



KfK 4805
Dezember 1990

Theorie und Numerik nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen

I. Die skalare Erhaltungsgleichung

C.-D. Munz
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

KfK 4805

Theorie und Numerik nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen
I. Die skalare Erhaltungsgleichung

C.-D. Munz

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Theorie und Numerik nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen

I. Die skalare Erhaltungsgleichung

Kurzfassung

Diese Arbeit ist der erste Teil einer Übersicht über die Theorie und die numerische Behandlung nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Dabei steht hier die skalare Erhaltungsgleichung im Mittelpunkt. Es werden die theoretischen Grundlagen wie Eindeutigkeit und Existenz von klassischen und schwachen Lösungen des Anfangswertproblems behandelt. Darauf aufbauend wird gezeigt, wie robuste und effiziente numerische Verfahren konstruiert werden können, indem man die Wellenstruktur der Lösungen im Näherungsverfahren berücksichtigt. Diese Verfahren sind insbesondere in der Lage, auch starke Stoßwellen zu approximieren, ohne daß Instabilitäten auftreten. Die Resultate für verschiedene Testprobleme zeigen Güte und Eigenschaften dieser Verfahren.

Theory and Numerical Treatment of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations

I. The Scalar Conservation Law

Abstract

This paper is the first part of a review about theory and numerical treatment of nonlinear hyperbolic differential equations. We consider in the first part the theoretical fundamentals as uniqueness and existence of classical and weak solutions of the initial value problem. We show how to construct robust and efficient numerical methods based on this theory by considering the wave structures of the solutions. These numerical schemes have the shock-capturing property and produce sharp discrete shock profiles without generating instabilities. Results for different test problems show the quality and the properties of these methods.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0. Einleitung	1
1.0 Grundlagen	3
1.1 Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen	3
1.2 Beispiele hyperbolischer Differentialgleichungen	9
1.3 Näherungsverfahren, Differenzenverfahren	17
2.0 Skalare Erhaltungsgleichung	31
2.1 Existenz von stetigen Lösungen	31
2.2 Schwache Lösungen	40
2.3 Das Verkehrsproblem	55
3.0 Numerische Approximation schwacher Lösungen	59
3.1 Verfahren in Erhaltungsform	59
3.2 Godunov-Typ, Fluß-Splitting und Upwind-Verfahren	65
3.3 Konvergenzsatz	85
3.4 Kriterien für Näherungsverfahren	88
4.0 Verfahren höherer Ordnung	98
4.1 MUSCL-Typ Verfahren	101
4.2 Flußlimiter-Methode	112
4.3 Andere Ansätze	115
5.0 Mehrdimensionale skalare Erhaltungsgleichung	117
6.0 Experimente zur numerischen Dämpfung	136

	Seite
7.0 Verschiedenes	144
7.1 Nichtäquidistante und bewegte Gitter	144
7.2 Randwerte	147
7.3 Quellterme	148
7.4 Implizite Verfahren	152
7.5 PPM-Verfahren, ENO-Verfahren	156
 Anhang A: Funktionen von beschränkter Variation	 161
 Anhang B: LP-Räume	 166
 Literatur	 169
 Benutzte Symbole	 177
 Stichwortverzeichnis	 179

0. Einleitung

Die hyperbolischen Differentialgleichungen in der mathematischen Physik beschreiben Wellenausbreitungsphänomene. Die einfachsten Vertreter dieses Types von partiellen Differentialgleichungen sind die lineare Transportgleichung, auch Advektions- oder Konvektionsgleichung genannt, und die lineare Wellengleichung, welche räumlich eindimensional etwa die Schwingung einer Saite beschreibt. Die charakteristische Eigenschaft der hyperbolischen Gleichungen ist, daß sich jegliche Störungen entlang gewisser Bahnen mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Für jeden Punkt im Lösungsgebiet können wir einen Einflußbereich und einen Abhängigkeitsbereich angeben. Nur eine Änderung der Daten in diesem Abhängigkeitsbereich ändert die Lösung in diesem Punkt. Umgekehrt wird sich die Änderung der Lösung in diesem Punkt nur auf die Lösung im Einflußbereich auswirken. Dies ist gerade der Wellencharakter der Lösung der hyperbolischen Differentialgleichung. Ein robustes und effizientes Näherungsverfahren muß diese Struktur der Lösung natürlich geeignet approximieren.

In dieser Arbeit wollen wir gerade die Konstruktion solcher Näherungsverfahren erläutern. Dabei stehen hier die nichtlinearen Probleme im Mittelpunkt. Typisch für die nichtlineare Ausbreitung von Wellen ist das Auftreten von Unstetigkeiten, den sogenannten Stoßwellen. In diesen Fällen ist es noch wichtiger, die Struktur des exakten Problems im Näherungsverfahren zu erfassen und geeignet zu approximieren. Hier kann die Konsistenz des Näherungsverfahrens nicht mehr nur auf die Gültigkeit einer Taylorentwicklung zurückgeführt werden. Zum Beispiel ist es über Stoßwellen hinweg wichtig, daß die Entropie der Näherungslösung anwächst. Andernfalls kann eine physikalisch unsinnige Lösung approximiert werden.

Diese Arbeit ist der erste Teil über die Theorie und die numerische Behandlung nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Im Mittelpunkt steht hier die einfachste nichtlineare hyperbolische Differentialgleichung - die skalare Erhaltungsgleichung. Für diesen Typ von Gleichungen könnte man sowohl die Theorie der stetigen und unstetigen Lösungen als auch die Konstruktion von geeigneten Näherungsverfahren als gewissermaßen vollständig betrachten. Dies gilt für eine Raumdimension, mit Einschränkung auch für räumlich mehrdimensionale Probleme. Für Systeme von nichtlinearen hyperbolischen Gleichungen weist die Theorie im Gegensatz dazu nur sehr spärliche Resultate auf. Insofern

sieht die Konstruktion eines Näherungsverfahrens für Systeme von Erhaltungsgleichungen oft so aus, daß Methoden und Verfahren, entwickelt und getestet an einer einzelnen Erhaltungsgleichung, geeignet auf Systeme erweitert werden. Umgekehrt können natürlich auch ursprünglich für Systeme entwickelte Verfahren, angewandt auf eine einzelne Erhaltungsgleichung, besser verstanden und der Lösungstheorie verglichen werden. Deshalb nimmt die skalare Erhaltungsgleichung und ihre numerische Lösung diesen breiten Raum ein.

1.0 Grundlagen

Zunächst wollen wir hier kurz auf die Klassifikation partieller Differentialgleichungen eingehen und auch die physikalischen und mathematischen Eigenschaften der verschiedenen Typen: elliptisch, parabolisch und hyperbolisch, ansprechen. Dabei werden schon einige typische Eigenschaften der hyperbolischen Differentialgleichungen deutlich. Fortgesetzt wird die Einführung in diese Klasse von Gleichungen durch Angabe von sechs Beispielen in Abschnitt 1.2. Grundlegende Betrachtungen zu Näherungsverfahren, speziell zu Charakteristiken- und Differenzenverfahren, welche bei hyperbolischen Differentialgleichungen die entscheidende Rolle spielen, schließen das Kapitel der Grundlagen ab.

1.1 Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen

Die Standardgleichung für die Klassifizierung partieller Differentialgleichungen ist die lineare Gleichung zweiter Ordnung

$$(1.1) \quad au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad ,$$

wobei die Funktionen a, b, c, d, e, f, g und u Funktionen von (x, y) sind. Wir beschränken uns hier und im folgenden immer auf reelle Funktionen und die unabhängigen Variablen x, y sind ebenso reelle Größen. Ebenso beschränken wir uns zunächst auf zwei Dimensionen.

Definition 1: Die partielle Differentialgleichung (1.1) heißt **hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch** im Punkte (x_0, y_0) falls

$$(1.2) \quad b^2 - 4ac > 0 \quad ,$$

$$(1.3) \quad b^2 - 4ac = 0$$

oder beziehungsweise

$$(1.4) \quad b^2 - 4ac < 0$$

im Punkte (x_0, y_0) gilt.

Die Gleichung (1.1) kann man im Falle konstanter Koeffizienten mittels einer Koordinatentransformation $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ in eine **kanonische Form** bringen. Voraussetzung ist hier natürlich, daß diese Transformation nicht singular ist, d.h. man hat eine bijektive Abbildung zwischen (x, y) und (ξ, η) . Dies ist der Fall, falls die Determinante der Jakobimatrix J der Abbildung

$$(1.5) \quad \det(J) = \det\left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

nicht verschwindet.

Nach Definition 1 bestimmen nur die Koeffizienten der höchsten Ableitungen den Charakter oder Typ der Differentialgleichung. Es ist somit üblich (1.1) etwas kürzer in der Form

$$(1.6) \quad a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = h$$

zu schreiben, wobei a, b, c , wie in (1.1) Funktionen von (x, y) sind und h eine Funktion von (x, y, u, u_x, u_y) ist. Wir führen nun eine Transformation aus

$$(1.7) \quad T: (x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$$

mit $\det(J) \neq 0$. Mit Hilfe der Kettenregel erhält man

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

und weiter

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = u_{\xi\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + u_{\xi\eta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + u_{\eta\xi} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + u_{\eta\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &\quad + 2 u_{\xi\eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

Analog erhält man u_{yy} und u_{xy} . Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (1.6) führt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.10) \quad A u_{\xi\xi} + B u_{\xi\eta} + C u_{\eta\eta} = H$$

mit

$$(1.11) \quad \begin{aligned} A &= a \xi_x^2 + b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2, \\ B &= 2a \xi_x \eta_x + b \xi_x \eta_y + b \xi_y \eta_x + 2c \xi_y \eta_y, \\ C &= a \eta_x^2 + b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2 \end{aligned}$$

und $H = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$. Diese Ausrechnung führt auf die wichtige Aussage:

Satz 1: Jede reelle nichtsinguläre Transformation ändert den Typ der partiellen Differentialgleichung (1.1) nicht.

Beweis: Eine einfache Ausrechnung liefert

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac) (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Diese Invarianz legt es natürlich auch erst nahe, eine solche Typeinteilung nach Definition 1 durchzuführen. Die Bezeichnungen hyperbolisch, parabolisch und elliptisch sind gewählt in Analogie zu den Bezeichnungen bei Kegelschnitten in der analytischen Geometrie. Dem Hauptteil der Differentialgleichung (1.6), das heißt die linke Seite, können wir als quadratische Form

$$L = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

auffassen. Analog ist der Typ eines Kegelschnittes durch die quadratische Form des Hauptteils der quadratischen Gleichung bestimmt. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse falls für die Determinante der quadratischen Form $b^2 - 4ac > 0, = 0$ bzw. < 0 gilt. Wie bei den Kegelschnitten, kann man nun die Gleichung (1.1) im Falle konstanter Koeffizienten stets in **Normalform** oder **kanonische Form** transformieren. Eine hyperbolische, parabolische oder elliptische Differentialgleichung (1.1) besitzt die Normalform

$$(1.12) \quad u_{xx} - u_{yy} = h_1,$$

$$(1.13) \quad u_{xx} = h_2,$$

beziehungsweise

$$(1.14) \quad u_{xx} + u_{yy} = h_3.$$

Eine hyperbolische Gleichung wird auch öfters in einer anderen charakteristischen Form geschrieben:

$$(1.15) \quad u_{xy} = h_4 ,$$

welche für verschiedene Fälle eine günstigere Formulierung ist. Die Funktionen h_i sind dabei Funktionen von (x, y, u, u_x, u_y) .

Ein typisches Beispiel für eine hyperbolische Differentialgleichung ist die **Wellengleichung**

$$(1.16) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 , \quad c = \text{konstant} ,$$

welche etwa die Schwingung einer Saite beschreibt. Wir haben hier die unabhängigen Variablen mit x und t bezeichnet, da sich ein solcher Schwingungsvorgang zeitlich entwickelt. Die Variable t steht für die Zeit, x für die Raumdimension, die Konstante c bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Eine parabolische Gleichung ist die **Wärmeleitungsgleichung**

$$(1.17) \quad u_t = \kappa u_{xx} , \quad \kappa = \text{konstant}$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert zum Beispiel die Temperatur in einem dünnen gleichförmigen Stab im Punkte x nach der Zeit t ; κ steht für den Wärmeleitkoeffizienten.

Der einfachste Vertreter einer elliptischen Gleichung ist die **Laplace- oder Potentialgleichung**

$$(1.18) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 ,$$

welche für zahlreiche Anwendungsgebiete eine grundlegende Rolle spielt. Einige Beispiele sind Potentialprobleme der Elektrizität, des Magnetismus und der Gravitation, rotationsfreie Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, stationäre Wärmeverteilung in einem zweidimensionalen Medium, Ladungsverteilung in einem homogenen Leiter.

Bei den bisherigen Beispielen waren alle Koeffizienten konstant und die zugehörigen Gleichungen sind im gesamten Definitionsgebiet vom selben Typ. Dies muß nicht so sein. Wir haben in Definition 1 den Typ der Differentialgleichung ja auch als lokale Eigenschaft definiert. Ein Beispiel für eine Differentialgleichung, welche den Typ wechselt, ist die aus der Aerodynamik bekannte **Tricomi-Gleichung**

$$(1.19) \quad y u_{xx} + u_{yy} = 0 ,$$

welche in der oberen Halbebene $y > 0$ elliptisch und in der unteren Halbebene $y < 0$ hyperbolisch ist. Die Gerade $y = 0$ nennt man die "parabolische Grenzlinie". In der Aerodynamik hat man an dieser Grenzlinie etwa den Umschlag von einer Unterschall- (elliptisch) in eine Überschallströmung (hyperbolisch).

Hängen die Koeffizienten a , b oder c auch noch von u , u_x oder u_y ab, heißt die Gleichung (1.6) **quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**. Der Typ dieser Differentialgleichung ist im allgemeinen erst durch die Lösung bestimmt und ist somit a priori nicht bekannt.

Wie man an den verschiedenen Beispielen sieht, ist die Unterscheidung verschiedener Typen von Differentialgleichungen nicht nur ein mathematisches Artefakt, sondern verschiedene Typen beschreiben auch grundlegende verschiedene physikalische Prozesse. So wird der Wellen- oder Schwingungscharakter eines physikalischen Problems durch eine hyperbolische Gleichung wiedergegeben. Um eine eindeutige Lösung einer partiellen Differentialgleichung zu erhalten, müssen noch **Anfangs- oder Randbedingungen** gefordert werden.

Ganz typisch für **hyperbolische Gleichung** ist dabei, daß meist nur **Anfangswerte** angegeben werden müssen (**Anfangswertproblem**). Die Anfangswerte und die Differentialgleichung bestimmen dann die zeitliche Entwicklung des Vorgangs. Bei der Schwingung einer Saite etwa muß die Anfangsauslenkung bekannt sein; die zeitliche Entwicklung ergibt sich dann aus der Differentialgleichung. Zwar sind im praktischen Fall Randwerte - wie das Festhalten der Saite - vorgeschrieben, diese lassen sich jedoch durch einfaches schiefssymmetrisches Fortsetzen der Anfangswerte eliminieren. Das reine Anfangswertproblem für eine hyperbolische Gleichung besitzt im allgemeinen ein eindeutige stabile Lösung.

Die **parabolische Gleichung** beschreibt ebenso die zeitliche Entwicklung eines Vorgangs, jedoch müssen hier neben **Anfangswerten** auch zwingend **Randwerte** vorgeschrieben werden (**Anfangs-Randwertproblem**). Bei der Wärmeleitungsgleichung können zum Beispiel die Temperaturen am Rand ganz wesentlich sein. Ein reines Anfangswertproblem für eine parabolische Gleichung ist nicht sachgemäß gestellt. Die **elliptische Gleichung** demgegenüber ist ein reines **Randwertproblem**. Zusammengefaßt sind diese Bemerkungen in Tabelle 1.

$\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$	Potentialoperator	elliptisch	stationäre Probleme Randwertprobleme
$\partial/\partial t - \partial^2/\partial x^2$	Diffusionsoperator	parabolisch	glatte ausbreitende Strömung Anfangs-Randwertprobleme
$\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$	Wellenoperator	hyperbolisch	Wellen Anfangswertprobleme, Eigenwertprobleme

Tabelle 1: Klassifizierung von Differentialgleichungen

Neben den Differentialgleichungen 2.-ter Ordnung spielen auch Differentialgleichungssysteme 1.-ter Ordnung in der Form

$$(1.20) \quad u_t + Au_x = f$$

eine große Rolle als mathematische Modelle physikalischer Vorgänge. Dabei ist u eine vektorwertige Funktion $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))^T$, A eine $n \times n$ -Matrix und f eine vektorwertige Funktion $f = (f_1(x, t, u), f_2(x, t, u), \dots, f_n(x, t, u))^T$. Gleichungen in dieser Form (1.20) nennt man **Evolutionsgleichungen**. Ist dabei die Matrix A konstant, so heißt (1.20) **linear** mit konstanten Koeffizienten, für $A = A(x, t)$ heißt sie **linear mit variablen Koeffizienten** und für $A = A(x, t, u)$ heißt (1.20) **quasilinear**.

Definition 2: Die Evolutionsgleichung (1.20) heißt **hyperbolisch**, falls die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt. Sie heißt **strikt hyperbolisch** falls A nur reelle Eigenwerte und die zugehörigen Rechtseigenvektoren linear unabhängig sind.

Bemerkung 1: Gleichung (1.20) ist zum Beispiel strikt hyperbolisch, falls A reelle und verschiedene Eigenwerte besitzt.

Definition 2 läßt sich natürlich wieder wie Definition 1 lokal definieren, falls A nicht konstant ist. Eine Typbestimmung bei Systemen erster Ordnung ist nicht immer möglich. Falls alle Eigenwerte komplex sind, ist die Evolutionsgleichung **elliptisch**. Weitergehende Aussagen über die Typeinteilung partieller Differentialgleichungen sind z.B. in den Arbeiten [7], [26] und [42] enthalten.

1.2 Beispiele hyperbolischer Differentialgleichungen

Beispiel 1 (Lineare Transportgleichung):

Das einfachste Beispiel und oft der Prototyp einer hyperbolischen Differentialgleichung ist die lineare Transportgleichung - oft auch Advektions- oder Konvektionsgleichung - genannt. In einer Raumdimension hat sie die Form

$$(1.21) \quad u_t + cu_x = 0$$

mit $c = c(x, t)$. Diese Gleichung tritt bei vielen Transportvorgängen auf. Wir betrachten das **Anfangswertproblem** oder **Cauchyproblem** für (1.21) mit konstantem $c \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$, welche (1.21) erfüllt und der Anfangsbedingung

$$(1.22) \quad u(x, 0) = q(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $q \in C^1(\mathbb{R})$ genügt.

Man kann nun die linke Seite in (1.21) als Richtungsableitung in Richtung $(1, c)$ auffassen. Wir betrachten die Kurve $C: x = x(s), t = t(s)$, welche von dem reellen Parameter s abhängt. Wählen wir nun

$$(1.23) \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = c,$$

so folgt nach der Kettenregel und aus der Differentialgleichung (1.21)

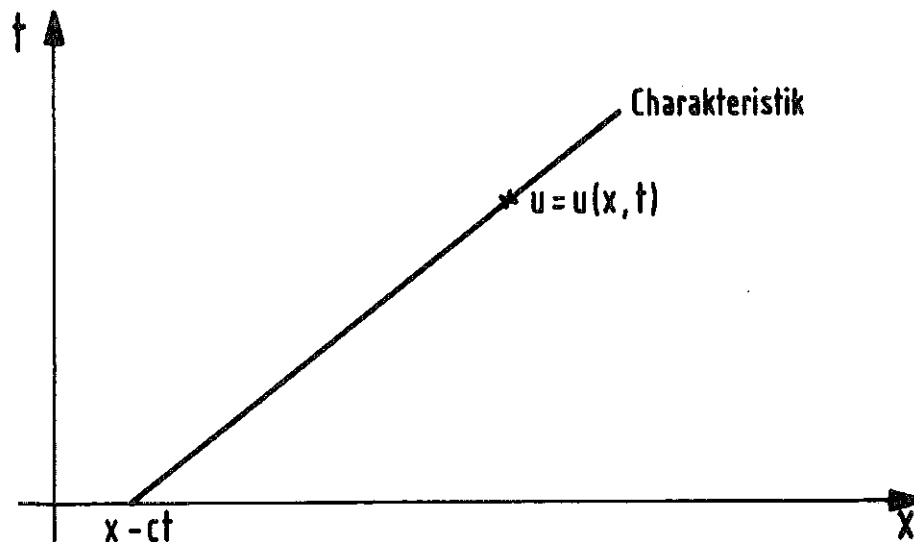
$$(1.24) \quad \frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = 0.$$

Die Funktion u ist somit entlang der Kurve C konstant. Wir können die Darstellung (1.23) von C noch etwas vereinfachen und den Parameter s mittels der ersten Gleichung eliminieren. Wir erhalten C dann in der Darstellung $x = x(t) = ct$. Da c als konstant vorausgesetzt wurde, sind die Kurven C Geraden. Sie werden **Charakteristiken** oder **charakteristische Kurven** genannt.

Die Lösung des Anfangswertproblems (1.21), (1.22) läßt sich nach diesen Überlegungen leicht angeben. In einem beliebigen Punkt $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tragen wir die Charakteristik an und verfolgen diese bis zu den Anfangswerten (siehe Figur 1.1). Der Funktionswert von u im Punkt (x, t) ist dann gerade der Wert der Anfangswerte im Schnittpunkt zwischen C und der Geraden $t = 0$:

$$(1.25) \quad u(x, t) = q(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$$

Das Cauchyproblem (1.21) (1.22) besitzt somit eine globale Lösung in $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$. Die Lösung (1.25) erklärt auch den Namen der Gleichung (1.21). Die Anfangswerte werden durch (1.21) mit der Geschwindigkeit c transportiert.



Figur 1.1 Lösung der linearen Transportgleichung in der (x,t) -Ebene

In der Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen sind die Charakteristiken ganz wesentlich - und wir werden sehen, daß dies auch für die numerische Approximation zutrifft. Die Charakteristiken geben die Ausbreitungsrichtung der Wellen oder auch jeglicher Störung an. Entlang der Charakteristiken reduziert sich die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Die Einführung charakteristischer Variablen vereinfacht oftmals das Problem wesentlich oder macht sogar die Ermittlung einer analytischen Lösung möglich, wie im obigen Fall.

Wir sehen in Figur 1.1, daß die Lösung im Punkte (x,t) nur von dem Wert der Anfangswerte an der Stelle $x-ct$ abhängt. Diesen Punkt nennt man den **Abhängigkeitsbereich** der Lösung in (x,t) . Umgekehrt beeinflussen die Anfangswerte in einem beliebigen Punkt $(x_0, 0)$ die Lösung nur an den Punkten, welche auf der Charakteristik liegen, die durch $(x_0, 0)$ geht. Der sogenannte **Einflußbereich** ist somit gerade die Charakteristik. Signale oder Störungen breiten sich gerade mit der Geschwindigkeit c aus.

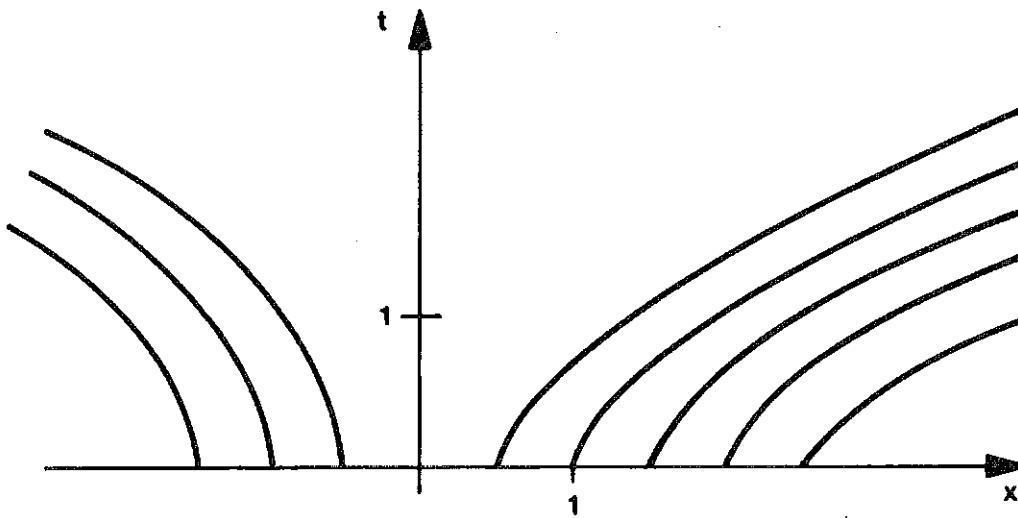
Hängt die Transportgeschwindigkeit c von (x,t) ab, sind die Charakteristiken nicht mehr Geraden. Ein einfaches Beispiel ist etwa

$$(1.26) \quad u_t + xu_x = 0 .$$

Die Charakteristiken sind nach (1.23) bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{dx}{ds} = x$$

mit der Lösung $t = \ln |x| + x_0$ für $x \neq 0$. Ihr Verlauf ist in Figur 1.2 skizziert.



Figur 1.2 Verlauf der Charakteristiken in der (x,t) -Ebene

Beispiel 2 (Erhaltungsgleichung):

Das einfachste Beispiel und Prototyp einer nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung ist die Erhaltungsgleichung

$$(1.27) \quad u_t + f(u)_x = 0 ,$$

wobei $f \in C^2(\mathbb{R})$ eine nichtlineare Funktion sei. Sie wird der Fluß der Erhaltungsgleichung genannt. Dieser Typ von Gleichungen tritt oft in der Physik bei der mathematischen Beschreibung von Erhaltungssätzen (Massenerhaltung, Impulserhaltung, ...) auf. Das zugrunde liegende Erhaltungsgesetz bedeutet, daß die Änderung einer physikalischen Größe in einem beliebigen Gebiet G des drei-

dimensionalen Raumes auf den Fluß durch den Rand ∂G von G zurückzuführen ist. Ist u die Dichte dieser Größe, beschreibt der Vektor f ihren Fluß und ist \vec{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor auf ∂G , so gilt

$$(1.28) \quad \frac{d}{dt} \int_G u dg = - \int_{\partial G} (f, \vec{n}) ds$$

$((f, \vec{n}))$ bezeichnet das Innenprodukt von f und \vec{n}). Sind u und f stetig differenzierbar, so liefert der Gaußsche Satz und die Vertauschung von Integration und Differentiation

$$\int_G (u_t + \operatorname{div} f) dg = 0 .$$

Da G hier beliebig gewählt werden kann, folgt daraus die differentielle Form des Erhaltungsgesetzes

$$(1.29) \quad u_t + \operatorname{div} f = 0 .$$

Ist der betrachtete physikalische Vorgang in zwei Raumdimensionen konstant, so ergibt sich die räumlich eindimensionale Erhaltungsgleichung (1.27).

Die Erhaltungsgleichung (1.27) kann man auch in der quasilinearen Form

$$(1.30) \quad u_t + a(u) u_x = 0 \quad \text{mit} \quad a(u) = \frac{df(u)}{du}$$

schreiben. Damit bekommt man Anschluß an die Berechnung der Charakteristiken wie sie in Beispiel 1 ausgeführt wurde. Die Steigungen der Charakteristiken sind hier jedoch lösungsabhängig. Die Konsequenz aus dieser Tatsache werden wir eingehend in Kapitel 2 erörtern.

Der einfachste nichtlineare Fall ergibt sich für $f(u) = u^2/2$. Die zugehörige Erhaltungsgleichung

$$(1.31) \quad u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0$$

heißt **Burgers-Gleichung** [3]. Es ist ein sehr einfaches Modell einer eindimensionalen Strömung einer Flüssigkeit ohne Viskositätseffekte, die aber doch wesentliche nichtlineare Effekte enthält. Diese Gleichung wird uns als Prototyp noch öfters über den Weg laufen.

Beispiel 3 (Allgemeine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung):

Die lineare Transportgleichung und die Erhaltungsgleichung sind Beispiele der allgemeinen quasilinearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1.32) \quad a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

Für das Cauchyproblem dieser quasilinearen Differentialgleichung läßt sich ein allgemeiner Existenzsatz angeben, welcher aber nur eine lokale Lösung, d.h. in einem gewissen Intervall $[0, t_0]$ mit $t_0 > 0$, garantiert. Eine globale Lösung in R_0 muß nicht existieren. Man betrachtet auch hier die Lösung entlang charakteristischer Kurven, welche durch die Bedingungen

$$(1.33) \quad \frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u)$$

definiert werden. Die Gleichungen (1.33) bilden ein autonomes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sind a, b, c und die Anfangswerte stetig differenzierbar, so kann man mit Hilfe der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen die Existenz einer lokalen Lösung zeigen.

Beispiel 4 (Wellengleichung):

Die Wellengleichung (1.16) kann in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung übergeführt werden. Dazu führen wir die Variablen $p = u_t$ und $q = cu_x$ ein. Die Wellengleichung ist dann äquivalent zu einem System zweier Evolutionsgleichungen

$$(1.34) \quad \begin{aligned} p_t - c q_x &= 0, \\ q_t - c p_x &= 0. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet die Wellengleichung dann

$$(1.35) \quad v_t + A v_x = 0$$

mit

$$v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Differentiation des Vektors v ist komponentenweise zu verstehen. Die Matrix A hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = -c$ und ist strikt hyperbolisch nach Definition 2 für $c \neq 0$. Für das System (1.34) oder (1.35), bestehend aus zwei Gleichungen, ergeben sich zwei ausgezeichnete Richtungen, welche durch diese Eigenwerte bestimmt sind. In der (x,t) -Ebene haben diese zwei Familien von Charakteristiken die Steigungen $1/c$ bzw. $-1/c$. Jegliche Information setzt sich entlang dieser Geraden fort.

Die Wellengleichung nimmt eine einfache Gestalt an, wenn wir zu sogenannten **charakteristischen Variablen** übergehen. Bezüglich dieser Variablen nimmt die Matrix A Diagonalgestalt an und die beiden Gleichungen entkoppeln sich. Um (1.34) in eine solche charakteristische Form zu bringen benötigen wir die Rechtseigenvektoren r_1, r_2 der Matrix A . Wir schreiben sie in Form einer Matrix $R = (r_1, r_2)$ deren Spalten die Eigenvektoren sind. Es gilt

$$(1.36) \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei R^{-1} die inverse Matrix zu R bezeichnet. Die Zeilen von R^{-1} sind gerade die Linkseigenvektoren von A . Die Rechts- und Linkseigenvektoren (1.36) bilden jeweils ein Orthonormalsystem. Wir multiplizieren nun (1.35) mit der inversen Matrix R^{-1} und erhalten

$$R^{-1} v_t + R^{-1} A v_x = 0 .$$

Mit den **charakteristischen Variablen** $w = R^{-1} v$ ergibt sich weiter

$$(1.37) \quad w_t + D w_x = 0 ,$$

wobei $D = \text{diag}(c, -c) = R^{-1} A R$ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelemente bezeichnet. Das Gleichungssystem (1.37) ist nun ein System aus zwei Gleichungen, welche entkoppelt sind. Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen

$$(1.38) \quad \begin{aligned} (p - q)_t + c(p - q)_x &= 0 \\ (p + q)_t - c(p + q)_x &= 0 . \end{aligned}$$

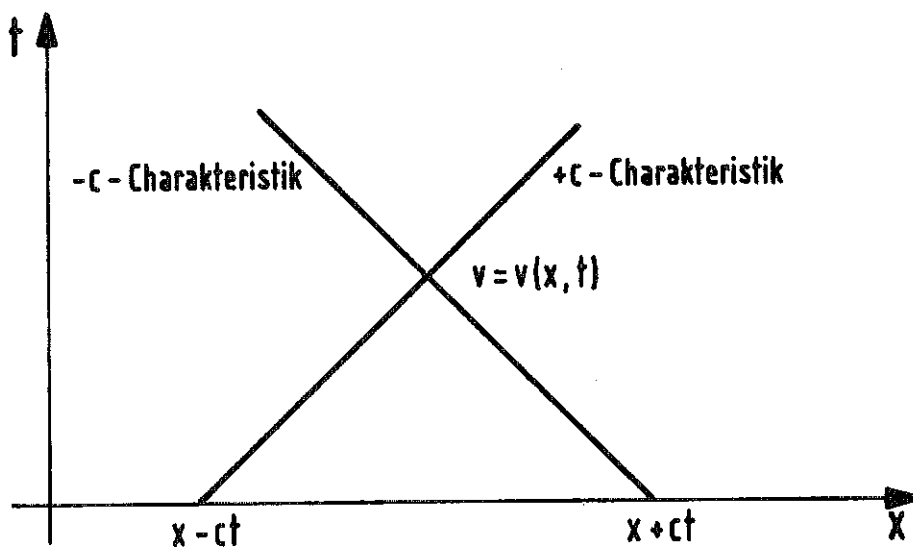
Wir können die Überlegungen in Beispiel 1 auf beide Gleichungen anwenden und eine allgemeine Lösung $p, q \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ des Cauchyproblems für die Wellengleichung (1.34) mit den Anfangswerten

$$(1.39) \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

angeben. Dabei seien die Funktion p_0 und q_0 stetig differenzierbar. Entlang der $+c$ -Charakteristik gilt $p - q = \text{konstant}$, d.h. $(p - q)(x, t) = p_0(x - ct) - q_0(x - ct)$. Analog gilt entlang der $-c$ -Charakteristik $(p + q)(x, t) = p_0(x + ct) + q_0(x + ct)$. Damit erhält man die Lösung des Cauchyproblems als Lösung dieser zwei Gleichungen in der Form

$$(1.40) \quad \begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{2} \left(p_0(x - ct) - q_0(x - ct) + p_0(x + ct) + q_0(x + ct) \right), \\ q(x, t) &= \frac{1}{2} \left(-p_0(x - ct) + q_0(x - ct) + p_0(x + ct) + q_0(x + ct) \right). \end{aligned}$$

In Figur 1.3 ist dies geometrisch in der (x, t) -Ebene veranschaulicht. In dem beliebigen Punkt (x, t) werden die Charakteristiken angetragen. Die Charakteristiken werden bis zu den Anfangswerten zurückverfolgt. Aus den Werten von q und p an diesen Stellen läßt sich die Lösung nach (1.40) berechnen.



Figur 1.3 Lösung der Wellengleichung in der (x, t) -Ebene

Wir sehen, die Lösung $v = v(x, t)$ ist nur durch die Anfangswerte an den Stellen $x - ct$ und $x + ct$ bestimmt. Der **Abhängigkeitsbereich** der Lösung im Punkte (x, t) besteht somit aus diesen 2 Punkten. Andersrum beeinflussen die Anfangswerte eines Punktes $(x_0, 0)$ die Lösung entlang beider Charakteristiken, welche in $(x_0, 0)$ starten. Diese beiden Charakteristiken sind somit der **Einflußbereich** der Anfangswerte in $(x_0, 0)$.

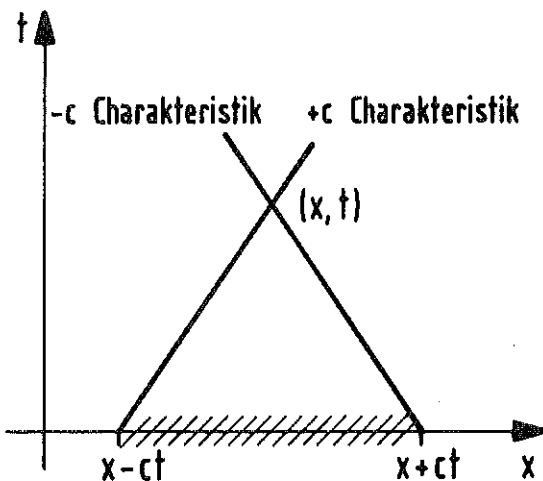
Bemerkung 2: Ähnlich wie die Lösung des Cauchyproblems (1.34), (1.39) läßt sich auch die Lösung des Cauchyproblems von (1.16) mit den Anfangswerten

$$(1.41) \quad u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad ,$$

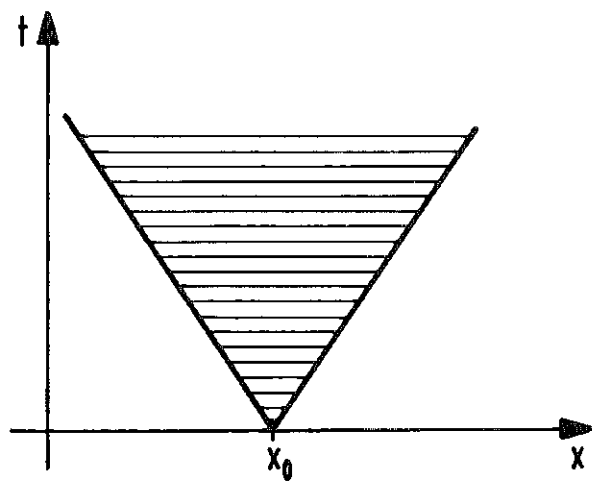
bestimmen. Die Lösung lautet

$$(1.42) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad .$$

Für dieses Anfangswertproblem ist der **Abhängigkeitsbereich** der Lösung im Punkte (x, t) gerade das Intervall $[x-ct, x+ct]$ (Figur 1.4). Der **Einflußbereich** eines Punktes $(x_0, 0)$ ist der in Figur 1.5 schraffierte Bereich, welcher durch die Charakteristiken in $(x_0, 0)$ begrenzt wird.



Figur 1.4 Abhängigkeitsbereich



Figur 1.5 Einflußbereich

Beispiel 5 (Eulergleichungen):

Die Gleichungen einer kompressiblen Strömung ohne Viskosität wird durch ein **System hyperbolischer Erhaltungssätze** beschrieben. In einer kartesischen Raumkoordinate lauten sie

$$(1.43) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

mit

$$(1.44) \quad u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix}$$

wobei u der Vektor der Erhaltungsgrößen ist: ρ ist die Dichte, ρv die Impulsdichte und e die Energiedichte. Neben den Erhaltungsgrößen treten in (1.43), (1.44) noch die Geschwindigkeit v und der Druck p auf; ρ , v und p werden oft als die primitiven Variablen bezeichnet. Zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen (1.43) benötigt man noch eine Bestimmungsgleichung für den Druck in der Form $p = p(\rho, \epsilon)$, wobei ϵ die spezifische innere Energie ist. Es gilt die Beziehung

$$(1.45) \quad e = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2$$

Für ideale Gase ist die Bestimmungsgleichung für den Druck, üblicherweise Zustandsgleichung genannt, gegeben durch

$$(1.46) \quad p = (\gamma - 1) \rho \epsilon$$

wobei γ der Adiabatenindex (d.h. Verhältnis der spezifischen Wärme) genannt wird.

Die verschiedenen Gleichungen des Systems (1.39) drücken integrale physikalische Erhaltungssätze aus: die Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie.

Eine Einführung in die Theorie der Charakteristiken findet man natürlich in jedem Lehrbuch über partielle Differentialgleichungen (z.B. [26], [30]). Sehr ausführlich behandelt Sauer in [58] diese Theorie. Neben der ausführlichen Charakteristikentheorie geben spezielle Lehrbücher über hyperbolische Differentialgleichungen wie die von Jeffrey [29] und Witham [69], auch eine Fülle von Anwendungen auf verschiedenen hyperbolischen Gleichungen an.

1.3 Näherungsverfahren, Differenzenverfahren

Wie wir in Abschnitt 1.2 gesehen haben, spielen die Charakteristiken bei hyperbolischen Differentialgleichungen eine zentrale Rolle. Insofern liegt es natürlich nahe, daß Näherungsverfahren sich auf die Theorie der Charakteristiken stützen.

Es gibt im wesentlichen zwei Ansätze, sich diese Theorie zu nutze zu machen. Die Verfahren, welche wir zum ersten Ansatz zurechnen, werden **Charakteristikenverfahren** genannt. Der Ausgangspunkt dieser Verfahren sind die Bestimmungsgleichung der Charakteristiken zusammen mit der Differentialgleichung in der charakteristischen Form. Im Falle einer quasilinearen Differentialgleichung erster Ordnung geht man von den charakteristischen Gleichungen (1.33) aus, statt von der Differentialgleichung (1.32). Die charakteristischen Gleichungen werden etwa als System gewöhnlicher Differentialgleichungen gelöst. Der zweite Ansatz führt zu Differenzenverfahren, denen die ursprüngliche Differentialgleichung zugrunde liegt, deren Differenzenbildung aber von der Richtung der Charakteristiken oder Signalausbreitung abhängt. Wir wollen beide Ansätze hier kurz skizzieren.

Zunächst zu dem **Charakteristikenverfahren**. Wir betrachten die quasilineare Gleichung

$$(1.47) \quad u_t + a(x, t, u) u_x = b(x, t, u) .$$

Nach Beispiel 3 sind die Charakteristiken und die Lösung durch die Gleichungen

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{dx}{ds} = a(x, t, u) \quad , \quad \frac{du}{ds} = b(x, t, u)$$

bestimmt. Daraus erhält man die Gleichungen

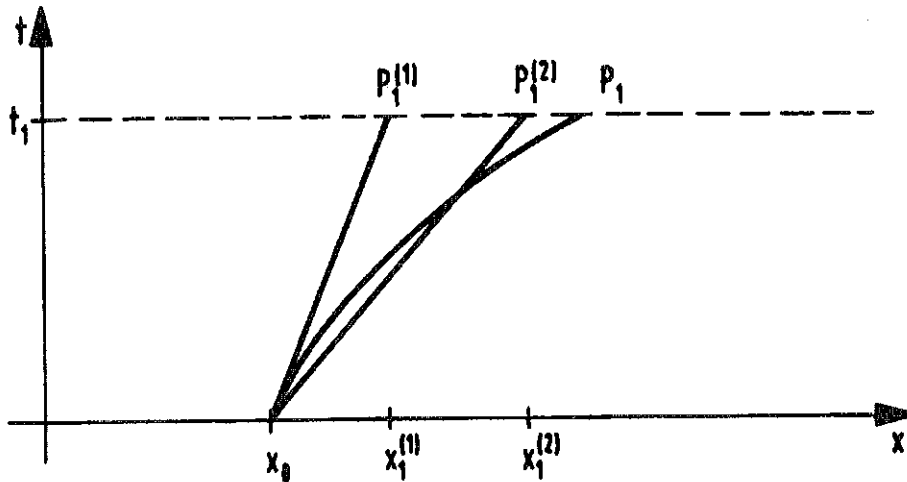
$$(1.48) \quad dx = a dt \quad , \quad du = b dt .$$

Zunächst führen wir eine Diskretisierung der Zeit ein. Wir wollen das Verfahren für den ersten Zeitschritt Δt skizzieren. Dazu greifen wir einen beliebigen Punkt $P_0 = (x_0, 0)$ auf der x -Achse heraus. Wir berechnen nun die Steigung der Charakteristik im Punkte P_0 : $a_0 = a(x_0, 0, u_0)$ mit $u_0 = u(x_0, 0)$ und aus der ersten Gleichung von (1.48) eine Näherung von P_1 (Figur 1.6)

$$(1.49) \quad x_1^{(1)} - x_0 = a_0 \Delta t .$$

Dabei approximierten wir die Differentiale durch endliche Differenzen. In ähnlicher Weise benutzen wir die zweite Gleichung in (1.48), um eine Approximation der Lösung in P_1 zu erhalten:

$$(1.50) \quad u_1^{(1)} - u_0 = b_0 \Delta t$$



Figur 1.6 Charakteristikenverfahren

mit $b_0 = b(x_0, 0, u_0)$. Somit haben wir eine erste Approximation des Punktes P_1 und der Lösung in P_1 . Diese erste Näherung wird nun benutzt, um bessere Werte zu erhalten. Dabei gehen wir wieder von den charakteristischen Gleichungen (1.48) aus. Die Koeffizienten a, b werden jetzt aber durch Mittelwerte approximiert. Wir erhalten als zweiten Schritt

$$(1.51) \quad x_1^{(2)} - x_0 = \frac{1}{2} (a_0 + a_1^{(1)}) \Delta t$$

$$u_1^{(2)} - u_0 = \frac{1}{2} (b_0 + b_1^{(1)}) \Delta t$$

mit

$$a_1^{(1)} = a(x_1^{(1)}, \Delta t, u_1^{(1)}), \quad b_1^{(1)} = b(x_1^{(1)}, \Delta t, u_1^{(1)}).$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit kann der zweite Schritt mehrmals wiederholt werden (Iteration). Wir haben dieses Verfahren hier für einen Punkt P_0 beschrieben. Es wird natürlich gleichzeitig für mehrere Punkte angewandt und man erhält eine Approximation der Lösung für $t = \Delta t$. Dies wird nun sukzessive wiederholt bis man am gewünschten Zeitpunkt angelangt ist.

Der Vorteil solcher Charakteristikenverfahren ist, daß sie sehr gut die Richtung der Signalausbreitung und damit den Einflußbereich der Anfangswerte im Näherungsverfahren übernehmen. Insofern sind diese Verfahren bezüglich der Genauigkeit der Approximationen im allgemeinen anderen Verfahren über-

legen. Bei Systemen von hyperbolischen Differentialgleichungen gilt es natürlich für ein Charakteristikenverfahren mehrere Charakteristiken zu verfolgen. Dementsprechend werden diese Verfahren komplexer und komplizierter. Einen entscheidenden Nachteil haben diese Verfahren bei der Approximation von nicht-linearen Gleichungen. Hier kann es zu Schnittpunkten von Charakteristiken kommen. Überall dort wird keine stetige Lösung mehr existieren, aber durchaus eine sogenannte schwache Lösung, welche auch eine Lösung des zugrunde liegenden physikalischen Problems ist. Es treten sogenannte **Stoßwellen (Shock Waves)** auf. In dieser Situation versagen zunächst Charakteristiken-Verfahren. Sie können für viele Probleme jedoch geeignet modifiziert werden, indem solche Schnittpunkte von Charakteristiken aufgespürt werden, dort eine Unstetigkeit in die Näherungslösung eingeführt wird und ihre Ausbreitungskurve als innerer Rand im Verfahren verfolgt wird (**Shock-fitting**). Dies geht solange gut, solange sich dies um einzelne Kurven handelt. Treten diese Unstetigkeiten sehr häufig auf oder kommt es gar zur Wechselwirkung von ihnen, ist das Charakteristiken-Verfahren nicht mehr effizient oder nicht mehr durchführbar. Das zugehörige Computerprogramm ist von der Struktur her sehr kompliziert und muß alle Unstetigkeitskurven verwalten und verfolgen. Dies macht ein solches Programm insbesondere sehr uneffektiv auf einem Vektorrechner und damit nicht anwendbar auf größere praktische Probleme, wie die Berechnung mehrdimensionaler kompressibler Strömungen.

Demgegenüber sind Differenzen-Verfahren, bei denen die Ableitungen durch einfache Differenzenquotienten ersetzt werden, von der Struktur her sehr einfach und effizient auf einem Vektorrechner zu codieren. Die Güte dieser Verfahren basiert zunächst auf der Gültigkeit von Taylorentwicklungen, welche garantieren, daß der Differenzenquotient eine sinnvolle Approximation darstellt. Wir werden später zeigen, daß es aber gelingt, Differenzenverfahren zu konstruieren, welche lokal die Richtung der Charakteristiken berücksichtigen und auch an Unstetigkeiten automatisch physikalisch und mathematisch sinnvolle Lösungen produzieren (**Shock-capturing**). Dabei bleibt die einfache Struktur des Differenzenverfahrens im wesentlichen erhalten.

Zusammenfassend kann man sagen, daß Charakteristikenverfahren sicher die genauesten und besten Verfahren sind, falls glatte Lösungen oder auch noch "nichtkomplizierte" stückweise glatte Lösungen existieren. Für allgemeine nicht-lineare Probleme - auch mit komplizierter Struktur der Lösungen - sind die "charakteristischen" Differenzenverfahren, welche wir später vorstellen, besser geeignet.

Wir wollen uns nun kurz den Grundlagen von **Differenzenverfahren** zuwenden. Ist eine Funktion $u = u(x, t)$ beliebig oft stetig differenzierbar $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0)$, so führen Taylorentwicklungen auf die Gleichungen

$$(1.52) \quad u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x u_x(x, t) + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}(x, t) + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}(x, t) + o(\Delta x^4)$$

$$(1.53) \quad u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x u_x(x, t) + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}(x, t) - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}(x, t) + o(\Delta x^4)$$

Wie üblich schreiben wir $f(x) = o(\Delta x)$ falls $|f(x)| \leq \kappa \Delta x$ für $\Delta x \rightarrow 0$, mit $\kappa \in \mathbb{R}^+$. Daraus erhalten wir einfache Approximationen der Ableitung u_x im Punkte (x, t) . Etwa aus (1.52) folgt der sogenannte **rechtsseitige Differenzenquotient**

$$(1.54) \quad \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = u_x(x, t) + o(\Delta x),$$

aus (1.53) der **linksseitige Differenzenquotient**

$$(1.55) \quad \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = u_x(x, t) + o(\Delta x),$$

oder bildet man die Summe von (1.52) und (1.53) ergibt sich der **zentrale Differenzenquotient**

$$(1.56) \quad \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = u_x(x, t) + o(\Delta x^2).$$

Analog ergibt sich eine Approximation der Zeitableitung in der Form

$$(1.57) \quad \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = u_t(x, t) + o(\Delta t)$$

oder

$$(1.58) \quad \frac{u(x, t) - u(x, t - \Delta t)}{\Delta t} = u_t(x, t) + o(\Delta t)$$

welche der **vorwärtsgenommene** oder beziehungsweise der **rückwärtsgenommene** zeitliche Differenzenquotient genannt wird. Analog ergibt sich der **zentrale** zeitliche Differenzenquotient. Die Differenzenapproximation einer partiellen Differentialgleichung ist natürlich motiviert durch die Definition einer Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, z.B.

$$u_x(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) / \Delta x$$

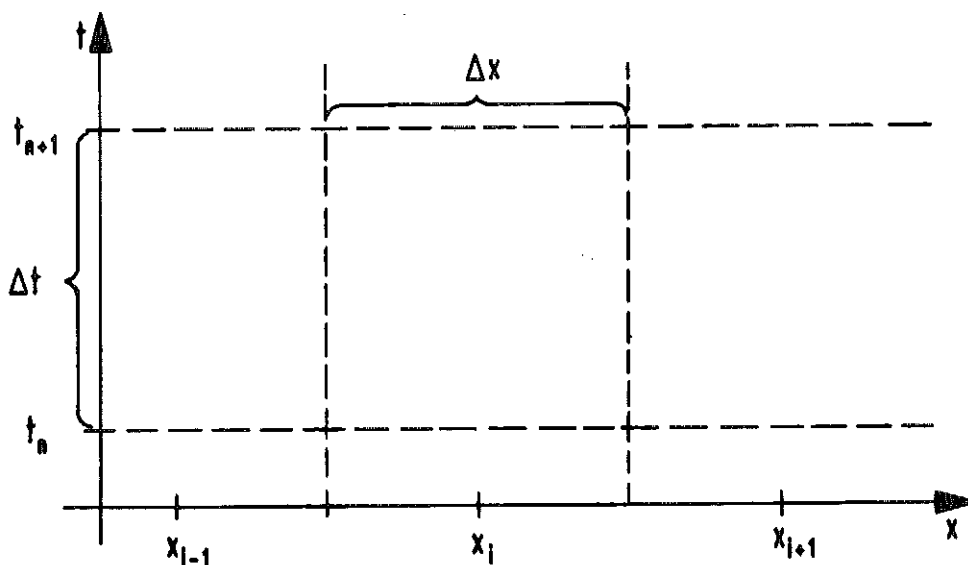
Falls u stetig differenzierbar ist, wird man natürlich erwarten, daß der Differenzenquotient eine geeignete Approximation der Ableitung darstellt, falls Δx klein aber endlich ist. Die Terme auf der rechten Seite der Differenzenapproximationen (1.54) - (1.58), mit $O(\Delta x)$, $O(\Delta x^2)$ oder $O(\Delta t)$ bezeichnet, nennt man den **lokalen Diskretisierungsfehler** oder **Abbruchfehler** der Differenzenapproximation.

Wir wollen uns nun ein paar Differenzenapproximationen des Cauchyproblems der linearen Transportgleichung (1.21), (1.22) mit konstantem $c \in \mathbb{R}$ anschauen. Wir führen eine Diskretisierung des Raumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ein, wobei der Raumschritt Δx und der Zeitschritt Δt als konstant angenommen werden, d.h. wir unterteilen die (x, t) -Ebene in Rechtecke mit der Länge Δx und Δt (siehe Figur 1.7). Die Gitterpunkte bezeichnen wir mit (x_i, t_n) , wobei

$$(1.59) \quad x_i = i\Delta x, \quad t_n = n\Delta t, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Den Wert der Näherungslösung an dem Gitterpunkt $P = (x_i, t_n)$ bezeichnen wir kurz mit u_i^n . Approximieren wir die Raumabteilung mit zentralen Differenzen und die Zeitableitung mit vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten, so erhalten wir das Näherungsverfahren

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



Figur 1.7 Diskretisierung

oder nach u_i^{n+1} aufgelöst

$$(1.60) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \right)$$

Analog erhalten wir unter Benutzung linksseitiger oder rechtsseitiger Differenzen

$$(1.61) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(u_i^n - u_{i-1}^n \right)$$

oder

$$(1.62) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1}^n - u_i^n \right)$$

Ausgehend von den bekannten Werten u_i^n , welche die Lösung der Differentialgleichung in den Gitterpunkten (x_i, t_n) approximieren, liefern diese Gleichungen Rechenvorschriften wie u_i^{n+1} berechnet werden kann.

Wir sehen an den Verfahren (1.60) bis (1.62), welche alle die Zeitableitung mittels vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten approximieren, daß nach der Unbekannten u_i^{n+1} aufgelöst und direkt neue Näherungswerte auf der Zeitschicht $t = t_{n+1}$ berechnet werden kann. Man kann diese Werte explizit berechnen.

Definition 3: Ein Differenzenverfahren heißt **explizit**, falls die Differenzengleichung nach den neuen Werten explizit aufgelöst werden kann. Andernfalls heißt das Verfahren **implizit**.

Implizite Verfahren treten auf, falls zur Approximation der Zeitableitung rückwärtsgenommene oder zentrale Differenzenquotienten benutzt werden. Beispiele für implizite Verfahren sind

$$(1.63) \quad u_i^{n+1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \right) = u_i^n$$

mit rückwärtsgenommenen Differenzenquotient für die Zeitableitung und linksseitigem für die Raumableitung. Ein Verfahren, welches für beide Ableitungen den zentralen Differenzenquotienten benutzt, ist das sogenannte Crank-Nicolson Verfahren (siehe [41])

$$(1.64) \quad u_i^{n+1} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n+1/2}) = u_i^n$$

mit

$$u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_i^n + u_i^{n+1}) .$$

Man sieht an diesen Beispielen, daß die impliziten Näherungsverfahren auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems führen oder auf ein nichtlineares Gleichungssystem im Falle einer nichtlinearen Differentialgleichung.

Es gibt noch gewisse Mischformen von expliziten und impliziten Verfahren. Wird ein implizites Differenzenverfahren mittels eines Praediktor-Korrektor Ansatzes gelöst und damit explizit auflösbar, so nennt man diese Verfahren oft **halbimplizit**. Man sieht schon an der Fülle der angegebenen Differenzenverfahren - und wir könnten hier weiter fortschreiten -, daß man gewisse Kriterien benötigt, um im voraus schon entscheiden zu können, welches Verfahren für ein Problem geeignet oder ungeeignet ist. Man benötigt somit eine gewisse Anzahl von **Beurteilungskriterien**. Neben recht allgemeinen Kriterien können auch sehr spezielle Kriterien herangezogen werden, welche vom Typ der Gleichung oder sogar von der Struktur der Lösung abhängen. Wir wollen hier zunächst einige allgemeine Beurteilungskriterien für Näherungsverfahren angeben.

Grundlegende Eigenschaften sind die **Konsistenz, Stabilität und Konvergenz** eines Näherungsverfahrens. Wir wollen diese Eigenschaften hier kurz skizzieren. Dazu schreiben wir das Anfangswertproblem einer Evolutionsgleichung in der Operatorschreibweise

$$(1.65) \quad u_t = A u , \quad u(x, 0) = q(x) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} ,$$

wobei A ein Differentialoperator ist, definiert in einem Banachraum B mit der Norm $\| \cdot \|$, d.h. eine Abbildung von $D_A \rightarrow B$ mit $D_A \subset B$. Diese Evolutionsgleichung wird approximiert durch ein Differenzenverfahren, welches wir in der Form

$$(1.66) \quad u^{n+1} = Q u^n , \quad u_i^0 = q(x_i) , \quad i \in \mathbb{Z} ,$$

schreiben. Dabei bedeutet $u^n = \{u_i^n\}_{i \in \mathbb{Z}}$ die Näherungslösung zum Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$.

Konsistenz bedeutet, daß das Näherungsverfahren eine Approximation der Ausgangsgleichung darstellt. Setzt man die exakte Lösung in das Näherungsverfahren ein, so ergibt sich ein Fehler, welcher bei Verkleinerung der Schrittweiten natürlich gegen Null streben sollte.

Definition 4: Das Differenzenverfahren (1.66) heißt **konsistent** mit der Evolutionsgleichung (1.65), falls

$$(1.67) \quad \|u(x, t_{n+1}) - Q u(x, t_n)\|_i \leq \Delta t (O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q))$$

mit $p, q \geq 1$. Dabei heißt p und q die **Konsistenzordnung** der Raum- beziehungsweise der Zeitdiskretisierung. Das Argument der Norm in (1.67) nennt man den **lokalen Diskretisierungsfehler**.

Wir sollten darauf hinweisen, wie die Norm in (1.67) zu verstehen ist. Wir haben dies der Einfachheit halber etwas unpräzise formuliert. Das Argument der Norm in (1.67) ist eigentlich eine Gitterfunktion, so daß diese Norm $\| \cdot \|_i$ als diskrete Version von $\| \cdot \|$ in B zu verstehen ist. Ist etwa

$$\|u\| = \max_{x \in \mathbb{R}} \|u(x)\| \quad ,$$

so wäre die zugehörige diskrete Version

$$\|u\|_i = \max_{i \in \mathbb{Z}} \|u_i\| \quad .$$

In den Formeln für die Differenzenquotienten (1.54) - (1.58) haben wir ihren lokalen Diskretisierungsfehler auf der rechten Seite mit aufgeführt. Setzen wir diese Ausdrücke zum Beispiel in das Verfahren (1.60) ein, so erhalten wir

$$\Delta t (u_t(x, t) + cu_x(x, t)) = \Delta t (O(\Delta t) + O(\Delta x^2)) \quad .$$

Da u die Lösung der Differentialgleichung ist, ist der Ausdruck in der Klammer Null und der rechte Term zeigt gerade den Diskretisierungsfehler an. Das Verfahren (1.60) besitzt somit die Konsistenzordnung 1 und 2 in Zeit- bzw. Raumrichtung.

Die Konsistenz eines Verfahrens zeigt uns, daß es eine sinnvolle Approximation des Ausgangsproblems ist. Dies sagt jedoch noch nichts darüber aus, daß die Näherungslösung nahe bei der exakten Lösung liegt. Zusätzlich müssen wir zumindest fordern, daß die Näherungslösung gegen die exakte Lösung strebt, falls die Schrittweiten gegen Null streben.

Definition 5: Das Differenzenverfahren (1.66) heißt **konvergent** gegen die Lösung u von (1.65) in der Norm $\| \cdot \|$, falls

$$(1.68) \quad \|u(x, t) - u^n\|_i \rightarrow 0 \text{ für } \Delta t, \Delta x \rightarrow 0 .$$

Man nennt $\|u(x, t) - u^n\|_i$ den **globalen Disrektisierungsfehler** und ein Verfahren besitzt die Konvergenzordnung (p, q) , falls dieser Ausdruck $O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$ ist.

Die Konsistenz und die Konvergenz sind beides Aussagen, welche garantieren, daß ein Näherungsverfahren die gewünschte Lösung liefert, falls die Schrittweiten gegen Null streben. Dies ist sicherlich eine notwendige Eigenschaft eines Näherungsverfahrens, sagt aber noch nicht so sehr viel darüber aus über die "Qualität" der Näherungslösung für eine endliche Schrittweite, auf die wir ja in Rechnungen angewiesen sind. Da der Rechenaufwand eines Verfahrens stark anwächst mit der Anzahl der Gitterpunkte, ist üblicherweise ein Verfahren gesucht, welches gute Näherungslösungen liefert unter Benutzung von möglichst wenigen Gitterpunkten. Die Konsistenz- und Konvergenzordnung gibt hier natürlich schon gewisse Anhaltspunkte. Für praktische Probleme wird im allgemeinen ein Verfahren erster Ordnung nicht in Frage kommen. Eine andere sehr wichtige Eigenschaft eines Näherungsverfahrens ist die der Stabilität. Ein Näherungsverfahren kann natürlich nur stabil sein, falls das exakte Problem diese Eigenschaft besitzt. Man setzt voraus, daß das Anfangsproblem sachgemäß gestellt ist.

Definition 6: Die Anfangswertaufgabe (1.65) heißt **sachgemäß gestellt**, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Existenz: (1.65) ist lösbar für beliebige Anfangswerte aus B (dichte Teilmenge)
2. Eindeutigkeit: die Lösung von (1.65) ist eindeutig
3. Stabilität (stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten): Die Lösung genügt einer Lipschitzbedingung bezüglich den Anfangswerten.

Ein Näherungsverfahren angewandt auf ein sachgemäß gestelltes Anfangswertproblem, sollte diese Eigenschaften erhalten. Für ein explizites ist die Forderung der Existenz und der Eindeutigkeit einer Näherungslösung trivial, da die Lösung durch eine explizite Rechenvorschrift gegeben ist. Bei einem impliziten Verfahren ist dies natürlich nicht so. Wird ein solches Verfahren angewandt auf ein sachgemäß gestelltes Problem, so sollte Existenz und Eindeutigkeit einer Näherungs-

lösung gesichert sein. Für beide Verfahrenstypen ist die Stabilität ein zentraler Begriff. Neben dem lokalen Diskretisierungsfehler treten bei der praktischen Berechnung auf dem Computer zusätzlich noch Rundungsfehler auf. Stabilität des exakten Problems und Stabilität des dazugehörigen Näherungsverfahrens garantieren, daß trotz solcher (kleiner) Fehler die Näherungslösungen "ähnlich" der exakten Lösung sind. Diese zusätzliche Eigenschaft garantiert uns erst, daß wir auch bei einer endlichen Schrittweite und nicht nur für $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, eine gute Näherungslösung erhalten. Die Stabilität eines Anfangswertproblems läßt sich folgendermaßen definieren:

Definition 7: Das Verfahren (1.66) heißt **stabil** in der $\|\cdot\|_i$ -Norm, falls eine Konstante K unabhängig von den Schrittweiten existiert mit

$$(1.69) \quad \|u^n - \bar{u}^n\|_i \leq K \|u^0 - \bar{u}^0\|_i ,$$

wobei u^n und \bar{u}^n Näherungslösungen nach (1.66) mit den Anfangswerten u^0 bzw. \bar{u}^0 sind.

Die Konstante K hängt im allgemeinen natürlich ab von $t = n\Delta t$. Für lineare Probleme gibt es einige Standard-Methoden, die Stabilität eines Näherungsverfahrens zu untersuchen, etwa die Fouriermethode oder von Neumann Methode (siehe [53]). Ebenso im linearen Fall für ein sachgemäß gestelltes Problem gilt das berühmte **Theorem von Lax**

Konsistenz + Stabilität \Leftrightarrow Konvergenz.

Im nichtlinearen Fall gibt es solche allgemeinen Resultate nicht mehr. Eine nicht-lineare Stabilitätsanalyse ist oft sehr schwierig und gelingt nur für spezielle Gleichungen.

Wir wollen uns im folgenden kurz mit der sogenannten heuristischen "Stabilitätstheorie" von Hirt (siehe [64]) beschäftigen. Dabei wird die exakte Lösung in das Differenzenverfahren eingesetzt und auf die rechte Seite der Diskretisierungsfehler geschrieben. Nun analysiert man diese Gleichung bezüglich ihrer Stabilität. Für das explizite Verfahren mit linksseitigen Differenzen (1.61) erhält man mit $\lambda = \Delta t/\Delta x$

$$(1.70) \quad u_t + cu_x = \frac{1}{2} \Delta x (cu_{xx} - \lambda u_{tt}) + O(\Delta x^2) .$$

Wir wollen hier $\lambda = \text{konst.}$ voraussetzen. Die Ableitung u_{tt} kann man mit Hilfe der Differentialgleichung umrechnen; so gilt wegen $u_t + cu_x = 0$:

$$(1.71) \quad u_{tt} = (-cu_x)_t = -cu_{tx} = c^2u_{xx}$$

und (1.70) läßt sich in

$$(1.72) \quad u_t + cu_x = \frac{1}{2} \Delta xc(1 - \lambda c)u_{xx} + O(\Delta x^2)$$

überführen. Diese Gleichung zeigt nun, daß unsere Approximation ein Verfahren erster Ordnung ist für die hyperbolische Transportgleichung (1.21), jedoch ein Verfahren zweiter Ordnung für die parabolische Gleichung (1.72), die sich ergibt, wenn wir den ersten Term des Diskretisierungsfehlers noch der Differentialgleichung hinzurechnen. Unser Näherungsverfahren ist somit eine bessere Approximation der Gleichung (1.72) wie der originalen hyperbolischen Gleichung. Von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen weiß man nun, daß das Anfangswertproblem für diese parabolische Gleichung genau dann stabil ist, falls der Term vor u_{xx} (z.B. Wärmeleitkoeffizient) positiv ist. Das Verfahren (1.61) ist somit stabil, falls

$$(1.73) \quad c > 0 \text{ und } \lambda c < 1 .$$

Analog ergibt sich für das explizite Verfahren mit linksseitigen räumlichen Differenzen die modifizierte Gleichung

$$(1.74) \quad u_t + cu_x = \frac{1}{2} \Delta xc(1 + \lambda c)u_{xx} + O(\Delta x^2) .$$

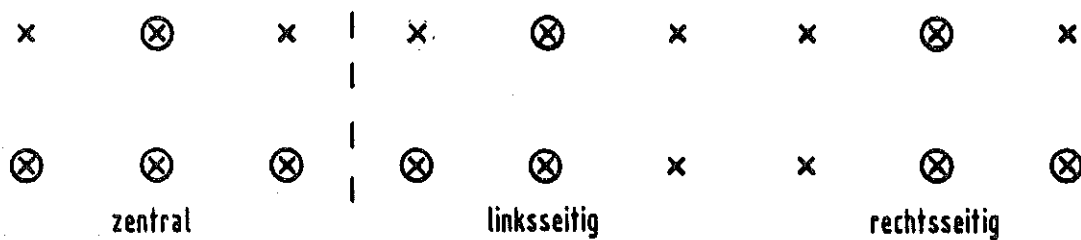
Dies besagt, daß dieses Verfahren stabil ist unter der Bedingung

$$(1.75) \quad c < 0 , \lambda c > -1 .$$

Für das explizite Verfahren mit zentralen Differenzen folgt aus der Hirtschen Stabilitätsanalyse, daß es unter keinen Umständen stabil ist. Diese Resultate stimmen mit den Resultaten anderer Methoden wie der Fouriemethode überein. Diese heuristische Methode, bei dem der erste Term des lokalen Diskretisierungsfehlers Aufschluß über das Stabilitätsverhalten gibt, hat den Vorteil, daß sie auch auf nichtlineare Probleme anwendbar ist. Jedoch muß die modifizierte Gleichung noch einer Stabilitätsanalyse zugänglich sein. Die Terme höherer Ordnung,

welche hier vernachlässigt werden, können natürlich zusätzlich eine gewisse Rolle spielen. Wir erhalten aus dieser Stabilitätsanalyse natürlich auch keine exakte Aussage in der Form der Ungleichung (1.69) aus der Definition der Stabilität.

Diese Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung können wir uns auch noch auf andere Art und Weise verständlich machen. Wir schauen uns hierzu den Abhängigkeitsbereich unserer Näherungsverfahren an. Die obigen Stabilitätsergebnisse besagen nun gerade, daß der numerische Abhängigkeitsbereich, wie er etwa in Figur 1.8 skizziert ist, den Abhängigkeitsbereich, wie er durch die Charakteristiken gegeben ist, überdecken muß. Diese Stabilitätsbedingung wird nach Courant, Friedrichs und Levinson die **CFL-Bedingung** genannt (siehe [62], [53]).



Figur 1.8 Abhängigkeitsbereich der Differenzverfahren (1.60), (1.61), (1.62)

Nach diesen Betrachtungen können wir auch ein explizites Verfahren angeben für eine lineare Advektionsgleichung mit $c = c(x, t)$, bei dem lokal die Richtung der Differenzenbildung nach den charakteristischen Richtungen umgeschaltet wird:

$$(1.76) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - c_i^n \lambda \begin{cases} u_i^n - u_{i-1}^n & \text{falls } c_i^n > 0 \\ u_{i+1}^n - u_i^n & \text{falls } c_i^n < 0 \end{cases}$$

Dieses Verfahren wird nach Courant, Isaacson und Ries [6] **CIR-Verfahren** genannt.

Neben diesen Differenzverfahren, bei denen sowohl Raum als auch Zeitrichtung diskretisiert sind, spielen auch sogenannte halbdiskrete Verfahren eine große Rolle. Bei diesen Verfahren wird nur in einer Richtung diskretisiert. Wird nur in Zeitrichtung diskretisiert und die Zeitableitung durch den rückwärts-

genommenen Differenzenquotienten ersetzt, so heißt das Verfahren **horizontale Linienmethode** oder **Rotheverfahren**:

$$(1.77) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + au_x^{n+1} = 0, \quad u^0(x) = q(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wird nur in Raumrichtung diskretisiert, so nennt man dieses Verfahren die **vertikale Linienmethode**. Ersetzt man etwa die Raumableitung durch einen rechtsseitigen Differenzenquotienten, so erhält man

$$(1.78) \quad (u_t)_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = 0, \quad u_i(0) = q(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Diese halbdiskreten Methoden werden sehr oft für theoretische Aussagen benutzt, haben aber durchaus auch praktische Bedeutung. Die Linienmethode reduziert die partiellen Differentialgleichungen zu einer Folge von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese können dann etwa sukzessive mit Hilfe eines Näherungsverfahrens für gewöhnliche Differentialgleichungen gelöst werden.

Diese Grundlagen über Näherungsverfahren für hyperbolische Differentialgleichungen finden sich natürlich in jedem Lehrbuch über die numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen so etwa in [42], [53] und [62]. Für Weiterentwicklungen der Stabilitätstheorie von Hirt (siehe [59]).

2.0 Skalare Erhaltungsgleichung

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der einfachsten Gleichung, welche nichtlineare Wellenphänomene beschreibt, der **skalaren Erhaltungsgleichung**

$$(2.1) \quad u_t + f(u)_x = 0 .$$

Wir haben diese schon als Beispiel 2 im ersten Kapitel vorgestellt. Eine solche Gleichung tritt auf bei der mathematischen Beschreibung physikalischer Erhaltungssätze. Wir haben dies in Kapitel 1 kurz abgeleitet. Der Fluß $f(u)$ sei im folgenden immer eine glatte Funktion: $f \in C^2(\mathbb{R})$. Ist f eine lineare Funktion $f(u) = au$ mit $a = \text{konstant}$, geht die Erhaltungsgleichung (2.1) über in die lineare Transportgleichung. Wir suchen eine Lösung des **Anfangswertproblems** der Erhaltungsgleichung (2.1) zu den Anfangswerten

$$(2.2) \quad u(x, 0) = q(x) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

In Abschnitt 2.1 werden wir untersuchen, inwieweit eine stetig differenzierbare Lösung dieses Anfangswertproblems existiert, unter der Annahme, daß die Anfangswerte stetig differenzierbar sind. Wir werden sehen, daß im allgemeinen eine solche Lösung nur lokal existiert. Um globale Lösungen zu erhalten, müssen wir bezüglich der Stetigkeit etwas "schwächere" Lösungen zulassen. Dieses **Konzept der schwachen Lösungen des Cauchyproblems (2.1), (2.2)** werden wir in Abschnitt 2.2 erörtern und motivieren. Der Abschnitt 2.3 ist dann einem aktuellen Beispiel gewidmet.

2.1 Existenz von stetigen Lösungen

Schreiben wir die Erhaltungsgleichung (2.1) in der **quasilinearen Form**

$$(2.3) \quad u_t + a(u)u_x = 0 \quad \text{mit} \quad a(u) := \frac{df(u)}{du} ,$$

so erhalten wir Anschluß an die **Theorie der Charakteristiken**, wie wir sie schon im Kapitel 1 verwendet haben. Wir interpretieren die linke Seite in (2.3) als Richtungsableitung in Richtung $(1, a(u))$ und führen charakteristische Kurven $C: x = x(s) , t = t(s)$ ein, welche in jedem Punkt diese Richtung haben:

$$C: \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = a(u).$$

Wir können dies noch etwas vereinfachen, indem wir t als Parameter einführen und C mit $x = x(t)$ beschreiben. Die Gleichung (2.3) gibt uns nun an, wie sich u entlang dieser Kurve C verändert. Auf C haben wir $u = u(x(t), t)$ und nach (2.3) $du/dt = 0$. Fassen wir zusammen, so erhalten wir die Beziehungen

$$(2.4) \quad \frac{dx}{dt} = a(u), \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Da $a(u)$ die Steigung der Charakteristiken bestimmt, wird a auch oft **Signalgeschwindigkeit** genannt. Im nichtlinearen Fall ist a eine Funktion von u und wir können die erste Gleichung nicht mehr unabhängig von der zweiten Gleichung lösen. Wir können jedoch die zweite Gleichung direkt lösen und erhalten

$$u = \text{konstant entlang } C.$$

Ist u jedoch konstant entlang C , so ist auch die Steigung von C - nämlich $a(u)$ - konstant. Dies bedeutet, daß die Charakteristiken auch im nichtlinearen Falle Geraden sind, deren Steigung jedoch von der Lösung abhängt. Für das Anfangswertproblem (2.1), (2.2) erhalten wir somit die Lösung im Punkte (x, t) , wenn wir die Charakteristik in (x, t) antragen und bis zu den Anfangswerten zurückverfolgen (Figur 2.1). Diese Charakteristik hat die Gleichung

$$(2.5) \quad x = x_0 + t a(u(x_0, 0)) = x_0 + t a(q(x_0))$$

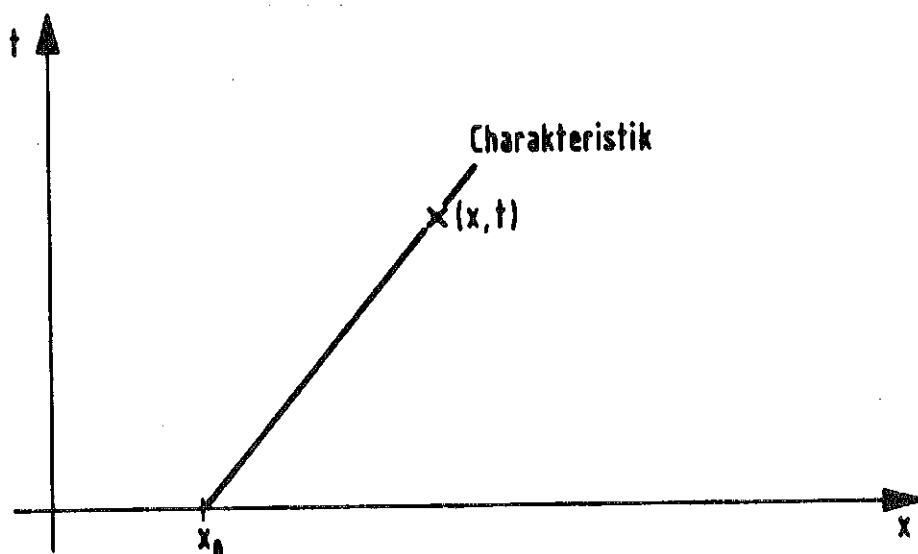
und entlang dieser Charakteristik besitzt u den Wert

$$(2.6) \quad u(x, t) = q(x_0).$$

Diese beiden Gleichungen können wir kombinieren, indem x_0 eliminiert wird und wir erhalten die Lösung $u(x, t)$ in Form einer impliziten Gleichung

$$(2.7) \quad u(x, t) = q(x - t a(u(x, t))).$$

Sind die Anfangswerte q stetig differenzierbar, $q \in C^1(\mathbb{R})$, so existiert für "hinreichend kleines" t eine Lösung von (2.7) nach dem Satz über implizite Funktionen.



Figur 2.1 Charakteristiken

Differenzieren wir die Gleichung (2.7) partiell nach x und t , erhalten wir

$$(2.8) \quad u_t = \frac{-q'a(u)}{1 + q'b(u)t}, \quad u_x = \frac{q'}{1 + q'b(u)t}$$

mit $b(u) = da(u)/du$. Setzt man diese Ausdrücke in die Erhaltungsgleichung ein, so sieht man erneut, daß (2.7) eine Lösung von (2.3) definiert. Wir haben somit gezeigt, daß in einem Zeitintervall $[0, t_0)$ mit "hinreichend kleinem" t_0 eine Lösung existiert. Wie klein dieses t_0 sein muß, können wir in (2.8) ablesen. Solange hier die Nenner ungleich Null sind, ist eine Lösung von (2.3) gegeben.

Satz 1 (Lokale Existenz einer klassischen Lösung): Das Anfangswertproblem (2.1), (2.2) besitzt eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, t_0])$ mit

$$(2.9) \quad 0 < t_0 < \frac{1}{\max_{q'b(u) < 0} |q'b(u)|}$$

falls $q \in C^1(\mathbb{R})$. Die Lösung u ist gegeben in impliziter Form durch

$$u(x, t) = q(x - ta(u(x, t))) .$$

Beweis: Die Existenz einer Lösung haben wir hergeleitet. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Lösung eindeutig ist. Sei \bar{u} eine andere Lösung von (2.1), (2.2), dann gilt entlang einer Charakteristik

$$\bar{u}(x, t) = u(x, 0) = q(x) = u(x, t)$$

und somit $\bar{u} \equiv u$.

Man nennt eine solche Lösung $u \in C^1$ des Cauchyproblems oft auch **klassische Lösung**. \square

Bemerkung 1: Im Falle $f(u) = cu$ mit $c = \text{konstant}$, bekommt (2.7) einen expliziten Charakter und man erhält die Lösung des Cauchyproblems für die lineare Transportgleichung

$$u(x, t) = q(x - ct)$$

(vergl. Beispiel 1 in § 1.2).

Für die folgenden Beispiele setzen wir jetzt voraus, daß der Fluß der Erhaltungsgleichung eine konvexe Funktion sei:

$$(2.10) \quad b(u) = \frac{d^2 f(u)}{du^2} > 0$$

Wir wollen uns dazu einige typische Anfangswertprobleme für eine solche Erhaltungsgleichung anschauen. Die einfachsten nichtlinearen Probleme sind dabei Anfangswertprobleme für die **Burgersgleichung**

$$(2.11) \quad u_t + uu_x = u_t + \left(\frac{1}{2} u^2\right)_x = 0$$

Da diese Gleichung schon alle wesentlichen Phänomene der Nichtlinearität des konvexen Flusses zeigt, wollen wir uns auf diese Gleichung zunächst beschränken. Sie ist sozusagen der generische Fall. Denn multiplizieren wir die allgemeine Erhaltungsgleichung mit $b(u) = a'(u)$ erhalten wir mit

$$a(u)_t + a(u) a(u)_x = 0$$

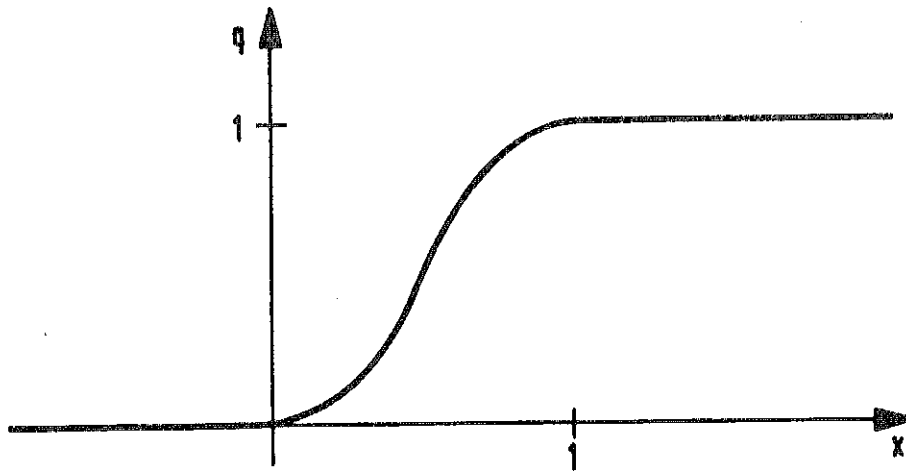
eine Gleichung vom Typ der Burgersgleichung. Diese kann dann gelöst werden mit den dazugehörigen Anfangswerten analog zur Burgersgleichung.

Beispiel 1 (Verdünnungswelle):

Wir betrachten das Cauchyproblem für die Burgersgleichung mit den Anfangswerten $q \in C^1(\mathbb{R})$:

$$(2.12) \quad q(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \text{monoton wachsend} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

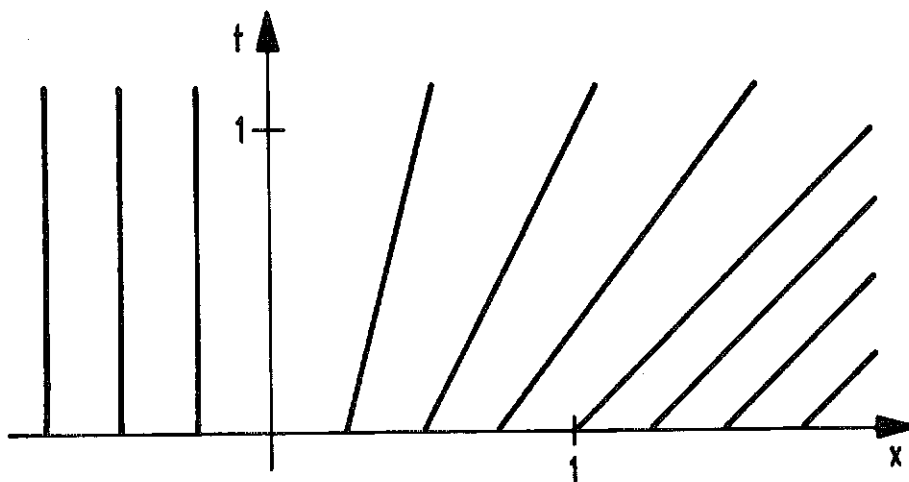
(siehe Figur 2.2).



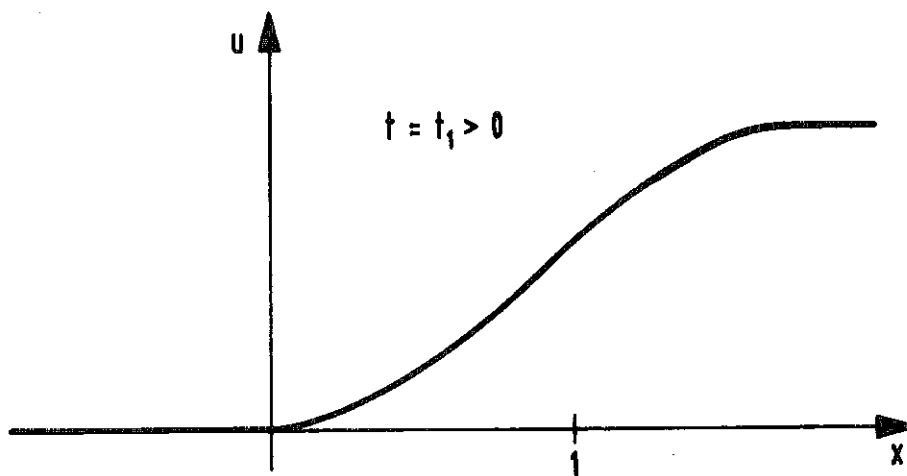
Figur 2.2 Anfangswerte

Das Bild der Charakteristiken sieht folgendermaßen aus (siehe Figur 2.3). In der linken Halbebene haben die Geraden die Steigung ∞ , rechts von der Geraden $x = 1$ die Steigung 1. Zwischen $x = 0$ und $x = 1$ gilt $1 \leq 1/q(x) \leq \infty$ und die Steigung $1/q$ der Charakteristiken fällt monoton. Das heißt, die Charakteristiken schneiden sich nicht. Es existiert eine globale, stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (2.11), (2.12). Dies folgt natürlich auch aus unserem Satz 1.

Das Verhalten dieser Lösung können wir aus dem Bild der Charakteristiken ablesen. Die Steigung der Charakteristiken in der (x, t) -Ebene nimmt kontinuierlich ab für wachsendes x , das heißt die Signalgeschwindigkeit nimmt zu. Dies bedeutet, daß sich die Punkte rechts schneller bewegen und der Graph der Lösung "auseinandergezogen" wird. Die Figur 2.4 zeigt eine solche Lösung, welche man **Verdünnungswelle** bezeichnet. Der Wert der Ableitung in x -Richtung fällt monoton. Die Übergangszone von Null auf Eins wird größer und der Übergang flacher bei fortschreitender Zeit.



Figur 2.3 Bild der Charakteristiken, Verdünnungsfächer



Figur 2.4 Verdünnungswelle zum Zeitpunkt $t = t_1 > 0$

Beispiel 2 (Stoßwelle):

Wir betrachten das Cauchyproblem für die Burgersgleichung mit den stetigen Anfangswerten

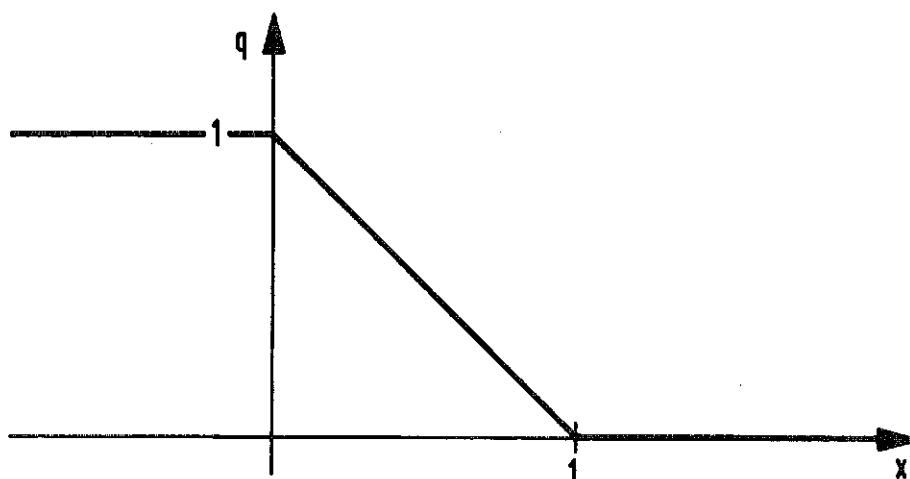
$$(2.13) \quad q(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Eine Skizze des Graphs dieser Anfangswerte ist in Abbildung 2.5 gezeichnet. Die Funktion q ist monoton fallend und ist bis auf die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ stetig differenzierbar. Diese Ausnahmepunkte spielen hier keine Rolle, das Zusammenbrechen der Lösung ist unabhängig davon. Der lineare Übergang von Eins nach Null vereinfacht das Bild der Charakteristiken nur etwas.

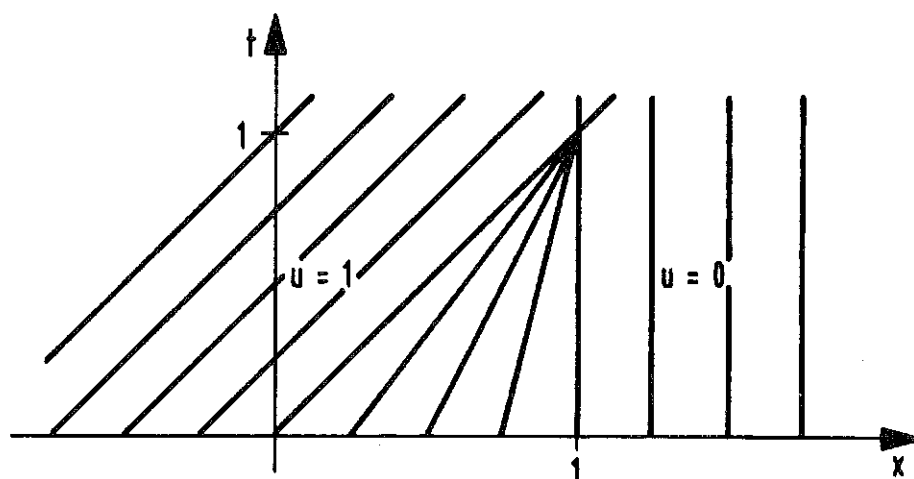
In Figur 2.6 haben wir das Bild der Charakteristiken aufgezeichnet. Die Steigung der Charakteristiken nimmt kontinuierlich zu für wachsendes x . Wir sehen in Figur 2.6, daß sich die Charakteristiken ab $t = 1.0$ schneiden. Überall dort kann keine stetige Lösung mehr existieren, die Lösung wird mehrdeutig. Sie entwickelt eine Unstetigkeit, welche im Punkte $(1,1)$ entsteht. Wo sich Charakteristiken schneiden, können wir aus der Charakteristikentheorie keine Aussage mehr über die Lösung machen. Wir benötigen einen neuen Lösungsbegriff einer partiellen Differentialgleichung, um solche Lösungen genau definieren zu können.

Das Bild der Charakteristiken zeigt uns, daß die Punkte links schneller nach rechts laufen als die rechten Punkte, das heißt die Anfangswerte steilen sich auf. Figur 2.7 zeigt den Graph der Lösung kurz vor $t = 1$.

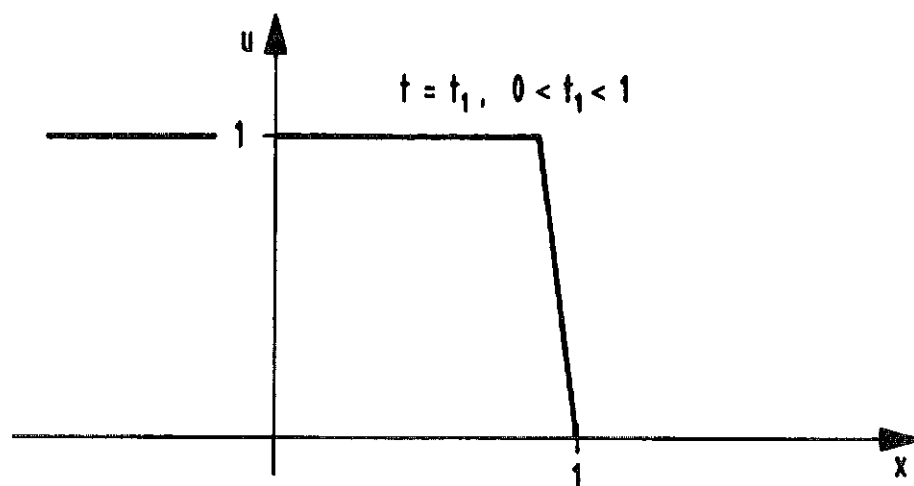
Betrachten wir Anfangswerte, wie sie in Figur 2.8 gezeichnet sind, so beobachten wir für die Lösung des Cauchyproblems den folgenden Effekt. Während im linearen Fall $f(u) = cu$, $c = \text{konstant}$, diese Kurve mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu der x -Achse nach rechts transportiert wird, hängt im nichtlinearen Fall die Distanz eines Punktes, die er bewegt wird, von seiner x -Koordinate ab; dies ist ein typisch nichtlineares Phänomen. Wir sehen in Figur 2.8, daß sich diese Welle aufstellt und schließlich für $t > t_0$ mehrdeutig wird. Dies kann etwa bei Wasserwellen physikalisch sinnvoll sein, aber bei den meisten Anwendungen gibt dies keinen Sinn. Unter der Bedingung der Konvexität des Flusses $f(u)$ sehen wir an diesen Beispielen und der Ungleichung (2.9), daß eine globale stetig differenzier-



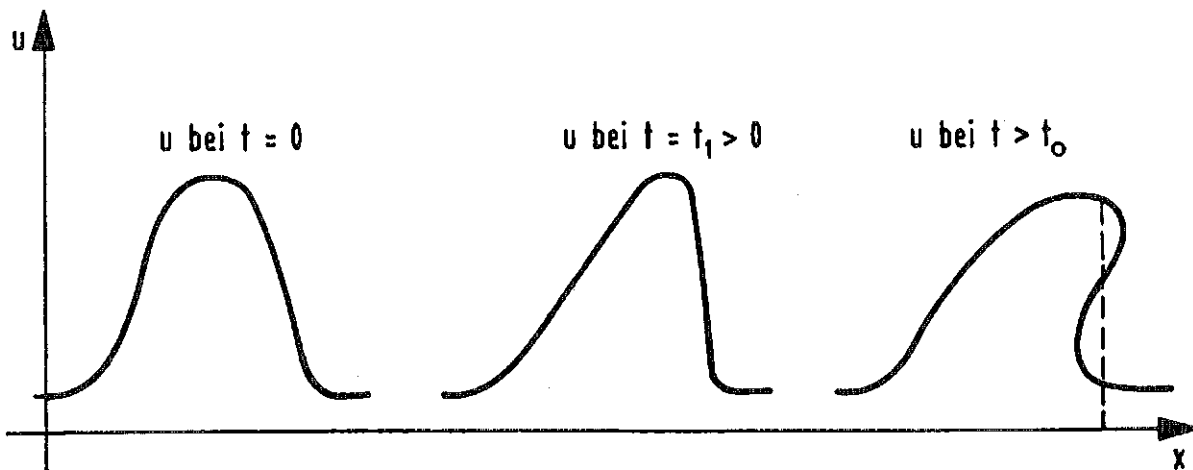
Figur 2.5 Anfangswerte



Figur 2.6 Charakteristiken



Figur 2.7 Lösung zum Zeitpunkt $0 < t_1 < 1$



Figur 2.8 Brechen

bare Lösung existiert, falls q monoton wachsend ist. Gibt es auch nur einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $q'(x_0) < 0$, so bricht die stetig differenzierbare Lösung zusammen nach der Zeit

$$t_0 = - \frac{1}{q'(x_0) b(u(x_0, 0))}$$

Trotzdem existieren Lösungen für das physikalische Problem auch noch für größere Zeiten. Wir wollen im folgenden Abschnitt beschreiben, welche Art von Lösung dann vorliegt und wie sie mathematisch beschrieben werden kann. **Das Zusammenbrechen einer stetig differenzierbaren Lösung hängt nicht ab von der Stetigkeit der Anfangswerte - diese können einmal oder beliebig oft stetig differenzierbar sein -, sondern ist einzig und allein in der Nichtlinearität des Flusses $f(u)$ begründet.**

Zwischen linearen hyperbolischen Problemen und nichtlinearen hyperbolischen Problemen bestehen fundamentale Unterschiede. In der Physik beschreiben die linearen Gleichungen nur reversible Prozesse, die quasilinearen Gleichungen irreversible. Das Auftreten von Unstetigkeiten, unabhängig von der Stetigkeit der Anfangswerte, ist eine grundlegende Eigenschaft der nichtlinearen Gleichungen.

Solche Sätze über die Existenz lokaler klassischer Lösungen finden sich in jedem Lehrbuch über partielle oder hyperbolische partielle Differentialgleichungen (z.B. [29], [30], [69]). Zur Existenz der Lösung der allgemeinen quasilinearen Differentialgleichung schaue man etwa in [30].

2.2 Schwache Lösungen

Wir haben in Abschnitt 2.1 gesehen, daß im nichtlinearen Fall die Charakteristiken sich schneiden können. Überall dort kann keine stetige Lösung mehr existieren. In der Physik existiert jedoch oftmals eine Lösung der integralen Erhaltungssätze, welche Unstetigkeiten enthält. Die physikalischen Größen ändern sich völlig abrupt in einer verschwindenden Übergangszone. Ein spektakuläres Beispiel sind etwa Detonationswellen. Aber es gibt schon weitaus gewöhnlichere Situationen - etwa in der Gasdynamik -, in denen solche sogenannte Stoßwellen auftreten. Wir werden in Abschnitt 2.3 eine unstetige Lösung eines mathematischen Modells für den Verkehr auf der Autobahn vorstellen. Um solche Lösungen des Cauchyproblems zu erhalten, benötigen wir einen schwächeren Lösungsbegriff, welcher Unstetigkeiten zuläßt. Wir haben in Abschnitt 1.2, als wir die Erhaltungsgleichung einführten, diese abgeleitet aus einem physikalischen integralen Erhaltungssatz. Unter der Annahme der Existenz einer stetig differenzierbaren Lösung haben wir den Gaußschen Satz angewandt und daraus eine lokale Aussage - die Differentialform des Erhaltungsgesetzes gewonnen. Ist nun diese Annahme der Existenz einer stetig differenzierbaren Lösung verletzt, dann müssen wir wieder zu einer integralen Formulierung zurückgehen. Dies kann in der folgenden Form geschehen.

Definition 1: Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ heißt **schwache Lösung** der Erhaltungsgleichung, falls für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$(2.14) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u \phi_t + f(u) \phi_x \, dx \, dt = 0$$

gilt.

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ heißt **schwache Lösung des Cauchyproblems** (2.1), (2.2) falls für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$

$$(2.15) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u \phi_t + f(u) \phi_x) \, dx \, dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0) q(x) \, dx = 0$$

gilt.

Die Integralgleichung (2.14) oder (2.15) erhält man aus der Differentialgleichung (2.1), indem man sie mit der Testfunktion multipliziert und sie über $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ integriert. Mittels partieller Integration werden die Ableitungen auf die

Testfunktionen übergewälzt. Eine schwache Lösung nach Definition 1 wird auch oft **integrale** oder **distributive Lösung** genannt. Die Integralgleichungen (2.14), (2.15) sind äquivalent damit, daß das Integral der Normalkomponente des Vektorfelds $(u, f(u))^T$ für jede stückweise glatte geschlossene Kurve im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ verschwindet, falls u von beschränkter Variation ist. Dies folgt aus dem Satz von Gauß verallgemeinert auf Maße ([13]). Dabei genügt es auch schon, eine wesentliche Klasse solcher Kurven zu nehmen, etwa Rechtecke. So ist u eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung oder des Cauchyproblems, falls die Integralgleichung

$$(2.16) \quad \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt = 0$$

für jedes Rechteck $(x_1, x_2) \times (t_1, t_2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ erfüllt ist. Die Voraussetzung, daß u von beschränkter Variation ist, ist eine recht natürliche Voraussetzung, wie wir später noch sehen werden. Die Integralgleichung (2.16) ist als Ausgangspunkt zur Konstruktion von Näherungsverfahren für schwache Lösungen weitaus günstiger als (2.14), (2.15). Wir können das Näherungsverfahren als eine direkte Approximation von (2.16) formulieren. Die Vorteile der üblichen Definition mittels (2.14), (2.15) liegen auf der theoretischen Seite, insbesondere lassen sich Ergebnisse der Distributionentheorie verwenden. Wenn wir im folgenden von Lösung sprechen beziehen wir uns immer auf den Begriff der schwachen Lösung.

Wir wollen uns nun zunächst anschauen, wie solche schwachen Lösungen einfacher Bauart aussehen und betrachten **stückweise glatte schwache Lösungen**, welche sehr häufig in physikalischen Anwendungen auftreten. Dabei verstehen wir unter einer **stückweisen glatten Lösung**, daß sie aus $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ ist - außer entlang einer endlichen Anzahl von glatten Kurven. Höchstens Endpunkte dieser Kurven dürfen zusammenfallen oder auf die x -Achse treffen und es existieren - möglicherweise mit Ausnahme dieser Endpunkte - jeweils einseitige stetige Grenzwerte. Für solche Lösungen gilt

Satz 1: Sei u eine stückweise glatte Funktion mit $u(x, 0) = q(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion u ist genau dann eine schwache Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2), wenn

a.) in allen Punkten, in denen u glatt ist, die Gleichung (2.1) im klassischen Sinn erfüllt ist,

b.) entlang den Ausbreitungskurven einer Unstetigkeit die **Sprungbedingung**

$$(2.17) \quad s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

erfüllt ist - mit Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte. Dabei bezeichnet in (2.17) $[u]$ den Sprung über die Unstetigkeit mit den Zuständen u_l, u_r auf der linken bzw. auf der rechten Seite und s die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeit.

Beweis: Wir wollen ausgehen von der Integralgleichung (2.16). An allen Punkten, in denen u glatt ist, ergibt sich die Äquivalenz der Erhaltungsgleichung mit ihrer Integralformulierung aus dem Gaußschen Satz. Wir können (2.16) umschreiben in

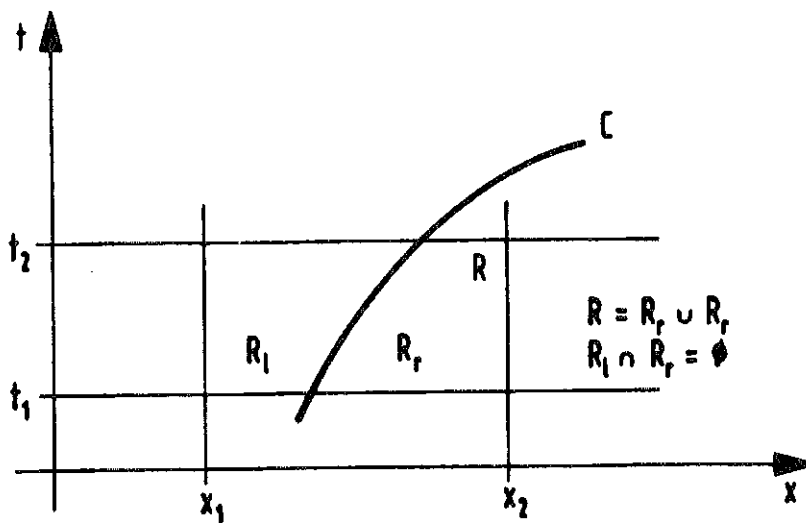
$$(2.18) \quad \int_{\partial R} \left(\vec{n}, \begin{pmatrix} u \\ f(u) \end{pmatrix} \right) ds = 0,$$

wobei ∂R der Rand des Rechtecks $R = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ und \vec{n} der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor ist. Der Gaußsche Satz liefert dann unter der Bedingung $u \in C^1(\mathbb{R})$

$$\iint_R \left(u_t + f(u)_x \right) dx dt = 0.$$

Da dies für jedes beliebige R mit $u \in C^1(\mathbb{R})$ gilt, können wir R beliebig klein werden lassen. Es folgt daraus die Gültigkeit der Differentialgleichung (2.1) in jedem Punkt, in dem u stetig differenzierbar ist, d.h. u ist dort klassische Lösung.

Sei nun $C : x = x(t)$ die Parameterdarstellung für eine Ausbreitungskurve einer Unstetigkeit im Rechteck R (siehe Figur 2.9). Wir zerlegen nun R in ein Gebiet R_r und R_l rechts bzw. links der Unstetigkeit und stellen die Integralgleichungen für jedes dieser Gebiete getrennt auf. Da u in R_l und R_r eine klassische Lösung ist, können wir nach der Integration der Erhaltungsgleichung über R_l und R_r den Gaußschen Satz anwenden und erhalten



Figur 2.9 Zum Beweis von Satz 1

$$\int_{\partial R_i} \left(\vec{n}_i, \begin{pmatrix} u \\ f(u) \end{pmatrix} \right) ds = 0, \quad i = 1, r.$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen ($i = 1, i = r$) und subtrahieren (2.18), so erhalten wir

$$\int_C \left(\vec{n}_r, \begin{pmatrix} u_r \\ f(u_r) \end{pmatrix} \right) dt + \int_C \left(\vec{n}_1, \begin{pmatrix} u_1 \\ f(u_1) \end{pmatrix} \right) dt = 0,$$

wobei

$$u_1 = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u(x, t), \quad u_r = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u(x, t)$$

gilt und \vec{n}_1 der bezüglich R_1 nach außen gerichtete Normalenvektor ist; analog ist u_r, \vec{n}_r definiert. Da R nun wieder beliebig klein werden kann, gilt in jedem Punkt von C , in dem von beiden Seiten die Grenzwerte u_r, u_1 existieren,

$$\left(\vec{n}, \begin{pmatrix} [u] \\ [f(u)] \end{pmatrix} \right) = 0$$

mit

$$[u] := u_r - u_1, \quad [f(u)] := f(u_r) - f(u_1).$$

Bezeichnet s die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeit $s := dx(t)/dt$, so gilt für die Normale $\vec{n} = (-s, 1)^T$. Damit steht Gleichung (2.17) da. Satz 1 ist somit im Falle einer Unstetigkeit bewiesen. Für endlich viele Unstetigkeitskurven läßt sich der Beweis für alle Punkte, in denen der rechts- und linksseitige Grenzwert existiert, analog durchführen. \square

Die **Sprungbedingung (2.17)** stellt einen Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit und der Stärke der Unstetigkeit dar. In Anlehnung an die kompressible Strömungsmechanik, für die analog eine solche Beziehung gilt, nennt man diese Sprungbedingung auch **Rankine-Hugoniot-Bedingung**.

Wir wollen uns als nächstes noch einige einfache Cauchyprobleme für die Burgersgleichung anschauen mit den dazugehörigen schwachen Lösungen.

Beispiel 3: Gesucht ist eine Lösung des Cauchyproblems für die Burgersgleichung (2.11) mit den stückweise konstanten Anfangswerten

$$(2.19) \quad u(x, 0) = q(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

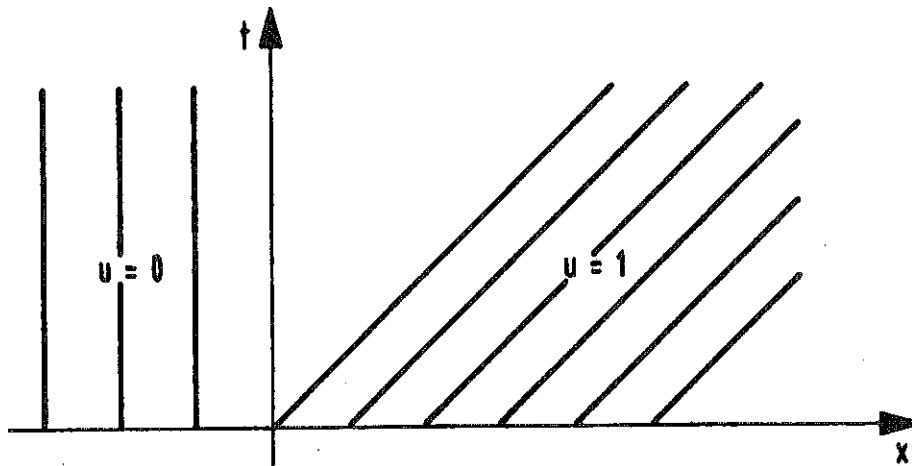
Das Bild der Charakteristiken, in der (x, t) -Ebene ist in Figur 2.10 skizziert. Es zeigt ein Aufreißen der Charakteristiken. Zwischen t -Achse und der Winkelhalbierenden verläuft keine Charakteristik. Die Charakteristikentheorie liefert uns weiter die Lösung $u(x, t) = 0$ für $x \leq 0$ und $u(x, t) = 1$ für $x > t$. Über den Charakteristiken freien Bereich haben wir keine Information. Das Cauchyproblem (2.11), (2.19) besitzt jedoch eine globale schwache Lösung

$$(2.20) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1/2 t \\ 1 & \text{für } x > 1/2 t \end{cases} .$$

Dies läßt sich mittels Satz 1 leicht verifizieren. Rechts und links der Ausbreitungskurve der Unstetigkeit $t = 2x$ ist die Funktion u konstant und somit klassische Lösung der Differentialgleichung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $s = 1/2$ der Unstetigkeit genügt wegen

$$\frac{f[u]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{\frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}$$

der Rankine-Hugoniot-Bedingung. Nach Satz 1 ist u somit schwache Lösung des Cauchyproblems. (2.20) ist eine globale schwache Lösung d.h. in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.



Figur 2.10 Aufreißen der Charakteristiken

Damit wäre man nun beruhigt und zufrieden eine globale Lösung gefunden zu haben, falls man nicht noch eine andere einfache schwache Lösung angeben könnte, nämlich die stetige, stückweise glatte Funktion

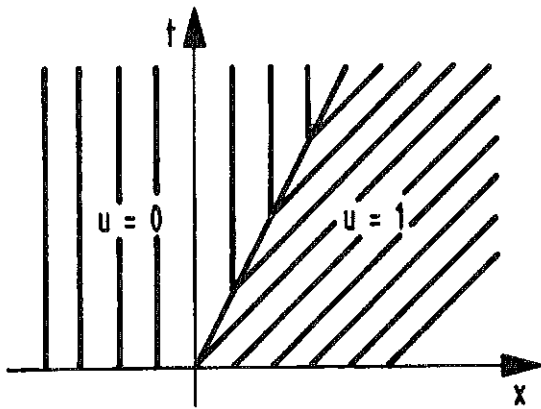
$$(2.21) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x/t & \text{für } 0 < x \leq t \\ 1 & \text{für } x > t \end{cases}$$

Dies läßt sich ebenso leicht nachweisen, indem man etwa die Gültigkeit der Integralgleichung (2.16) zeigt. Die Bilder 2.11 und 2.12 zeigen den Verlauf der Charakteristiken für diese beiden Lösungen. Im ersten Fall besitzt die Lösung eine Unstetigkeit, welche sich entlang der Geraden mit der Steigung $1/s = 2$ ausbreitet. Die zweite Lösung erzeugt ein fächerartiges Charakteristikenbild ähnlich zum Beispiel 1. Wir wollen deshalb diese Lösung als **Verdünnungswelle** bezeichnen, die andere im Vorgriff auf die genaue Erklärung **Verdünnungsstoß**. Wir werden natürlich erwarten, daß es nur eine physikalisch sinnvolle Lösung geben kann. Es sollte somit eine Zusatzbedingung existieren, welche erzwingt, daß unser Cauchyproblem wieder sachgemäß gestellt ist. Dies werden wir auch gleich formulieren, wollen aber noch ein anderes Beispiel vorschieben.

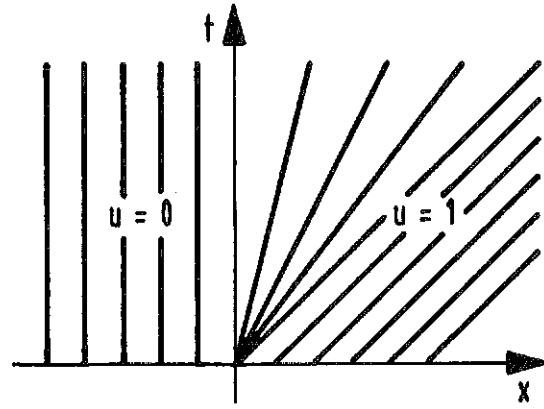
Beispiel 4: Gesucht ist eine Lösung des Cauchyproblems für die Burgersgleichung (2.11) mit den Anfangswerten

$$(2.22) \quad u(x, 0) = q(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Die Charakteristiken sind für $x \leq 0$ Geraden mit der Steigung 1 und für $x > 0$ Parallelen zur t-Achse. Sie schneiden sich im Gebiet zwischen $x = 0$ und $x = t$. Wir können nun eine stückweise stetige Lösung des Cauchyproblems angeben in der Form



Figur 2.11 Verdünnungsstoß



Figur 2.12 Verdünnungswelle

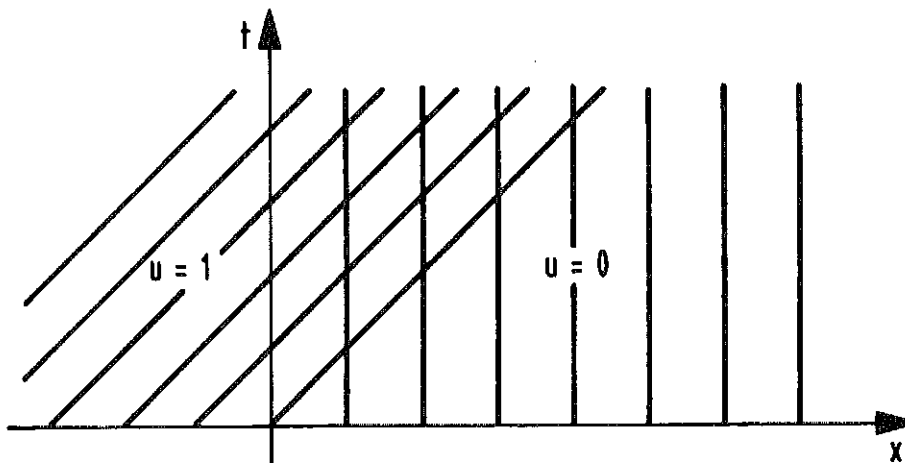
$$(2.23) \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1/2 t \\ 0 & \text{für } x > 1/2 t. \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt die Burgersgleichung auf allen Stetigkeitsintervallen; über die Unstetigkeit hinweg genügt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $s = 1/2$ der Unstetigkeit der Sprungbedingung (2.17) wegen

$$s = \frac{|f(u)|}{[u]} = \frac{\frac{1}{2} u_l^2 - \frac{1}{2} u_r^2}{u_l - u_r} = \frac{1}{2} (u_l + u_r) = \frac{1}{2}$$

Nach Satz 1 ist u somit eine schwache Lösung von (2.11), (2.22).

Das Bild der Charakteristiken ist in Figur 2.13 skizziert.

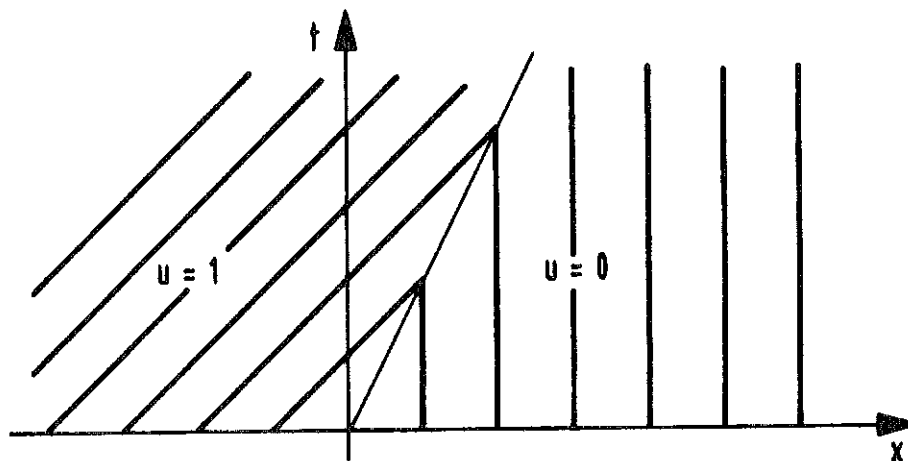


Figur 2.13 Schneiden der Charakteristiken

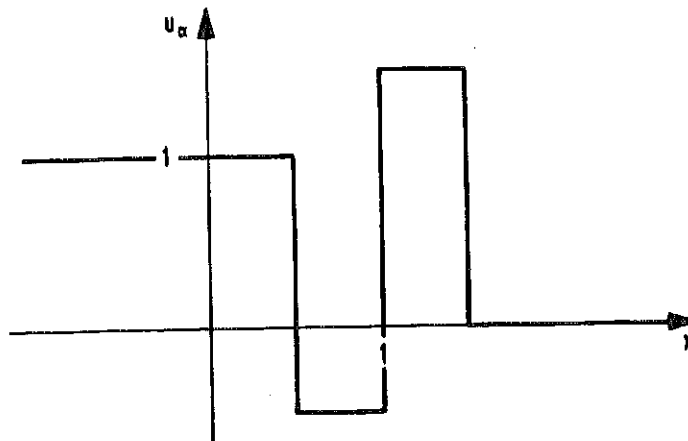
Figur 2.14 zeigt das Bild der Charakteristiken, wie sie durch die schwache Lösung (2.23) bestimmt sind. Die schwache Lösung (2.23) trennt die Charakteristiken durch die Ausbreitungskurve der Unstetigkeit. Durch jeden Punkt dieser Ausbreitungskurve laufen zwei Charakteristiken, welche sich nach rechts bzw. links auf die Anfangswerte zurückverfolgen lassen. Während beim Aufreißen der Charakteristiken in Beispiel 3 es gelang, eine stetige schwache Lösung zu erhalten, ist dies in diesem Beispiel nicht möglich. Jedoch besitzt das Cauchyproblem (2.11), (2.22) ebenso keine eindeutige Lösung. So ist die Funktion

$$(2.24) \quad u_{\alpha}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 - \alpha/2 t, \\ -\alpha & \text{für } 1 - \alpha/2 < x < 1/2 t, \\ 1 + \alpha & \text{für } 1/2 t < x \leq 1 + \alpha/2 t, \\ 0 & \text{für } x > 1 + \alpha/2 t, \end{cases}$$

für jedes $\alpha \geq 0$ eine schwache Lösung des Cauchyproblems.



Figur 2.14 Stoßwelle



Figur 2.15 Graph der Funktion u_{α} für $\alpha = 0.5, t = 2$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Unstetigkeiten erfüllen jeweils die Sprungbedingung (2.17). Für $\alpha = 0$ stimmt u_α mit der Funktion (2.23) überein. Den Graph der Funktion für $\alpha = 0,5$ und $t = 2,0$ zeigt Figur 2.15.

Wie diese beiden Beispiele zeigen, ist die Klasse der schwachen Lösungen zu groß um die Eindeutigkeit zu garantieren. Es existieren **unendlich viele schwache Lösungen eines Cauchyproblems**. Nur eine davon ist physikalisch sinnvoll. Man muß somit eine **Zusatzbedingung** an die Lösung stellen, welche die physikalisch sinnvolle Lösung charakterisiert. Um eine solche Zusatzbedingung zu formulieren benötigen wir noch

Definition 2: Eine Unstetigkeit in einer schwachen Lösung des Cauchyproblems heißt **Stoßwelle (Schockwelle)**, wenn durch jeden Punkt ihrer Ausbreitungskurve nach jeder Seite eine Charakteristik geht und diese auf die Anfangswerte zurückverfolgt werden können. Fällt die Ausbreitungskurve einer Unstetigkeit mit einer Charakteristik zusammen, so nennt man diese Unstetigkeit **Kontaktunstetigkeit**.

Ein Beispiel für eine schwache Lösung, welche eine solche Stoßwelle enthält, ist die Funktion (2.23) (siehe Figur 2.14). Kontaktunstetigkeiten treten z.B. im linearen Fall auf, d.h. $f(u) = au$ mit $a = \text{konstant} \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Definition 2 kann man eine solche Zusatzbedingung wie folgt angeben.

Entropiebedingung 1 ([34]): Die physikalisch relevante Lösung enthält als Unstetigkeiten nur Stoßwellen oder Kontaktunstetigkeiten.

Man nennt diese Zusatzbedingung meist Entropiebedingung im Hinblick auf die Strömungsmechanik. So erfüllen Lösungen, welche dieser Bedingung genügen, den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, der besagt, daß die Entropie der strömenden Teilchen über eine Unstetigkeit hinweg anwächst. Daraus folgt, daß in solchen Lösungen der Vorgang des Auseinanderfließens oder Verdünnens stetig vor sich geht. So ist in Beispiel 3 die schwache Lösung (2.20) physikalisch unsinnig. Die Charakteristiken (Fig. 2.11) lassen sich nicht zwischen $x = 0$ und $x = t$ auf die Anfangswerte zurückverfolgen. Die Lösung in diesem Gebiet ist somit nicht durch die Anfangswerte bestimmt. Dies kann natürlich nicht physikalisch sein, als auch kann dies zu keiner im mathematischen Sinne stabiler Lösung (vergleiche Def. 7) führen. Die Entropiebedingung läßt sich somit als ein **Verbot von Verdünnungsstoßwellen** interpretieren. In den Beispielen 3 und 4 sind die Lösungen (2.21) und (2.23) gerade die physikalisch sinnvollen Lösungen, die der Entropiebedingung 1 genügen. Alle anderen enthalten Verdünnungsstöße. Die Formulierung einer Entropiebedingung in dieser Art stammt von Lax ([34]).

Ist $f(u)$ streng nichtlinear, d.h. $f''(u) \neq 0$ (" $'$ " := d/du), so läßt sich im Falle stückweiser stetiger Lösungen die Entropiebedingung 1 in der folgenden Form angeben:

Entlang der Ausbreitungskurve $x = x(t)$ einer Unstetigkeit gilt mit Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte -

$$(2.25) \quad u_l(x, t) > u_r(x, t) \quad \text{falls} \quad f''(u) > 0$$

oder

$$(2.26) \quad u_l(x, t) < u_r(x, t) \quad \text{falls} \quad f''(u) < 0$$

Dies läßt sich leicht zeigen. Ist $f(u)$ etwa streng konvex, dann ist $u_l > u_r$ äquivalent mit $a(u_l) > a(u_r)$. Damit gilt auch sofort $1/a(u_l) < 1/a(u_r)$. Dies bedeutet, daß rechts der Unstetigkeit die Steigungen der Charakteristiken größer sind als links; die Charakteristiken laufen somit in die Unstetigkeitskurve hinein und lassen sich auf die Anfangswerte zurückverfolgen. Die analoge Aussage gilt auch für (2.26).

Eine Verallgemeinerung von (2.25), (2.26) ohne die Bedingung der strengen Nichtlinearität an $f(u)$ wurde von Oleinik [48] mit der von ihr benannten **Bedingung E** gegeben, die wir hier als Entropiebedingung 2 formulieren.

Entropiebedingung 2 ([48]): Eine schwache Lösung u des Cauchyproblems (2.1), (2.2) ist die physikalisch relevante Lösung, falls entlang der Ausbreitungskurven der Unstetigkeiten die Ungleichung

$$(2.27) \quad \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \geq \frac{f(u_r) - f(v)}{u_r - v}$$

für jede Zahl v zwischen u_l und u_r gilt.

Ist u eine stückweise glatte schwache Lösung so ist (2.27) äquivalent mit

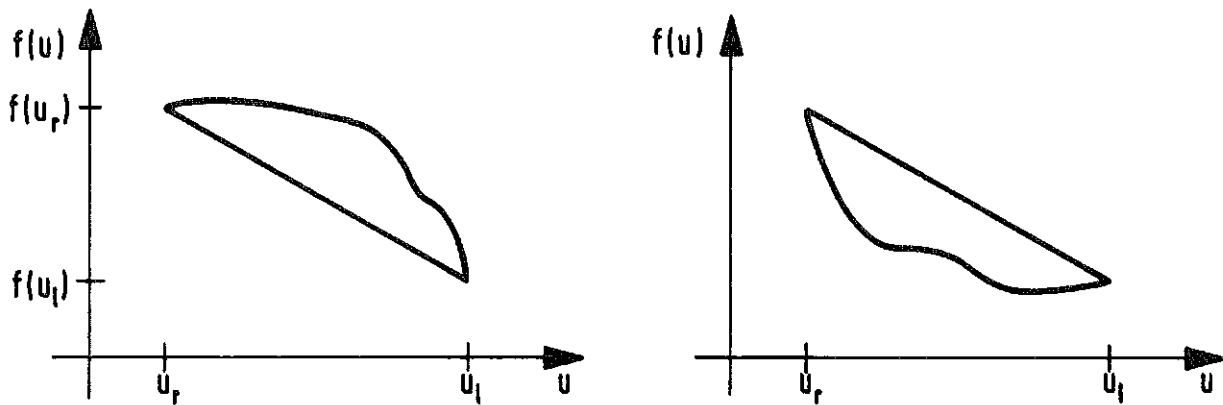
$$(2.28) \quad \frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \geq s \geq \frac{f(u_r) - f(v)}{u_r - v},$$

wobei s die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeit ist. Bildet man in dieser Ungleichung die Grenzwerte $v \rightarrow u_l$, $v \rightarrow u_r$, so erhält man im Falle der Existenz

$$(2.29) \quad a(u_l) \geq s \geq a(u_r)$$

Im streng nichtlinearen Fall ist dies also gerade identisch mit (2.25), (2.26). Im linearen Fall $a(u_l) = a(u_r)$ folgt direkt $s = a(u_l) = a(u_r)$. Die Unstetigkeit fällt mit einer Charakteristik zusammen und stellt eine Kontaktunstetigkeit dar.

Die Bedingung E besitzt eine einfach **geometrische Interpretation**: Genügt u der Bedingung E, dann muß $f(u)$ für jede Unstetigkeit auf einer Seite der Geraden durch $f(u_r)$ und $f(u_l)$ liegen (Figur 2.16).



Figur 2.16 Geometrische Interpretation der Bedingung E

Für streng nichtlineares $f(u)$ ($f''(u) \neq 0$) konnte Oleinik [48] mit Hilfe einer Entropiebedingung die Eindeutigkeit des Cauchyproblems (2.1) (2.2) für beschränkte und meßbare Anfangswerte beweisen. Mit Hilfe der Entropiebedingung 2 zeigte sie die Eindeutigkeit für allgemeines $f(u)$ im Falle stückweiser glatter schwacher Lösungen. Dabei werden zwei schwache Lösungen als identisch betrachtet, wenn sie bis auf eine Menge vom Maße Null übereinstimmen. Ein etwas andersartiger Beweis stammt von Keyfitz-Quinn (siehe [23]). Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Anfangswerte L^1 -integrierbar sind, bewies sie, daß stückweise glatte Lösungen des Cauchyproblems, welche der Entropiebedingung 2 genügen, eindeutig und stabil in der L^1 -Norm sind. Im Beweis wird gezeigt, daß die Lösungsoperatoren des Cauchyproblems mit der Zusatzbedingung eine kontraktive Halbgruppe im L^1 bilden.

Eine weitere Formulierung der Entropiebedingung wurde von Hopf [28] und Krushkov [32] angeregt. Multiplizieren wir die Erhaltungsgleichung in der quasilinearen Form mit $U'(u)$, wobei U eine stetig differenzierbare Funktion von u sei, so erhält man nach kurzer Umformung

$$(2.30) \quad U(u)_t + F(u)_x = 0$$

mit

$$(2.31) \quad F(u) := \int_0^u U'(s) a(s) ds.$$

Ist u stetig differenzierbare Lösung der Erhaltungsgleichung (2.1) so ist u automatisch auch Lösung von (2.30). Ist die Funktion $U(u)$ eine stetig differenzierbare konvexe Funktion wird sie **Entropiefunktion** und $F(u)$ der zugehörige **Entropiefluß** genannt.

Entropiebedingung 3 [28], [32]: Eine schwache Lösung u des Cauchyproblems ist die physikalisch relevante Lösung, falls sie die Ungleichung

$$(2.32) \quad U(u)_t + F(u)_x \leq 0$$

im integralen Sinne erfüllt, wobei $U(u)$ eine beliebige Entropiefunktion und $F(u)$ der zugehörige Entropiefluß ist.

Die Ungleichung (2.32) heißt **Entropieungleichung**. Eine solche integrale Entropieungleichung ist etwa erfüllt, wenn

$$(2.33) \quad \int_{x_1}^{x_2} U(u(x, t_2)) dx - \int_{x_1}^{x_2} U(u(x, t_1)) dx + \int_{t_1}^{t_2} F(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(u(x_1, t)) dt \leq 0$$

für jedes Rechteck $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ gilt. Analog zum Satz 1 gilt auch für stückweise glatte schwache Lösungen eine Sprungbedingung für die Entropie.

Eine ebenso physikalisch motivierte Entropiebedingung wurde von Hopf [28] eingeführt:

Entropiebedingung 4 ([28]): Die physikalisch relevante Lösung ergibt sich als Grenzwert

$$(2.34) \quad u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon \quad \text{fast überall in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$$

der beschränkten Lösungen u_ε der parabolischen Gleichungen

$$(2.35) \quad (u_\varepsilon)_t + f(u_\varepsilon)_x = \varepsilon (u_\varepsilon)_{xx}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$$

Das bedeutet, die physikalische Lösung wird als Grenzwert der Lösungen des Ausgangsproblems mit einem Viskositätsterm erhalten, wenn die Viskosität gegen Null strebt. Vom physikalischen Standpunkt ist dies einleuchtend, weil sich die hyperbolischen Erhaltungsgleichungen gerade durch die Idealisierung ergeben, indem die regularisierenden Viskositätsterme vernachlässigt werden.

In dem hier betrachteten skalaren Fall kann gezeigt werden, daß diese verschiedenen Formulierungen einer Entropiebedingung meist äquivalent sind. So gab etwa Hopf [28] eine zusätzliche Erhaltungsgleichung (2.30) an mit einer konvexen Funktion U , für die im Falle stückweise glatte Lösungen die Sprungbedingung für die Entropie gerade auf die Bedingung (2.27) von Oleinik führt.

Die Betrachtungen hier schließen den **linearen Fall** $f(u) = cu$ mit $c \in \mathbb{R}$ mit ein. Jedoch wird im linearen Fall die Sache etwas einfacher. Als Unstetigkeiten können in schwachen Lösungen nur Kontaktunstetigkeiten auftreten, welche entlang von Charakteristiken transportiert werden. Die schwache Lösung des Cauchyproblems ist, wie bei einer klassischen Lösung, gegeben durch die explizite Formel (1.25). Obwohl die typischen nichtlinearen Effekte wie das Schneiden der Charakteristiken und Entstehen von Stoßwellen natürlich nicht in einer linearen Gleichung auftreten können, sind diese linearen Unstetigkeiten oft ein Testbeispiel für numerische Verfahren.

Der Beweis eines Eindeutigkeitssatzes einer Entropielösung ist ein langwieriges Unterfangen. Wir wollen hier auf den Beweis eines solchen Satzes verzichten und verweisen auf das Buch von Smoller [63], in dem ein solcher Satz ausführlich bewiesen und diskutiert wird. Für die Existenzaussage gibt es zwei verschiedene Wege. Zum einen kann man die Existenz von beschränkten Lösungen u_ε des Cauchyproblems der parabolischen Gleichung (2.35) betrachten und zum Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ übergehen. Es läßt sich zeigen, daß die Grenzfunktion u eine schwache Lösung des Cauchyproblems für die Erhaltungsgleichung ist, die zudem der Entropiebedingung 4 genügt, aus der die Eindeutigkeit folgt (siehe [63]). Eine andere Methode ist der Nachweis der Konvergenz eines Näherungsverfahrens für das Cauchyproblem. Dieser Weg wurde von Oleinik [48] beschritten. Beide Zugänge sind im Buch von Smoller beschrieben. Dort wird auch auf weitere Originalarbeiten verwiesen.

Wir wollen hier noch als Satz ohne Beweis verschiedene Eigenschaften der physikalisch relevanten Entropielösung des Cauchyproblems (2.1) (2.2) angeben. Er faßt im wesentlichen die Ergebnisse von Volpert [71] und Krushkov [32] zusammen (siehe auch [8]). Wir setzen dabei voraus, daß die Anfangswerte

$u(x, 0) = q(x)$, $x \in \mathbb{R}$, beschränkt, meßbar und von endlicher Totalvariation: $q \in BV_{\text{lok}}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ sind (zur Definition der Totalvariation, BV und L^∞ siehe Anhang A und B). Als Zusatzbedingung für die Eindeutigkeit wurde die Entropiebedingung 3 gefordert mit der Entropiefunktion und dem Entropiefluß

$$(2.36) \quad U(u) = |u - c|, \quad F(U) = \operatorname{sgn}(u - c)(f(u) - f(c))$$

für alle $c \in \mathbb{R}$.

Satz 2: Zu den Anfangswerten $q \in BV_{\text{lok}}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ existiert genau eine schwache Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2). Sie hat für jedes $t \in [0, T]$ mit beliebigem $T > 0$ die Eigenschaften

1. $u \in C([0, T], L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}))$
2. Monotonie erhaltend:
 $q \leq \bar{q} \Rightarrow u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$
3. $\sup_x u(x, t) \leq \sup_x q(x)$
4. $\inf_x u(x, t) \geq \inf_x q(x)$
5. nichtwachsend in der Totalvariation
 $TV u(\cdot, t) \leq TV q(x)$

Gilt zusätzlich $q \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt weiter

6. $u(x, t) \in L^1(\mathbb{R})$ für jedes $t \in [0, T]$,
7. Erhaltungseigenschaft:
$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} q(x) dx,$$
8. L^1 -kontraktive Halbgruppe ([23]):
$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|q(\cdot) - \bar{q}(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$
9. $\|u(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_1)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C |t_2 - t_1| TV q(\cdot)$ für $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Wir werden für die numerischen Verfahren im nächsten Kapitel fordern, daß möglichst viele dieser Eigenschaften erhalten bleiben. Wir werden auch bei der Formulierung und dem Beweis des Konvergenzsatzes für Näherungsverfahren einige dieser Ungleichungen bzw. ihrer diskreten Analoga noch näher erläutern.

Anfangswertprobleme wie das Beispiel 3 oder 4 werden oft - wiederum in Anlehnung an die Gasdynamik - **Riemannprobleme** genannt. Sie haben die allgemeine Form

$$(2.37) \quad u_t + f(u)_x = 0 \quad , \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit $u_l, u_r \in \mathbb{R}$. Wie wir in Beispiel 3 und 4 gesehen haben spielt in der Lösung das Verhältnis x/t eine entscheidende Rolle. Wir versuchen zur Lösung von (2.36) somit den Ansatz $u = u(\xi)$ mit $\xi = x/t$. Wegen

$$u_t = -\frac{x}{t^2} u_\xi \quad \text{und} \quad u_x = \frac{1}{t} u_\xi$$

erhalten wir aus der Erhaltungsgleichung die Gleichung

$$[a(u(\xi)) - \xi] u_\xi = 0 \quad ,$$

welche die zwei Lösungen $u_\xi = 0$ und $a(u(\xi)) - \xi = 0$ besitzt. Die erste Beziehung führt uns auf die Stoßwellenlösung. Ist $f(u)$ streng konvex, so erhalten wir nach der Entropiebedingung (2.25) im Falle $u_l > u_r$ diese **Stoßwellenlösung**

$$(2.38) \quad u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{für } \xi < s \\ u_r & \text{für } \xi > s \end{cases}$$

mit s aus der Sprungbedingung (2.17). Im Falle $u_l < u_r$ enthält die physikalisch relevante Lösung eine Verdünnungswelle. Den stetigen Übergang liefert uns die Beziehung $a(u(\xi)) - \xi = 0$ und wir erhalten die **Verdünnungswelle**

$$(2.39) \quad u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{für } \xi < a(u_l) \\ a^{-1}(\xi) & \text{für } a(u_l) < \xi < a(u_r) \\ u_r & \text{für } \xi > a(u_r) \end{cases}$$

Analog erhält man im konkaven Fall die Lösung des Riemannproblems. Etwas komplizierter wird die Lösung, falls Nullstellen von $f''(u)$ auftreten, da dann die Gleichung $a(u(\xi)) - \xi = 0$ nicht mehr eindeutig lösbar ist und kompliziertere

Wellenstrukturen auftreten können. Wir werden in Kapitel 3 sehen, daß das Riemannproblem eine zentrale Rolle in der Konstruktion von Näherungsverfahren spielt.

Für eine allgemeine Übersicht über Existenz- und Eindeutigkeitsätze für schwache Lösungen einer skalaren Erhaltungsgleichung verweisen wir wieder auf Smoller [63], Volpert [71] und Krushkov [32].

2.3 Das Verkehrsproblem

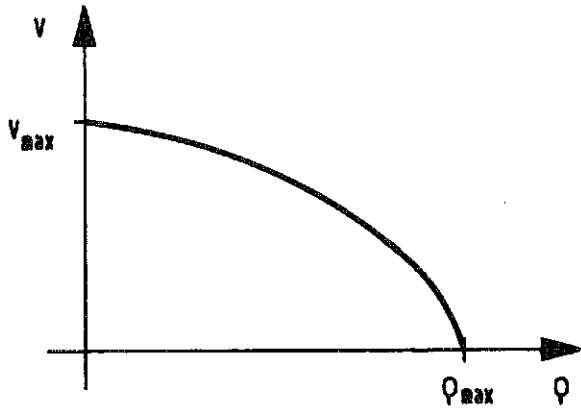
Wir betrachten in diesem Abschnitt noch ein kleines Anwendungsbeispiel für eine Erhaltungsgleichung: den Verkehrsfluß auf einer Autobahn. Sei ρ die Dichte des Verkehrs, also etwa die Anzahl der Autos pro Einheitslänge, v sei die lokale Durchschnittsgeschwindigkeit. Dann ist der Verkehrsfluß pro Zeit gegeben durch $f(\rho) = \rho v$. Greifen wir nun irgendeinen Abschnitt $[x_1, x_2]$ dieser Autobahn ohne Aus- oder Einfahrt heraus, so ist die Gesamtanzahl der Autos eine Erhaltungsgröße und es gilt

$$(2.40) \quad \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_2, t) v(x_2, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_1, t) v(x_1, t) dt = 0 .$$

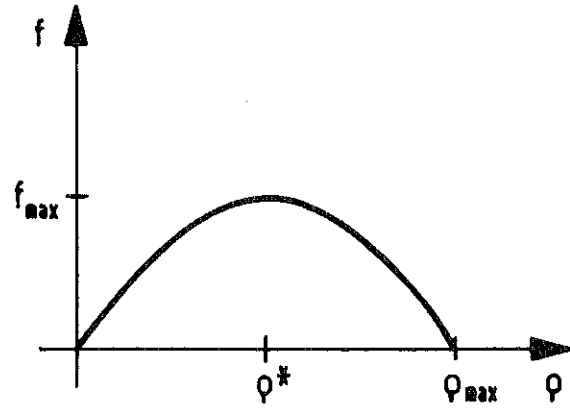
Dies ist eine integrale Formulierung der Erhaltungsgleichung

$$(2.41) \quad \rho_t + (\rho v)_x = 0 .$$

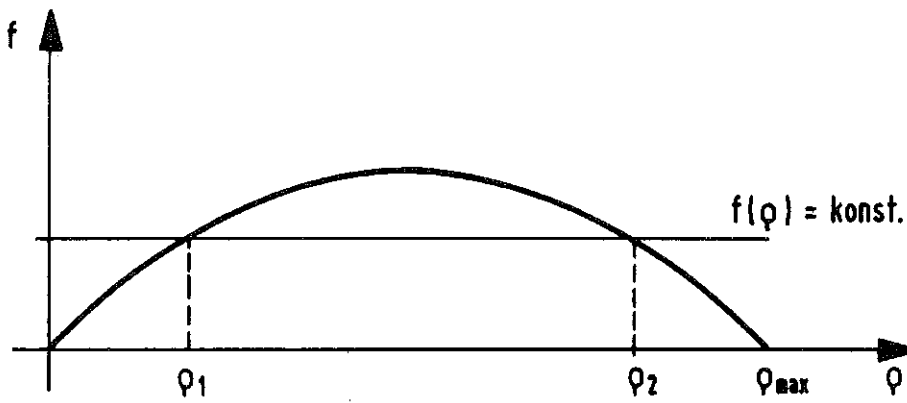
Wir nehmen an, daß v eine Funktion der Verkehrsdichte ρ ist. Dies scheint sehr sinnvoll zu sein, da Fahrer im allgemeinen die Geschwindigkeit ihres Fahrzeugs abhängig von der Verkehrsdichte wählen. Der Maximalwert von v wird erreicht, wenn die Verkehrsdichte sehr klein wird. Andersrum wird die Geschwindigkeit gegen Null gehen, wenn die Verkehrsdichte ihren Maximalwert erreicht. Der Graph von v wird also etwa wie in Figur 2.17 aussehen. Der Graph des Flußes $f(\rho) = \rho v$ hat dann die Form, wie in Figur 2.18 skizziert. Durch Beobachtungen der Highways in den USA fand man dort folgende Maximalwerte: Die maximale Dichte wird erreicht bei 225 Fahrzeugen pro Meile, den größten Verkehrsfluß ergibt sich bei einer Dichte von 80 Autos pro Meile mit circa 1500 Fahrzeuge pro Stunde.



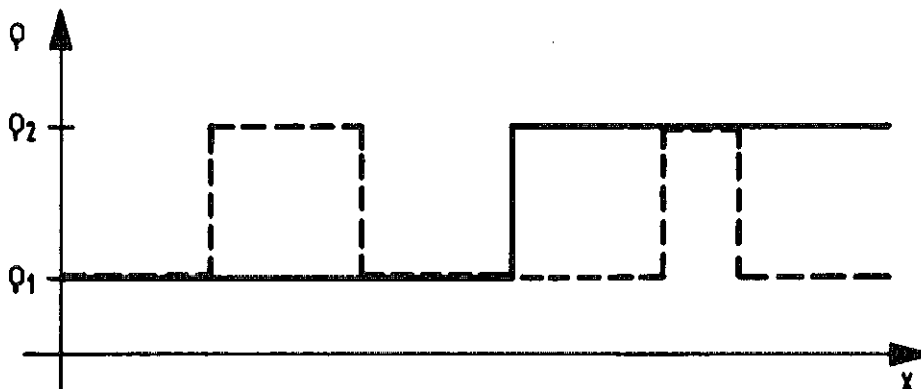
Figur 2.17 Graph von $v(\rho)$



Figur 2.18 Graph von $f(\rho)$



Figur 2.19 Punkte $f(\rho) = \text{konstant}$



Figur 2.20 Schwache Lösung für (2.41)

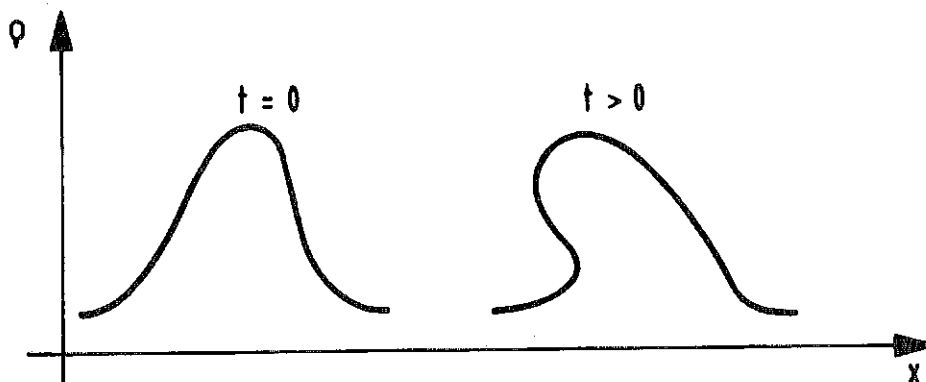
Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, in dem die Strömung stationär ist, d.h. unabhängig von der Zeit. Aus (2.41) folgt dann sogleich $f(\rho) = \text{konstant}$. Die Linie $f(\rho) = \text{konstant}$ schneidet den Graph in 2 Punkten (Figur 2.19). Falls wir von unserer Lösung Stetigkeit fordern, haben wir die Lösungen ρ_1 oder ρ_2 . Falls wir aber Unstetigkeiten in der Lösung erlauben, so ist die Eindeutigkeit nicht mehr vorhanden. Wir haben ∞ viele Lösungen wie etwa Figur 2.20 zeigt.

Wir benötigen somit eine Entropiebedingung, welche uns die physikalische Lösung auswählt. In diesem Fall könnten wir etwa als eine solche Bedingung fordern, daß unendliche Beschleunigung unmöglich ist, d.h.

$$\frac{dv}{d\rho} < \infty .$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen ist $a = a(\rho) = d\rho v/d\rho = v(\rho) + \rho dv/d\rho$. Der Fluß $f = \rho v$ ist nach Figur (2.18) wachsend im Intervall $[0, \rho^*]$, fallend in $[\rho^*, \rho_{\max}]$ und erreicht das Maximum bei ρ^* . Da v eine monoton fallende Funktion von ρ ist gilt $dv/d\rho < 0$ und weiter $a(\rho) < v(\rho)$, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen ist kleiner als die mittlere Geschwindigkeit. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist positiv in $[0, \rho^*]$ und negativ in $[\rho^*, \rho_{\max}]$ und ist monoton fallend. Die Wellen laufen somit vorwärts relativ zu der Autobahn in $[0, \rho^*]$, sind stationär bei ρ^* und laufen rückwärts in $[\rho^*, \rho_{\max}]$.

Sind die Anfangswerte $\rho(x, 0)$ etwa monoton fallend, so entwickelt sich eine Verdünnungswelle und es existiert eine stetige Lösung für alle Zeiten. Ist umgekehrt $\rho(x, 0)$ monoton wachsend, so kann eine Unstetigkeit d.h. ein Stau entstehen. Sind die Anfangswerte für ρ etwa durch die Verteilung in Figur 2.21 gegeben, so erhalten wir nach Zeit t_0 aus Formel (2.9) ein Brechen der Lösung und damit einen Stau.



Figur 2.21 Brechen

Dieses Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung wurde in dieser Form von Witham [69] angegeben (siehe auch [43]). Weitere Beispiele finden sich ebenso in [69] und in [29].

3.0 Numerische Approximation schwacher Lösungen

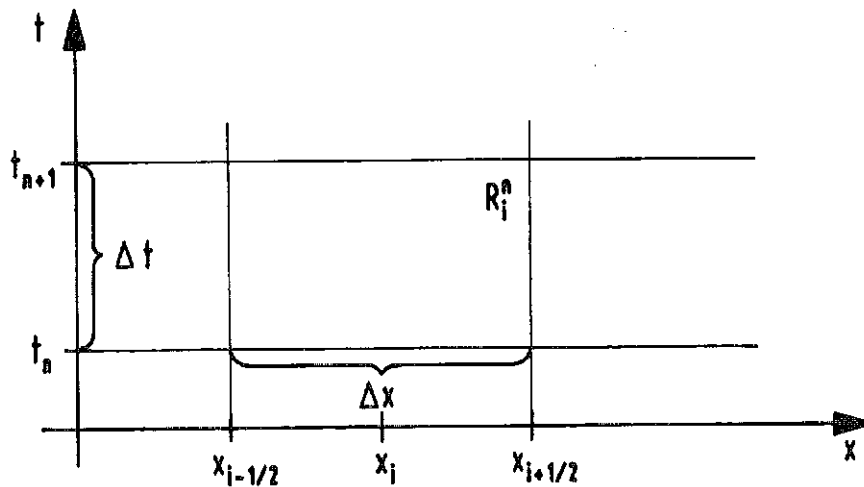
Für die numerischen Verfahren ist es neben den "üblichen" Fragen nach Konsistenz, Stabilität und Konvergenz hier von zentraler Bedeutung, ob sie eine Approximation der physikalisch relevanten Lösung liefern. Wir wollen hier in diesem Kapitel diese Frage klären und Kriterien dafür angeben, wie ein geeignetes Näherungsverfahren aussehen muß. Im ersten Abschnitt betrachten wir die grundsätzlichen Eigenschaften, welche im Falle der Konvergenz sichern, daß die Grenzfunktion gerade die physikalisch relevante Lösung ist. Danach - im zweiten Abschnitt - geben wir zunächst eine Konstruktionsmethode solcher Näherungsverfahren an. Sie benutzt ganz wesentlich die Lösung des Riemannproblems und baut somit die Ausbreitung der nichtlinearen Wellen in das numerische Verfahren mit ein. In Abschnitt 3.3 formulieren wir einen allgemeinen Konvergenzsatz. Abschnitt 3.4 setzt dann wieder das Bestreben fort, allgemeine Kriterien für Näherungsverfahren für nichtlineare hyperbolische Gleichungen abzuleiten. Diese Kriterien garantieren dann, daß Voraussetzungen für den Konvergenzsatz erfüllt sind.

3.1 Verfahren in Erhaltungsform

Wir führen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ein äquidistantes Gitter mit einer Zeitschrittweite Δt und einer Raumschrittweite Δx ein. Dies geschieht hier nur zur Vereinfachung und Abkürzung der Schreibweise. Wir werden auf Erweiterungen der Verfahren z.B. auf nichtäquidistante Gitter noch zurückkommen. Ebenso werden wir noch klären müssen, wie die numerischen Verfahren auf endlichen Rechengebieten angewandt werden, welche für praktische Rechnungen natürlich unumgänglich sind. Die Frage der Randwerte, welche in diesem Falle erforderlich sind, oder auch alle anderen diesbezüglichen Fragen, stellen wir zurück. Zunächst geht es um die grundsätzlichen Dinge. Wie üblich benutzen wir die Abkürzungen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x_i &= i\Delta x, \quad x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x \quad \text{und} \quad t_n = n\Delta t \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ I_i &= [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \end{aligned}$$

und führen ein Gitter ein, wie es in Figur 3.1 skizziert ist. Wir leiten ein Näherungsverfahren ab als eine **Approximation der integralen Erhaltungsgleichung (2.16)** für ein Gitterrechteck



Figur 3.1 Gitter

$$(3.2) \quad R_i^n = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}] .$$

Man erhält eine Gleichung der Form

$$(3.3) \quad \Delta x u_i^{n+1} - \Delta x u_i^n + \Delta t g_{i+1/2}^n - \Delta t g_{i-1/2}^n = 0 .$$

Dabei ist u_i^n eine Approximation des Mittelwertes der Lösung $u(x, t)$ im Intervall $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ zum Zeitpunkt t_n . Der Wert $g_{i+1/2}^n$ ist eine Approximation des Mittelwertes des Flusses $f(u(x_{i+1/2}, t))$ im Intervall $[t_n, t_{n+1}]$. Wir haben in Formel (3.3) den oberen Zeitindex von $g_{i+1/2}$ auf n gesetzt. Dies stimmt natürlich nur, wenn wir ein **explizites Verfahren** betrachten, und $g_{i+1/2}^n$ nur von Werten auf dem Zeitlevel t_n abhängt. Das Entscheidende an dem Verfahren (3.3) ist natürlich die Berechnung dieser Werte. Werden zur Berechnung nur die Näherungswerte von zwei Gitterrechtecken berücksichtigt, so gilt

$$(3.4) \quad g_{i+1/2}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n), \quad g_{i-1/2}^n = g(u_{i-1}^n, u_i^n) .$$

Die Funktion $g = g(v, w)$ heißt der **numerische Fluß** des Näherungsverfahrens (3.3). Er muß zumindest in allen seinen Argumenten **lipschitzstetig** sein und **konsistent** mit dem physikalischen Fluß $f(u)$ in der Form

$$(3.5) \quad g(u, u) = f(u) .$$

Als Anfangswerte für das numerische Verfahren zur Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2) werden die integralen Mittelwerte

$$(3.6) \quad u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx$$

vorgeschrieben. Ist der numerische Fluß nur eine Funktion von zwei Variablen wie in (3.4) nennt man das zugehörige numerische Verfahren ein **Dreipunkt-Verfahren**. Der Fluß kann natürlich - und dies wird auf alle Verfahren mit Konsistenzordnung größer als eins der Fall sein - von mehreren Variablen abhängen. Ein "**2k + 1-Punkt-Verfahren**" besitzt einen Fluß der Form

$$(3.7) \quad g_{i+1/2}^n = g(u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n)$$

Das Näherungsverfahren (3.3) besitzt die integrale Erhaltungseigenschaft. Genau der Anteil der etwa in das Gitterrechteck R_i von links einfließt tritt aus R_{i-1} aus. Diese Eigenschaft gibt dem etwas umgeschriebenen Verfahren (3.3) seinen Namen.

Definition 1: Das Näherungsverfahren

$$(3.8) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

mit einem konsistenten lipschitzstetigen numerischen Fluß g heißt **explizites Verfahren in Erhaltungsform**.

In diesem Abschnitt wollen wir nur explizite Verfahren betrachten, so daß wir oft die Bezeichnung explizit weglassen. Solange es keine Mißverständnisse geben kann, lassen wir auch oft den oberen Index "n" beim numerischen Fluß weg. Die günstigen Eigenschaften der Verfahren in Erhaltungsform, welche sich natürlich im Falle glatter Lösungen als Differenzenverfahren schreiben lassen, wurde von Lax und Wendroff [35] erkannt. Sie zeigten, daß diese Verfahren im Falle der Konvergenz schwache Lösungen liefern. Wir wollen diesen Satz im folgenden formulieren und den Beweis kurz skizzieren. Dazu dehnen wir unsere Gitterfunktionen auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ aus mittels

$$(3.9) \quad u_{\Delta}(x, t) = \begin{cases} u_i^0 & \text{für } t = 0, x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \\ u_i^n & \text{für } t \in [t_{n-1}, t_n], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \end{cases}.$$

Satz 1 (Satz von Lax-Wendroff [35]): Sei $\{u_{\Delta}\}$ eine Folge von Näherungslösungen eines Verfahrens in Erhaltungsform, wobei $\Delta t, \Delta x$ mit $\lambda = \Delta t / \Delta x = \text{konstant}$ gegen Null streben. Gilt dann für eine Konstante $K \in \mathbb{R}^+$

$$(3.10) \quad |u_{\Delta}(x, t)| \leq K \quad \text{für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$$

und

$$(3.11) \quad u_{\Delta} \rightarrow u \quad \text{im } L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+),$$

so ist die Grenzfunktion u eine schwache Lösung des Cauchyproblems.

Beweis: Wir wollen den Beweis hier nur kurz skizzieren. Man multipliziert die Gleichung (3.8) mit $\Phi(x_i, t_n)$, wobei Φ eine Testfunktion aus $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ ist, und summiert über i und n auf. Wegen des kompakten Trägers von Φ ist dies eine endliche Summe. Mittels einer "partiellen Summation" werden die Differenzenquotienten auf die Testfunktion übergewälzt. Die Summen lassen sich nun als Integrale schreiben von den auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ mittels (3.9) ausgedehnten Gitterfunktionen. Nun führen wir den Grenzübergang $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ durch. Die Voraussetzungen (3.10), (3.11) garantieren, daß wir nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz (z.B. [27]) die Integration und den Grenzübergang vertauschen können. Wegen der Lipschitzstetigkeit und der Konsistenz des numerischen Flusses konvergiert der numerische Fluß gegen den physikalischen Fluß $f(u)$. Wir erhalten somit die Integralgleichung (2.15) und u ist eine schwache Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2). \square

Da die Verfahren in Erhaltungsform gerade die integrale Erhaltungseigenschaft wie die Ausgangsgleichung besitzen, liefern sie auch die **richtige Ausbreitungsgeschwindigkeit von Stoßwellen** (unabhängig von den Schrittweiten). Die Erhaltungsform des Verfahrens garantiert jedoch nicht, daß nur physikalisch relevante Lösungen approximiert werden. Ein Kriterium welches garantiert, daß die Grenzfunktion eines Verfahrens in Erhaltungsform gerade die physikalisch relevante Lösung ist, erhält man mit Hilfe einer **diskreten Entropiebedingung**. Ist $U(u)$ eine

Entropiefunktion und $F(U)$ der zugehörige Entropiefluß, so lautet eine **diskrete Entropiebedingung** für das Verfahren in Erhaltungsform (3.8)

$$(3.12) \quad U_i^{n+1} \leq U_i^n - \lambda \left(G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n \right)$$

mit dem **numerischen Entropiefluß G** , welcher lipschitzstetig und konsistent mit dem physikalischen Entropiefluß $F(u)$:

$$(3.13) \quad G(u, u) = F(u)$$

sein muß. Die Entropieungleichung (3.12) wird analog zum Verfahren in Erhaltungsform aus der integralen Formulierung (2.33) der Entropiebedingung abgeleitet. Eine Erweiterung des Satzes von Lax-Wendroff ist dann

Satz 2: Sind alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt und genügen die Näherungslösungen der diskreten Entropiebedingung (3.12), dann ist die Grenzfunktion u gerade diejenige schwache Lösung, welche der Entropiebedingung genügt.

Der Beweis zu diesem Satz verläuft analog zum Beweis von Satz 1. Die ganze Prozedur wird nur auf die Entropieungleichung (3.12) angewandt.

Wir betrachten nun zunächst das 3-Punkt-Verfahren mit einem numerischen Fluß $g = g(v, w)$. Auf die zugehörige Erhaltungsgleichung der Form (3.8) wenden wir die **heuristische Stabilitätstheorie von Hirt** an (siehe Seite 27). Als Differentialapproximation erhalten wir die Gleichung

$$(3.14) \quad u_t + f(u)_x = \frac{\Delta x}{2} (h(u) u_x)_x + O(\Delta x^2)$$

mit

$$h(u) = g_v(u, u) - g_w(u, u) - \lambda a(u)^2 .$$

Dabei haben wir zusätzlich vorausgesetzt, daß g stetig differenzierbar ist, mit $g_v(u, u)$, $g_w(u, u)$ bezeichnen wir die partiellen Ableitungen von $g(v, w)$ nach dem ersten bzw. zweiten Argument im Punkte (u, u) - wie üblich $a(u) = df(u)/du$.

Die rechte Seite in (3.14) stellt gerade den lokalen Diskretisierungsfehler des Verfahrens in Erhaltungsform dar. Diese Gleichung kann man nun so interpretieren, daß das Verfahren in Erhaltungsform eine Approximation erster Ordnung für die

Erhaltungsgleichung (2.1) ist, aber eine Approximation zweiter Ordnung für die parabolische Gleichung

$$(3.15) \quad u_t + f(u)_x = \frac{\Delta x}{2} (h(u) u_x)_x .$$

Stabilitätsaussagen für diese Gleichung lassen sich somit als asymptotische Stabilitätsaussagen für das Näherungsverfahren in Erhaltungsform interpretieren. Ist der Dissipationskoeffizient $b(u)$ negativ, so ist das zugehörige Näherungsverfahren instabil. Eine Stabilitätsbedingung wäre somit

$$(3.16) \quad g_v(u, u) - g_w(u, u) \geq \lambda a(u)^2 .$$

Dies ist eine Stabilitätsbedingung für ein Verfahren erster Ordnung. Für ein Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit müßte in (3.16) das Gleichheitszeichen stehen. Dann müssen in (3.14) die $O(\Delta x^2)$ Terme genauer betrachtet werden, um zu einer Stabilitätsbedingung zu kommen.

Setzen wir die numerischen Flüsse

$$(3.17) \quad g(v, w) = f(w) \quad \text{(rechtsseitige Differenzen),}$$

$$(3.18) \quad g(v, w) = f(v) \quad \text{(linksseitige Differenzen),}$$

$$(3.19) \quad g(v, w) = (f(v) + f(w))/2 \quad \text{(zentrale Differenzen)}$$

in die Stabilitätsbedingung (3.16) ein, so zeigt sich, daß keiner diese Stabilitätsbedingung erfüllt. Zwar erfüllt (3.17) im Falle $a(u) < 0$ und (3.18) im Falle $a(u) > 0$ die Stabilitätsbedingung falls $\lambda a(u) < 1$, sie werden aber instabil, sobald die Charakteristiken die Richtung wechseln. Man kann das Verfahren in Erhaltungsform auch umschreiben in die Differenzenform

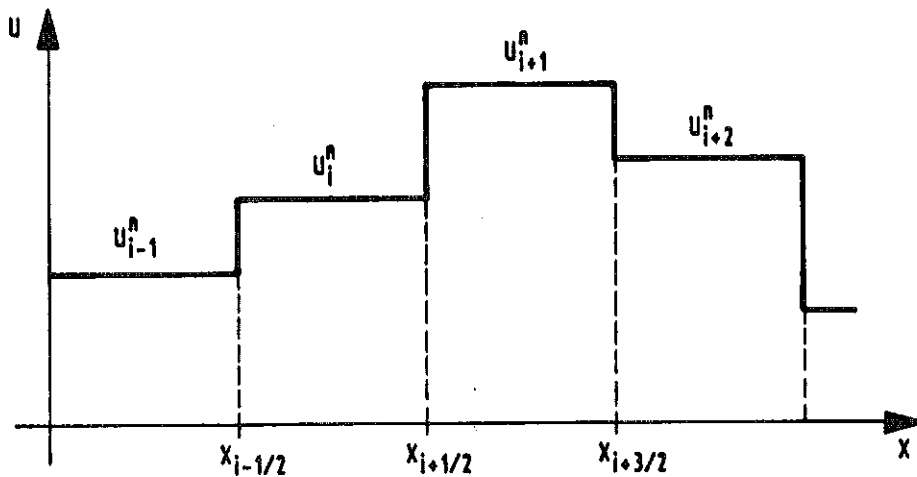
$$(3.20) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 .$$

Bestimmen wir den numerischen Fluß nach (3.17), (3.18) und (3.19), so sind dies Verfahren mit rechtsseitigen, mit linksseitigen bzw. mit zentralen Differenzen. Wir haben dies hinter den Formeln in Klammer vermerkt. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt sehen, daß stabile Verfahren auch im Falle eines Richtungswechsels der Charakteristiken aus der integralen Formulierung abgeleitet werden können.

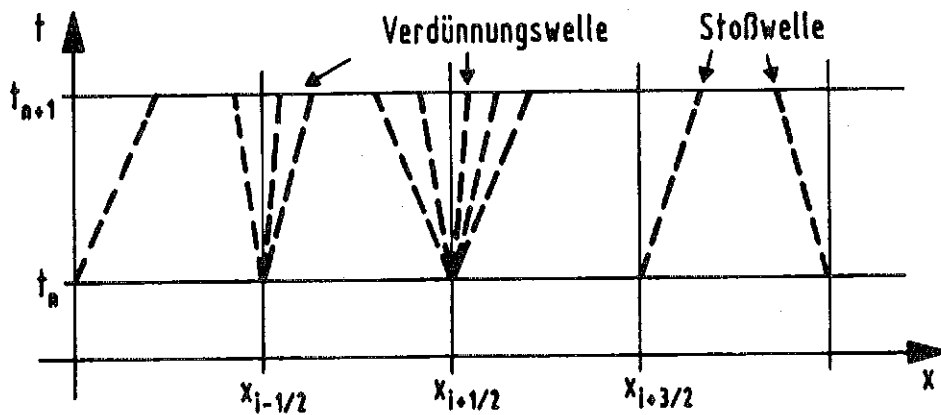
3.2 Godunov-Typ, Fluß-Splitting und Upwind-Verfahren

Eine der fundamentalen Ideen bei der Konstruktion eines Näherungsverfahrens für Erhaltungsgleichungen hatte Godunov [19]. Er nahm an, zu einem bestimmten Zeitpunkt t_n ist die Näherungslösung konstant in jedem Gitterintervall und gerade gleich den integralen Näherungswerten (Figur 3.2). Er bemerkte, daß er dieses Problem für kleine Zeitschritte exakt lösen kann. An jedem Randpunkt eines Gitterintervalls ist die Lösung eines Riemannproblems zu ermitteln, z.B. für $x_{i+1/2}$:

$$(3.21) \quad q(x) = \begin{cases} u_i^n & \text{für } x > x_{i+1/2} \\ u_{i+1}^n & \text{für } x < x_{i+1/2} \end{cases}$$



Figur 3.2 Stückweise konstante Näherungslösung



Figur 3.3 Lösung von Riemannproblemen

Fordern wir dabei, daß der Zeitschritt so klein ist, daß keine Wechselwirkung zwischen den Riemannproblemlösungen benachbarter Gitterzellen stattfindet, können wir die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$(3.22) \quad \begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_i^n \quad \text{für } x \in I_i \end{aligned}$$

in der Form

$$(3.23) \quad v^n(x, t) = v\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t - t_n}; u_i^n, u_{i+1}^n\right) \quad \text{für } x \in I_i$$

angeben, wobei v die lokale Lösung eines Riemannproblems ist, d.h. wir erhalten die Lösung von (3.22) durch **"Anstückelung" der lokalen Lösungen der Riemannprobleme** (Figur 3.3). Wir wissen nun eigentlich zu viel und sind nur interessiert an neuen Näherungswerten für die integrale Mittelwerte der Lösung in den Gitterintervallen. Diese bekommen wir jedoch durch einfache Mittelung

$$(3.24) \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v_n(x, t_{n+1}) dx .$$

Ausgedrückt durch die lokalen Lösungen der Riemannprobleme können wir auch schreiben

$$(3.25) \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} v(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n) + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 v(x/\Delta t; u_i^n, u_{i+1}^n) dx .$$

Dieses Näherungsverfahren wird üblicherweise **Godunov-Verfahren** genannt.

Für das Riemannproblem einer skalaren Erhaltungsgleichung im konvexen oder konkaven Fall läßt sich die Lösung in einfacher Art und Weise angeben, wie wir dies in Abschnitt 2.2 gezeigt haben. Für den nichtkonvexen Fall wird dies schon schwieriger und für Systeme wird dies oftmals unmöglich oder auch nur sehr aufwendig. Mit der exakten Lösung der Riemannprobleme (3.23) erhalten wir natürlich auch eine ganze Menge an Information über die Lösung zum Zeitpunkt t , die wir durch die Mittelung (3.24) wieder vergessen.

Beim **Godunov-Typ Verfahren** wird das Riemannproblem nicht exakt sondern nur näherungsweise berechnet. Dabei setzen wir voraus, daß eine Näherungslösung für das Riemannproblem (2.36) ebenso wie die exakte Lösung nur von x/t und natürlich u_l und u_r abhängt. Allen Näherungen gemeinsam sollte sein, daß es zumindest Funktionen $a_l = a_l(u_l, u_r)$ und $a_r = a_r(u_l, u_r)$ gibt, so daß für die Näherung w gilt

$$(3.26) \quad w(x/t; u_l, u_r) = u_l \quad \text{für} \quad x < a_l t,$$

und

$$(3.27) \quad w(x/t; u_l, u_r) = u_r \quad \text{für} \quad x > a_r t.$$

d.h. alle Wellen haben eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, vor und hinter den schnellsten Wellen sind die Zustände ungestört. Die Werte a_l, a_r nennen wir die **Signalgeschwindigkeiten**.

Definition 2: Eine Approximation $w = w(x/t; u_l, u_r)$ der exakten Lösung des Riemannproblems (2.37) wird **approximative Riemannlösung** genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Konsistenz mit der Integralform der Erhaltungsgleichung

$$(3.28) \quad \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_l, u_r) dx = \frac{\Delta x}{2} (u_l + u_r) - \Delta t f(u_r) + \Delta t f(u_l)$$

für alle $\Delta t < \Delta x / (2 \max\{|a_l|, |a_r|\})$.

2. Maximum-Minimum Bedingung in dem Sinne, daß für alle x/t gilt

$$(3.29) \quad \min\{u_l, u_r\} \leq w(x/t; u_l, u_r) \leq \max\{u_l, u_r\}.$$

Das zugehörige Näherungsverfahren nennen wir kurz **Riemannlöser**.

Definition 3: Ein Näherungsverfahren für die Erhaltungsgleichung (2.1) heißt **Godunov-Typ Verfahren** falls die Näherungslösung sich darstellen läßt in der Form

$$(3.30) \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_0^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n) dx + \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/\Delta t; u_i^n, u_{i+1}^n) dx \right),$$

wobei w eine approximative Riemannlösung nach Definition 2 ist.

Trivialerweise ist das Godunov-Verfahren auch ein Godunov-Typ Verfahren. Die Eigenschaften (3.28), (3.29), (3.30) führen nun dazu, daß sich ein Godunov-Typ-Verfahren in Erhaltungsform schreiben läßt.

Satz 3: Alle Verfahren vom Godunov-Typ können in der Erhaltungsform (3.8) geschrieben werden. Der numerische Fluß ist durch

$$\begin{aligned}
 (3.31) \quad g_{i+1/2} = g(u_i, u_{i+1}) &= f(u_i) - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/\Delta t; u_i, u_{i+1}) dx + \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_i \\
 &= f(u_{i+1}) + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_i, u_{i+1}) dx - \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_{i+1}
 \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis: Die Gleichheit in (3.31) folgt direkt aus der Konsistenzbedingung (3.28), wenn man die zweite Darstellung von g von der ersten abzieht. Daß jedes Godunov-Typ Verfahren nach Definition 3 ein Verfahren in Erhaltungsform ist, liefert die Ausrechnung

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= u_i^n - \lambda \left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 w\left(x/\Delta t, u_i^n, u_{i+1}^n\right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} w\left(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n\right) dx,
 \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung in (3.31) für $g_{i+1/2}$ und die zweite Gleichung für $g_{i-1/2}$ eingesetzt wurde.

Wir wollen uns nun einige dieser Godunov-Typ Verfahren anschauen. Dabei beschränken wir uns hier wieder auf eine Erhaltungsgleichung mit einem konvexen Fluß $f(u)$. Wir greifen zunächst das **Godunov Verfahren** nochmals auf. Es ist natürlich automatisch auch ein Godunov-Typ Verfahren. Wie man die exakte Lösung des Riemannproblems berechnet, haben wir in Abschnitt 2.2 angegeben. Da sie eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung ist, erfüllt sie trivialerweise die Konsistenzbedingung (3.28) von Definition 2. Die Positivitätsbedingung (3.29) ist

sicherlich auch erfüllt. Dies kann direkt aus der expliziten Darstellung der Lösung des Riemannproblems (2.38) und (2.39) abgelesen werden. Den numerischen Fluß des Godunov Verfahrens erhalten wir direkt aus der Integralform der Erhaltungsgleichung, da wir die exakte Lösung des Riemannproblems benutzen. Es gilt hier gerade

$$(3.32) \quad g_{\text{god}}(u_l, u_r) = f(w(0; u_l, u_r)) ,$$

wobei w die exakte Lösung des Riemannproblems ist. Wir können dies aufschlüsseln nach den Formeln (2.38) und (2.39) und erhalten

$$(3.32') \quad g_{\text{god}}(u_l, u_r) = \begin{cases} f(u_l) & \text{für } u_l \geq u_r, \quad f(u_l) \geq f(u_r) \\ f(u_r) & \text{für } u_l \geq u_r, \quad f(u_l) \leq f(u_r) \\ f(u_l) & \text{für } u_l \leq u_r, \quad a(u_l) \geq 0 \\ f(u_r) & \text{für } u_l \leq u_r, \quad a(u_r) \leq 0 \\ f(a^{-1}(0)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies kann man auch noch in einer anderen Form schreiben. Es gilt auch noch die Darstellung

$$(3.32'') \quad g_{\text{god}} = \begin{cases} \max_{u_r \leq u \leq u_l} f(u) & \text{für } u_l \geq u_r, \\ \min_{u_l \leq u \leq u_r} f(u) & \text{für } u_l \leq u_r. \end{cases}$$

Im Falle einer skalaren Erhaltungsgleichung mit einem konvexen Fluß können wir das exakte Riemannproblem leicht lösen und den numerischen Fluß (3.32) des Godunov-Verfahrens ausrechnen. Für Systeme läßt sich jedoch das Riemannproblem meist nicht mehr oder nur sehr aufwendig lösen, so daß es günstig ist, das exakte Riemannproblem durch ein nur näherungsweise gelöstes Riemannproblem zu ersetzen.

Beim Harten, Lax und van Leer-Verfahren [24] ersetzen wir die exakte Lösung des Riemannproblems durch eine Lösung der Form

$$(3.33) \quad w = w(x/t; u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & \text{für } x \leq a_l t \\ u_{lr} & \text{für } a_l t < x < a_r t \\ u_r & \text{für } x \geq a_r t \end{cases}$$

Wir nehmen hier natürlich an, daß die Signalgeschwindigkeiten a_l, a_r nicht gleich sind und a_r größer als a_l ist. Im Grenzfall $a_l = a_r$, den wir hier gerade noch zulassen, fällt natürlich der mittlere Zustand in (3.33) weg. Im Falle $a_l < a_r$ liefert uns die Konsistenzbedingung (3.28) diesen mittleren Zustand. Setzt man (3.33) in (3.28) ein, so erhält man

$$(3.34) \quad u_{lr} = \frac{a_r u_r - a_l u_l}{a_r - a_l} - \frac{f(u_r) - f(u_l)}{a_r - a_l}$$

Wird (3.33) eingesetzt in die Formel (3.31) für den numerischen Fluß aus Satz 3, so erhalten wir den numerischen Fluß des Verfahrens von Harten, Lax und Leer in der Form

$$(3.35) \quad g_{\text{HLL}}(u_l, u_r) = \frac{a_r^+ f(u_l) - a_l^- f(u_r)}{a_r^+ - a_l^-} + \frac{a_r^+ a_l^-}{a_r^+ - a_l^-} (u_r - u_l) ,$$

wobei a_r^+ und a_r^- der positive bzw. der negative Teil der größten und kleinsten Signalgeschwindigkeit ist:

$$(3.36) \quad a_l^- = \min(a_l, 0) , \quad a_r^+ = \max(a_r, 0) .$$

Laut Konstruktion des mittleren Zustandes u_{lr} nach (3.34) ist die erste Bedingung in Definition 2 erfüllt. Um zu zeigen, daß (3.33) eine approximative Riemannlösung nach dieser Definition ist, muß noch die Maximum-Minimumbedingung gelten. Bezeichnen wir mit s_{lr} die Stoßwellengeschwindigkeit $s_{lr} = (f(u_r) - f(u_l)) / (u_r - u_l)$, so können wir (3.34) umschreiben in

$$u_{lr} = \frac{a_r - s_{lr}}{a_r - a_l} u_r + \frac{s_{lr} - a_l}{a_r - a_l} u_l .$$

Die Maximum-Minimum Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten von u_r und u_l beide positiv sind und ihre Summe Eins ist. Das heißt die Bedingung (3.29) ist erfüllt, wenn die Signalgeschwindigkeiten die Ungleichung

$$(3.37) \quad a_l \leq s_{lr} \leq a_r$$

erfüllen. Einfeldt [16] schlug für eine konvexe Flußfunktion die Wahl

$$(3.38) \quad \begin{aligned} a_l &= a_l(u_l, u_r) = \min \{a(u_l), s_{lr}\} \\ a_r &= a_r(u_l, u_r) = \max \{s_{lr}, a(u_r)\} \end{aligned}$$

vor, Wir nennen das Verfahren mit dem Fluß (3.35) und diesen Signalgeschwindigkeiten (3.38) kurz HLL-Verfahren.

Es zeigt sich, daß das Lax-Friedrichs Verfahren [34]

$$(3.39) \quad \frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\Delta t} + \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

ein Grenzfall eines Harten, Lax und van Leer Verfahrens ist. Im Verfahren (3.39) wird durch diesen eigentümlichen Zeitdifferenzenquotienten eine Art Viskositätsterm eingeführt. Dies sieht man deutlicher, wenn (3.39) umgeschrieben wird in

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2\lambda} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Der Viskositätsterm auf der rechten Seite des Lax-Friedrichs Verfahrens ist somit gerade von der Form $0(\Delta x) \cdot u_{xx}$. Dieser Term führt dämpfende und stabilisierende Terme in das numerische Verfahren ein. Definieren wir die Signalgeschwindigkeiten des Harten, Lax, van Leer-Verfahrens in der folgenden Art und Weise

$$(3.40) \quad a_r = a_{lr}, \quad a_l = -a_{lr}, \quad a_{lr} = \max \{|a(u_l)|, |a(u_r)|\}$$

erhalten wir die approximative Riemannlösung

$$(3.41) \quad w = w(x/t; u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & \text{für } x \leq a_l t \\ (u_l + u_r)/2 - (f(u_r) - f(u_l))/2 a_{lr} & \text{sonst.} \\ u_r & \text{für } x \geq a_r t \end{cases}$$

und den numerischen Fluß

$$(3.42) \quad g_{LF}(u_l, u_r) = \frac{1}{2} (f(u_l) + f(u_r) - a_{lr}(u_r - u_l))$$

Dieser numerische Fluß entspricht gerade dem Fluß des Lax-Friedrichs Verfahrens, wenn wir für a_r den Maximalwert $1/\lambda$ einsetzen, welcher sich nach der CFL-Bedingung $\lambda \max |a(u)| \leq 1$ ergibt.

Ein anderer Grenzfall eines Godunov-Typ Verfahrens ist das **Verfahren von Roe** [54]. Als Signalgeschwindigkeiten wird hier

$$(3.43) \quad a_l = a_r = s_{lr} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}$$

gewählt. Damit erhalten wir die approximative Riemannlösung

$$(3.44) \quad w = w(x/t; u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & \text{für } x \leq s_{lr}t \\ u_r & \text{für } x > s_{lr}t \end{cases}$$

und für den numerischen Fluß

$$(3.45) \quad \mathcal{E}_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = \frac{1}{2} (f(u_l) + f(u_r) - |s_{lr}|(u_r - u_l))$$

Wir sehen hier an (3.44), daß beim **Verfahren von Roe** statt des exakten Riemannproblems das linearisierte Riemannproblem

$$u_t + s_{lr} u_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x > 0 \\ u_r & \text{für } x < 0 \end{cases},$$

gelöst wird. Stoßwelle als auch Verdünnungswelle wird approximiert durch eine lineare Unstetigkeit. Wir werden an Beispielen später sehen, daß diese einfache Approximation in bestimmten Fällen Schwierigkeiten mit sich bringt.

Bemerkung 1: Die Bedingung an das Schrittweitenverhältnis $\lambda = \Delta t/\Delta x$ ist für ein Godunov-Typ Verfahren nach Definition 2

$$(3.46) \quad \lambda \max_{u_l, u_r} \{|a_l| |a_r|\} \leq \frac{1}{2},$$

das heißt gerade die "halbe CFL-Bedingung". Dies liegt daran, daß wir die Darstellung eines Godunov-Verfahrens in der Form (3.30) fordern. Verzichten wir auf

diese Darstellung, definieren ein Godunov-Typ über den numerischen Fluß nach Satz 3, so genügt die Bedingung

$$\lambda \max_{u_l, u_r} \{ |a_l| |a_r| \} \leq 1$$

welche nur noch garantiert, daß die Flüsse benachbarter Riemannprobleme ungestört bleiben. Für die hier vorgestellten Verfahren ist diese Bedingung erfüllt, falls die CFL-Bedingung

$$\lambda \max_{u_i} |a(u_i)| \leq 1$$

gilt.

Eine andere Methode, die einseitigen Differenzen umzuschalten, wird bei dem **Verfahren von Engquist-Osher** [17] angewandt. Ihnen gelang es, den numerischen Fluß formal aufzuspalten in einen Fluß nach rechts und einen Fluß nach links:

$$(3.47) \quad f(u) = f^+(u) + f^-(u)$$

mit

$$(3.48) \quad f^+(u) = \int_0^u \max(a(s), 0) ds + f(0)$$

$$f^-(u) = \int_0^u \min(a(s), 0) ds .$$

Der numerische Fluß wird dann definiert durch

$$(3.49) \quad g_{\text{EO}}(u_l, u_r) = f^+(u_l) + f^-(u_r) .$$

Verfahren dieser Art nennt man Fluß-Splitting Verfahren. Interpretieren wir das zugehörige Verfahren in Erhaltungsform als Differenzenverfahren, so bedeutet dies, daß der Fluß nach rechts mit linksseitigen Differenzen und der Fluß nach links mit rechtsseitigen Differenzen behandelt wird. Der charakteristische Abhängigkeitsbereich wird somit richtig in das Differenzenverfahren eingebaut. Das Engquist-Osher Verfahren läßt sich somit in der Form

$$(3.50) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (f^+(u_i^n) - f^+(u_{i-1}^n)) - \lambda (f^-(u_{i+1}^n) - f^-(u_i^n))$$

schreiben.

Wir wollen diesen Sachverhalt eines Fluß-Splitting Verfahrens noch in einer Definition festhalten.

Definition 4: Ein Verfahren in Erhaltungsform (3.8) heißt **Fluß-Splitting Verfahren**, falls der numerische Fluß sich in der Form

$$(3.51) \quad g(u_l, u_r) = f^+(u_l) + f^-(u_r)$$

schreiben läßt und für den Fluß $f^+(u)$ nach rechts und $f^-(u)$ nach links (3.47) die folgenden Bedingungen gelten:

Sind die Signalgeschwindigkeiten $a(u_l) > 0$, $a(u_r) > 0$, dann gilt

$$f^-(u_r) = 0 \quad .$$

Sind die Signalgeschwindigkeiten $a(u_l) < 0$, $a(u_r) < 0$, dann gilt

$$f^+(u_l) = 0 \quad .$$

Der Fluß (3.49) des Engquist-Osher Verfahrens ist eine stetig differenzierbare Funktion, während die Flüsse der anderen Verfahren bis auf das Lax-Friedrichs Verfahren (3.39) nur lipschitzstetig sind. Dies ist ein Vorteil, wenn der numerische Fluß für ein implizites Verfahren benutzt wird. In diesem Fall muß ein nicht-lineares Gleichungssystem iterativ gelöst werden. Oftmals läßt sich dies sehr effizient mit dem Newton-Verfahren durchführen, für welches die Ableitungen erforderlich sind.

Godunov-Typ Verfahren werden auch als **Flußdifferenzen-Splitting Verfahren** bezeichnet, weil man sie auch in der Art formulieren kann, daß die Flußdifferenz zwischen den Gitterzellen in Anteile nach rechts und links aufgespaltet wird ([24]). Interessant ist es, daß es Einfeldt [16] hier im skalaren Fall gelang, das Engquist-Osher Verfahren auch als Godunov-Typ Verfahren zu formulieren.

Wir haben in Abschnitt 3.1 auf ein Verfahren in Erhaltungsform die **Hirt'sche Stabilitätsanalyse** angewandt und damit insbesondere gezeigt, daß Verfahren mit rechts-, linksseitigen oder zentralen Differenzen instabil sind für Probleme, in denen die Richtung der Charakteristiken wechselt. Wir wollen nun sehen, ob die hier konstruierten Verfahren der in Abschnitt 3.1 abgeleiteten Stabilitätsbedingung (3.16) genügen. Wir wollen dies an dem Engquist-Osher Verfahren durchführen, da dieses, wie oben erwähnt, gerade einen stetig differenzierbaren Fluß hat. Berechnen wir die Ableitungen nach dem ersten und zweiten Argument des Flusses (3.49) und setzen diese in (3.16) ein, so erhalten wir die Ungleichung

$$\max(a(u), 0) - \min(a(u), 0) \geq \lambda a(u)^2$$

und weiter

$$(3.52) \quad |a(u)| (1 - \lambda |a(u)|) \geq 0 .$$

Diese Ungleichung gilt unter der CFL-Bedingung

$$(3.53) \quad \lambda \max_u |a(u)| \leq 1 .$$

Das heißt das Engquist-Osher Verfahren erfüllt (3.16) unter der üblichen Stabilitätsbedingung für ein explizites Verfahren. Die Flüsse der Godunov-Typ Verfahren, die wir hier vorgestellt haben, sind lipschitzstetig, aber außer beim Lax-Friedrichs Verfahren nicht überall stetig differenzierbar. Wir können somit die Gültigkeit der Stabilitätsbedingung (3.16) für diese Verfahren nur eingeschränkt nachweisen. Wir werden die Frage der Stabilität zunächst zurückstellen, sie nach einem Konvergenzsatz erneut aufgreifen und uns dann damit noch etwas genauer befassen.

Abschließen wollen wir diesen Abschnitt mit einigen numerischen Resultaten dieser Verfahren. Dazu haben wir vier Testprobleme herausgesucht: Anfangswertprobleme - wie könnte es anders sein - für die Burgers-Gleichung. Für praktische Berechnungen können wir natürlich nur ein endliches Rechengebiet betrachten und müssen Randwerte vorschreiben. Wir wollen jedoch das Zeitintervall so vorschreiben, daß innerhalb der betrachtenden Zeiten keine Wellen an den Rändern ankommen und die Lösung dort sich somit nicht ändert. Es genügt somit, einfach konstante Randwerte vorzuschreiben. Die Frage der Vorgabe von Randwerten im allgemeinen Fall wird dann in Kapitel 7 ausführlich behandelt.

Testbeispiel 1 (stationäre Stoßwelle, Transschall): Die Anfangswerte für die Burgers-Gleichung 2.11 sind gegeben durch

$$(3.54) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 5 \\ -1 & \text{für } x > 5 \end{cases}, \quad x \in [0, 10] .$$

Als Randwerte geben wir vor:

$$u(0, t) = 1, \quad u(10, t) = -1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_0^+ .$$

Die physikalisch relevante Lösung enthält eine stationäre Stoßwelle und lautet

$$(3.55) \quad u(x, t) = u(x, 0) \quad \text{für } (x, t) \in [0, 10] \times \mathbb{R}_0^+$$

Das Bild der Charakteristiken ist in Figur 3.4 a skizziert.

Dieses Problem ist ein sogenanntes Transschall-Problem. Der Punkt (die Punkte) u mit $a(u) = 0$ nennt man den Schallpunkt (die Schallpunkte). Gilt nun für ein Problem $a(u) > 0$ für alle auftretenden u -Werte, so nennt man dies ein **Überschall-Problem**, für $a(u) < 0$ ist es ein **Unterschall-Problem**; ansonsten nennt man es **Transschall-Problem**. Beim Überschall-Problem laufen alle Charakteristiken nach rechts, beim Unterschall nach links und beim Transschall hat man ein Durchgang durch den Schallpunkt und ein Wechsel der Richtungen der Charakteristiken.

Testbeispiel 2 (Stoßwelle, Transschall): Die Anfangswerte sind gegeben durch

$$(3.56) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 5 \\ -1 & \text{für } x > 5 \end{cases}, \quad x \in [0, 10] .$$

Als Randwerte werden vorgegeben

$$u(0, t) = 2, \quad u(10, t) = -1 \quad \text{für } t \in [0, 10] .$$

Die physikalisch relevante Lösung enthält hier eine Stoßwelle, welche nach rechts läuft:

$$(3.57) \quad u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < t/2 + 5 \\ -1 & \text{für } x > t/2 + 5 \end{cases}, \quad (x, t) \in [0, 10] \times [0, 10] .$$

Eine Skizze über den Verlauf der Charakteristiken zeigt Figur 3.4 b.

Testbeispiel 3 (Stoßwelle, Überschall): Die Anfangswerte sind gegeben durch

$$(3.58) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 5 \\ 1 & \text{für } x > 5 \end{cases}, \quad x \in [0, 10] .$$

Als Randwerte werden vorgegeben

$$u(0, t) = 2, \quad u(10, t) = 1 \quad \text{für alle } t \in [0, 10/3] .$$

Die physikalisch relevante Lösung enthält hier ebenso eine nach rechts laufende Stoßwelle und lautet

$$(3.59) \quad u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 3t/2 + 5 \\ 1 & \text{für } x > 3t/2 + 5 \end{cases}$$

Das Bild der Charakteristiken ist in Figur 3.4 c festgehalten.

Testbeispiel 4 (Verdünnungswelle, Transschall): Die Anfangswerte sind gegeben durch

$$(3.60) \quad u(x, 0) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 5 \\ 1 & \text{für } x > 5 \end{cases}, \quad x \in [0, 10] .$$

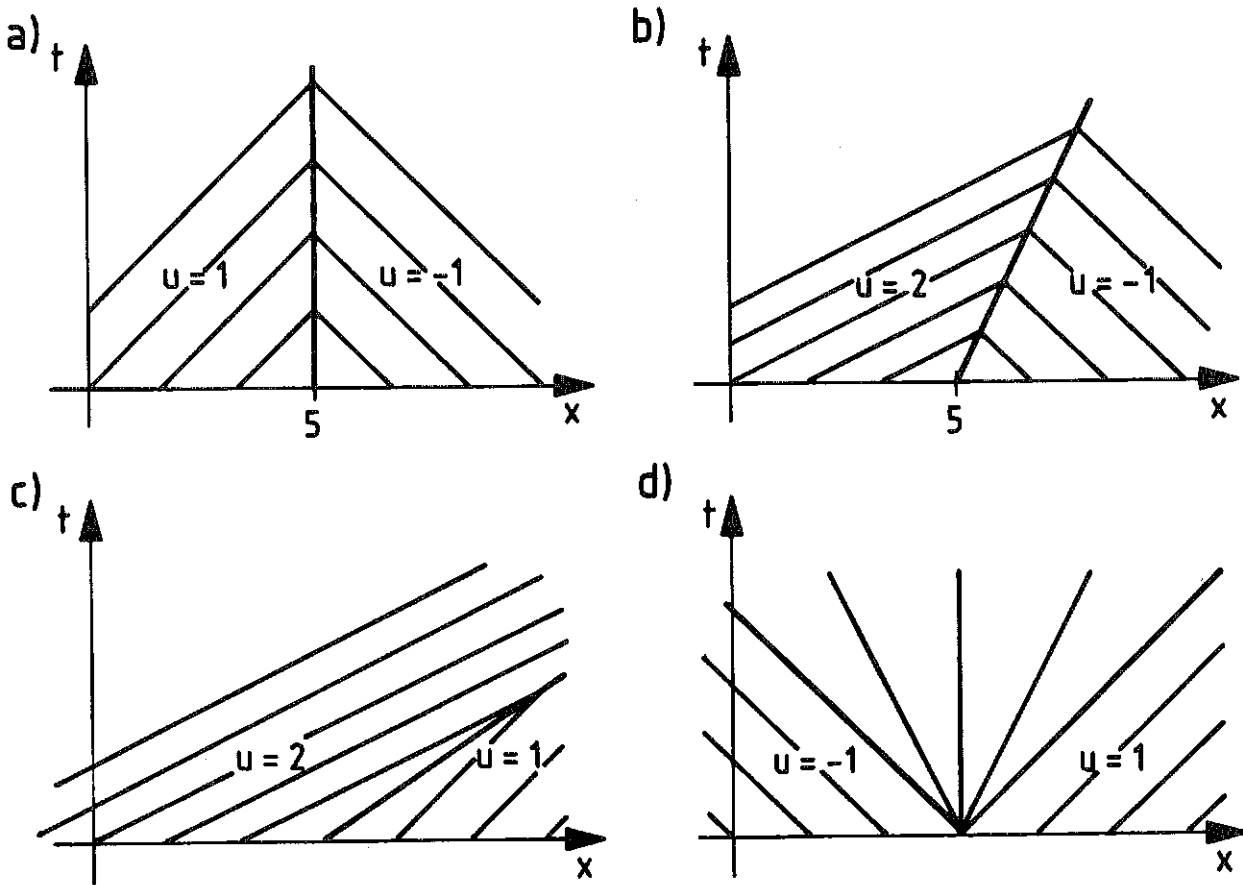
Als Randwerte werden vorgegeben

$$u(0, t) = -1, \quad u(10, t) = 1 \quad \text{für } t \in [0, 10] .$$

Die physikalisch relevante Lösung besteht aus den ungestörten Zuständen, getrennt durch eine Verdünnungswelle

$$(3.61) \quad u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -t \\ x/t & \text{für } -t < x < t \\ +1 & \text{für } x > t \end{cases}, \quad x \in [0, 10] .$$

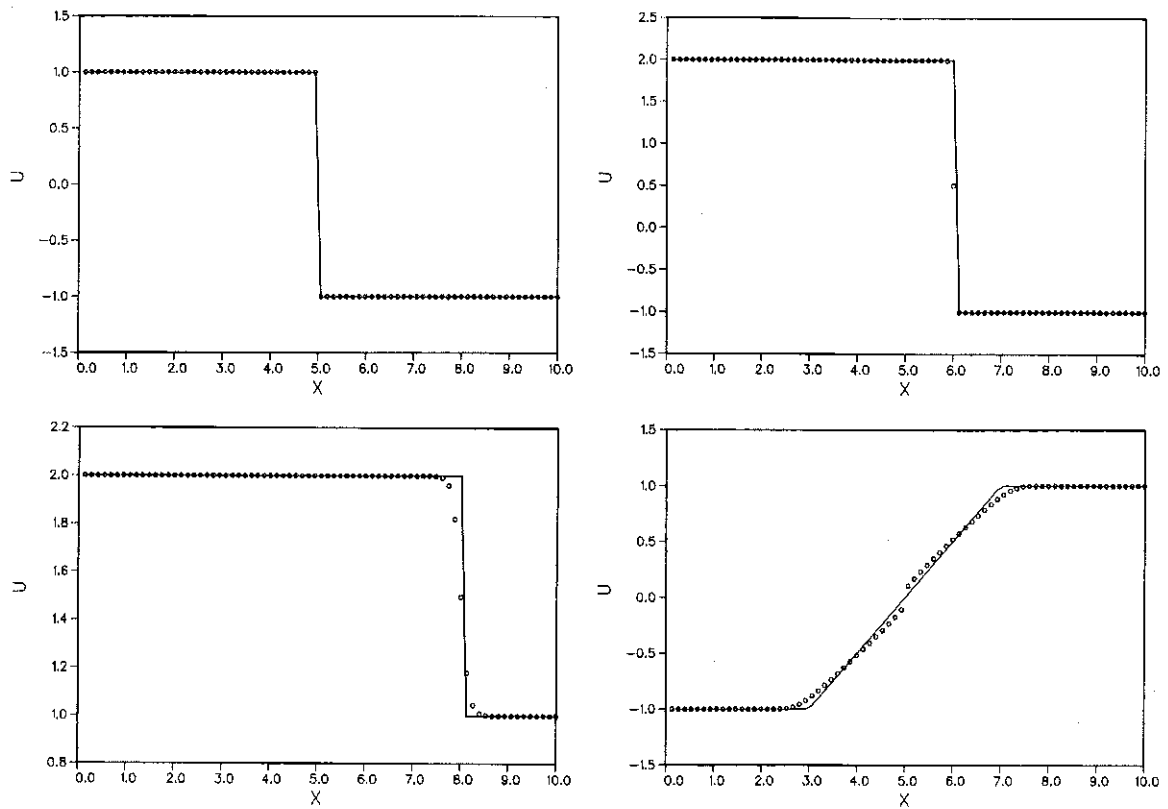
Das Bild der Charakteristiken zeigt Figur 3.4 d.



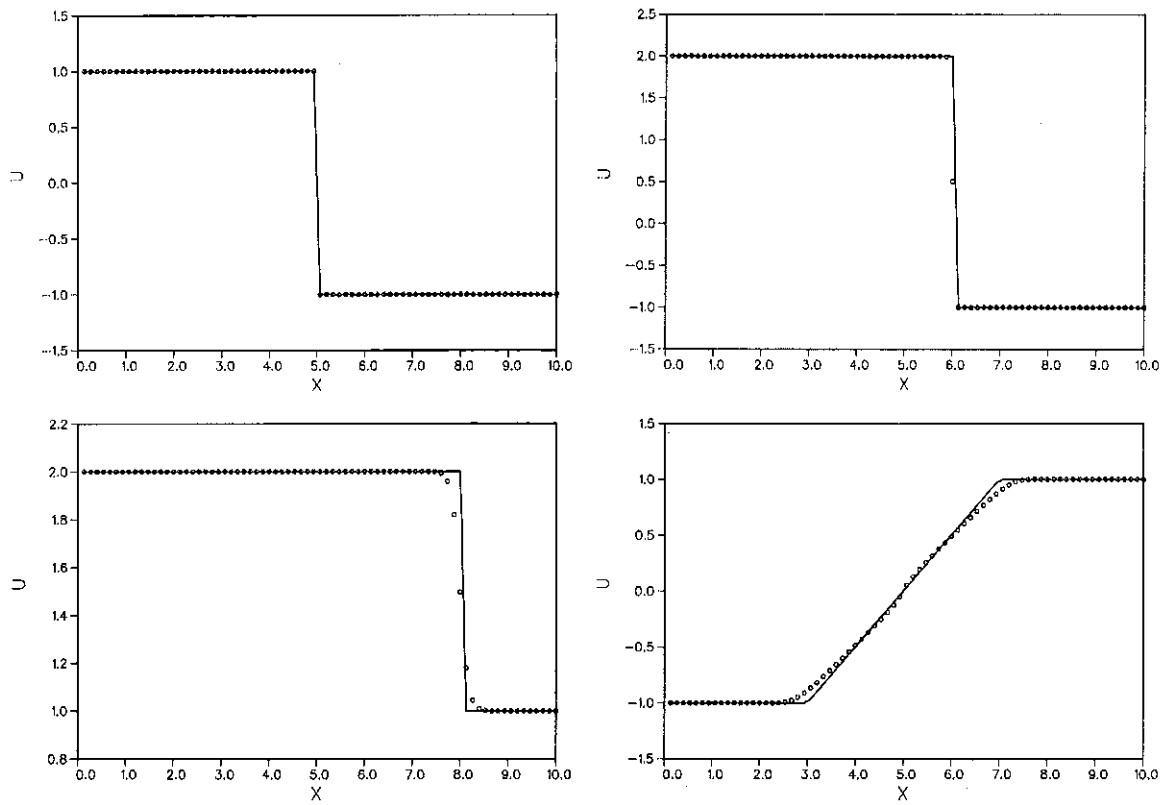
Figur 3.4 Verlauf der Charakteristiken für Testbeispiel 1 - 4.

Die numerischen Ergebnisse der Näherungsverfahren zum Zeitpunkt $t = 2.0$ sind in den Figuren 3.5 - 3.10 aufgezeichnet. Dabei ist mit einer Linie jeweils die exakte Lösung, mit den Kreisen die Werte der Näherungslösungen gezeichnet. Die Reihenfolge der verschiedenen Testprobleme ist 1, 2 darunter 3, 4 analog zu Figur 3.4 der Charakteristiken. Die Raumschrittweite ist $\Delta x = 10/75$, die Zeitschrittweite wurde nach der Bedingung $\Delta t = 0.75 \cdot \Delta x / \max |a(u)|$ gewählt.

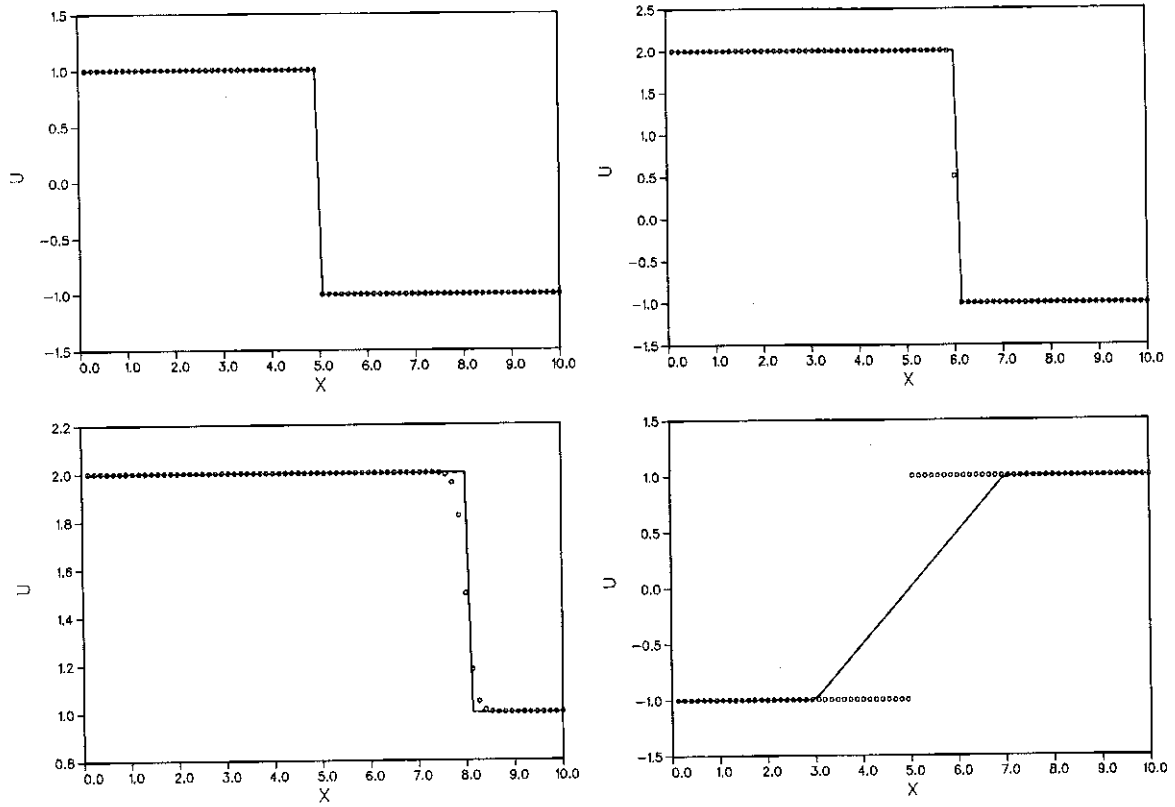
Es zeigt sich, daß - wie erwartet - das Verfahren von Godunov, das Verfahren von Lax-Friedrichs, das HLL-Verfahren und das Verfahren von Engquist-Osher gerade die physikalisch relevanten Lösungen approximieren. Es treten keine numerischen Oszillationen oder Instabilitäten vor oder hinter den Stoßwellen auf. Das Verfahren von Lax-Friedrichs dämpft oder verschmiert die Unstetigkeiten am stärksten. Beim Testbeispiel 3, bei welchem die Charakteristiken alle nach rechts laufen, benötigt es 16 Gitterpunkte, die Stoßwelle darzustellen, für die stationäre Stoßwelle 6 Punkte (Figur 3.9). Die numerische Dämpfung beim Verfahren von Godunov, HLL und Engquist-Osher ist deutlich geringer, aber es gibt ebenso



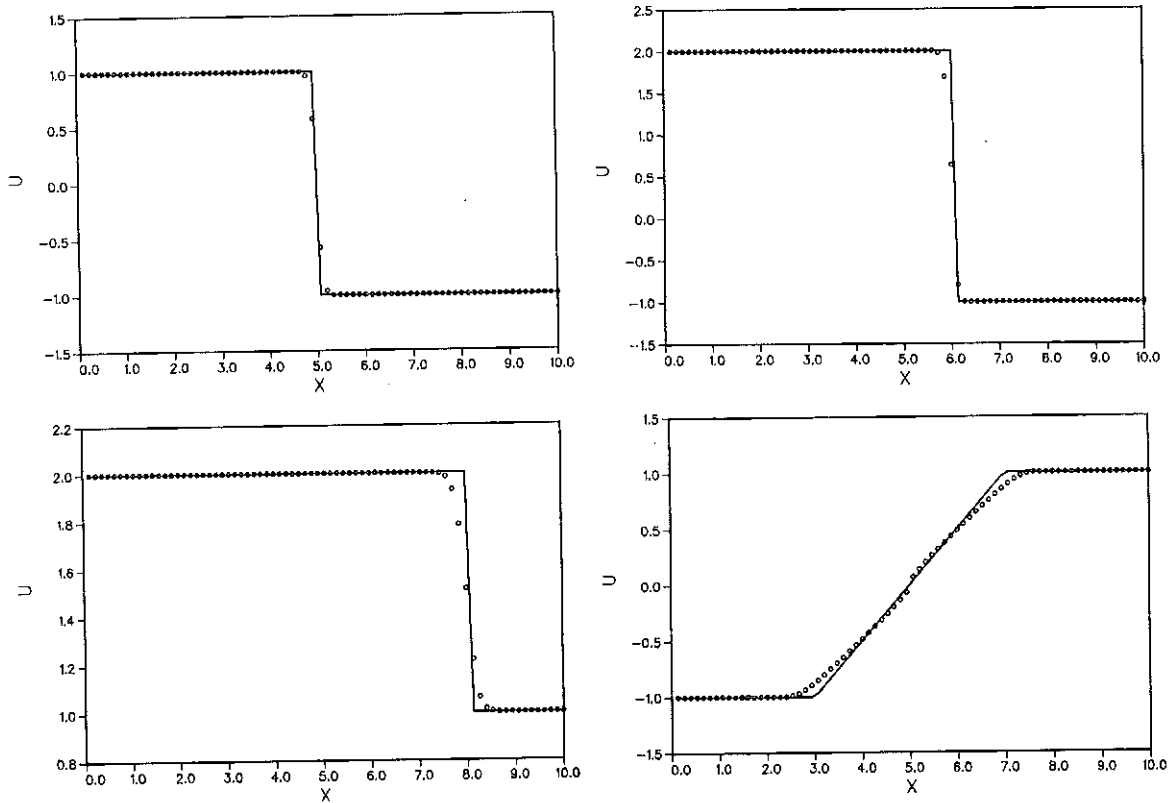
Figur 3.5 Verfahren von Godunov



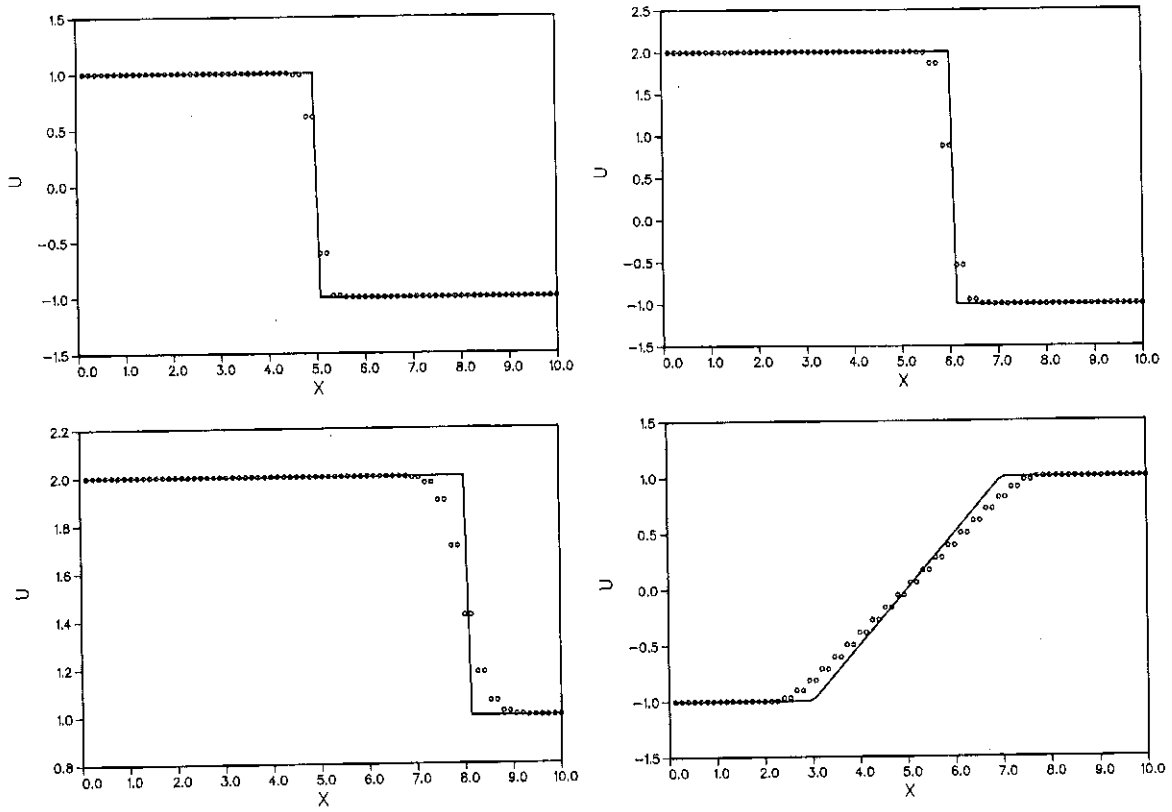
Figur 3.6 Verfahren von Harten, Lax, van Leer und Einfeldt (HLL)



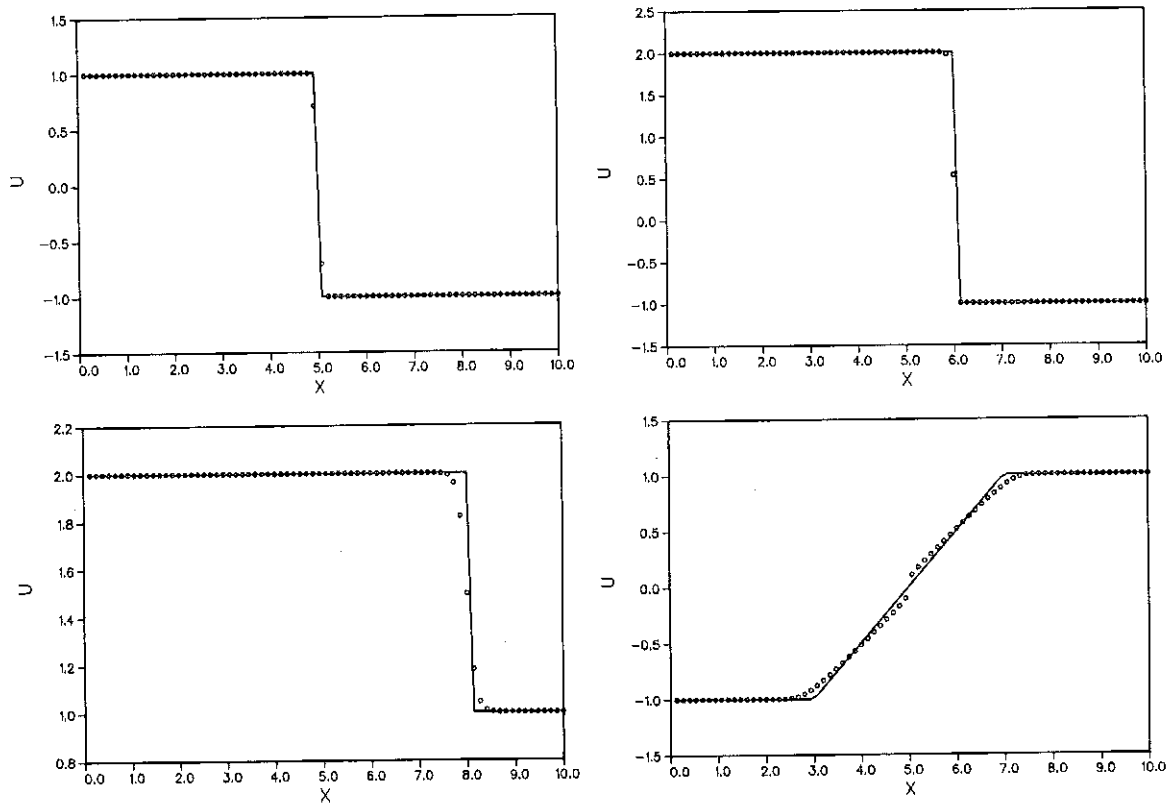
Figur 3.7 Verfahren von Roe



Figur 3.8 Verfahren von Lax-Friedrichs mit a_{lf} nach (3.40)



Figur 3.9 Verfahren von Lax-Friedrichs mit $a_r = 1/\lambda$



Figur 3.10 Verfahren von Enquist-Osher

einen deutlichen Unterschied zwischen Testbeispiel 3 und 1,2. Im transsonischen Fall werden die Stoßwellen über weniger Gitterpunkte hinweg approximiert. Beim Verfahren von Godunov und HLLC wird die stationäre Stoßwelle exakt gelöst, während das Verfahren von Engquist-Osher hier 2 Punkte innerhalb der Stoßwelle benötigt. Die Resultate im Überschallfall sind für diese drei Verfahren identisch. Das Verfahren von Roe liefert identische Resultate wie das HLLC-Verfahren bis auf Testbeispiel 4. In diesem Fall approximiert das **Verfahren von Roe** eine **physikalisch unsinnige Lösung** - nämlich eine **stationäre Verdünnungsstoßwelle**. Dies bedeutet, daß das Verfahren von Roe in dieser Situation (Transschall, Verdünnung) keiner diskreten Entropiebedingung genügt. Für die übrigen Beispiele sind die Ergebnisse identisch zum HLLC- und Godunov-Verfahren.

Wir haben die Beziehung der einzelnen Verfahren noch etwas deutlicher dargestellt in Tabelle 3.1. Für die Burgers-Gleichung sind hier die Werte der numerischen Flüsse zum Vergleich aufgelistet. Man sieht, daß das Verfahren von Engquist-Osher, Godunov, HLLC und Roe im Über- und Unterschallfall die identischen Flüsse besitzen (entsprechend rechts-linksseitiger Differenzen). Nur für Transschallprobleme unterscheiden sie sich. Im Transschall-Verdünnungsfall ist nach den Ergebnissen für das Verfahren von Roe in Figur 3.8 die Approximation der Verdünnungswelle durch eine lineare Unstetigkeit nicht verträglich mit der Entropiebedingung. Man muß in diesem Fall das Verfahren von Roe durch einen **Entropie-Fix** korrigieren, indem man

$$(3.62) \quad 0 = \min_{u_l \leq u \leq u_r} f(u) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} u_l u_r$$

setzt. Hier im Transschall-Verdünnungsfall ist dann das Verfahren von Roe identisch mit dem Verfahren von Godunov oder dem HLLC-Verfahren. Das Verfahren von Roe ist ein sehr wichtiges Verfahren bei der Approximation von Systemen von Erhaltungsgleichungen. Das exakte Riemannproblem ist dort oftmals nicht oder nur mit sehr großem Aufwand zu lösen. Das Verfahren von Roe besteht in einer Linearisierung des Problems. Die Lösung des exakten Riemannproblems wird ersetzt durch die exakte Lösung eines linearisierten Riemannproblems, welche durch die Charakteristikentheorie in einfacher Weise gewonnen werden kann. Ein Entropie-Fix kann dort ebenso leicht durchgeführt werden (siehe [21]).

Verfahren	Überschall $u_l \geq 0, u_r \geq 0$	Unterschall $u_l \leq 0, u_r \leq 0$	Transschall (Verd.) $u_l \leq 0 \leq u_r$	Transschall (Stoß) $u_l \geq 0 \geq u_r$
Engquist-Osher	$1/2 u_l^2$	$1/2 u_r^2$	0	$1/2 (u_l^2 + u_r^2)$
Godunov	$1/2 u_l^2$	$1/2 u_r^2$	0	$1/2 u_l^2$ für $s \geq 0$ $1/2 u_r^2$ für $s < 0$
HLLE (3.38)	$1/2 u_l^2$	$1/2 u_r^2$	$1/2 u_l u_r$	$1/2 u_l^2$ für $s \geq 0$ $1/2 u_r^2$ für $s < 0$
Roe	$1/2 u_l^2$	$1/2 u_r^2$	$1/2 u_l^2$ für $s \geq 0$ $1/2 u_r^2$ für $s < 0$	$1/2 u_l^2$ für $s \geq 0$ $1/2 u_r^2$ für $s < 0$

Tabelle 3.1 Numerische Flüsse verschiedener Upwind-Verfahren für die Burgersgleichung

Wir haben an den einfachen Beispielen gesehen, daß bei der Berechnung der numerischen Flüsse meist wesentlich die Richtung der Charakteristiken eingeht. Verfahren dieser Art nennt man auch Upwind-Verfahren. Wir wollen diese Bezeichnung noch präziser formulieren in

Definition 5: Ein 3-Punkt Verfahren in Erhaltungsform heißt **Upwind-Verfahren**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Der numerische Fluß läßt sich schreiben in der Form

$$(3.63) \quad g(u_i, u_{i+1}) = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2} - \frac{1}{2} d(u_i, u_{i+1})$$

mit

$$(3.64) \quad d(u_i, u_{i+1}) = a \left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2} \right) (u_{i+1} - u_i) + o(|u_{i+1} - u_i|)$$

2. Sind alle Signalgeschwindigkeiten positiv, so gilt

$$g(u_i, u_{i+1}) = f(u_i) \quad ,$$

umgekehrt sind alle negativ, so gilt

$$g(u_i, u_{i+1}) = f(u_{i+1}) \quad .$$

Während die Bedingung 2 sofort verständlich ist und ihre Gültigkeit bei einem Fluß-Splitting Verfahren etwa direkt aus dessen Definition folgt, müssen wir die Bedingung 1 noch etwas motivieren. Im linearen Fall ist ein solches Upwind-Verfahren gerade das CIR-Verfahren (1.76). Wir können dieses Verfahren für $c = \text{konstant}$ in der Form

$$(3.65) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left(c^+ (u_i^n - u_{i-1}^n) + c^- (u_{i+1}^n - u_i^n) \right)$$

mit

$$c^+ = \max(0, c) \quad c^- = \min(0, c)$$

schreiben. Der zugehörige numerische Fluß lautet dann

$$(3.66) \quad g(u_i^n, u_{i+1}^n) = c^+ u_i^n + c^- u_{i+1}^n \quad .$$

Eine andere Form des CIR-Verfahrens ist

$$(3.67) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} c (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |c| (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

mit dem zugehörigen Fluß

$$(3.68) \quad g(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{c}{2} (u_i^n + u_{i+1}^n) - \frac{|c|}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad .$$

Das CIR-Verfahren wird in dieser Form geschrieben als ein Verfahren in Erhaltungform mit einem zusätzlichen Viskositätsterm.

Bedingung 1 in Definition 5 sagt nun aus, daß für ein Upwind-Verfahren im nicht-linearen Fall eine zu (3.66) bzw. (3.68) ähnliche Darstellung des numerischen Flusses existiert. So fordert diese Bedingung, daß die Flüsse (3.66) und (3.68) mit

$$c = a(u_*) , c^+ = \frac{1}{2}(c + |c|) , c^- = \frac{1}{2}(c - |c|)$$

für einen Referenzzustand u_* nahe u_i und u_{i+1} (z.B. $u_* = (u_i + u_{i+1})/2$) gerade eine lineare Approximation ist, falls u_i und u_{i+1} nahe beieinander liegen. Für eine lineare Gleichung bedeutet dies insbesondere, daß alle Upwind-Verfahren mit dem CIR-Verfahren identisch sind.

Die Definition eines Godunov-Typ, eines Fluß-Splitting oder Upwind-Verfahrens wurde in [24] ausgeführt. Beim Godunov-Typ Verfahren folgten wir hier im wesentlichen der Darstellung voninfeldt [16], [15]. Von ihm stammt die Maximum-Minimum Bedingung in Definition 2. Wir haben diese Bedingung bisher nicht benötigt und werden erst im Abschnitt 3.4 darauf zurückkommen. Harten, Lax und van Leer [24] forderten statt dessen die Gültigkeit einer diskreten Entropiebedingung. Der Nachweis dieser Bedingung ist schwerer; insbesondere erfüllt natürlich das unmodifizierte Roe-Verfahren keine solche Bedingung.

Wir sollten hier auch noch ein anderes Verfahren erwähnen, welches zur Berechnung einer Näherungslösung das Riemannproblem benutzt: **das Verfahren von Glimm** [18]. Der Ausgangspunkt ist derselbe wie beim Godunov Verfahren, jedoch wird keine Mittelung im nächsten Zeitschritt ausgeführt; der Näherungswert ist eine mittels Zufallszahlen ermittelter Wert der Lösung des Riemannproblems. Dies verhindert die Verschmierung von Unstetigkeiten. Die Näherungslösung und Ort der Stoßwelle hängen jedoch von den Zufallszahlen ab. Dieses Verfahren ist sehr schwierig auf mehrdimensionale Probleme auszudehnen. Insofern möchten wir hier nicht näher darauf eingehen. Praktische Anwendungen findet man in [4].

3.3 Konvergenzsatz

Wir haben in Abschnitt 3.1 Kriterien angegeben, welche garantieren, daß im Falle der Konvergenz die Grenzfunktion gerade die physikalisch relevante Lösung ist. Wir haben jedoch noch kein Kriterium angegeben, welches uns die Konvergenz selbst garantiert. Dies wollen wir in diesem Abschnitt nachholen und zeigen, daß die Verfahren, welche wir in Abschnitt 3.2 vorgestellt haben, diesem Kriterium

genügt. In Anlehnung an das Äquivalenz Theorem von Lax, welches für lineare Probleme gilt, können wir den Konvergenzsatz in der Form

$$\text{Konsistenz} + \text{Stabilität} \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

ausdrücken. Zwar können wir hier nicht die Äquivalenz dieser wichtigen Eigenschaften zeigen, aber zumindest die eine Richtung bleibt gültig. Unter Konsistenz verstehen wir hier, daß das Näherungsverfahren in Erhaltungsform geschrieben werden kann mit einem konsistenten numerischen Fluß und daß eine diskrete Entropiebedingung erfüllt ist, d.h. das Näherungsverfahren auch konsistent mit der Entropiebedingung ist. Stabilität bedeutet hier Stabilität bezüglich der L^∞ -Norm und der Totalvariation. Definition und einige Eigenschaften der Räume L^p der Lebesgue integrierbaren Funktionen und der Totalvariation sind im Anhang A bzw. B kurz zusammengefaßt. Wir betrachten das Näherungsverfahren in einem beliebigen Zeitintervall $J = [0, T]$ mit einer Zeitschrittweite $\Delta t = T/N, N \in \mathbb{N}$.

Satz 4 (Konvergenzsatz): Sei $\{u_\Delta\}$ die Folge der Näherungslösungen (3.9) aus einem Verfahren in Erhaltungsform (3.8), wenn $\Delta t, \Delta x$ mit $\lambda = \Delta t/\Delta x = \text{konstant}$ gegen Null streben. Genügen die Näherungslösungen einer **diskreten Entropiebedingung** (3.12) und sind sie **gleichmäßig beschränkt**

$$(3.69) \quad |u_\Delta(x, t)| \leq M_0 \quad \text{für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

und lokal von **gleichmäßig beschränkter Variation**

$$(3.70) \quad \text{TV}_{\alpha}^{\beta} u_\Delta(\cdot, t) \leq M_1 \quad \text{für alle } t \in [0, T], [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R},$$

mit $M_0, M_1 \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $\{u_\Delta\}$ im Sinne von $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R} \times [0, T])$ gegen die eindeutige schwache Lösung, welche der Entropiebedingung genügt.

Beweis: Den Beweis dieses Satzes wollen wir im folgenden relativ kurz halten aber so, daß alle wesentlichen Ideen sichtbar werden. Sei zunächst das Intervall $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ und $t_0 \in [0, T]$ fest vorgegeben. Nach dem **Satz von Helly** (Anhang A, Satz 5) existiert eine Teilfolge $\{u_\Delta\}$, welche punktweise konvergiert. Wegen (3.9) und dem **Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz** konvergiert sie auch im Sinne der Norm von $L^1(I)$. Eine solche Teilfolge existiert für jedes $t_0 \in [0, T]$. Mit Hilfe eines Diagonalprozesses können wir somit eine Teilfolge auswählen, welche für abzählbar viele $t \in [0, T]$, etwa für t rational, konvergiert.

Als nächstes zeigen wir, daß $\|u_{\Delta}(\cdot, t)\|_{L^1(I)}$ eine Lipschitzstetige Funktion in t ist. Dies ergibt sich aus der Erhaltungsgleichung unter Benutzung der Lipschitzstetigkeit des numerischen Flusses und (3.70). Es gilt

$$\begin{aligned} |u_i^{n+1} - u_i^n| &= \lambda |g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n| \\ &\leq L \lambda (|u_{i+1}^n - u_i^n| + |u_i^n - u_{i-1}^n|), \end{aligned}$$

wobei L die Lipschitzkonstante des numerischen Flusses ist. Aufsummiert über alle Gitterpunkte im Intervall I und unter Verwendung von (3.70) folgt hieraus

$$\Delta x \sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq 2 M_1 L \Delta t .$$

Wir gehen nun über zu der Ausdehnung der Gitterfunktionen auf $\mathbb{R} \times [0, T]$ mittels (3.9) und erhalten aus dieser Ungleichung

$$\int_I |u_{\Delta}(x, t_1) - u_{\Delta}(x, t_2)| dx \leq 2 M_1 L |t_1 - t_2| \quad \text{für } t_1, t_2 \in [0, T] .$$

Aus dieser Lipschitzstetigkeit und der Existenz einer Teilfolge, welche für alle rationalen $t \in [0, T]$ konvergiert, folgt, daß die Teilfolge für alle $t \in [0, T]$ konvergiert. Insbesondere ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig, da die Folge auch gleichgradig stetig in t ist (L, M_1 hängen nicht von t ab). Die obige Teilfolge konvergiert somit bezüglich der Norm

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(I)} ,$$

das heißt im $L^1(I) \times L^\infty([0, T])$. Nun können wir den Satz 2 von Abschnitt 3.1 anwenden. Er besagt, daß die Grenzfunktion u unserer Teilfolge gerade die eindeutige physikalisch relevante Lösung ist. Aus dieser Eindeutigkeit folgt die Konvergenz der gesamten Folge $\{u_{\Delta}\}$. Da I beliebig gewählt war, konvergiert somit die gesamte Folge gegen eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ im $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R} \times [0, T])$ und damit ist der Satz bewiesen. \square

Die Beweisideen dieses Konvergenzsatzes stecken schon in den ersten Konvergenzsätzen von Oleinik [48], welche sie zu Existenzaussagen von schwachen Lö-

sungen benutzte. Die Formulierung des Beweises folgt hier den Ausführungen von Crandall und Majda [8] und Sanders [57] (siehe auch [63]).

Vergleichen wir die Bedingungen (3.69) und (3.70) von Satz 4 und die Ausführungen im Beweis mit den Eigenschaften der exakten Lösung in Satz 2 im zweiten Kapitel, so sehen wir, daß ein Näherungsverfahren gerade die grundlegenden Eigenschaften der exakten Lösung erhalten muß.

3.4 Kriterien für Näherungsverfahren

In Abschnitt 3.1 haben wir grundlegende Kriterien angegeben, welche gewissermaßen die Konsistenz eines Verfahrens (Verfahren in Erhaltungsform, diskrete Entropiebedingung) garantieren. In dem Konvergenzsatz in Abschnitt 3.3 haben wir als weitere Voraussetzungen Stabilitätsbedingungen - nämlich die gleichmäßige Beschränktheit der Näherungslösungen und der Totalvariation. Diese Bedingungen führen auf weitere Kriterien für Näherungsverfahren, welche zur Approximation von Stoßwellen geeignet sind.

Definition 6: Ein Verfahren in Erhaltungsform heißt **monoton**, falls der numerische Fluß den Monotoniebedingungen

1. $g(v, w)$ ist monoton wachsend in v ,
2. $g(v, w)$ ist monoton fallend in w

genügt.

Schauen wir uns die Stabilitätsbedingung aus der Hirtschen Stabilitätsanalyse in Abschnitt 3.1 an und nehmen an g sei stetig differenzierbar, so sehen wir, daß die linke Seite der Ungleichung (3.16) unter diesen Monotoniebedingungen immer positiv ist. Dies bedeutet aber, daß wir ein Schrittweitenverhältnis λ finden können, so daß diese Ungleichung erfüllt ist. Unter dieser Bedingung ist das Verfahren somit stabil nach Hirt. Wir wollen als nächstes mal schauen, welche der in 3.2 konstruierten Verfahren diese Monotonieeigenschaft besitzen. Sehr einfach nachzuprüfen ist dies natürlich beim Verfahren von Engquist-Osher, da der Fluß dieses Verfahrens stetig differenzierbar ist. Es zeigt sich sofort, daß die Ableitung nach dem ersten Argument positiv und die Ableitung nach dem zweiten Argument negativ ist, das heißt die Bedingung 1. und 2. in Definition 6 sind erfüllt und

das Verfahren von Engquist-Osher ist somit ein monotones Verfahren. Etwas schwieriger ist dies für die anderen Verfahren zu zeigen.

Bemerkung 2: Das Verfahren von Godunov, das HLL-Verfahren, das Verfahren von Lax-Friedrichs und das Engquist-Osher Verfahren sind monotone Verfahren.

Ein anderes Kriterium für ein Verfahren in Erhaltungsform, welches sich auf die Beschränktheit in der Totalvariation stützt, wurde von Harten [22] eingeführt.

Definition 7: Ein Verfahren in Erhaltungsform heißt **beschränkt oder stabil in der Totalvariation (TVB)**, falls

$$(3.71) \quad \text{TV } u_{\Delta}(\cdot, t_n) = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

gleichmäßig in n und Δ beschränkt ist. Ein Verfahren heißt **TVD-Verfahren (Total Variation Diminishing)**, falls die Totalvariation eine monoton fallende Funktion, d.h. falls

$$(3.72) \quad \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq \sum_i |u_{i+1}^0 - u_i^0|$$

gilt für alle n .

Für das sehr wichtige TVD-Kriterium von Harten [22] formulieren wir das Verfahren in Erhaltungsform (3.8) um in eine andere Form:

$$(3.73) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+1/2}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - D_{i-1/2}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) .$$

mit

$$(3.74) \quad C_{i+1/2}^n = -\lambda \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n}$$

$$D_{i-1/2}^n = \lambda \frac{f(u_i^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{u_i^n - u_{i-1}^n}$$

Da g nach Voraussetzung konsistent mit dem physikalischen Fluß $f(u)$ und lipschitzstetig ist, sind diese Ausdrücke beschränkt. Für praktische Rechnungen kann man ein Cauchyproblem nicht numerisch lösen, sondern man muß ein endliches Rechengebiet auswählen. Für die folgenden Überlegungen ist es günstig,

ein endliches Gebiet mit vorgegebenen Randwerten, ein periodisches Problem oder eines mit kompaktem Träger zugrunde zu legen. Man umgeht somit die aufwendigen Grenzwertbetrachtungen für $x \rightarrow \pm \infty$, ohne jedoch das Wesentliche zu verlieren. Wir werden die Sätze allgemein formulieren, jedoch die Beweise nur für solche "endlichen Probleme" durchführen. In den einzelnen Beweisen werden wir jedoch darauf hinweisen, an welchen Stellen wir dies ausnutzen.

Ein hinreichendes Kriterium, daß ein Verfahren in Erhaltungsform die TVD-Eigenschaft besitzt ist dann

Satz 5 (TVD-Kriterium von Harten [22]): Das Verfahren (3.73), (3.74) ist ein TVD-Verfahren falls die Bedingungen

$$(3.75) \quad C_{i+1/2}^n \geq 0, \quad D_{i+1/2}^n \geq 0$$

und

$$(3.76) \quad C_{i+1/2}^n + D_{i+1/2}^n \leq 1 \quad (\text{diskrete CFL-Bedingung})$$

für alle i und n erfüllt sind.

Beweis: Wir subtrahieren die Gleichungen (3.73) für i von der für $i+1$ und erhalten

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^n = (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n)(u_{i+1}^n - u_i^n) + C_{i+3/2}^n(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) + D_{i-1/2}^n(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Die Bedingungen (3.75) und (3.76) besagen gerade, daß die Koeffizienten alle nichtnegativ sind. Gehen wir zum Betrag auf der rechten und linken Seite über und wenden die Dreiecksungleichung an, so erhalten wir

$$|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n)|u_{i+1}^n - u_i^n| + C_{i+3/2}^n|u_{i+2}^n - u_{i+1}^n| + D_{i-1/2}^n|u_i^n - u_{i-1}^n|.$$

Summiert man nun auf über i , so kann man die verschiedenen Terme zusammenfassen. Nehmen wir nun an u ist periodisch oder hat einen kompakten Träger, so erhalten wir

$$\sum_i |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|,$$

d.h. das Verfahren ist ein TVD-Verfahren. □

Die dritte Bedingung (3.76) in diesem Satz spielt die Rolle einer Art diskreten CFL-Bedingung. Gelten für g etwa die Lipschitzbedingungen

$$(3.77) \quad \begin{aligned} |g(v, w) - g(\bar{v}, w)| &\leq \frac{L}{2} |v - \bar{v}| \\ |g(v, w) - g(v, \bar{w})| &\leq \frac{L}{2} |w - \bar{w}| \end{aligned}$$

so ist (3.66) erfüllt, falls

$$(3.78) \quad \lambda L \leq 1 .$$

Mit diesem TVD-Kriterium können wir nun leicht zeigen, daß monotone Verfahren die TVD-Eigenschaften besitzen.

Satz 6: Ein monotones Verfahren ist ein TVD-Verfahren, falls die CFL-ähnliche Bedingung (3.78) erfüllt ist.

Beweis: Wir müssen noch nachweisen, daß die ersten beiden Bedingungen (3.75) des TVD-Kriteriums von Harten erfüllt sind. Dies läßt sich aber leicht nachrechnen. Es gilt

$$C_{i+1/2}^n = -\lambda \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \geq 0$$

da g eine monoton fallende Funktion im zweiten Argument ist. Analog zeigt sich auch die Gültigkeit der zweiten Bedingung. \square

Satz 7: Ein Verfahren in Erhaltungsform welches stabil in der Totalvariation ist, ist auch stabil in der Maximum-Norm, d.h. die Näherungslösungen sind gleichmäßig beschränkt.

Beweis: Wir beweisen diesen Satz wieder für periodische Randbedingungen. Stabil in der Totalvariation bedeutet nach Definition 7, daß eine Konstante M_1 unabhängig von Δ oder n existiert, für die

$$TV u^n \leq M_1 TV u^0$$

für alle n gilt. Nach der Definition der Totalvariation (3.71) gilt

$$TV u^n = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| \geq |\max_i u_i^n - \min_i u_i^n|$$

und somit

$$(3.79) \quad |\max_i u_i^n - \min_i u_i^n| \leq TV u^n \leq M_1 TV u^0$$

Die Anwendung der Dreiecksgleichung liefert weiter

$$(3.80) \quad \max_i |u_i^n| \leq M_1 TV u^0 + \min_i |u_i^n|$$

Da für ein Verfahren in Erhaltungsform mit periodischen Randbedingungen

$$\sum_i u_i^n = \sum_i u_i^0$$

gilt, ergibt sich die Ungleichung

$$(3.81) \quad \min_i |u_i^n| \leq \left| \frac{1}{K} \sum_i u_i^n \right| = \frac{1}{K} \left| \sum_i u_i^0 \right| \leq \max_i |u_i^0|$$

wobei K die Anzahl der Gitterpunkte in einer Periode ist. Kombiniert mit (3.79) erhalten wir die Aussage unseres Satzes

$$\max_i |u_i^n| \leq M_1 TV u^0 + \max_i |u_i^0| \leq M_0 \max_i |u_i^0|$$

mit

$$M_0 := M_1 TV u^0 / \max_i |u_i^0| + 1. \quad \square$$

Satz 8: Ein monotones Verfahren in Erhaltungsform erfüllt eine diskrete Entropiebedingung.

Beweis: Wir wollen diesen Beweis hier nicht ausführen. Es läßt sich zeigen, daß eine diskrete Entropiebedingung (3.12) erfüllt ist, wobei Entropiefunktion und Entropiefluß gerade die Funktionen (2.36) von Krushkov sind (siehe [23], [57] oder [8]). □

Satz 9: Ein monotones Verfahren ist konvergent im $L^1_{lok}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0)$, falls die CFL-ähnliche Bedingung (3.78) erfüllt ist.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß die Voraussetzungen für den Konvergenzsatz (Satz 4) erfüllt sind. Dies haben wir jedoch in den vorhergehenden Sätzen schon gezeigt. Nach Satz 6 ist ein monotones Verfahren ein TVD-Verfahren und somit von gleichmäßig beschränkter Totalvariation und nach Satz 7 gleichmäßig beschränkt. Da es ein Verfahren in Erhaltungsform ist und nach Satz 8 eine diskrete Entropiebedingung erfüllt, sind alle Voraussetzungen zum Konvergenzsatz gültig. \square

Wir können die monotonen Verfahren auch noch etwas anders charakterisieren, als dies in Definition 6 geschehen ist (vergl. [23]). Dazu schreiben wir das Verfahren in Erhaltungsform (3.8) etwa um in

$$(3.82) \quad u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

mit

$$H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) = u_i^n - \lambda (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$$

Nun daraus sieht man sofort, daß die Funktion H wegen der Monotoniebedingungen für den numerischen Fluß monoton wachsend im ersten und dritten Argument ist. Setzen wir die Lipschitzbedingungen (3.77) und die diskrete CFL-Bedingung (3.78) voraus, so zeigt sich, daß H auch im zweiten Argument monoton wachsend ist. Benutzen wir die Monotoniebedingungen, so gilt nämlich

$$H(u, v, u) - H(u, \bar{v}, u) \geq \left(1 - \lambda \frac{|g(v, u) - g(\bar{v}, u)|}{|v - \bar{v}|} - \lambda \frac{|g(u, v) - g(u, \bar{v})|}{|v - \bar{v}|} \right) (v - \bar{v})$$

Unter der Bedingung (3.78) ist der Faktor vor $(v - \bar{v})$ immer positiv, so daß H monoton wachsend ist. Wir wollen dieses Ergebnis festhalten in der

Bemerkung 3: Für ein monotones Verfahren nach Definition 6 in der Form (3.82) ist H eine monoton wachsende Funktion in allen Argumenten, falls die diskrete CFL-Bedingung (3.78) erfüllt ist.

Mit der Klasse der monotonen Verfahren haben wir Verfahren, welche von der theoretischen Seite her alle gewünschten Eigenschaften besitzen. Von der praktischen Seite her sind alle diese Eigenschaften natürlich auch erwünscht. Die diskrete Entropiebedingung garantiert, daß nur physikalisch relevante Lösungen

approximiert werden, die TVD-Bedingung garantiert, daß an Stoßwellen keine Oszillationen oder Instabilitäten auftreten. Die ganze Situation wird jedoch getrübt durch die Genauigkeit dieser Verfahren. Wir sahen schon in den Ergebnissen für die Testprobleme 1 - 4 in Abschnitt 3.2, daß die Verfahren in machen Fällen eine starke Dämpfung, ein starkes Verschmieren der Unstetigkeiten oder der Verdünnungswelle aufweisen. Dies liegt natürlich mit daran, daß wir bisher nur Verfahren mit der Konsistenzordnung 1 betrachtet haben. Wenn wir von Konsistenzordnung reden, dann nehmen wir natürlich immer an, daß die Lösung genügend glatt ist. Für praktische Rechnungen sind Verfahren von mindestens zweiter Ordnung erforderlich. Der Diskretisierungsfehler der Verfahren erster Ordnung, den wir in Abschnitt 2 auch mittels der Hirtschen Stabilitätsanalyse untersucht haben, produziert eine zu große Dämpfung. Um diese aufzufangen, müssen wir das Gitter sehr fein machen. Für mehrdimensionale Probleme ist dies natürlich weder effizient noch wegen der beschränkten Speicherkapazität des Computers ein gangbarer Weg. Für die Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung müssen wir jedoch auf die Eigenschaft der Monotonie des numerischen Flusses im Sinne der Definition 5 verzichten. Dies besagt der nächste Satz.

Satz 10: Ein monotones Verfahren ist höchstens ein Verfahren erster Ordnung.

Beweis: Ein ausführlicher Beweis dieses Sachverhaltes findet sich in [24]. Wir führen hier einen ganz kurzen Beweis, welcher aber voraussetzt, daß der numerische Fluß stetig differenzierbar ist. Wegen der Konsistenzbedingung (3.5) des numerischen Flusses gilt

$$(3.83) \quad a(u) = g_v(u, u) + g_w(u, u)$$

wobei g_v, g_w die Ableitung nach dem ersten bzw. zweiten Argument bezeichnet. Für ein Verfahren zweiter Ordnung müssen die Terme $O(\Delta x)$ in (3.14) auf der rechten Seite verschwinden, d.h. $h(u) \equiv 0$. Dies führt uns auf die Bedingung

$$(3.84) \quad g_v(u, u) - g_w(u, u) = \lambda a(u)^2$$

Addieren und subtrahieren wir diese Gleichung voneinander, so erhalten wir

$$(3.85) \quad g_v(u, u) = \frac{1}{2} a(u)(1 + \lambda a(u)) \quad , \quad g_w(u, u) = \frac{1}{2} a(u)(1 - \lambda a(u))$$

Diese Gleichungen widersprechen jedoch den Monotoniebedingungen nach Definition 6.

Für ein Verfahren von zweiter Ordnung müssen wir somit auf die Monotonie des Flusses verzichten. Man möchte aber natürlich für ein solches Verfahren so viel günstige Eigenschaften wie möglich retten. Es zeigt sich, daß ein TVD-Verfahren ein Verfahren zweiter Ordnung mit gewissen Einschränkungen sein kann. Wir werden dies im folgenden noch etwas erläutern. Man muß jedoch bei den TVD-Verfahren etwas aufpassen, da sie nicht die Gültigkeit einer diskreten Entropiebedingung garantieren. Ein typisches Beispiel für ein TVD-Verfahren, welches unphysikalische Lösungen produzieren kann, ist das Verfahren von Roe. Die Approximation einer solchen Entropie-Prinzip verletzenden Lösung ist in Figur 3.7 in Abschnitt 3.2 gezeigt. Man muß das Verfahren von Roe geeignet modifizieren, um dies auszuschließen. \square

Bemerkung 4: Das Verfahren von Roe ist ein TVD-Verfahren.

Dies läßt sich leicht beweisen, indem man das TVD-Kriterium von Harten ausnutzt. Etwas allgemeiner gilt

Bemerkung 5: Ein Godunov-Typ Verfahren nach Definition 3 ist ein TVD-Verfahren.

Dies läßt sich folgendermaßen zeigen. Sei $u_i \leq u_{i+1}$. So gilt nach (3.31) und der Maximum-Minimum Bedingung

$$(3.86) \quad g(u_i, u_{i+1}) - f(u_i) = - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/\Delta t; u_i, u_{i+1}) dx + \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_i \\ \leq - \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_i + \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_i = 0$$

und analog

$$(3.87) \quad g(u_i, u_{i+1}) - f(u_{i+1}) \leq 0$$

Im Falle $u_i \geq u_{i+1}$ ergeben sich gerade die Ungleichheitszeichen nach der anderen Seite, d.h. die Bedingung (3.75) des TVD-Kriteriums ist erfüllt. Die diskrete CFL-Bedingung ergibt sich aus der CFL-Bedingung in Definition 2.

Die TVD-Bedingung von Harten läßt sich auch noch etwas anders formulieren. Dazu schreiben wir den numerischen Fluß in der Form

$$(3.88) \quad g(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} \left[f(u_i) + f(u_{i+1}) - Q_{i+1/2}(u_i - u_{i-1}) \right]$$

mit

$$(3.89) \quad Q_{i+1/2} = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1}) - 2g(u_i, u_{i+1})}{u_{i+1} - u_i}$$

Den Wert $Q_{i+1/2}$ nennt man den **numerischen Viskositätskoeffizienten**. Dieser Name erklärt sich daraus, daß das Verfahren in Erhaltungssform damit umgeschrieben werden kann in die **Viskositätsform**

$$(3.90) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} \left(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n) \right) + \frac{1}{2} \left[Q_{i+1/2}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - Q_{i-1/2}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right]$$

Dies entspricht einem Verfahren mit zentralen Differenzen zu dem der Q-Term addiert wird, der als eine Art Viskositätsterm aufgefaßt werden kann, d.h. einer Approximation eines Terms $\Delta x (Qu_x)_x$. Die Größe dieses Terms gibt natürlich auch Auskunft über die numerische Dämpfung des Verfahrens.

Die hier vorgestellten Verfahren besitzen die numerischen Viskositätskoeffizienten:

$$(3.91) \quad Q_{i+1/2}^{\text{God}} = \max_{(u-u_i)(u-u_{i+1}) \leq 0} \frac{f(u_i) + f(u_{i+1}) - 2f(u)}{u_{i+1} - u_i}$$

$$(3.92) \quad Q_{i+1/2}^{\text{HLL}} = a(u_{i+1})$$

$$(3.93) \quad Q_{i+1/2}^{\text{LF}} = \max \{ |a(u_i)|, |a(u_{i+1})| \}$$

$$(3.94) \quad Q_{i+1/2}^{\text{R}} = |s_{i+1/2}|$$

$$(3.95) \quad Q_{i+1/2}^{\text{EO}} = \frac{1}{u_{i+1} - u_i} \int_{u_i}^{u_{i+1}} |a(u)| du$$

$$(3.96) \quad Q_{i+1/2}^{\text{LW}} = \lambda (a_{i+1/2})^2$$

Satz 11 (TVD-Kriterium): Das Verfahren in Erhaltungsform (3.8) besitzt die TVD-Eigenschaft, falls der zugehörige Viskositätskoeffizient $Q_{i+1/2}$ die Ungleichungen

$$(3.97) \quad \lambda |s_{i+1/2}| \leq Q_{i+1/2} \leq 1, \quad s_{i+1/2} = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i}$$

erfüllt.

Beweis: Wegen

$$(3.98) \quad Q_{i+1/2} = C_{i+1/2} + D_{i+1/2}$$

folgt aus der rechten Ungleichung direkt die Gültigkeit der Schrittweitenbedingung (3.76) im TVD-Kriterium Satz 5.

Wegen

$$(3.99) \quad D_{i+1/2} - C_{i+1/2} = \lambda s_{i+1/2}$$

und (3.98) gilt

$$C_{i+1/2} = \frac{1}{2} (Q_{i+1/2} - \lambda s_{i+1/2}), \quad D_{i+1/2} = \frac{1}{2} (Q_{i+1/2} + \lambda s_{i+1/2}).$$

Damit folgt aus der rechten Ungleichung (3.97) sofort die Positivität von $C_{i+1/2}$ und $D_{i+1/2}$ und damit die Voraussetzungen von Satz 5. \square

Ein 3-Punkt-TVD-Verfahren ist ein Verfahren erster Ordnung. Denn ein 3-Punkt Verfahren, welches zweiter Ordnung ist, muß zwingend zentrale Differenzen zur Approximation der Raumableitungen benutzen. Ein solches Verfahren besitzt jedoch nicht die TVD-Eigenschaft. Es lassen sich jedoch 5-Punkt Verfahren konstruieren, welche einen lokalen Diskretisierungsfehler zweiter Ordnung - bis auf gewisse Ausnahmepunkte - besitzen. Wir werden dies im nächsten Kapitel näher betrachten.

Die wesentlichen Arbeiten für die Aussagen in diesem Abschnitt sind die schon zitierten von Harten [21], [22] und Harten, Hyman und Lax [23]. Weitere Überlegungen im Nachweis der Gültigkeit einer diskreten Entropiebedingung stammen von Osher [50] und von Osher und Chakravarthy [51]. Der Begriff des numerischen Viskositätskoeffizienten wurde ebenso von Harten [21] eingeführt. Tadmor beleuchtet in [67] dessen Zusammenhang mit der Entropiebedingung.

4.0 Verfahren höherer Ordnung

Verfahren höherer Ordnung lassen sich konstruieren ausgehend von den monotonen 3-Punkt Verfahren oder dem Verfahren von Roe, wie wir diese im Kapitel 3 vorgestellt haben. Diese Monotonieeigenschaft geht den Verfahren dabei natürlich verloren, aber es wird versucht, möglichst viele der günstigen Approximationseigenschaften zu erhalten. Wir denken dabei zum Beispiel an die TVD-Eigenschaft oder die Monotonieerhaltung. Die ersten Ideen zur Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung nach diesem Prinzip stammen von Boris und Book [2] (Flux-Corrected Transport (FCT) Algorithmus) und von van Leer [38]. Sie führten das Konzept der Flußlimiter ein. Später gelang es dann Sweby [66], eine Vereinheitlichung dieser Konzepte und eine allgemeine Beschreibung dieser Verfahren zu geben. Von van Leer wurde auch ein anderer wichtiger Zugang zur Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung initiiert. In [37] schlug er einen Zweischritt-Algorithmus zweiter Ordnung vor, welchen er **MUSCL** (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws)-Verfahren nannte. Verfahren, welche auf diesen Zugang aufbauen, nennt man deshalb üblicherweise **MUSCL-Typ Verfahren**. Wir wollen diese Methode im ersten Abschnitt ausführlich beschreiben, weil sie nach unserer Meinung die einfachste und einleuchtenste Methode ist. Danach schildern wir kurz das Wesentliche bei der Konstruktion von **Flußlimiter Verfahren**. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels faßt dann verschiedene **andere Ansätze** zusammen.

Das erste Verfahren zweiter Ordnung für eine hyperbolische Erhaltungsgleichung wurde von Lax und Wendroff [35] angegeben. Sie gingen aus von der Taylorentwicklung

$$(4.1) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t) + O(\Delta t^3) .$$

Die Zeitableitungen werden nun durch Raumableitungen ersetzt mittels der Beziehungen

$$(4.2) \quad u_{tt} = (-f(u)_x)_t = -(f(u)_t)_x = (a(u)f(u)_x)_x ,$$

welche man durch Anwendung der Erhaltungsgleichung erhält. Wir hatten dies schon in Kapitel 1 in (1.71) ausgenutzt. Man erhält aus (4.1) somit die Entwicklung

$$(4.3) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t f(u(x, t))_x + \frac{\Delta t^2}{2} [a(u(x, t)) f(u(x, t))_x]_x + O(\Delta t^3) .$$

Die räumlichen Ableitungen in (4.3) werden nun durch zentrale Differenzen ersetzt und man erhält das **Verfahren von Lax-Wendroff**

$$(4.4) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i-1}^n) - f(u_{i+1}^n)) + \frac{\lambda^2}{2} \left[a_{i+1/2}^n (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) - a_{i-1/2}^n (f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)) \right]$$

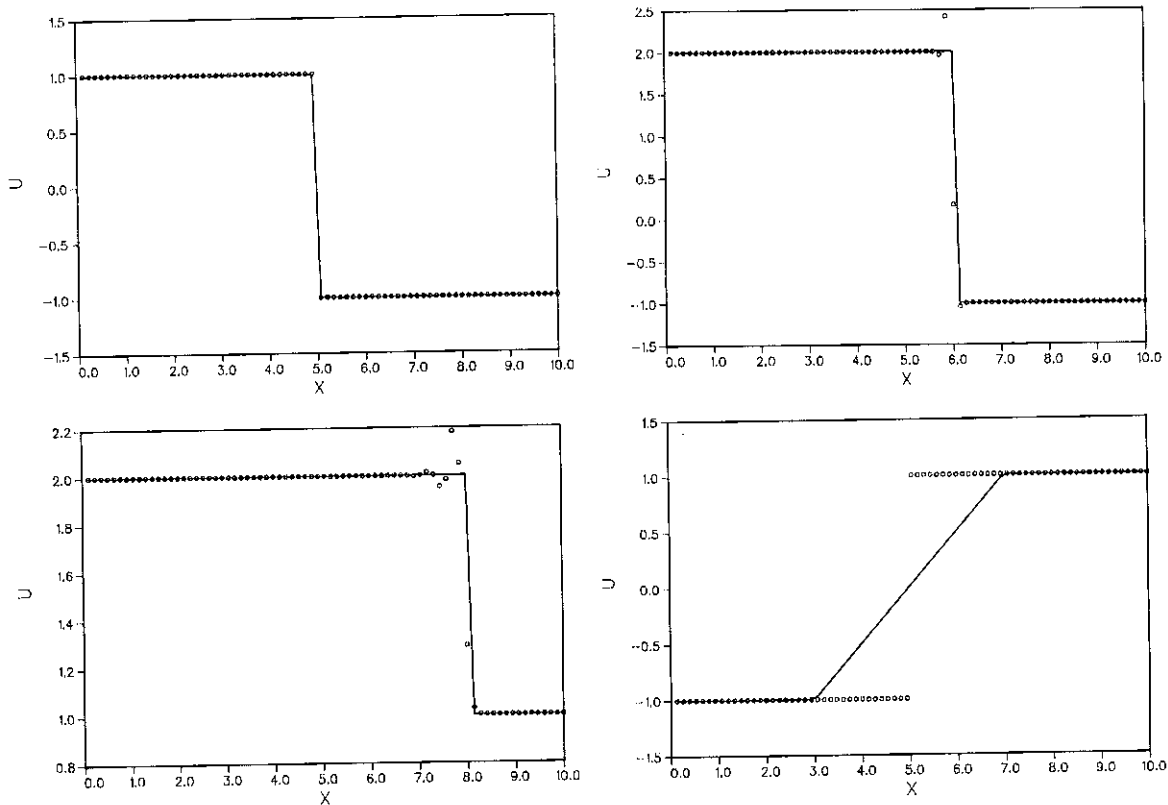
mit

$$a_{i+1/2}^n = a((u_{i+1} + u_i)/2) \quad .$$

Wie man sieht ist dies ein Verfahren in Erhaltungsform und läßt sich in der Form (3.8) schreiben mit dem numerischen Fluß

$$(4.5) \quad g_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (f(u_{i+1}^n) + f(u_i^n)) - \frac{\lambda}{2} a_{i+1/2}^n (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) \quad .$$

Dieses Verfahren ist ein sehr einfaches und gutes Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit solange man glatte Lösungen approximieren möchte. An starken Gradienten oder Unstetigkeiten hat das Lax-Wendroff Verfahren Schwierigkeiten. Zur Approximation solcher Lösungen sind die zentralen Differenzen nicht



Figur 4.1 Verfahren von Lax-Wendroff

geeignet. Wir haben das Lax-Wendroff Verfahren auf die vier Testprobleme des Abschnittes 3.2 (Seite 76 - 77) angewandt. Man sieht in Figur 4.1, daß es beim Beispiel 4 die falsche Lösung approximiert analog zum Verfahren von Roe. An den Unstetigkeiten ergeben sich Oszillationen. Diese können auch dazu führen, daß eine schwache Lösung approximiert wird, welche nicht der Entropiebedingung genügt ([23]).

Von Richtmyer (siehe [53]) wurde eine **Zweischritt-Version dieses Lax-Wendroff Verfahrens** angegeben. Statt von der Taylorentwicklung (4.1) geht man hier von den Taylorentwicklungen

$$(4.6) \quad u(x, t + \Delta t/2) = u(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t u_t(x, t) + O(\Delta t^2) ,$$

$$(4.7) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t + \Delta t/2) + O(\Delta t^3) .$$

Wie schon in (4.1) können wir die Zeitableitungen durch Raumableitungen ersetzen:

$$(4.8) \quad u(x, t + \Delta t/2) = u(x, t) + \frac{\Delta t}{2} f(u(x, t))_x + O(\Delta t^2) ,$$

$$(4.9) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t f(u(x, t + \Delta t/2))_x + O(\Delta t^3) .$$

Wie beim Einschritt Lax-Wendroff Verfahren werden nun die Raumableitungen in den Taylorentwicklungen durch zentrale Differenzenquotienten ersetzt. Man erhält das **Zweischritt Lax-Wendroff-Verfahren**

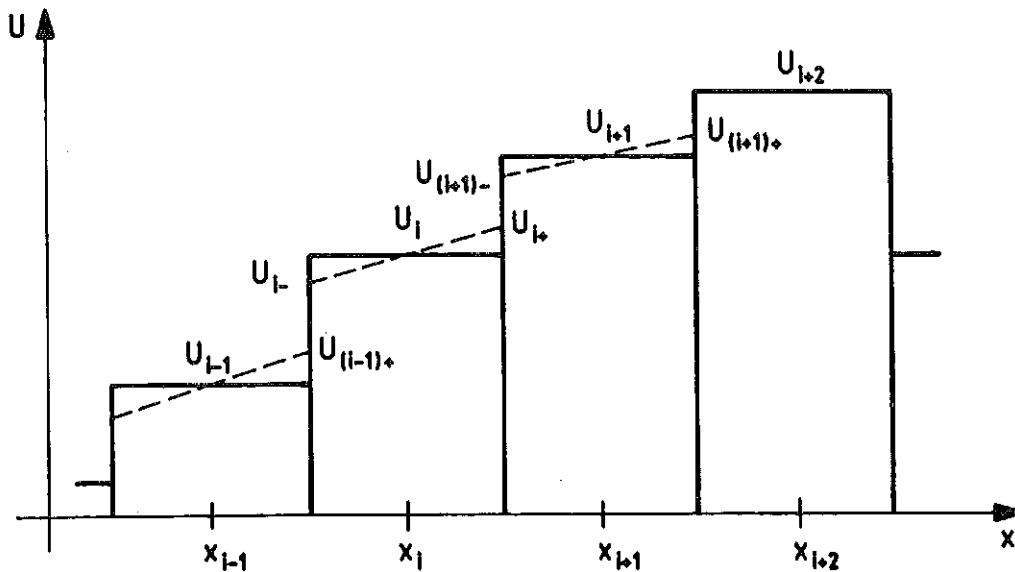
$$(4.10) \quad u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) ,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (f(u_{i+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{i-1/2}^{n+1/2})) .$$

Dieses Verfahren hat ganz ähnliche Eigenschaften wie das Einschritt-Lax-Wendroff Verfahren. Für lineare Probleme sind sie insbesondere identisch. Vorteilhaft ist es bei der Anwendung auf Systeme von Erhaltungsgleichungen. Während beim Lax-Wendroff Verfahren (4.4) die Jakobi-Matrix des Flusses berechnet und mit der Flußdifferenz multipliziert werden muß, wird dies bei der Zweischritt-Formulierung umgangen, d.h. für Systeme ist diese Formulierung in Bezug auf Rechenzeit günstiger.

4.1 MUSCL-Typ Verfahren

Die zentrale Idee von van Leer in [37] ist, daß er Godunovs Annahme der stückweise konstanten Näherungslösungen ersetzt durch die Annahme, daß die Näherungslösungen innerhalb einer Gitterzelle linear sind. Wir haben diese Situa-



Figur 4.2 Stückweise lineare Approximation

tion in Figur 4.2 festgehalten. Zum Zeitpunkt t_n haben wir also eine Approximation in der Form

$$(4.11) \quad u^n(x) = u_i^n + (x - x_i) s_i^n, \quad x \in I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

wobei s_i^n die Steigung im i -ten Gitterintervall bezeichnet. Diese Steigungen definieren Randwerte rechts (+) und links (-)

$$(4.12) \quad u_{i\pm}^n = u_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} s_i^n$$

an den Gitterzellen. Wir bekommen nun eine genauere Approximation der Flüsse zwischen den einzelnen Gitterzellen, wenn wir diese Randwerte in den numerischen Fluß einsetzen. Wir wollen jedoch nicht nur räumlich eine bessere Approximation erzielen, sondern auch zeitlich. Dies läßt sich erreichen, wenn wir zunächst einen halben Zeitschritt vorausrechnen. Dabei betrachten wir nur die

Änderung innerhalb einer Gitterzelle, d.h. die Änderung der Randwerte rechts und links. Da wir innerhalb einer Gitterzelle eine stetige Verteilung der Näherung vorliegen haben, können wir diese Änderungen in einem halben Zeitschritt durch eine Taylorentwicklung (4.8) approximieren und erhalten

$$(4.13) \quad u_{i\pm}^{n+1/2} = u_{i\pm}^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+}^n) - f(u_{i-}^n)) .$$

Wir werden darauf noch zurückkommen. Diese Randwerte gehen nun ein in die Berechnung des numerischen Flusses zwischen den einzelnen Gitterzellen. Wir erhalten Näherungswerte auf dem nächsten Zeitlevel durch das Verfahren in Erhaltungsform

$$(4.14) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (h_{i+1/2}^{n+1/2} - h_{i-1/2}^{n+1/2})$$

mit

$$h_{i+1/2}^{n+1/2} = h(u_{i+}^{n+1/2}, u_{(i+1)-}^{n+1/2}), \quad h_{i-1/2}^{n+1/2} = h(u_{(i-1)+}^{n+1/2}, u_{i-}^{n+1/2}) .$$

Dabei ist h der numerische Fluß eines monotonen Verfahrens aus Kapitel 3. Wir berechnen wie beim Verfahren erster Ordnung unsere Näherungswerte nach dem Verfahren in Erhaltungsform (4.14); der Fluß hat aber jetzt hier etwas andere Argumente. Der Mehraufwand des Verfahrens zweiter Ordnung ist die Berechnung dieser modifizierten Argumente, welche durch die Formeln (4.12), (4.13) gegeben ist.

Dieses Verfahren können wir als ein **Zweitschritt-Verfahren** interpretieren. Die Berechnung der Steigungen in den Gitterintervallen und Transport um ein halben Zeitschritt können wir als ersten Schritt und als Approximation der ersten Gleichung (4.8) in der Zweischritt-Taylorentwicklung ansehen, (4.14) ist dann der zweite Schritt und eine Approximation nach Taylorentwicklung (4.9).

Wir wollen uns nun anschauen, welchen Bedingungen die Steigung in den Gitterintervallen genügen müssen, daß das Verfahren (4.2) - (4.4) sowohl zweiter Ordnung ist, als auch Eigenschaften (TVD, Monotonie erhaltend) des Verfahrens zweiter Ordnung erhält. Fangen wir an mit der zweiten Ordnung. Es ist klar, daß die Steigung im Gitterintervall eine geeignete Approximation der Ableitung der Lösung sein muß, d.h.

$$(4.15) \quad s_i^n = u_x(x_i, t_n) + O(\Delta)$$

wobei Δ wie üblich unser Diskretisierungsparameter bezeichnet (z.B. $\Delta = \Delta x$ oder $\Delta = \Delta t$, $\lambda = \Delta t/\Delta x = \text{konstant}$). Wir wollen dies noch etwas genauer fassen. Ein **notwendiges Kriterium für die Konsistenzordnung 2** ist, daß der numerische Fluß des Zweischritt-Verfahrens eine Approximation zweiter Ordnung des Flusses des Lax-Wendroff Verfahrens ist, d.h.

$$(4.16) \quad h_{i+1/2}^{n+1/2} - g_{i+1/2}^n = O(\Delta^2)$$

Dies ist auch hinreichend, wenn die Terme in $O(\Delta^2)$ stetig sind. Wir nehmen bei dieser Betrachtung natürlich an, daß die Lösung genügend oft stetig differenzierbar ist. Wie üblich steht Δ wieder für den Diskretisierungsparameter Δx oder Δt , wobei $\lambda = \Delta t/\Delta x$ als konstant vorausgesetzt wird.

Es ist leicht zu sehen, daß unser Zweischritt-Verfahren (4.12) - (4.14) zweiter Ordnung in der Zeitapproximation ist, (4.13) ist eine direkte Approximation der Taylorentwicklung (4.8). Damit können wir uns das Leben ein bißchen leichter machen. Zusätzlich zweiter Ordnung im Raum ist das MUSCL-Typ Verfahren dann, falls

$$(4.17) \quad h(u_{i+}^n, u_{(i+1)-}^n) - \frac{1}{2}(f(u_{i+1}^n) + f(u_i^n)) = O(\Delta^2)$$

und die $O(\Delta^2)$ -Terme stetig sind. Aus der Bedingung (4.17) können wir nun Bedingungen (4.15) an die Steigungen S noch etwas genauer formulieren.

Satz 1: Eine notwendige Bedingung für die zweite Ordnung des MUSCL-Typ Verfahrens (4.12) - (4.14) ist

$$(4.18) \quad s_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad , \quad s_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Die Bedingung (4.18) ist **hinreichend**, falls die $O(\Delta x)$ Terme stetig sind.

Beweis: Wir schreiben die linke Seite von (4.17) in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h(u_{i+}, u_{(i+1)-}) - f(u_{i+})) + \frac{1}{2} (h(u_{i+}, u_{(i+1)-}) - f(u_{(i+1)-})) \\ & + \frac{1}{2} (f(u_{i+}) - f(u_{i+1})) + \frac{1}{2} (f(u_{(i+1)-}) - f(u_i)) \end{aligned}$$

Wegen der Lipschitzstetigkeit von h bzw. f können alle diese vier Ausdrücke als Produkte der jeweiligen Lipschitzkonstante und den Ausdrücken $u_{(i+1)} - u_{i+1}$, $u_{i+1} - u_{(i+1)}$, $u_i - u_{i+1}$ und $u_{(i+1)} - u_i$ geschrieben werden. Wir setzen nun die Definitionen ein. Es zeigt sich, daß Bedingung (4.17) genau dann erfüllt ist, falls

$$u_{i+1} - u_i - \Delta x s_i = O(\Delta x^2)$$

und

$$u_{i+1} - u_i - \Delta x s_{i+1} = O(\Delta x^2)$$

gilt, d.h. falls (4.18) gilt. □

Eine geeignete Steigung muß sich somit nach (4.15) und (4.18) lokal als einen gewichteten Mittelwert des rechts- und linksseitigen Differenzenquotienten

$$(4.19) \quad s_i^n = \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + (1 - \beta) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

mit $\beta \in [0, 1]$ schreiben lassen.

Wir wollen uns nun um die Frage kümmern: Können wir eine Formel für die Berechnung der Steigungen so angeben, daß das MUSCL-Typ Verfahren sowohl die Bedingungen für die zweite Ordnung als auch die TVD-Eigenschaft erfüllt? Dazu betrachten wir das MUSCL-Typ Verfahren (4.12) - (4.14) zunächst angewandt auf die lineare Gleichung

$$(4.20) \quad u_t + a u_x = 0$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Für diese Gleichung besitzen alle monotonen Verfahren und auch das Verfahren von Roe den numerischen Fluß

$$h(u_i, u_{i+1}) = a u_i,$$

der nach Formel (3.66) gerade identisch ist zum Fluß des CIR-Verfahrens.

Wir können (4.14) somit in der Form

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a (u_{i+}^{n+1/2} - u_{(i-1)+}^{n+1/2})$$

schreiben. Setzen wir nun die Definitionen (4.12) und (4.13) in diese Gleichung ein, so erhalten wir weiter

$$(4.21) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a \left[u_i - u_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} (1 - \lambda a) (s_i^n - s_{i-1}^n) \right]$$

Eine mögliche Wahl der Koeffizienten in der Darstellung eines Verfahrens in Erhaltungsform nach Harten (3.73) ist somit

$$C_{i+1/2}^n = 0$$

$$D_{i-1/2}^n = \lambda a \left[1 + \frac{\Delta x}{2} (1 - \lambda a) \frac{s_i - s_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} \right]$$

Eine hinreichende Bedingung, daß das Verfahren (4.21) die TVD-Bedingung von Harten erfüllt ($D_{i-1/2} \geq 0$) ist

$$(4.22) \quad 0 \leq \left\{ \frac{\Delta x s_i^n}{u_i^n - u_{i-1}^n}, \frac{\Delta x s_i^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right\} \leq 2$$

Die Gleichung (4.20) für $a < 0$ führt mit der Bedingung $C_{i-1/2} \geq 0$ auf dasselbe Ergebnis. Die diskrete CFL-Bedingung (3.76) ist wieder automatisch erfüllt, falls das Schrittweitenverhältnis genügend klein ist.

Mit (4.18) und (4.22) haben wir somit zwei Bedingungen abgeleitet, welche eine geeignete Steigungsberechnung erfüllen sollte. Die Frage ist: gibt es eine solche? Die Antwort ist: es gibt sogar sehr viele. Die einfachste ist die folgende

$$(4.23) \quad s_i = \frac{1}{\Delta x} \text{minmod} (u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1}),$$

wobei die minmod-Funktion durch die Vorschrift

$$(4.24) \quad \text{minmod} (a, b) = \begin{cases} a & \text{für } |a| < |b|, ab > 0 \\ b & \text{für } |a| > |b|, ab > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird.

Bevor wir uns noch weitere solche Steigungen anschauen, wollen wir uns die Bedingungen (4.18) und (4.22) noch etwas geometrisch klar machen. Dazu führen wir eine Umschaltfunktion ϕ ein mit

$$(4.25) \quad \phi_i = \phi(r_i) \quad , \quad r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}$$

Wir wollen hier und im folgenden den oberen Zeitindex wieder unterdrücken. Die Steigung s_i schreiben wir nun als rechtsseitigen Differenzenquotienten multipliziert mit der Umschaltfunktion ϕ_i :

$$(4.26) \quad s_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \phi(r_i) \quad .$$

Die notwendige zweite Ordnung Bedingung (4.19) können wir nun umschreiben in eine Bedingung an ϕ ; $\phi(r)$ muß eine Darstellung

$$(4.27) \quad \phi(r) = \alpha + (1 - \alpha)r \quad , \quad \alpha \in [0, 1]$$

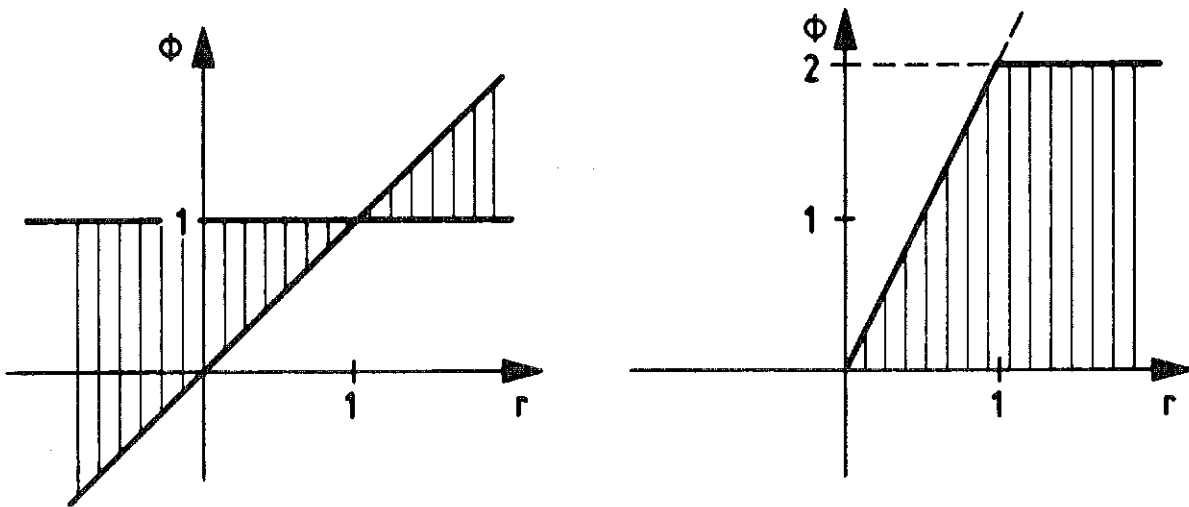
besitzen. Wir können uns dies in der (ϕ, r) -Ebene veranschaulichen. Verläuft der Graph von ϕ in dem in Figur 4.3 schraffierten Gebiet, so läßt sich die Bedingung (4.27) erfüllen (d.h. es läßt sich ein geeignetes α finden).

Die TVD-Bedingung (4.22) läßt sich auch leicht übersetzen in eine Bedingung für die Umschaltfunktion. Es ergibt sich die Bedingung

$$(4.28) \quad 0 \leq \frac{\phi(r)}{r} \quad , \quad \phi(r) \leq 2 \quad .$$

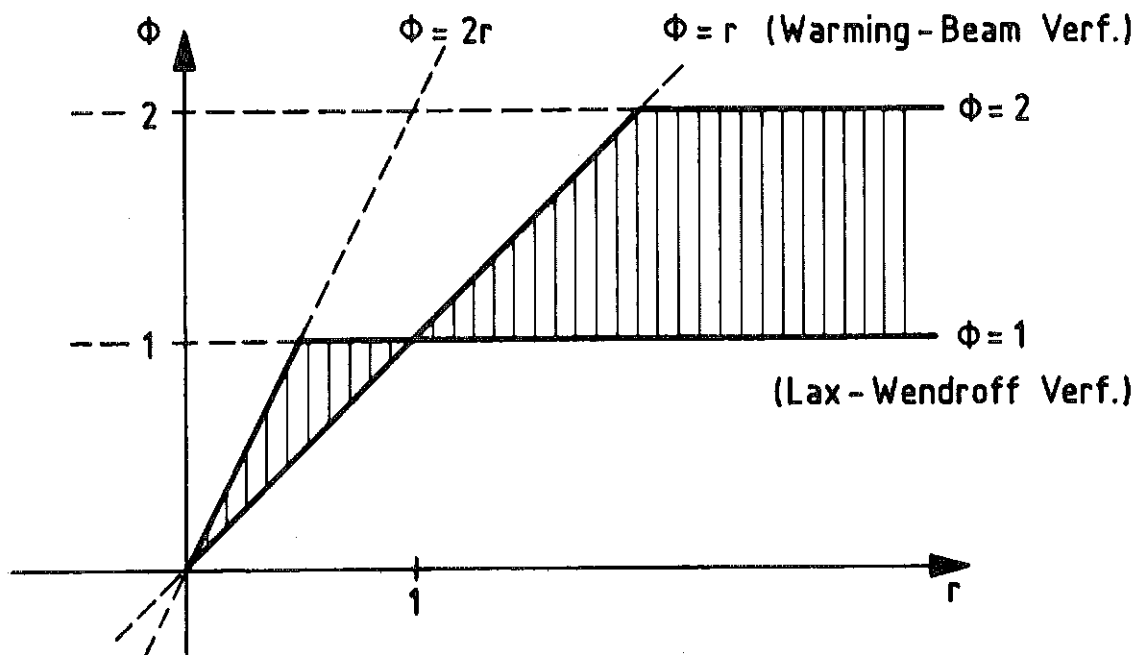
Diese Bedingung ist als TVD-Gebiet in Figur 4.3 skizziert.

Wir fassen nun die Bedingung (4.27) und (4.28) zusammen und erhalten das in Figur 4.4 skizzierte Gebiet. Zwei Grenzen dieses Gebiets sind $\phi(r) \equiv 1$ und $\phi(r) \equiv r$. Für $\phi(r) \equiv 1$ führt das Verfahren (4.21) gerade auf das Lax-Wendroff Verfahren (4.4). Für $\phi(r) \equiv r$ ist es ein Verfahren zweiter Ordnung mit linksseitigen Differenzen, welches von Warming und Beam in [68] vorgeschlagen wurde. Das TVD-Gebiet liegt ganz im oberen rechten Quadranten und wird weiter begrenzt durch die x-Achse und die Geraden $\phi = 2r$ und $\phi = 2$. Sowohl das Lax-Wendroff Verfahren als auch das Warming und Beam Verfahren verlaufen nur teilweise im TVD-Gebiet.



Figur 4.3 Zweite Ordnung-Gebiet

TVD-Gebiet



Figur 4.4 Zweite Ordnung - TVD-Gebiet

Alle Funktionen $\phi = \phi(r)$, welche im Zweite-Ordnung-TVD Gebiet verlaufen sind geeignet mittels (4.26) eine Steigung für ein TVD-MUSCL-Typ Verfahren zu definieren. Etwa die Steigung (4.23) können wir durch die Umschaltfunktion

$$(4.29) \quad \phi_1(r) = \text{minmod}(1, r) = \max(0, \min(r, 1))$$

Diese Funktion ist gerade die untere Begrenzung des TVD-Gebietes in Figur 4.4. Die obere Begrenzung, d.h. die Funktion, welche zu gegebenen r den größten Funktionswert besitzt und damit die größte Steigerung berechnet, ist

$$(4.30) \quad \phi_2(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)) .$$

Diese beiden Umschaltfunktionen sind auch die obere und untere Grenze von

$$(4.31) \quad \phi_k(r) = \max(0, \min(kr, 1), \min(r, k))$$

mit $1 \leq k \leq 2$. Diese ganze Schar von Steigungsberechnungen geht auf Sweby [66] zurück.

Es wurden noch eine ganze Reihe anderer geeigneter Steigungsberechnungen oder Umschaltfunktionen angegeben. So wurde von van Leer [37] eine in r stetige differenzierbare Umschaltfunktion vorgeschlagen:

$$(4.32) \quad \phi_{VL} = \frac{|r| + r}{1 + |r|} .$$

Ebenso von van Leer [37] stammt auch der Vorschlag

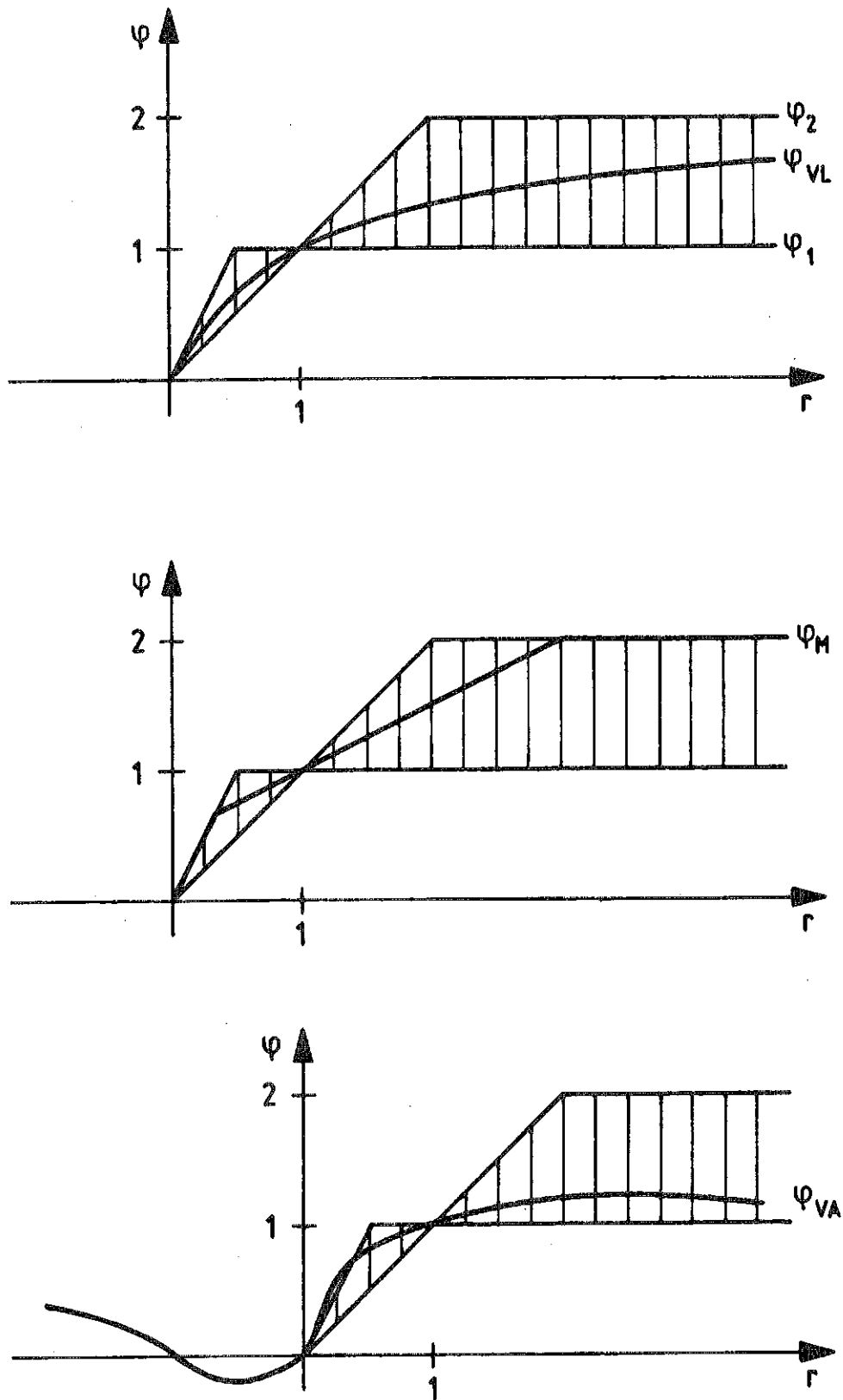
$$(4.33) \quad \phi_M = \minmod\left(\frac{1+r}{2}, 2 \minmod(r, 1)\right) ,$$

welche monotonisierte zentrale Steigungsberechnung genannt wird, da die zugehörige Steigung nach (4.26) die Form

$$(4.34) \quad (s_M)_i = \frac{1}{\Delta x} \minmod\left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2}, 2 \minmod(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1})\right)$$

hat.

Wir haben diese Umschaltfunktionen zusammen mit den zugehörigen Steigungsberechnungen in Tabelle 4.1 zusammen aufgeschrieben. Zusätzlich sind dort noch Steigungen aufgelistet, welche von Osher und Chakravarthy [51] und von van Albada (siehe [36]) vorgeschlagen wurden. Bis auf die letzt genannte erfüllen alle sowohl die zweite Ordnungs-Bedingung, als auch die TVD-Bedingung. Diese Tatsache ist in Figur 4.5 veranschaulicht, welche zeigt, daß der Graph der Umschaltfunktionen ganz im Zweite-Ordnung-TVD-Gebiet liegt.



Figur 4.5 Graph der Umschaltfunktionen φ_1 , φ_2 , φ_M , φ_{VL} und φ_{VA} und Zweite Ordnung-TVD-Gebiet

Umschaltfunktion	Steigung
$r = b/a$	$a = u_{j+1} - u_j, b = u_j - u_{j-1}$
$\phi_1(r) = \text{minmod}(1, r)$	$s_1(a, b) = 1/\Delta x \text{minmod}(a, b)$
$\phi_k(r) = \max\{0, \min\{kr, 1\}, \min\{r, k\}\}$ $1 \leq k \leq 2$	$s_k(a, b) = \text{sign}(a)/\Delta x \max\{ \text{minmod}(ka, b) , \text{minmod}(a, kb) \}$ $1 \leq k \leq 2$
$\phi_{CO}(r) = \max\{0, \min\{r, k\}\}$ $1 \leq k \leq 2$	$s_{CO}(a, b) = 1/\Delta x \text{minmod}(ka, b)$ $1 \leq k \leq 2$
$\phi_{VL}(r) = r + r/(1 + r)$	$s_{VL}(a, b) = 1/\Delta x \begin{cases} 2ab/(a+b) & \text{für } ab > 0 \\ 0 & \text{für } ab \leq 0 \end{cases}$
$\phi_M(r) = \text{minmod}(1 + r/2, 2 \text{minmod}(r, 1))$	$s_M(a, b) = 1/\Delta x \text{minmod}((a+b)/2, 2 \text{minmod}(a, b))$
$\phi_{VA}(r) = (r + c^2)(1 + r)/(1 + r^2 + 2c^2)$, $c^2 = 0 (\Delta x)$	$s_{VA}(a, b) = 1/\Delta x (ab + c^2)(a + b)/(a^2 + b^2 + 2c^2)$, $c^2 = 0 (\Delta x^3)$

Tabelle 4.1 Umschaltfunktionen, Steigungsberechnungen

Die Kriterien für die Steigungen haben wir der Einfachheit halber für die lineare Gleichung (4.20) abgeleitet. Es zeigt sich, daß eine Ableitung für nichtlineare Gleichungen sehr aufwendig und sehr verschachtelt wird. Die obere Grenze in (4.22) muß verkleinert werden. Durch die öftere Anwendung der Dreiecksungleichung fällt diese Schranke sehr pessimistisch aus - nahe Eins (siehe [44]). In den praktischen Berechnungen zeigt es sich ebenso, daß durchaus die Schranke Zwei in vielen Fällen reduziert werden muß. Besonders bei starken Gradienten kann etwa s_2 dafür sorgen, daß jeder monotone Übergang in eine Unstetigkeit gedrückt wird. Man erhält etwa die physikalisch unsinnigen Verdünnungsstöße, das heißt eine diskrete Entropiebedingung ist sicherlich nicht mehr erfüllt. Es zeigt sich, daß im nichtlinearen Fall die Übergangsfunktionen ϕ_{VL} , ϕ_{VA} und ϕ_k oder ϕ_{CO} mit $1 \leq k \leq 1.5$ geeignete Steigungen erzeugen. Dabei kann das k für ϕ_k oder ϕ_{CO} abhängig von der Stärke der Stoßwelle gewählt werden. Bei schwachen Unstetigkeiten kann ohne weiteres auch $k = 2$ gewählt werden. Bei reinen Überschallproblemen treten im allgemeinen keine Probleme auf; der kritische Fall sind starke Gradienten in der Nähe von Schallpunkten.

Wie wir in Abschnitt 3.4 schon geschrieben haben, können die TVD-Verfahren zweiter Ordnung im Sinne des lokalen Diskretisierungsfehlers in glatten Bereichen einer Strömung sein, aber sind höchstens Verfahren erster Ordnung an Punkten mit einem lokalen Extremum.

Satz 2: Ein TVD-Verfahren besitzt an Punkten mit lokalen Extrema höchstens die Konsistenzordnung 1.

Beweis: Der Beweis dieses Sachverhalts findet man bei Osher [50] (siehe auch Harten [21]).

Eine zweite Ordnung TVD-Verfahren ist somit notwendig an diesen isolierten Punkten ein erste Ordnung Verfahren. Dies bedeutet, daß Spitzen etwas stärker gedämpft werden und abflachen. Man nennt diese Eigenschaft das **Clipping-Phänomen**. Wir werden darüber in Kapitel 6 nochmals eingehend diskutieren und auch einen Vergleich der verschiedenen Steigungsberechnungen anhand numerischer Ergebnisse durchführen. Die Steigungsberechnung s_{VA} aus Tabelle 4.1 versucht dieses Clipping zu vermeiden, indem auch an lokalen Extremwerten eine Steigung ungleich Null auftreten kann, s_{VA} führt somit nicht auf ein TVD-Verfahren, wie auch Figur 4.5 zeigt.

Eine wichtige Bedingung an die Steigung, welche Symmetrien erhält ist, daß positive und negative Gradienten auf gleiche Art und Weise approximiert werden: Dies garantiert die Bedingung

$$(4.35) \quad s(a, b) = s(b, a) .$$

Formuliert in dem Umschaltfunktionen-Kalkül haben wir die Bedingung

$$(4.36) \quad \frac{\phi(r)}{r} = \phi\left(\frac{1}{r}\right) .$$

Die numerischen Resultate in Kapitel 6 zeigen die Bedeutung dieser Bedingung.

Wir haben uns hier auf Verfahren zweiter Ordnung beschränkt, welche bislang in den praktischen Anwendungen die entscheidende Rolle spielen. Dies liegt vor allem daran, daß der Rechenaufwand von Verfahren höher als zweiter Ordnung deutlich größer ist. Wir werden aber ein Konzept zur Konstruktion solcher Verfahren in Kapitel 7 vorstellen. Eine Übersicht über die verschiedenen Steigungs-

berechnungen findet sich in [45]. In Kapitel 5 und 6 werden wir Eigenschaften der verschiedenen Steigungen anhand numerischer Resultate noch diskutieren. Einige theoretische Aussagen zur Konvergenz finden sich in [49].

4.2 Flußlimiter-Methode

Ein anderer Ansatz ein Verfahren höherer Ordnung zu erhalten ist die Flußlimiter-Methode. Sie geht zurück auf die Arbeiten von Boris und Book [2] und van Leer [38]. Wir wollen als erstes den FCT (Flux-Corrected Transport)-Algorithmus von Boris und Book beschreiben (siehe auch [1]).

Ausgangspunkt sind zwei Verfahren: ein monotones Upwind Verfahren

$$(4.37) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n)$$

und ein klassisches Verfahren mindestens zweiter Ordnung

$$(4.38) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$$

(z.B. Lax-Wendroff Verfahren).

Der FCT-Algorithmus besteht dann aus den folgenden Schritten

1. Berechne den monotonen numerischen Fluß

$$h_{i+1/2}^n$$

und die Lösung erster Ordnung \bar{u}_i^{n+1} nach (4.37)

2. Berechne den Fluß höherer Ordnung

$$g_{i+1/2}^n$$

3. Berechne den antidiffusiven Fluß

$$e_{i+1/2}^n := g_{i+1/2}^n - h_{i+1/2}^n$$

4. Begrenze diesen Fluß in der Art und Weise, daß keine neuen Extrema entstehen

$$d_{i+1/2}^n := \phi_{i+1/2}^n e_{i+1/2}^n ,$$

wobei ϕ als Flußlimiterfunktion bezeichnet wird.

5. Berechne

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} - \lambda (d_{i+1/2}^n - d_{i-1/2}^n) .$$

Der kritische Schritt in diesem Algorithmus ist natürlich Schritt 4. Setzen wir die Limiterfunktion konstant 1, so erhalten wir eine Näherungslösung mit den typischen Oszillationen vor und hinter Unstetigkeiten. Die Limiterfunktion ϕ die muß dafür sorgen, daß das Verfahren etwa Monotonie erhaltend oder auch TVD ist. Geeignete Limiterfunktionen für den FCT-Algorithmus wurden von Boris und Book [1] und von Zalesak [75] angegeben. Zalesak gab in [75] auch eine Erweiterung auf zwei Raumdimensionen an.

Wir wollen im folgenden ein etwas anderes Schema eines Verfahrens mit einer Flußlimiterfunktion angeben. Es kürzt die Schritte 1 bis 5 in dem FCT-Algorithmus ab, indem direkt der antidiffusive Fluß im Schritt 3 ausgerechnet und eine Limiterfunktion eingesetzt wird. Damit wird das ganze Schema in der Struktur etwas übersichtlicher und wir können das TVD-Kriterium von Harten anwenden, um geeignete Limiterfunktionen zu erhalten. Im wesentlichen folgen wir hier der Arbeit von Sweby [66], dem es zuerst gelang verschiedene dieser Flußlimiter-Formulierungen unter einen Hut zu bekommen.

Wir gehen aus von dem Lax-Wendroff Verfahren (4.4), welches ein klassisches Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit ist. Nach (4.5) lautet der numerische Fluß

$$g_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (f(u_{i+1}^n) + f(u_i^n)) - \frac{\lambda}{2} a_{i+1/2}^n (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) .$$

Wir ersetzen nun die zentrale Differenzenbildung im Raum, d.h. den ersten Term, durch einen monotonen Fluß. Damit ist das Verfahren im Raum natürlich nur

noch erster Ordnung. Um die zweite Ordnung zu erhalten, müssen wir noch einen Korrekturterm einfügen.

Wir können den Fluß des Lax-Wendroff Verfahrens aufspalten in

$$(4.39) \quad g_{i+1/2} = h_{i+1/2} - \frac{\lambda}{2} a_{i+1/2} (f(u_{i+1}) - f(u_i)) + \frac{1}{2} (f(u_{i+1}) - h_{i+1/2}) - \frac{1}{2} (h_{i+1/2} - f(u_i))$$

Diesen Fluß interpretieren wir nun als Summe eines monotonen Flusses und eines sogenannten antidiffusiven Flusses, welcher uns die zweite Ordnung beschert,

$$(4.40) \quad g_{i+1/2} = h_{i+1/2} + e_{i+1/2}$$

Der antidiffusive Fluß läßt sich schreiben in der Form

$$(4.41) \quad e_{i+1/2} = \frac{1}{2} (1 - \lambda a_{i+1/2}) \Delta f_{i+1/2}^+ - \frac{1}{2} (1 - \lambda a_{i+1/2}) \Delta f_{i+1/2}^-$$

mit den Flußdifferenzen

$$\Delta f_{i+1/2}^+ = f(u_{i+1}) - g_{i+1/2}, \quad \Delta f_{i+1/2}^- = g_{i+1/2} - f(u_i)$$

Der erste Teil von $e_{i+1/2}$ in (4.41) können wir als den antidiffusiven Fluß nach rechts, den zweiten Teil als den nach links interpretieren. Diese antidiffusiven Flüsse limitieren wir nun mittels einer Limiterfunktion ϕ :

$$(4.42) \quad e_{i+1/2} = \phi_{i+1/2}^+ a_{i+1/2} \Delta f_{i+1/2}^+ - \phi_{i+1/2}^- a_{i+1/2} \Delta f_{i+1/2}^-, \quad a_{i+1/2} := \frac{1}{2} (1 - \lambda a_{i+1/2})$$

Dabei ist die Limiterfunktion ϕ eine Funktion des Verhältnisses der Gradienten

$$(4.43) \quad \phi_{i+1/2}^+ = \phi(r_{i+1/2}^+), \quad \phi_{i+1/2}^- = \phi(r_{i+1/2}^-)$$

mit

$$r_{i+1/2}^+ = \frac{\Delta f_{i-1/2}^+}{\Delta f_{i+1/2}^+}, \quad r_{i+1/2}^- = \frac{\Delta f_{i+3/2}^-}{\Delta f_{i+1/2}^-}$$

Wir schauen uns nun den linearen Fall $f(u) = au$ mit $a = \text{konstant} > 0$ an. Für ein monotones Verfahren gilt $h_{i+1/2} = au_i$ und somit

$$(4.44) \quad \Delta f_{i+1/2}^+ = a(u_{i+1} - u_i), \quad \Delta f_{i+1/2}^- = 0.$$

Der numerische Fluß lautet dann

$$(4.45) \quad g_{i+1/2} = au_i + \frac{a}{2} (1 - \lambda a) \phi_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i).$$

Vergleichen wir dies mit dem MUSCL-Typ Verfahren (4.21), so zeigt es sich, daß diese Flüsse im linearen Fall identisch sind, falls die Umschaltfunktion mit der Flußlimiterfunktion identifiziert wird. Das heißt die Limiterfunktion ϕ sollte man eigentlich ebenso Umschaltfunktion nennen, da sie ein Schalter zwischen zentraler und einseitiger Differenzenbildung darstellt. Alles was in Abschnitt 4.1 über die Umschaltfunktion geschrieben wurde, ist im linearen Fall somit auch hier gültig, z.B. das Zweite-Ordnung-TVD-Gebiet aus Figur 4.4.

Im nichtlinearen Fall ergeben sich einige Unterschiede. Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der TVD-Bedingung nach Harten wurde von Sweby [66] abgeleitet. So zeigte er, daß ein Flußlimiter-Verfahren mit den Limiterfunktionen (4.31) mit $1 \leq k \leq 2$ die TVD-Eigenschaft besitzt, aber unter der Schrittweitenbedingung

$$(4.46) \quad \lambda \max_u |a(u)| \leq \frac{2}{2+k}.$$

Wie schon erwähnt, gelang diese einheitliche Formulierung verschiedener Flußlimiter-Verfahren Sweby [66]. Wesentliche Impulse kamen von den Arbeiten von Roe (siehe [54], [56]).

4.3 Andere Ansätze

Es gibt noch einige andere Ansätze, ein Verfahren zweiter Ordnung zu konstruieren. Harten [21] modifizierte den Fluß der Erhaltungsgleichung in der Art

$$(4.47) \quad u_t + (f(u) + e(u))_x = 0.$$

Dabei ist $e(u)$ eine Art antidiffusiver Term, abgeleitet aus einer der Taylorentwicklung. Er wendet nun auf diese modifizierte Gleichung (4.47) das Verfahren von Roe (siehe Abschnitt 3.3) mit Entropie-Fix an. Der antidiffusive Term $e(u)$

ist dabei so gewählt, daß das erhaltene numerische Verfahren die TVD-Eigenschaft besitzt und eine Approximation zweiter Ordnung (mit Ausnahme von Extrema) für die ursprüngliche Gleichung dargestellt.

Ein etwas anderer Weg geht Davis [11]. Er zeigte, daß die Flußlimiter-Verfahren von Abschnitt 4.2 auch formuliert werden können als das Lax-Wendroff Verfahren mit einem bestimmten Viskositätsterm, welcher von den Richtungen der Charakteristiken und von dem Verhältnis der Gradienten abhängt. Davis gelang es dann, einen Term so zu formulieren, daß er nicht mehr von dem Verlauf der Charakteristiken abhängt. Man ist somit nicht mehr auf ein Upwind-Verfahren angewiesen, sondern hat ein TVD-Verfahren mit zentraler Differenzenbildung. Weiterentwickelt wurde dieses Konzept von Yee [74]. Diese Verfahren sind im allgemeinen einfacher - insbesondere angewandt auf Systeme von Erhaltungsgleichungen - liefern jedoch eine schlechtere Auflösung von Stoßwellen.

5.0 Mehrdimensionale skalare Erhaltungsgleichung

Die Verfahren für die eindimensionalen Erhaltungsgleichungen lassen sich formal mit der sogenannten Splitting-Methode auf mehrere Raumdimensionen ausdehnen. Die meisten gebräuchlichen Näherungsverfahren für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in zwei und drei Dimensionen benützen diese Methode (siehe [70]). Im folgenden beschränken wir uns auf **das Cauchyproblem für die zweidimensionale Erhaltungsgleichung**

$$(5.1) \quad u_t + f_1(u)_x + f_2(u)_y = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$$

$$(5.2) \quad u(x, y, 0) = q(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir suchen natürlich wieder schwache Lösungen, welche das Cauchyproblem im integralen Sinne erfüllen. Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+)$ heißt **schwache Lösung des Cauchyproblems** (5.1), (5.2), falls für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+)$

$$(5.3) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (u \phi_t + f_1(u) \phi_x + f_2(u) \phi_y) dx dy dt + \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi(x, y, 0) q(x, y) dx dy = 0$$

gilt. Die physikalisch relevante schwache Lösung läßt sich wiederum charakterisieren durch eine **Entropieungleichung**

$$(5.4) \quad U(u)_t + F_1(u)_x + F_2(u)_y \leq 0,$$

wobei die Entropiefunktion $U(u)$ eine konvexe Funktion ist. Für die Entropieflüsse F_1 und F_2 gilt

$$(5.5) \quad f_1'(u) U'(u) = F_1'(u), \quad f_2'(u) U'(u) = F_2'(u).$$

Die Theorie der mehrdimensionalen Erhaltungsgleichungen bringt nichts wesentlich neues im Vergleich zum eindimensionalen Fall. Einen Überblick über die Theorie findet sich [9]. Deshalb wollen wir uns sogleich dem numerischen Fall zuwenden.

Wir betrachten für das numerische Verfahren wieder ein äquidistantes Gitter mit der Zeitschrittweite Δt und den Raumschrittweiten Δx und Δy . Analog zum ein-dimensionalen Fall verwenden wir die folgenden Bezeichnungen

$$(5.6) \quad t_n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}, x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, i, j \in \mathbb{Z},$$

$$x_{i \pm 1/2} = \frac{1}{2}(x_{i \pm 1} + x_i), y_{j \pm 1/2} = \frac{1}{2}(y_{j \pm 1} + y_j), i, j \in \mathbb{Z}.$$

Damit lautet ein **Verfahren in Erhaltungsform**

$$(5.7) \quad u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \lambda_x \left(g_{i+1/2,j}^n - g_{i-1/2,j}^n \right) - \lambda_y \left(h_{i,j+1/2}^n - h_{i,j-1/2}^n \right)$$

mit den Schrittweitenverhältnissen $\lambda_x = \Delta t/\Delta x$ und $\lambda_y = \Delta t/\Delta y$ und den numerischen Flüssen

$$(5.8) \quad g_{i+1/2,j} = g(u_{i-k+1,j}, \dots, u_{i+k,j}), k \geq 1,$$

$$(5.9) \quad h_{i,j+1/2} = h(u_{i,j-k+1}, \dots, u_{i,j+k}), k \geq 1.$$

Die numerischen Flüsse müssen zumindest lipschitzstetig in jedem Argument sein und konsistent mit den physikalischen Flüssen

$$(5.10) \quad \underbrace{g(u, u, \dots, u)}_{2k} = f_1(u), \quad \underbrace{h(u, u, \dots, u)}_{2k} = f_2(u).$$

Als Anfangswerte für das Verfahren in Erhaltungsform (5.7) schreiben wir wieder die Mittelwerte von q

$$(5.11) \quad u_{i,j}^0 = \frac{1}{|R_{ij}|} \int \int_{R_{ij}} q(x, y) dx dy$$

in den räumlichen Gitterintervallen

$$R_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$$

vor.

Der **Konvergenzsatz** für den eindimensionalen Fall läßt sich auch auf den mehrdimensionalen Fall übertragen ([8], [57]). Zentrale Rolle dabei spielt natürlich wieder die **Konsistenz des Näherungsverfahrens mit der Erhaltungsform und der Entropiebedingung** und die **Stabilität in der L^∞ -Norm und der Totalvariation**

$$(5.12) \quad \|u_\Delta(\cdot, \cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_1 \|q(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \quad \text{für alle } t,$$

$$(5.13) \quad \text{TV } u_\Delta(\cdot, \cdot, t) \leq C_2 \text{TV } q(\cdot, \cdot) \quad \text{für alle } t.$$

Mit u_Δ wird hier wieder die stückweise konstant auf $\mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_0^+$ ausgedehnte Gitterfunktion bezeichnet. Die Totalvariation kann im mehrdimensionalen Fall allerdings auf verschiedene Art und Weise definiert werden. Wir benutzen hier die Definition

$$(5.14) \quad \text{TV } u_\Delta(\cdot, \cdot, t) = \sum_j \sum_i \left| u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n \right| + \sum_i \sum_j \left| u_{i,j+1} - u_{i,j} \right|$$

für $t \in [t_n, t_{n+1})$. Ein Verfahren, welches (5.13) genügt mit $C_2 \leq 1$, heißt wie im eindimensionalen Fall **TVD-Verfahren**.

Die Konstruktion von Näherungsverfahren für zwei oder mehrdimensionale Probleme läßt sich nicht in der Art und Weise bewerkstelligen, daß man die eindimensionalen Ideen in einfacher Weise auf mehrere Raumdimensionen ausdehnt. Etwa die Definition und die Lösung des Riemannproblems und damit gewonnene Konstruktion eines Näherungsverfahrens ist ein typisch eindimensionaler Vorgang. Zwar läßt sich ein zweidimensionales Riemannproblem erklären, jedoch ist die Lösung sehr kompliziert im Vergleich zum eindimensionalen Fall (siehe [40]). Es gelang auch noch nicht, daraus ein numerisches Verfahren abzuleiten. Eine sehr allgemeine einfache Methode, mehrdimensionale Probleme zu lösen unter Benutzung von eindimensionalen Verfahren ist die **Splitting Methode - auch Zwischenschritt-Methode** genannt. Angewandt auf unsere zweidimensionale Erhaltungsgleichung (5.1) hat sie die folgende Form: Das zweidimensionale Problem wird zerlegt in die zwei eindimensionalen Probleme

$$(5.15) \quad u_t + f_1(u)_x = 0$$

$$(5.16) \quad u_t + f_2(u)_y = 0$$

Diese Probleme werden nun in einem Zeitschritt einfach hintereinander gelöst. Da es eindimensionale Probleme sind, können wir jeweils die in den letzten Abschnitten beschriebenen Methoden benutzen. Ein Zeitschritt eines solchen Splitting Verfahrens lautet dann etwa

$$(5.17) \quad u_{i,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(g_{i+1/2,j}^n - g_{i-1/2,j}^n \right)$$

$$(5.18) \quad u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{i,j+1/2}^{n+1/2} - h_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right),$$

wobei g und h (5.10) erfüllen. Wir machen mit einem eindimensionalen Verfahren also zunächst einen Schritt in x -Richtung und danach einen Schritt in y -Richtung. Schemata dieser Art wurden von Godunov [19] für Probleme der Strömungsmechanik eingeführt. Bei der Variante von Strang [65] wird nach einem x - und y -Schritt die Reihenfolge umgedreht und im nächsten Zeitintervall zuerst der y -Schritt und danach der x -Schritt ausgeführt. Sind die eindimensionalen Verfahren zweiter Ordnung, so garantiert diese Methode, daß das mehrdimensionale Verfahren diese zweite Ordnung erhält. Man sieht sehr schnell, daß sich das Splitting Verfahren (5.17), (5.18) in der zweidimensionalen Erhaltungsform

$$(5.19) \quad u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \lambda_x \left(g_{i+1/2,j}^n - g_{i-1/2,j}^n \right) - \lambda_y \left(\bar{h}_{i,j+1/2}^n - \bar{h}_{i,j-1/2}^n \right)$$

schreiben läßt. Man erhält dies sofort, indem man die Werte mit Index $n + 1/2$ in (5.18) mittels (5.17) eliminiert. Für den Fluß \bar{h} gilt

$$(5.20) \quad \bar{h}_{i+1/2}^n = h \left(u_{i,j}^{n+1/2}, u_{i,j+1}^{n+1/2} \right) = \bar{h} \left(u_{i-1,j}^n, u_{i,j}^n, u_{i+1,j}^n, u_{i-1,j+1}^n, u_{i,j+1}^n, u_{i+1,j+1}^n \right).$$

Im Zweischritt Splitting Verfahren von Strang ergibt sich danach im nächsten Schritt eine Erhaltungsform mit einem Fluß \bar{g} der Bauart (5.20).

Neben der Erhaltungsform zeigt sich auch, daß die Monotonie der eindimensionalen Verfahren auf das zweidimensionale Splitting-Verfahren übergeht. Den Begriff der Monotonie eines zweidimensionalen Verfahrens läßt sich ähnlich wie im eindimensionalen Fall erklären. Die Flüsse sind dabei natürlich nicht mehr nur von 2 Werten abhängig, sondern von $2k$ Werten mit $k > 1$:

$$(5.21) \quad g = g(u_1, \dots, u_{2k}), \quad h = h(u_1, \dots, u_{2k}).$$

(siehe (5.20) : $k = 3$)

Definition 1: Ein zweidimensionales Verfahren in Erhaltungsform heißt **monoton**, falls die numerischen Flüsse den Monotoniebedingungen

1. $g(v, w), h(v, w)$ sind monoton wachsend in v
2. $g(v, w), h(v, w)$ sind monoton fallend in w

genügen mit $v = (v_1, \dots, v_k)$ und $w = (w_1, \dots, w_k)$. Die Bedingungen 1 und 2 sind dabei jeweils komponentenweise zu verstehen.

Satz 1: Sind die eindimensionalen Verfahren monotone Verfahren und gelten die diskreten CFL-Bedingungen (3.67) für Verfahren (5.17) und (5.18), so ist das mit der Splitting-Methode gewonnene zweidimensionale Verfahren monoton.

Beweis: Diese Aussage gilt sowohl für ein Einscritt als auch für das Zweiscritt-Splitting Verfahren von Strang. Wir zeigen dies hier für das Einscrittverfahren (5.19). Da der Fluß g nach Voraussetzung monoton ist müssen wir nur zeigen, daß h ein monotoner Fluß ist. Wir setzen an:

$$(5.22) \quad v_{i-1,j}^n \geq u_{i-1,j}^n$$

und alle anderen Argumente von h seien gleich: $v_{l,k} = u_{l,k}$ bis auf ($l = i-1, k = j$). Wegen der Monotonie des Flusses g in (5.17) folgt aus (5.22)

$$(5.23) \quad v_{i,j}^{n+1/2} \geq u_{i,j}^{n+1/2}$$

Da h im ersten Argument monoton wachsend ist, gilt nach (5.20), daß auch h im ersten Argument wächst. Analog läßt sich dies durchführen für alle Argumente von h . Für das zweite und fünfte Argument benötigt man zusätzlich die diskreten CFL-Bedingungen.

Wie im eindimensionalen Fall haben wir somit Verfahren, welche allen Bedingungen des Konvergenzsatzes genügen. Es sind jedoch Verfahren mit der Konsistenzordnung 1 und daher für praktische Rechnungen wenig ungeeignet. Während im eindimensionalen Fall das TVD-Kriterium von Harten die Konstruktion von Verfahren gestattet, welche die TVD-Eigenschaft besitzen und die Konsistenzordnung zwei haben (abgesehen von Punkten mit lokalen Extrema), ist im mehrdimensionalen Fall die Situation unklar. Von Goodman und Le Veque [20] wurde die überraschende Aussage bewiesen, daß ein zweidimensionales Verfah-

ren in Erhaltungsform, welches die TVD-Eigenschaft besitzt, notwendigerweise ein Verfahren erster Ordnung sein muß; d.h. die TVD-Eigenschaft ist in zwei Raumdimensionen mit der zweiten Ordnung nicht mehr verträglich. Praktische Ergebnisse zeigen jedoch, daß mit Hilfe von Splitting Verfahren sich jedoch sehr gute Verfahren konstruieren lassen ausgehend von eindimensionalen TVD-Verfahren (siehe [70]). Wir wollen hier einige Ergebnisse solcher Verfahren zeigen für zweidimensionale skalare Erhaltungsgleichungen.

Das erste Testbeispiel ist ein Anfangswertproblem für die zweidimensionale Burgers-Gleichung

$$(5.24) \quad u_t + \left(\frac{1}{2} u^2\right)_x + \left(\frac{1}{2} u^2\right)_y = 0$$

und den Anfangswerten

$$(5.25) \quad u(x, y, 0) = q(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5] \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Anfangswerte sind in Figur 5.1 dargestellt auf einem 100 x 100 Punktegitter im Intervall $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Dieses Rechengebiet und dieses Gitter liegt auch den folgenden numerischen Rechnungen zugrunde. Eine Vorstellung der exakten Lösung läßt sich zunächst aus der eindimensionalen Theorie gewinnen. Nach vorne und nach links laufen Verdünnungswellen; an der rechten und hinteren Seite befinden sich stationäre Stoßwellen. Zweidimensionale Effekte treten nur an den Ecken auf und laufen von dort in das übrige Gebiet. Ein solches Problem an der Ecke ist ein Spezialfall eines sogenannten zweidimensionalen Riemannproblems, welches sich für die zweidimensionale Burgersgleichung lösen läßt. Einen Überblick über die Lösung dieser Probleme gibt Lindquist [40]. Eine Skizze der Lösung an der rechten vorderen Ecke ist in Fig. 5.2 dargestellt.

Für alle Resultate von numerischen Verfahren, welche wir im folgenden zeigen wurden natürlich dieselben Diskretisierungsparameter gewählt:

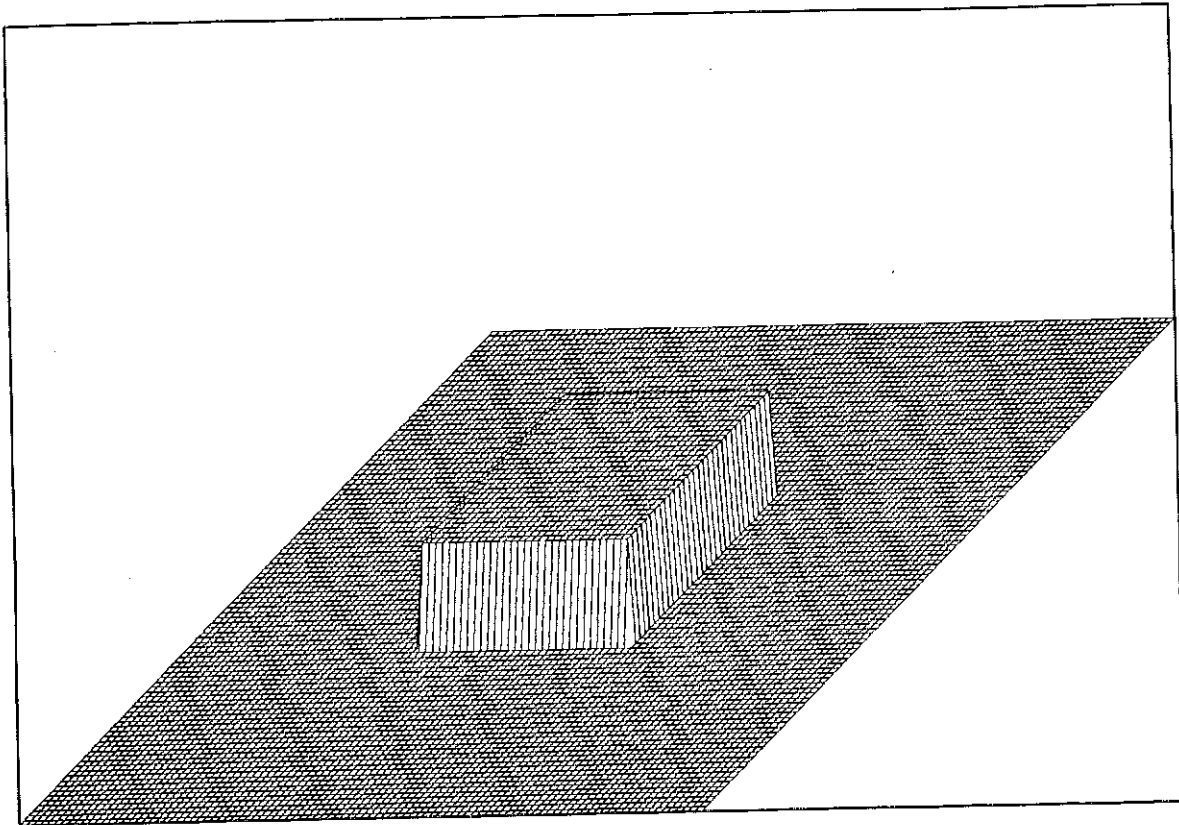
$$(5.26) \quad \Delta x = 0.1, \quad \Delta y = 0.1, \quad \Delta t = 0.05.$$

Die Ergebnisse wurden nach 30 Zeitschritten zu der Zeit $t = 1.5$ aufgezeichnet. Alle Verfahren sind Splitting-Verfahren, wobei jeweils das Verfahren von Strang benutzt wurde. In Figur 5.3 und 5.4 sehen wir die Ergebnisse der monotonen Ver-

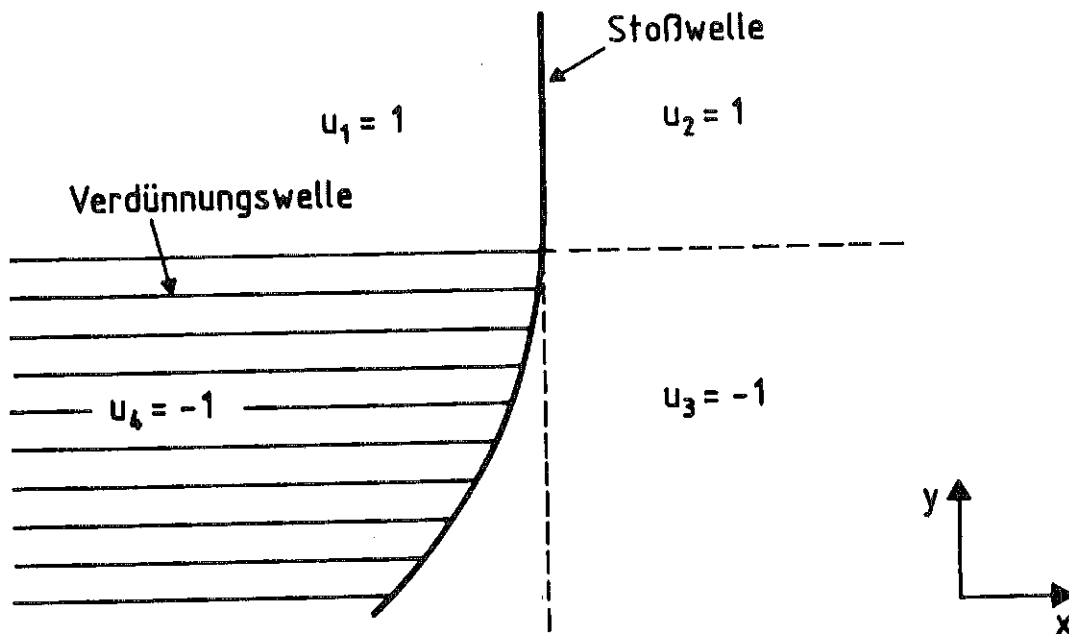
fahren von Godunov und von Engquist-Osher. Man sieht deutlich die stationären Stoßwellen an der rechten - und hinteren Seite des Rechtecks und die Verdünnungswellen, welche nach vorne und links laufen. Dabei bleiben die Eigenschaften der eindimensionalen Verfahren erhalten. Die Stoßwelle wird innerhalb von zwei Gitterzellen (Godunov) oder vier (Engquist-Osher) approximiert. In den diskreten Verdünnungswellen treten auch die typischen Stufen am Schallpunkt auf. An den Ecken des Quaders treten dann die zweidimensionalen Effekte auf. Wir sehen etwa, daß die Grenzkurve zwischen der nach vorne laufenden Verdünnungswelle und dem ungestörten Zustand nach rechts eine Parabel ist. Dies stimmt mit der exakten Lösung überein.

Wesentlich bessere Ergebnisse erzielt man, falls die eindimensionalen Probleme im Splitting-Verfahren mit Verfahren höherer Ordnung gelöst werden. Ergebnisse mit diesem Verfahren zeigen die Bilder 5.5 - 5.10. Figur 5.5 und 5.6 zeigen die Resultate eines MUSCL-Typ Verfahrens, wobei als Upwind Verfahren das monotone Engquist-Osher Verfahren (3.49) benutzt wurde. Die Steigungsberechnung wurde ausgeführt mit den Umschaltfunktionen Φ_1 und Φ_2 , welche die Grenzkurven des Zweite Ordnung-TVD-Gebiets darstellen. Die obere Grenze Φ_2 liefert dabei bessere Resultate. Wird das Engquist-Osher Verfahren durch das Godunov Verfahren ersetzt, so erhält man ganz ähnliche Ergebnisse (Figur 5.7, 5.8). Das Godunov-Verfahren ermöglicht jedoch eine bessere Approximation der stationären Stoßwellen. Leichte Unterschiede dieser MUSCL-Typ Verfahren sieht man zu den Ergebnissen der Verfahren mit Flußlimitern. In Figur 5.9 und 5.10 sind die Ergebnisse eines solchen Verfahrens festgehalten. Es benützt das Verfahren von Engquist-Osher zur Flußberechnung und die Limiterfunktionen ϕ_1 bzw. ϕ_2 . Im Gegensatz zum MUSCL-Typ Verfahren sieht man hier noch einen kleinen Sprung am Schallpunkt.

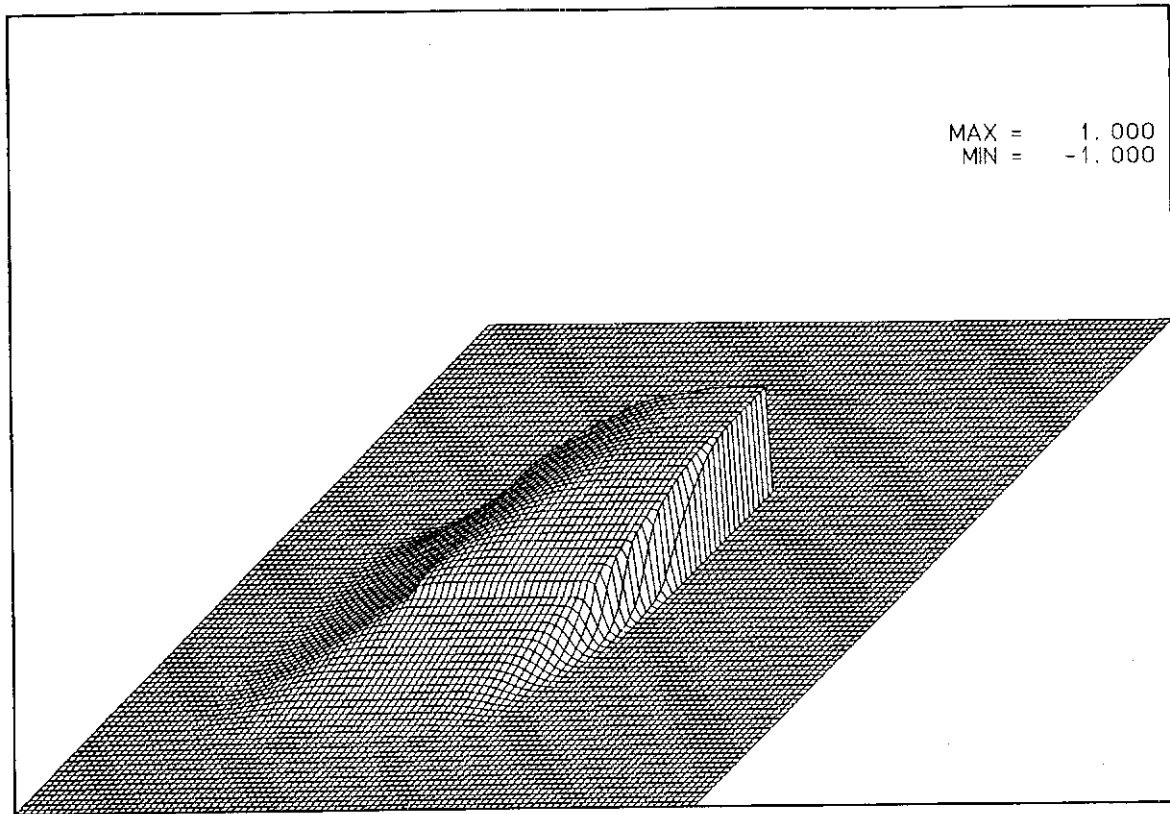
Von einem Splitting-Verfahren erwartet man, und dies bestätigte sich auch in den obigen Ergebnissen, daß sie sehr gute Resultate liefern, wenn die Wellenfronten parallel zu den Gitterlinien laufen. Überall dort besitzt das zweidimensionale Verfahren die Eigenschaften der eindimensionalen Verfahren. Größere Schwierigkeiten sind zu erwarten, wenn die Wellen diagonal im Gitter laufen. Um dies etwas genauer zu untersuchen, wenden wir obige Splitting-Verfahren an auf diagonal zum Gitter verlaufende Unstetigkeiten. Das Anfangswertproblem, welches wir im folgenden approximieren, ist ein Cauchyproblem für die modifizierte Burgers-Gleichung



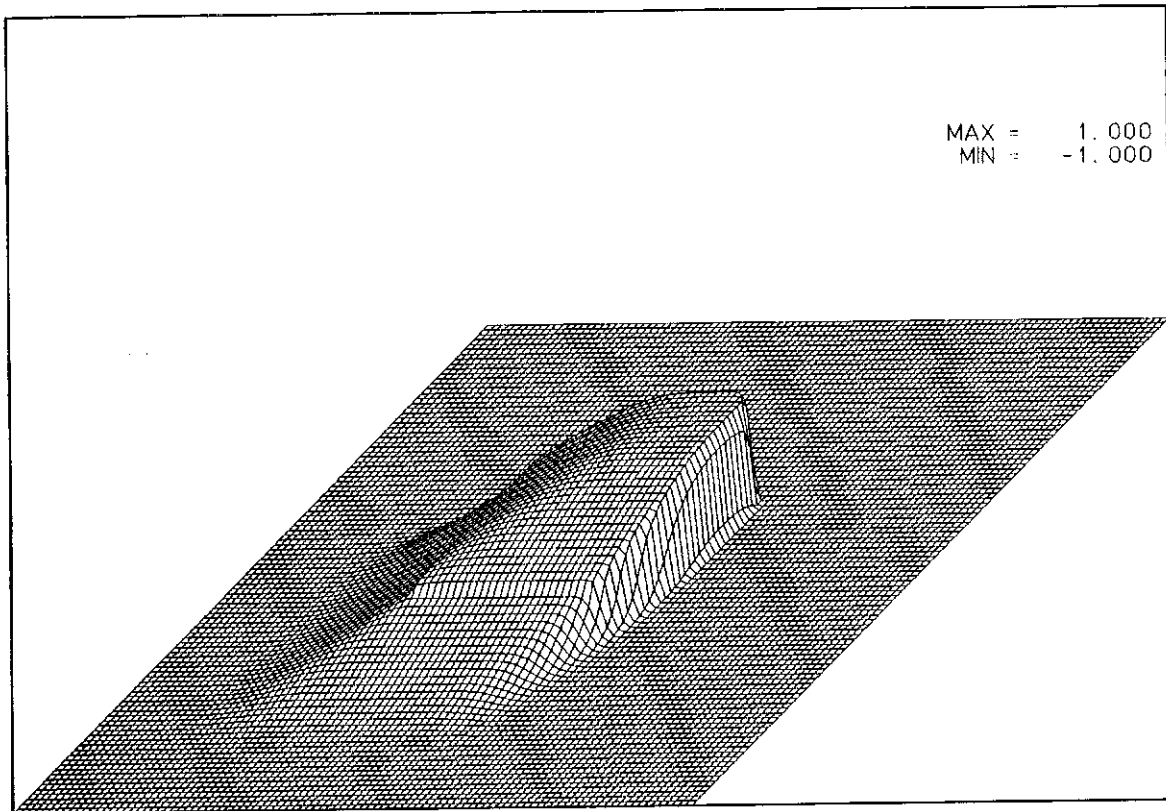
Figur 5.1 Anfangswerte



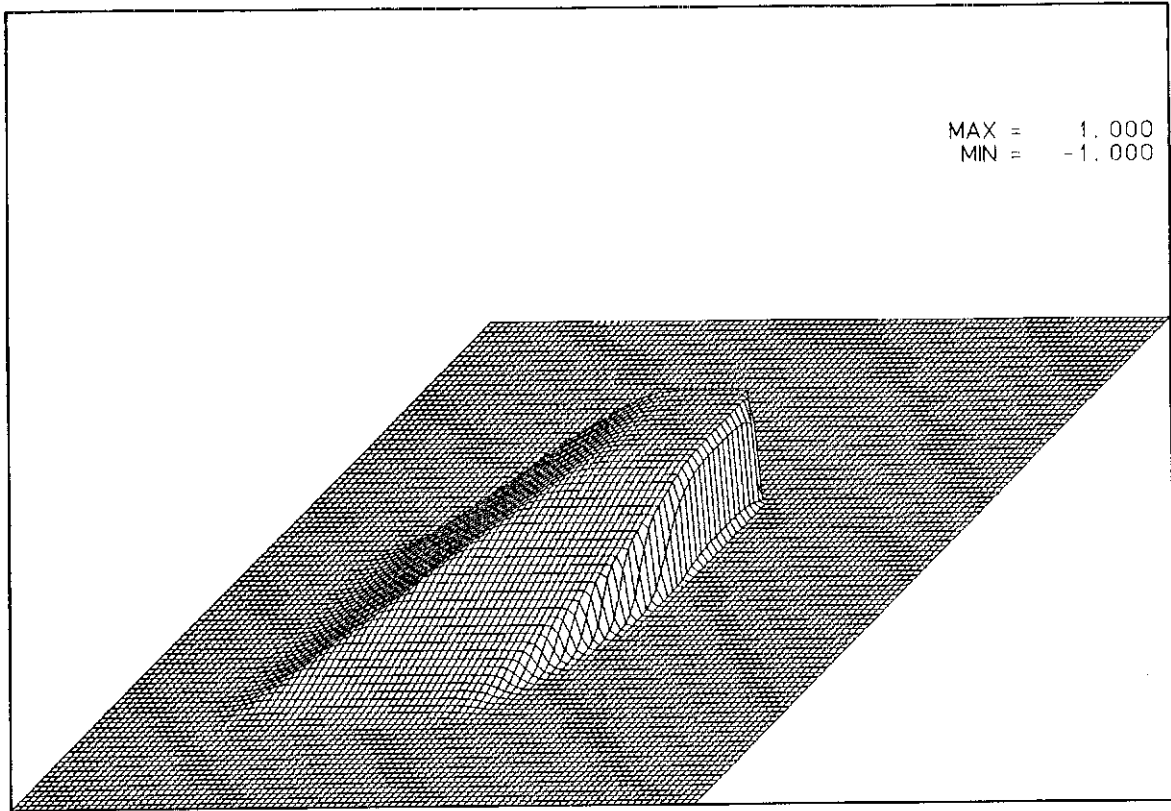
Figur 5.2 Exakte Lösung an der rechten vorderen Ecke



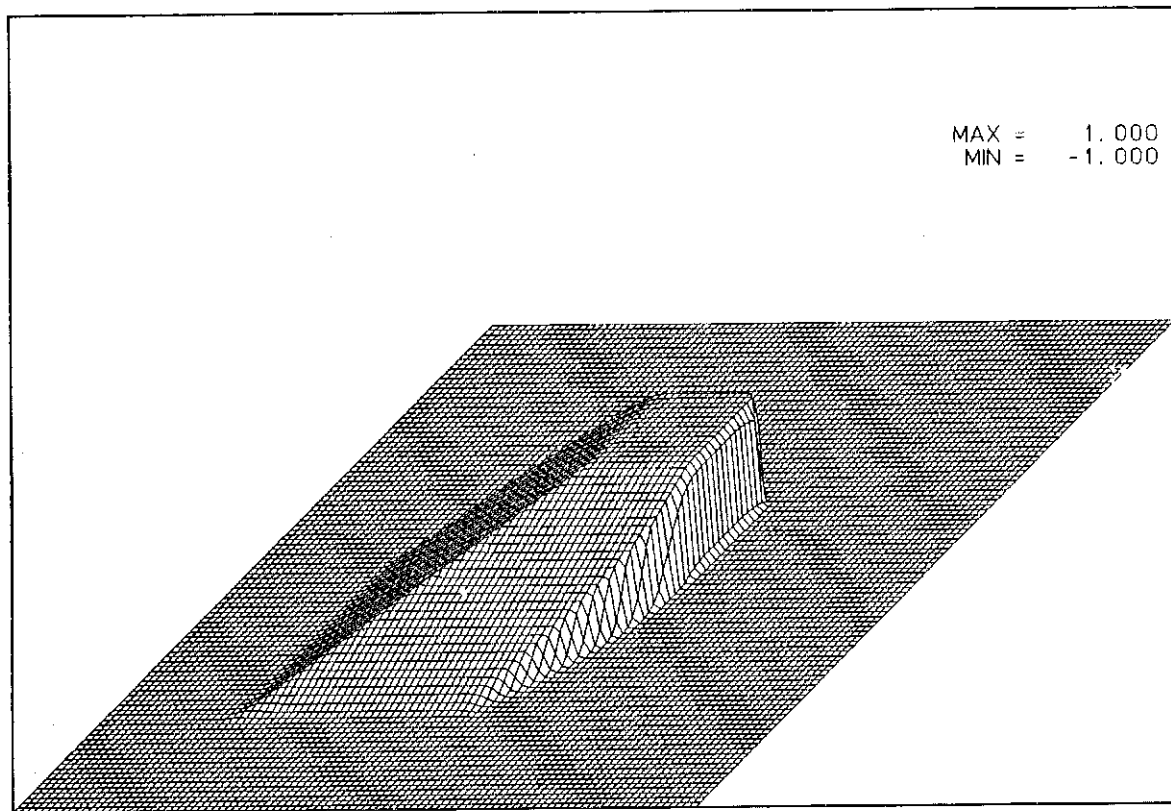
Figur 5.3 Godunov-Verfahren



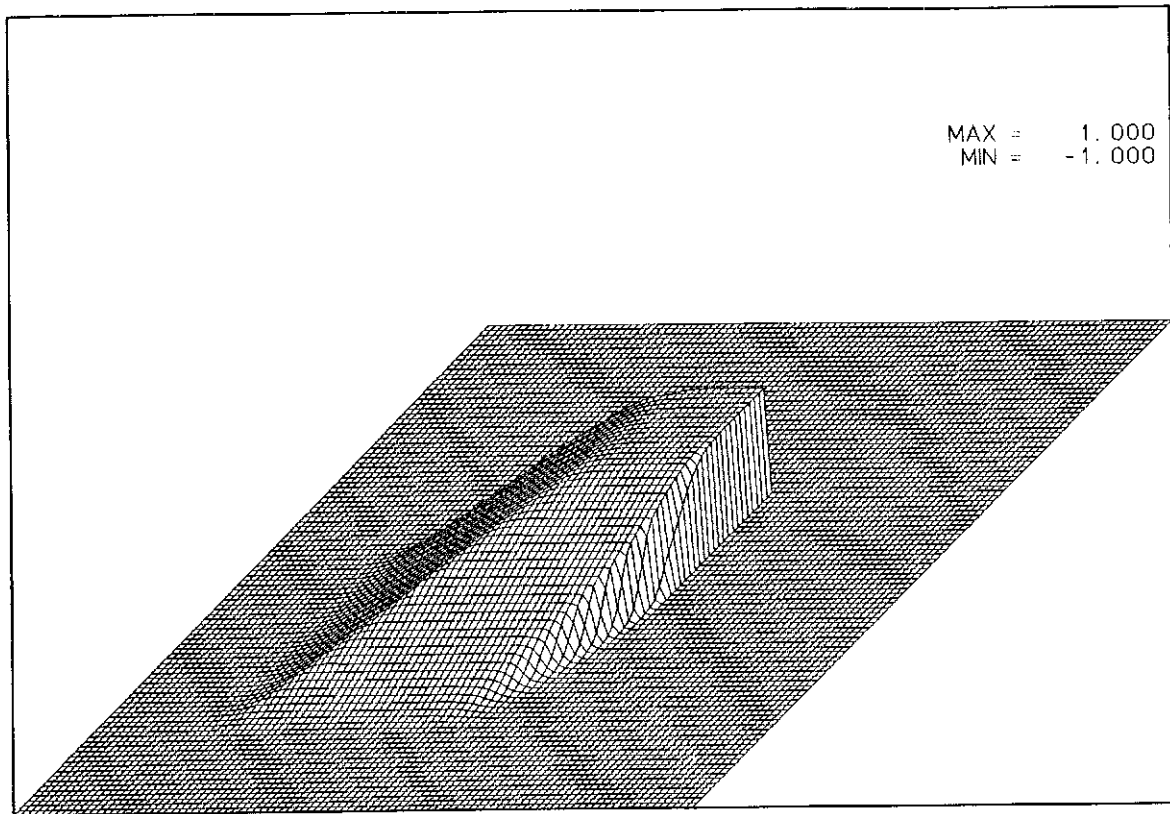
Figur 5.4 Engquist-Osher Verfahren



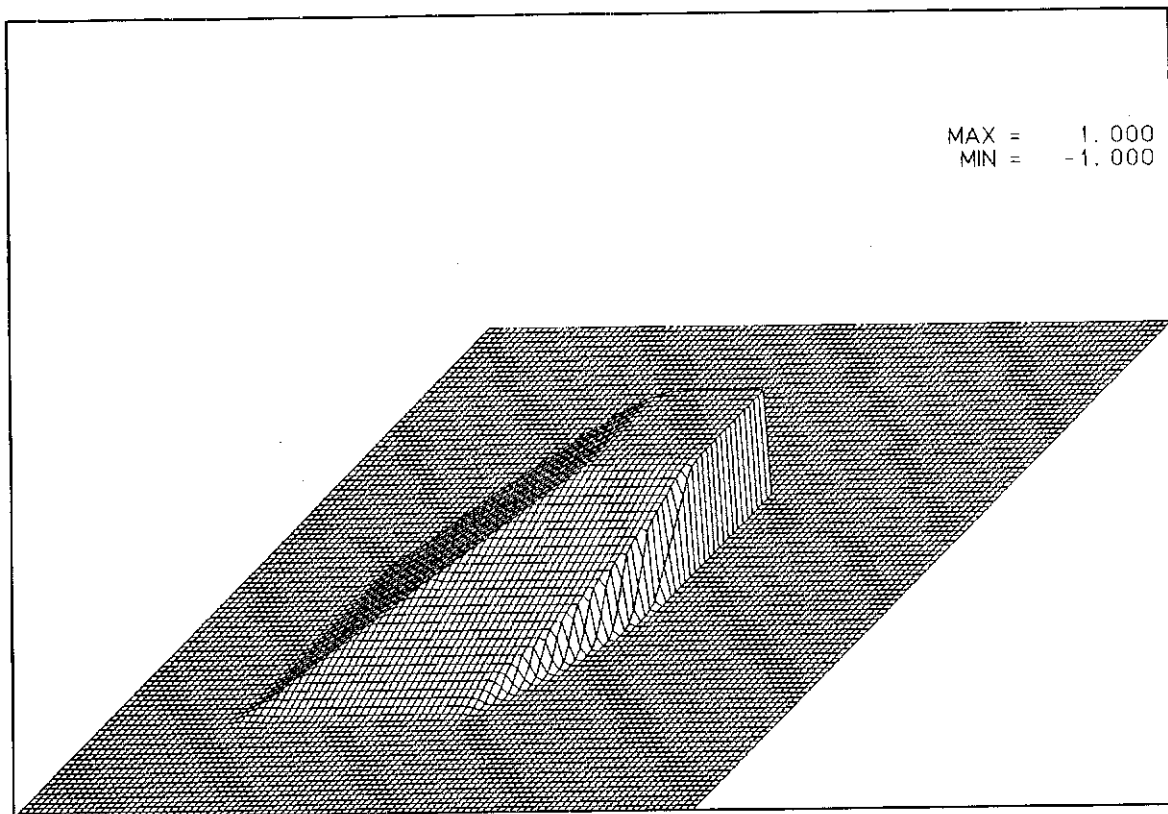
Figur 5.5 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.29) ϕ_1 , Engquist-Osher V.



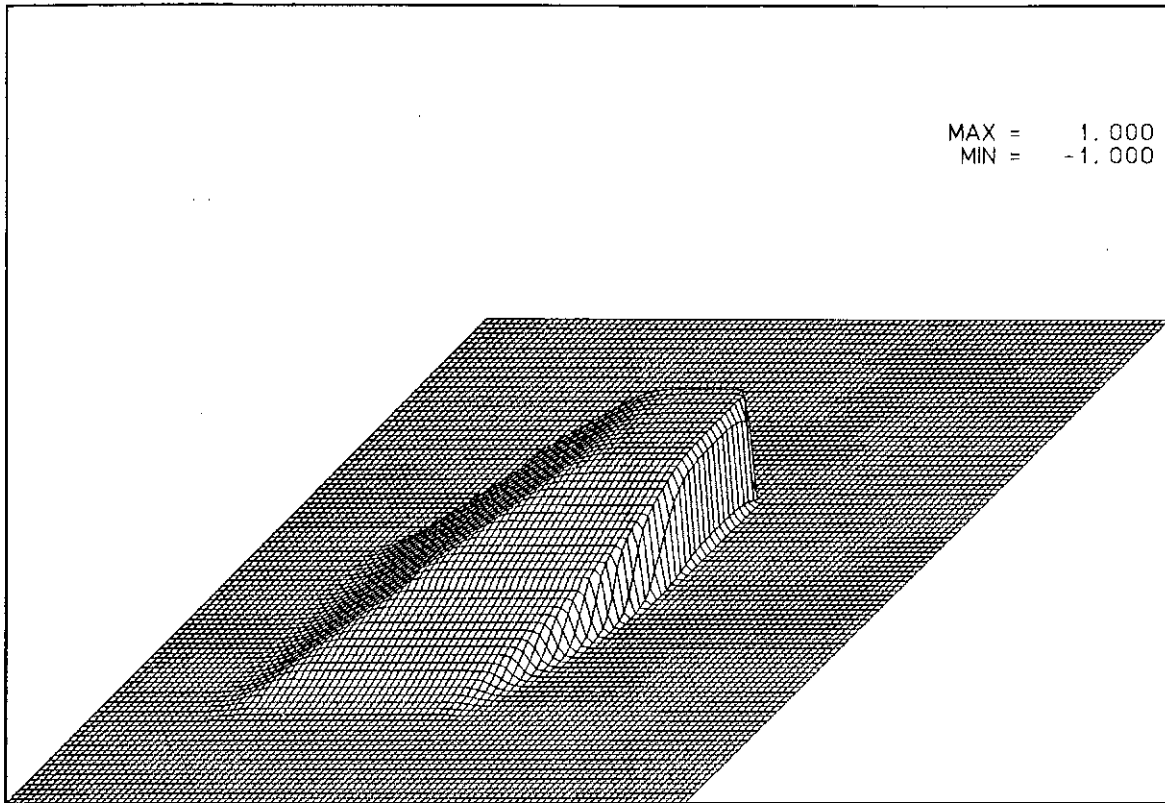
Figur 5.6 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.30) ϕ_2 , Engquist-Osher V.



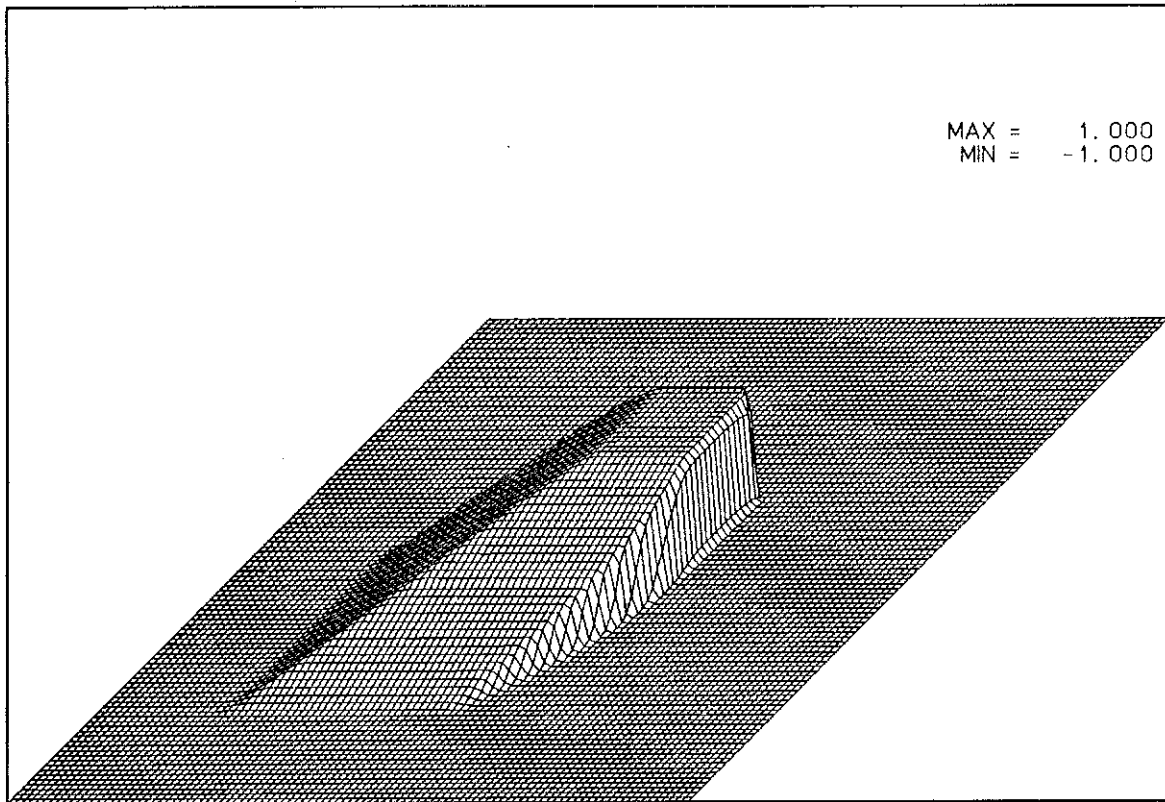
Figur 5.7 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.29) ϕ_1 , Godunov V.



Figur 5.8 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.30) ϕ_2 , Godunov V.



Figur 5.9 Flußlimiter Verfahren: Flußlimiter (4.29) ϕ_1 , Engquist-Osher V.



Figur 5.10 Flußlimiter Verfahren: Flußlimiter (4.30) ϕ_2 , Engquist-Osher V.

$$(5.27) \quad u_t + \left(\frac{1}{2} au^2\right)_x + \left(\frac{1}{2} u^2\right)_y = 0$$

mit den Anfangswerten

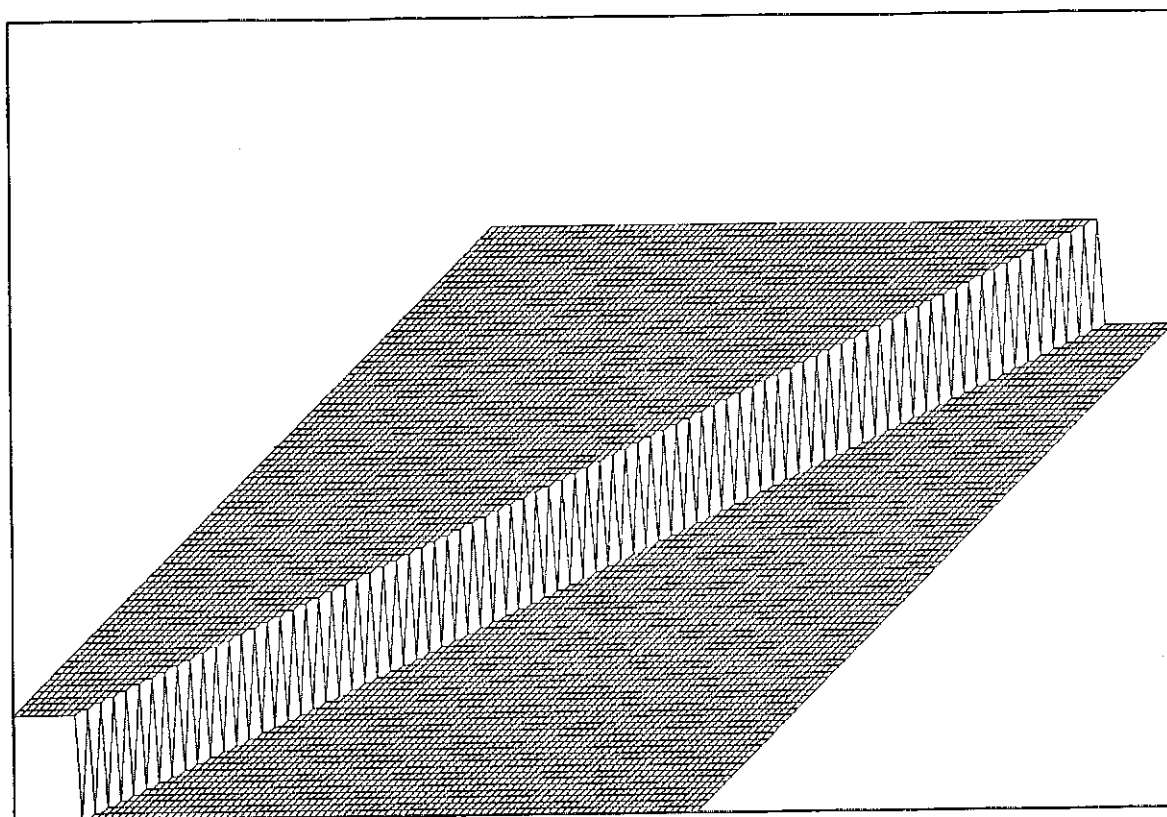
$$(5.28) \quad u(x, y, 0) = q(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y > x \\ -1 & \text{für } y < x \end{cases}$$

Dieses Anfangswertproblem ist stationär, d.h. die physikalische Lösung ist gerade

$$(5.29) \quad u(x, y, t) = q(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Dabei ist die Unstetigkeit im Falle $1 < a < 2$ eine stationäre Stoßwelle, für $a = 1$ eine stationäre Kontaktunstetigkeit ([9]).

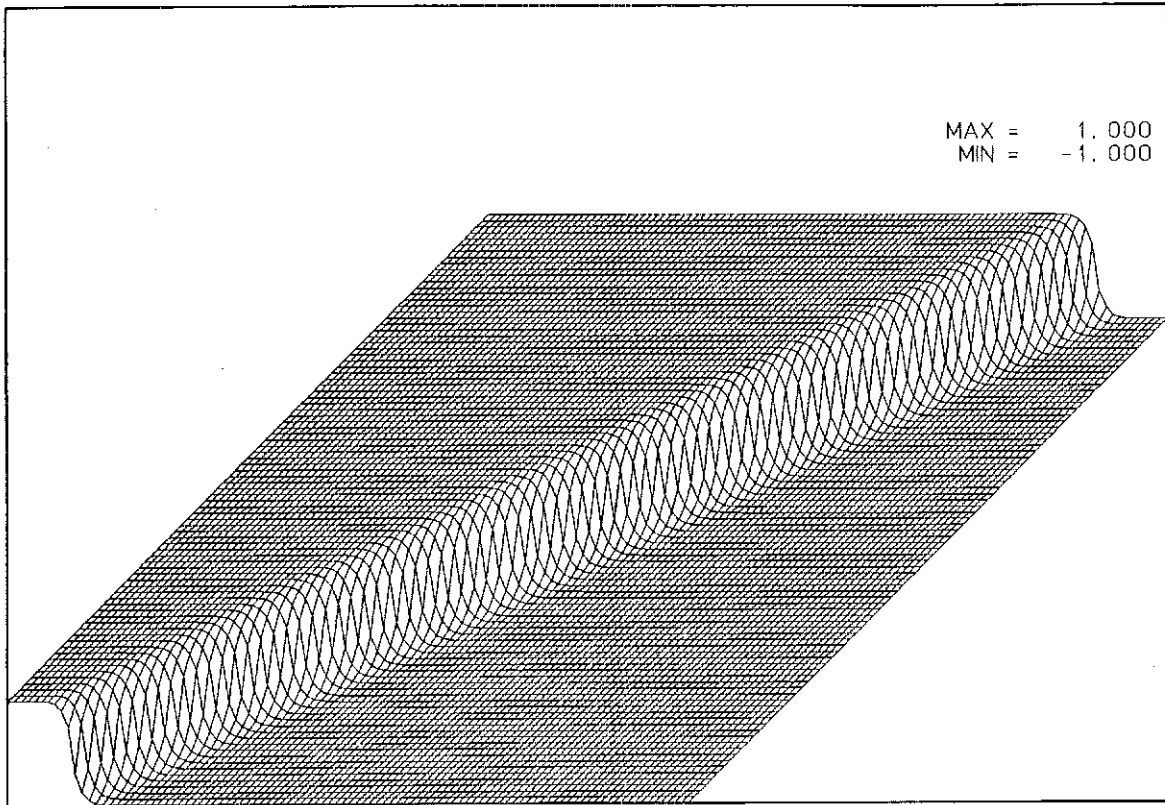
Die Näherungsverfahren werden mit denselben Diskretisierungsparametern (5.26) ausgeführt wie in unserem ersten Testbeispiel. Wir greifen ein Stoßwellenproblem mit $a = 1.5$ als auch das Kontaktunstetigkeitsproblem mit $a = 1.0$ heraus. Anfangswerte und exakte Lösung sind in Figur 5.11 auf dem 100×100 Punkte Gitter dargestellt. Zunächst das Stoßwellenproblem: Es zeigt sich, daß das Splitting-Verfahren keine Schwierigkeiten hat auch eine solche Unstetigkeit zu approximieren. Jedoch ist die numerische Dämpfung der Unstetigkeiten deutlich stärker. Am besten zeigt sich dies bei den Verfahren erster Ordnung. Die Ergebnisse für das Verfahren von Engquist-Osher und Godunov sind in den Bildern 5.12 bzw. 5.13 festgehalten. Die Stoßwelle ist jetzt etwa über 7 - 8 Punkte verschmiert. Das Godunov Verfahren ist etwas besser als das Engquist-Osher Verfahren, jedoch kann die stationäre Stoßwelle nicht mehr exakt wiedergegeben werden, wie dies bei parallel zu den Gitterlinien verlaufenden Stoßwellen der Fall ist. Diese stärkere Dämpfung läßt sich erklären, wenn man die einzelnen Schritte im Splitting Verfahren etwas näher untersucht. Der x-Schritt ist hier eine Approximation einer stationären Stoßwelle entsprechend eines Sprungs von 1 auf -1 in Anfangswerten. Demgegenüber ist der y-Schritt die Approximation einer Verdünnungswelle entsprechend eines Sprungs von -1 auf 1 in den Anfangswerten. Die diagonale Stoßwelle wird somit erzeugt durch die Hintereinanderausführung einer Approximation einer Stoßwelle in x-Richtung und einer Verdünnungswelle in y-Richtung. Dieser Mechanismus führt natürlich eine gewisse zusätzliche



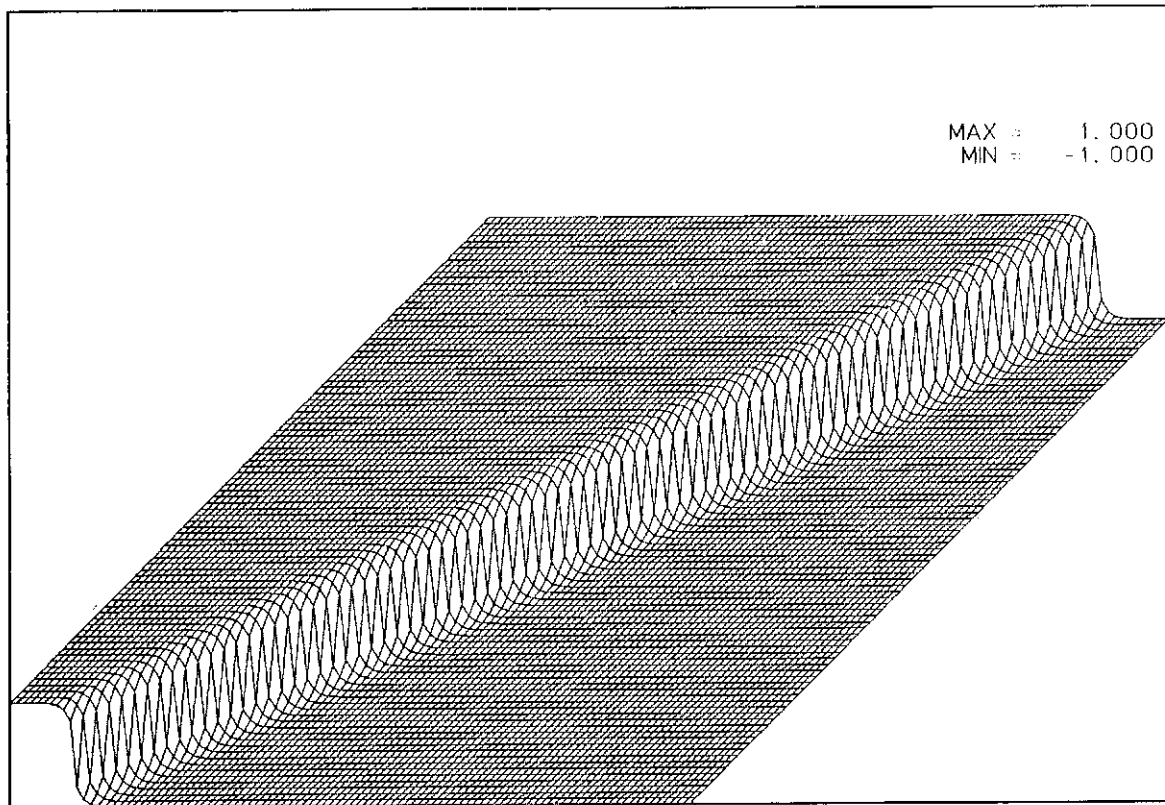
Figur 5.11 Anfangswerte und stationäre Lösung

Dämpfung ein, welche im eindimensionalen Fall nicht auftritt. Diese Dämpfung wird natürlich stark reduziert, wenn wir ein Verfahren zweiter Ordnung betrachten. Bild 5.14 und 5.15 zeigen solche Ergebnisse für ein MUSCL-Typ Verfahren, welches das Godunov Verfahren zur Flußberechnung benutzt und die Umschaltfunktion Φ_1 bzw. Φ_2 . Es gelingt dem Verfahren zweiter Ordnung die Stoßwelle über ca. 4 Gitterpunkte hinweg zu approximieren. Analoge Resultate erhält man auch für die Flußlimiterverfahren.

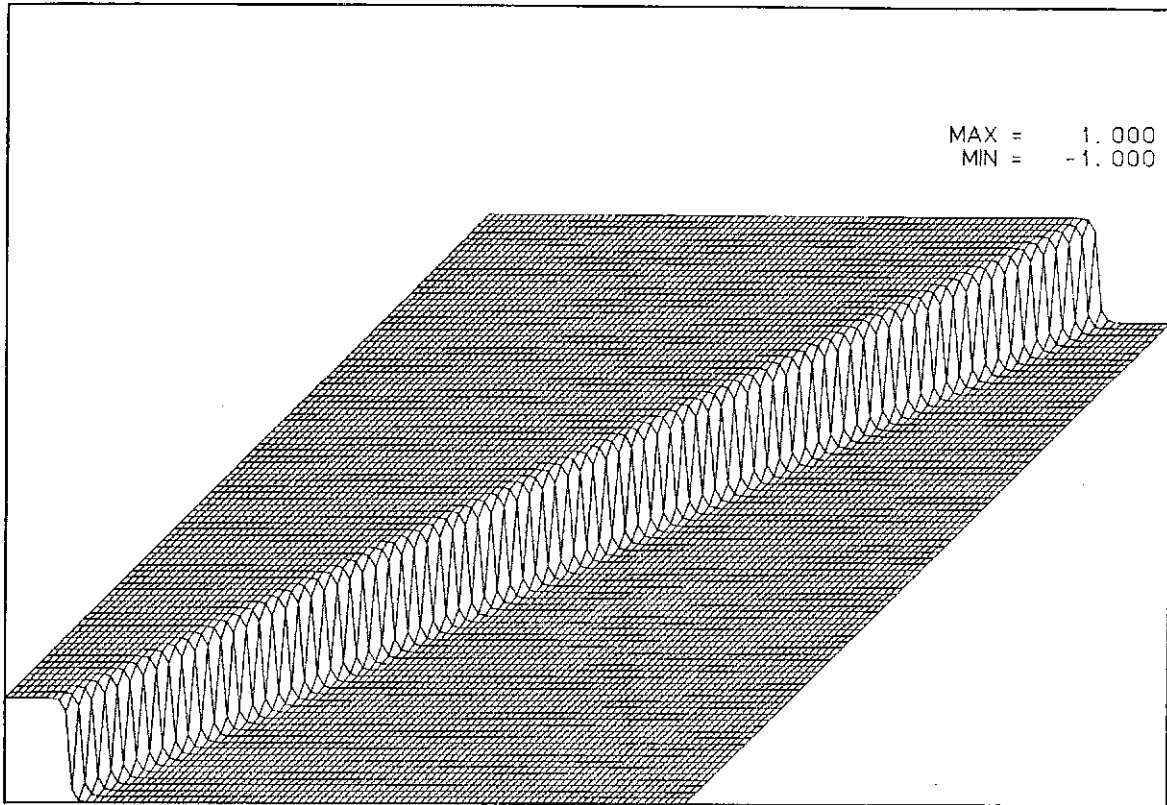
Bei der Kontaktunstetigkeit im Falle $a = 1$ zeigt es sich, daß die numerische Dämpfung stärker ist. Etwas präziser muß man hier sagen, daß im Gegensatz zu einer Stoßwelle die numerische Dämpfung einer Kontaktunstetigkeit mit der Zeit zunimmt. So ist zum betrachteten Zeitpunkt $t = 1,5$ die Kontaktunstetigkeit deutlich stärker verschmiert wie die Stoßwelle. Am besten belegen dies die Bilder der monotonen Verfahren in Figur 5.16 und 5.17. Das Anwachsen der numerischen Dämpfung der Kontaktunstetigkeit ist eine Funktion der Konsistenzordnung. Wir sehen in Figur 5.18 und 5.19, daß bei dem MUSCL-Typ Verfahren die Dämpfung stark reduziert ist. Jedoch wie bei den Verfahren erster Ordnung ist sie stärker als bei den Stoßwellen.



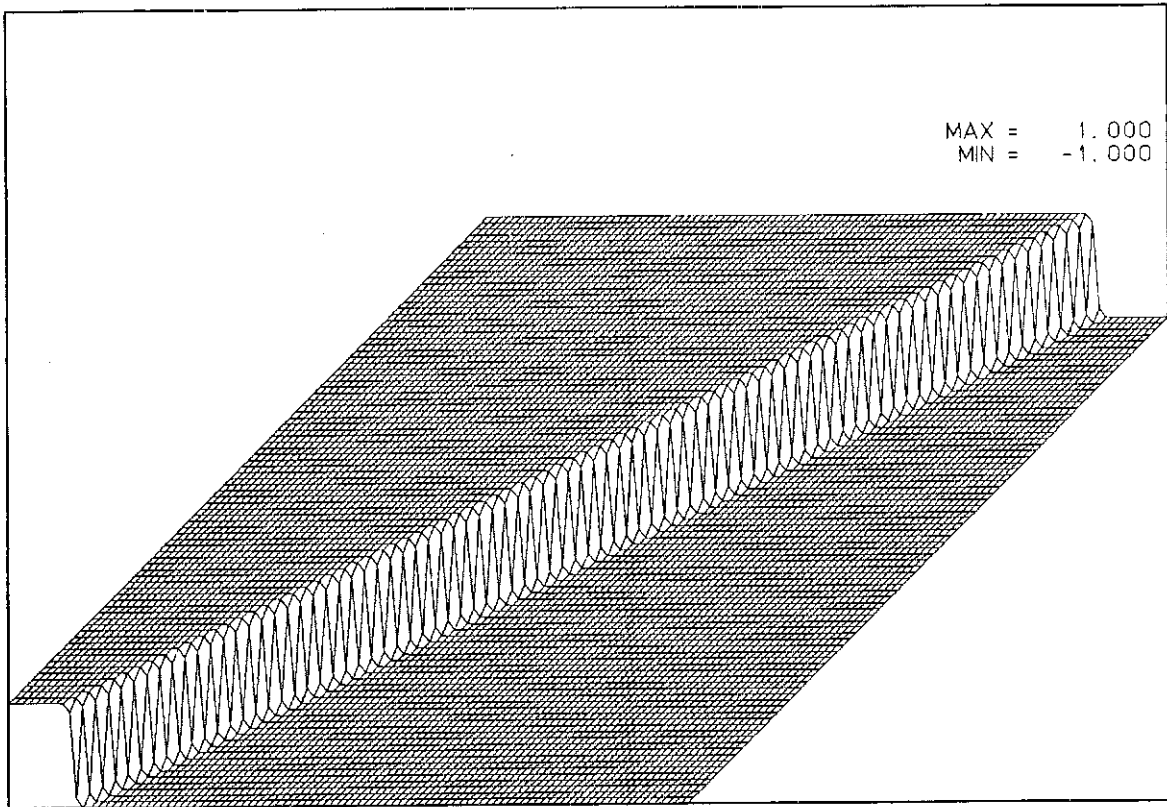
Figur 5.12 Engquist-Osher Verfahren



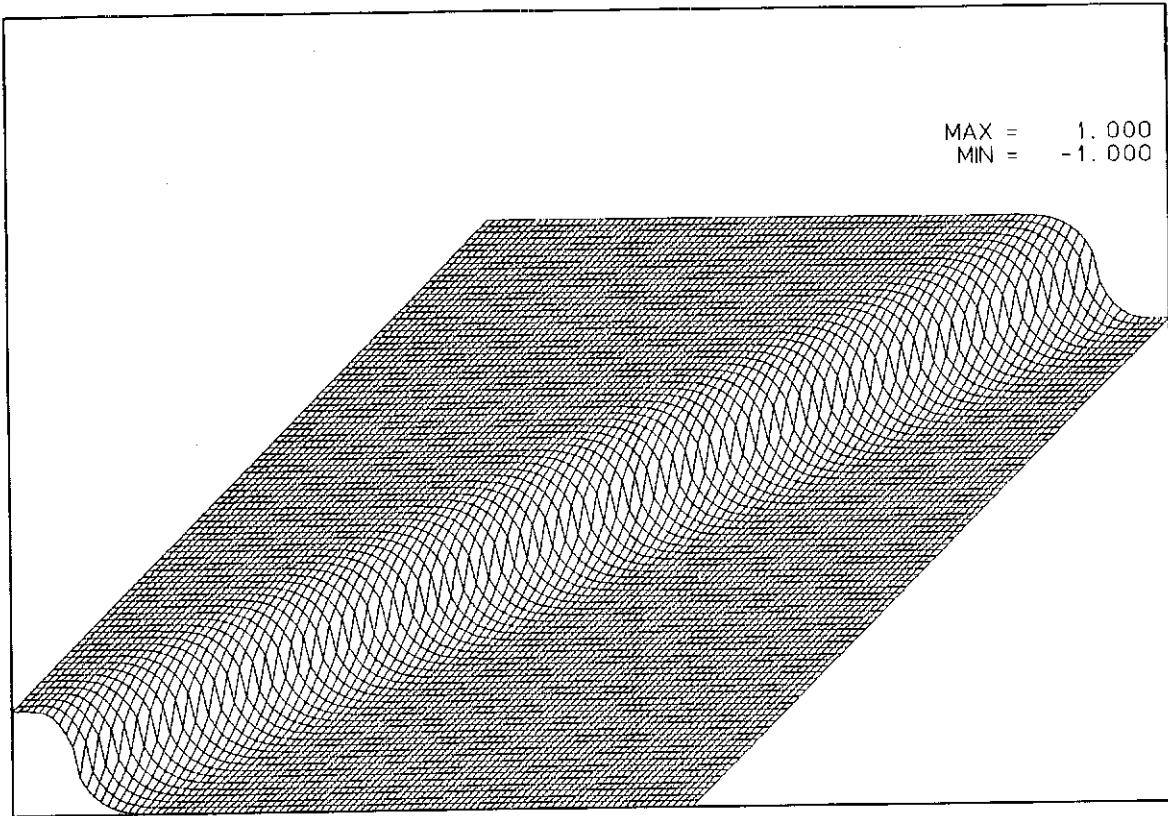
Figur 5.13 Godunov Verfahren



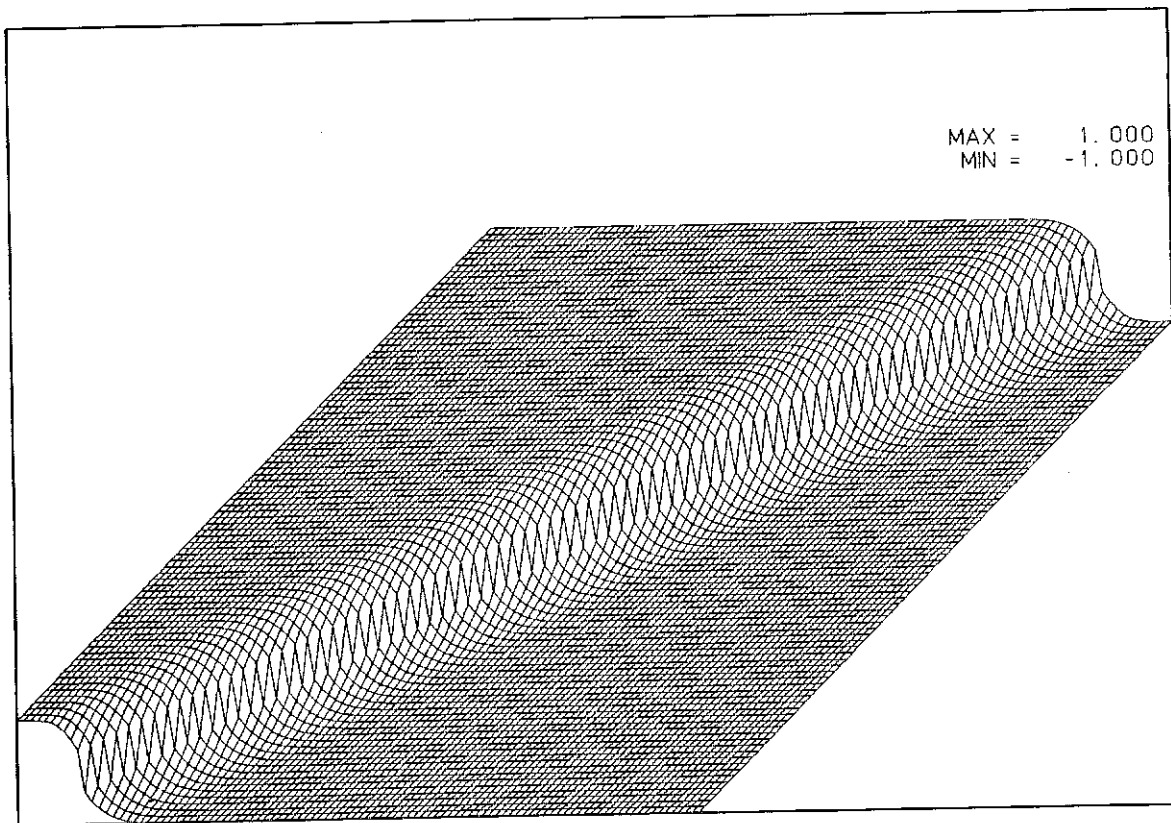
Figur 5.14 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.29) ϕ_1 , Godunov V.



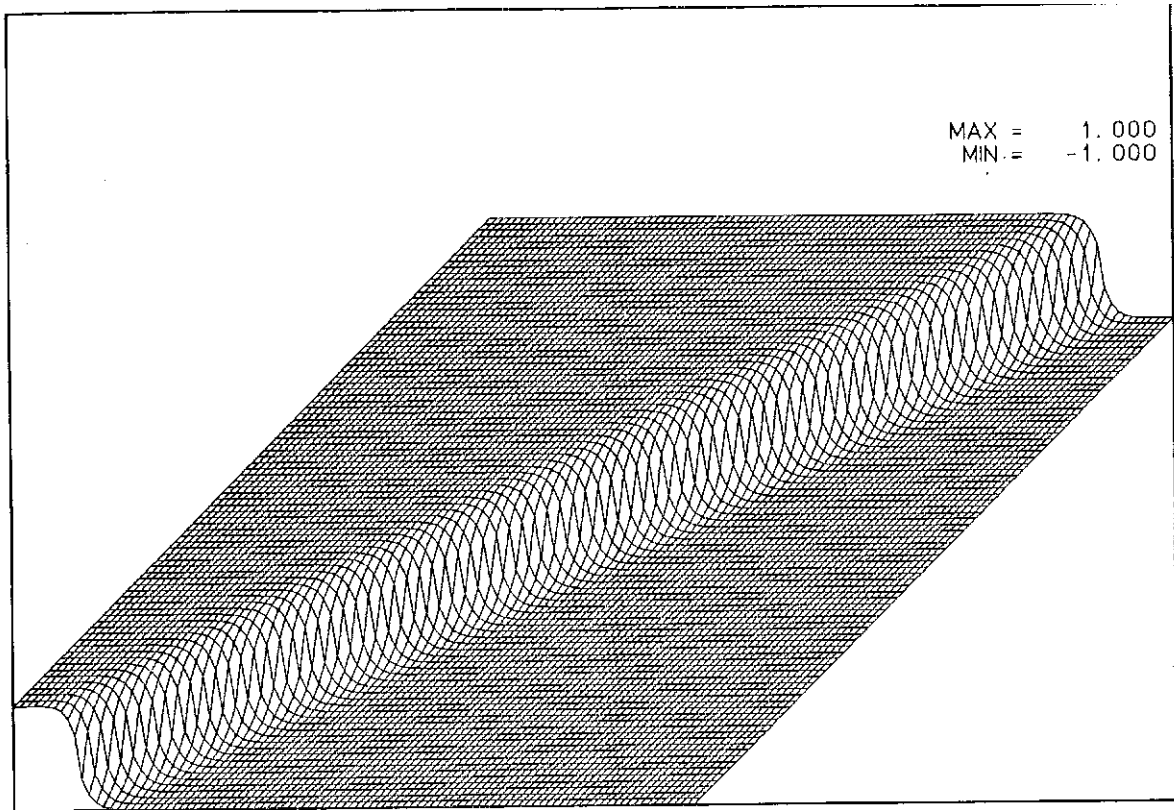
Figur 5.15 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.30) ϕ_2 , Godunov V.



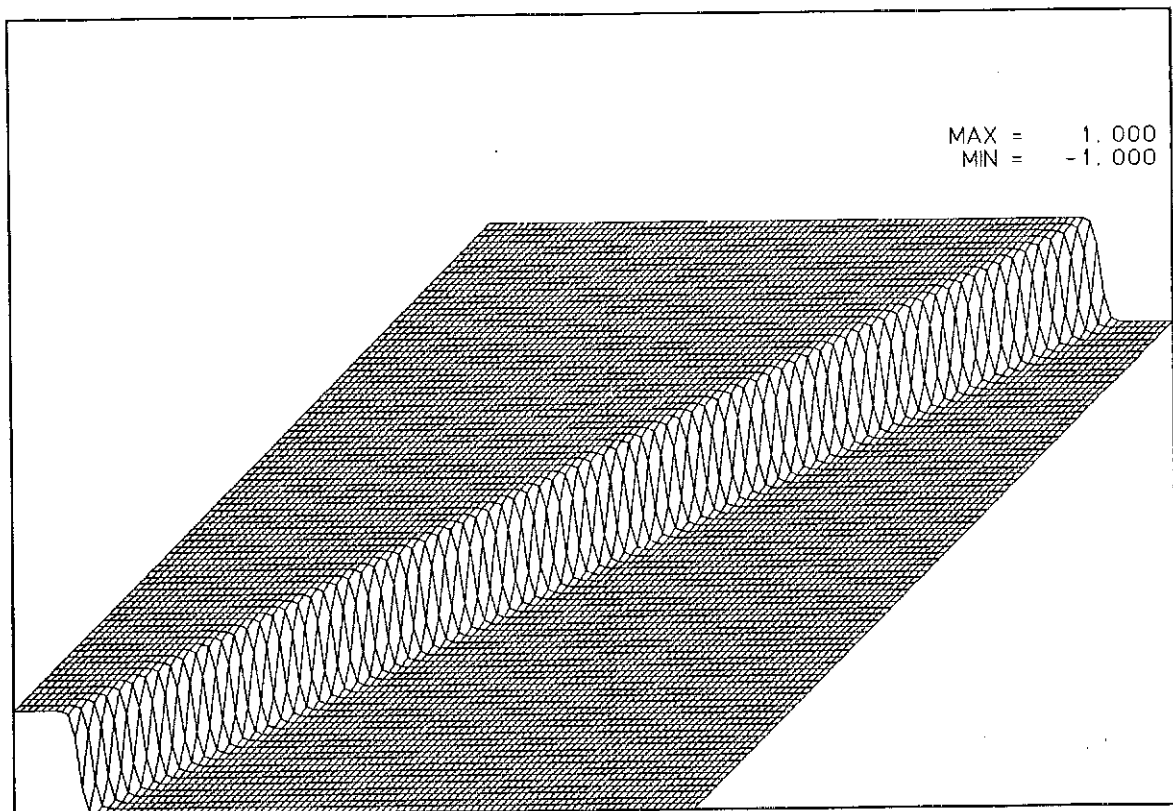
Figur 5.16 Engquist-Osher Verfahren



Figur 5.17 Godunov-Verfahren



Figur 5.18 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.29) ϕ_1 , Godunov V.



Figur 5.19 MUSCL-Typ Verfahren: Umschaltfunktion (4.30) ϕ_2 , Godunov V.

Die schwächere Dämpfung von Stoßwellen ist ein typisch nichtlineares Phänomen und läßt sich folgendermaßen etwas klar machen. Bei einer Stoßwelle laufen von beiden Seiten Charakteristiken in die Stoßwelle hinein und es entsteht ein Fluß durch die Stoßwelle hindurch. Die Lösung in einem Punkte der Stoßwelle wird bestimmt durch diese Charakteristiken und den Anfangswerten an deren Fußpunkt ((x, t)-Ebene). Der bisherige Verlauf der Stoßwelle und die Werte der Lösung dort hat keinen Einfluß (Abhängigkeitsgebiet!). Demgegenüber fällt bei einer Kontaktunstetigkeit die Ausbreitungskurve der Unstetigkeit gerade mit einer Charakteristik zusammen, wie wir dies von einem linearen hyperbolischen Problem her kennen. Eine Kontaktunstetigkeit tritt auf für ein sogenanntes linear entartetes Problem. Der Abhängigkeitsbereich eines Punktes der Kontaktunstetigkeit ist gerade deren Ausbreitungskurve. Die Lösung in einem Punkt hängt somit ab von allem, was vorher entlang dieser Charakteristik passiert ist. Eine konstante numerische Dissipation entlang dieser führt somit zum stetigen zeitlichen Anwachsen der Dämpfung der Unstetigkeit.

An Hand dieser einfachen Beispiele ist es sehr schwer, eine Beurteilung der MUSCL-Typ Verfahren und der Flußlimiter-Verfahren durchzuführen, da verschiedene Verfahren dieser Klassen fast identische Resultate liefern. So hat der Wechsel von monotonen Verfahren kaum eine Änderung der Ergebnisse zur Folge. Eine Ausnahme hierbei ist das Godunov Verfahren angewandt auf stationäre Stoßwellen. Bei der Anwendung verschiedener Umschalt- oder Limiterfunktionen sieht man ebenso bei diesen einfachen Problemen nur dann deutliche Unterschiede, wenn man die beiden Grenzfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 vergleicht. Für unsere Testprobleme hier ist die Anwendung von ϕ_2 unproblematisch. Wir möchten aber nochmals darauf hinweisen, daß ϕ_2 für komplexe Probleme Schwierigkeiten bereiten kann, indem alle monotonen Übergänge in eine Unstetigkeit gepreßt werden. Im nächsten Abschnitt werden wir ein Testproblem vorstellen, welches die Beurteilung der verschiedenen Steigungsberechnungen ermöglicht.

6.0 Experimente zur numerischen Dämpfung

In diesem Abschnitt wollen wir nochmals die Dämpfungseigenschaften der vorgestellten numerischen Verfahren betrachten, speziell die der verschiedenen Steigungsberechnungen. Die **numerische Dämpfung der Stoßwellen** spielt sicherlich eine bedeutende Rolle bei mehrdimensionalen Problemen mit komplexen Strukturen. Auf Grund von Rechenzeit und Speicherplatzbedarf muß man Stoßwellen auf möglichst wenig Gitterpunkte auflösen können. Insbesondere bei der Berechnung von stationären Lösungen spielt die **numerische Dämpfung der Kontaktunstetigkeiten** oft eine genauso wichtige Rolle, da - wie wir in Kapitel 5 gesehen haben - diese Dämpfung im Gegensatz zu den Stoßwellen mit der Zeit zunimmt. Man kann somit erwarten, daß die asymptotische numerische Lösung für $t \rightarrow \infty$ gar keine Kontaktunstetigkeiten mehr enthält. Um speziell diese numerische Dämpfung zu untersuchen haben wir ein zweidimensionales lineares Problem aufgegriffen, welches schon oft als Testproblem benutzt wurde (siehe z.B. [75]). Dies ist ein Anfangswertproblem für die lineare Advektionsgleichung

$$(6.1) \quad u_t + a(y) u_x + b(x) u_y = 0$$

mit den Koeffizienten

$$(6.2) \quad a(y) = -(y - y_0) \omega, \quad b(x) = (x - x_0) \omega$$

und Anfangswerten $u(x, y, 0) = q(x, y)$. Die exakte Lösung dieses Problems ist gerade die Drehung der Anfangswerte um den Punkt (x_0, y_0) mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Wir untersuchen hier die Approximation zweier verschiedener Typen von Anfangswerten: ein Kegel und ein ausgeschnittener Zylinder. Die numerischen Ergebnisse für den Kegel zeigen deutlich die Approximation von Extremwerten (Kegelspitze), während der Zylinder die Verschmierung von Unstetigkeiten.

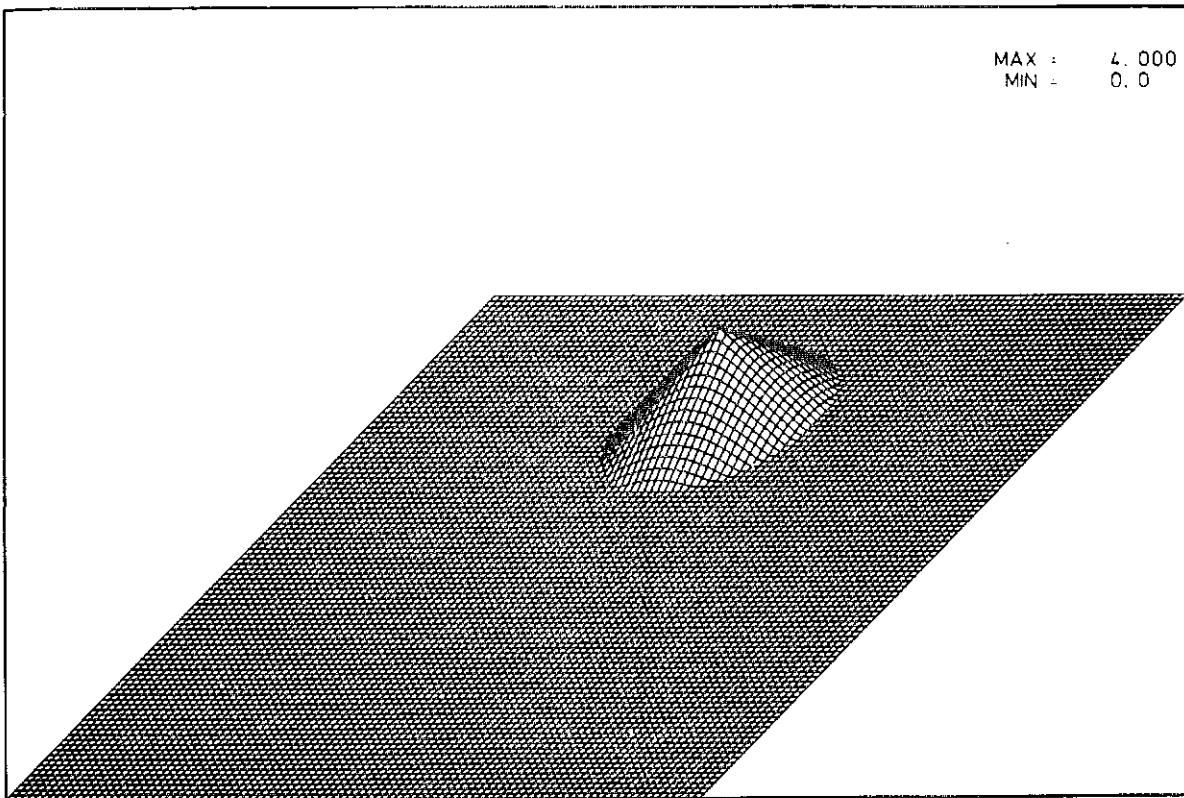
Für die numerischen Rechnungen benutzten wir die folgenden Werte: Das Rechengebiet ist das Rechteck $[0, 100] \times [0, 100]$ in der (x, y) -Ebene, die Winkelgeschwindigkeit ω betrug 0.1 und der Drehpunkt ist $x_0 = 50, y_0 = 50$. Approximiert wurden die beiden Probleme auf einem 100×100 Punkte Gitter. In Figur 6.1 und 6.2 sind die Anfangswerte auf diesem Gitter aufgezeichnet. Die Grundfläche des Kegels hat einen Radius von 15, die Höhe des Kegels ist 4. Sein Mittelpunkt ist der Punkt $(75, 50)$. Der ausgeschnittene Zylinder besitzt denselben Radius und

Mittelpunkt und dieselbe Höhe. Diese Anfangswerte werden nun durch die Gleichung (6.1), (6.2) um den Mittelpunkt des Rechengebiets gedreht. Nach $t = 20 \pi$ ist eine vollständige Drehung ausgeführt und die exakte Lösung stimmt gerade wieder mit den Anfangswerten überein. Wir zeigen im folgenden Ergebnisse von **Rechnungen über große Zeiten**, nämlich nach einer vollen Umdrehung und nach sechs vollen Umdrehungen. Dies entspricht der Anzahl von **628** bzw. **3768 durchgeführten Zeitschritten** ($\Delta t = 0.1$). Bei solchen Langzeitrechnungen werden natürlich die Einflüsse der numerischen Dissipation sehr deutlich.

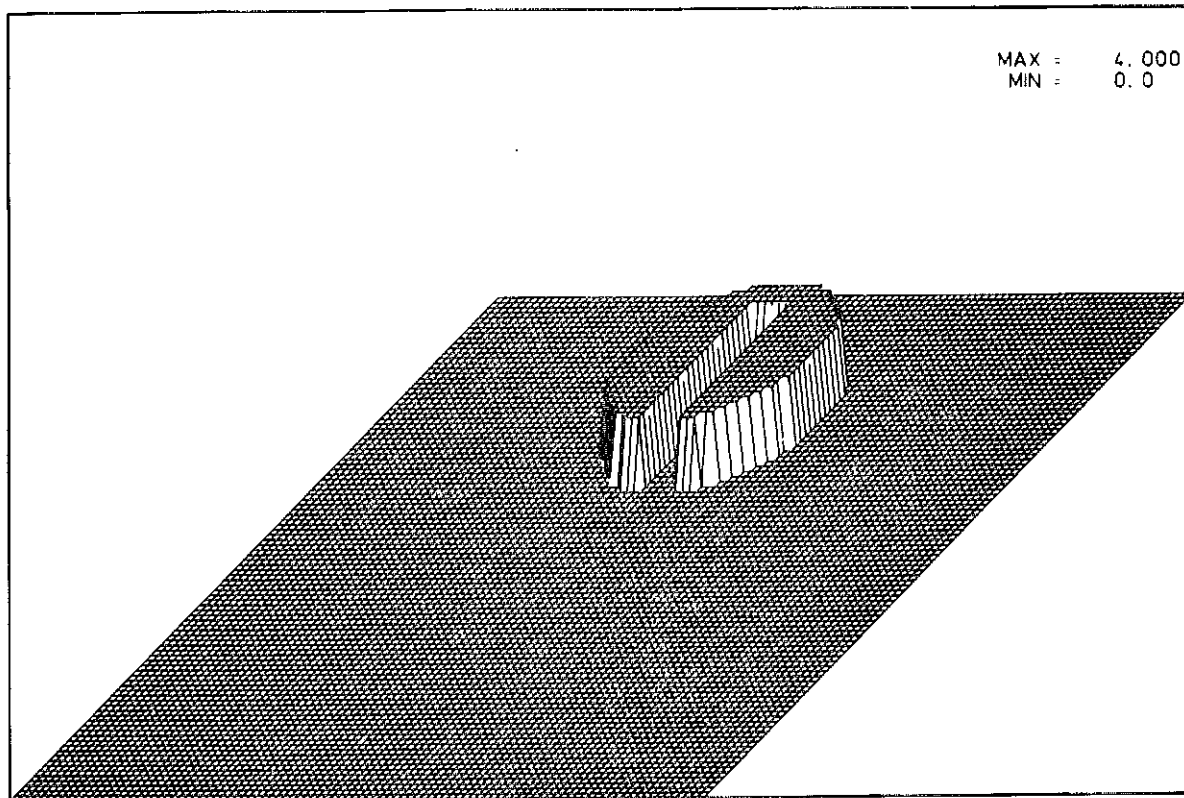
Für die lineare Gleichung (6.1) sind alle monotonen Verfahren identisch mit dem Verfahren von Courant, Isaacson und Rees. Figur 6.3 zeigt die Ergebnisse dieses Verfahrens erster Ordnung. Links sind die Ergebnisse des Kegels nach einer vollen (628 Zeitschritte) und darunter nach sechs vollen (3768 Zeitschritten) Umdrehungen abgebildet. Rechts die Ergebnisse für den Zylinder. Schon nach einer Umdrehung sind die Figuren total verschmiert und fast nicht mehr zu erkennen. Das Maximum der Figuren fällt von 4.0 auf 1.202 bzw. 2.155. Dies zeigt deutlich, daß ein Verfahren erster Ordnung für praktische Berechnungen üblicherweise nicht in Frage kommt.

Die nächste Figur 6.4 zeigt die Ergebnisse für ein klassisches Verfahren zweiter Ordnung: das klassische Lax-Wendroff Verfahren (4.4) mit der zentralen Differenzenbildung. Es zeigt sich deutlich, daß numerische Oszillationen erzeugt werden. Beim Kegel treten sie an den Fußpunkten auf (Unstetigkeit der Ableitung). Im Falle der unstetigen Anfangswerte sind diese Oszillationen deutlich stärker, das Maximum wird deutlich erhöht und das Minimum wird deutlich negativ. Die Oszillationen führen weiterhin zur Störung der Symmetrie und zu Fehlern in der Position der Figuren. Das klassische Verfahren von Warming und Beam liefert ähnliche Ergebnisse. Die Oszillationen sind hier etwas schwächer und auf der anderen Seite der Figuren (ohne Bild).

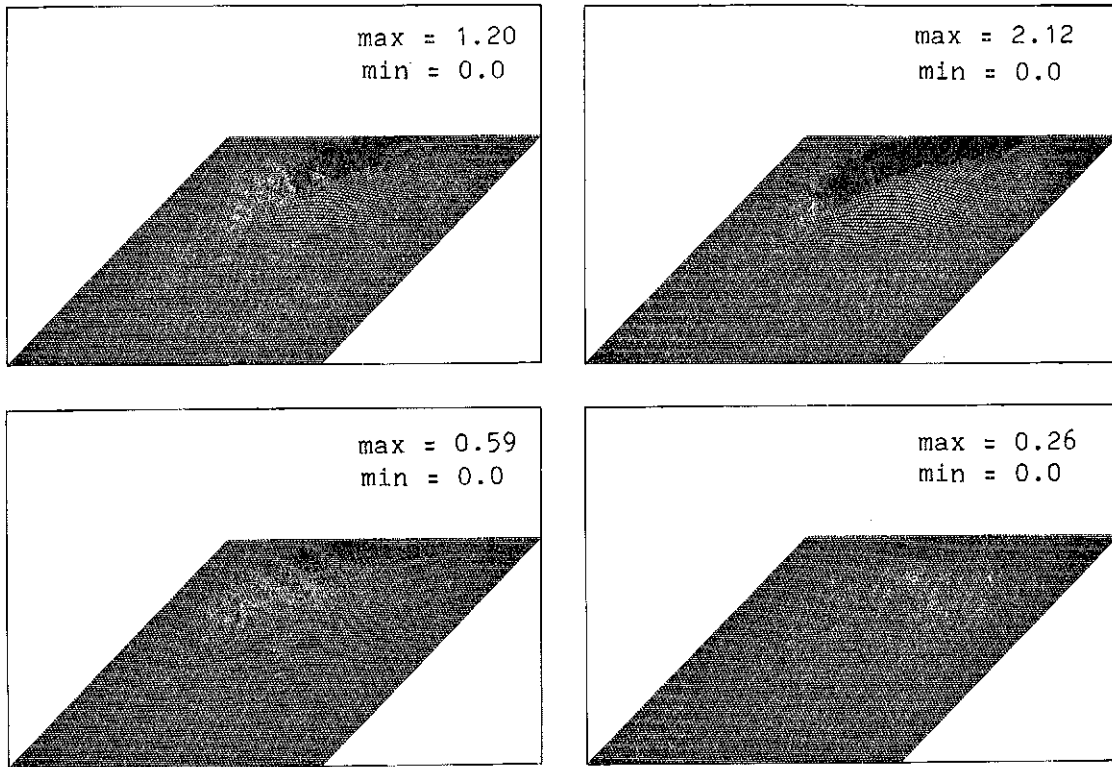
Wir wenden uns nun dem MUSCL-Typ und Flußlimiter Verfahren zu. Für den hier betrachteten linearen Fall sind beide Methoden identisch, d.h. die für unser Problem (6.1), (6.2) erzielten Ergebnisse zeigen die Eigenschaften der verschiedenen Steigungsberechnungen bzw. Umschalt- oder Limiterfunktionen. In Figur 6.5 sehen wir schon, daß diese Verfahren ganz deutlich bessere Ergebnisse liefern, selbst bei der einfachsten Steigungsberechnung s_1 . Deutlich besser sind die Resultate für s_2 (Figur 6.6). Selbst nach sechs Umdrehungen ist etwa der Zylinder



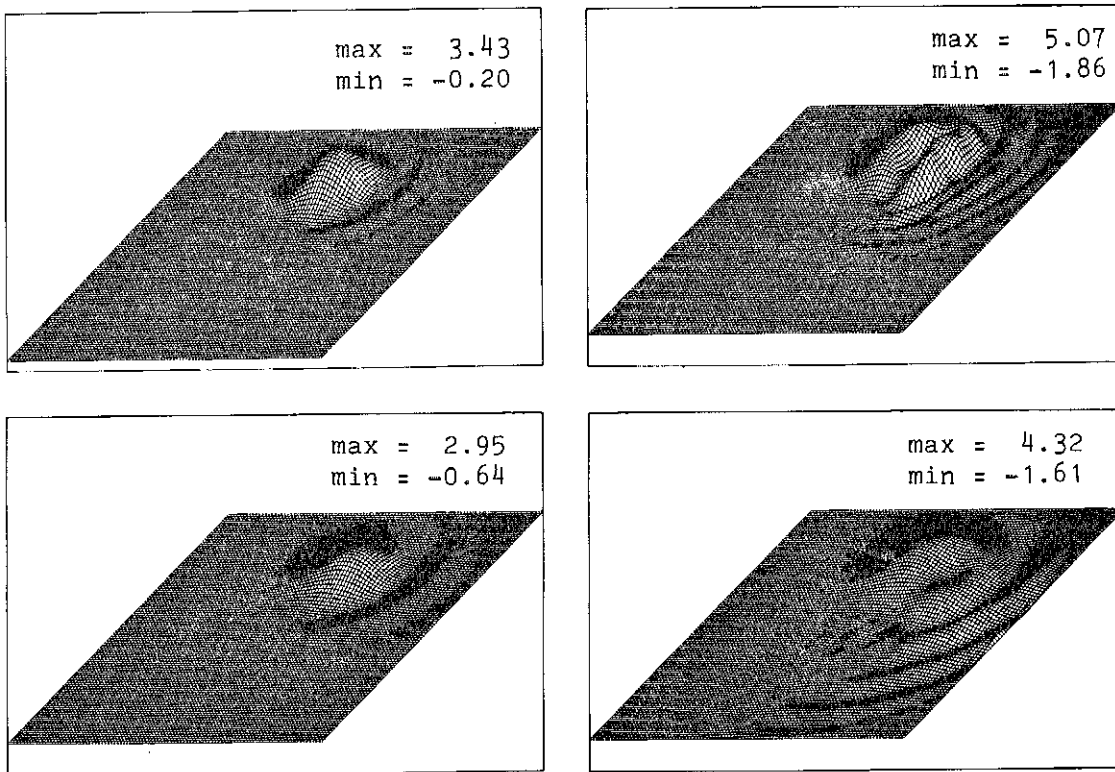
Figur 6.1 Anfangswerte und exakte Lösung für $t = 20 k \pi, k \in \mathbb{N}$, Kegel



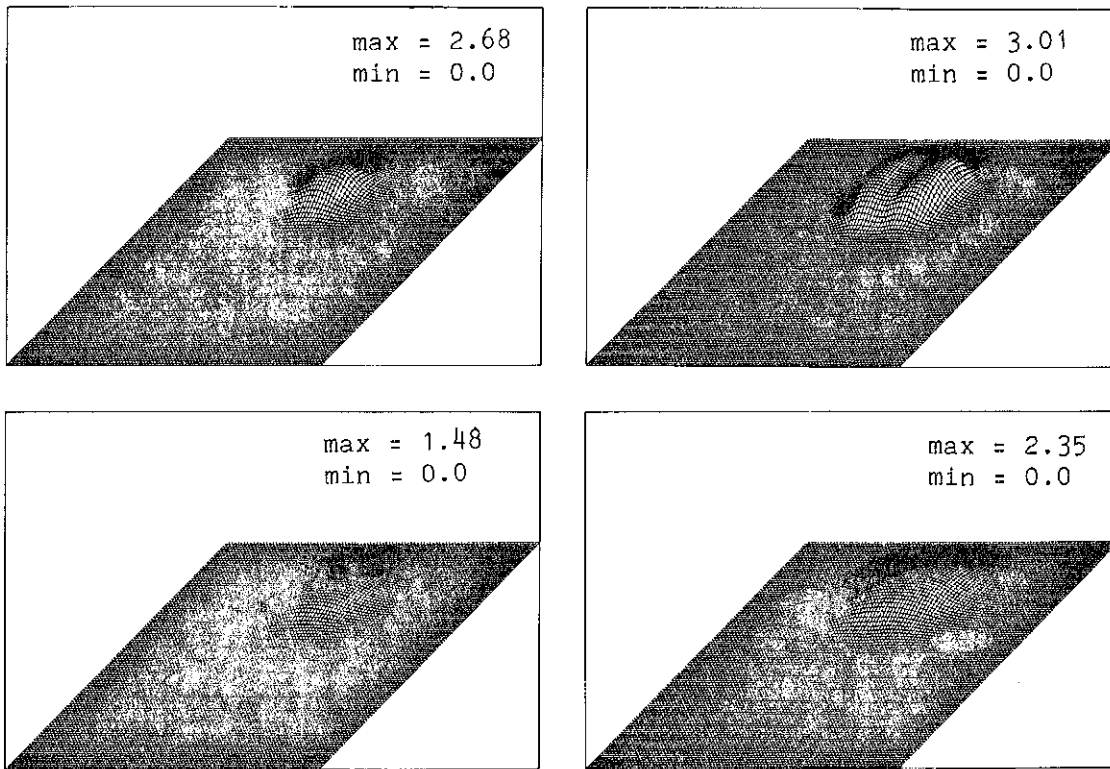
Figur 6.2 Anfangswerte und exakte Lösung für $t = 20 k \pi, k \in \mathbb{N}$, Zylinder



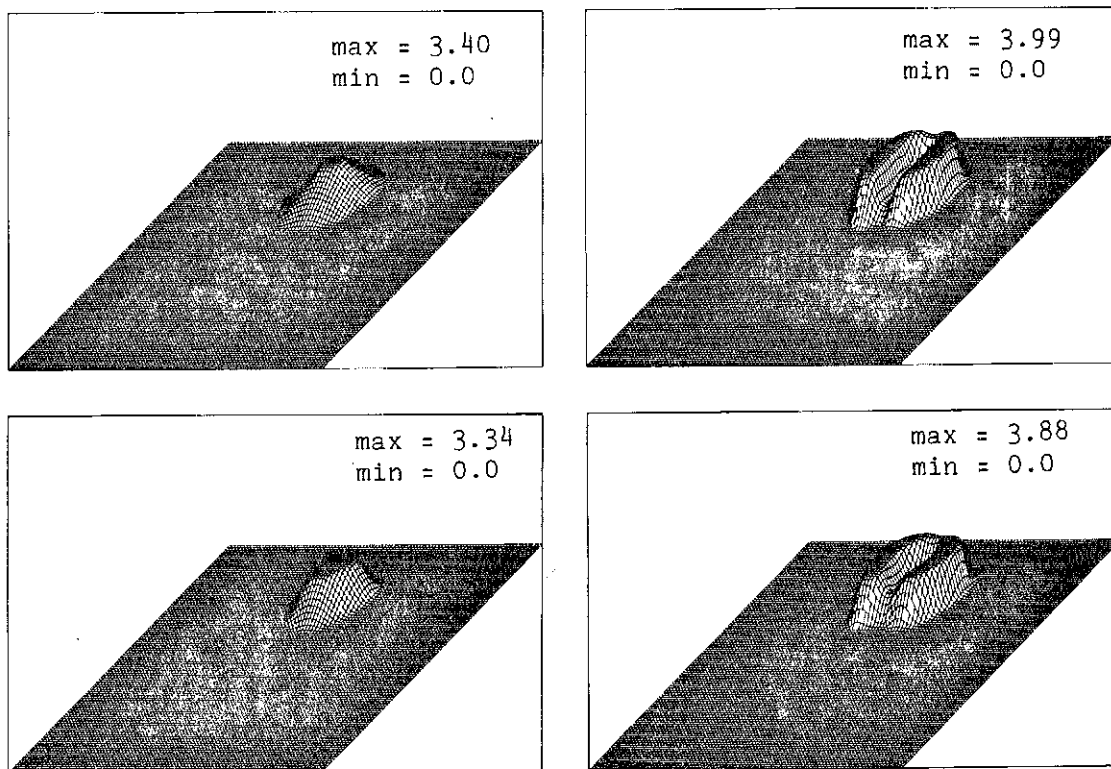
Figur 6.3 Courant-Isaacson Rees Verfahren



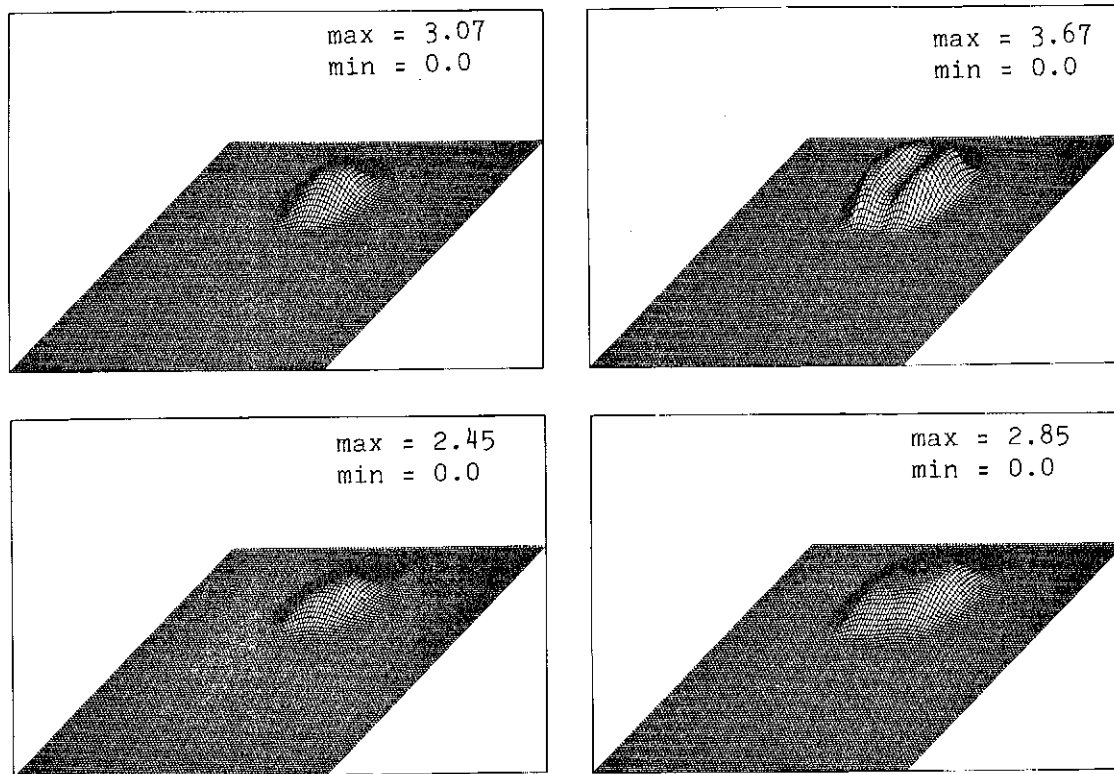
Figur 6.4 Lax-Wendroff Verfahren



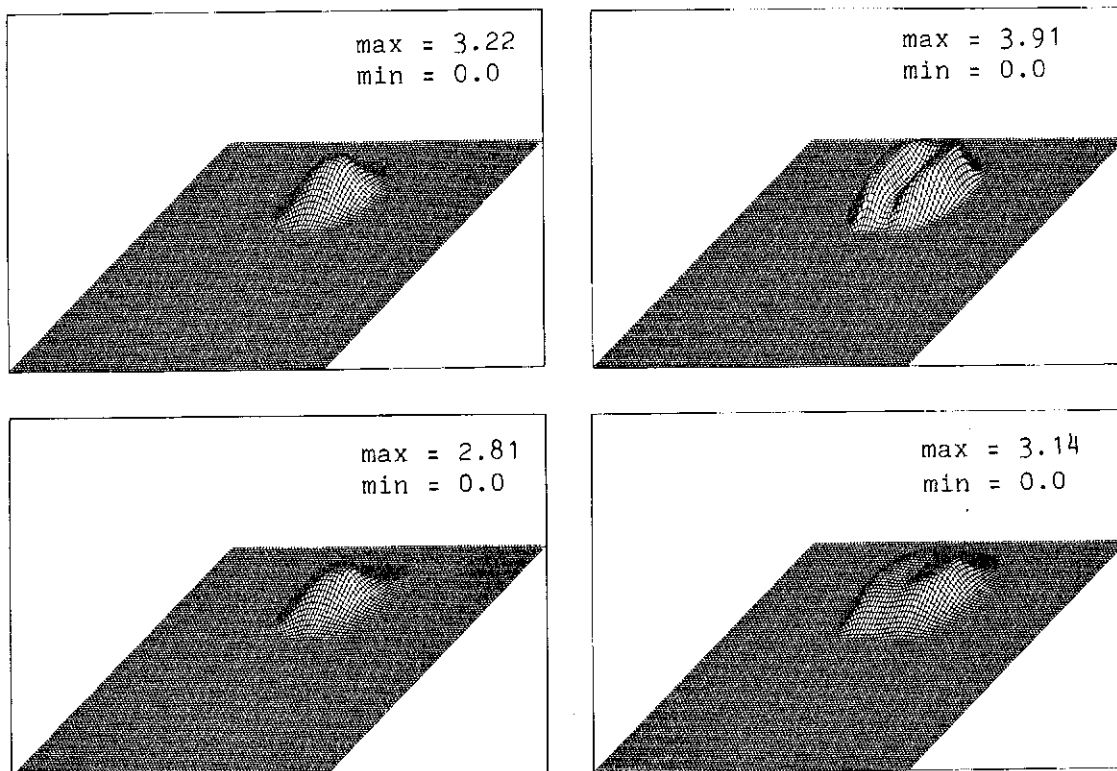
Figur 6.5 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung S_1



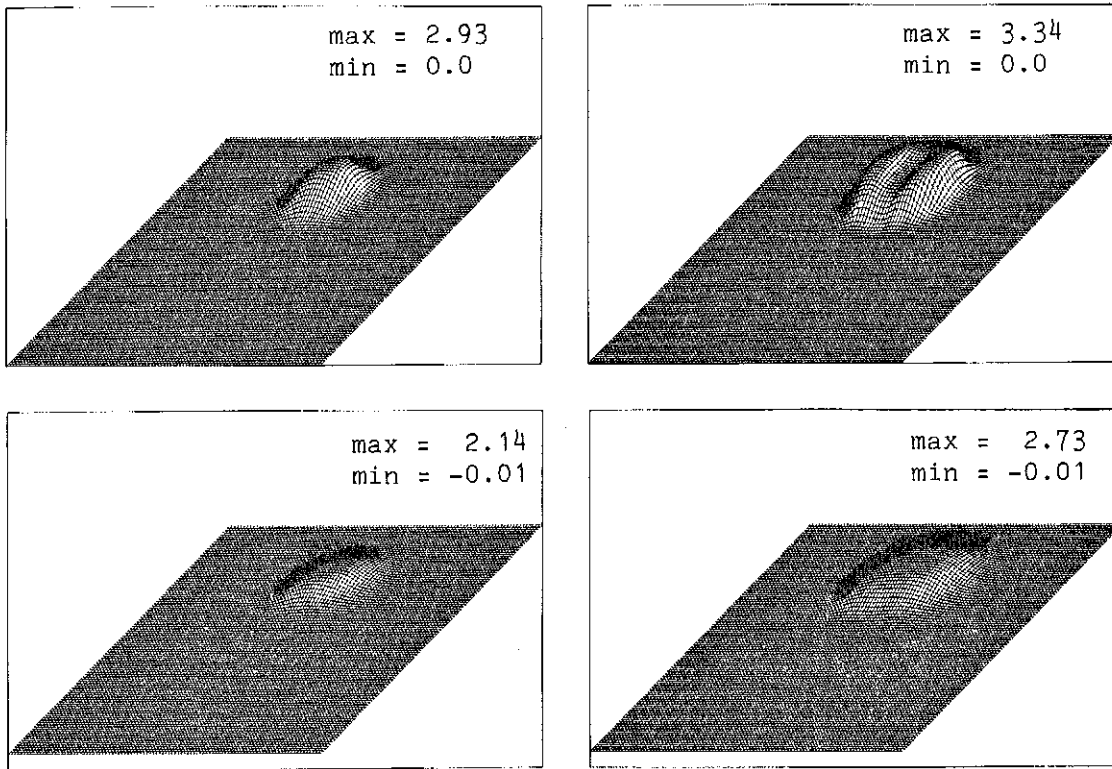
Figur 6.6 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung S_2



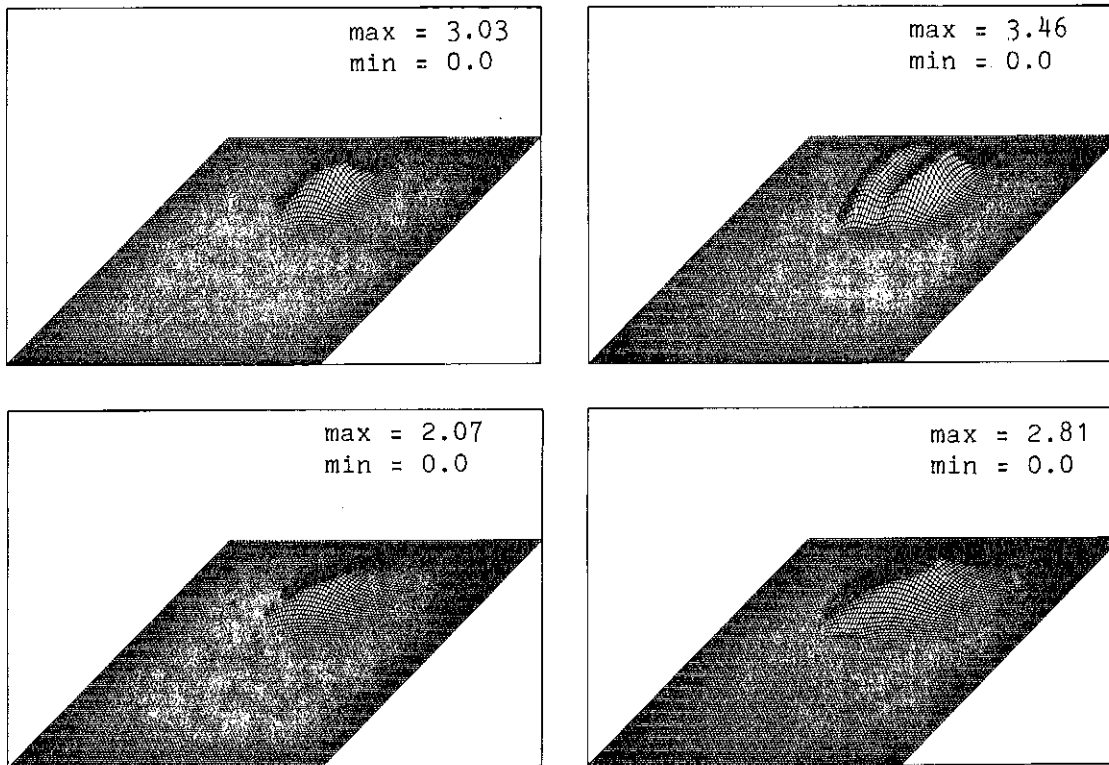
Figur 6.7 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung S_{VL}



Figur 6.8 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung S_M



Figur 6.9 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung S_{VA}



Figur 6.10 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung S_{Co} , $k = 2$

noch deutlich zu erkennen. Es ist sogar so, daß bei weiteren Umdrehungen diese Form nahezu erhalten bleibt. Die numerische Dämpfung scheint zum Stillstand zu kommen. Dies ist etwas überraschend und begründet sich darin, daß diese Verfahren nichtlinear sind, selbst im Falle der linearen Gleichung (6.1), (6.2). Den typischen Clipping-Effekt sieht man bei der Approximation des Kegels; die Spitze des Kegels wird abgeschnitten. Sehr deutlich wird dies nach sechs Umdrehungen des Kegels. Der Kegel flacht ab. Gleichzeitig stellen sich die Seiten hoch, d.h. der Kegel strebt gegen einen Zylinder. Dies zeigt die schon angesprochene Eigenschaft von s_2 , daß jeder monotone Übergang in eine Unstetigkeit gedrückt wird. Für nichtlineare Probleme mit starken Stoßwellen kann dies zu Schwierigkeiten führen und man sollte in (4.31) den Wert für k kleiner als 2 wählen oder eine schwächere Steigungsberechnung wählen.

Das Clipping Phänomen ist bei weitem nicht so ausgeprägt bei den Steigungsberechnungen s_{VL} , s_M , s_{VA} und s_{CO} , deren Ergebnisse in den Figuren 6.7 - 6.10 festgehalten sind. Jedoch ist auch die numerische Dämpfung etwas stärker. Deutlich ist die Symmetrie bei der Steigungsberechnung s_{CO} gestört. Sie genügt nicht der Symmetriebedingung (4.35).

Die Ergebnisse können wir hier kurz wie folgt zusammenfassen:

Der MUSCL Ansatz oder auch der Flußlimiter Ansatz reduzieren sehr effektiv die numerische Dämpfung der monotonen Verfahren erster Ordnung, ohne daß numerische Oszillationen oder Instabilitäten wie bei den klassischen Verfahren zweiter Ordnung eintreten. Die beste Auflösung von Unstetigkeiten erzielt man mit s_2 . Sie produziert exzellente Resultate für das Zylinderproblem, zeigt aber auch ein starkes Clipping für den Kegel. Die Ergebnisse für den Kegel zeigen aber auch, daß s_2 etwas zu steile Steigungen liefern kann, welche jeden monotonen Übergang aufsteilt. Für nichtlineare Probleme kann dies zu Schwierigkeiten führen. Die anderen Steigungen produzieren recht ähnliche Ergebnisse. Sehr wichtig für die Erhaltung von Symmetrien ist die Bedingung (4.35).

7.0 Verschiedenes

Bisher haben wir die Gleichungen als auch die zugehörigen Differenzenformeln möglichst einfach und übersichtlich gehalten, d.h. wir haben uns zum Beispiel auf ein äquidistantes Gitter oder auf explizite Verfahren beschränkt. In diesem Abschnitt wollen wir noch einige Anmerkungen los werden, die zeigen, wie man die vorgestellten Verfahren auf allgemeine Situationen anwendet.

7.1 Nichtäquidistante und bewegte Gitter

Man wird oft in der Praxis Probleme vorgesetzt bekommen, bei denen nur in gewissen Teilbereichen des Rechengebietes große Änderungen der Größen stattfinden, während in anderen Bereichen es sehr ruhig bleibt. Hier ist es natürlich nützlich, mit einem nichtäquidistanten Gitter zu arbeiten. In Bereichen großer Änderungen kann man Gitterpunkte konzentrieren und somit dort die Genauigkeit erhöhen. Ein äquidistantes Gitter mit gleicher Auflösung würde weit mehr Rechenzeit und Speicherplatz benötigen. Die Formulierung eines Verfahrens in Erhaltungsform auf einem nichtäquidistanten Gitter bereitet keine große Schwierigkeiten und besteht eigentlich nur darin die konstanten Schrittweiten durch lokale Schrittweiten zu ersetzen.

Wir beschränken uns hier auf eine Raumdimension; völlig analog erhält man dies auch für mehrere Dimensionen. die Gitterintervalle seien durch die Festlegung der Randpunkte $x_{i+1/2}$ gegeben. Die Schrittweite im i -ten Gitterintervall ist dann gerade

$$(7.1) \quad \Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} .$$

Analog definieren wir den lokalen Zeitschritt

$$(7.2) \quad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n .$$

Wir können nun unser Verfahren in Erhaltungsform auf nichtäquidistantem Gitter genau in der Form (3.8) schreiben:

$$(7.3) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x_i} \left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n \right) ,$$

wobei nur das konstante Schrittweitenverhältnis λ ersetzt wurde. Alles andere bleibt gleich.

Wir wollen nun ein Schritt weiter gehen und gestatten, daß sich die Gitterpunkte von Zeitschritt zu Zeitschritt bewegen dürfen. Bei einer geeigneten Steuerung dieser Bewegung könnte man die Gitterpunkte immer dort konzentrieren, wo große Änderungen der Lösung stattfinden. Gegeben sind die Gitterintervalle wieder durch die Festlegung der Randpunkte, deren Koordinaten jetzt aber zeitabhängig sind:

$$(7.4) \quad x_{i+1/2}^n$$

Wir integrieren nun die Differentialform der Erhaltungsgleichung über die Gittervierecke, bestimmt durch die Punkte

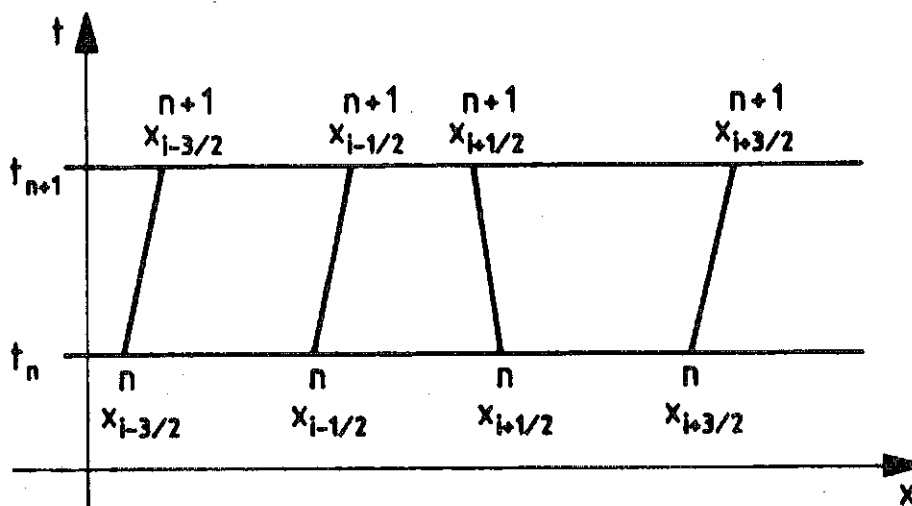
$$(7.5) \quad x_{i-1/2}^n, x_{i+1/2}^n, x_{i+1/2}^{n+1}, x_{i-1/2}^{n+1}$$

(siehe Figur 7.1). Das Verfahren in Erhaltungform hat nun statt (7.3) die Gestalt

$$(7.6) \quad \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} = \Delta x_i^n u_i^n - \Delta t_n \left(\bar{g}_{i+1/2}^n - \bar{g}_{i-1/2}^n \right)$$

Dabei sind die Schrittweiten wie folgt definiert:

$$(7.7) \quad \Delta x_i^n = x_{i+1/2}^n - x_{i-1/2}^n$$



Figur 7.1 Bewegtes Gitter

bzw. wie in (7.2). Der numerische Fluß

$$(7.8) \quad \bar{g}_{i+1/2}^n$$

approximiert den physikalischen Fluß durch den rechten Rand des i -ten Gittervierecks, das heißt durch die Strecke

$$(7.9) \quad \overline{x_{i+1/2}^n \ x_{i+1/2}^{n+1}}$$

Die Steigung dieser Strecke bezeichnen wir mit

$$(7.10) \quad m_{i+1/2}^n$$

Der Fluß durch diese Strecke im Zeitintervall $t_{n+1} - t_n$ läßt sich nach (2.18) in der Form

$$(7.11) \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u) - m_{i+1/2}^n u \, dt$$

darstellen, wobei u die Lösung entlang der Strecke (7.9) bezeichnet, d.h. $u = u(x_{i+1/2}(t), t)$.

Damit können wir leicht Verfahren auf einem bewegten zeitabhängigen Gitter in der Form (7.6) angeben, indem wir die in Kapitel 3 entwickelten Verfahren übertragen. Numerische Flüsse g erhält man gerade, indem man diese Verfahren auf die modifizierte Erhaltungsgleichung mit dem Fluß

$$(7.12) \quad f(u) - m_{i+1/2}^n u$$

anwendet. Diese Überlegungen lassen sich natürlich wiederum auf zwei Raumdimensionen verallgemeinern.

Optimal ist natürlich ein bewegtes Gitter abhängig von der Lösung so zu steuern, daß Gitterpunkte in Bereichen starker Gradienten zusammengezogen und in sehr glatten Bereichen verdünnt werden. In einer Raumdimension ist dies insofern nicht so sehr bedeutend, da hier Rechenzeit und Speicheraufwand relativ gering ist, so daß normalerweise im ganzen Gebiet ein sehr feines Gitter benutzt werden kann. In zwei oder drei Raumdimensionen ist dies sehr wünschenswert, jedoch die Steuerung eines solchen Gitters sehr kompliziert. In vielen praktischen Fällen ist es aber zumindest notwendig, Bereiche mit sehr feinen festen Gittern mit solchen mit groben Gittern zu kombinieren (Grid-Patching).

7.2 Randwerte

Wir haben bisher meist das Cauchyproblem für eine skalare Erhaltungsgleichung betrachtet. In den praktischen Rechnungen müssen wir natürlich die ganze reelle Achse einschränken auf ein endliches Rechengebiet. Statt dem Cauchyproblem lösen wir ein Anfangs-Randwertproblem. In den hier betrachteten Beispielen haben wir dies einfach so gelöst, daß wir am Rand die Werte der exakten Lösung vorgeschrieben haben. Diese Vorgehensweise ist natürlich beschränkt auf einfache Testbeispiele, da die exakte Lösung sonst nicht vorliegt (außer für Testzwecke würde dies das numerische Lösen überflüssig machen). Für allgemeine praktische Probleme, insbesondere auch für Systeme von Erhaltungsgleichungen ist die Vorgabe geeigneter Randwerte aber auch oft eine schwierige Aufgabe.

Betrachten wir zunächst das exakte Problem. Schränken wir ein Cauchyproblem auf ein endliches Gebiet ein, so ist dort die Lösung nur dann überall bestimmt, wenn wir Randwerte an all jenen Randpunkten vorschreiben, an denen die Charakteristiken in das Gebiet hineinlaufen. Bei herauslaufenden Charakteristiken ist dies nicht nötig, hier wird die Information hinaus transportiert. Schauen wir unsere Differenzenformeln an: Formal benötigen wir in jedem Zeitschritt Randwerte rechts und links. Laufen die Charakteristiken an einem Rand aus dem Rechengebiet heraus, so wird dort das Upwind Verfahren diesen Randwert zur Flußberechnung nicht benutzen. Das Upwind Verfahren wird die Randwerte, wie durch die Charakteristikentheorie vorgegeben, in der numerischen Lösung berücksichtigen. "Falsche" vorgegebene Randwerte haben somit keinen Einfluß auf die Lösung im Innern des Rechengebiets. Welche Randwerte vorgeschrieben werden, muß natürlich das physikalische Problem bestimmen. Ist am linken Rand ein Überschallbereich, so müssen geeignete Randwerte vorgegeben sein und diese beeinflussen die Lösung im inneren Rechengebiet. Ist am rechten Rand ein Überschallbereich, so werden vorgegebene Randwerte in der numerischen Lösung nicht berücksichtigt und ihr Einfluß bleibt auf den Randpunkt beschränkt.

Eine andere Frage ist, wie gibt man am besten Randwerte für das Differenzenverfahren vor. Für ein Verfahren erster Ordnung definiert man zusätzlich zu den Gitterzellen im Rechengebiet noch Randgitterzellen an beiden Rändern und schreibt dann dort diese Randwerte vor. In einem Computerprogramm ist diese so am einfachsten zu organisieren und auch zu vektorisieren. Für die Verfahren zweiter Ordnung nimmt man entweder zwei solche "Dummy" Randzellen auf beiden Seiten oder schreibt neben dem Randwert auch die Steigung in den Randgitterzellen auf beiden Seiten vor.

7.3 Quellterme

Bisher haben wir nur homogene Probleme betrachtet, das heißt Erhaltungsgleichungen ohne Quellterme. In der Praxis kommt es jedoch oft vor, daß Quellterme in den Gleichungen auftreten. Man denke hier nur etwa an eine Strömung mit äußerer Energiezufuhr oder mit ablaufenden chemischen Reaktionen. Eine solche **inhomogene Erhaltungsgleichung** hat dann die Form

$$(7.13) \quad u_t + f(u)_x = q$$

wobei der Quellterm q von x , t und u abhängen kann.

Eine sehr einfache Möglichkeit der numerischen Behandlung der inhomogenen Gleichung (7.13) ist die Anwendung eines **Splitting Verfahrens** ([41]). Gleichung (7.13) wird zerlegt in den homogenen Teil

$$(7.14) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

und in den reinen inhomogenen Teil

$$(7.15) \quad u_t = q(x, t, u) .$$

In einem Zeitschritt wird nun zunächst (7.14) gelöst mit einem in den vorigen Kapiteln vorgestellten Verfahren und danach wird (7.15) gelöst. Günstig ist auch hier, wieder die Doppelzyklus-Methode von Strang [65] anzuwenden und im nächsten Zeitschritt die Reihenfolge zu vertauschen. Die Gleichung (7.15) ist im Prinzip eine gewöhnliche Differentialgleichung und man kann somit alle hierfür bekannten Näherungsverfahren anwenden.

Die einfachste Approximation von (7.15) wäre natürlich das **explizite Eulerverfahren**

$$(7.16) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t q(x_i, t_n, u_i^n) .$$

Dies ist natürlich nur eine Approximation erster Ordnung und bleibt auch nur stabil solange der Quellterm relativ klein ist. Ein Verfahren zweiter Ordnung für den homogenen Teil sollte man natürlich auch mit einem Verfahren zweiter Ordnung für den inhomogenen Teil kombinieren. Eine sehr schnelle Methode ist das **Praediktor-Korrektor-Verfahren von Heun**. Einem Praediktor vom Typ (7.16)

$$(7.17) \quad u_i^{n+1/2} = u_i^n + \Delta t q(x_i, t_n, u_i^n)$$

wird der Korrektor

$$(7.18) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left(q(x_i, t_n, u_i^n) + q(x_i, t_{n+1}, u_i^{n+1/2}) \right)$$

angefügt. Dabei können mit (7.18) mehrere Iterationen ausgeführt werden. Im Allgemeinen bringen mehr als zwei Iterationen keine wesentlichen Verbesserungen mehr. Für sehr starke Quellterme muß auch dieses Verfahren durch ein implizites Verfahren ersetzt werden, etwa durch

$$(7.19) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left[q(x_i, t_n, u_i^n) + q(x_i, t_{n+1}, u_i^{n+1}) \right]$$

Diese (nichtlinearen) Gleichungen müssen dann allerdings iterativ gelöst werden.

Dieses recht einfache Splitting Schemata liefert in praktischen Rechnungen meist recht brauchbare Ergebnisse. Die Abspaltung der Quellterme hat natürlich noch weitere Vorteile, so zum Beispiel kann man die numerische Approximation der Quelle recht leicht ändern oder austauschen und so auf neue Quellterme anpassen. Etwas Unbehagen hat man natürlich mit diesem Splitting, da es die Wellenstruktur unserer Gleichung nicht berücksichtigt. Wir wollen daher noch eine andere Methode ableiten: ein MUSCL-Typ Verfahren mit Quelltermen.

Ein MUSCL-Typ Verfahren für die inhomogene Gleichung (7.13) lautet

$$(7.20) \quad u_{i\pm}^n = u_i^n + \frac{\Delta x}{2} s_i^n$$

$$(7.21) \quad u_{i\pm}^{n+1/2} = u_{i\pm}^n - \frac{\lambda}{2} \left(f(u_{i+}^n) - f(u_{i-}^n) \right) + \frac{\Delta t}{2} q_i^n$$

$$(7.22) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left(g_{i+1/2}^{n+1/2} - g_{i-1/2}^{n+1/2} \right) + \Delta t \bar{q}_i^{n+1/2}$$

wobei g der numerische Fluß eines monotonen Verfahrens sei. Der Quellterm tritt auf im Schritt (7.22) aber auch in dem Zwischenschritt (7.21). Dies kommt daher, daß die Zweischritt Taylorentwicklung für die homogene Erhaltungsgleichung

(4.8), (4.9) modifiziert werden muß. Die Umrechnung der Zeitableitungen in Raumbableitungen ist in der Form (4.2) nicht mehr gültig und muß durch

$$(7.23) \quad u_{tt} = (-f(u)_x + q)_t = -(f(u)_t)_x + q_t = [a(u)(f(u)_x + q)]_x + q_t$$

ersetzt werden.

Wir müssen jetzt noch etwas genauer spezifizieren wie die Quellterme in (7.21) und (7.22) berechnet werden sollen. Mit Gleichung (7.21) wird die Änderung der Randwerte einer Gitterzelle in einem halben Zeitschritt durch den Transport innerhalb der Gitterzelle berechnet. Als Quellterm dort sollte die einfache Berechnung

$$(7.24) \quad q_i^n = q(x_i, t_n, u_i^n)$$

genügen. In (7.22) berechnen wir Werte auf dem neuen Zeitlevel, indem wir die Flüsse zwischen den Gitterzellen berechnen. Durch diese Flüsse werden natürlich auch Einflüsse der Quellterme aus den benachbarten Gitterzellen transportiert. Insofern scheint in (7.22) die einfache Approximation

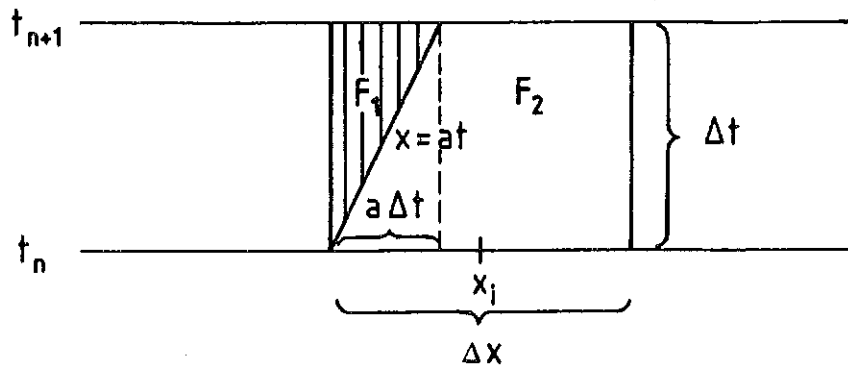
$$(7.25) \quad \bar{q}_i^{n+1/2} = q_i^{n+1/2} = q(x_i, t_{n+1/2}, u_i^{n+1/2}), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i+}^{n+1/2} + u_{i-}^{n+1/2})$$

zu ungenau zu sein.

Wir schauen uns zunächst den linearen Fall

$$(7.26) \quad u_t + a u_x = 0 \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

an. In Figur 7.2 haben wir den Einflußbereich der Lösung (und damit auch des Quellterms) im (i-1)-ten Gitterintervall auf die Lösung im i-ten Gitterintervall schraffiert. Dieser Einfluß drückt sich natürlich in (7.22) in den numerischen Flüssen aus. Jedoch bei einem expliziten Verfahren und der Quelltermberechnung (7.25) ist der Einflußbereich des Quellterms in Gitterzelle i-1 auf Gitterzelle i Null. Für einen sich räumlich stark ändernden Quellterm sollte dies zu Ungenauigkeiten führen. Wir schlagen deshalb vor, diesen Einflußbereich zu berücksichtigen und in diesem linearen Fall den Quellterm in (7.22) folgendermaßen zu berechnen:



Figur 7.2 Einflußbereich

$$(7.27) \quad \bar{q}_i^{n+1/2} = \left(1 - \frac{1}{2} a \lambda\right) q_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} a \lambda q_{i-1}^{n+1/2}$$

Als Gewichte haben wir hier gerade die Flächen F_1 und F_2 genommen.

Dies läßt sich jetzt schnell auf den nichtlinearen Fall verallgemeinern. Wir erhalten

$$(7.28) \quad \bar{q}_i^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\lambda}{2} a_{i-1/2}^+ + \frac{\lambda}{2} a_{i+1/2}^-\right) q_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} a_{i-1/2}^+ q_{i-1}^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} a_{i+1/2}^- q_{i+1}^{n+1/2}$$

mit

$$a_{i+1/2}^+ = \max\left(0, a_{i+1/2}^{n+1/2}\right), \quad a_{i+1/2}^- = \min\left(0, a_{i+1/2}^{n+1/2}\right)$$

und

$$a_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \frac{f\left(u_{i+}^{n+1/2}\right) - f\left(u_{(i+1)-}^{n+1/2}\right)}{u_{i+}^{n+1/2} - u_{(i+1)-}^{n+1/2}} & \text{falls } u_{i+}^{n+1/2} \neq u_{(i+1)-}^{n+1/2} \\ a\left(u_{i+}^{n+1/2}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Definition von $q_i^{n+1/2}$ in (7.25) ist etwas vereinfacht. Gehen wir von der inhomogenen Differentialgleichung (7.13) auf die integrale Formulierung, die dem Verfahren in Erhaltungsform zugrunde liegt, so ergibt sich auf der rechten Seite das Integral der Quelle über das Gitterrechteck $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$.

Dies bedeutet, daß der Wert in (7.25) eine Approximation des Mittelwerts in diesem Gitterrechteck sein sollte. Ändert sich der Quellterm nicht allzu stark in diesem Intervall, so sollte (7.25) eine geeignete Approximation sein.

Diese numerische Behandlung der Quellterme folgt den Ideen von Roe [55] und Klein [31]. Klein erhält ein ganz ähnliches Schema in einer etwas anderen Formulierung. Er addiert zum homogenen Fluß ein Korrekturfluß, der durch den Transport der Quelleinflüsse entsteht. Eine andere Methode zur Behandlung von Quelltermen schlägt van Leer [36] vor.

Testbeispiele zeigten etwas überraschend, daß die Upwind Behandlung (7.20) - (7.22), (7.28) oft nur geringfügige Verbesserungen bringen im Vergleich zu den Splitting Methoden (siehe [52]). Die Splitting Methode ist dabei einfacher und auch besser anzupassen auf spezielle Quellterme. Speziell bei sehr starken Quelltermen kann innerhalb einer Splitting-Methode die Quellterme auch mittels einer impliziten Approximation behandelt werden, wodurch die Stabilität der numerischen Verfahren oftmals verbessert wird. Ausführungen und Bemerkungen zur numerischen Behandlung von sehr starken Quelltermen, üblicherweise steife Quellterme genannt, finden sich in [73].

7.4 Implizite Verfahren

Bei vielen Problemen ist die CFL-Bedingung auch einfach eine Anforderung an die Genauigkeit der Näherungslösung. Werden deutlich größere Zeitschrittweiten benutzt, so werden viele zeitliche Änderungen in der Lösung gar nicht mehr sichtbar: die zeitliche Skalierung der numerischen Lösung stimmt mit der exakten Lösung nicht mehr überein. In einigen Fällen stellt die CFL-Bedingung aber auch eine sehr starke Einschränkung dar. Etwa oftmals in der Aerodynamik wird eine stationäre Lösung gesucht, das heißt die asymptotische Lösung für $t \rightarrow \infty$. Nach einer gewissen Anlaufphase sind die zeitlichen Änderungen recht gering und man möchte mit möglichst großen Schrittweiten den stationären Zustand erreichen. Hier stellt die CFL-Bedingung eines expliziten Verfahrens eine echte Einschränkung dar. In solchen Fällen wird man ein implizites Verfahren benutzen. Die Implizitheit vergrößert den numerischen Abhängigkeitsbereich und schwächt die CFL-Bedingung ab oder hebt sie sogar auf.

Ein Verfahren in Erhaltungsform kann natürlich auch als implizites Verfahren formuliert werden. Für die skalare Erhaltungsgleichung (2.1) hat ein implizites Verfahren in Erhaltungsform die Gestalt

$$(7.29) \quad u_i^{n+1} + \beta \lambda \left(g_{i+1/2}^{n+1} - g_{i-1/2}^{n+1} \right) = u_i^n - (1 - \beta) \lambda \left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n \right)$$

mit $\lambda = \Delta t / \Delta x$ und $\beta \in (0, 1]$. Für $\beta = 0$ ist das Verfahren (7.29) explizit und identisch zum expliziten Verfahren in Erhaltungsform (3.8). Wir betrachten zunächst Verfahren erster Ordnung und nehmen an, der numerische Fluß g sei der eines **monotonen Verfahrens**. Auch hier im impliziten Fall kann man zeigen, daß aus der Monotonie die Gültigkeit einer diskreten Entropiebedingung, der gleichmäßigen Beschränktheit der Näherungslösungen und deren Totalvariation folgt, falls die **Schrittenweitenbedingung**

$$(7.30) \quad (1 - \beta) L \lambda \leq 1$$

erfüllt ist. Für beliebige Zeitschritte ist (7.30) nur dann erfüllt falls $\beta = 1$, d.h. der explizite Teil in (7.29) völlig wegfällt. Mit diesen Eigenschaften und dem Konvergenzsatz (Satz 4, Kapitel 3.3) läßt sich dann leicht der folgende Satz beweisen.

Satz 7.1: Die Anfangswerte q des Cauchyproblems (2.1), (2.2) seien beschränkt, meßbar und von beschränkter Totalvariation. Ist für ein monotones Verfahren in Erhaltungsform (7.29) die Schrittweitenbedingung (7.30) erfüllt, so konvergieren die Näherungslösungen für $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, $\lambda = \text{konst.}$ gegen die physikalisch relevante Lösung im $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Für $\beta = 1$ nennt man das Verfahren (7.29) **vollimplizit**. Nur in diesem Fall existiert keine Schrittweitenbedingung. Bezüglich der Zeitapproximation ist (7.29) von zweiter Ordnung für $\beta = 0,5$. (7.29) stellt ein nichtlineares Gleichungssystem dar, welches im allgemeinen iterativ gelöst werden muß. Im Vergleich zum expliziten Verfahren ist dies natürlich ein sehr großer Rechenaufwand und lohnt sich nur, falls man die Zeitschrittweite um einen Faktor $p = 10$ größer wählen kann, d.h. β muß zumindest nahe der Eins gewählt werden. Für die iterative Lösung von (7.29) ist es natürlich sehr günstig, wenn der numerische Fluß stetig differenzierbar ist. Damit erhält man die Möglichkeit, das nichtlineare Gleichungssystem mit dem schnellen Newton-Verfahren zu lösen. Ein Fluß mit dieser Eigenschaft ist der des Engquist-Osher Verfahrens, wie wir in Abschnitt 3.2 gesehen haben. Für wachsendes β nimmt auch die numerische Dämpfung der Verfahren (7.29) zu. Für

praktische Probleme muß das Verfahren mindestens zweiter Ordnung sein, um gute Ergebnisse zu liefern. Bei der Approximation von stationären Problemen reicht die zweite Ordnung im Raum, da hier die zeitlichen Änderungen im allgemeinen sehr klein sind. Man muß in (7.29) also einen Fluß mindestens zweiter Ordnung wählen. Dieser ist jedoch sicherlich nicht mehr stetig differenzierbar (abgesehen von den klassischen Verfahren). Das nichtlineare Gleichungssystem (7.29) wird dadurch sehr schwierig zu lösen. Einen Ausweg bietet ein Defekt-korrekturen Algorithmus.

Wir gehen aus von einem monotonen Verfahren

$$(7.31) \quad L_{\Delta} u_{\Delta} = f_{\Delta}$$

und einem Verfahren höherer Ordnung

$$(7.32) \quad S_{\Delta} u_{\Delta} = f_{\Delta}$$

Wir schreiben hier diese beiden Verfahren in Operator-Schreibweise. Im nullten Schritt führen wir das Verfahren erster Ordnung

$$(7.33) \quad u_{\Delta}^{(0)} = L_{\Delta}^{-1} f_{\Delta}^{(0)}, \quad f_{\Delta}^{(0)} := f_{\Delta}$$

aus. Die erhaltene Lösung setzen wir dann in das Verfahren höherer Ordnung ein und erhalten den Defekt

$$(7.34) \quad d_{\Delta}^{(1)} = S_{\Delta} u_{\Delta}^{(0)} - f_{\Delta}^{(0)}$$

Mit Hilfe dieses Defekts berechnen wir die neue rechte Seite

$$(7.35) \quad f_{\Delta}^{(1)} = f_{\Delta} - d_{\Delta}^{(1)}$$

für das Verfahren erster Ordnung:

$$(7.36) \quad u_{\Delta}^{(1)} = L_{\Delta}^{-1} f_{\Delta}^{(1)}$$

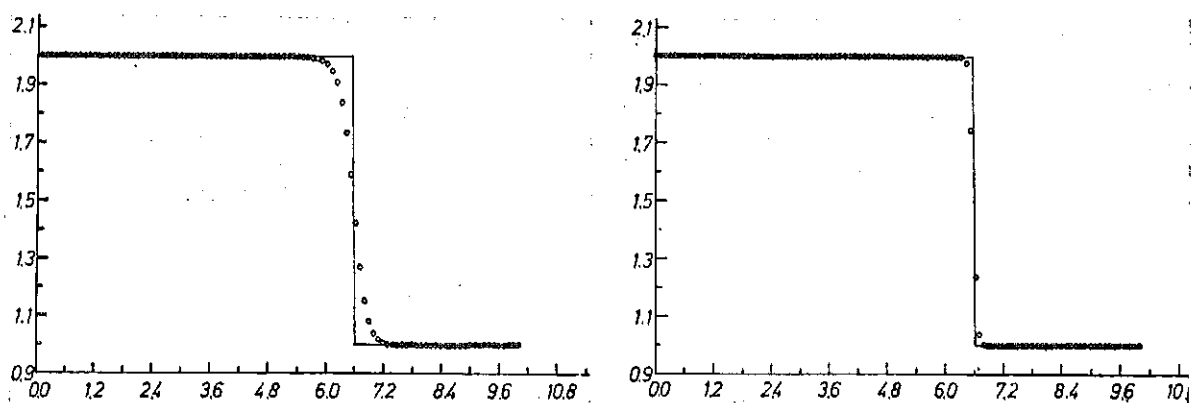
Wir können jetzt wieder mit (7.34) weitermachen und mehrere Iterationen dieses Algorithmuses ausführen. Das Verfahren höherer Ordnung wird dabei immer nur benutzt, den Defekt der Näherungslösungen auszurechnen. Damit wird die rechte Seite des monotonen Verfahrens erster Ordnung iterativ so korrigiert, daß

dieser Defekt gegen Null strebt, das heißt die Näherungslösung strebt gegen die Näherungslösung höherer Ordnung.

Numerische Ergebnisse zeigen, daß meist ein bis zwei Iterationen in diesem Defektkorrekturschema (7.33) - (7.36) auch schon genügen. Das Ergebnis für eine Überschallstoßwelle mit den Anfangswerten

$$(7.37) \quad u(x, 0) = q(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

für die Burgers-Gleichung ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Wir benutzten hier als monotones Verfahren das Verfahren von Engquist-Osher in dem impliziten Schema (7.29) mit $\beta = 0,5$ (linkes Bild). Das rechte Bild zeigt die Ergebnisse des mittels Defektkorrekturen verbesserten Verfahrens. Das Verfahren höherer Ordnung war dabei ein Verfahren in der Form (7.29), wobei g der Fluß eines TVD-Flußlimiterverfahrens mit der Limiterfunktion Φ_2 (Tabelle 4.1) war. Die Diskretisierungsparameter waren $\Delta x = 0,1$, $\Delta t = 0,375$, die Ergebnisse wurden zur Zeit $t = 3,0$ aufgezeichnet, im Defektkorrektur-Schema wurde eine Iteration ausgeführt.



Figur 7.3 Approximation einer Stoßwelle mit einem impliziten Verfahren erster (links) - und zweiter Ordnung (rechts)

7.5 PPM-Verfahren, ENO-Verfahren

Colella und Woodward [5] ersetzen die stückweise lineare Verteilung der Näherungswerte im MUSCL-Verfahren durch eine stückweise periodische Verteilung. Sie nannten ihr Verfahren **PPM (Piecewise Parabolic Method)-Verfahren**. Die Konsistenzordnung der räumlichen Approximation läßt sich damit auf 3 erhöhen. In [5] wird diese Methode ausführlich für die Gleichungen der Gasdynamik geschildert. Durch die dritte Ordnung der Approximation liefert das PPM-Verfahren bessere Resultate besonders in den Bereichen, in denen die Lösung glatt ist. An Unstetigkeiten wird die Steigung der Parabel limitiert durch eine Steigungsberechnung, wie wir sie in Kapitel 4 vorgestellt haben (4.33). Dies ist eine Methode, die Konsistenzordnung eines MUSCL-Verfahrens zu erhöhen, indem man die stückweise lineare Approximation ersetzt durch eine stückweise Verteilung mit Polynomen. An Unstetigkeiten muß dann die Steigung limitiert werden, um etwa die TVD-Eigenschaft zu erhalten.

Wir haben in Kapitel 4 gesehen, daß ein TVD-Verfahren nur ein Verfahren zweiter Ordnung mit gewissen Ausnahmepunkten sein kann. An lokalen Extrema ist die Konsistenzordnung 1 (Kap. 4, Satz 2). Diesem Problem rückten Harten und Osher [25] zu Leibe, indem sie die TVD-Eigenschaft abschwächten. Sie ersetzen die TVD-Bedingung (3.72) durch die schwächere Bedingung

$$(7.38) \quad \sum_i \left| u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} \right| \leq \sum_i \left| u_{i+1}^n - u_i^n \right| + O(\Delta x^{r+1}) ,$$

wobei r die Ordnung des Verfahrens ist. Diese Eigenschaft garantiert nun nicht mehr, daß in jedem Zeitschritt die Werte an lokalen Extrema nicht anwachsen. Jedoch garantiert die Bedingung (7.38), daß an Unstetigkeiten keine Oszillationen in der Art eines Gibbsschen Phänomens auftreten, bei dem diese Oszillationen proportional zur Größe des Sprungs an der Unstetigkeit ist. Harten und Osher nannten solche Verfahren **ENO (Essentially Non-Oscillatory)-Verfahren**. Wir wollen die Konstruktion dieser Verfahren im folgenden nur kurz erläutern.

Die von Harten und Osher [25] vorgestellten ENO-Verfahren können auch in der Form eines MUSCL-Verfahrens angegeben werden. Der wesentliche Teil ist dabei der erste Schritt im MUSCL-Verfahren: Es muß eine stückweise glatte Funktion

$w = w(x)$ aus gegebenen Mittelwerten w_i rekonstruiert werden. Die Rekonstruktion, welche wir mit $R(x; \bar{w})$ bezeichnen, bestehe stückweise aus Polynomen vom Grad $r-1$ und erfülle die folgenden Bedingungen

1. an allen Punkten, an denen w in einer gewissen Umgebung glatt ist, gilt

$$(7.39) \quad R(x; \bar{w}) = w(x) + e(x) \Delta x^r + O(\Delta x^{r+1})$$

2. Erhaltungseigenschaft

$$(7.40) \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} R(x; \bar{w}) dx = w_i$$

3. $R(x; \bar{w})$ besitzt die ENO-Eigenschaft, d.h.

$$(7.41) \quad TV(R(x; \bar{w})) \leq TV(\bar{w}) + O(\Delta x^{1+p}), \quad p > 0.$$

Betrachten wir eine stückweise konstante Rekonstruktion, d.h. $r = 1$ und

$$(7.42) \quad R(x; \bar{w}) = w_i \quad \text{für} \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$$

und benutzen diese in unserem MUSCL-Typ Verfahren (4.11) - (4.14), so reduziert sich dieses Schema wegen $s_i = 0$ für alle i auf das Upwind-Verfahren erster Ordnung im zweiten Schritt. Die zweite Ordnung erhalten wir für $r = 2$ mit

$$(7.43) \quad R(x; \bar{w}) = w_i + s_i (x - x_i) \quad \text{für} \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2},$$

wobei

$$(7.44) \quad s_i = w_x(x_i) + O(\Delta x)$$

gilt.

Wir wollen nur kurz eine Vorstellung davon bekommen, wie eine solche Rekonstruktion allgemein aussieht. Seien $\{w_i\}$ Mittelwerte in den einzelnen Gitterzellen einer stückweise glatten Funktion $w = w(x)$. So gilt

$$(7.45) \quad \Delta x w_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(x) dx = W(x_{i+1/2}) - W(x_{i-1/2})$$

wobei W die Stammfunktion

$$(7.46) \quad W(x) = \int_{x_0}^x w(s) ds$$

von $w = w(x)$ ist. Man kann somit die Werte $W(x_{i+1/2})$ leicht berechnen mittels

$$(7.47) \quad W(x_{i+1/2}) = \Delta x \sum_{i=0}^i w_i$$

Sei nun $H(x; W)$ eine Interpolation von w an den Punkten $w(x_{i+1/2})$ vom Grad $r+1$ mit

$$(7.48) \quad H(x_{i+1/2}; W) = W(x_{i+1/2})$$

und

$$(7.49) \quad \frac{d}{dx} H(x; W) = \frac{d}{dx} W(x) + O(\Delta x^r)$$

Damit erhalten wir unsere Rekonstruktion $R = R(x, w)$ durch die Definition

$$(7.50) \quad R(x; \bar{w}) = \frac{d}{dx} H(x; W)$$

Die Gültigkeit von (7.39) folgt direkt aus (7.49) und der Definition (7.46):

$$(7.51) \quad R(x; \bar{w}) = \frac{d}{dx} H(x; w) = \frac{d}{dx} W(x) + O(\Delta x^r) = w(x) + O(\Delta x^r)$$

Die Bedingung (7.40) folgt aus (7.48) und (7.47):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} R(x; w) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{d}{dx} H_r(x; W) \\ &= \frac{1}{\Delta x} (H_r(x_{i+1/2}, W) - H_r(x_{i-1/2}, w)) \\ &= \frac{1}{\Delta x} (W(x_{i+1/2}) - W(x_{i-1/2})) = w_i \end{aligned}$$

Das Problem eine ENO-Rekonstruktion zu finden, ist damit reduziert, ein Interpolationspolynom $H(x, w)$ vom Grad r zu finden, welches bzw. dessen Ableitung die ENO-Eigenschaft besitzt. Eine solche Interpolation, eine Art modifizierte Newton-Interpolation, wurde von Harten und Osher [25] angegeben; eine neuere Literaturübersicht findet man bei Shu [60] und Shu und Osher [61].

Für $r = 2$ ermittelten Harten und Osher in [25] die folgende Formel für eine ENO-Steigungsberechnung

$$(7.52) \quad s_{\text{ENO}} = \text{minmod} \left(a_i - \frac{\Delta x}{2} d_{i+1/2}, b_i + \frac{\Delta x}{2} d_{i-1/2} \right),$$

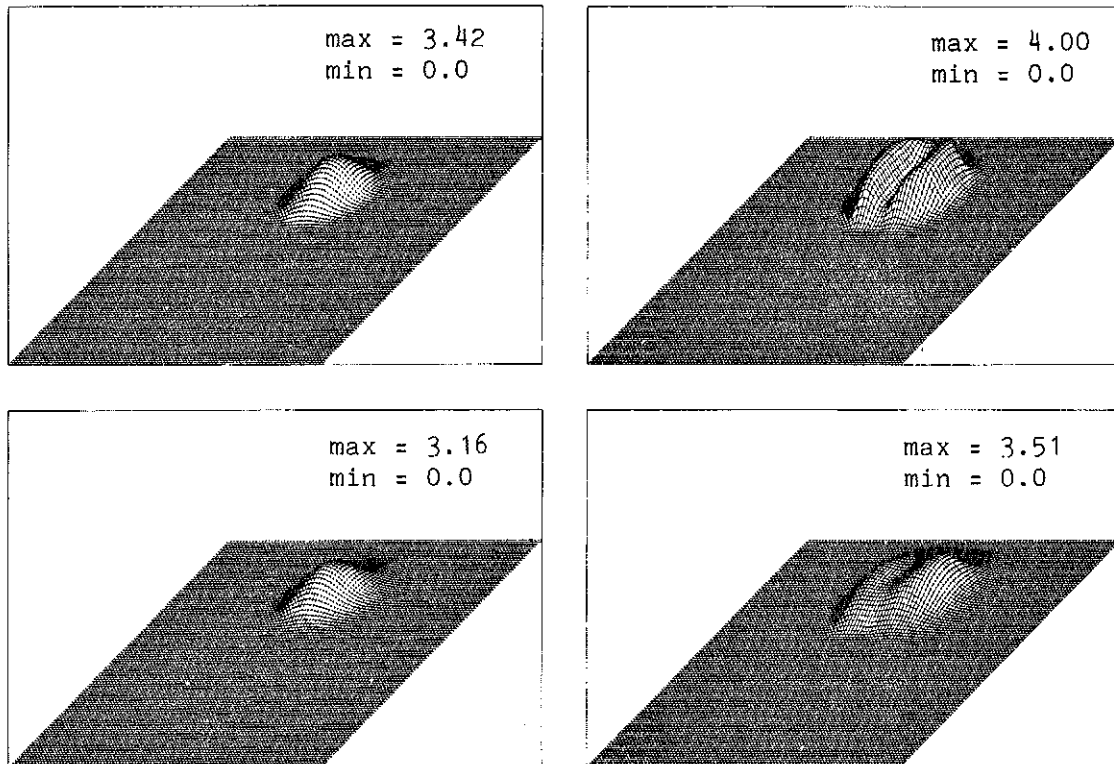
wobei $a_i = u_{i+1} - u_i$, $b_i = u_i - u_{i-1}$ und d die Terme zweiter Ordnung

$$(7.53) \quad d_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x^2} \text{minmod} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i)$$

bedeutet.

Figur 7.4 zeigt die Vorteile einer solchen ENO-Approximation an Hand der numerischen Ergebnisse für den rotierenden Kegel und Zylinder. Das MUSCL-Typ Verfahren mit der Steigungsberechnung (7.51) liefert die besten Ergebnisse für den Kegel. Ein Clipping Phänomen läßt sich tatsächlich nicht beobachten. Bei dem Schlitzzylinder sind die Ergebnisse jedoch deutlich schlechter im Vergleich zu der Steigungsberechnung s_2 (siehe Kapitel 6).

Für $r > 2$ sollte man das MUSCL-Schema (4.11) - (4.14) nicht mehr benutzen, da es nur eine Approximation zweiter Ordnung in der Zeit liefert. Der Zweischrittalgorithmus muß dann ersetzt werden durch eine Zeitdiskretisierung vom Runge-Kutta Typ. Zeitdiskretisierungen dieser Art, welche z.B. auch die ENO- oder TVD-Eigenschaft erhält, wurde von Shu [60] angegeben (siehe auch [61]).



Figur 7.4 MUSCL-Typ Verfahren, Steigungsberechnung s_{ENO}

Anhang A: Funktionen von beschränkter Variation

In diesem Abschnitt wollen wir kurz Definition und einige wichtige Aussagen über Funktionen von beschränkter Variation zusammenfassen. Ausführlichere Darstellungen findet man bei Natanson [47] oder in [72]. Wir halten uns hier eng an die Ausführungen von Natanson [47].

Die Funktion $u = u(x)$ sei auf einem Intervall $I = [a, b]$ definiert. Durch die Zerlegung

$$(A.1) \quad Z: x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

unterteilen wir I in einzelne Abschnitte. Mit $V = V(Z)$ bezeichnen wir die Summe

$$(A.2) \quad V = \sum_{k=0}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)|$$

Definition 1: Die obere Grenze aller Summen V heißt die **totale (oder vollständige) Variation** der Funktion u im Intervall I . Wir bezeichnen diese mit $TV u$. Ist

$$(A.3) \quad TV u < \infty,$$

so heißt u eine Funktion von **beschränkter oder endlicher Variation** in I .

Diese Klasse der Funktionen von beschränkter Variation ist sehr eng verknüpft mit der Klasse der monotonen Funktionen. Dies zeigen die nächsten Sätze.

Satz 1: Eine monotone Funktion ist eine Funktion von endlicher Variation.

Beweis: Wir beweisen diese Aussage für monoton wachsende Funktionen. Für eine monoton wachsende Funktion ist $u(x_{k+1}) - u(x_k)$ positiv. Es gilt somit

$$(A.4) \quad V = \sum_{k=0}^{n-1} u(x_{k+1}) - u(x_k) = u(b) - u(a)$$

und der Satz ist bewiesen.

Es läßt sich auch leicht zeigen, daß eine **lipschitzstetige Funktion** eine Funktion von beschränkter Variation ist. Genügt u einer Lipschitzbedingung

$$|u(x_{k+1}) - u(x_k)| \leq K(x_{k+1} - x_k)$$

so folgt daraus sofort

$$V \leq K(b - a)$$

und u ist somit eine Funktion von beschränkter Variation.

Ein Beispiel für eine Funktion $u = u(x)$ mit $x \in [0, 1]$ von unbeschränkter Variation ist

$$(A.5) \quad u(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad \text{für } 0 < x \leq 1 \text{ und } u(0) = 0.$$

Satz 2: Jede Funktion von beschränkter Variation ist beschränkt.

Beweis: Für jedes $x \in I$ gilt

$$|u(x) - u(a)| \leq TV u$$

woraus sofort

$$|u(x)| \leq |u(a)| + TV u$$

folgt.

Es läßt sich leicht auch zeigen, daß **Summe, Differenz und Produkt** zweier Funktionen von beschränkter Variation auch Funktionen von beschränkter Variation sind. Das gleiche gilt auch für den **Quotienten**, solange der Nenner größer als $\epsilon > 0$ bleibt. Teilt man das Intervall I in zwei Teile, so ist eine Funktion u von beschränkter Variation in I auch auf beiden Teilintervallen von beschränkter Variation. Insbesondere ist die Totalvariation in I gerade die Summe der Totalvariation in den beiden Teilintervallen. Eine Folgerung daraus ist insbesondere: Kann das Intervall I in endlich viele Teile zerlegt werden, so daß auf jedem dieser Teile die Funktion u monoton ist, so ist u auf I von endlicher Variation.

Satz 3: Eine Funktion $u = u(x)$, $x \in I$, ist eine Funktion von beschränkter Variation genau dann, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.

Beweis: Diese Bedingung ist sicherlich hinreichend wie wir oben schon angemerkt hatten. Wir zeigen nun, daß sie auch notwendig ist. Dazu betrachten wir die Totalvariation als Funktion von x und definieren

$$\phi(x) := \int_a^x \text{TV } u$$

mit $\phi(a) = 0$. Diese Funktion ist sicherlich monoton wachsend. Wir wollen nun zeigen, daß auch die Funktion

$$(A.5) \quad \psi(x) := \phi(x) - u(x)$$

monoton wachsend ist. Ist $a \leq x < y \leq b$, so gilt

$$\psi(y) = \phi(y) - u(y) = \phi(x) + \int_x^y \text{TV } u - u(y)$$

und weiter

$$\psi(y) - \psi(x) = \int_x^y \text{TV } u - (u(y) - u(x))$$

Da die rechte Seite nach der Definition der Totalvariation positiv ist, wächst ψ monoton. Wir müssen somit (A.5) nur noch umschreiben in

$$u(x) = \psi(x) - \phi(x)$$

und Satz 3 ist bewiesen.

Wir können aus diesem Satz nun einiges folgern, indem wir Aussagen über monotone Funktionen ausnutzen. Dies liefert uns die Aussagen der nächsten zwei Bemerkungen.

Bemerkung 1: Ist die Funktion $u = u(x)$, $x \in I$, von beschränkter Variation, so existiert in fast jedem Punkt von I eine beschränkte Ableitung $u' = u'(x)$, welche eine (Lebesgue) integrierbare Funktion ist.

Bemerkung 2: Die Menge aller Unstetigkeitspunkte einer Funktion von beschränkter Variation ist höchstens abzählbar. In jedem Unstetigkeitspunkt x_0 existieren die beiden Grenzwerte

$$u(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} u(x) ,$$

$$u(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} u(x) .$$

Die Bemerkung 1 führt uns auch auf eine andere Darstellung der beschränkten Variation. Ist u eine Funktion von beschränkter Variation in $I = [a, b]$, so gilt

$$(A.6) \quad \text{TV} u = \int_a^b |u'(x)| dx$$

wobei u' die fast überall in I existierende Ableitung von u bezeichnet.

Ohne Beweis wollen wir noch den folgenden Satz anfügen (Beweis siehe [47], Seite 246).

Satz 4: Jede Funktion von beschränkter Variation kann man darstellen als Summe einer Sprungfunktion und einer stetigen Funktion von beschränkter Variation.

Nun wenden wir uns dem **Satz von Helly (Hellysches Auswahlprinzip)** zu. Der Beweis dieses Satzes ist etwas langwierig, so daß wir diesen hier auch nicht vorführen wollen, sondern wir verweisen wieder auf [47].

Satz 5 (E. Helly): Auf dem Intervall $I = [a, b]$ sei eine unendliche Familie von Funktionen $U = \{u\}$ definiert. Sind alle Funktionen und ihre Totalvariation gleichmäßig beschränkt:

$$(A.7) \quad |u(x)| \leq K_0 \text{ für alle } x \in I \text{ , } \text{TV} u \leq K_1$$

so kann man aus der Familie U eine Folge $\{u_n\}$ auswählen, die in jedem Punkt von I gegen eine gewisse Funktion $\phi = \phi(x)$ von beschränkter Variation konvergiert.

Wir haben bisher eine Funktion u betrachtet, welche im abgeschlossenen Intervall I definiert war. Wir können aber auch die Totalvariation einer Funktion bilden, welche auf der ganzen reellen Achse definiert ist, als Grenzwert

$$(A.8) \quad \text{TV} u = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ -a}}^{\infty} \text{TV} u \Big|_{-a}^a .$$

Viele der oben aufgeführten Eigenschaften bleiben erhalten. Es gilt insbesondere

Satz 6: Die Totalvariation (A.8) der Funktion u ist genau dann endlich, wenn u sich als Differenz von zwei wachsenden beschränkten Funktionen darstellen läßt.

Zum Beweis dieses Satzes verweisen wir auf Natanson [47]. Eine direkte Folgerung aus Satz 4 ist dann

Bemerkung 3: Ist

$$\text{TV} u < \infty ,$$

so existieren die endlichen Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) .$$

Satz 7: (E. Helly): Auf \mathbb{R} sei eine unendliche Funktionenschar $U = \{u\}$ gegeben und für jedes $u \in U$ gelte

$$|u(x)| \leq K_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} , \quad \text{TV} u \leq K_1$$

mit $K_0, K_1 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $\{u_n\} \subseteq U$, welche in jedem Punkt der reellen Achse gegen eine Funktion u von beschränkter Variation konvergiert.

Anhang B: LP-Räume

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die Definition und einige Eigenschaften der LP-Räume der Lebesgue integrierbaren Funktionen ins Gedächtnis rufen. Ausführliche Darstellungen dieser Sachverhalte finden sich zum Beispiel in [14] und [27].

Definition 1: Sei $1 \leq P < \infty$. Der Raum $L^P(S)$ ist die Menge aller auf S Lebesgue meßbaren Funktionen f für die $|f|^P$ Lebesgue integrierbar ist. $L^P(S)$ ist ein normierter linearer Raum mit der Norm

$$(B.1) \quad \|f\|_p = \left(\int_S |f(s)|^P ds \right)^{1/P} .$$

Als Menge S betrachten wir in unserem Zusammenhang ausschließlich \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 oder auch ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Wir haben in Definition 1 lapidar formuliert, daß $\|f\|_p$ eine Norm ist. Dies benötigt noch eine kleine Richtigstellung. Denn aus

$$(B.2) \quad \|f-g\|_p = 0 \quad \text{folgt für } f, g \in L^P(S) \quad \text{nicht } f(s) = g(s) \quad \text{für alle } s \in S ,$$

d.h. $\|\cdot\|_p$ ist nicht positiv definit und somit zunächst keine Norm. Es gilt aber

$$(B.3) \quad \|f-g\|_p = 0 \quad \Rightarrow \quad f(s) = g(s) \quad \text{für alle } s \in S \setminus M , \quad M \text{ Menge vom Maß } 0 .$$

d.h. f und g sind identisch bis auf eine Menge vom Maß 0. Man versteht nun die Elemente von $L^P(S)$ nicht als einzelne Funktionen sondern als ganze Äquivalenzklassen $\{f\}$ unter der Relation: f ist äquivalent zu g , falls f und g identisch sind bis auf eine Menge vom Maße 0, d.h. $f - g$ ist eine sogenannte Nullfunktionsklasse. Das Symbol $L^P(S)$ in Definition 1 steht somit eigentlich für die Menge dieser Äquivalenzklassen. Man bezeichnet diese Elemente natürlich wieder als Funktionen.

Definition 2: Der Raum $L^\infty(S)$ besteht aus der Menge aller auf S meßbaren und essentiell beschränkten Funktionen : $L^\infty(S)$ ist ein normierter linearer Raum mit der Norm

$$(B.4) \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup}_S |f| .$$

Satz 1: Sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Räume $L^p(S)$ mit den zugehörigen Normen sind Banachräume.

Der Beweis dieses Satzes findet sich z.B. in [14]. Oft spielt der $L^2(S)$ eine sehr wichtige Rolle. Mit der geeigneten Definition eines Innenprodukts ist er ein Hilbertraum. Bei den nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichungen fristet er jedoch ein Schattendasein. In diesem Zusammenhang sind der $L^1(S)$ und der $L^\infty(S)$ die wichtigen Räume (neben $BV(S)$, Anhang A).

Definition 3: Sei $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum $L^p_{\text{lok}}(S)$ besteht aus der Menge aller auf S meßbaren Funktionen, für die $|f|^p$ lokal integrierbar ist, d.h. für jede kompakte Teilmenge von S die Funktion $|f|^p$ integrierbar ist.

Den Satz von Helly aus Anhang A können wir nun in diesem Zusammenhang noch etwas anders interpretieren. Da

$$(B.5) \quad f \in BV(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$$

gilt, können wir zunächst eine Einbettung

$$T: BV(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$$

definieren. Der Satz von Helly besagt nun, daß T **praekompakt** ist, d.h. jede beschränkte Menge aus $BV(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ist kompakt im $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ und besitzt somit auf jedem abgeschlossenen Intervall eine bezüglich der L^1 -Norm konvergente Teilfolge.

Literatur

- [1] D.L. Book: Finite Difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Calculations, Springer Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1981
- [2] J.P. Boris und D.L. Book: Flux corrected transport I. SHASTA. A fluid transport algorithm that works, J. of Comp. Phys. 11 (1973), 38-69
- [3] J.M. Burgers: A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv. Appl. Mech. 1 (1948), 171-199
- [4] A.J. Chorin: Random choice solution of hyperbolic systems, J. of Comp. Phys. 22 (1976), 517-533
- [5] P. Colella and P.R. Woodward: The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations, J. of Comp. Phys. 54 (1984), 174-201
- [6] R. Courant, E. Isaacson und M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 5 (1953), 243-255
- [7] R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik Bd. II, Heidelberger Taschenbücher Bd. 31, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1968
- [8] M. Crandall und A. Majda: Monotone difference approximations for scalar conservation laws, Math. Comp. 34 (1980), 1-22
- [9] M. Crandall and A. Majda: The method of fractional steps for conservation laws, Numer. Math. 34 (1980), 285 - 314
- [10] S.F. Davis: Simplified second-order Godunov-type methods, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 9 (1988), 445 - 473
- [11] S.F. Davis: TVD finite difference schemes and artificial viscosity, ICASE Report No. 84 - 93, 1984
- [12] R.J. DiPerna: Convergence of approximate solutions to conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 27 - 70

- [13] R.J. DiPerna: Finite difference schemes for conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.* 25 (1982), 379-450
- [14] N. Dunford und J.T. Schwartz: *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers, New York
- [15] B. Einfeldt: On Godunov-type methods for gas dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.* 25 (1988), 294 - 318
- [16] B. Einfeldt: *Zur Numerik der stoßauflösenden Verfahren*, Dissertation RWTH Aachen, Math.-Nat. Fakultät, Aachen 1988
- [17] B. Engquist und S. Osher: One sided difference approximations for non-linear conservation laws, *Math. Comp.* 36 (1981), 321-351
- [18] J. Glimm: Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure and Appl. Math.* 18 (1965), 697-715
- [19] S.K. Godunov: Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Mat. Sbornik* 47 (1959), 271 - 306 (russisch)
- [20] J. Goodman, Le Veque: On the accuracy of stabil schemes for 2D scalar conservation laws, *Math. Comp.* 45 (1985), 15 - 21
- [21] A. Harten: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 49 (1983), 357 - 393
- [22] A. Harten: On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), 1-23
- [23] A. Harten, J.M. Hyman und P.D. Lax: On finite difference approximations and entropy conditions for shocks, *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (1976) 297-322
- [24] A. Harten, P.D. Lax und B. van Leer: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.* 25 (1983), 35-62

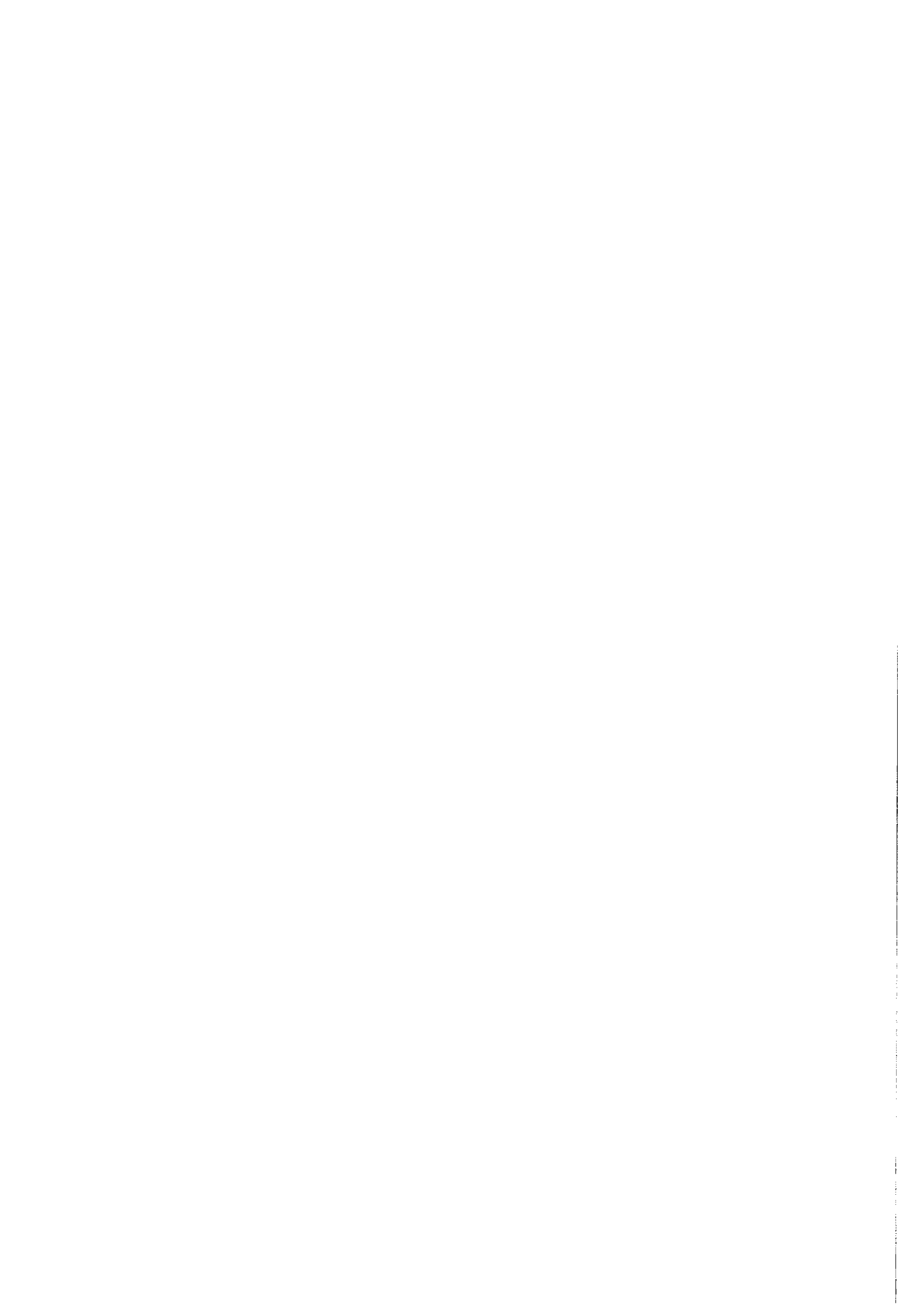
- [25] A. Harten und S. Osher: Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes I, SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987), 279 - 309
- [26] G. Hellwig: Partial Differential Equations, B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1977
- [27] E. Hewitt und K. Stromberg: Real and Abstract Analysis, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1965
- [28] E. Hopf: On the right weak solution of the Cauchyproblem for a quasi-linear equation of first order, J. of Math. and Mech. 19 (1969), 483-487
- [29] A. Jeffrey: Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves, Pitman Publishing 1976
- [30] F. John: Partial Differential Equations, Springer Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1971
- [31] R. Klein: Shock initiated ignition in a L shaped duct, two aspects of its numerical simulation, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vieweg Verlag Wiesbaden 1988
- [32] S.N. Krushkov: First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR. Sbornik 10 (1970), 217-242
- [33] P.D. Lax: Shock waves and entropy, Proc. Symposium at the University of Wisconsin, 1971, E.H. Zarantonello (d.), 603-634
- [34] P.D. Lax: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure and Appl. Math. 7 (1954), 159-193
- [35] P.D. Lax und B. Wendroff: Systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 217-237
- [36] B. van Leer: On the relation between the upwind differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, SIAM J. Sci. Stat. Comp. 5 (1984), 1-20

- [37] B. van Leer: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method, J. of Comp. Phys. 32 (1979) 101-136
- [38] B. van Leer: Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme, J. of Comp. Phys. 14 (1974), 361-370
- [39] R.J. Le Veque und H.C. Yee: A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms, J. Comput. Phys. 86 (1990), 187 - 210
- [40] W.B. Lindquist: Construction of solutions for two-dimensional Riemann problems, Comp. and Math. with Appls. 12 A (1986), 615 - 630
- [41] G.I. Marchuk: Methods of Numerical Mathematics, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1975
- [42] Th. Meis und U. Marcowitz: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen, Springer Verlag New York/Heidelberg/Berlin 1978
- [43] C. Morawetz: Lectures on Nonlinear Waves and Shocks, Tata Institute of Fundamental Research Bombay, Springer Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1981
- [44] C.-D. Munz: On the construction and comparison of two-step schemes for the Euler equations, E.H. Hirschel (Ed), Notes on Numerical Fluid Mechanics 14, Vieweg Verlag Wiesbaden 1986, 195 - 217
- [45] C.-D. Munz: On the numerical dissipation of high resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 77 (1988), 18 - 39
- [46] E.M. Murman: Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods, AIAA J.12 (1974), 626 - 633
- [47] I.P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, 2. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1961

- [48] O.A. Oleinik: Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2, 26 (1957), 95-172
- [49] S. Osher: Convergence of generalized MUSCL schemes, SIAM J. Numer. Anal. 22 (1984), 947 - 961
- [50] S. Osher: Riemannsolvers, the entropy condition, and difference approximations. SIAM J, Numer. Anal. 21 (1984), 217-235
- [51] S. Osher und S. Chakravarthy: High resolution schemes and the entropy condition, SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984), 955 - 984
- [52] T. Richter: Untersuchungen zur numerischen Lösung der Plasma-Fluidodynamik Gleichungen mit Energiequellen, Diplomarbeit Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe 1988
- [53] R.D. Richtmyer und K.W. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York/London/Sydney 1967
- [54] P.L. Roe: Some Contributions to the modelling of discontinuous flows, Lectures in Applied Mathematics 22 (AMS, Providence 1985), 163 - 193
- [55] P.L. Roe: Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms in nonlinear hyperbolic problems; C. Carasso, P.A. Raviart, D. Serre (Eds), Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1987
- [56] P.L. Roe und M.J. Baines: Algorithms for advection and shock problems, Proceedings of the Fourth GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, 1982, H. Viviand (Ed.), Vieweg-Verlag
- [57] R. Sanders: On convergence of monotone finite difference schemes with variable spatial differencing, Math. Comp. 40 (1983), 91-106
- [58] R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1958
- [59] Y.L. Shokin: The Method of Differential Approximation, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983

- [60] S.W. Shu: Total variation diminishing time discretizations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 9 (1988), 1073 - 1084
- [61] S.W. Shu und S. Osher: Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes I, *J. Comput. Phys.* 83 (1989), 32 - 78
- [62] G.D. Smith: *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Clarendon Press Oxford 1978 (2nd edition)
- [63] J. Smoller: *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983
- [64] G.A. Sod: *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 1985
- [65] G. Strang: On the construction and comparison of difference schemes, *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968), 506 - 517
- [66] P.K. Sweby: High resolution schemes using flux limiter for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), 217 - 235
- [67] E. Tadmor: Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes, *Math. Comp.* 43 (1984), 369 - 381
- [68] R.F. Warming und R.M. Beam: Upwind second order difference schemes and applications in aerodynamics, *AIAA Journal* 14 (1976), 1241-1249
- [69] G.B. Witham: *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Interscience 1974
- [70] P. Woodward und P. Colella: The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.* 54 (1984), 115 - 173
- [71] A.I. Volpert: The spaces BV and quasilinear equations, *Math. USSR Sb* 2 (1967), 225 - 267
- [72] A.I. Volpert and S.I. Hudjaer: *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, Martinus Nijhoff Publishers Dordrecht/Boston/Lancaster 1985

- [73] H.C. Yee: A class of high resolution explicit and implicit shock-capturing methods, NASA Technical Memorandum 101088, 1989
- [74] H.C. Yee: Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications, *J. Comput. Phys.* 68 (1987), 151 - 179
- [75] J.T. Zalesak: Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids, *J. Comput. Phys.* 31 (1979), 335 - 362



Benutzte Symbole

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}_0^+	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
C^k	Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen
C_k	Raum der Funktionen aus $C^k(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger
L^p	Raum der Lebesgue-meßbaren Funktionen, deren p-te Potenz Lebesgue integrierbar ist (siehe Anhang B)
L^∞	Raum der Lebesgue-meßbaren Funktionen, welche fast überall beschränkt sind (siehe Anhang B)
L_{lok}	Raum der Funktionen, welche lokal in L^p sind (siehe Anhang B)
BV	Raum der Funktionen mit beschränkter Totalvariation (siehe Anhang A)
TV	Totalvariation (siehe Anhang A)
$\ u(\cdot, t)\ _B$	B-Norm der Funktion u, wobei t festgehalten ist
c	Teilmenge
\cap	Schnittmenge
$A \setminus B$	Elemente von A, welche nicht in B liegen
ε	Element von
u_x	Abkürzung von $\partial u / \partial x$

Stichwortverzeichnis

Abhängigkeitsbereich	10	Lax,	
Abbruchfehler	22	Theorem von	27, 86
Burgersgleichung	12, 34	Lax und Wendroff	
Charakteristiken	9, 31	Theorem von	62
verfahren	18	Lösung	
CIR-Verfahren	29, 84	klassische	33
CFL-Bedingung	91	schwache	40
Differentialgleichung		Minmod-Funktion	105
elliptische partielle	3	MUSCL Verfahren	98
hyperbolische partielle	3	MUSCL-Typ Verfahren	98, 101
parabolische partielle	3	PPM-Verfahren	156
Differenzen	21	quasilinear	8, 13, 31
rechtsseitig	21, 64	Rankine-Hugoniot Bedingung	44
linksseitig	21, 64	Riemannproblem	54
zentral	21, 64	approximatives	67
vorwärtsgenommene	21	Shock	20
rückwärtsgenommene	21	-Fitting	20
Differenzenverfahren		-Capturing	20
explizit	23	Signalgeschwindigkeit	32, 67
halbimplizit	24	Splitting	119
implizit	23	Sprungbedingung	42
Diskretisierungsfehler		Stabilität	24, 27
lokaler	22, 25	Steigungsberechnung	110
globaler	26	Stoßwelle	37
Einflußbereich	10, 15	Totalvariation	53, 161
ENO-Verfahren	156	Transportgleichung	9
Entropie		TVB-Verfahren	89
fluß	51	TVD-Verfahren	89, 107
funktion	51	TVD-Kriterium	90, 97
ungleichung	51	Typ der Differentialgleichung	3
Entropiebedingung	48	Umschaltfunktion	106, 110
diskrete	62	Upwind-Verfahren	83
Erhaltungsgleichung	11, 15, 31	Variation	53, 161
Eulergleichungen	16	Verdünnungswelle	35
FCT-Algorithmus	112	Verdünnungsstoß	45, 48
Fluß-Splitting Verfahren	74	Verfahren	
Flußlimiter	112	in Erhaltungsform	59, 61
Godunov Verfahren	66	monotones	88, 93
Godunov-Typ Verfahren	67	von Engquist und Osher	73
Hirt		von Harten, Lax und van Leer	69
Stabilitätstheorie von	27, 36	von Lax und Friedrichs	71
HLL-Verfahren	71	von Lax und Wendroff	99
hyperbolisch	8	von Roe	72
strikt	8	Viskositätsform	96
Konsistenz	24, 25	Viskositätskoeffizienten	96
ordnung	25	Wellengleichung	6, 13
Konvergenz	24, 26, 86		