschwert, da einerseits die Arbeiten von Lighthill (1948) und Chester (1953) andere Randbedingungen beschreiben und andererseits bei einer Korrektur von Chester (1954) die in der Literatur aufgezeigte Änderung des Druckverhältnisses durch Querschnittsvariation analog zu

$$-K (p_1 - p_0) [\Delta S] / S \quad (5.1)$$

mit

$$0,5 \geq K \geq 0,394 \quad (5.2)$$

nicht erzielt werden kann.

Um einen Eindruck über den Fehler in der Arbeit von Chester (1954) zu gewinnen, sollen nun die Rechenschritte bis zur Erstellung der Differentialgleichung nachvollzogen werden.

5.1. Übergangsbeziehungen über einen geraden Verdichtungsstoß entsprechend dem § 2 von Chester (1954)

Für spätere Ableitungen benötigt Chester (1954) die Übergangsbeziehungen über einen geraden Verdichtungsstoß.

Dazu führt Chester (1954) die Stoßgeschwindigkeit U_0 und für das Fluid im Nachlauf des Stoßes die mittlere Strömungsgeschwindigkeit U_1 , den Druck p_1 , die Dichte ρ_1 und die Schallgeschwindigkeit a_1 ein. Die entsprechenden Größen vor der Stoßwelle bezeichnet Chester mit dem Index 0, so daß man für den Druck die Größe p_0 , für die Dichte die Größe ρ_0 und die Schallgeschwindigkeit die Größe a_0 besitzt. Vor dem Verdichtungsstoß herrscht kein Massenstrom, so daß $U_0=0$ beträgt. Wie in Kapitel (2.2.3.) wird auch hier eine relative Geschwindigkeit

$$U_1 = U_0 - q_1 \quad (5.3)$$

für den Stoß relativ zur Nachlaufgeschwindigkeit q_1 gewählt. Mit Hilfe der Machzahl

$$M_0 = U_0/a_0 \quad (5.4)$$

erhält man mit dem Isentropenexponenten γ Beziehungen für die Nachlaufgeschwindigkeit q_1 , die Stoßgeschwindigkeit U_1 , den Druck p_1 und die Machzahl M_1 .

Analog zu Gl.(2.36) liegt hier der Zusammenhang für die Nachlaufgeschwindigkeit q_1 in Abhängigkeit der Stoßgeschwindigkeit U_0 und der Machzahl M_0 vor:

$$q_1 = \frac{2 U_0}{\gamma + 1} [1 - M_0^{-2}] \quad (5.5/C.1)$$

Mit Hilfe der relativen Betrachtungsweise

$$U_1 = U_0 - q_1 \quad (5.3)$$

erhält man durch das Einfügen der Gl.(5.5/C.1) in Gl.(5.3) eine Beziehung für die relative Stoßgeschwindigkeit U_1 in Abhängigkeit der absoluten Stoßgeschwindigkeit U_0 und der Machzahl M_0 :

$$U_1 = U_0 - \frac{2 U_0}{\gamma + 1} [1 - M_0^{-2}] \quad (5.6)$$

Durch Umformen der Gl.(5.6) resultiert schließlich:

$$U_1 = \frac{(\gamma+1) U_0 - 2 U_0 [1 - M_0^{-2}]}{\gamma + 1} \quad (5.7)$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{U_0}{\gamma + 1} [\gamma + 1 - 2 + 2 M_0^{-2}] \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U_1 = U_0 - q_1 = \frac{U_0}{\gamma + 1} [\gamma - 1 + 2 M_0^{-2}]} \quad (5.9/C.2)}$$

Ausgangspunkt für das Druckverhältnis über dem Verdichtungsstoß ist die Beziehung Gl.(2.32), für die hier analog gilt:

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} [M_0^2 - 1] \quad (5.10)$$

Durch einfache algebraische Umformungen der Gl.(5.10)

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_0^2 - 2\gamma] + 1 \quad (5.11)$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_0^2 - 2\gamma + \gamma + 1] \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_0^2 - \gamma + 1] \quad (5.13)$$

resultiert dann für das Druckverhältnis über dem Stoß

$$p_1 = \frac{p_0}{\gamma + 1} [2\gamma M_0^2 - \gamma + 1] \quad (5.14/C.3)$$

Mit Hilfe der Machzahl

$$M_0 = \frac{U_0}{a_0} \quad (5.4)$$

des idealen Gasgesetzes

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R T_0 \quad (5.15)$$

und der Schallgeschwindigkeit

$$a_0^2 = \gamma R T_0 \quad (5.16)$$

erhält man über die Zwischenbeziehung

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{\gamma} \quad (5.17)$$

durch Einsetzen in Gl.(5.14) schließlich den Zusammenhang

$$\underline{\underline{p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 \left[U_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] = \frac{p_0}{\gamma + 1} [2 \gamma M_0^2 - \gamma + 1]}} \quad (5.18/C.3)$$

Durch Einfügen der kritischen Machzahlen analog zu Gl.(2.23)

$$M_1^* = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (5.19a)$$

$$M_2^* = \frac{(\gamma + 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \quad (5.19b)$$

in die Prandtl-Beziehung (siehe auch Gl.2.28)

$$M_1^* = \frac{1}{M_0^*} \quad (5.20)$$

folgt ein Zusammenhang zwischen den Machzahlen M_1 und M_0 :

$$M_1^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{\gamma M_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \quad (5.21)$$

Durch algebraische Umformung der Gl.(5.21)

$$M_1^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_0^2}{2 \gamma M_0^2 - (\gamma - 1)} \quad (5.22)$$

$$\Rightarrow M_1^2 = \frac{(\gamma - 1) + 2 M_0^{-2}}{2 \gamma - (\gamma - 1) M_0^{-2}} \quad (5.23)$$

$$\Rightarrow M_1 = \left[\frac{\gamma - 1 + 2 M_0^{-2}}{2 \gamma - (\gamma - 1)} \right]^{1/2} \quad (5.24)$$

und mit Hilfe der Machzahl

$$M_1 = \frac{U_1}{a_1} \quad (5.25)$$

erhält man dann die quantitative Beziehung:

$$\underline{\underline{M_1 = \frac{U_1}{a_1} = \left[\frac{\gamma - 1 + 2 M_0^{-2}}{2 \gamma - (\gamma - 1)} \right]^{1/2}}} \quad (5.26/C.4)$$

Für die Nachlaufmachzahl

$$m_0 = \frac{q_1}{a_1} = \frac{q_1}{(U_1/M_1)} = \frac{M_1 q_1}{U_1} \quad (5.27)$$

ergibt sich durch Einfügen der Gl.(5.5/C.1) und Gl.(5.9/C.2) ergibt sich

$$m_0 = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2 [1 - M_0^{-2}]}{\gamma - 1 + 2 M_0^{-2}} \quad (5.28)$$

und mit Gl.(5.26/C.4)

$$\Rightarrow m_0 = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2 [1 - M_0^{-2}]}{M_1^2 [2\gamma - (\gamma-1) M_0^{-2}]} \quad (5.29)$$

erhält man durch Umsortierung den Zusammenhang

$$\Rightarrow m_0 = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2}{M_1^2} \frac{[1 - M_0^{-2}]}{[2\gamma - (\gamma-1) M_0^{-2}]} \quad (5.30)$$

Wird die Gl.(5.30) mit $(\gamma+1)$ erweitert, so folgt:

$$\Rightarrow m_0 = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2}{M_1^2} \frac{(\gamma+1)}{(\gamma+1)} \frac{[1 - M_0^{-2}]}{[2\gamma - (\gamma-1) M_0^{-2}]} \quad (5.31)$$

Nach einer Ausmultiplikation des Zählers resultiert:

$$\Rightarrow m_q = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2}{M_1} \frac{\gamma + 1 - \gamma M_0^{-2} - M_0^{-2}}{(\gamma + 1) [2\gamma - (\gamma - 1) M_0^{-2}]} \quad (5.32)$$

$$\Rightarrow m_q = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2}{M} \frac{2\gamma - (\gamma - 1) M_0^{-2} - \gamma + 1 - 2 M_0^{-2}}{(\gamma + 1) [2\gamma - (\gamma - 1) M_0^{-2}]} \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow m_q = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2}{M} \frac{1 - \frac{\gamma - 1 + 2 M_0^{-2}}{[2\gamma - (\gamma - 1) M_0^{-2}]}}{(\gamma + 1)} \quad (5.34)$$

schließlich mit Gl. (5.26/C.4) der Zusammenhang:

$$\underline{\underline{m_q = \frac{q_1}{a_1} = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{1 - M_1^2}{M_1}}} \quad (5.35/C.5)$$

5.2. Randbedingungen eines nicht gleichförmigen Stoßes entsprechend dem §3 von Chester (1954)

Als nächstes sollen nun die Randbedingungen des Stoßes hergeleitet werden, wobei von einer Ausbreitung kleiner Verwirbelungen im Nachlauf des sich ausbreitenden Stoßes ausgegangen wird.

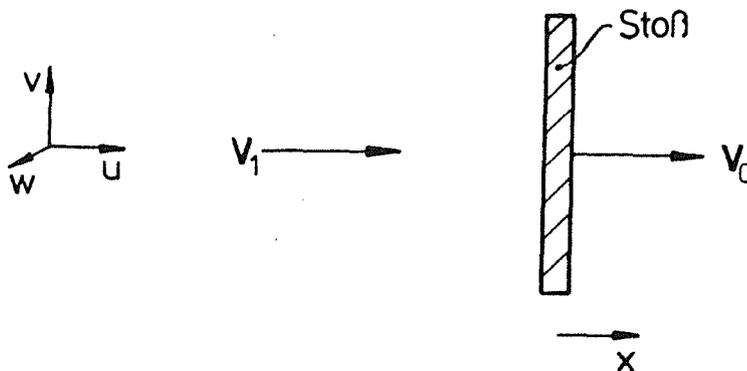


Abb. 5.1: Koordinatensystem analog zu Chester (1954)

Durch Einführen des Zylinderkoordinatensystems (x', r, Θ) relativ zu einem festen Punkt auf der x' -Achse (siehe Abb.(5.1) ergeben sich für die Geschwindigkeit und den Druck die jeweiligen Größen $\mathbf{V}_1 = (q_1 + u, v, w)$ und $(p_1 + p)$. Dabei soll die Normalgeschwindigkeit des Stoßes \mathbf{V}_0 sein.

Für die Zylinderkoordinaten (x', r, Θ) folgt damit direkt für den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{V}_1 aus Gl.(5.9/C.2) der Zusammenhang

$$\underline{\underline{\mathbf{V}_1 = \frac{2 \mathbf{V}_0}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{V_0^2} \right]}} \quad (5.36/C.6a)$$

bzw.

$$\underline{\underline{\mathbf{V}_1 = \frac{2 \mathbf{V}_0}{\gamma + 1} \left[1 - M_0^{-2} \right]}} \quad (5.37)$$

und für den Druck ergibt sich Gl.(5.18/C.3) die Beziehung

$$\underline{\underline{p_1 + p = \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[V_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right]}} \quad (5.38/C.6b)$$

Unter der Annahme kleiner Änderungen $f(r, \Theta, t)$ gilt

$$V_0 = (U_0 + f_t) \quad (5.39)$$

und für den Einheitsvektor normal zum Punkt (r, Θ) des Stoßes $(1, -f_r, -f_{r,\Theta})$ resultiert der Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{V}_0 = (U_0 + f_t, -U_0 f_r, -U_0 f_{\Theta,r}) \quad (5.40/C.8)$$

Durch Substitution des Geschwindigkeitsvektors Gl.(5.40) in die Gl.(5.36/C.6a) erhält man für die Geschwindigkeitskomponente des Stoßes in x -Richtung

$$u = \frac{2 (\mathbf{V}_0)_x}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{V_0^2} \right] \quad (5.41)$$

den Zusammenhang:

$$(q_1 + u) = \frac{2(U_0 + f_t)}{\gamma + 1} \left[1 - M_0^{-2} \right] \quad (5.42)$$

Durch Umformung

$$u = \frac{2 f_t}{\gamma + 1} [1 - M_0^{-2}] + \frac{2 U_0}{\gamma + 1} [1 - M_0^{-2}] - q, \quad (5.43)$$

und mit Gl.(5.4/C.1) folgt schließlich für die x-Komponente des Geschwindigkeitsvektors:

$$\Rightarrow \underline{\underline{u = \frac{2}{\gamma + 1} [1 - M_0^{-2}] f_t}} \quad (5.44/C.9a)$$

Hier zeigt sich der erste Fehler in der Arbeit von Chester (1954), wodurch die folgenden Ableitungen in jener Arbeit, die sich auf diesen Zusammenhang beziehen, alle falsch sind!

Für die y-Komponente des Geschwindigkeitsvektors Gl.(5.40/C.8) für Gl.(5.36/6a)

$$v = \frac{2 (\mathbf{V}_0)_x}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{V_0^2} \right] \quad (5.45)$$

resultiert durch Einsetzen der Komponenten

$$v = \frac{-2 U_0 f_r}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{V_0^2} \right] \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow v = \frac{-2 U_0}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{V_0^2} \right] f_r \quad (5.47)$$

und mit Gl.(5.4/C.1) schließlich der Zusammenhang:

$$\underline{\underline{v = -q, f_r}} \quad (5.48/C.9b)$$

Für die z-Komponente des Geschwindigkeitsvektors (5.40/C.8) für Gl.(5.36/C.6a)

$$w = \frac{2 (\mathbf{V}_0)_z}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{a_0^2}{V_0^2} \right] \quad (5.49)$$

folgt analog durch Einsetzen der Komponenten

$$v = \frac{-2 U_0 f_r}{\gamma + 1} \left[1 - M_0^{-2} \right] f_{\theta/r} \quad (5.50)$$

mit Gl.(5.4/C.1) dann der Zusammenhang:

$$\Rightarrow \underline{v = -q_1 f_{\theta/r}} \quad (5.51/C.9c)$$

Wird die Gl.(5.39) in die Gl.(5.38/C.6b) eingesetzt, so folgt der Zusammenhang

$$p_1 + p = \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[(U_0 + f_i)^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] \quad (5.52)$$

und durch Umformung schließlich die Beziehung

$$p = \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[(U_0 + f_i)^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] - p_1 \quad (5.52)$$

Durch Einfügen der Gl.(5.18/C.3)

$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 \left[U_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] \quad (5.18/C.3)$$

in die Gl.(5.52) folgt durch Einsetzen

$$p = \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[U_0^2 + 2 U_0 f_i^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] - \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[U_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] \quad (5.53)$$

und durch Umformung schließlich für den Druck den Zusammenhang

$$p = \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[U_0^2 + 2 U_0 f_i^2 + f_i^2 - U_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} a_0^2 \right] \quad (5.54)$$

$$\Rightarrow p = \frac{2 \rho_0}{\gamma + 1} \left[2 U_0 f_i + f_i^2 \right] \quad (5.55)$$

Unter Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung folgt somit die Beziehung von Chester (1954) für den Druck vor dem Stoß

$$\underline{\underline{p = \frac{4 \rho_0 U_0}{\gamma + 1} f_t}} \quad (5.56/C.9d)$$

und durch Indextausch (1 gegen 0) die Beziehung für den Druck hinter dem Verdichtungsstoß

$$\underline{\underline{p = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_t}} \quad (5.57/C.9d)$$

5.3 Bewegungsgleichungen in der gestörten Strömung analog zu §4 von Chester (1954)

Zur Herleitung der allgemeinen Bewegungsgleichungen der gestörten Nachlaufströmung setzt Chester (1954) das Koordinatensystem relativ zur Strömungsrichtung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit des Nachlaufs an. Die Koordinaten sind somit (x, r, θ) für ein Zylinderkoordinatensystem, wobei dies für den Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{V} = (u, v, w) \quad (5.58)$$

gelten soll.

Aus der Kontinuitätsbilanz

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho \, d\mathfrak{B} + \oint_S \rho \, \mathbf{V} \, d\mathfrak{E} = 0 \quad (5.59/2.1)$$

ergibt sich hier schließlich für kleine Störungen im linearen Fall die bekannte Bilanz wie für Gl.(2.2):

$$\underline{\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_1 \nabla \mathbf{V} = 0}} \quad (5.60/C.10)$$

Für den allgemeinen Impulssatz

$$\oint_S [\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{e}] \mathbf{v} + \oint_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} d\vartheta = \oint_V \rho \mathbf{f} d\vartheta - \oint_S p d\mathbf{e} + \mathfrak{R}_{\text{viskos}} \quad (5.61)$$

resultiert unter Vernachlässigung der Grenzschichteinflüsse und für den linearen Fall bei kleinen Störungen nach Anderson (1982) die Beziehung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1} \nabla p = 0 \quad (5.62/C.11)$$

Hier, bei der Gl.(5.62/C.11), zeigt sich bei Chester (1954) ein Schreibfehler, der aber auf die nachfolgenden Formeln keinen Einfluß hat.

Für eine isentrope Strömung folgt sofort der Zusammenhang:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (5.63/C.12)$$

Hier zeigt sich ein Schreibfehler in der Arbeit von Chester (1954), der zu Verwirrungen mit der ursprünglichen Querschnittsfläche S führen kann.

Wird die Beziehung Gl.(5.63/C.12) analog zu Gl.(3.19) in die Gl.(5.60/C.10) eingesetzt, so erhält man direkt den Zusammenhang:

$$\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (5.64/C.13)$$

Durch Gleichsetzen der Gl.(5.60/C.10) und der Gl.(5.64/C.13)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 \nabla \mathbf{v} \quad (5.65)$$

folgt durch Subtrahieren des Termes $\rho_1 \nabla \mathbf{v}$ der Zusammenhang:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (5.66/C.14)$$

Nach Chester (1954) beschreibt die Gl.(5.66/C.14) die Ausbreitung der kleinen Dichteänderungen analog zur Wellengleichung, ungeachtet der Tatsache, daß trotzdem Entropieänderungen bzw. Verwirbelungen in der Nachlaufströmung auftreten.

5.4. Anwendung der Bilanzgleichung bezüglich der Strömungsverhältnisse im Stoßwellenrohr entsprechend dem §5 von Chester (1954)

Zur Ableitung seines Ansatzes greift Chester (1954) auf ein Zylinderkoordinatensystem zurück, da die Strömung durch eine Röhre mit den Grenzen

$$\underline{\underline{r = R(x', \Theta) = R(x + q_1 t, \Theta)}} \quad (5.67/C.15)$$

verlaufen soll. R ist dabei willkürlich, soll aber nur kleine Änderungen R_x besitzen.

Die Komponenten orthogonal zur Randbedingung r sind

$$\underline{\underline{[-R_x, -R_\Theta/R, 1]R / [R^2 + R_\Theta^2]^{1/2}}} \quad (5.68)$$

mit dem Normalenvektor

$$\underline{\underline{V_n = q_1 \frac{R R_x}{(R^2 + R_\Theta^2)^{1/2}}}} \quad (5.69/C.16)$$

Aus der Gl.(5.62/C.11) folgt für die Geschwindigkeit V_n direkt die Beziehung

$$\underline{\underline{\frac{\partial V_n}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial n}}} \quad (5.70/C.17)$$

Schließlich erhält man mit der Normalengeschwindigkeit

$$\underline{\underline{V_n = q_1 \frac{R R_x}{(R^2 + R_\Theta^2)^{1/2}}}} \quad (5.69/C.16)$$

für eine Erweiterung des Differentials analog zu

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = \frac{\partial V_n}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \frac{R R_x}{(R^2 + R_\Theta^2)^{1/2}}}{\partial x} q_1 \quad (5.70)$$

und mit der Definition der Nachlaufgeschwindigkeit

$$\frac{\partial x}{\partial t} = q_1 \quad (5.71)$$

dann den Zusammenhang

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = q_1^2 \frac{\frac{\partial}{\partial x} \frac{R R_x}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}}}{\frac{\partial}{\partial x}} = q_1^2 \left[\frac{1}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}} \frac{\partial R R_x}{\partial x} + R R_x \frac{\frac{\partial}{\partial x} \frac{R R_x}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}}}{\frac{\partial}{\partial x}} \right] \quad (5.72)$$

der mit $R_x \ll 1$ zu

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = q_1^2 \left[\frac{1}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}} \frac{\partial R R_x}{\partial x} + 0 \right] \quad (5.73)$$

vereinfacht werden kann, so daß mit der mathematischen Definition von

$$\frac{\partial R R_x}{\partial x} = \frac{\frac{\partial R}{\partial x} R}{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{1}{2} R^2}{\frac{\partial}{\partial x^2}} \quad (5.74)$$

zuerst der Ausdruck

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = q_1^2 \frac{1}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}} \frac{\frac{\partial^2}{\partial} \frac{1}{2} R^2}{\frac{\partial}{\partial x^2}} \quad (5.75)$$

und mit Gl.(5.70/C.17) dann die Beziehung für den Druckabfall in Normalenrichtung für $r=R$ resultiert:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \rho_1 \frac{\partial V_n}{\partial t} = - \frac{\rho_1 q_1^2}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}} \frac{\frac{\partial^2}{\partial} \frac{1}{2} R^2}{\frac{\partial}{\partial x^2}} \quad (5.76/C.18)$$

Unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung des Druckes in der Stromröhre kann zur Bestimmung eines mittleren Druckes die Gl.(5.76/C.18) aufintegriert werden, so daß man die Beziehung

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \int \rho_1 q_1^2 \frac{1}{R^2 + R_\theta^2)^{1/2}} \frac{\partial^2 \frac{1}{2} R^2}{\partial x^2} dS \quad (5.77)$$

erhält. Mit Hilfe der Zylinderkoordinatentransformation

$$dS = r d\Theta \quad (5.78a) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dS}{r} = d\Theta \quad (5.78b)$$

folgt dann durch mehrere algebraische Umformungen der Gl.(5.77)

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \rho_1 q_1^2 \int \frac{\partial^2 \frac{1}{2} R^2}{\partial x^2} d\Theta \quad (5.79)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \rho_1 q_1^2 \frac{\partial^2 \int \frac{1}{2} R^2 d\Theta}{\partial x^2} \quad (5.80)$$

wobei hier der Zusammenhang

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \rho_1 q_1^2 \frac{\partial^2 \Delta S}{\partial x^2} \quad (5.81)$$

mit

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \rho_1 q_1^2 \Delta S''(x + q_1 t) \quad (5.82)$$

gelten soll, so daß man die Beziehung

$$\underline{\underline{- \rho_1 q_1^2 \frac{\partial^2 \int \frac{1}{2} R^2 d\Theta}{\partial x^2} = - \rho_1 q_1^2 \Delta S''(x + q_1 t)}} \quad (5.83/C.20)$$

erhält. Mit dem allgemeinen mathematischen Zusammenhang

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (5.84)$$

ergibt sich durch Transformation von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (5.85)$$

über ein Gleichsetzen mit

$$\nabla^2 p = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (5.86)$$

schließlich ein Zusammenhang

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (5.87)$$

der in integrierter Form lautet:

$$\underline{\underline{\iint \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] dS = \iint \left[\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] dS}} \quad (5.89/C.21) .$$

Unter der Annahme einer linearen Theorie folgt mit

$$P = \iint p \, dS \quad (5.90)$$

und der Gl.(5.89/C.21) zuerst

$$\begin{aligned} \iint \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} \right] dS &= \iint \left[\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] dS \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{1}{a_1^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.91)$$

mit

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \, ds = \iint \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} \right] dS \quad (5.92/C.19)$$

und Gl.(5.83/C.20) dann die Beziehung

$$\underline{\underline{- \rho_1 q_1^2 \Delta S'' (x + q_1 t) = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{1}{a_1^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}} \quad (5.93/C.22)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung (5.93/C.22) kann analog zur Wellengleichung in der Form

$$P = A' \rho_1 q_1^2 \left[F(x + a_1 t) + \Delta S(x + q_1 t) \right] \quad (5.94/C.23)$$

mit der Größe

$$A' = \frac{a_1^2}{a_1^2 - q_1^2} = \frac{1}{1 - m_0^2} \quad (5.95/C.24)$$

bestimmt werden. Dazu muß die Funktion F aus den Randbedingungen bestimmt werden. Hierzu werden die Gl.(5.44/C.9a), Gl.(5.48/C.9b), Gl(5.51/C.9c) und Gl.(5.56/C.9d) zur Hilfe genommen, wobei allerdings darauf geachtet werden muß, daß die Gl.(5.44/C.9a) von Chester (1954) falsch ist und somit Unterschiede in der Herleitung der Gleichungen entstehen können. Mit

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{1}{a_1^2} = \rho_1 q_1^2 \Delta S'' (x + q_1 t) \quad (5.93/C.22)$$

$$p = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_t \quad (5.57/C.9d)$$

und

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left[1 - M_0^{-2} \right] f_t \quad (5.44/C.9a)$$

bzw.

$$u = \frac{q_1 f_t}{U_0} \quad (5.96)$$

folgt durch Umformung

$$f_t = \frac{u U_0}{q_1} \quad (5.97)$$

dann durch Einsetzen in Gl.(5.57/C.9b) zuerst für den Druck

$$p = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} \frac{u U_0}{q_1} \quad (5.98)$$

$$\Rightarrow p = \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} U_0 u \quad (5.99)$$

Durch Differenzieren

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} U_0 \frac{\partial u}{\partial n} \quad (5.100)$$

und mit einer Erweiterung von ∂t

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} U_0 \quad (5.101)$$

ergibt sich mit

$$n = -x \quad (5.102)$$

bzw.

$$\frac{\partial t}{\partial n} = - \frac{\partial t}{\partial x'} \quad (5.103)$$

oder durch ein unterschiedliches Koordinatensystem mit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d V_n}{dt} \quad (5.104)$$

aus der Gl.(5.101) der Zusammenhang

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{d V_n}{dt} \frac{\partial t}{\partial x'} U_0 \quad (5.105)$$

mit

$$U_0 = \frac{\partial x'}{\partial t} \quad (5.106)$$

schließlich der Zusammenhang

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{dV_n}{dt} \quad (5.107/C.25)$$

Zur Herleitung der linken Seite der Gl.(5.76/C.19) wird

$$V_n = q_1 \frac{R R_x}{(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}} \quad (5.69/C.16)$$

herangezogen und durch Differenzenbildung folgt

$$\frac{dV_n}{dt} = q_1 \frac{d R R_x}{(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}} \quad (5.108)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_n}{dt} = q_1 \left[\frac{1}{(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}} \frac{d R R_x}{dt} + R R_x \frac{d \frac{1}{(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}}}{dt} \right] \quad (5.109)$$

Für kleine Querschnittsänderungen ergibt sich mit

$$R_x \ll 1 \quad (5.110)$$

aus Gl.(5.109) die vereinfachte Form

$$\frac{dV_n}{dt} = q_1 \frac{1}{(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}} \frac{d R R_x}{dt} \quad (5.111)$$

die in die Gl.(5.107/C.25) eingesetzt wird, so daß folgt

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{-4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{\partial t}{\partial x} U_0 \frac{d R R_x}{dt} \frac{1}{(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}} q_1 \quad (5.112)$$

Durch Intergration der Gl.(5.112) erhält man

$$\int \frac{\partial p}{\partial n} ds = - \int \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{\partial t}{\partial x} \frac{d R R_x}{dt} dS q_1 \quad (5.113)$$

und über eine Koordinatentransformation in Bezug auf den instationären Stoß resultiert mit

$$x' = x + q_1 t \quad (5.114)$$

bzw.

$$dx' = dx \quad (5.115)$$

aus der Gl.(5.113) die Beziehung

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{q_1 (\gamma + 1)} q_1 \int \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dR R_x}{dt} \frac{dx'}{dt} \frac{dS}{(R^2 + R_0^2)^{1/2}} \quad (5.116)$$

Analog zu den Gl.(5.74) und (5.78a+b) kann die Beziehung (5.116) in Zylinderkoordinaten umgeschrieben werden zu

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{q_1 (\gamma + 1)} q_1 \int \frac{d^2 \frac{1}{2} R^2}{dx^2} d\Theta \quad (5.117)$$

Mit Gl.(5.83/C.20) ergibt sich zuerst aus Gl.(5.117) der Zusammenhang

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{q_1 (\gamma + 1)} q_1 \Delta S''(x + q_1 t) \quad (5.118)$$

und mit

$$x = U_1 t \quad (5.119)$$

bzw.

$$x + q_1 t = (U_1 + q_1) t \quad (5.120)$$

resultiert mit

$$U_1 + q_1 = U_0 \quad (5.3)$$

dann schließlich der linke Teil der Gl.(5.76/C.19) als

$$\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{q_1 (\gamma + 1)} q_1 \Delta S'' (U_0 t) \quad (5.121)$$

nach dem Kürzen von q_1 zu:

$$\underline{\underline{\int \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S'' (U_0 t)}} \quad (5.122/C.27)$$

Als nächstes soll nun der rechte Teil der Gl.(5.76/C.19) hergeleitet werden. Ausgangspunkt ist die Grundgleichung

$$\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (5.64/C.13)$$

die nach einer Subtraktion folgende Form annimmt:

$$\rho_1 \nabla \mathbf{V} = - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.123)$$

Werden die entsprechenden Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$\mathbf{V} = (u+q_1, v, w) \quad (5.124)$$

mit

$$v = -q_1 f_r \quad (5.48/C.9b)$$

und

$$w = -q_1 \frac{f_\theta}{r} \quad (5.51/C.9c)$$

in den Gradienten

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial(q_1 + u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \Theta} + \frac{v}{r} \quad (5.125)$$

ein, so erhält man die Beziehung

$$\nabla \mathbf{V} = u_x - \frac{1}{r} \frac{\partial q_1 f_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial q_1 f_{\theta/r}}{\partial \Theta} - \frac{q_1 f_r}{r} \quad (5.126)$$

Durch algebraische Umformung dieser Beziehung (5.126) folgt:

$$\nabla \mathbf{V} = u_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 f_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial q_1 f_{\theta/r}}{\partial \Theta} \quad (5.127)$$

$$\Rightarrow \nabla \mathbf{V} = u_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 f_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_1 f_{\theta}}{\partial \Theta} \quad (5.128)$$

Setzt man die Gl.(5.128) in die Gl.(5.123) ein, so erhält man

$$\rho_1 \nabla \mathbf{V} = \rho_1 \left[u_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 f_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_1 f_{\theta}}{\partial \Theta} \right] = - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.129)$$

$$\Rightarrow u_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 f_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_1 f_{\theta}}{\partial \Theta} = - \frac{1}{a_1^2 \rho_1} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.130)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r q_1 f_r \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[q_1 f_{\theta} \right] = u_x + \frac{1}{a_1^2 \rho_1} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.131/C.28)$$

Durch Differenzieren nach der Zeit t

$$\frac{d \left[u_x + \frac{1}{a_1^2 \rho_1} \frac{\partial p}{\partial t} \right]}{dt} = \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r q_1 f_r \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[q_1 f_{\theta} \right] \right]}{\partial t} \quad (5.132)$$

und durch Einsetzen der Differentiale von

$$p = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_1 \quad (5.57/C.9d)$$

die jeweils für r

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_{1/r} \quad (5.133)$$

und Θ

$$\frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_{r,\Theta} \quad (5.134)$$

die entsprechende Form besitzen, erhält man durch algebraische Umformungen den Zusammenhang:

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_1 f_r] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} [q_1 f_\Theta] \right]}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \gamma q_1 f_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{\partial q_1 f_\Theta}{\partial t} \quad (5.135)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_1 f_r] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} [q_1 f_\Theta] \right]}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \gamma q_1 \frac{\partial f_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} q_1 \frac{\partial f_\Theta}{\partial t} \quad (5.136)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_1 f_r] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} [q_1 f_\Theta] \right]}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 f_{r,t}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_1 f_{\Theta,t}}{\partial \Theta} \quad (5.137)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_1 f_r] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} [q_1 f_\Theta] \right]}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 \frac{\gamma+1}{4 \rho_1 U_1} p_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_1 \frac{\gamma+1}{4 \rho_1 U_1} p_\Theta}{\partial \Theta} \quad (5.138)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_1 f_r] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} [q_1 f_\Theta] \right]}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 (\gamma+1)}{4 \rho_1 U_1} p_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{(\gamma+1) q_1}{4 \rho_1 U_1} p_{\Theta\Theta} \quad (5.139)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma q_1 (\gamma+1)}{4 \rho_1 U_1} p_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{(\gamma+1) q_1}{4 \rho_1 U_1} p_{\Theta\Theta} = \frac{d \left[\frac{1}{\rho_1 a_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \right]}{dt}$$

(5.140/C.29).

Zur weiteren Herleitung wird von

$$u = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - M_0^{-2} \right] f_t \quad (5.44/C.9a)$$

die Ableitung nach x gebildet

$$u_x = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - M_0^{-2} \right] f_{tx} \quad (5.141)$$

und die Ableitung nach t hergeleitet:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + U_1 u_x \quad (5.142)$$

Mit der x-Komponente der Impulsgleichung (5.62/C.11)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1} p_x = 0 \quad (5.143)$$

bzw. deren Umformung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_1} p_x \quad (5.144)$$

erhält man durch Einsetzen in die Gl.(5.142) den Zusammenhang

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho_1} p_x + U_1 u_x \quad (5.145)$$

und durch Einfügen der Beziehung (5.141) die Form:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho_1} p_x + \frac{2 U_1 \left[1 - M_0^{-2} \right]}{\gamma + 1} f_{tx} \quad (5.146)$$

Aus der Ableitung des Druckes

$$p = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_t \quad (5.56/C.9d)$$

nach x

$$p_x = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_{ix} \quad (5.147)$$

folgt durch Einsetzen in die Gl.(5.141) der Ausdruck

$$u_x = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - M_0^{-2} \right] \frac{p_x (\gamma + 1)}{4 \rho_1 U_1} \quad (5.148)$$

und nach dem Kürzen die Gleichung für u_x :

$$u_x = \frac{\left[1 - M_0^{-2} \right] p_x}{2 \rho_1 U_1} \quad (5.149)$$

Wird dieses u_x der Gl.(5.149) in die Gl.(5.141) eingesetzt, so folgt der Ausdruck für du/dt :

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho_1} p_x + U_1 \frac{\left[1 - M_0^{-2} \right]}{2 \rho_1 U_1} p_x \quad (5.150)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = - \frac{\left[1 + M_0^{-2} \right]}{2 \rho_1} p_x \quad (5.151)$$

Mit Gl.(5.151) werden nun erste Unterschiede in der weiteren Ableitung aufgrund eines Ableitungsfehlers bei Chester (1954) bei der Beziehung

$$u = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - M_0^{-2} \right] f_t \quad (5.44/C.9a)$$

deutlich. Für Gl.(5.44/C.9a) ergibt sich mit

$$p = \frac{4 \rho_1 U_1}{\gamma + 1} f_t \quad (5.57/C.9d)$$

auch der Zusammenhang

$$u = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 - M_0^{-2} \right] \frac{p (\gamma + 1)}{4 \rho_1 U_1} \quad (5.152)$$

bzw. in gekürzter Form der Zusammenhang

$$u = \frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1} p \quad (5.153)$$

Die Ableitung nach x lautet damit:

$$u_x = \frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho U_1} p_x \quad (5.154)$$

Durch algebraische Umformung aus Gl.(5.140/C.29) erhält man zuerst den Ausdruck

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r p_r] + \frac{1}{r^2} p_{\theta\theta} = \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{d}{dt} \left[u_x + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} p_t \right] \quad (5.155)$$

und durch Integration den Zusammenhang

$$\iint \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r p_r] + \frac{1}{r^2} p_{\theta\theta} \right] dS = \iint \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[u_x + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} p_t \right] dS \quad (5.156)$$

Mit Gl.(5.121/C.27) erhält man durch Gleichsetzen mit Gl.(5.157) für Gl.(5.76/C.19) den Gesamtzusammenhang

$$\int \frac{\partial p}{\partial n} ds = \iint \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r p_r] + \frac{1}{r^2} p_{\theta\theta} \right] dS = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{\gamma + 1} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.157)$$

und mit der rechten Seite von Gl.(5.156) für die integrierte Form der Differentialgleichung den Zusammenhang

$$\iint \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[u_x + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} p_t \right] dS = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{\gamma + 1} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.158)$$

Mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1} \rho \quad (5.44/C.9a)$$

und deren Ableitung nach x

$$u_x = \frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1} \rho_x \quad (5.149)$$

folgt für die Gl.(5.158) die Gleichung

$$\iint \frac{4 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1} \rho_x + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} \rho_t \right] ds = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.159)$$

Am Stoß gilt für $x = U_1, t$ mit dem Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{U_1} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.160)$$

dann für die Gl.(5.159) unter der Bedingung von Gl.(5.90) durch Einsetzen der Zusammenhang

$$\frac{8 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1} P_x + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} P_t \right] = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.161)$$

und mit

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{U_1} \quad (5.162)$$

dann für Gl.(5.161)

$$\frac{8 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1^2} P_t + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} P_t \right] = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.163)$$

$$\Rightarrow \frac{8 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \left[\frac{[1 - M_0^{-2}]}{2 \rho_1 U_1^2} + \frac{1}{\rho_1 a_1^2} \right] \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.164)$$

$$\Rightarrow \frac{8 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{1}{2 \rho_1 U_1^2} \left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S''(U_0, t) \quad (5.165)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$P = A' \rho_1 q_1^2 \left[-B' \Delta S \left[\tau (x + a_1, t) \right] + \Delta S(x + q_1, t) \right] \quad (5.166)$$

und dessen differentielle Ableitungen

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A' \rho_1 q_1^2 \left[-B' \Delta S' \tau (U_1 + a_1) + \Delta S' (U_1 + q_1) \right] \quad (5.167)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = A' \rho_1 q_1^2 \left[-B' \Delta S'' \tau^2 (U_1 + a_1)^2 + \Delta S'' (U_1 + q_1)^2 \right] \quad (5.168)$$

erhält man mit

$$U_1 + q_1 = U_0 \quad (5.3)$$

über Gl.(5.169)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = A' \rho_1 q_1^2 \left[-B' \Delta S'' \tau^2 (U_1 + a_1)^2 + \Delta S'' U_0^2 \right] \quad (5.169)$$

schließlich den Zusammenhang

$$\frac{8 \rho_1 U_1}{q_1 (\gamma + 1)} \frac{1}{2 \rho_1 U_1^2} \left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] (-A') \rho_1 q_1^2 \left[B' \Delta S_1'' \tau^2 (U_1 + a_1)^2 - \Delta S'' U_0^2 \right] = - \frac{4 \rho_1 U_1 U_0}{(\gamma + 1)} \Delta S'' (U_0, t) \quad (5.170)$$

aus Gl.(5.165). Unter der Annahme

$$\Delta S_1'' \left[\tau (x + U_1, t) \right] = \Delta S''(U_0, t) \quad (5.171)$$

folgt nach dem Kürzen von Gl.(5.170) die Form

$$\left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] A' q_1 \left[B' \tau^2 (U_1 + a_1)^2 - U_0^2 \right] = \frac{U_1^2 U_0}{1} \quad (5.172)$$

$$\Rightarrow \left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] A' \left[B' \tau^2 U_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{U_1} \right)^2 - U_0^2 \right] q_1 = U_1^2 U_0 \quad (5.173)$$

Nach einer Umformung der Machzahlbeziehung

$$\frac{a_1}{U_1} = \frac{1}{M_1} \quad (5.174)$$

und des Zusammenhanges

$$\tau = \frac{M_1 + m_0}{1 + M_1} \quad (5.175)$$

folgt aus Gl.(5.173) durch Einsetzen von G.(5.174) und Gl.(5.175) die Beziehung

$$\left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] A' U_1^2 \left[B' \frac{(M_1 + m_0)^2}{1 + M_1} \left[1 + \frac{1}{M_1} \right]^2 - \frac{U_0^2}{U_1^2} \right] q_1 = U_1^2 U_0 \quad (5.176)$$

Durch das Einsetzen der Umformungen aus

$$U_1 = U_0 - q_1 \quad (5.3)$$

erhält man mit

$$\frac{U_0}{U_1} = 1 + \frac{q_1}{U_1} \quad (5.177)$$

bzw. mit

$$\frac{q_1}{U_1} = \frac{m_0}{M_1} \quad (5.178)$$

die Gleichung:

$$\left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] A' \left[B' \frac{(M_1 + m_0)^2}{M_1^2} - \left[1 + \frac{m_0}{M_1} \right]^2 \right] = \frac{U_0}{q_1} \quad (5.179)$$

$$\Rightarrow \left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] A' \left[B' \frac{(M_1 + m_0)^2}{M_1^2} - \left[\frac{M_1 + m_0}{M_1} \right]^2 \right] = \frac{U_0}{q_1} \quad (5.180)$$

$$\Rightarrow \left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] A' [B' - 1] [M_1 + m_0]^2 = \frac{U_0 \cdot M_1^2}{q_1} \quad (5.181)$$

$$\Rightarrow A' [B' - 1] = \frac{U_0 M_1^2}{q_1 \left[1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2 \right] [M_1 + m_0]^2} \quad (5.182)$$

Mit dem Ansatz

$$p_2 - p_1 = - A' [B' - 1] \rho_1 q_1^2 \frac{\Delta S}{S} = - K (p_1 - p_0) \frac{\Delta S}{S} \quad (5.183/C.38)$$

wobei mit

$$\rho_1 - \rho_0 = \rho_1 q_1 U_1 \quad (5.184)$$

die Funktion

$$K = \frac{A' [B' - 1] \rho_1 q_1^2}{\rho_1 q_1 U_1} \quad (5.185)$$

gelten soll. Durch Kürzen folgt hieraus

$$K = \frac{A' [B' - 1] q_1}{U_1} \quad (5.186)$$

und mit Gl.(5.182) erhält man

$$K = \frac{U_0 M_1^2 \frac{1}{(M_1 + m_0)^2}}{q_1 (1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2)} \quad (5.187)$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_1^2}{(1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2)} \frac{U_0}{U_1} \quad (5.188)$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_1^2}{(1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2)} \left[1 + \frac{m_0}{M_1} \right] \quad (5.189)$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_1 (M_1 + m_0)}{(1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2) (M_1 + m_0)^2} \quad (5.190)$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_1}{(1 - M_0^{-2} + 2 M_1^2)(M_1 + m_0)} \quad (5.192/C.39)$$

Die Lösung (5.192/C.39) unterscheidet sich deutlich von der Lösung von Chester (1954), der ein

$$K = \frac{1}{(1 + M_0^{-2} + 2 M_1^2)(1 + m_0)}$$

bestimmt.

6. Diskussion und Vergleich der verschiedenen Ableitungen

Ausgangspunkte der verschiedenen Theorien sind die allgemeinen Erhaltungssätze und Stoßbeziehungen. Abgesehen von Chisnell (1957), liegt hier zwischen Lighthill (1948), Chester (1953), Chester (1954) und Whitham (1958) eine Übereinstimmung vor. Nur Chisnell (1957) verzichtet auf den Einsatz einer allgemeinen Bewegungsgleichung, wie die Kontinuitätsbeziehung (2.2.) oder die Navier-Stokes Gleichung (2.14). Chisnell (1957) versucht viel mehr den Zeitverlauf zu überbrücken, in dem er für den stationären Fall gültige Formeln an verschiedenen Orten im Kanal ansetzt. Dadurch werden allerdings die gleichen Formeln miteinander verknüpft, so daß bei einer korrekten Herleitung sich letztendlich alles herauskürzt. Gajewski (1988) zeigt dies deutlich in seiner Studienarbeit. Damit benutzt die theoretische Herleitung von Chisnell (1957) zu wenig strömungsphysikalische Voraussetzung, um eine eindeutige und richtige Lösung zu finden. Der Ansatz von Chisnell (1957) ist somit unsinnig.

Unterschiede in den anderen Theorien treten vor allen Dingen in den eingesetzten Randbedingungen und den durchgeführten Transformationen auf. Während Lighthill (1948) den Verlauf eines instationären, senkrechten Verdichtungsstoßes nur einseitig durch eine ebene, abknickende Wand begrenzt, erweiterte Chester (1953) die Theorie von Lighthill (1948) für eine zweiseitige Begrenzung. Dabei ist die Theorie von Lighthill (1948) Bestandteil der theoretischen Ableitungen von Chester (1953). In beiden Fällen wurde eine lineare Theorie gewählt, so daß nur ein kleiner Abknickwinkel δ zulässig ist. In den Theorien von Lighthill (1948) und Chester (1953) erfolgen drei gleiche Transformationen. Chester (1953) leitet in seiner Veröffentlichung zum ersten Male den Funktionsverlauf $K(p_0/p_1)$ her, der auch in der ein Jahr später folgenden Theorie von Chester (1954) erscheint.

Chester (1954), Chisnell (1957) und Whitham (1958) versuchen in ihren Veröffentlichungen eine Kanalformel herzuleiten, so daß auch ein beliebig gewähltes Kanalprofil Einsatz finden kann. Es kann in diesem Bericht allerdings nachgewiesen werden, daß neben Chisnell (1957) auch die ursprüngliche Arbeit von Chester (1954) fehlerbehaftet ist. Es handelt sich dabei um einen gravierenden Umformungsfehler und mehrere Tippfehler, die schon in den ersten Formeln jener Veröffentlichung auftreten. Durch eine Korrektur gelangt man dabei zu einem anderen Ergebnis für die Funktion $K(p_1/p_0)$. Chisnell (1957) erkennt den Fehler von Chester (1954) nicht, sondern bestätigt das falsche Ergebnis von Chester (1954) durch eine eigene, aber auch falsche Ableitung. Dabei rühmt Chisnell (1957) sich,

mit jener Veröffentlichung nun eine neue, besonders einfache Herleitung gefunden zu haben.

Als dritter beweist nun ein Jahr nach Chisnell (1957) noch Whitham (1958) die bereits von Chester (1954) vorgestellte Lösung. Zur Ableitung setzt Whitham (1958) die Charakteristikenmethode ein.

Bemerkenswert ist, daß die Fehler von Chester (1954) und Chisnell (1957) bereits im Anschluß an das Aufstellen der Grundgleichungen auftreten und nicht im späteren Verlauf der Herleitungen vorhanden sind, da dort die Ableitungen wesentlich komplizierter sind. Damit liegt die Vermutung nahe, daß das Ergebnis bereits bekannt sein mußte, bevor die Herleitung erfolgte. Dies ist z.B. dadurch möglich, weil zu der Zeit bereits Meßergebnisse vorlagen. Nun genügt es bereits mathematisch einen Fehler nachzuweisen, um die Theorie von Chester (1954) oder von Chisnell (1957) zu stürzen. Nichtsdestotrotz existiert eine mathematisch korrekte Herleitung der "Kanalformel von Chester und Chisnell" durch Whitham (1958). Damit ist ein gültiger Beweis gelungen und ein korrekter Weg ist eine hinreichende Bedingung zum Beweis.

Ein Vergleich der Arbeit von Chester (1954) mit den Veröffentlichungen von Lighthill (1948) und Chester (1953) wird unmöglich gemacht, da der Fehler in der Arbeit von Chester (1954) schon zu Beginn bei der Aufstellung der Randbedingungen auftritt und sich im Verlauf der Ableitung fortsetzt. Man kann nur sagen, daß in allen drei Herleitungen von einem Störansatz Gebrauch gemacht wird. Darüber hinaus benutzt Chester (1954) nicht die Transformationsebenen seiner Veröffentlichung aus dem Jahre 1953 zur Lösung der Bestimmungsgleichung.

7. Ergebnis und Schlußfolgerungen

Durch detailliertes Nachvollziehen verschiedener Theorien kann die in vielen Lehrbüchern der Gasdynamik vorgestellte "Kanalformel von Chester und Chisnell" bestätigt werden. Diese Kanalformel beschreibt die Ausbreitung einer instationären Stoßwelle in einem Kanal, in dem der Querschnitt variiert. Dabei ist die Kanalformel unabhängig von der Konfiguration des Kanalprofils.

Allerdings haben bereits Neuberger (1988) und Gajewski (1988) nachgewiesen, daß die Herleitung von Chisnell (1957) falsch ist. Eine Korrektur des Fehlers führt aber zu keinem physikalisch sinnvollen Ergebnis dieser Theorie. Weiterhin konnte in diesem Bericht nachgewiesen werden, daß auch die Veröffentlichung von Chester (1954) fehlerbehaftet ist. Eine Korrektur führt hier aber zu einem anderen Ergebnis.

Es konnte in diesem Bericht nur für Whitham (1958) eine korrekte Herleitung der Kanalformel nachgewiesen werden. Aufgrund dieser Tatsache sollte nun als Schlußfolgerung dieses Berichtes die Kanalformel Whitham (1958) zuerkannt werden. Darüber hinaus ist es notwendig, die korrekte Theorie von Whitham (1958) zu erweitern. Zukünftige Forschungsvorhaben sollten den Einfluß einer sich neu an der Kante entwickelnden Stoßwelle untersuchen. Bisher berücksichtigt die Theorie von Whitham (1958) nur die Änderung des ursprünglichen, instationären Verdichtungsstoßes. Die Entwicklung und sogar das Rücklaufen einer neuen Stoßwelle in einer Unterschallnachlaufströmung des ursprünglichen Verdichtungsstoßes wird bei Whitham (1958) vernachlässigt. Dadurch wird zwar die durchgehende Stoßwelle überschätzt, die reflektierte aber zu niedrig berechnet. Trotz reibungsfreier Bestimmung des Drucksprunges wird die Belastung zum Beispiel eines Lüftungskanals stark unterschätzt. Bei Auslegung nach diesem Berechnungsmodell ist daher eine Zerstörung der Anlage nicht auszuschließen. Die Entwicklung einer brauchbaren Theorie ist daher notwendig. Als Ausgangspunkt für theoretische Herleitungen können dazu die Ansätze von Lighthill (1948) und Chester (1953) dienen. Sie untersuchten das Ausbreiten einer instationären Stoßwelle entlang einer einseitig abgrenzenden Knickfläche bzw. bei doppelseitig begrenzenden Knickfläche. Hierzu kann als weiteres Ergebnis dieses Berichtes festgehalten werden, daß die Formeln zur Bestimmung der Stoßstärkenänderung in den Arbeiten von Lighthill (1948) und Chester (1953) korrekt sind.

8. Literaturverzeichnis

Busemann, A. (1943): Luftfahrtforschung 20, S. 105.

Chester, W. (1953): Quart. J. Mech. Appl. Math. 6, pp. 440-452.

Chester, W. (1954): Phil. Mag. 7, pp. 1293-1301

Chisnell, R.F. (1957): J. Fluid Mech. 2, pp. 286-298.

Dirichlet, L.; Dedekind, R. (1986): Zahlentheorie. 3rd ed., Springer Verlag, Berlin, pp. 283-284.

Gajewski, B. (1988): Berechnung der Ausbreitung einer Stoßwelle in einem Kanal mit variablem Querschnitt nach Chisnell. Studienarbeit, Universität-Gesamthochschule-Essen.

Lighthill, M.J. (1948): The diffraction of blast I. Proc. Roy Soc. 198, pp. 454-470.

Moeckel, W.E. (1952): Nat. Adv. Comm. Aero., Wash., Techn. Note no. 2725.

Neuberger, M. (1988): Zur Ausbreitung schwacher Stoßwellen in verzweigten und querschnittsvariierenden Kanälen.
Diplomarbeit TU Karlsruhe, Inst. Techn. Thermodynamik

Sommerfeld, A. (1901): Z. Math. Phys. 46, p. 11.

Whitham, G.B. (1958): J. Fluid Mech. 4, pp. 337-360.