

KfK 5058
August 1992

Godunov-Typ Verfahren für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik

C.-D. Munz
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

KfK 5058

**Godunov-Typ Verfahren für die Gleichungen der kompressiblen
Strömungsmechanik**

C.-D. Munz

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Überblick

In dieser Arbeit wird die Konstruktion einer Klasse von Shock-Capturing Verfahren, die sogenannten Godunov-Typ Verfahren, für verschiedene Gleichungssysteme der kompressiblen Strömungsmechanik untersucht. Zunächst wird eine Übersicht über diese Verfahren, wie sie in den letzten Jahren entwickelt wurden, für die zeitabhängigen eindimensionalen Gleichungen in Eulerkoordinaten gegeben. Danach wird die Konstruktion dieser Verfahren auf räumlich zweidimensionale Probleme ausgedehnt und auf die kompressiblen Navier-Stokesgleichungen angewandt. Numerische Ergebnisse von Untersuchungen der Instabilität von Scherströmungen im Trans- und Überschallbereich werden gezeigt und miteinander verglichen. Der Hauptteil dieser Arbeit behandelt die Konstruktion von Godunov-Typ Verfahren für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten. Den Abschluß bildet die Herleitung eines einfachen Godunov-Typ Verfahrens für die Gleichungen der relativistischen Strömungsmechanik. Numerische Ergebnisse für Testprobleme werden in jedem Kapitel vorgestellt.

Godunov-Type Methods for the Equations of Compressible Fluid Mechanics

Abstract

In this paper, the construction of a family of shock-capturing schemes is considered: the Godunov-type schemes. At first a review of these schemes is given in the case of the time dependent onedimensional equations of compressible fluid mechanics, as developed in recent years. After that the construction of the Godunov-type schemes are examined for two-dimensional problems in space and applied to the compressible Navier-Stokes equations. Numerical results of the study of the instability of trans- und supersonic shear flows are shown. The main part of this paper deals with the construction of Godunov-type schemes for the one-dimensional equations of compressible fluid mechanics in Lagrangean coordinates. The paper is closed by proposing. A simple Godunov-type scheme for the equations of relativistic hydrodynamics. In each chapter, numerical results for several test problems are presented.

Mathematical Subject Classification: 65M05, F6N10, 76L05, 76Y05

Keywords: Godunov-type schemes, shock-capturing, conservation laws, compressible computational fluid dynamics

Vorwort

Diese Arbeit wurde als Habilitationsschrift von der Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe im November 1991 angenommen.

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, den Personen, die wesentlich meinen wissenschaftlichen Werdegang beeinflußt haben, zu danken. So bin ich insbesondere für jahrelange Unterstützung den Herren Professoren E. Martensen, E. Adams, W. Niethammer und W. Walter zu Dank verpflichtet. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Professor G. Keßler und Herrn Dr. R. Fröhlich, ohne deren Unterstützung und Förderung diese Arbeit nicht hätte entstehen können.

Ebenso danke ich allen Kollegen/innen, die mit Rat und Tat zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben. Wertvolle Anregungen und eine deutliche Verminderung der Fehler gehen auf die Herren Dr. M. Göz, C.P. Hugelmann, Dr. E. Kiefhaber, Dr. R. Klein und Dr. R. Schneider zurück.

Mein Dank gilt auch Frau J. Lott, die mühelos mein oftmals unleserliches Konzept entzifferte und in diese Form brachte.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Systeme von Erhaltungsgleichungen	5
3. Näherungsverfahren	15
4. Eulergleichungen	38
5. Kompressible Navier-Stokes Gleichungen	47
5.1 Numerische Approximation	48
5.2 Instabilität einer Scherströmung und das Wirbelpaaren bei transonischer Strömung	51
5.3 Numerische Abschätzung des Wachstums von Störungen	69
5.4 Instabilität einer Scherströmung im Überschallbereich	76
6. Kompressible Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten	81
6.1 Gleichungen	82
6.2 Verfahren von Roe	85
6.3 HLL-Verfahren	96
6.4 Verfahren zweiter Ordnung	102
6.5 Bemerkungen und Ergebnisse für Testprobleme	104
6.6 Starke Kompression und automatische Zeitschrittweitensteuerung	118
7. Relativistische und ultra-relativistische Hydrodynamik	131
Anhang: Parametervektoren und Roe-Matrix in Lagrangekoordinaten	147
Literatur	151
Benutzte Symbole	158
Stichwortverzeichnis	159

1. Einleitung

In den letzten Jahren gab es einen bedeutsamen Durchbruch bei der Entwicklung numerischer Verfahren im Bereich der kompressiblen Strömungsmechanik. Gerade die gasdynamischen Gleichungen, meist Eulergleichungen genannt, waren lange ein sehr schwieriges Problem der numerischen Strömungsmechanik. Dies liegt in den dort auftretenden nichtlinearen Termen begründet, die zum Verlust der stetigen Differenzierbarkeit einer Lösung führen können. Solche Unstetigkeiten, Stoßwellen genannt, entsprechen großen physikalischen Zustandsänderungen, die auf mikroskopischen Längenskalen vor sich gehen. Da sich die Konsistenz numerischer Methoden meist auf Taylorentwicklungen gründet und damit die mehrmalige stetige Differenzierbarkeit der Lösung voraussetzt, ist die Entwicklung von konsistenten Verfahren für dieses nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungssystem mit großen Schwierigkeiten verbunden.

Der erste naheliegende Weg aus diesem Dilemma führte auf numerische Methoden, welche solche Stoßwellen während der Rechnung aufspüren - etwa an Hand des Auftretens starker Gradienten oder des Schneidens der Charakteristiken. Diese Stoßwellen werden als eine Art innerer Rand in die numerische Lösung eingeführt und ihr Verlauf explizit verfolgt. Die Rankine-Hugoniot Bedingungen, welche den Zustand vor und hinter der Stoßwelle und die Stoßwellengeschwindigkeit miteinander verknüpfen, liefern die entsprechenden Randbedingungen. In den glatten Bereichen einer Strömung werden Verfahren angewandt, deren Konsistenz sich auf die üblichen Taylorentwicklungen gründet, vorzugsweise Charakteristikenverfahren. Verfahren dieser Art nennt man "Shock-Fitting Verfahren". Beim Auftreten mehrerer Stoßwellen muß das Rechengebiet notfalls in viele kleine Teile zerlegt werden; die Wechselwirkung verschiedener Stoßwellen muß dabei analytisch behandelt werden. Dies kann zu einem großen Verwaltungsaufwand innerhalb des Rechenprogramms führen, so daß die Anwendung dieser Methode nicht mehr sinnvoll ist.

Wegen dieser Nachteile der Shock-Fitting Verfahren wurde schon früh versucht, Verfahren zu konstruieren, welche durch eine Stoßwelle durchlaufen können und automatisch eine sinnvolle Approximation liefern. Verfahren dieser Art nennt man "Shock-Capturing-Verfahren". Die erste Idee für ein solches Shock-Capturing Verfahren stammte von von Neumann und Richtmyer (siehe [56]), die einen künstlichen Viskositätsterm in die Gleichungen der kompressiblen Strö-

mungsmechanik einführten. Diese Viskosität hat eine Regularisierung der Lösung zur Folge, so daß eine Stoßwelle über mehrere Gitterpunkte hinweg verschmiert wird. Diese viskosen Übergänge kann man dann durch ein relativ einfaches Differenzenverfahren approximieren. Dadurch, daß man den künstlichen Viskositätsterm etwa proportional zum Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten macht, versucht man die künstliche Dissipation auf Stoßwellen zu beschränken. Für starke Stoßwellen treten jedoch mehrere Schwierigkeiten auf. Zum einen wird eine großer künstlicher Viskositätsterm benötigt, der weit über dem physikalisch vertretbaren liegen kann. Leichte Oszillationen an starken Gradienten können trotzdem oftmals nicht ausgeschlossen werden. Als parabolischer Term liefert der Viskositätsterm eine Schrittweitenbedingung, welche eine implizite Approximation erforderlich macht und damit sehr viel Rechenzeit kosten kann. Zum anderen wird die Größe der künstlichen Viskosität über einen Parameter gesteuert, dessen optimale Wahl von der Stärke der auftretenden Stoßwellen abhängt, also problemabhängig ist.

Die erste bedeutende Idee zur Konstruktion der "neuen" Shock-Capturing Verfahren geht schon auf das Jahr 1959 zurück und stammt von Godunov [23]. Godunov diskretisierte die Erhaltungsgleichungen für eine kompressible Strömung (ideales Gas) und erkannte, daß sich das diskrete Problem für kleine Zeiten exakt lösen läßt. Die exakte Lösung setzt sich zusammen aus den lokalen Lösungen von Anfangswertproblemen mit stückweise konstanten Anfangswerten, den Lösungen sogenannter Riemannprobleme. Diese Lösungen der Riemannprobleme werden zur Berechnung der numerischen Flüsse zwischen den einzelnen Gitterzellen benutzt und daraus die zeitliche Änderungen der Erhaltungsgrößen abgeleitet; auf diese Weise werden nichtlineare Wellenausbreitungen in das Näherungsverfahren mit eingebaut. Dadurch gelingt es, auch starke Stoßwellen monoton ohne Auftreten von Instabilitäten zu approximieren. Die Anwendbarkeit des Verfahrens von Godunov auf praktische Probleme wird jedoch begrenzt durch hohen Rechenaufwand und eine starke numerische Dämpfung, da es nur die Konsistenzordnung Eins besitzt.

Die zweite bahnbrechende Idee hatte van Leer [39] etwa zwanzig Jahre später. Er gab eine Methode an, wie das Verfahren von Godunov in einfacher Weise zu einem Verfahren zweiter Ordnung ausgebaut werden kann. Vor allem auch im Hinblick auf wachsende Leistungskraft der Rechenanlagen ließ sich dieses Shock-Capturing Verfahren auf viele praktische Probleme mehrdimensionaler kompressibler Strömungen anwenden. Da die exakte Lösung des Riemannproblems

relativ aufwendig und auch nur für die Zustandsgleichung eines idealen Gases berechenbar ist, suchte man einfachere Methoden mit ähnlichen Konstruktionsmerkmalen und Eigenschaften. Roe [59] ersetzte die exakte Lösung des Riemannproblems für die Eulergleichungen durch die exakte Lösung des linearisierten Problems. Noch einen Schritt weiter gingen Harten, Lax und van Leer [27], indem sie die Wellenstruktur der Lösung des Riemannproblems stark vereinfachten (HLL-Verfahren). Diese Methoden wurden für die Eulergleichungen entwickelt, die in den Anwendungen einen sehr breiten Raum einnehmen. Sie sind nicht ohne weiteres auf allgemeine Erhaltungsgleichungen übertragbar.

In dieser Arbeit konstruieren wir Verfahren vom Godunov-Typ für weitere Gleichungssysteme der kompressiblen Strömungsmechanik. Nach einer Übersicht über die Methoden für die Eulergleichungen sind dies zunächst die zweidimensionalen kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen, die sich aus den Eulergleichungen und zusätzlichen dissipativen Termen - der Viskosität und der Wärmeleitung - zusammensetzen. Die Approximation dieser dissipativen Terme läßt sich in einfacher Weise in das numerische Verfahren für die Eulergleichungen einfügen. Ein solches Verfahren wird auf die numerische Simulation der Instabilität einer Scherströmung angewandt. Es zeigt sich, daß für transonische Strömungen der dominierende Effekt der Vergrößerung der Mischzone durch das Paaren von Wirbeln in der numerischen Simulation sehr gut wiedergegeben wird. Neben dem Paaren von Wirbeln tritt dabei auch ein Mechanismus auf, den wir Wirbelverschmelzen nennen. Unsere numerischen Ergebnisse für Überschallströmungen zeigen, daß dort die Instabilität der Scherströmung durch nicht-lineare gasdynamische Effekte, wie die Wechselwirkung von Stoßwellen in der Außenströmung mit der Mischzone, bestimmt ist.

Der Hauptteil der Arbeit behandelt die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten. Während man mittels Eulerkoordinaten den Zustand eines Gases als Funktion eines Punktes in einem räumlich festen Koordinatensystem angibt, wird mittels Lagrangekoordinaten der Zustand jedes Teilchens der Strömung betrachtet. Man hat gewissermaßen ein mit der Strömungsgeschwindigkeit mitbewegtes Koordinatensystem. Diese Art der Beschreibung ist bei der Approximation einer Strömung verschiedener getrennter Materialien von Vorteil. Wir zeigen, daß diese Gleichungen, versehen mit einer allgemeinen Zustandsgleichung, im Sinne von Roe linearisierbar sind, konstruieren eine Roe-Matrix und formulieren das zugehörige Roe-Verfahren. Überraschenderweise versagt dieses Verfahren vom Godunov-Typ für Probleme, in denen

starke Kompressionen auftreten. Es treten physikalisch unsinnige negative Werte für das spezifische Volumen auf. Durch eine Korrektur der Wellengeschwindigkeiten der Roe-Linearisierung können wir jedoch ein sehr einfaches Verfahren vom Godunov-Typ angeben, welches auch bei starker Kompression das spezifische Volumen positiv erhält. Diese neue Abschätzung der Wellengeschwindigkeiten liefert zudem die Möglichkeit einer effizienten adaptiven Zeitschrittweitensteuerung.

In Anwendungen, bei denen Wellengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit auftreten, müssen in den hydrodynamischen Gleichungen relativistische Effekte mitberücksichtigt werden. Solche Probleme treten in der Astrophysik aber auch z.B. bei Kern-Kern Stößen von Schwerionen auf. Die relativistischen Eulergleichungen haben eine ähnliche Struktur wie im nichtrelativistischen Fall, jedoch treten Größen in verschiedenen Bezugssystemen auf (lokales Ruhesystem, Laborsystem). Die Bezugssysteme sind verbunden über eine nichtlineare Transformation, welche eine sehr starke nichtlineare Kopplung der Erhaltungsgleichungen untereinander mit sich bringt. Die auftretenden Wellengeschwindigkeiten in der numerischen Lösung müssen kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein, andernfalls kommt es zum Zusammenbruch des Verfahrens. Um diesen Anforderungen zu genügen, wurden bislang die relativistischen Eulergleichungen zusammen mit der Transformation der Bezugssysteme meist gleichzeitig implizit numerisch gelöst. Wir zeigen hier, daß durch die Berücksichtigung der Wellenausbreitung im Rahmen eines Godunov-Typ Verfahrens auch ein anderer Zugang möglich ist. Die relativistischen Gleichungen werden gelöst durch ein explizites Shock-Capturing Verfahren, die Umrechnung der Größen in den verschiedenen Bezugssystemen erfolgt durch iterative Lösung der Transformationsgleichungen. Vergleiche mit numerischen Ergebnissen aus der Literatur zeigen, daß diese Methode, insbesondere bei großen relativistischen Lorentzfaktoren, bessere Ergebnisse liefert.

2. Systeme von Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten die Lösungen des **Anfangswertproblems für ein hyperbolisches System von Erhaltungsgleichungen**

$$(2.1) \quad u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

mit den Anfangswerten

$$(2.2) \quad u(x, 0) = q(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad .$$

Dabei ist $u = u(x, t)$ ein Vektor von $m \geq 1$ Komponenten $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ und der sogenannte **Fluß** $f(u)$ eine vektorwertige Funktion $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$. Alle Komponenten von f seien zweimal stetig differenzierbar nach u .

Das System von Erhaltungsgleichungen kann auch in der **quasilinearen Form**

$$(2.3) \quad u_t + A(u) u_x = 0 \quad \text{mit} \quad A(u) = \frac{df(u)}{du}$$

geschrieben werden. Wir setzen im folgenden voraus, daß (2.3) bzw. (2.1) hyperbolisch ist. Dies bedeutet, daß die Funktionalmatrix $A(u)$ nur reelle Eigenwerte besitzt und ein vollständiges System von Rechtseigenvektoren existiert. Die Eigenwerte entsprechen den verschiedenen Wellengeschwindigkeiten, sie seien der Größe nach wachsend angeordnet: $a_1(u) \leq \dots \leq a_m(u)$.

Da im nichtlinearen Fall die Charakteristiken dieses hyperbolischen Problems lösungsabhängig sind, können sie sich auch schneiden. Überall dort kann keine stetige Lösung mehr existieren; es treten Unstetigkeiten in den Lösungen auf. Sucht man globale Lösungen, so muß man somit schwache Lösungen des Cauchyproblems (2.1), (2.2) betrachten, welche das System von Erhaltungsgleichungen im integralen Sinne erfüllen.

Definition 1: Eine Funktion $u \in [L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)]^m$ heißt **schwache Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.2)** mit Anfangswerten $q \in [L^\infty(\mathbb{R})]^m$, falls die Integralgleichungen

$$(2.4) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{u \Phi_t + f(u) \Phi_x\} dx dt + \int_{-\infty}^\infty \Phi(x, 0) q(x) dx = 0$$

für jede Testfunktion $\Phi \in [C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)]^m$ erfüllt sind.

Die Integrationen, Differentiationen und Produkte in (2.4) sind jeweils komponentenweise zu verstehen. Erhaltungsgleichungen werden aus integralen physikalischen Erhaltungssätzen unter der Bedingung der stetigen Differenzierbarkeit der Lösung abgeleitet. Ist diese Voraussetzung verletzt, muß man wieder zu einer integralen Formulierung des Erhaltungssatzes zurückgehen. So erhält man die Integralgleichungen in Definition 1 dadurch, daß die Erhaltungsgleichungen (2.1) komponentenweise mit einer Testfunktion multipliziert und danach wird über $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ integriert werden. Schließlich werden die Ableitungen mittels partieller Integration auf die Testfunktionen übergewälzt. Als Lösung des Cauchyproblems bezeichnen wir im folgenden immer eine schwache Lösung im Sinne der Definition 1. Eine stetig differenzierbare Lösung nennen wir **klassische Lösung**.

Zur Konstruktion von Näherungsverfahren ist die integrale Formulierung (2.4) ungünstig. Wendet man jedoch auf (2.4) den Gaußschen Satz (für Maße) an, so erhält man eine geeignetere Formulierung ([12], [13]). Eine schwache Lösung u erfüllt dann für alle Rechtecke $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ die Integralgleichungen

$$(2.5) \quad \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt = 0 \quad .$$

Näherungsverfahren werden wir im nächsten Abschnitt als direkte Approximation dieser Integralgleichungen formulieren.

Die integralen Erhaltungsgleichungen (2.4) liefern Bedingungen an die Zustände vor und hinter einer Unstetigkeit und ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit. Sie werden **Sprungbedingungen** oder in Anlehnung an die Gasdynamik **Rankine-Hugoniot-Bedingungen** genannt und im folgenden Satz hergeleitet.

Satz 1: Eine stückweise stetig differenzierbare Funktion u ist schwache Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2) genau dann, wenn

- a.) u in allen Punkten, in denen u differenzierbar ist, klassische Lösung von (2.1) ist,
- b.) entlang der Ausbreitungskurve einer Unstetigkeit die Sprungbedingung

$$(2.6) \quad f(u_r) - f(u_l) = s(u_r - u_l)$$

komponentenweise gilt. Dabei ist s die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeit; u_l und u_r bezeichnen die Grenzwerte von u an die Unstetigkeitskurve von links bzw. rechts.

Beweis: Im wesentlichen wird für jede Erhaltungsgleichung des Systems (2.4) der Satz von Gauß benutzt. Die Integrale in (2.4) werden komponentenweise in Kurvenintegrale über die Normalkomponenten der Vektoren $(u_i, f_i(u))^T$ umgeformt. Ist C die Ausbreitungskurve der Unstetigkeit, so bleibt wegen des kompakten Trägers der Testfunktion Φ die Gleichung

$$(2.7) \quad \int_C \Phi \left(n, \begin{pmatrix} u_l - u_r \\ f(u_l) - f(u_r) \end{pmatrix} \right) ds = 0$$

übrig. Dabei ist n die Einheitsnormale auf C , (\cdot, \cdot) bezeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren, das Integral ist wieder komponentenweise zu verstehen. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und wegen $n = (-s, 1)^T$ ergeben sich daraus die Rankine-Hugoniot Bedingungen (2.6). \square

Trotz dieser Sprungbedingungen ist die Klasse der schwachen Lösungen zu groß, um eine eindeutige Lösung des Cauchyproblems zu garantieren. Man benötigt eine **Zusatzbedingung**, welche die physikalisch relevante und stabile Lösung charakterisiert und damit die Eindeutigkeit erzwingt. Eine Möglichkeit ist diese Lösung als Grenzwert

$$(2.8) \quad u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon \geq 0$$

zu charakterisieren, wobei u_ε die klassische Lösung von

$$(2.9) \quad (u_\varepsilon)_t + f(u_\varepsilon)_x = \varepsilon (u_\varepsilon)_{xx}$$

ist. Der physikalische Hintergrund dabei ist, daß eine hyperbolische Gleichung gerade ein physikalisches Problem beschreibt, bei welchem Viskositäts- und Dissipationseffekte vernachlässigbar sind. Die physikalisch relevante Lösung sollte sich deshalb gerade als **Grenzwert der Lösungen mit Viskositätstermen** ergeben, wenn diese Terme gegen Null streben.

Dies ist natürlich eine sehr unhandliche Definition der physikalisch relevanten Lösung. Etwas einfacher läßt sich eine Charakterisierung dieser Lösung angeben, falls für das System (2.1) eine sogenannte Entropiefunktion existiert.

Definition 2: Zwei skalare Funktionen $U(u)$ und $F(u)$ heißen **Entropiefunktion** bzw. **Entropiefluß** des Systems (2.1), falls gilt:

a.) U ist eine streng konvexe Funktion, d.h. die Matrix $d^2U(u)/du^2$ ist positiv definit,

b.) U und F genügen der Gleichung

$$(2.10) \quad (\text{grad}_u U(u)) A(u) = \text{grad}_u F(u)$$

Die Bezeichnung grad_u steht dabei für den Differentialoperator

$$\text{grad}_u = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right)$$

Aus der Bedingung (2.10) folgt, daß stetig differenzierbare Lösungen der Erhaltungsgleichungen (2.1) automatisch auch der zusätzlichen Erhaltungsgleichung

$$(2.11) \quad U(u)_t + F(u)_x = 0$$

genügen. Für schwache Lösungen gilt diese Aussage nicht mehr. Aber es läßt sich zeigen, daß die Grenzfunktion u für $\varepsilon \rightarrow 0$ der Lösungen u_ε mit Viskosität (2.8) die Entropiegleichung

$$(2.12) \quad U(u)_t + F(u)_x \leq 0$$

im integralen Sinn erfüllt (z.B. [34]), d.h. es gelten für jede nichtnegative Testfunktion $\Phi \in [C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)]^m$ die Ungleichungen

$$(2.13) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (U(u) \Phi_t + F(u) \Phi_x) dx dt - \int_{-\infty}^\infty \Phi(x, 0) U(q(x)) dx \leq 0$$

oder in Analogie zur integralen Formulierung (2.5)

$$(2.14) \quad \int_{x_1}^{x_2} U(u(x, t_2)) dx - \int_{x_1}^{x_2} U(u(x, t_1)) dx + \int_{t_1}^{t_2} F(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(u(x_1, t)) dt \leq 0$$

für jedes Rechteck $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$.

Diese Aussage ergibt sich folgendermaßen: Multipliziert man das Gleichungssystem (2.9) mit $\text{grad}_u U(u)$ und benützt die Beziehung (2.10), so erhält man

$$(2.15) \quad U(u_\varepsilon)_t + F(u_\varepsilon)_x = \varepsilon \left(\text{grad}_u U(u_\varepsilon), (u_\varepsilon)_{xx} \right),$$

wobei (\dots) wieder das Skalarprodukt bezeichnet.

Nach der Ketten- und Produktregel gilt

$$\begin{aligned} U(u)_{xx} &= \left(\text{grad}_u U(u), u_x \right)_x \\ &= \left(\frac{d^2(U(u))}{du^2} u_x, u_x \right) + \left(\text{grad}_u U(u), u_{xx} \right) . \end{aligned}$$

Wegen der Konvexität der Entropiefunktion ist der erste Term auf der rechten Seite positiv und man erhält daraus die Ungleichung

$$U(u)_{xx} \geq \left(\text{grad}_u U(u), u_{xx} \right) .$$

Eingesetzt in (2.15) liefert dies schließlich

$$(2.16) \quad U(u_\varepsilon)_t + F(u_\varepsilon)_x \leq \varepsilon U(u_\varepsilon)_{xx} .$$

Betrachten wir nun den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$, so folgt daraus, daß die Grenzfunktion u der Lösungen mit Viskosität gerade der Entropieungleichung (2.12) genügt.

Die Charakterisierung der physikalisch relevanten Lösung und damit die Angabe einer Zusatzbedingung, welche die Eindeutigkeit des Cauchyproblems erzwingt, in der Form einer Entropieungleichung (2.12) wurde für den skalaren Fall $m = 1$ von Oleinik [53], [54] und Hopf [31] eingeführt. Wesentliche Betrachtungen für den Fall eines Systems von Erhaltungsgleichungen stammen von Lax [34], [35].

Der Sachverhalt und die Namensgebung für diese Entropiebedingung wurde angeregt durch die **Gleichungen der Gasdynamik**. Hier hat man für stetig differenzierbare Lösungen neben den Erhaltungen von Masse, Impuls und Energie eine zusätzliche Erhaltungsgleichung: die der Entropie. Treten Unstetigkeiten in den Lösungen auf, so ist der zugehörige physikalische Prozess irreversibel und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt gerade aus, daß die Entropie über eine solche Unstetigkeit hinweg anwachsen muß. Dies bedeutet, daß die physikalische Lösung als Unstetigkeiten nur sogenannte Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten besitzen kann; das Auftreten von Verdünnungsstoßwellen ist ausgeschlossen. Physikalisch läßt sich das Anwachsen der Entropie folgendermaßen erklären: Mikroskopisch bedingen die starken Gradienten in Temperatur und Geschwindigkeit auf kleinstem Raum irreversible Prozesse wie Wärmeleitung und

Viskosität durch atomare oder molekulare Wechselwirkung. Diese Prozesse verhindern die mehrdeutige Lösung.

Die Aussage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, daß die Entropie über eine Unstetigkeit hinweg anwächst, entspricht gerade der Sprungbedingung für die Entropie:

Bemerkung 1: Ist u eine stückweise stetige schwache Lösung von (2.1), so gilt über die Ausbreitungskurve einer Unstetigkeit hinweg die Sprungbedingung

$$(2.17) \quad \int_s [U(u_r) - U(u_l)] \leq F(u_r) - F(u_l)$$

mit den Bezeichnungen von Satz 1.

Der Beweis der Ungleichung (2.17) verläuft analog zum Beweis von Satz 1.

Man muß hier anmerken, daß die Existenz einer Entropiefunktion bzw. eines Entropiepaars $U(u)$, $F(u)$ eine sehr starke Eigenschaft eines Systems von Erhaltungsgleichungen ist. Die Bedingung (2.10) liefert zur Bestimmung des Entropiepaars m Differentialgleichungen. Für $m \geq 2$ ist dieses System überbestimmt und besitzt im allgemeinen keine Lösung. Viele Systeme von Erhaltungsgleichungen der mathematischen Physik besitzen jedoch ein solches Entropiepaar. Im Falle $m = 1$ kann man den Entropiefluß direkt aus (2.10) bestimmen. Ist $U(u)$ eine streng konvexe Funktion, so ist der zugehörige Entropiefluß gegeben durch

$$F(u) = \int_0^u U'(s) f'(s) ds .$$

Für $m = 2$ beschreibt Lax in [35] die Möglichkeiten der Existenz von Entropiepaaren. Die Existenz eines solchen Entropiepaars bedingt spezielle Eigenschaften des zugehörigen Systems von Erhaltungsgleichungen. So zeigte etwa Harten [26], daß ein solches System mittels einer Transformation der abhängigen Variablen auf Diagonalgestalt gebracht werden kann.

Die Entropiebedingung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik gestattet als Unstetigkeiten in der Lösung nur Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten. Wir wollen in diesem allgemeineren Zusammenhang noch etwas genauer definieren, was unter einer Stoßwelle und einer Kontaktunstetigkeit verstanden wird. Die folgende Definition stammt von Lax [34] und verwendet Ungleichungen zwi-

schen Stoßwellen- und Wellengeschwindigkeiten. Wir erinnern daran, daß die Wellengeschwindigkeiten, d.h. die Eigenwerte der Matrix $A(u)$, der Größe nach geordnet sind: $a_1(u) \leq a_2(u) \leq \dots \leq a_m(u)$.

Definition 3: Eine Unstetigkeit einer stückweise stetig differenzierbaren Lösung von (2.1) heißt **Stoßwelle**, falls ein k mit $1 \leq k \leq m$ existiert, so daß an jedem Punkt der Unstetigkeitskurve ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit s und die Eigenwerte von $A(u)$ den Ungleichungen

$$(2.18) \quad a_{k-1}(u_l) < s < a_k(u_l) \quad ,$$

$$(2.19) \quad a_k(u_r) < s < a_{k+1}(u_r)$$

genügen, wobei $a_0(u_l) := -\infty$ und $a_{m+1}(u_r) := \infty$ im Falle $k = 1$ bzw. $k = m$ gesetzt werden. Fällt die Ausbreitungskurve mit einer Charakteristik $x = x(t)$ mit $dx/dt = a_k(u)$ zusammen:

$$(2.20) \quad s = a_k(u_l) \quad \text{oder} \quad s = a_k(u_r) \quad ,$$

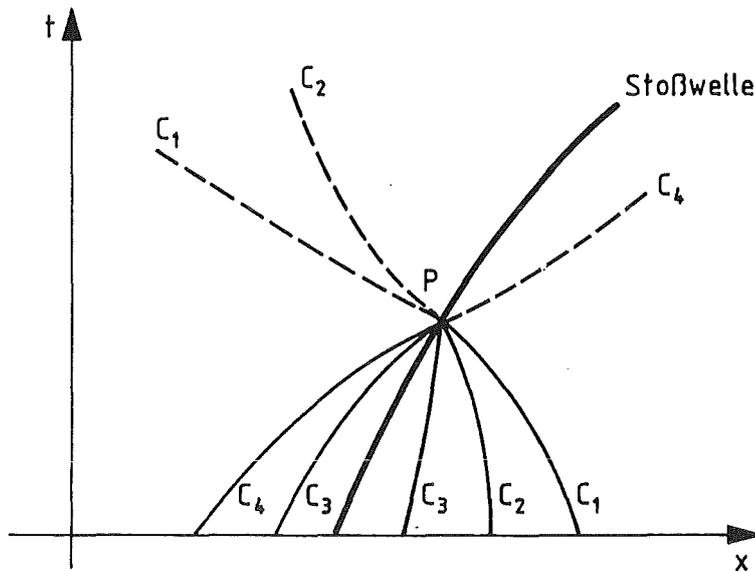
so heißt die Unstetigkeit **Kontaktunstetigkeit**. Den Wert k nennt man den **Index der Stoßwelle** bzw. **der Kontaktunstetigkeit**.

Aus (2.18), (2.19) folgt insbesondere die Ungleichung

$$(2.21) \quad a_k(u_r) < s < a_k(u_l) \quad ,$$

welche besagt, daß die Charakteristiken zum k -ten Eigenwert von beiden Seiten in die Stoßwelle vom Index k hineinlaufen. Die Wellengeschwindigkeiten hinter der Stoßwelle sind größer - vor der Stoßwelle kleiner - als die Stoßwellengeschwindigkeit. Die weiteren Ungleichungen $a_{k-1}(u_l) < s$ und $s < a_{k+1}(u_r)$ aus (2.18), (2.19) garantieren, daß sich zusätzlich keine Charakteristiken zu einem Eigenwert ungleich a_k schneiden können und der Index einer Stoßwelle dadurch eindeutig bestimmt ist.

Für den Fall $m = 4$ und $k = 3$ haben wir in Figur 2.1 die Ausbreitungskurve einer Stoßwelle zusammen mit einem möglichen Verlauf der Charakteristiken in einem Punkt P der Stoßwelle in der (x, t) -Ebene aufgezeichnet. Die C_3 -Charakteristik läuft nach (2.21) von rechts und links in P zusammen. Weiter kommen von links $m-k = 1$ Charakteristiken (C_4) und von rechts $k-1 = 2$ Charakteristiken (C_1, C_2) in P an. Zwischen den C_3 Charakteristiken von links und rechts darf nach (2.18), (2.19) keine Charakteristik in P eintreffen.



Figur 2.1: Stoßwelle und Charakteristiken für den Fall $m = 4$ und $k = 3$

Etwas übersichtlicher wird die Situation, wenn man ausgehend von P alle Charakteristiken in positiver t-Richtung zeichnet, welche links der Stoßwelle mit Start bei u_l und rechts mit Start bei u_r verlaufen. Nach links laufen unter den Bedingungen (2.18), (2.19) gerade $k-1$ Charakteristiken, nach rechts $m-k$. Man kann die Ungleichung (2.18), (2.19) dann folgendermaßen formulieren: Eine Unstetigkeit heißt **Stoßwelle**, falls die Anzahl der nach obiger Vorschrift gezeichneten Charakteristiken $m-1$ ist. Diese Zahl entspricht gerade der Anzahl der Gleichungen, welche sich aus den Rankine-Hugoniot Bedingungen nach Elimination der Stoßwellengeschwindigkeit s ergeben. Eine ausführlichere Diskussion dieses Zugangs findet man bei Smoller [66].

Eine zentrale Rolle sowohl bei theoretischen Aussagen (Existenz einer Lösung) wie auch bei der Konstruktion von Näherungsverfahren spielen die sogenannten **Riemannprobleme**. Dies sind Cauchyprobleme für die Erhaltungsgleichung (2.1) mit den stückweise konstanten Anfangswerten

$$(2.22) \quad u(x, 0) = q(x) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Es gelang Lax [36] unter zusätzlichen Bedingungen an die Gleichungen (2.1), die Existenz einer Lösung für ein solches Riemannproblem zu zeigen, falls die Zustände u_l und u_r genügend nahe beieinander liegen.

Wegen der Wichtigkeit des Riemannproblems wollen wir diese Aussage und die Struktur der Lösungen im folgenden noch etwas genauer dokumentieren. Mit $r_k = r_k(u)$ bezeichnen wir den Rechtseigenvektor der Funktionalmatrix $A(u)$ zum Eigenwert $a_k(u)$. Die Schar der Charakteristiken zum Eigenwert a_k nennen wir das k -te charakteristische Feld.

Definition 4: Das k -te charakteristische Feld des Systems von Erhaltungsgleichungen (2.1) heißt **streng nichtlinear**, falls

$$(2.23) \quad (r_k(u), \text{grad}_u a_k(u)) \neq 0 \quad \text{für alle } u$$

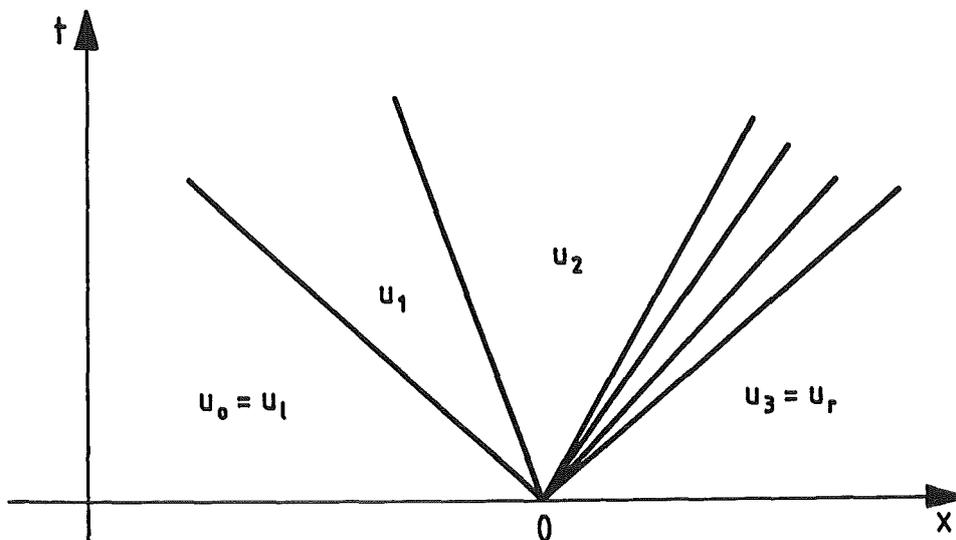
gilt. Gilt demgegenüber

$$(2.24) \quad (r_k(u), \text{grad}_u a_k(u)) = 0 \quad \text{für alle } u,$$

so heißt das k -te charakteristische Feld **linear entartet**.

Die Bedingung (2.24) sagt aus, daß keine Änderungen der Wellengeschwindigkeiten in Richtung des k -ten Rechtseigenvektors im Phasenraum auftreten. Physikalisch bedeutet dies, daß ein einfacher linearer Transport vorliegt.

Lax konnte die folgende Aussage beweisen: Ist (2.1) streng nichtlinear in allen charakteristischen Feldern und sind die Zustände u_l und u_r genügend nahe beieinander, so hat das Riemannproblem (2.1), (2.22) eine Lösung. Die Struktur dieser Lösung ist in Figur 2.2 skizziert. Sie besteht aus $m+1$ konstanten Zuständen $u_l = u_0, u_1, \dots, u_m = u_r$, die jeweils getrennt werden durch eine zentrale Welle, d.h. Stoß- oder Verdünnungswelle.



Figur 2.2 Lösung eines Riemannproblems für $m = 3$

Diese Aussage kann erweitert werden auf den Fall, daß gewisse charakteristische Felder linear entartet sind. In solchen Fällen treten als Unstetigkeiten jedoch keine Stoßwellen auf sondern Kontaktunstetigkeiten, deren Ausbreitungskurve wie im linearen Fall mit einer Charakteristik zusammenfällt. Die Lösung des Riemannproblems besteht somit aus $m + 1$ konstanten Zuständen, welche durch Stoßwellen, Verdünnungswellen oder Kontaktunstetigkeiten getrennt werden. Keine Existenzaussage hat man, falls ein charakteristisches Feld weder streng nichtlinear noch linear entartet ist, d.h. die Bedingung (2.23) gilt nicht für alle u , sondern es gibt z.B. einen Punkt u für den das Innenprodukt Null wird. Die Lösungsstruktur eines solchen Riemannproblems sieht etwas anders aus. Konstante Zustände sind hier nicht mehr durch einfache zentrale Wellen getrennt.

Aufbauend auf diese Existenzaussagen für das Riemannproblem konnte Glimm [22] einen Existenzsatz für das allgemeine Cauchyproblem beweisen unter der Voraussetzung, daß die charakteristischen Felder entweder streng nichtlinear oder linear entartet sind und die Anfangswerte eine genügend kleine Totalvariation besitzen.

Weitere theoretische Aussagen und einen Überblick über die Theorie hyperbolischer Systeme von Erhaltungsgleichungen werden von Lax in [34] und von Smoller in [66] gegeben. Historisch gesehen wurde das Konzept einer Stoßwelle, d.h. einer Unstetigkeit in den Lösungen der fluidodynamischen Gleichungen, schon von Stokes 1848 eingeführt. Die Rolle der Entropie in diesen Gleichungen wurde allerdings damals noch nicht erkannt. So gab es hitzige Diskussionen zwischen Riemann, Rankine, Rayleigh, Kelvin und Hugoniot über die Entropie, wobei Kelvin und Rayleigh zu dieser Zeit (1890) noch von der Gültigkeit der Entropieerhaltung über eine Stoßwelle hinweg überzeugt waren. Daß die Entropie über einen Stoß hinweg anwachsen muß, wurde erst 1905 von Zemplén ausgeführt (siehe Serrin [65]).

3. Näherungsverfahren

Der kürzeren Schreibweise halber betrachten wir im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ein äquidistantes Gitter; mit Δt wird die Zeitschrittweite und mit Δx die Raumschrittweite bezeichnet. Es werden die üblichen Abkürzungen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x_i &= i \Delta x, \quad x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2, \quad t_n = n \Delta t \quad \text{mit } i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ I_i &= [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \end{aligned}$$

benutzt. Soll ein Näherungsverfahren geeignet sein, schwache Lösungen des Cauchyproblems zu approximieren, so darf nicht von der differentiellen Form der Erhaltungsgleichungen ausgegangen werden, sondern von ihrer integralen Formulierung. Als günstig erweisen sich hier die Gleichungen (2.5). Eine explizite Approximation dieser Integralgleichungen führt auf die diskreten Gleichungen

$$(3.2) \quad \Delta x u_i^{n+1} - \Delta x u_i^n + \Delta t g_{i+1/2}^n - \Delta t g_{i-1/2}^n = 0,$$

wobei u_i^n eine Approximation des Mittelwerts der Lösung u im Intervall I_i zum Zeitpunkt t_n darstellt. Die vektorwertige Funktion g heißt der **numerische Fluß** und ist eine Funktion von $2k$ -Variablen

$$(3.3) \quad g_{i+1/2}^n = g \left(u_{i-k+1}^n, u_{i-k+2}^n, \dots, u_{i+k}^n \right)$$

mit $k \geq 1$. Dieser numerische Fluß muß natürlich gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen genügen und eine geeignete Approximation des physikalischen Flusses darstellen. So muß er zumindest einer Lipschitzbedingung in allen Argumenten und der Konsistenzbedingung

$$(3.4) \quad g(\underbrace{u, u, \dots, u}_{2k\text{-mal}}) = f(u)$$

genügen. Löst man (3.2) nach u_i^{n+1} auf, so erhält man die Normalform dieses Näherungsverfahrens.

Definition 1: Das Näherungsverfahren

$$(3.5) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n \right), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

mit einem konsistenten lipschitzstetigen Fluß g heißt **explizites Verfahren in Erhaltungsform**.

Wir werden im folgenden nur explizite Verfahren betrachten, so daß wir die Bezeichnung explizit weglassen und kurz Verfahren in Erhaltungsform schreiben. Hängt der numerische Fluß von $2k$ Argumenten ab, gehen in die rechte Seite des Verfahrens in Erhaltungsform (3.5) die Werte an $2k + 1$ Gitterpunkten ein und man spricht von einem $(2k + 1)$ -Punkt Verfahren.

Die direkte Approximation der integralen Erhaltungsgleichungen liefert eine Reihe von günstigen Eigenschaften der Näherungslösungen. Summiert man etwa in (3.5) über alle i auf, so sieht man, daß das räumliche Integral über die Näherungslösung für ein periodisches Problem oder ein Problem mit kompaktem Träger zeitlich konstant ist, wie dies für die exakte Lösung erfüllt ist. Von einem Verfahren in Erhaltungsform kann man auch erwarten, daß die Geschwindigkeit von Stoßwellen richtig wiedergegeben wird, da diese sich gerade aus der integralen Erhaltung ableitet (siehe Satz 1 in Kapitel 2, Seite 6). Nicht erwarten kann man allerdings, daß nur physikalisch sinnvolle Lösungen approximiert werden. Dazu benötigt man gewissermaßen die Konsistenz des Verfahrens mit der Entropiebedingung.

Definition 2: Ein Verfahren in Erhaltungsform (3.5) heißt **konsistent mit der Entropiebedingung** (2.12), falls die Ungleichung

$$(3.6) \quad U_i^{n+1} \leq U_i^n - \lambda \left(G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n \right)$$

erfüllt ist. Dabei ist $U(u)$ eine Entropiefunktion und es gelten die Abkürzungen

$$(3.7) \quad U_i^n := U(u_i^n), \quad G_{i+1/2}^n := G(u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n);$$

G heißt der **numerische Entropiefluß**, welcher konsistent mit dem physikalischen Entropiefluß sein muß:

$$(3.8) \quad G(\underbrace{u, u, \dots, u}_{2k\text{-mal}}) = F(u) \quad .$$

Der Satz von Lax-Wendroff [37] garantiert für ein Verfahren in Erhaltungsform, daß im Falle der Konvergenz die Grenzfunktion eine schwache Lösung ist. Dieser Satz läßt sich erweitern unter der Annahme, daß das Verfahren konsistent mit einer Entropiebedingung ist (Harten und Lax [28]). Zur Formulierung dieses Satzes dehnen wir die Werte auf dem Gitter stückweise konstant zu einer kontinuierlichen Funktion u_Δ von x und t aus:

$$(3.9) \quad u_{\Delta}(x, t) := u_i^n \quad \text{für } t \in (t_{n-1}, t_n], \quad x \in I_i,$$

$$u_{\Delta}(x, 0) := u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} q(x) dx, \quad x \in I_i.$$

Die Vorgabe der Anfangswerte in dieser Art und Weise sichert die integrale Erhaltung.

Satz 1: Ein Verfahren in Erhaltungsform sei konsistent mit der Entropiegleichung und es sei $q \in [L^{\infty}(\mathbb{R})]^m$. Existiert ein Grenzwert für eine Folge von Schrittweiten $\Delta := \Delta x$ mit $\Delta t/\Delta x = \text{konstant}$

$$(3.10) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(x, t) = u(x, t)$$

im Sinne der L^1_{lok} -Konvergenz und gilt mit $K \in \mathbb{R}$

$$(3.11) \quad \|u_{\Delta}(\cdot, t)\|_{[L^{\infty}(\mathbb{R})]^m} \leq K \quad \text{für alle } t$$

gleichmäßig in Δ , dann ist u schwache Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2) und genügt der Entropiegleichung (2.12).

Beweis: Wir skizzieren kurz den Beweis aus [28] und [37]. Gleichung (3.5) und die Entropiegleichung (3.6) werden jeweils mit einer Testfunktion multipliziert; danach wird über i und n aufsummiert. Die Summe kann nun als Integral über u_{Δ} umgeschrieben werden. Partielle Integration und Grenzwertbildung $\Delta \rightarrow 0$ liefern die Behauptung. Der Grenzwert darf hierbei nach (3.11) und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz mit dem Integral vertauscht werden. \square

Die Entropiegleichung (3.6) liefert eine a priori Ungleichung für die Lösungen eines mit ihr konsistenten Verfahrens in Erhaltungsform. Für eine solche Lösung mit kompaktem Träger ist die totale Entropie eine fallende Funktion in der Zeit. Diese a priori Abschätzung ist ein Zeichen dafür, daß das zugehörige Näherungsverfahren stabil ist. Sie ist jedoch nicht stark genug, die Beschränktheit der Folge von Näherungslösungen oder sogar deren Kompaktheit zu zeigen.

Die **Konvergenz** eines Näherungsverfahrens läßt sich im Falle eines Systems von Erhaltungsgleichungen nur für Spezialfälle nachweisen. Zwar läßt sich ein allgemeiner Konvergenzsatz angeben, wobei neben der Konsistenz zur Erhaltungsgleichung und zur Entropiebedingung die gleichmäßige Beschränktheit der

Näherungslösungen und deren Totalvariation gefordert wird. Für Systeme von Erhaltungsgleichungen sind solche Abschätzungen jedoch sehr schwierig nachzuweisen. Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, konnte Glimm [22] für ein System von Erhaltungsgleichungen (streng nichtlinear oder linear entartet) die Existenz einer Lösung zeigen, indem er die Konvergenz seiner Näherungslösungen auf diese Art und Weise nachwies. An die Anfangswerte muß dabei allerdings die Voraussetzung gestellt werden, daß ihre Totalvariation genügend klein ist.

Wir wollen uns im weiteren der Konstruktion von solchen Näherungsverfahren in Erhaltungssystemen zuwenden. Wir betrachten dazu zunächst ein **lineares hyperbolisches System**

$$(3.12) \quad u_t + A u_x = 0$$

mit einer $m \times m$ Matrix A mit konstanten Koeffizienten. Wegen der Hyperbolicität des Systems (3.12) kann A mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation diagonalisiert werden:

$$(3.13) \quad \Lambda := \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m) = R^{-1} A R \quad .$$

Dabei seien die Eigenwerte a_k wieder der Größe nach sortiert. Die Spalten von R enthalten gerade die zugehörigen Rechtseigenvektoren. Wir gehen nun über zu den charakteristischen Variablen w mit

$$(3.14) \quad w = R^{-1} u \quad , \quad u = R w \quad .$$

Die Multiplikation von (3.12) mit R^{-1} und Einsetzen von (3.14) liefert die **charakteristische Form** des hyperbolischen Systems

$$(3.15) \quad w_t + \Lambda w_x = 0 \quad .$$

Durch die Transformation auf charakteristische Variablen wird das System (3.12) entkoppelt in m einzelne lineare Transportgleichungen

$$(3.16) \quad (w_k)_t + a_k (w_k)_x = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad .$$

Die Eigenwerte a_k geben die Ausbreitungsrichtung und Geschwindigkeit der verschiedenen Wellen an.

Das einfachste numerische Verfahren, welches die Ausbreitungsrichtungen der Wellen berücksichtigt, ist das Schema

$$(3.17) \quad (w_k)_i^{n+1} = (w_k)_i^n - \lambda a_k \begin{cases} (w_k)_{i+1}^n - (w_k)_i^n & \text{falls } a_k < 0 \quad , \\ (w_k)_i^n - (w_k)_{i-1}^n & \text{falls } a_k \geq 0 \quad . \end{cases}$$

In Matrixschreibweise kann dies in der Form

$$(3.18) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\lambda}{2} \Lambda \left(w_{i+1}^n - w_{i-1}^n \right) + \frac{\lambda}{2} |\Lambda| \left(w_{i+1}^n - 2 w_i^n + w_{i-1}^n \right)$$

mit $|\Lambda| = \text{diag} (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|)$ geschrieben werden. Definieren wir $|A|$ wie üblich als $R |\Lambda| R^{-1}$, so lautet (3.18) in den ursprünglichen Variablen

$$(3.19) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} A \left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \right) + \frac{\lambda}{2} |A| \left(u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n \right) .$$

Den numerischen Fluß dieses Verfahrens können wir ausdrücken als Summe des Flusses nach rechts und links

$$(3.20) \quad g_{i+1/2}^n = g \left(u_i^n, u_{i+1}^n \right) = A^+ u_i^n + A^- u_{i+1}^n \quad ,$$

wobei A^+ und A^- der positive bzw. negative Teil von A

$$(3.21) \quad A^+ := \frac{1}{2} (A + |A|) \quad , \quad A^- := \frac{1}{2} (A - |A|)$$

ist.

Nach Courant, Isaacson und Rees [8] wird dieses Verfahren üblicherweise **CIR-Verfahren** genannt. Es ist stabil unter der CFL-Bedingung ([9])

$$(3.22) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_j |a_j| \leq 1 \quad ,$$

welche aussagt, daß der numerische Abhängigkeitsbereich den analytischen, der durch den Verlauf der Charakteristiken bestimmt ist, überdecken muß. Man nennt dieses Verfahren ein Upwind-Verfahren, weil es die Ausbreitungsrichtungen der Wellen berücksichtigt. Diese Verfahren sind i.a. 3-Punkt Verfahren ($k = 2$ in (3.3)) und Verfahren erster Ordnung. Eine genaue Definition des Begriffs Upwind-Verfahren wurde von Harten, Lax und van Leer in [27] angegeben:

Definition 3: Ein 3-Punkt Verfahren in Erhaltungsform (3.5) heißt **Upwind-Verfahren**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Liegen u_i und u_{i+1} nahe beieinander, so ist

$$(3.23) \quad h(u_i, u_{i+1}) = A^+ u_i + A^- u_{i+1}$$

eine lineare Approximation des numerischen Flusses $g_{i+1/2}$

2. Sind alle Wellengeschwindigkeiten positiv, so gilt

$$(3.24) \quad g_{i+1/2} = g(u_i, u_{i+1}) = f(u_i) \quad ,$$

sind umgekehrt alle negativ, so gilt

$$(3.25) \quad g_{i+1/2} = g(u_i, u_{i+1}) = f(u_{i+1}) \quad .$$

Überall dort, wo keine Mißverständnisse auftreten können, lassen wir den oberen Index "n" weg. Die Bedingung 1 wollen wir noch etwas präzisieren: Sei u_* ein Referenzzustand nahe bei u_i und u_{i+1} , etwa

$$(3.26) \quad u_* = \frac{1}{2} (u_i + u_{i+1}) \quad ,$$

so ist Bedingung 1 in Definition 3 erfüllt, falls der numerische Fluß eine Darstellung in der Form

$$(3.27) \quad g(u_i, u_{i+1}) = \frac{f(u_i) + f(u_{i+1})}{2} - \frac{1}{2} d(u_i, u_{i+1})$$

mit

$$(3.28) \quad d(u_i, u_{i+1}) = |A(u_*)|(u_{i+1} - u_i) + o(|u_{i+1} - u_i|)$$

besitzt.

Die Formulierung (3.19) zeigt, daß ein Upwind-Verfahren im linearen Fall einfach als Summe eines Verfahrens mit zentralen Differenzen und eines Viskositätsterms geschrieben werden kann. Dieser Viskositätsterm bedingt eine numerische Dissipation in den Näherungslösungen, falls nicht die Signalgeschwindigkeiten a_k sehr klein sind. Das Gleiche gilt auch für Upwind-Verfahren für nichtlineare Gleichungen: überall dort, wo die charakteristischen Geschwindigkeiten nicht sehr klein sind, wird viel numerische Viskosität erzeugt und werden Unstetigkeiten stark verschmiert. Für praktische Berechnungen sind Verfahren zweiter Ordnung nötig, bei welchen diese numerische Dämpfung stark reduziert ist. Aufbauend auf den Upwind-Verfahren werden wir solche Verfahren weiter unten vorstellen.

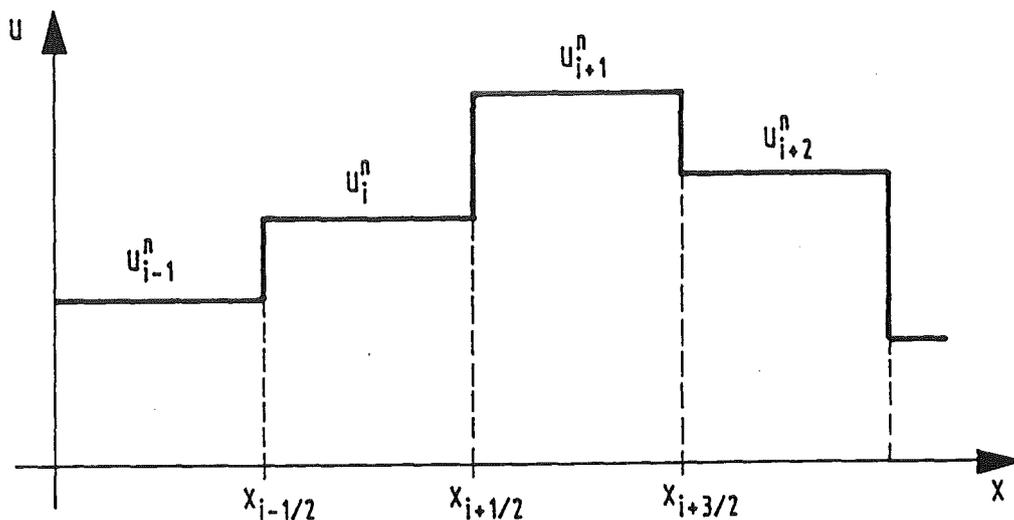
Das erste Upwind-Verfahren für nichtlineare Erhaltungsgleichungen stammt von Godunov [23]. Zur Konstruktion einer Näherungslösung benutzte Godunov die exakte Lösung von Riemannproblemen

$$(3.29) \quad u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Wie in Abschnitt 2 kurz beschrieben, besteht die exakte Lösung dieses Anfangswertproblems aus $m + 1$ konstanten Zuständen, welche durch elementare Wellen getrennt werden. Sie hängt nur ab von den Zuständen u_l, u_r und dem Verhältnis x/t ; wir bezeichnen diese exakte Lösung mit $v = v(x/t; u_l, u_r)$.

Godunov nahm an, daß die Näherungslösung zu irgendeinem Zeitpunkt t_n konstant innerhalb eines jeden Gitterintervalls ist (siehe Figur 3.1):

$$(3.30) \quad u_\Delta(x, t_n) = u_i^n \quad \text{für } x \in I_i$$



Figur 3.1 Stückweise konstante Näherungslösung

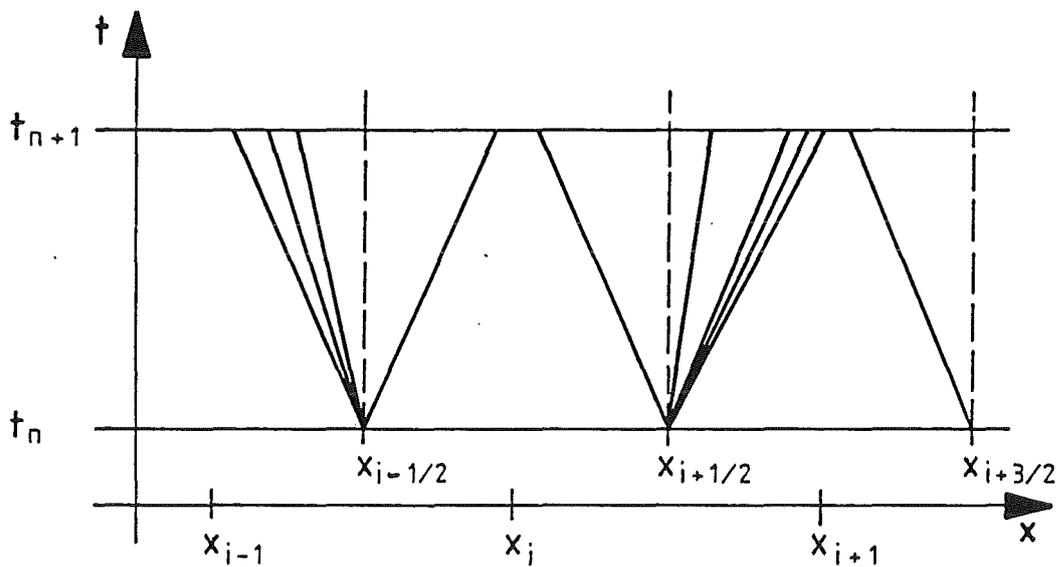
Dieses Anfangswertproblem (2.1), (3.30) kann nun für kleine Zeiten exakt gelöst werden, falls die lokalen Riemannprobleme an den Rändern der Gitterintervalle gelöst werden können. Setzen wir voraus, daß

$$(3.31) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} |a_{\max}| \leq \frac{1}{2}$$

gilt, wobei $|a_{\max}|$ die größte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist, so gibt es keine Wechselwirkung der verschiedenen lokalen Riemannprobleme untereinander und die Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} lautet:

$$(3.32) \quad u_{\Delta}(x, t_{n+1}) = v\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t - t_n}; u_i^n, u_{i+1}^n\right) \quad \text{für } x_i < x < x_{i+1}$$

(siehe Figur 3.2), wobei v die exakte Lösung des Riemannproblems bezeichnet.



Figur 3.2 (x, t) -Diagramm der Lösungen der lokalen Riemannprobleme

Eine stückweise konstante Näherungslösung erhielt Godunov dann wieder durch Mittelung dieser Lösung:

$$(3.33) \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u_{\Delta}(x, t_{n+1}) dx$$

oder in anderer Schreibweise unter Benutzung der Lösungen der lokalen Riemannprobleme

$$(3.34) \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} v(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 v(x/\Delta t; u_i^n, u_{i+1}^n) dx .$$

Da v gerade die exakte physikalisch sinnvolle Lösung des Riemannproblems ist, läßt sich insbesondere zeigen, daß das Godunov-Verfahren einer diskreten Entropiebedingung genügt.

Die exakte Lösung des Riemannproblems eines Systems von Erhaltungsgleichungen ist oft nicht oder nur sehr aufwendig zu berechnen. Weiter wird in (3.34) über die exakte Lösung integriert und damit Information wieder verloren. Deshalb versucht man, diese exakte Lösung durch eine Näherungslösung von einfacher Struktur zu ersetzen. Die wesentlichen Eigenschaften der Erhaltung und die Gültigkeit einer Entropieungleichung sollten jedoch bewahrt bleiben. Auch in der Näherungslösung dürfen sich Wellen natürlich nur mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit bewegen und die Lösung sollte eine Funktion von x/t sein. Das heißt: Zu einer Näherungslösung $w = w(x/t; u_l, u_r)$ des Riemannproblems (3.29) gibt es eine minimale und maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit a_l und a_r , so daß

$$(3.35) \quad \begin{aligned} w(x/t; u_l, u_r) &= u_l && \text{für } x/t \leq a_l, \\ w(x/t; u_l, u_r) &= u_r && \text{für } x/t \geq a_r \end{aligned}$$

gilt.

Definition 4: Eine Approximation $w = w(x/t; u_l, u_r)$ der exakten Lösung des Riemannproblems (3.29) heißt **approximative Riemannlösung**, falls (3.35) und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Konsistenz mit der Integralform der Erhaltungsgleichung in der Gestalt, daß

$$(3.36) \quad \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_l, u_r) dx = \frac{\Delta x}{2} (u_l + u_r) - \Delta t f(u_r) + \Delta t f(u_l)$$

für alle $\Delta t < \Delta x / (2 \max(|a_l|, |a_r|))$ gilt,

2. Konsistenz mit der Integralform der Entropiebedingung in der Gestalt, daß

$$(3.37) \quad \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} U(w(x/\Delta t; u_l, u_r)) dx \leq \frac{\Delta x}{2} (U(u_l) + U(u_r)) - \Delta t F(u_r) + \Delta t F(u_l)$$

für alle $\Delta t < \Delta x / (2 \max(|a_l|, |a_r|))$ gilt.

Das zugehörige Näherungsverfahren nennen wir kurz **Riemannlöser**.

Definition 5: Ein Näherungsverfahren für die Erhaltungsgleichung (2.1) heißt **Godunov-Typ Verfahren**, falls die Näherungslösung die Darstellung

$$(3.38) \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/\Delta t; u_i^n, u_{i+1}^n) dx$$

besitzt, wobei w eine approximative Riemannlösung nach Definition 4 ist.

Das Godunov-Verfahren ist damit natürlich auch ein Godunov-Typ Verfahren. Die Gültigkeit der Entropieungleichung folgt aus deren Gültigkeit für die exakte Lösung des Riemannproblems. Die Eigenschaften (3.36) und (3.38) garantieren insbesondere, daß ein Godunov-Typ Verfahren in Erhaltungsgeschrieben werden kann. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 2: Die Verfahren vom Godunov-Typ können in der Erhaltungsgeschrieben werden. Der numerische Fluß ist durch

$$(3.39) \quad \begin{aligned} g_{i+1/2} = g(u_i, u_{i+1}) &= f(u_i) - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/\Delta t; u_i, u_{i+1}) dx + \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_i \\ &= f(u_{i+1}) + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_i, u_{i+1}) dx - \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_{i+1} \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis: Die Gleichheit in (3.39) folgt direkt aus der Konsistenzbedingung (3.36), wenn man die zweite Darstellung von g von der ersten abzieht. Daß jedes Godunov-Typ Verfahren nach Definition 5 ein Verfahren in Erhaltungsgeschrieben ist, liefert die Ausrechnung

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \lambda \left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/\Delta t, u_i^n, u_{i+1}^n) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} w(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n) dx, \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung in (3.39) für $g_{i+1/2}$ und die zweite Gleichung für $g_{i-1/2}$ eingesetzt wurde. □

Bemerkung 1: Die Darstellung (3.38) der Näherungslösung gibt nur einen Sinn, falls die "halbe" CFL-Bedingung (3.31) erfüllt ist. Auf der anderen Seite bleibt die Erhaltungsform mit den Flüssen (3.39) gültig, falls Wellen von $x_{i+1/2}$ solche aus $x_{i-1/2}$ nicht erreichen, d.h. unter dem Verzicht der Darstellungsformel (3.38) kann die übliche CFL-Bedingung

$$(3.40) \quad \lambda |a_{\max}| \leq 1 \quad , \quad \lambda = \Delta t / \Delta x \quad ,$$

zugelassen werden.

Wir wollen uns nun der Konstruktion spezieller Riemannlöser zuwenden. Das erste hier vorgestellte Verfahren wurde von Roe [59], [60] für die Eulergleichungen angegeben und wird deshalb üblicherweise als **Verfahren von Roe** bezeichnet (siehe auch [58]). Roe approximiert die exakte Lösung des Riemannproblems durch die exakte Lösung des Riemannproblems einer linearen hyperbolischen Gleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$(3.41) \quad w_t + A_{|r} w_x = 0 \quad , \quad w(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \quad , \\ u_r & \text{für } x > 0 \quad . \end{cases}$$

Von der sogenannten **Roe-Matrix** $A_{|r} = A_{|r}(u_l, u_r)$ werden die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$(3.42) \quad 1. \text{ Konsistenz: } A_{|r}(u, u) = A(u) \quad ,$$

$$(3.43) \quad 2. \text{ } A_{|r} \text{ hat reelle Eigenwerte und ein vollständiges System von Eigenvektoren,}$$

$$(3.44) \quad 3. \text{ Mittelwertseigenschaft: } f(u_r) - f(u_l) = A_{|r}(u_r - u_l) \quad .$$

Für die Eulergleichungen wurde eine solche Matrix von Roe in [59] angegeben. Harten, Lax und van Leer [27] konnten zeigen, daß jedes System von Erhaltungsgleichungen, welches eine Entropiefunktion besitzt, eine solche Linearisierung zuläßt.

Wir können nun die Lösung des Anfangswertproblems für die lineare hyperbolische Gleichung (3.41) mittels der Charakteristikentheorie ausrechnen und sie zur Berechnung des Flusses in (3.39) einsetzen. Ein (x, t) -Diagramm der Lösung von (3.41) ist in Figur 3.3 gezeichnet. Die Lösung besteht wie die exakte Lösung aus $m + 1$ konstanten Zuständen, nun aber getrennt durch m Charakteristiken:

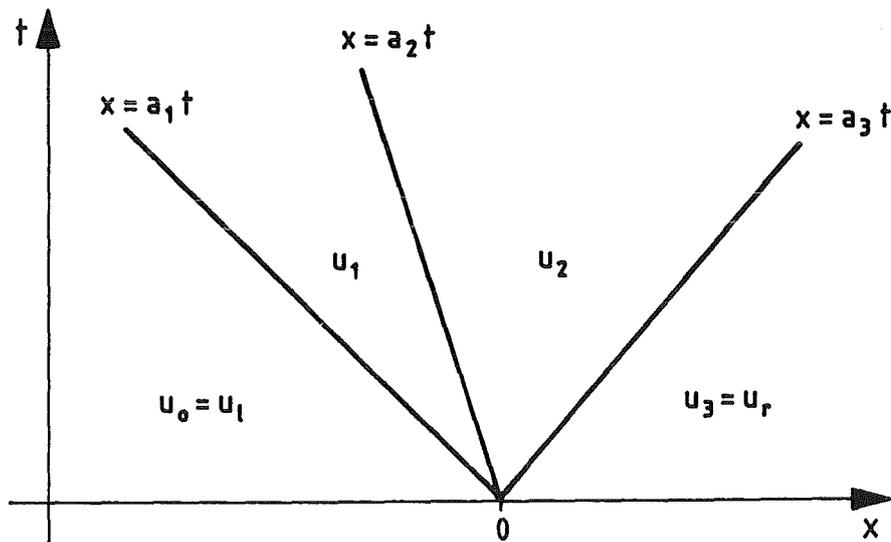
$$(3.45) \quad w(x/t; u_l, u_r) = u_k \quad \text{für } a_k < x/t < a_{k+1} \quad , \quad k = 0, \dots, m \quad ,$$

mit $u_0 = u_l$, $u_m = u_r$, $a_0 = -\infty$ und $a_{m+1} = \infty$. Stellen wir die Differenz $u_r - u_l$ bezüglich der Basis der Rechtseigenvektoren dar

$$(3.46) \quad u_r - u_l = \sum_{j=1}^m \beta_j r^j ,$$

so ergeben sich die verschiedenen Zustände u_k nach der Formel

$$(3.47) \quad u_k = u_l + \sum_{j=1}^k \beta_j r^j .$$



Figur 3.3 (x, t) -Diagramm der Lösung des linearen Riemannproblems (3.41) mit $m = 3$

Diese Lösung setzen wir nun in den ersten und zweiten Teil der Formel (3.39) zur Bestimmung des Flusses des Godunov-Typ Verfahrens ein und erhalten

$$(3.48) \quad g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = f(u_l) + \sum_{i=1}^m a_i^- \beta_i r^i$$

und

$$(3.49) \quad g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = f(u_r) - \sum_{i=1}^m a_i^+ \beta_i r^i$$

mit

$$(3.50) \quad a^- = \min(a, 0) , \quad a^+ = \max(a, 0) .$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so kann man den Fluß des Roe-Verfahrens auch in die Darstellung

$$(3.51) \quad g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = \frac{1}{2} (f(u_l) + f(u_r)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |a_i| \beta_i r^i$$

überführen. Wegen der Mittelwertseigenschaft (3.44) gilt

$$(3.52) \quad f(u_r) - f(u_l) = A_{|r}(u_r - u_l) = \sum_{i=1}^m a_i \beta_i r^i$$

so daß wir (3.51) weiter umschreiben können in

$$(3.53) \quad g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = \frac{1}{2} (f(u_l) + f(u_r)) - \frac{1}{2} |A_{|r}|(u_r - u_l)$$

das heißt, das Verfahren von Roe läßt sich in der Upwind-Form (3.27), (3.28) schreiben und erfüllt damit Bedingung 1 der Definition eines Upwind Verfahrens (Definition 3). Die Ausdrücke (3.48) und (3.49) zeigen sofort, daß auch die Bedingung 2 erfüllt ist und das Verfahren von Roe ein Upwind-Verfahren ist.

Wendet man das Verfahren von Roe auf ein Riemannproblem mit der Eigenschaft $f(u_l) = f(u_r)$ an, so folgt aus der Mittelwertseigenschaft (3.44), daß $u_l - u_r$ ein Nullvektor von $A_{|r}$ ist. Schreiben wir den Fluß (3.53) in der Form

$$(3.54) \quad g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = \frac{1}{2} (f(u_l) + f(u_r)) - \frac{1}{2} d(u_r, u_l)$$

mit

$$(3.55) \quad d(u_l, u_r) = |A_{|r}|(u_r - u_l)$$

so folgt, daß in diesem Fall $d(u_l, u_r) = 0$ gilt. Das Verfahren in Erhaltungsform liefert somit eine stationäre Lösung

$$(3.56) \quad u_i^n = u_i^0 \quad \text{für alle } i \text{ und } n.$$

Gilt für den Entropiefluß $F(u_r) < F(u_l)$, so stimmt dies mit der richtigen exakten Lösung überein. Jedoch im Falle $F(u_r) > F(u_l)$ entspricht die Näherungslösung (3.56) einer stationären Verdünnungswelle. Das heißt, das Verfahren von Roe erkennt hier nicht, daß durch diese Anfangswerte eine Verdünnungswelle erzeugt wird, und liefert eine physikalisch unsinnige Lösung. Das Verfahren von Roe kann somit keiner diskreten Entropiebedingung genügen.

Im obigen Fall muß somit

$$(3.57) \quad d(u_l, u_r) \neq 0 \quad \text{falls} \quad f(u_l) = f(u_r) \quad \text{und} \quad F(u_r) > F(u_l)$$

gelten. Man muß das Roe-Verfahren geeignet modifizieren, um dies zu erzwingen. In Formel (3.51) muß der Wert $|a_k| = 0$ im Falle $a_k(u_l) < 0$ und $a_k(u_r) > 0$ ersetzt werden. Einen Vorschlag hierzu findet man z.B. bei Harten [25].

Das Verfahren von Roe enthält immer noch sehr viele Details, nämlich $m + 1$ konstante Zustände. Zur Berechnung des numerischen Flusses wird nach (3.39) jedoch darüber integriert und somit werden diese Details wieder vergessen. Dieser Umstand legt es nahe, die Komplexität der Riemannlösung noch weiter zu vereinfachen, ohne daß die Genauigkeit des zugehörigen Godunov-Typ Verfahrens in Erhaltungsform sich deutlich verschlechtert.

Das einfachste Godunov-Typ Verfahren, vorgeschlagen von Harten, Lax und van Leer [27] (HLL-Verfahren) besitzt nur einen mittleren Zustand. Sind a_l und a_r eine untere und obere Schranke für die kleinste und größte Ausbreitungsgeschwindigkeit, so lautet diese näherungsweise Riemannlösung

$$(3.58) \quad w(x/t; u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & \text{für} \quad x/t < a_l, \\ u_{lr} & \text{für} \quad a_l < x/t < a_r, \\ u_r & \text{für} \quad x/t > a_r. \end{cases}$$

Der mittlere Zustand wird bestimmt durch die Konsistenzbedingung (3.36) der Definition eines Godunov-Typ Verfahrens und lautet

$$(3.59) \quad u_{lr} = \frac{a_r u_r - a_l u_l}{a_r - a_l} - \frac{f(u_r) - f(u_l)}{a_r - a_l}.$$

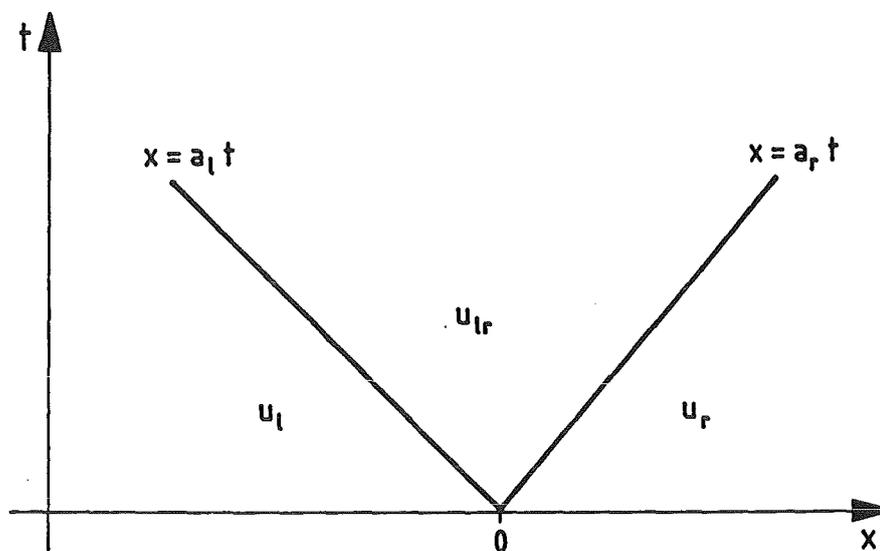
Mittels (3.39) läßt sich damit der numerische Fluß ausrechnen zu

$$(3.60) \quad g_{\text{HLL}}(u_l, u_r) = \frac{a_r^+ f(u_l) - a_l^- f(u_r)}{a_r^+ - a_l^-} + \frac{a_r^+ a_l^-}{a_r^+ - a_l^-} (u_r - u_l)$$

mit

$$a_r^+ = \max(0, a_r), \quad a_l^- = \min(0, a_l).$$

Sind Schranken für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeben, so ist der numerische Fluß dadurch vollständig bestimmt.



Figur 3.4 Näherungsweise Riemannlösung beim HLL-Verfahren

Das Wesentliche an dieser Methode ist, gute Abschätzungen der Signalgeschwindigkeiten a_l und a_r zu finden. Harten, Lax und van Leer geben in [27] leider keinen Algorithmus zur Berechnung von a_l und a_r an. Vorschläge wurden erst später von Davis [11] für ein allgemeines System von Erhaltungsgleichungen und von Einfeldt [17] für die Eulergleichungen gemacht. Die Vorschläge von Einfeldt lassen sich jedoch auch auf den allgemeinen Fall übertragen. Die folgenden Ansätze basieren auf diesen Arbeiten.

Wir betrachten dazu noch etwas genauer, welche Wellengeschwindigkeiten bei der Lösung eines Riemannproblems auftreten können und wie diese geeignet abgeschätzt werden können. Wir müssen uns dazu die einzelnen verschiedenen Wellen anschauen. Das System (2.1) besteht aus m Gleichungen. Wir wollen auch im folgenden immer voraussetzen, daß die charakteristischen Felder des Systems (2.1) entweder streng nichtlinear oder linear entartet sind (siehe Definition 4). Nach Kapitel 2 setzt sich das Riemannproblem somit zusammen aus $m + 1$ konstanten Zuständen u_k , $k = 0, \dots, m$, mit $u_0 = u_l$ und $u_m = u_r$. Die charakteristischen Geschwindigkeiten a_k , $k = 1, \dots, m$, seien wie üblich der Größe nach geordnet $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$. Die konstanten Zustände u_k sind jeweils getrennt durch eine zentrierte Welle, nämlich einer Stoßwelle, Verdünnungswelle oder einer Kontaktunstetigkeit im Falle eines linear entarteten charakteristischen Feldes.

Ist das charakteristische Feld zu a_1 gerade eine **Kontaktunstetigkeit**, so gilt

$$(3.61) \quad a_1(u_0) = a_1(u_1) \quad ,$$

entsprechend der Situation bei einer linearen Gleichung. Liegt eine **Stoßwelle** vor, so gilt nach Definition 3 in Kapitel 2 die Ungleichung

$$(3.62) \quad a_1(u_0) > s > a_1(u_1) \quad ,$$

wobei s die Stoßwellengeschwindigkeit ist. Es gelten in diesem Fall somit für die kleinste Signalgeschwindigkeit a_1 die Ungleichungen

$$(3.63) \quad a_1 > a_1(u_1) \quad , \quad a_1 < a_1(u_0) \quad .$$

Bei einer **Verdünnungswelle** liegt die Situation

$$(3.64) \quad a_1(u_0) < a_1(u_1)$$

vor. Für eine Verdünnungswelle erhalten wir somit für a_1 die Schranke

$$(3.65) \quad a_1 \leq a_1(u_0) \quad .$$

Existiert für unser System eine Roe-Matrix, so ist der kleinste Eigenwert der Roe-Matrix sicherlich eine gute Näherung für die Signalgeschwindigkeit a_1 im Falle einer Kontaktunstetigkeit:

$$(3.66) \quad a_1 = a_1^{\text{ROE}}(u_l, u_r) \quad .$$

Eine einzelne Kontaktunstetigkeit wird dabei von dem Riemannlöser von Roe gerade exakt wiedergegeben. Auch für eine Stoßwelle, sollte (3.66) eine geeignete Näherung sein.

Im Falle der Verdünnungswelle unterschätzt der Roe-Mittelwert jedoch die minimale Signalgeschwindigkeit; der Verdünnungsfächer wird nämlich ersetzt durch eine lineare Unstetigkeit mit einer mittleren Geschwindigkeit. Diese Tatsache führt gerade beim Verfahren von Roe zur Approximation von unphysikalischen stationären Verdünnungstößen, wie wir oben beschrieben haben. Wir korrigieren (3.66) daher durch

$$(3.67) \quad a_1 = \min \{ a_1(u_l) \quad , \quad a_1^{\text{ROE}}(u_l, u_r) \} \quad .$$

Im Falle einer Stoßwelle oder Kontaktunstetigkeit ist der Wert a_1 aus (3.67) identisch mit dem aus (3.66). Nur bei einer Verdünnungswelle wird so korrigiert, daß (3.64) erfüllt ist und die Entropie anwächst. Ganz analog behandelt man auch die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit und erhält

$$(3.68) \quad a_r = \max \{ a_m(u_r) , a_m^{\text{ROE}}(u_l, u_r) \} .$$

Die Berechnung (3.67), (3.68) wurde von Einfeldt [17] vorgeschlagen. Das Verfahren mit dem numerischen Fluß (3.60) und diesen Signalgeschwindigkeiten nennen wir deshalb **HLL-Verfahren**.

Stehen die Roe-Matrix bzw. deren Eigenwerte nicht zur Verfügung, so sind im Falle schwacher Stoßwellen die Formeln

$$(3.69) \quad a_l = \min \{ a_1(u_l) , \frac{1}{2} (a_1(u_l) + a_1(u_r)) \}$$

und

$$(3.70) \quad a_r = \max \{ a_m(u_r) , \frac{1}{2} (a_m(u_l) + a_m(u_r)) \}$$

brauchbar. Der arithmetische Mittelwert der Signalgeschwindigkeiten zu den Zuständen vor und hinter dem Stoß ist eine Approximation der Stoßgeschwindigkeit von zweiter Ordnung in der Stoßstärke ([36]). Für genügend schwache Stöße müßten somit (3.69), (3.70) eine geeignete Approximation der größten und kleinsten Signalgeschwindigkeit sein. Der Vorteil dieser Berechnung ist natürlich, daß keine Roe-Matrix bzw. die Eigenwerte der Roe-Matrix nötig sind. Damit ist das HLL-Verfahren mit dieser Berechnung der Signalgeschwindigkeiten sofort auf jedes System von Erhaltungsgleichungen anwendbar. Für starke Stoßwellen muß man jedoch mit dem Auftreten von Oszillationen an Stoßwellen rechnen.

Eine sehr einfache Approximation schlägt Davis [11] mit

$$(3.71) \quad a_l = a_1(u_l) , \quad a_r = a_m(u_r)$$

vor. Diese Wahl liefert die richtige Approximation bei Verdünnungswellen, die Geschwindigkeit von Stoßwellen wird jedoch unterschätzt. Für starke Stoßwellen sollte dies zu Schwierigkeiten führen.

Verfahren in Erhaltungsform mit dem numerischen Fluß (3.60) und der Berechnung der numerischen Signalgeschwindigkeiten mittels (3.67) - (3.68), (3.69) - (3.70) und (3.71) sind Upwind-Verfahren im Sinne der Definition 3. Die

Richtung der "Differenzenbildung" hängt ab von der Richtung der Wellenausbreitung.

Eine gröbere Abschätzung der Schranken für die Signalgeschwindigkeiten ist

$$(3.72) \quad a_r = \max \{ |a_l(u_l)|, |a_l(u_r)|, |a_m(u_l)|, |a_m(u_r)| \}, \quad a_l = -a_r,$$

wobei hier natürlich die Signalgeschwindigkeiten betragsmäßig sehr stark überschätzt werden können. Dies wird zusätzliche numerische Dämpfung in das Verfahren einführen. Für die Eulergleichung ist das Verfahren in Erhaltungsform mit dem Fluß (3.60) und (3.72) gerade identisch mit dem **Verfahren von Rusanov** [61]. Dieses Verfahren ist kein Upwind-Verfahren mehr im Sinne unserer Definition 3, da unter der Bedingung der Positivität aller Signalgeschwindigkeiten aus (3.72) nicht $a_l = 0$ folgt.

Da die CFL-Bedingung

$$(3.73) \quad \lambda |a_{\max}| \leq 1$$

für ein explizites Verfahren in Erhaltungsform immer erfüllt sein muß, kann man (3.72) durch die noch gröberen Abschätzungen

$$(3.74) \quad a_r = \frac{1}{\lambda}, \quad a_l = -\frac{1}{\lambda}$$

ersetzen. Das zugehörige Näherungsverfahren ist dann gerade identisch mit dem **Lax-Friedrichs Verfahren** [36]. Die weitere Verschlechterung der Abschätzungen der Signalgeschwindigkeiten führt wieder zusätzlich numerische Dämpfung in das Verfahren ein. Auch das Lax-Friedrichs Verfahren ist kein Upwind-Verfahren im Sinne der Definition 3.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch eine weitere Möglichkeit der Konstruktion von Upwind-Verfahren kurz beschreiben: die **Flußvektor-Splitting Verfahren**.

Definition 6: Ein Verfahren in Erhaltungsform heißt **Flußvektor-Splitting Verfahren**, falls sich der numerische Fluß in der Form

$$(3.75) \quad g(u_l, u_r) = f^+(u_l) + f^-(u_r)$$

schreiben läßt, wobei df^+/du und df^-/du nur nichtnegative bzw. nur nichtpositive Eigenwerte besitzen und folgende Bedingungen gelten:

Sind die Signalgeschwindigkeiten $a_k(u_l) \geq 0$, $a_k(u_r) \geq 0$ für alle k , dann gilt

$$(3.76) \quad f^-(u_r) = 0 \quad , \quad f^+(u_l) = f(u_l) \quad .$$

Sind die Signalgeschwindigkeiten $a_k(u_l) \leq 0$, $a_k(u_r) \leq 0$ für alle k , dann gilt

$$(3.77) \quad f^+(u_r) = 0 \quad , \quad f^-(u_l) = f(u_l) \quad .$$

Bei dieser Darstellung der Theorie und Konstruktion von Näherungsverfahren in Erhaltungsform, der Definition der Upwind-Verfahren, der Godunov-Typ und Flußvektor-Splitting Verfahren hielten wir uns eng an die Definitionen von Harten, Lax und von van Leer in ihrer Übersichtsarbeit [27] (siehe auch [49]).

In [39] gab van Leer mit dem **MUSCL-Schema** (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) eine Möglichkeit an, wie man die Konsistenzordnung des Godunov-Verfahrens (Konsistenzordnung 1) erhöhen kann. Diese Methode läßt sich auch auf alle anderen der hier vorgestellten Verfahren erster Ordnung übertragen. Die zentrale Idee von van Leer war, daß er Godunovs Annahme der stückweise konstanten Näherungslösung ersetzte durch die Annahme, daß die Näherungslösung innerhalb einer Gitterzelle linear verteilt ist. Dies ergibt genauere Werte am Rande der einzelnen Gitterintervalle und damit eine genauere Approximation des Flusses. Wir übernehmen hier die Formulierung des MUSCL-Algorithmus, wie er in [38] (siehe auch [51]) aufgestellt wurde.

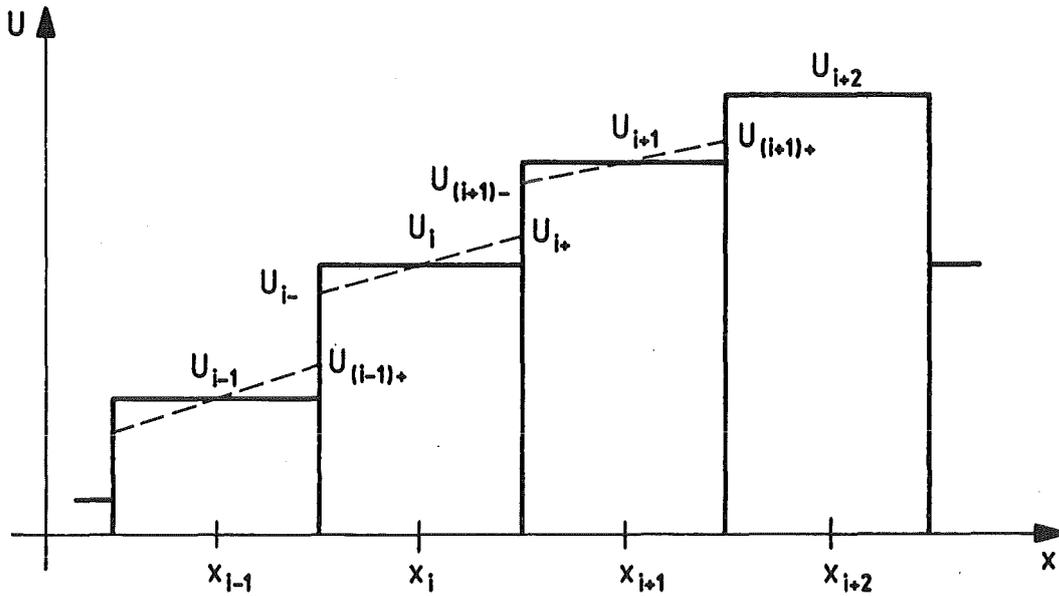
In einem ersten Schritt berechnet man diese stückweise lineare Approximation der Lösung aus den integralen Näherungswerten in der Form

$$(3.78) \quad u^n(x) = u_i^n + (x - x_i) S_i^n \quad \text{für} \quad x \in I_i \quad .$$

Diese Verteilung definiert in jeder Gitterzelle einen Vektor von Randwerten am rechten und linken Rand

$$(3.79) \quad u_{i\pm}^n = u_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} S_i^n \quad .$$

Dabei bezeichnet u_{i+} den Vektor der Randwerte am rechten und u_{i-} den am linken Rand (vergl. Figur 3.5). Auf die Berechnung des Vektors der Steigungen S_i in den Gitterintervallen kommen wir weiter unten noch zurück.



Figur 3.5 Stückweise lineare Approximation

Wir berechnen als nächstes die Änderung der Randwerte $u_{i\pm}$ innerhalb einer Gitterzelle während eines halben Zeitschrittes:

$$(3.80) \quad u_{i\pm}^{n+1/2} = u_{i\pm}^n - \frac{\lambda}{2} \left(f(u_{i+}^n) - f(u_{i-}^n) \right), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Diese Randwerte liefern nun eine genauere Approximation der Flüsse zwischen den einzelnen Gitterzellen, wenn sie in den numerischen Fluß g eines Upwind Verfahrens als Argument eingesetzt werden. Man erhält ein Verfahren in Erhaltungsgestalt

$$(3.81) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left(g_{i+1/2}^{n+1/2} - g_{i-1/2}^{n+1/2} \right)$$

mit

$$(3.82) \quad g_{i+1/2}^{n+1/2} = g \left(u_{i+}^{n+1/2}, u_{(i+1)-}^{n+1/2} \right), \quad g_{i-1/2}^{n+1/2} = g \left(u_{(i-1)+}^{n+1/2}, u_{i-}^{n+1/2} \right).$$

Der Mehraufwand des Verfahrens zweiter Ordnung liegt in der Berechnung der genaueren Argumente des numerischen Flusses g mittels den Formeln (3.79), (3.80) und der Berechnung des Steigungsvektors, auf die wir im folgenden noch zurückkommen.

In Bereichen, in denen eine glatte Lösung existiert, läßt sich dieser Zweischritt-Algorithmus aus einer Zweischritt-Taylorentwicklung in Zeitrichtung in der Form

$$u(x, t + \frac{1}{2} \Delta t) = u(x, t) + \frac{\Delta t}{2} u_t(x, t) + O(\Delta t^2) \quad ,$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t + \frac{1}{2} \Delta t) + O(\Delta t^3)$$

ableiten. Man ersetzt die Zeitableitungen mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen durch Raumableitungen:

$$u(x, t + \frac{1}{2} \Delta t) = u(x, t) - \frac{\Delta t}{2} f(u(x, t))_x + O(\Delta t^2)$$

(3.83)

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t f(u(x, t + \frac{1}{2} \Delta t))_x + O(\Delta t^3) \quad .$$

Gleichung (3.80) ist eine einfache Approximation der ersten Gleichung der Taylorentwicklung (3.83). Die Anwendung einer Taylorentwicklung läßt sich dadurch motivieren, daß in diesem ersten Schritt nur der Transport innerhalb der Gitterzelle, d.h. die Änderung von $u_{i \pm}$ berücksichtigt wird und die Lösung dort glatt ist. Das Aufbrechen der Unstetigkeiten an den Giterrändern in einzelne Wellen und der damit verbundene Fluß zwischen den Gitterzellen wird erst im zweiten Schritt berücksichtigt.

Bis auf die Berechnung der Steigungen ist der Algorithmus für die zweite Ordnung vollständig definiert. Während (3.80) die zweite Ordnung in der Zeit liefert, ist die Steigungsberechnung verantwortlich für die zweite Ordnung im Raum. Für den Steigungsvektor läßt sich aus der Taylorentwicklung (3.83) eine notwendige Bedingung hierfür ableiten. Es muß die Beziehung

$$(3.84) \quad S_i^n = u_x(x_i, t_n) + O(\Delta x)$$

erfüllt sein. Sie ist hinreichend, falls die $O(\Delta x)$ -Terme stetig sind. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß der Steigungsvektor ein gewichteter Mittelwert des rechtsseitigen und linksseitigen Differenzenquotienten sein muß, d.h. in der Form

$$(3.85) \quad S_i^n = \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + (1 - \beta) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

mit $\beta \in [0, 1]^m$ darstellbar ist.

Neben dieser grundsätzlichen Bedingung sollte die Steigungsberechnung noch weitere wichtige Eigenschaften besitzen, um nicht die günstigen Eigenschaften der Upwind-Verfahren zu zerstören. Im Falle einer skalaren Erhaltungsgleichung oder eines Systems von linearen hyperbolischen Differentialgleichungen hat man eine ganze Reihe von Kriterien: z.B. Monotonieerhaltung und Nichtanwachsen der Totalvariation. Eine Übersicht über diese Kriterien und geeignete Steigungsberechnungen findet sich in [50] und [51]. Eine sehr einfache geeignete Steigungsberechnung im skalaren Fall ist etwa gegeben durch

$$(3.86) \quad S_i^n = \frac{1}{\Delta x} \min\text{mod}(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1}) \quad ,$$

wobei die minmod-Funktion durch

$$(3.87) \quad \min\text{mod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{für } |a| < |b|, a, b > 0 \\ b & \text{für } |a| \geq |b|, a, b > 0 \\ 0 & \text{für } a, b \leq 0 \end{cases}$$

definiert ist. Es wird somit derjenige Wert der Steigungen nach rechts oder links genommen, welcher den kleineren Betrag besitzt, und Null, falls ein Extremum vorliegt. Diese Wahl der Steigungsberechnung garantiert im skalaren Fall, daß in der stückweise linearen Approximation analog zur exakten Lösung keine neuen lokalen Extrema entstehen oder bestehende anwachsen.

Diese skalaren Steigungsberechnungen müssen nun auf Systeme geeignet übertragen werden. Der einfachste Weg ist natürlich, die Steigungen in den Erhaltungsgrößen zu berechnen. Eine bessere Übertragung der skalaren Theorie auf Systeme läßt sich jedoch durch die Verwendung von **charakteristischen Variablen** erzielen. Man führt eine lokale Linearisierung des nichtlinearen Systems durch, die es ermöglicht, ein lokales System von charakteristischen Variablen zu definieren. Die Transformation auf diese charakteristischen Variablen liefert eine Entkopplung der einzelnen Gleichungen. Die skalaren Methoden lassen sich dann skalar in jedem charakteristischen Feld anwenden.

Dazu definieren wir in jedem Gitterintervall einen Mittelwert \bar{u}_i , etwa durch

$$(3.88) \quad \bar{u}_i := \frac{1}{4} (u_{i+1} + 2u_i + u_{i-1})$$

oder auch $\bar{u}_i := u_i$. Wir lassen hier und im folgenden den oberen Zeitindex "n" weg. Wir berechnen die Eigenvektoren der Matrix A (\bar{u}_i) und stellen die rechts und linksseitigen Differenzenquotienten in der Basis dieser Rechtseigenvektoren dar:

$$(3.89) \quad \frac{1}{\Delta x} (u_{i+1} - u_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k r_i^k ,$$

$$\frac{1}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) = \sum_{k=1}^m \beta_i^k r_i^k .$$

Die α^k und β^k sind die Komponenten der Differenzenquotienten bezüglich des k-ten charakteristischen Feldes und sind ein Maß für die Änderung der Erhaltungsgrößen in Richtung des k-ten Eigenvektors. Man erhält einen Steigungsvektor $S_i = (S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^m)^T$, indem man jeweils eine skalare Steigungsberechnung auf diese Komponenten anwendet.

Verwendet man zum Beispiel (3.86), so erhält man

$$(3.90) \quad S_i = \sum_{k=1}^m S_i^k r_i^k \quad \text{mit} \quad S_i^k = \min(\alpha_i^k, \beta_i^k) .$$

Man muß hier jedoch nicht in jedem charakteristischen Feld dieselbe Steigungsberechnung anwenden. Ist etwa ein charakteristisches Feld linear entartet, so kann man Steigungen benutzen, welche speziell an einer Kontaktunstetigkeit die numerische Dämpfung stark reduzieren, in nichtlinearen Feldern jedoch zu Instabilitäten neigen (siehe [51]).

Eine Übersicht über die numerische Approximation von Erhaltungsgleichungen findet sich in [27]; numerische Methoden für eine einzelne Erhaltungsgleichung werden ausführlich in [49] behandelt.

4. Eulergleichungen

Als Eulergleichungen bezeichnet man die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik (Gasdynamik) in Eulerkoordinaten, falls Viskosität und Wärmeleitung vernachlässigbar sind. Sie werden abgeleitet aus den integralen Erhaltungsgesetzen von Masse, Impuls (Zweites Newtonsches Gesetz) und Energie (z.B. [6]). In einer Raumdimension lauten sie

$$(4.1) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

mit

$$(4.2) \quad u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet ρ die Dichte, v die Geschwindigkeit, p den Druck und e die totale Energie pro Einheitsvolumen. Vervollständigt werden die Eulergleichungen durch eine Zustandsgleichung

$$(4.3) \quad p = p(\rho, e),$$

wobei ε die spezifische innere Energie bedeutet. Es gilt die Beziehung

$$(4.4) \quad e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Wir wollen hier in diesem Abschnitt als Zustandsgleichung der Einfachheit halber nur die des idealen Gases

$$(4.5) \quad p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

betrachten. Dabei ist die Konstante γ der sogenannte Adiabatenindex (Verhältnis der spezifischen Wärmen).

Die Eigenwerte der Jakobi Matrix $A(u) = df(u)/du$ lauten der Größe nach geordnet

$$(4.6) \quad a_1 = v - c, \quad a_2 = v, \quad a_3 = v + c,$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$(4.7) \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho}.$$

Da die Schallgeschwindigkeit immer positiv ist (Dichte und Druck sind positiv), sind die Eigenwerte (4.6) paarweise verschieden und die Eulergleichungen somit streng hyperbolisch.

Die zu den Eigenwerten (4.6) gehörigen Eigenvektoren $r^1(u)$, $r^2(u)$ und $r^3(u)$ lauten als Spalten der Matrix R geschrieben

$$(4.8) \quad R = (r^1 \ r^2 \ r^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v - c & v & v + c \\ H - vc & \frac{1}{2} v^2 & H + vc \end{pmatrix},$$

wobei H die spezifische Enthalpie bedeutet

$$(4.9) \quad H = \frac{e + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2.$$

Zerlegt man in der Energiegleichung die Gesamtenergie mittels (4.4) in die Summe aus kinetischer und innerer Energie, so erhält man nach Ausnutzen der Massen- und Impulserhaltungsgleichungen eine Transportgleichung für die spezifische innere Energie ε , die sich natürlich nicht in Erhaltungsform schreiben läßt. Ersetzt man in dieser Gleichung die spezifische innere Energie ε durch die Entropie, welche über die Differentialbeziehung $TdS = d\varepsilon + pdV$ mit dem spezifischen Volumen $V = 1/\rho$ und der Temperatur T definiert ist, so erhält man die Entropiegleichung

$$S_t + v S_x = 0.$$

Sei h eine stetig differenzierbare Funktion von S . Multiplikation von (4.10) mit $\rho h'(S)$ und umformen unter Ausnutzung der Massenerhaltung ergibt die Erhaltungsgleichung der Entropie

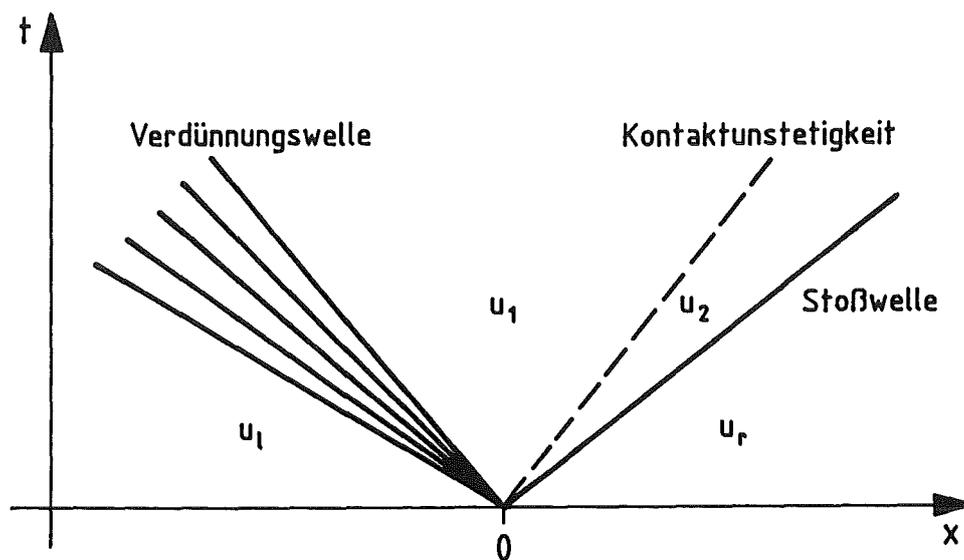
$$(4.10) \quad (\rho h(S))_t + (\rho v h(S))_x = 0$$

(ideales Gas: $S = Cp/(p^\gamma)$, $C = \text{konstant}$). Stetig differenzierbare Lösungen von (4.1) erfüllen somit unendlich viele zusätzliche Erhaltungsgleichungen der Form (4.10). Ist h eine monotone Funktion so existiert in diesem Falle eine umkehrbare Transformation von ρ , ρv , e auf ρ , ρv , S ; d.h. die Energiegleichung in (4.1) kann durch (4.10) ersetzt werden. Für schwache Lösungen können die obigen Umformulierungen nicht mehr ausgeführt werden. Hier charakterisiert eine Entropiegleichung gerade die physikalisch sinnvolle Lösung (Zweiter Hauptsatz der

Thermodynamik). Ist $h(S) = -S$, so ist $\rho h(S)$ und $\rho v h(S)$ gerade ein Entropiepaar im Sinne der Definition 2, Kapitel 2.

Die physikalisch sinnvolle schwache Lösung wird gerade charakterisiert nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik durch eine Entropieungleichung: Die Entropie S wächst über eine Stoßwelle hinweg an. Ist $h(S) = -S$, so ist $U = \rho h(S)$ gerade eine Entropiefunktion im Sinne der Definition 2, Kapitel 2 und (2.12) die zugehörige Entropieungleichung.

Im Falle der Zustandsgleichung des idealen Gases läßt sich die Lösung des Riemannproblems zurückführen auf die Lösung eines Fixpunktproblems [23]. Dieses Fixpunktproblem muß numerisch gelöst werden. Die Lösung besteht nach den Ausführungen in Kapitel 2 aus vier konstanten Zuständen $u_l = u_0, u_1, u_2$ und $u_3 = u_r$. Es zeigt sich, daß die charakteristischen Felder zu den Eigenwerten a_1 und a_3 streng nichtlinear und zum Eigenwert a_2 linear entartet sind, d.h. die Zustände u_l, u_1 und u_2, u_r werden jeweils getrennt durch eine Stoß- oder Verdünnungswelle, die mittleren Zustände u_1, u_2 durch eine Kontaktunstetigkeit. Eine mögliche Situation ist in Figur 4.1 skizziert. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit s der Kontaktunstetigkeit gilt nach (2.20) $s = v_1$ oder $s = v_2$. Aus den Rankine-Hugoniot Bedingungen (2.6) für die Eulergleichungen folgt dann weiter $v_1 = v_2$ und $p_1 = p_2$. Geschwindigkeit und Druck sind somit stetig an der Kontaktunstetigkeit.



Figur 4.1 Lösung eines Riemannproblems

Mit Hilfe der Lösung des Riemannproblems ergibt sich dann der numerische Fluß des **Godunov-Verfahrens**. Reale Zustandsgleichungen können behandelt werden, indem man den Adiabatenindex in (4.5) als Funktion von ρ und ε einführt. Eine allgemeine Zustandsgleichung wird somit dargestellt als die des idealen Gases mit variablem γ (siehe [7]). Für Zustandsgleichungen, welche sehr stark von der des idealen Gases abweichen, dürfte diese Methode jedoch zu ungenau sein.

Das **Verfahren von Roe**, wie wir es im letzten Kapitel vorgestellt haben, wurde von Roe [59] für die Eulergleichungen entwickelt. Er machte den Ansatz, daß die Matrix $A_{|r}$ gerade die Funktionalmatrix A ist, ausgewertet an einem bestimmten Mittelwert, \bar{u} :

$$(4.11) \quad A_{|r} = A(\bar{u}) \quad \text{mit} \quad \bar{u} = \bar{u}(u_l, u_r) \quad .$$

Die Mittelwertseigenschaft (3.44) führt dann auf verschiedene Bedingungen an \bar{u} . Roe gelang es durch die Einführung eines Parametervektors diese Gleichungen zu lösen und die Mittelwerte

$$(4.12) \quad \bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_l} v_l + \sqrt{\rho_r} v_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \quad ,$$

$$(4.13) \quad \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_l} H_l + \sqrt{\rho_r} H_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \quad ,$$

$$(4.14) \quad \bar{c}^2 = (\gamma - 1) \left[\bar{H} - \frac{1}{2} \bar{v}^2 \right] \quad .$$

zu finden. Die Vorgabe dieser Roe-Mittelwerte reicht aus, um das Verfahren von Roe für die Eulergleichungen durchzuführen, da die Rechtseigenvektoren (4.8) nur von c , H und v abhängen.

Um den Fluß des Roe-Verfahrens nach Formel (3.51) zu bestimmen, benötigt man noch die Komponenten der Darstellung (3.46) von $u_r - u_l$ bezüglich der Basis des \mathbb{R}^3 , die durch die Rechtseigenvektoren (4.8) gegeben ist, d.h. das lineare Gleichungssystem

$$(4.15) \quad z := u_r - u_l = \sum_{i=1}^3 \beta_i r^i \quad \text{mit} \quad z = (z_1, z_2, z_3)^T$$

muß gelöst werden. Als 3 x 3 Gleichungssystem läßt sich dies leicht explizit auflösen. Es besitzt die Lösung

$$\beta_2 = - \frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2} C_1$$

$$(4.16) \quad \beta_3 = \frac{1}{2\bar{c}} (z_2 - (\bar{v} - \bar{c})z_1) - \frac{1}{2} \beta_2$$

$$\beta_1 = z_1 - \beta_2 - \beta_3$$

mit

$$(4.17) \quad C_1 = z_1 (\bar{v}^2 - \bar{H}) + z_3 - \bar{v} z_2 .$$

Damit ist das Verfahren von Roe vollständig definiert. Es müssen zunächst die Koeffizienten β_i , $i = 1, 2, 3$ nach den Formeln (4.16), (4.17) bestimmt werden. Die Eigenwerte der Roe-Matrix sind nach (4.10) dann gegeben durch

$$(4.18) \quad \bar{a}_1 = \bar{v} - \bar{c} \quad , \quad \bar{a}_2 = \bar{v} \quad , \quad \bar{a}_3 = \bar{v} + \bar{c} \quad .$$

Aus Formel (3.51) ergibt sich damit der Fluß des Roe-Verfahrens.

Aufbauend auf den Roe-Mittelwerten können wir nun auch das **HLL-Verfahren** angeben. Der numerische Fluß dieses Verfahrens ist gegeben durch (3.60) mit den Abschätzungen der Signalgeschwindigkeiten

$$(4.19) \quad a_l = \min \{u_l - c_l, \bar{a}_1\} \quad , \quad a_r = \max \{u_r + c_r, \bar{a}_3\} \quad ,$$

entsprechend den Formeln (3.67), (3.68).

Die Verallgemeinerung des Verfahrens von Roe und des HLL-Verfahrens auf allgemeine Zustandsgleichungen ist jedoch nicht einfach. Die Roe-Matrix $A_{l,r}$ läßt sich in diesem Falle nicht mehr angeben als $A(\bar{u})$ mit einem Roe-Mittelwert \bar{u} sondern nur als Matrix $A_{l,r}(u_l, u_r)$ (siehe [21], [42], [48]). Im Falle der Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten hat man eine ganz ähnliche Situation vorliegen. Wir werden dieses Problem im übernächsten Abschnitt ausführlich behandeln.

Strömungen mit hoher Energie enthalten oft Bereiche, in denen die kinetische Energie dominiert. Berechnet man nun bei einem Verfahren in Erhaltungform die innere Energie aus den Näherungswerten für die Erhaltungsgrößen, so kann sie negativ werden. Dies führt natürlich zum Zusammenbruch des numerischen Verfahrens, da der Druck und das Quadrat der Schallgeschwindigkeit negativ werden. Verfahren, für die innere Energie, Dichte und Druck immer positiv bleiben, nennen wir **positive oder positivitätserhaltende Verfahren in Erhaltungform**. Einfeldt, Munz, Roe und Sjögreen [18] zeigten, daß es eine ganze Klasse von Riemannproblemen gibt, für die das Verfahren von Roe zwingend eine negative Dichte und negative innere Energie liefert und somit nicht durchführbar ist. Die Anfangswerte dieser Riemannprobleme in [18] haben die Form

$$(4.20) \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_l = (\rho_o, -\rho_o v_o, e_o)^T & \text{für } x < 0 \quad , \\ u_r = (\rho_o, \rho_o v_o, e_o)^T & \text{für } x > 0 \quad . \end{cases}$$

Bemerkung 1: In der Lösung des Riemannproblems (4.1), (4.20) mit $v_o > 0$ tritt im Falle

$$(4.21) \quad \frac{4 \gamma e_o}{3 \gamma - 1} \leq \rho_o v_o^2$$

ein Bereich mit **Vakuum** auf.

Diese Aussage ist wohlbekannt und findet man etwa bei Smoller [66]. Ein numerisches Verfahren, welches die Eulergleichungen approximiert, kann in diesem Falle keine sinnvolle Lösung mehr liefern, da die Eulergleichungen für Vakuum nicht mehr gelten. Für die Ableitung der Eulergleichungen ist eine wesentliche Voraussetzung die Kontinuumsannahme, die für Vakuum natürlich verletzt ist. Es gibt allerdings einen ganzen Bereich, in dem die exakte Lösung von (4.1), (4.20) positive Dichte und innere Energie besitzt, jedoch in der Lösung von

$$(4.22) \quad u_t + A(\bar{u}) u_x = 0 \quad , \quad A(u) := \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{\bar{u}}$$

mit den Anfangswerten (4.20) negative Dichte und innere Energie auftritt. Dabei sei $\bar{u} := (\bar{\rho}, \bar{\rho} \bar{v}, \bar{e})^T$ ein beliebiger Erwartungswert von u_l und u_r aus (4.20) mit der Symmetrie-Eigenschaft $\bar{v} = 0$, wie sie etwa von dem Roe-Mittelwert oder auch von dem arithmetischen Mittelwert erfüllt wird. Wir nennen ein solches Anfangswertproblem (4.1), (4.20) **nicht linearisierbar**.

Satz 1: Das Riemannproblem (4.1), (4.20) mit $v_0 > 0$ ist nicht linearisierbar, falls die Anfangswerte (4.20) die Ungleichung

$$(4.23) \quad (\gamma - 1) e_0 \leq \rho_0 v_0^2$$

erfüllen.

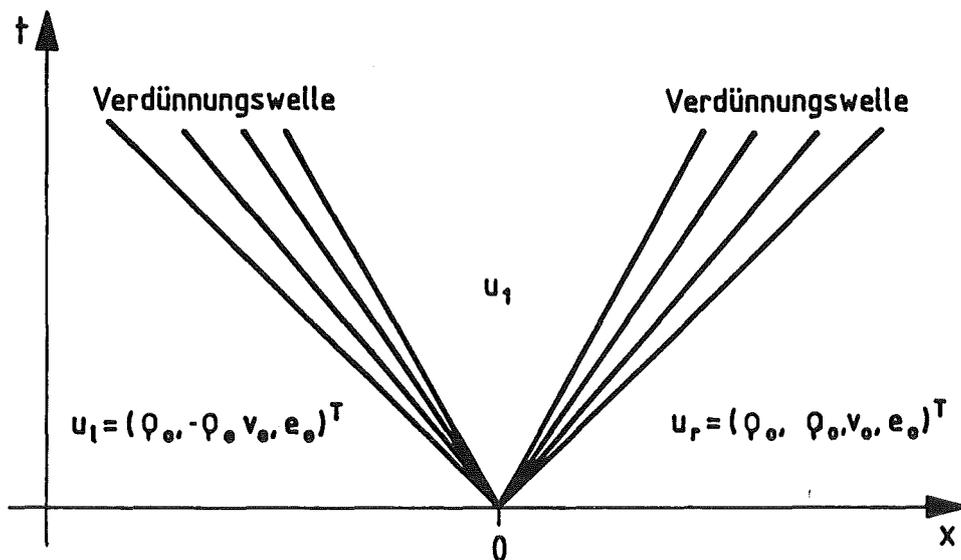
Beweis: Sei \bar{u} ein beliebiger Mittelwert von u_l und u_r mit $\bar{v} = 0$. Mit $r^1(\bar{u})$, $r^2(\bar{u})$ und $r^3(\bar{u})$ bezeichnen wir die Rechtseigenvektoren (4.8) der Matrix $A(u) = df(u)/du$ an der Stelle \bar{u} . Die Koeffizienten β_j , $j = 1, 2, 3$, der Darstellung von $u_r - u_l$ bezüglich der Basis dieser Eigenvektoren ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$(4.24) \quad u_r - u_l = \beta_1 r^1(\bar{u}) + \beta_2 r^2(\bar{u}) + \beta_3 r^3(\bar{u})$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist durch die Formeln (4.16) gegeben und lautet in unserem speziellen Fall

$$(4.25) \quad \beta_1 = -\frac{\rho_0 v_0}{\bar{c}}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \frac{\rho_0 v_0}{\bar{c}}$$

wobei \bar{c} die Schallgeschwindigkeit zum Mittelwertszustand \bar{u} bezeichnet. Die Lösung des Riemannproblems (4.1), (4.20) mit $v_0 > 0$ besteht somit nur aus drei konstanten Zuständen u_l , u_1 und u_r , welche durch zwei Verdünnungswellen getrennt werden (siehe Figur 4.2). Die Kontaktunstetigkeit entfällt.



Figur 4.2 Lösung des Riemannproblems (4.1), (4.20)

Der Zustand u_1 ist nach (3.47) gegeben durch

$$(4.26) \quad u_1 = u_l + \beta_1 r^1(\bar{u}) = u_r - \beta_3 r^3(\bar{u})$$

und man erhält

$$(4.27) \quad \rho_1 = \rho_0 - \frac{\rho_0 v_0}{\bar{c}}, \quad \rho_1 v_1 = 0, \quad e_1 = e_0 - \rho_0 v_0 \frac{\bar{H}}{\bar{c}} = e_0 - \frac{\rho_0 v_0 \bar{c}}{\gamma - 1}.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich sofort $v_1 = 0$ in Analogie zur exakten Lösung (Symmetrie). Die Forderung nach Positivität der Dichte und inneren Energie des mittleren Zustandes u_1 führt auf die Ungleichungen

$$(4.28) \quad 1 - \frac{v_0}{\bar{c}} > 0 \quad \text{und} \quad e_0 - \frac{1}{\gamma - 1} \rho_0 v_0 \bar{c} > 0$$

und weiter

$$(4.29) \quad v_0 < \bar{c} < \frac{(\gamma - 1)e_0}{\rho_0 v_0}.$$

Es kann somit nur ein Erwartungswert \bar{u} existieren, für den u_1 positive Dichte und innere Energie besitzt, falls (4.23) erfüllt ist und damit (4.28) lösbar wird. Andernfalls ist (4.1), (4.20) nicht linearisierbar. \square

Aus den Ungleichungen (4.28) läßt sich weiter direkt ableiten:

Bemerkung 2: Im Falle $v_0 < 0$ ist das Riemannproblem (4.1), (4.20) ohne Einschränkungen linearisierbar. Die Lösung besteht aus zwei Stoßwellen, die sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten von der Anfangsdiskontinuität entfernen.

Das Verfahren von Roe kann somit in Bereichen kleiner Dichten beim Auftreten von Verdünnungswellen versagen. Dies ist insofern nicht so sehr verwunderlich, da das Roe-Verfahren eine Verdünnungswelle durch eine lineare Unstetigkeit mit "mittlerer" Ausbreitungsgeschwindigkeit ersetzt.

Satz 2: Das Godunov-Verfahren ist für das Riemannproblem (4.1), (4.20) ein positives Verfahren.

Beweis: G sei die Menge der Zustände mit positiver Dichte und innerer Energie

$$(4.30) \quad G = \{(\rho, \rho v, e)^T \text{ mit } \rho > 0, \quad 2pe > \rho v^2\} \quad .$$

Tritt in der Lösung des Riemannproblems kein Vakuum auf, so liegt sie in G . Still-schweigend vorausgesetzt ist hier natürlich, daß die Anfangswerte in G liegen. Da G konvex ist, liegt der integrale Mittelwert (3.38) dieser Lösung wieder in G und das Godunov-Verfahren ist positivitàterhaltend.

Bei der Abschätzung der Signalgeschwindigkeiten des HLL-Verfahrens werden nach (3.67), (3.68) gerade die Roe-Mittelwertgeschwindigkeiten an den Verdünnungswellen korrigiert. Die Signalgeschwindigkeiten (3.67), (3.68) sind somit Schranken der physikalischen Signalgeschwindigkeiten. Es gilt allgemein der

Satz 3: Sind die numerischen Signalgeschwindigkeiten a_l und a_r eine untere bzw. obere Schranke der physikalischen Signalgeschwindigkeiten, so ist das HLL-Verfahren (3.60) für das Riemannproblem (4.1), (4.20) positivitàterhaltend.

Beweis: Ist a_l und a_r eine untere bzw. obere Schranke der physikalischen Signalgeschwindigkeit, so gilt wegen der integralen Erhaltungseigenschaft (3.36) für den mittleren Zustand u_{lr} der näherungsweise Riemannlösung

$$(4.31) \quad u_{lr} = \frac{1}{(a_l - a_r) \Delta t} \int_{a_l \Delta t}^{a_r \Delta t} w_e(x/t; u_l, u_r) dx \quad ,$$

wobei w_e die exakte Lösung des Riemannproblems ist. Da w in G liegt, erfüllt der integrale Mittelwert u_{lr} wegen der Konvexität von G dies auch. Die ungestörten Zustände liegen sowieso in G . Die Integration (3.38) führt nicht aus der konvexen Menge G hinaus und das HLL-Verfahren ist positivitàterhaltend.

Es gelingt somit im Rahmen eines HLL-Verfahrens, eine Korrektur der Roe-Signalgeschwindigkeiten so einzuführen, daß Dichte und innere Energie im näherungsweise Riemannlöser positiv bleiben, solange kein Vakuum vorliegt. Das HLL-Verfahren ersetzt nach den Ausführungen in Kapitel 3 die exakte durch eine näherungsweise Riemannlösung, welche nur einen konstanten mittleren Zustand enthält. Dies wirkt sich in der Weise aus, daß die numerische Dämpfung speziell der Kontaktunstetigkeit bei diesem Verfahren größer ist. Einfeldt zeigt jedoch in [17], daß sich dies in einem MUSCL-Typ Verfahren zweiter Ordnung kaum auswirkt.

5. Kompressible Navier-Stokes Gleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir die Erweiterung der numerischen Methoden für die Eulergleichungen aus dem vorherigen Kapitel auf die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in zwei Raumdimensionen. Als **kompressible Navier-Stokes Gleichungen** bezeichnet man die Erhaltungsgleichungen mit Viskosität und Wärmeleitung. Geschrieben in Erhaltungssform lauten sie

$$(5.1) \quad u_t + f_1(u)_x + f_2(u)_y = r(u)_x + s(u)_y \quad ,$$

wobei u den Vektor der Erhaltungsgrößen $(\rho, \rho v, \rho w, e)^T$ bezeichnet. Die Bezeichnungen der einzelnen Größen ist, soweit möglich, analog zu den Eulergleichungen in Kapitel 4 gewählt: ρ bezeichnet die Dichte, v und w die Geschwindigkeitskomponenten in x - bzw. y -Richtung und e die totale Energie pro Einheitsvolumen. Die Funktionen $f_1(u)$ und $f_2(u)$ sind gerade die Eulerflüsse in x - bzw. y -Richtung, $r(u)$ und $s(u)$ enthalten die dissipativen Terme:

$$(5.2) \quad f_1(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ v(e + p) \end{pmatrix}, \quad f_2(u) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ w(e + p) \end{pmatrix}, \quad r(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ v\tau_1 + w\tau_2 + q^x \end{pmatrix}, \quad s(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ v\tau_2 + w\tau_3 + q^y \end{pmatrix}$$

mit

$$(5.3) \quad \tau_1 = (2\mu + \lambda) v_x + \lambda w_y \quad , \quad \tau_2 = \mu (v_y + w_x) \quad , \quad \tau_3 = (2\mu + \lambda) w_y + \lambda v_x \quad ,$$

$$q^x = \gamma \frac{\mu}{Pr} \varepsilon_x \quad , \quad q^y = \gamma \frac{\mu}{Pr} \varepsilon_y \quad .$$

Dabei bedeuten hier p der Druck, μ und λ die Viskositätskoeffizienten, die Größen q^x und q^y die spezifischen Wärmeleitungsflüsse, Pr die Prandtl-Zahl und γ der Adiabatenexponent.

Wie im Kapitel 4 setzen wir als Zustandsgleichung die des idealen Gases (4.5) voraus. Die Viskositäts- und Wärmeleitungsterme sind hier auch in der Flußformulierung geschrieben, die uns für die Konstruktion des numerischen Verfahrens günstiger erscheint. In diesen Termen stecken aber natürlich Ableitungen zweiter Ordnung der Geschwindigkeiten. Das heißt die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen sind kein hyperbolisches Differentialgleichungssystem, sondern ein sogenanntes **unvollständig parabolisches System** (siehe [24]). Wir wollen hier jedoch nur sehr kleine Viskositätsterme zulassen. Somit betrachten wir (5.1) als ein hyperbolisches System mit einem kleinen parabolischen Störungsterm.

5.1 Numerische Approximation

Eine einfache Methode, eindimensionale numerische Verfahren auf mehrere Raumdimensionen auszudehnen, ist die des **Dimensionen-Splittings** welche auch **Zwischenschrittmethode** genannt wird. Eine ausführliche Einführung dieser Methode zur Behandlung mehrdimensionaler Probleme der mathematischen Physik geben Marchuk [43] und Yanenko [72], angewandt auf die Eulergleichungen wurde sie zum ersten Mal von Godunov [23]. Jüngere Ergebnisse ([10], [71]) zeigen, daß diese Methode sehr gute und effiziente mehrdimensionale Shock-Capturing Verfahren liefern kann.

Bei der Splitting-Methode wird die Gleichung (5.1) zerlegt und zwar in die zwei eindimensionalen Probleme

$$(5.4) \quad u_t + f_1(u)_x = r(u)_x \quad ,$$

$$(5.5) \quad u_t + f_2(u)_y = s(u)_y \quad ,$$

welche in jedem Zeitschritt nacheinander gelöst werden. Man hat somit das zweidimensionale Problem auf zwei eindimensionale Probleme zurückgeführt. Die linke Seite der eindimensionalen Probleme (5.4) und (5.5) sind in der Struktur sehr ähnlich zu den Eulergleichungen (4.1). Es tritt jedoch eine zusätzliche Gleichung auf, die aber von einfacher Bauart ist und in (5.4) etwa den Transport der y-Komponente des Impulses in x-Richtung beschreibt. Die Eigenwerte der Funktionalmatrix $df_1(u)/du$ lauten

$$(5.6) \quad a_1 = v - c \quad , \quad a_2 = v \quad , \quad a_3 = v \quad , \quad a_4 = v + c \quad ,$$

wobei die zugehörige Eigenvektoren eine Basis im R^4 bilden, d.h. das homogene System (5.4) ist hyperbolisch. Die analoge Situation ergibt sich bei (5.5), man muß lediglich in (5.6) v durch w ersetzen.

Die in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren lassen sich auf die Systeme (5.4), (5.5) ausdehnen. Eine ausführliche Beschreibung der Übertragung numerischer Verfahren für die eindimensionalen Eulergleichungen auf die zweidimensionalen Eulergleichungen wird in [19] gegeben. Üblicherweise wird das Splitting-Verfahren von Strang [68] benutzt, bei welchem die Reihenfolge der numerischen Behandlung der Gleichungen (5.4), (5.5) in jedem Zeitschritt vertauscht wird. Diese Vorgehensweise erhält die Konsistenzordnung Zwei.

Wir wollen uns hier auch der Approximation der Dissipationsterme auf der rechten Seite zuwenden. Dabei beschränken wir uns auf die Gleichung (5.4.); (5.5) läßt sich analog behandeln. Während die Eulerterme abhängig von der Wellenausbreitung approximiert werden, macht dies bei den parabolischen Termen natürlich keinen Sinn. Physikalisch adäquat erscheint hier die einfache Approximation mittels zentraler Differenzen.

Wir können dies folgendermaßen formulieren: Das numerische Verfahren für die erste Gleichung (5.4) des Splitting-Schemas lautet

$$(5.7) \quad u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(g_{i+1/2,j}^n - g_{i-1/2,j}^n \right) ,$$

wobei der numerische Fluß sich zusammensetzt aus dem numerischen Fluß für die Eulerterme g_{EUL} und der Approximation g_{VIS} des dissipativen Flusses

$$(5.8) \quad g_{i+1/2,j}^n = (g_{EUL})_{i+1/2,j}^n + (g_{VIS})_{i+1/2,j}^n .$$

Geeignete Flüsse g_{EUL} wurden in Kapitel 4 besprochen, zentrale Differenzbildung für den viskosen Fluß liefert die folgenden Formeln. Wir lassen dabei den oberen Zeitindex "n" weg und markieren mit dem oberen Index 1, 2, 3 oder 4 die verschiedenen Komponenten des viskosen Flußvektors

$$(5.9) \quad (g_{VIS})_{i+1/2,j}^1 = 0 ,$$

$$(5.10) \quad (g_{VIS})_{i+1/2,j}^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\Delta x} (v_{i+1,j} - v_{i,j}) + \frac{\lambda}{4\Delta y} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) ,$$

$$(5.11) \quad (g_{VIS})_{i+1/2,j}^3 = \frac{\mu}{4\Delta x} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \frac{\mu}{\Delta x} (w_{i+1,j} - w_{i,j}) ,$$

$$(5.12) \quad (g_{VIS})_{i+1/2,j}^4 =$$

$$\begin{aligned} & (v_{i+1,j} + v_{i,j}) \left[\frac{2\mu+\lambda}{2\Delta x} (v_{i+1,j} - v_{i,j}) + \frac{\lambda}{8\Delta y} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \right] \\ & + (w_{i+1,j} + w_{i,j}) \left[\frac{\mu}{2\Delta x} (w_{i+1,j} - w_{i,j}) + \frac{\mu}{8\Delta y} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right] \\ & + \gamma \frac{\mu}{Pr \Delta x} (\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i,j}) . \end{aligned}$$

Die explizite Approximation der parabolischen Diffusionsterme nach (5.8) - (5.12) ist nur effizient für sehr kleine Viskositätsterme, d.h. kleine Viskositätskoeffizienten μ und λ . Während für die explizite Approximation der hyperbolischen Terme in (5.4) die CFL-Bedingung

$$(5.13) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|v| + c) \leq 1$$

(vgl. (3.40)) eine erste Bedingung an den Zeitschritt liefert, lautet die Stabilitätsbedingung für die parabolischen Terme

$$(5.14) \quad \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \max\left(\frac{\mu}{\rho}, \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \frac{\gamma\mu}{Pr\rho}\right) \leq 1$$

(vgl. [45]). In der parabolischen Schrittweitenbedingung (5.14) geht die Raumschrittweite Δx quadratisch im Nenner ein, d.h. für kleine Raumschrittweiten Δx kann diese Bedingung eine sehr einschneidende Forderung an den Zeitschritt Δt darstellen. Die explizite Approximation ist somit nur sinnvoll bzw. effizient, solange die Viskositätskoeffizienten sehr klein sind und der nach (5.14) geforderte Zeitschritt in der Größenordnung des Zeitschrittes nach der CFL-Bedingung liegt.

Stellt die parabolische Bedingung (5.14) eine zu starke Einschränkung dar, so müssen die parabolischen Terme implizit approximiert werden. Dies kann man durchführen, indem nochmals eine Splittingtechnik angewandt wird und (5.4) und (5.5) in den hyperbolischen und parabolischen Anteil aufspaltet:

$$(5.15) \quad u_t + f_1(u)_x = 0 \quad ,$$

$$(5.16) \quad u_t - r(u)_x = 0 \quad ,$$

bzw.

$$(5.17) \quad u_t + f_2(u)_y = 0 \quad ,$$

$$(5.18) \quad u_t - s(u)_y = 0 \quad .$$

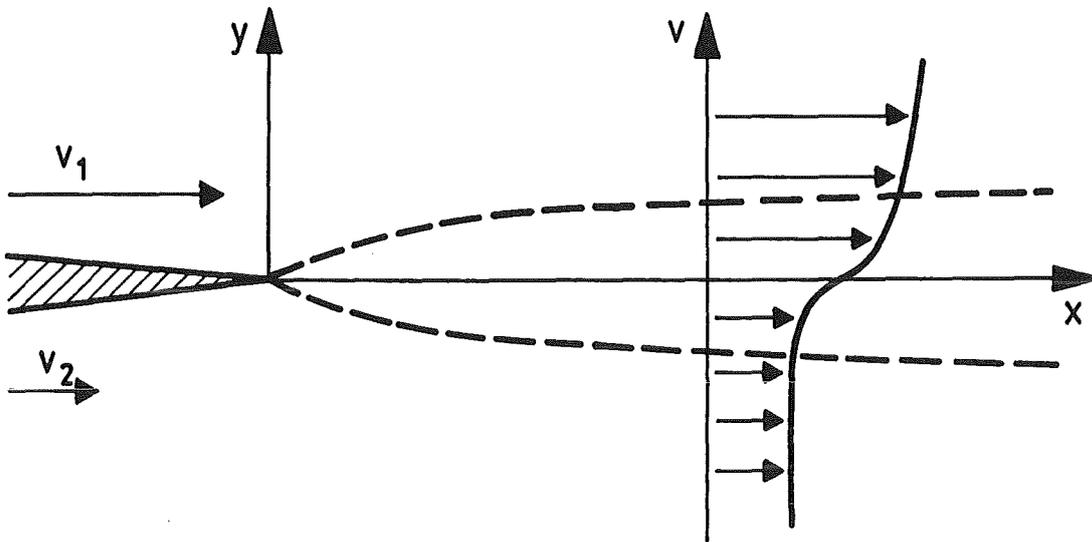
In jedem Zeitschritt werden zunächst die hyperbolischen Gleichungen (5.15) bzw. (5.17) und danach die parabolischen (5.16) bzw. (5.18) gelöst. Die parabolischen Gleichungen können nun unabhängig von dem hyperbolischen Teil behandelt

werden. Insbesondere kann für diese Gleichungen ein implizites Verfahren gewählt werden, so daß die Schrittweitenbedingung (5.14) entfällt.

Die CFL-Bedingung (5.13) sagt aus, daß eine Störung innerhalb eines Zeitschrittes höchstens durch eine Gitterzelle laufen darf. Sie ist für die meisten Anwendungen eine recht natürliche Zeitschrittbedingung, welche auch aus Genauigkeitsgründen erfüllt sein sollte. Lediglich bei der Approximation von stationären oder nahezu stationären Zuständen etwa in der Aerodynamik möchte man zur Konvergenzbeschleunigung auf größere Zeitschritte übergehen. Hierfür muß eine implizite Approximation auch für den hyperbolischen Teil angewandt werden. Diesen Aspekt möchten wir hier nicht behandeln und verweisen auf die Arbeit von Schroeder und Hänel [64]. Bei der Approximation von nahezu inkompressiblen Medien kann die Schallgeschwindigkeit sehr groß werden und die CFL-Bedingung dadurch sehr einschneidend. In diesem Fall ist es ebenso vorteilhaft, zumindest die Druckterme in den Eulergleichungen in impliziter Form zu approximieren. Die Schallgeschwindigkeit fällt dann in der Schrittweitenbedingung heraus und die Zeitschrittweite muß lediglich in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit v gewählt werden.

5.2 Instabilität einer Scherströmung und das Wirbelpaaren bei transonischer Strömung

In diesem Abschnitt wenden wir das in Abschnitt 5.1 beschriebene Verfahren zur numerischen Simulation der Instabilität einer Scherströmung an. Eine Scherströmung entsteht, wenn Strömungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich berühren. Ein schematisches Bild einer solchen Scherströmung hinter einer Platte ist in Figur 5.1 wiedergegeben. Die Instabilität führt auf ein intensives Mischen beider Strömungen in dem durch die gestrichelten Linien begrenzten Gebiet. Die Mischzone vergrößert sich dabei mit dem Abstand von der Platte. In ihr treten starke Geschwindigkeitsgradienten auf, ein typisches Profil der mittleren Geschwindigkeit v in x -Richtung in einem gewissen Abstand von der Platte ist in die Skizze eingezeichnet. Zum einen entsteht eine solche einfache Scherströmung in vielen physikalischen Situationen, zum anderen ist die Instabilität der Scherströmung auch der Mechanismus für die Instabilität vieler anderer Konfigurationen. Sie führt etwa zum Aufbrechen eines Freistrahls oder zu der Ausbildung einer Wirbelstraße hinter der Umströmung eines stumpfen Körpers. Wir wollen hier die numerische Simula-



Figur 5.1 Scherströmung mit Mischzone und Geschwindigkeitsprofil

tion der Instabilität einer einfachen zweidimensionalen Scherströmung zwischen kompressiblen Medien betrachten.

Vor 20 Jahren etwa wurden durch experimentelle Beobachtungen in den turbulenten Mischzonen von inkompressiblen Scherströmungen kohärente Strukturen entdeckt (Brown und Roshko [4], Winant und Browand [70]). Dies zeigte, daß stochastische Methoden bei der Turbulenzmodellierung dort versagen müssen, die charakteristischen Eigenschaften der Strömungen richtig wiederzugeben. So ist etwa die Wirbelstärke keine zufällig verteilte Größe, sondern ist konzentriert auf einige größere Wirbelstrukturen. In Figur 5.2 sind solche kohärenten Strukturen in der Mischzone schematisch dargestellt. Ein besseres Verständnis der Entstehung, des Anwachsens, der Wechselwirkungen und des Zerfallens dieser kohärenten Strukturen sollte zu Verbesserungen der Turbulenzmodelle führen. Eine wichtige Rolle bei dem Entstehen der kohärenten Strukturen spielt die hydrodynamische Instabilität der Scherströmung. Sie scheint der Produktionsmechanismus dieser Strukturen zu sein, unabhängig davon, ob die Strömung laminar oder turbulent ist. Die Entwicklung dieser Instabilität und der Übergang zur Turbulenz in seinem ersten Stadium ist ein zweidimensionales Phänomen in dem Sinne, daß Störungen in der dritten Dimension deutlich langsamer anwachsen.



Figur 5.2 Kohärente Strukturen in der Mischzone

Die Strömung wird charakterisiert durch die Viskositätskoeffizienten und das Geschwindigkeitsverhältnis

$$(5.19) \quad \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2},$$

welches ein Maß für die Größe der Scherung ist. Für kleine Geschwindigkeiten ist der Einfluß der Kompressibilität des Mediums nicht sehr bedeutend, so daß die Instabilität der Scherströmung analog zum inkompressiblen Fall verläuft. Ihre Entwicklung ist bestimmt durch einen Instabilitätsmechanismus, den man gewöhnlich **Kelvin-Helmholtz Instabilität** nennt. Kleine Störungen der Kontaktfläche der verschiedenen Strömungen wachsen exponentiell an und rollen sich in einzelne Wirbel auf. Dadurch und durch Wechselwirkung der Wirbel kommt es zum Anwachsen der Mischzone. Eine Übersicht über die Instabilität einer Scherströmung geben Ho und Huerre in [30]. Eine allgemeine Übersicht über die Instabilität von parallelen Strömungen findet man z.B. in den Büchern von Lin [41] und Drazin und Reid [14].

Zur numerischen Simulation dieser Instabilität ist es günstiger, statt der räumlichen Entwicklung einer Scherströmung, wie im Experiment, die zeitliche Entwicklung zu verfolgen. Dabei führen wir eine Galilei-Transformation mit der mittleren Geschwindigkeit $(v_1 + v_2)/2$ aus und nehmen an, daß die Strömung periodisch im Raum wird. Die numerischen Resultate zeigen dann die Entwicklung der Scherströmung in der Zeit. Der bedeutendste Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß man durch die Annahme der Periodizität ein beschränktes räumliches Problem bekommt, das sehr effektiv auf einem Vektorrechner gelöst werden kann und somit numerische Simulationen für große Zeiten erst möglich macht. Die Simulation der

räumlichen Entwicklung erfordert demgegenüber sehr große Rechengebiete und damit verbunden eine sehr große Anzahl von Gitterpunkten. Der Nachteil der Simulation der zeitlichen Entwicklung ist, daß es durch die Annahme der Periodizität keine einfache Transformation zwischen räumlich und zeitlich sich entwickelnden Scherströmungen gibt. Dunn und Lin [15] zeigten jedoch im Rahmen einer Art Grenzschichtbehandlung, daß das lokale Stabilitätsproblem für die Grenzschicht beim räumlich und zeitlich sich entwickelnden Problem äquivalent ist.

Die Figur 5.3 zeigt unser Rechengebiet und die Anfangswerte der Simulation. Die obere und untere Strömung haben zur Zeit $t = 0$ dieselbe Dichte und Druck, $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$, die Geschwindigkeiten in x-Richtung sind genau entgegengesetzt und vom Betrag v_0 , während die y-Komponente überall Null ist. Die Trennkurve S dieser beiden Strömungen ist sinusförmig gestört und besitzt die Parameterdarstellung

$$(5.20) \quad S: y = y(x) = a_0 \sin(2k\pi x) \quad , \quad x \in [-0.5, 0.5] \quad ,$$

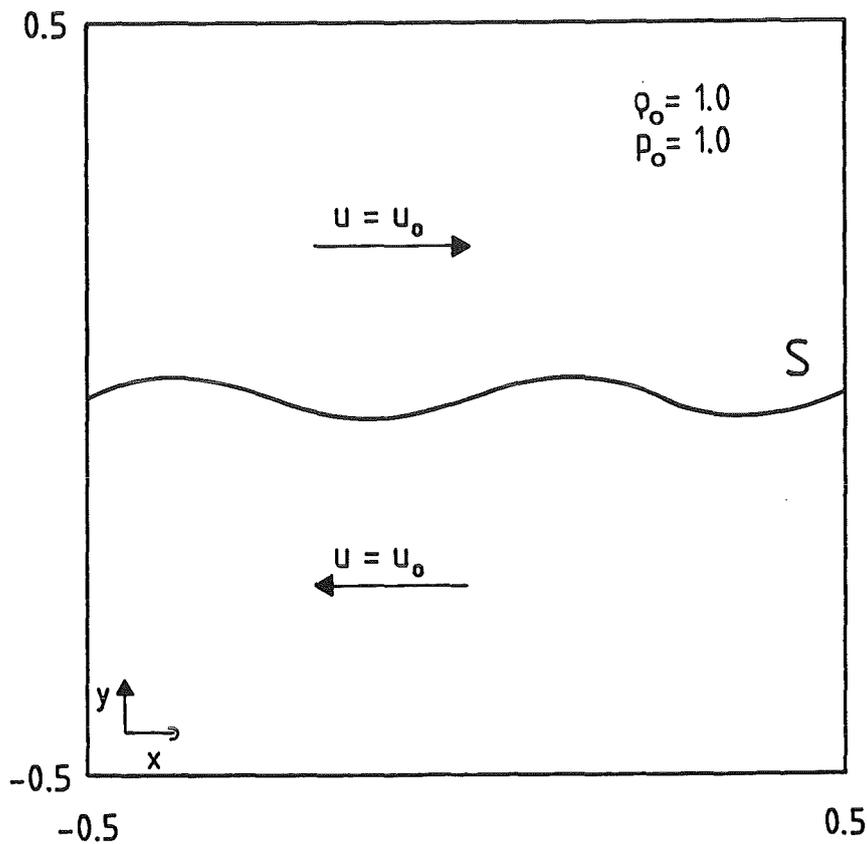
mit der Amplitude a_0 und der Modenzahl $k \in \mathbb{N}$. Die charakteristischen Kenngrößen dieser Strömung sind die Machzahl M und die Reynoldszahl R

$$(5.21) \quad M = \frac{2v_0}{c_0} \quad , \quad R = \frac{2v_0 l}{\mu} \quad ,$$

wobei $l = 1/k$ die Wellenlänge der Störung bezeichnet und c_0 die Schallgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} = \sqrt{\gamma}$. Das Rechengebiet ist das Rechteck $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$, am rechten und linken Rand werden periodische Randbedingungen, am oberen und unteren Rand einfache nichtreflektierende Anströmbedingungen vorgegeben ([19]).

Unsere Definition der Reynoldszahl R in (5.21) ist etwas ungewöhnlich, da bei einer räumlich sich entwickelnden Scherströmung als charakteristische Länge üblicherweise die Anfangsdicke δ_0 der Mischzone genommen wird. Diese Anfangsdicke der Mischzone bestimmt diejenige Wellenlänge l_0 einer Störung, welche am schnellsten anwächst (siehe z.B. [30]). Die Anfangsdicke der Mischzone läßt sich etwa definieren als die Wirbelstärkendicke

$$(5.22) \quad \delta_0 = \frac{2v_0}{\left| \frac{d(\bar{p}v/\bar{p})}{dy} \right|_{\max}} \quad ,$$



Figur 5.3 Rechengebiet und Anfangswerte

wobei \bar{p} und \bar{p}_v räumliche Mittelwerte in x-Richtung sind.

In unserem Fall ist dies etwas anders. Durch das Rechengebiet zusammen mit den Periodizitätsbedingungen und der Vorgabe der Modenzahl bestimmen wir die Wellenlänge der Störung. Die Anfangsdicke der Mischzone spielt dann nur noch eine untergeordnete Rolle in dem Sinne, daß sie nur noch Einfluß auf die Wachstumsgeschwindigkeit der Störung hat. Wir gehen hier so vor, daß wir in den Anfangswerten einen Sprung, d.h. eine Unstetigkeit, der Geschwindigkeiten vorgeben. Das numerische Shock-Capturing Verfahren wird diese Unstetigkeit über drei bis vier Gitterpunkte verschmieren, d.h. es gilt etwa $\delta_0 \approx 2 \Delta y$. Bedingt durch diese Dicke werden Störungen mit einer Wellenlänge in der Größenordnung von Δy am schnellsten anwachsen. Solche Störungen treten natürlich durch Rundungs- und Approximationsfehler auf. Diese kleinen Störungen unterdrücken bzw. dämpfen wir jedoch mit Hilfe einer geeigneten Vorgabe der Viskosität. Dadurch erzwingen wir, daß nur die vorgegebene Störung mit großer Wellenlänge (5.20) anwachsen kann und die numerische Simulation stabil bezüglich kleiner Störungen ist.

Eine andere Möglichkeit wäre, im Hinblick zu der Beziehung zwischen Wellenlänge und Dicke der Mischzone, einen stetigen Übergang der Geschwindigkeiten in der Form

$$(5.23) \quad v(x, y, 0) = v_0 \tanh\left(\frac{y}{2\delta_0}\right)$$

vorzugeben, welcher die Lösung bei einer laminaren inkompressiblen Strömung gut approximiert [62]. Wählt man die Anfangsdicke δ_0 der Mischzone genügend groß, so wird dadurch ebenso das Anwachsen der Rundungs- und Approximationsfehler unterdrückt. Im kompressiblen Fall, speziell bei hohen Machzahlen, kann man jedoch nicht mehr sicher sein, daß das Geschwindigkeitsprofil (5.23) dort immer noch eine gute Approximation der Wirklichkeit ist. Auf das Problem der Vorgabe der Anfangswerte werden wir bei der Darstellung der numerischen Ergebnisse nochmals eingehen.

Die lineare Stabilitätsanalyse für eine unendlich ausgedehnte ebene reibungsfreie Scherströmung mit unstetigen Anfangswerten liefert die folgenden Ergebnisse ([3], [47]): Für Machzahlen $M < 2$ tritt die **Kelvin-Helmholtz Instabilität** mit einem exponentiellen Anwachsen von Störungen beliebiger Wellenlänge auf. Störungen mit kleiner Wellenlänge wachsen dabei schneller als Störungen großer Wellenlänge an. Für relative Machzahlen M **zwischen 2 und $2\sqrt{2}$** tritt diese Instabilität immer noch auf, aber es existiert zusätzlich eine **neutral stabile Mode**, bestehend aus einem Paar akustischer Wellen, welche entgegen der Strömungsrichtung laufen. Für $M > 2\sqrt{2}$ existiert keine instabile Mode sondern **drei neutral stabile "Knick Moden"**, welche alle verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Die Scherströmung ist linear neutral stabil. Artola und Majda [3] zeigten jedoch, daß nichtlineare Wechselwirkungen zwischen diesen Moden zu Instabilitäten führen. Die Situation ändert sich etwas, wenn wir Viskosität oder eine endliche Dicke der Mischzone mit berücksichtigen. Es zeigt sich dann ([40]), daß eine Stabilitätsschranke existiert. Störungen mit kleinerer Wellenlänge werden gedämpft, während Störungen größerer Wellenlänge anwachsen (siehe auch [32]).

Um die Ergebnisse der numerischen Simulation zu visualisieren und sie mit den Bildern aus Experimenten vergleichen zu können, berechnen wir zusätzlich zu dem Strömungsfeld der numerischen Lösung der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sogenannte Streichlinien. Wir markieren die Grenzkurve zwischen den beiden Strömungen mit masselosen Teilchen, welche in der Strömung einfach mitschwimmen, d.h. in jedem Zeitschritt nach dem berechneten Strömungsfeld bewegt wer-

den. Diese Technik der Visualisierung ist Experimenten nachempfunden, bei welchen Tinte oder Rauch zur Visualisierung in die Scherströmung eingeblasen wird (siehe z.B. [16]).

Dieser Teilchen-Markierungsalgorithmus läuft folgendermaßen ab. Wir nehmen an die Koordinaten und die Geschwindigkeiten der Teilchen seien zur Zeit t_n bekannt. Das k -te Teilchen habe gerade die Koordinaten und die Geschwindigkeiten

$$(5.24) \quad \left(x_k^n, y_k^n \right) \quad \text{und} \quad \left(v_k^n, w_k^n \right) .$$

Nach der Berechnung des Strömungsfeldes mittels der numerischen Lösung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen werden die neuen Koordinaten des k -ten Teilchens berechnet nach

$$(5.25) \quad x_k^{n+1} = x_k^n + \frac{\Delta t}{2} \left(v_k^{n+1} + v_k^n \right) , \quad y_k^{n+1} = y_k^n + \frac{\Delta t}{2} \left(w_k^{n+1} + w_k^n \right) .$$

Dabei werden die Geschwindigkeiten der Markierungsteilchen aus den Werten des Strömungsfeldes gewonnen. Da das Strömungsfeld nur an den einzelnen Gitterpunkten bekannt ist, werden die Teilchengeschwindigkeiten mittels einer bilinearen Interpolation gewonnen.

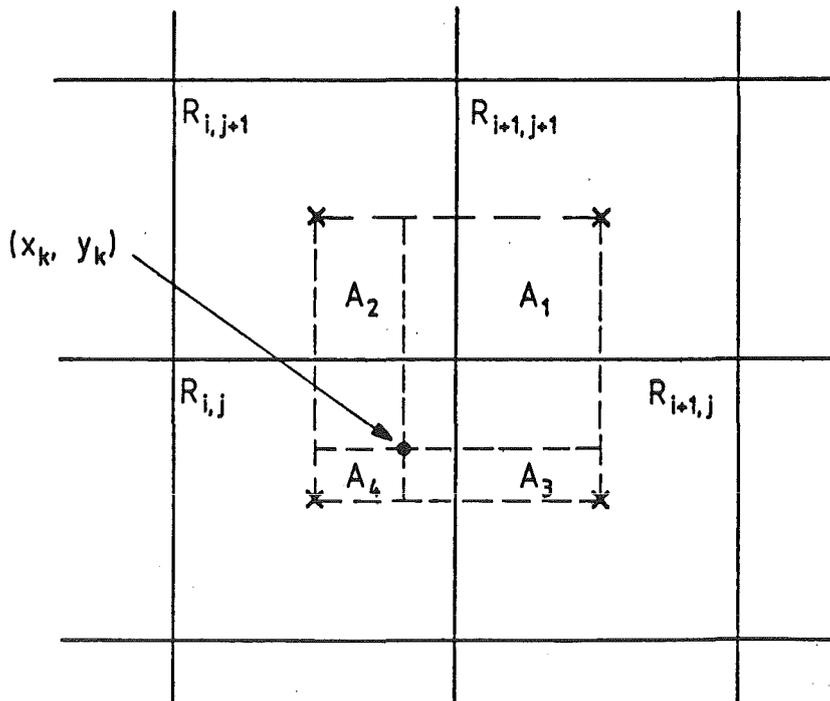
Dazu muß zunächst der Ort des Teilchens im Gitter bestimmt werden. Für ein Gitter mit konstanter Schrittweite ist dies sehr einfach. Man erhält das Gitterrechteck R_{ij} , indem das Teilchen sich befindet, aus den Beziehungen

$$(5.26) \quad i := \text{int} \left(\frac{x_k^n - x_0}{\Delta x} \right) , \quad j := \text{int} \left(\frac{y_k^n - y_0}{\Delta y} \right) ,$$

wobei (x_0, y_0) die Koordinaten der linken unteren Ecke des Rechengebiets sind und $\text{int}(z)$ die größte ganze Zahl ist, welche kleiner oder gleich z ist. Als nächstes berechnen wir die Flächen A_1, A_2, A_3 und A_4 , wie sie in Figur 5.4 eingezeichnet sind:

$$(5.27) \quad A_1 = \left(x_{i+1} - x_k^n \right) \left(y_{j+1} - y_k^n \right) , \quad A_2 = \left(x_k^n - x_i \right) \left(y_{j+1} - y_k^n \right) ,$$

$$(5.28) \quad A_3 = \left(x_{i+1} - x_k^n \right) \left(y_k^n - y_j \right) , \quad A_4 = \left(x_k^n - x_i \right) \left(y_k^n - y_j \right) .$$



Figur 5.4 Flächengewichtete Interpolation

Die Geschwindigkeiten des k -ten Markerteilchens zum Zeitpunkt t_n berechnet sich dann aus den Werten des numerischen Strömungsfeldes durch die Formeln

$$v_k^{n+1} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(A_1 v_{i,j}^{n+1} + A_2 v_{i+1,j}^{n+1} + A_3 v_{i+1,j+1}^{n+1} + A_4 v_{i,j+1}^{n+1} \right)$$

(5.29)

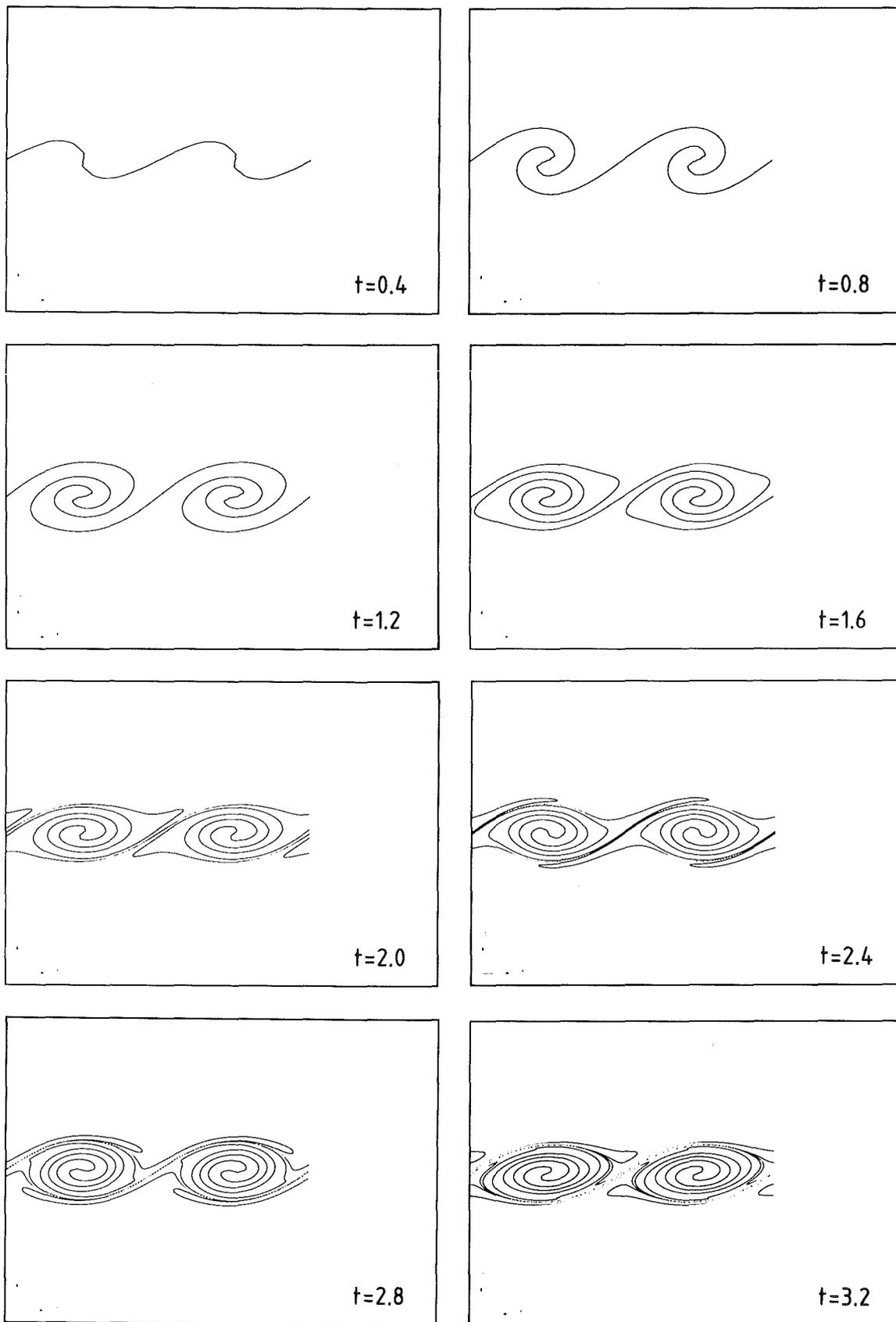
$$w_k^{n+1} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(A_1 w_{i,j}^{n+1} + A_2 w_{i+1,j}^{n+1} + A_3 w_{i+1,j+1}^{n+1} + A_4 w_{i,j+1}^{n+1} \right)$$

mit i und j aus (5.26).

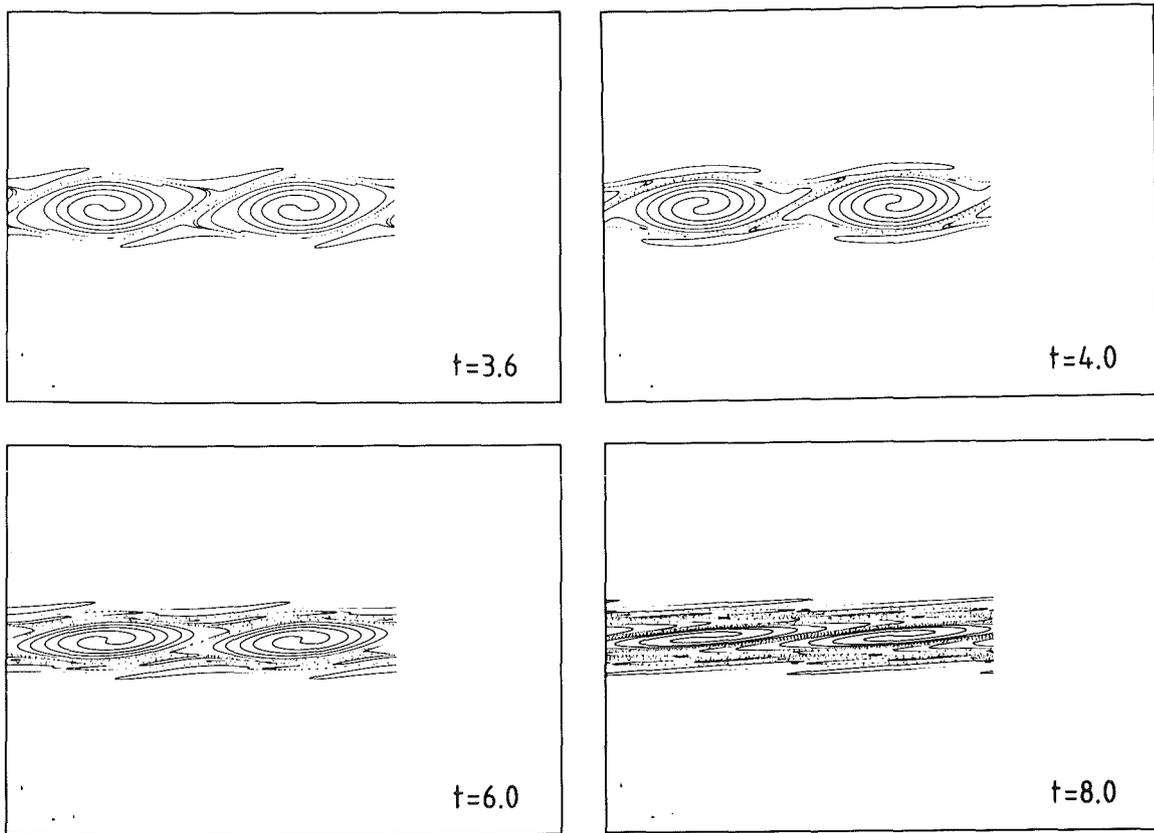
Am Rand des Rechengebietes müssen noch gewisse Modifikationen eingeführt werden. Für die periodischen Ränder ist es angebracht, Teilchen, welche das Rechengebiet an dem einen Rand verlassen, an dem anderen mit gleicher Geschwindigkeit und entsprechend der Position wieder einströmen zu lassen. Reflektierende Randbedingungen machen keine Schwierigkeiten, da dort das Strömungsfeld dafür sorgt, daß kein Teilchen über den Rand hinauskommt. Im Falle von Randbedingungen an einer Ausströmung müssen Teilchen am Rand notfalls herausgenommen werden und vielleicht wieder an geeigneten Punkten in das Rechengebiet eingesetzt werden.

Wir betrachten die zeitliche Entwicklung einer Scherströmung zunächst für die Machzahl $M = 1$. Figur 5.5 zeigt die numerischen Ergebnisse für die Reynoldszahl $R = 1000$ anhand der Bilder der Markerteilchen. Die Markerteilchen wurden zu Beginn der Rechnung auf die Trennkurve zwischen den beiden Strömungen positioniert. Ihre graphische Darstellung zu verschiedenen Zeiten in Figur 5.5 visualisiert nun die zeitliche Entwicklung dieser Trennkurve. Die Amplitude der Störung der Trennkurve für $t = 0$ ist $a_0 = 0.025$, die Modenzahl ist $k = 2$. Figur 5.5 zeigt die typische zeitliche Entwicklung einer Kelvin-Helmholtz Instabilität. Die Amplitude der Sinusstörung wächst zunächst an, wie es die lineare Stabilitätstheorie voraussagt. Dann kommt es aber durch nichtlineare Effekte zu einem Aufsteilen der Sinuskurve und sie wird ähnlich zu einzelnen Sägezähnen ($t = 0.4$). Danach rollt sich die Scherschicht in zwei einzelne Wirbel auf. Dieses Aufrollen setzt sich über große Zeiten hinweg fort, wird aber durch die Dissipationsterme gebremst. Etwa ab $t = 6.0$ kommt es zum Stillstand der Wirbel in der Mischzone. Von da ab werden die Markerteilchenmuster nur noch weiter geschert. Diese numerischen Ergebnisse des Aufrollvorgangs durch die Kelvin-Helmholtz Instabilität und der Wirbelbildung stimmen sehr gut überein mit experimentellen Resultaten im inkompressiblen Fall (siehe z.B. [16]).

Das hier benutzte numerische Verfahren besitzt die in Abschnitt 5.1 vorgestellte Form (5.7) - (5.8). Dabei ist die numerische Approximation der Viskositätsterme durch (5.9) - (5.12) gegeben. Der numerische Fluß für die Eulerterme ist der eines MUSCL-Typ Verfahrens, aufbauend auf dem HLL-Verfahren für die Eulergleichungen und der charakteristischen Berechnung der Steigungen in den Gitterzellen, wie dies in den Formeln (3.88) bis (3.90) beschrieben ist. Die Diskretisierungsparameter sind $\Delta x = \Delta y = 0.005$, d.h. es wurden 200×200 Gitterzellen benutzt. Die Zeitschrittweite wurde adaptiv nach der CFL-Bedingung bestimmt. Die Viskositätsterme wurden in dieser Rechnung explizit approximiert. Die Viskositätskoeffizienten waren dabei klein genug, so daß die Schrittweitenbedingung (5.14) automatisch erfüllt war. Wird in dem MUSCL-Typ Verfahren das HLL-Verfahren ausgetauscht durch ein anderes Upwind-Verfahren, so hat dies bei diesen Rechnungen wenig Einfluß auf die numerischen Ergebnisse. Die Gitterschrittweiten sind klein genug im Vergleich zur physikalischen Viskosität, so daß kleine Änderungen in der numerischen Methode nahezu keine Änderungen der Resultate hervorrufen. Ebenso lieferte eine Gitterverfeinerung fast identische Resultate. Für etwas kleinere Reynoldszahlen oder kleinere Schrittweiten bekommt man jedoch Schwierigkeiten mit der parabolischen Schrittweitenbedingung (5.14) und muß den Zeitschritt reduzieren oder zu einer impliziten Approximation übergehen. Die Anzahl der Markerteilchen betrug 20 000.

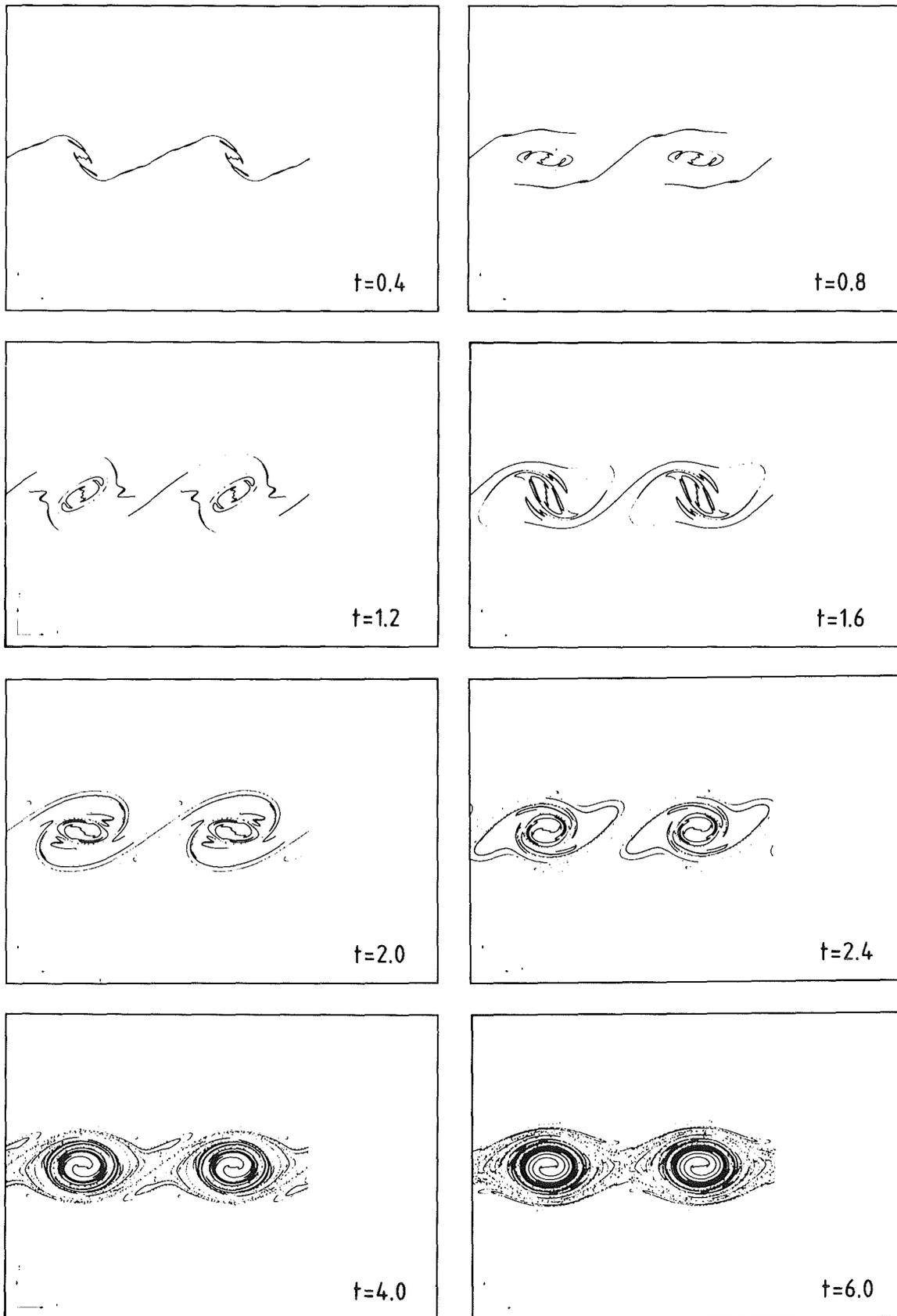


Figur 5.5 Aufrollen der Scherschicht bei $M = 1, R = 1000, a_0 = 0.0125, k = 2$



Figur 5.5 Fortsetzung

Vergrößert man die Reynoldszahl, so kommt man bald in den Bereich, in dem die physikalischen Viskositätsterme so klein werden, daß sie die Störungen in der numerischen Approximation nicht mehr dämpfen. Nach der physikalischen Stabilitätstheorie müssen diese kleinen Störungen dann natürlich anwachsen und zwar schneller als die langwellige vorgegebene Störung. Dies zeigen die Ergebnisse einer Simulation für Reynoldszahl $R = 8500$ in Figur 5.6. Alle übrigen Parameter sind identisch zur vorhergehenden Simulation. Man sieht wieder deutlich die Aufsteilung der Sinuswelle zu einer Sägezahnkurve, aber es treten jetzt lauter kleine Störungen auf. Diese Störungen können jedoch das Aufrollen der Scherschicht zu zwei einzelnen Wirbeln nicht verhindern. Während im Fall $R = 1250$ dieses Aufrollen sehr regelmäßig vonstatten geht, ist es in diesem Fall unregelmäßiger. Man könnte hier von einem laminaren und von einem turbulenten Aufrollen oder einer turbulenten Wirbelbildung sprechen. Die kleinen Störungen verändern deutlich die Feinstruktur der Wirbel, verhindern jedoch nicht den eigentlichen Aufrollvorgang. Wir können daher feststellen, daß das Aufrollen der Scherschicht stabil ist gegenüber Störungen mit deutlich kleinerer Wellenlänge. Dies bestätigen auch numerische



Figur 5.6 Aufrollen der Scherschicht bei $M = 1, R = 8500, a_0 = 0.0125, k = 2$

Rechnungen, bei denen etwa durch "Rauschen" die Anfangswerte zusätzlich gestört werden. Bei Gitterverfeinerung kann man Unterschiede in der Entwicklung der kleinen Strukturen bekommen, solange die Gitterschrittweiten nicht kleiner sind als die Längenskalen, welche von der physikalischen Viskosität gedämpft werden.

In den Experimenten kommt es zu einer **Vergrößerung der Mischzone** ([4], [16], [70]). Wir haben diesen Sachverhalt schon in Figur 5.2 skizziert. Als Ursache dieses Anwachsens konnte experimentell ein Paarungsprozeß von Wirbeln gefunden werden (siehe z.B. [30], [70]). So zeigt es sich im Experiment, daß neben Störungen mit der ausgezeichneten Wellenlänge, diejenigen mit doppelter Wellenlänge am schnellsten anwachsen und daß dies zu einem Paaren der Wirbel führen kann. Dies läßt sich experimentell nachweisen, indem man neben einer fundamentalen Störung eine solche subharmonische Störung künstlich anregt - etwa durch ein Vibrieren der Trennplatte der Strömungen. Es zeigt sich, daß eine solche zusätzliche subharmonische Störung das Wirbelpaaren begünstigt. Daß neben einer harmonischen Störung die subharmonische Störung am stärksten anwächst, zeigen auch verschiedene Stabilitätsbetrachtungen. Für eine Übersicht siehe Ho und Huerre [30].

Während es experimentell sehr schwierig ist, den Einfluß von Störungen spezieller Wellenlänge zu untersuchen, da diese Störungen nicht "rein" in die Strömung eingebracht werden können, ist dies in unseren numerischen Simulationen sehr einfach. Wir bringen zusätzlich zu unserer **harmonischen Störung** der Anfangswerte eine **subharmonische Störung** ein und untersuchen deren Einfluß auf die Entwicklung der Instabilität und der Wirbelstrukturen. Solange die Approximationsfehler des numerischen Verfahrens gedämpft werden, da das Gitter fein genug und die physikalische Viskosität groß genug ist, haben wir hier die Möglichkeit, die Entwicklung von Störungen wohldefinierter Wellenlänge zu untersuchen. Die Parameterdarstellung der Trennfläche zwischen den beiden Strömungen hat nun statt (5.20) die Form

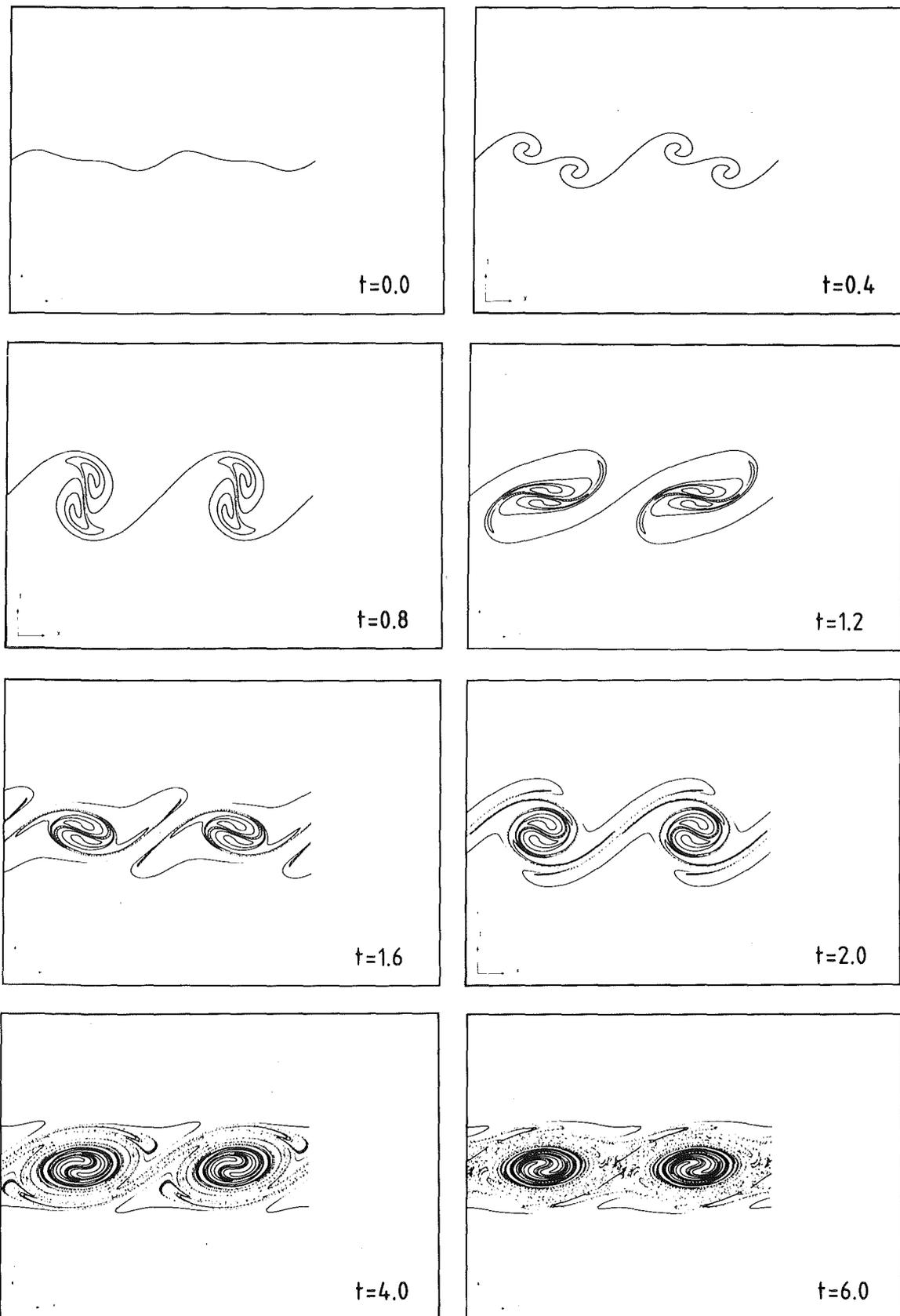
$$(5.30) \quad S: y = y(x) = a_0 \sin(2\pi kx) + a_1 \sin(\pi kx + \phi), \quad x \in [-0.5, 0.5],$$

mit der Amplitude der fundamentalen Störung a_0 und der subharmonischen Störung a_1 . Ein weiterer Parameter ist die Phase ϕ der subharmonischen Störung. Natürlich ist die Größe der Amplitude oder vielmehr das Verhältnis der Amplituden a_0/a_1 ein entscheidender Parameter bei der Entwicklung der Instabilität. Es erweist sich aber, daß auch die Phase ϕ einen großen Einfluß hat.

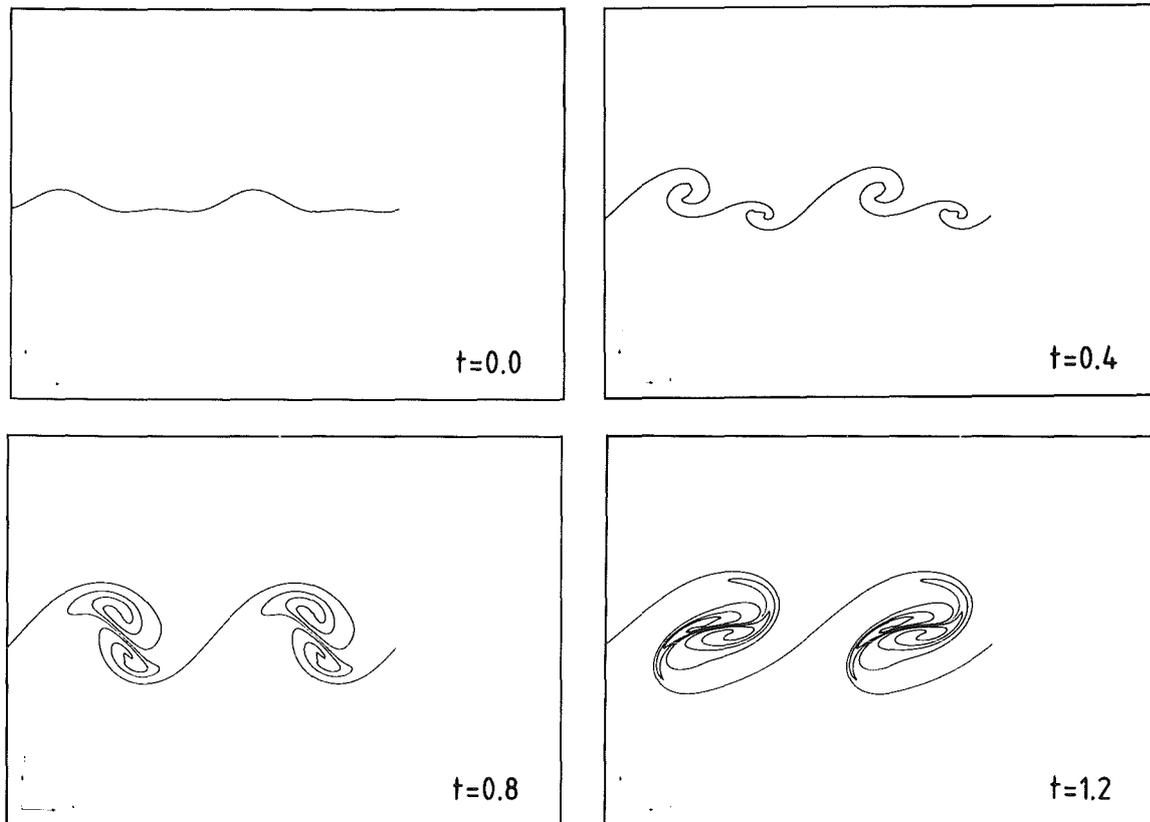
Die numerischen Simulationen bestätigen, daß eine durch (5.30) vorgegebene Störung der Anfangswerte gerade ein Paaren der Wirbel verursacht. Figur 5.7 zeigt dies für die Störungsparameter $a_1 = 2 a_0$ mit $a_0 = 0.0125$ (Amplitude/Wellenlänge = konstant), $k = 4$ und Phase $\phi = 0$. Reynoldszahl und Machzahl sind $R = 2000$ und $M = 1$. Wie bei der reinen fundamentalen Störung kommt es zum Aufrollen der Scherschicht in $k = 4$ Einzelwirbel. Diese Einzelwirbel bleiben jedoch nicht in der Gleichgewichtslage, sondern werden durch das Anwachsen der subharmonischen Störung vom Mode 2 aus dieser Lage gebracht und in einen Aufrollvorgang hineingezogen: es kommt zum Paaren je zweier Wirbel. Es entstehen daraus zwei einzelne Wirbel, bei denen jedoch im Kern die zwei miteinander verschmelzenden Wirbel auch noch für große Zeiten erkennbar sind (vergl. $t = 6.0$). Es ist deutlich zu sehen, daß in Übereinstimmung zur Stabilitätstheorie die fundamentale Störung am Anfang schneller anwächst als die subharmonische mit der größeren Wellenlänge.

Es ist klar, daß die Amplitude a_0 das Anwachsen der Instabilität der Mode 4 bestimmt und die Amplitude a_1 die Ablaufzeit des Wirbelpaarens. Wir wollen uns nun anschauen, wie die Phase der subharmonischen Störung diesen Vorgang beeinflusst. Bis auf die Phase sind bei den folgenden Ergebnissen alle Parameter dieselben. Figur 5.8 zeigt die Resultate für die Phase $\phi = \pi/2$. Man sieht hier, daß die subharmonische Störung am Anfang das Aufrollen von zwei der vier Wirbel begünstigt. Man erhält somit aus der Mode-4-Störung zwar vier Wirbel, die sich aber in der Größe unterscheiden. Durch das Anwachsen der subharmonischen Störung kommen diese wie im vorhergehenden Fall aus der Gleichgewichtslage und es kommt gleichermaßen zum Wirbelpaaren.

Ein anderes Phänomen tritt bei der Phase $\phi = \pi$ (Figur 5.9) auf. Hier führt die subharmonische Störung dazu, daß zwei der 4 Wirbel wesentlich größer sind als die anderen. Weiter bleibt der Mittelpunkt dieser Wirbel ziemlich auf der Geraden $y = 0$ liegen und die Wirbel werden nicht durch Anwachsen der Amplitude der subharmonischen Störung nach oben und unten versetzt. Ein Paaren der Wirbel findet nicht in der Form statt, wie wir es in den vorangegangenen Bildern gesehen haben, sondern die kleinen Wirbel werden gewissermaßen auseinandergerissen, in die Großen hineingezogen und dort einverleibt. Zur Zeit $t = 3.2$ sind wie beim Paarungsprozeß nur noch zwei große Wirbel vorhanden. Man sieht jedoch in der inneren Struktur dieser Wirbel deutliche Unterschiede zu den großen Wirbeln, welche durch das Wirbelpaaren zustande gekommen sind. Wir nennen diesen Vorgang **Wirbelverschmelzen**.



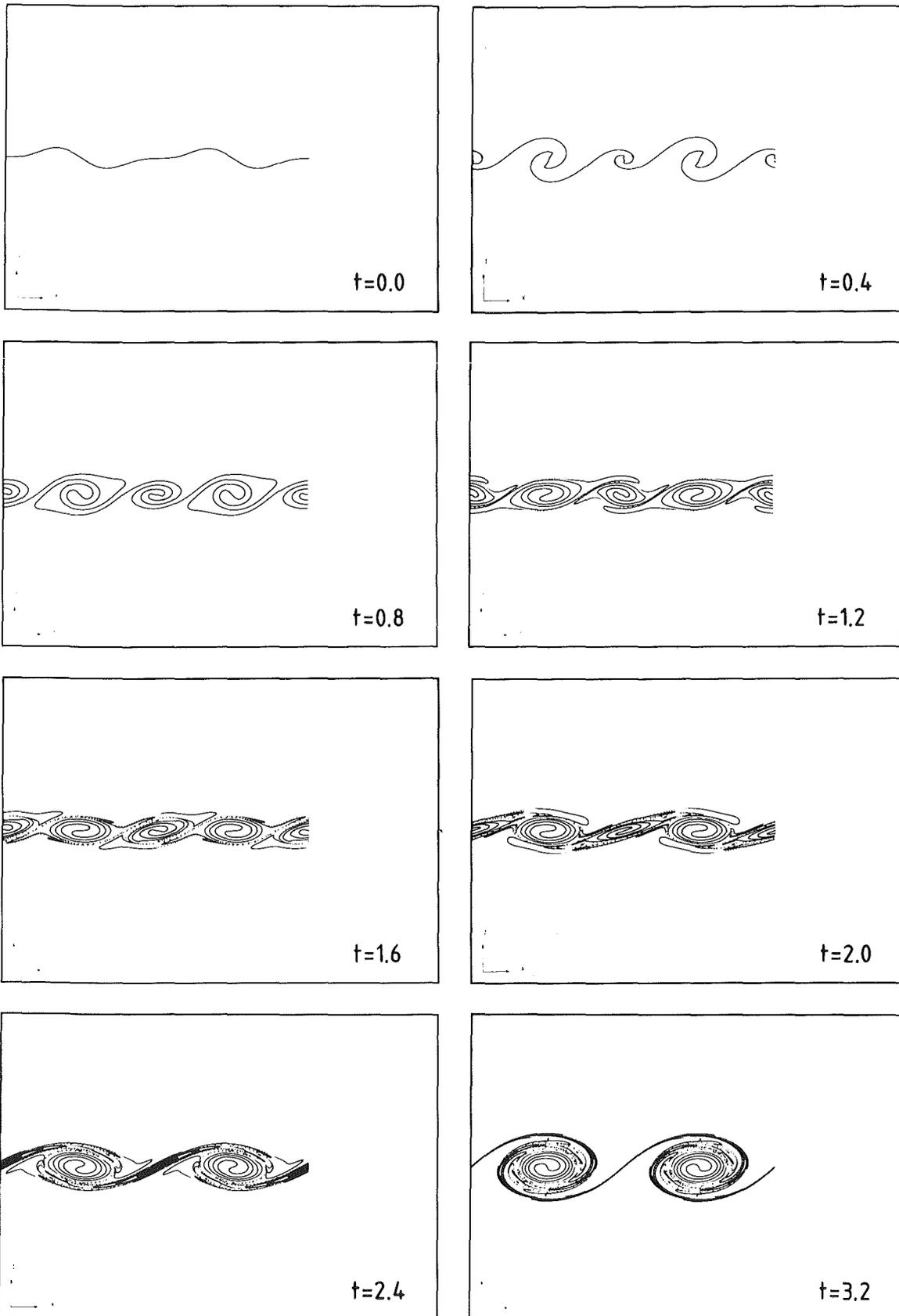
Figur 5.7 Wirbelpaaren bei $M = 1, R = 2000, a_0 = 0.0125, a_1 = 0.025, \phi = 0$



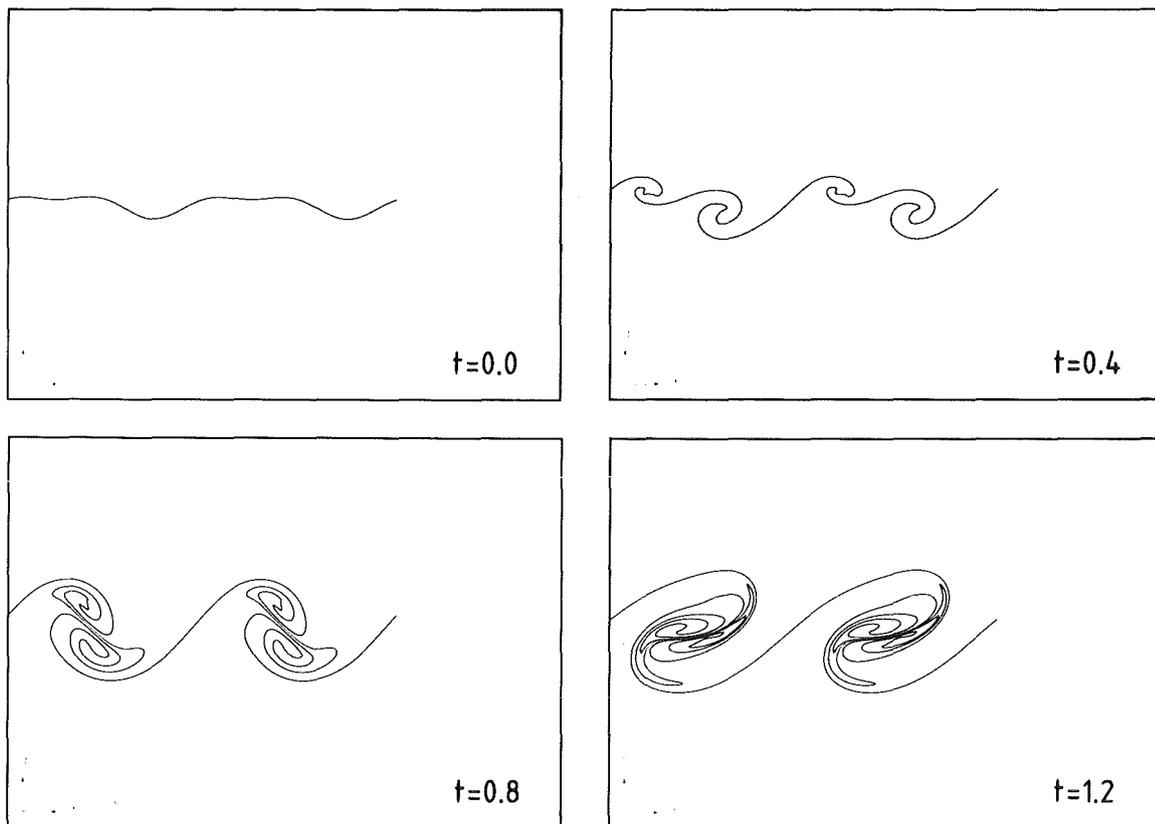
Figur 5.8 Wirbelpaaren bei $M = 1, R = 2000, a_0 = 0.0125, a_1 = 0.025, \phi = \pi/2$

Bei der Phase $\phi = 3 \pi/2$ tut sich nichts Neues. Die Ergebnisse sind ganz ähnlich zu denen bei $\phi = \pi/2$, wenn die großen und kleinen Wirbel vertauscht werden. Der Vollständigkeit halber zeigen wir eine kurze Sequenz in Figur 5.10.

Die numerischen Ergebnisse zur Simulation der zeitlich sich entwickelnden Instabilität einer Scherströmung bei $M = 1$ lassen die folgenden **Schlußfolgerungen** zu: Bei der Vorgabe einer fundamentalen und einer subharmonischen Störung kommt es zum deutlichen Anwachsen der Dicke der Mischzone durch die Wechselwirkung von Wirbeln. Die Art der Wechselwirkung hängt von der Phase ϕ zwischen den beiden Störungen ab. Im Normalfall kommt es zu einem **Wirbelpaaren**, d.h. zwei kleinere Wirbel umrunden sich und verschmelzen zu einem großen. Bei einer Phasenverschiebung um $\phi = \pi$ zwischen den beiden Störungen kommt es jedoch zu einem anderen Vorgang: zu einem **direkten Verschmelzen von Wirbeln**. Dabei unterstützt die subharmonische Störung zunächst das Wachstum von zwei der vier



Figur 5.9 Wirbelverschmelzen bei $M = 1$, $R = 2000$, $a_0 = 0.0125$, $a_1 = 0.025$, $\phi = \pi$



Figur 5.10 Wirbelpaaren bei $M = 1$, $R = 2000$, $a_0 = 0.0125$, $a_1 = 0.025$, $\phi = 3\pi/2$

fundamentalen Wirbel. Die kleineren Wirbel werden dann auseinandergezogen und in die großen Wirbel eingebaut. Welcher dieser Prozesse bei der sich räumlich entwickelnden Instabilität einer Scherströmung in der Natur die Verbreiterung der Mischzone bedingt, muß noch genauer untersucht werden. Vermutlich ist dies eine Kombination beider Mechanismen. Da die Bilder von Experimenten etwas ähnlicher sind zu der numerischen Simulation des direkten Verschmelzens (vergl. [16]) wäre es denkbar, daß dieser Vorgang dort durchaus eine Rolle spielt.

Die numerischen Ergebnisse für größere Machzahlen zeigen, daß dort - in Übereinstimmung mit der Theorie - die Kelvin-Helmholtz Instabilität keine dominierende Rolle mehr spielt. Die Scherströmung bleibt weiter instabil, aber jetzt bedingt durch echte nichtlineare gasdynamische Effekte. Das Wachstum der Breite der Mischzone zwischen den beiden Strömungen ist dabei deutlich langsamer und geringer. Eine Diskussion numerischer Ergebnisse zu diesem Sachverhalt ist in [33] enthalten und wir möchten darauf nur kurz im übernächsten Abschnitt eingehen.

5.3 Numerische Abschätzung des Wachstums von Störungen

Als Diagnostik für chaotische Systeme haben sich die **Lyapunov-Zahlen** als sehr nützlich erwiesen. Sie stellen eine Art Mittelwert des exponentiellen Wachstums des Abstandes zweier benachbarter Lösungen im Phasenraum dar. Jedes System, welches zumindest eine positive Lyapunov-Zahl besitzt, ist chaotisch, wobei die Größe des Exponenten die Zeitskala angibt, auf welcher sein Zustand nicht mehr voraussagbar ist. Kleine Störungen in den Anfangsdaten wachsen exponentiell an, so daß die Möglichkeit, den Zustand des Systems vorauszusagen, verloren geht. Die Lyapunov-Zahlen geben somit Information über das zu erwartende Verhalten eines Systems und messen die Rate mit der Information erzeugt oder zerstört wird.

Mittels der Markerteilchen, die wir zur Visualisierung der Instabilitäten in die Strömung eingesetzt haben, versuchen wir im folgenden, aus der numerischen Simulation eine Abschätzung über ein exponentielles Wachstum zu gewinnen. Das dynamische Verhalten der Instabilität ist durch die zeitliche Entwicklung der Trennschicht bestimmt. Wir wählen somit N Punkte auf der Trennschicht und verfolgen die zeitliche Entwicklung des mittleren Abstandes $L = L(t)$ dieser Punkte. Dabei benutzen wir hier den geometrischen Abstand

$$(5.31) \quad L = L(t) = \left(\prod_{i < j}^N L_{ij}(t) \right)^{2/(N(N-1))} ,$$

wobei $L_{ij}(t)$ der Abstand des i -ten vom j -ten Punkt der Trennschicht zur Zeit t bedeutet. Wir machen nun den Ansatz, daß es einen konstanten Wert σ gibt, welcher das exponentielle Anwachsen von L in der Zeit mißt, d.h.,

$$(5.32) \quad L = L(t) = L_0 e^{\sigma t} .$$

Dabei ist L_0 der Abstand der Punkte zur Zeit $t = 0$: $L_0 = L(0)$. Wir lösen nun die Gleichung (5.32) nach σ auf und erhalten

$$(5.33) \quad \sigma = \frac{1}{t} \log(L/L_0) .$$

Wird die Definition von L nach (5.31) eingesetzt, ergibt sich weiter

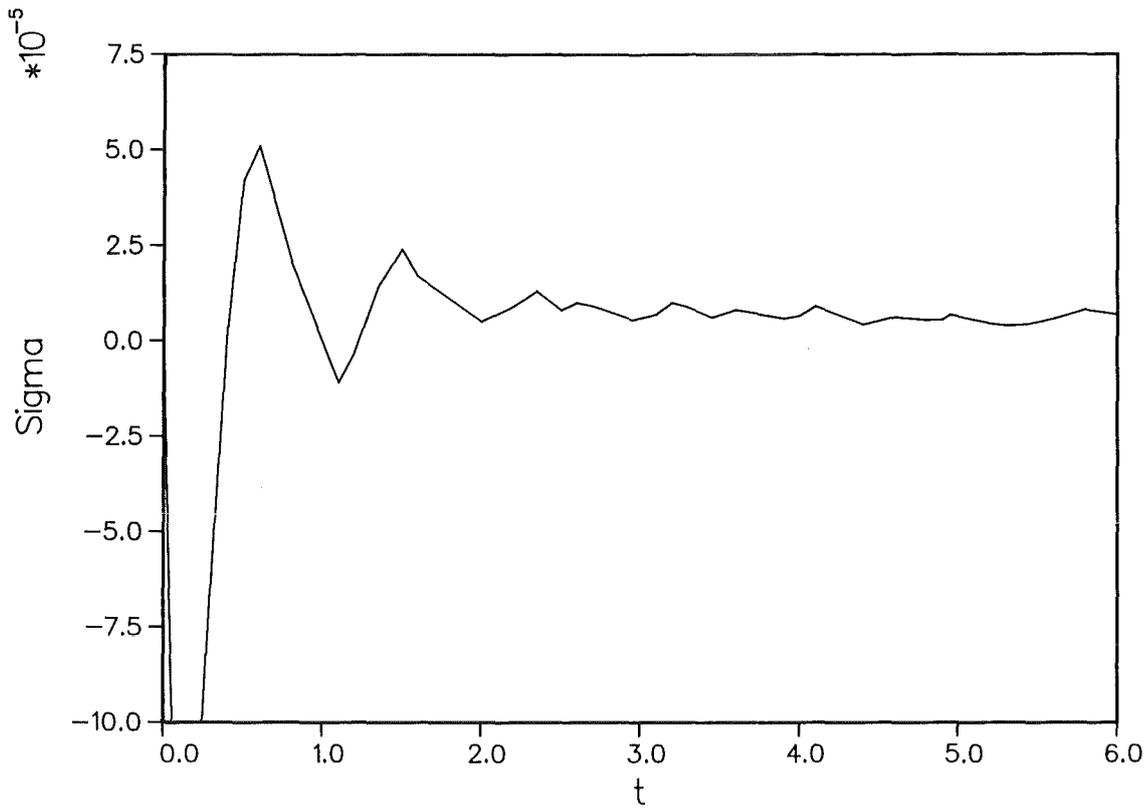
$$(5.34) \quad \sigma = \frac{1}{t} \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j}^N \log(L_{ij}(t)/L_{ij}(0)) .$$

Als Punkte in der Trennschicht können wir natürlich gerade die Markierungsteilchen zur Strömungsvisualisierung benutzen. Zur Analyse des Anwachsens der Rayleigh-Taylor Instabilität wurde diese Technik von Viecelli [69] benutzt.

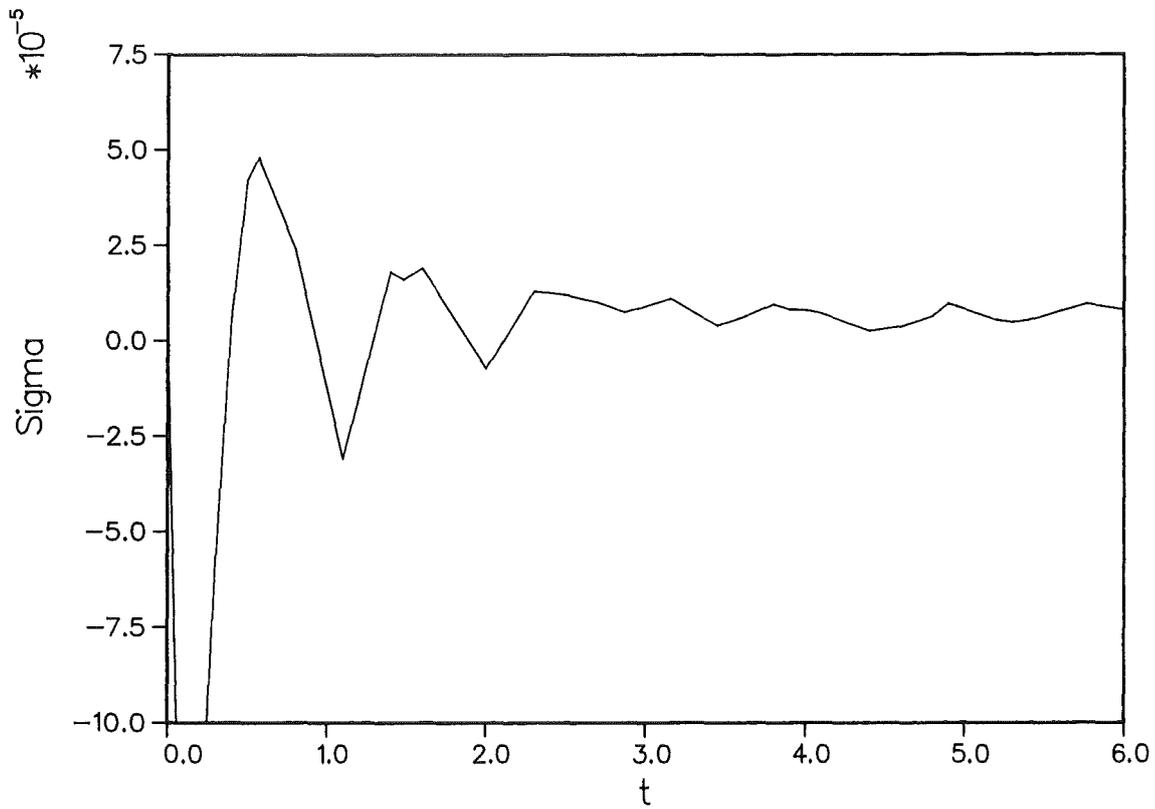
Berechnen wir während einer Simulation einer Instabilität σ nach der Formel (5.34), so hängt σ anfangs von der Zeit t ab. Von einem mittleren exponentiellen Wachstum von Störungen mit dem Exponenten σ können wir nur sprechen, falls σ sich bei fortschreitender Zeit als nahezu konstant erweist - zumindest wenn die Zeit groß wird. Wir haben hier zusätzlich zu den Simulationen des Aufrollens einer Scherschicht durch eine reine fundamentale Störung den Wert von σ als Funktion der Zeit ermittelt. Für die Simulation der Strömung mit Machzahl $M = 1$ und Reynoldszahl $R = 1000$ ist der zeitliche Verlauf von σ in Figur 5.11 festgehalten. Bis zu $t = 1.0$ kommt es zu starken Oszillationen von σ , wobei die Werte anfangs sogar negativ werden. Dann aber pendeln sich die Funktionswerte auf einen geraden Verlauf ein. Die Gerade ist jedoch etwas nach unten geneigt. Trotzdem scheint es uns, daß in diesem Fall dieser Koeffizient durchaus wichtige Informationen über die Wachstumsrate von Störungen liefern kann. Im Zeitintervall $[3.0, 6.0]$ kann man σ etwa mit $0.6 \cdot 10^{-5}$ angeben. Die leichte Tendenz zu kleineren Werten bei Fortschreiten der Zeit ist natürlich auf die dissipativen Effekte zurückzuführen.

Bei Reynoldszahl $R = 8500$ und Machzahl $M = 1$ sieht man im Intervall $[0.0, 6.0]$ keine Tendenz der σ -Werte nach unten (siehe Figur 5.12). Der Verlauf der Kurve ist ansonsten recht ähnlich: starke Oszillationen nahe $t = 0$, ab $t = 2.0$ nur noch leichte Oszillationen um einen festen Mittelwert, den man hier mit $0.67 \cdot 10^{-5}$ angeben kann. Dieser Wert ist somit eine numerisch bestimmte Kenngröße, welche das exponentielle mittlere Wachstum von Störungen der Scherschicht bestimmt. Insbesondere kann man damit natürlich angeben, auf welcher Zeitskala Information verloren geht.

Wir haben bisher Störungen einer bzw. zweier wohldefinierter Wellenlängen als Anfangsstörung in die Strömung eingebracht. Es wurde weiter darauf geachtet, daß die Strömung stabil ist bezüglich Störungen von der Wellenlänge der Rundungsfehler. Dies wird erreicht, indem physikalische Viskosität und Größe der Gitterschrittweiten geeignet gewählt werden. Ist die physikalische Viskosität Null, so ist das Problem "chaotisch". Wir erinnern daran, daß die lineare Stabilitätstheorie hier gerade exponentielles Wachstum aller Wellenlängen voraussagt, wobei Störungen kleiner Wellenlänge schneller anwachsen. Dies bedeutet insbesondere, daß



Figur 5.11 Zeitlicher Verlauf von σ für die Simulation der Instabilität in Figur 5.5



Figur 5.12 Zeitlicher Verlauf von σ für die Simulation der Instabilität in Figur 5.6

Rundungs- und Approximationsfehler des numerischen Verfahrens schnell anwachsen und jegliche langwelligen Anteile stören. Wir zeigen hier Rechnungen ohne Viskosität ($R = \infty$), wobei wir den Druck in der Nähe der Scherschicht mittels eines angenäherten weißen Rauschens stören. Der Druck hat die Gestalt

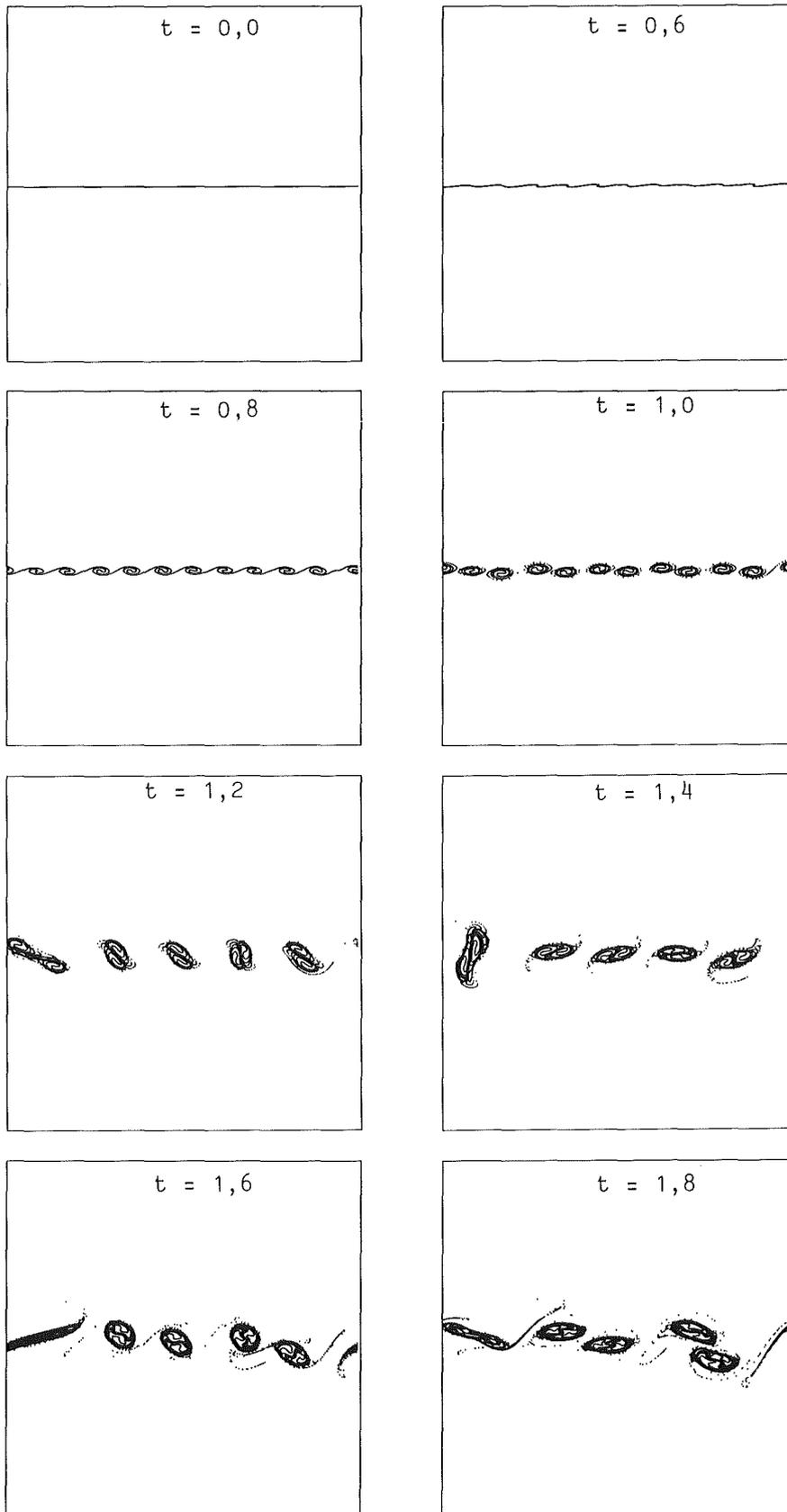
$$(5.35) \quad p = p_0 + \frac{a}{M} e^{-y^2/b^2} \sum_{i=1}^M \sin(\omega_i x + \phi_i) \quad ,$$

wobei M die Anzahl der diskreten Frequenzen des Rauschens ist. Die Werte der Kreisfrequenzen ω_i und der Phasen ϕ_i werden bestimmt durch gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[0, 2\pi]$, $i = 1, \dots, M$ bzw. $[0, 2\pi]$. Die zugehörigen Amplituden sind konstant mit dem Wert a/M .

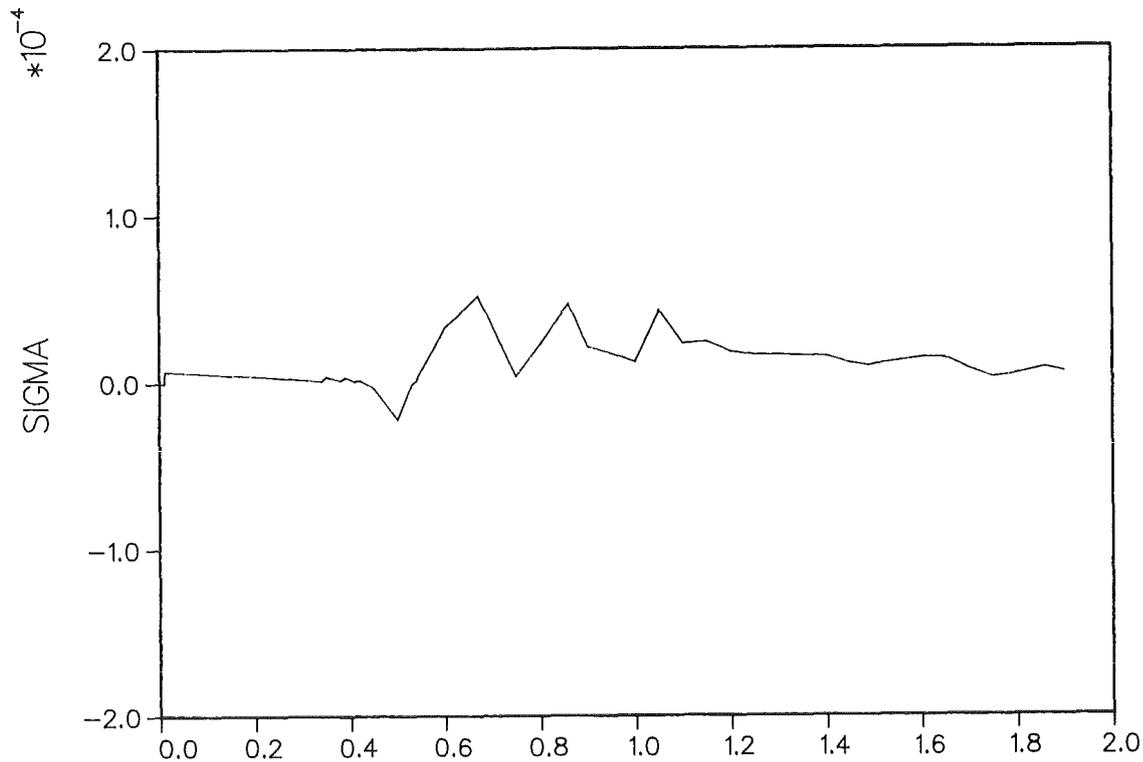
Diese Druckstörung ist in diesem Fall einfacher in die Anfangswerte einzubauen als eine geometrische Störung der Trennfläche der Strömungen. Die Ergebnisse einer solchen Druckstörung mit nur einer fundamentalen Wellenlänge sind dabei ganz ähnlich zu den Ergebnissen mit einer geometrischen Störung, wie wir sie bislang betrachtet haben.

Figur 5.13 zeigt die zeitliche Entwicklung der Scherströmung an Hand der Markerteilchen. Die Störungsparameter sind dabei $a_{\max} = 0.3$, $b = 0.3$ und $M = 50$. Es wurde wie bei den anderen Rechnungen ein 200×200 Punkte-Gitter benutzt. Nach $t = 0.6$ zeigen sich deutlich Störungen der Scherschicht der Modenzahl 12, welche sich in einzelne Wirbel aufrollen. Sie ergeben sich als die kleinsten Wirbelstrukturen, welche auf dem 200×200 Punkte-Gitter anwachsen können. Kleinere Strukturen werden durch die inhärente numerische Viskosität gedämpft. Man kann somit feststellen, daß dieses Verfahren zur numerischen Auflösung eines Wirbels etwa 10 Gitterpunkte in jede einzelne Raumrichtung benötigt. Zusätzliche subharmonische Störungen, welche langsamer anwachsen, bringen die kleinen Wirbel aus der Ruhelage und führen zu einem anhaltenden Wirbelpaaren. Dabei zeigt es sich auch ($t = 1.2$), daß bei dieser zufälligen Störung durchaus auch ein Wirbelverschmelzen vorkommen kann.

Figur 5.14 zeigt den zeitlichen Verlauf der numerisch bestimmten exponentiellen Wachstumsraten zu der Simulation in Figur 5.13. Der Verlauf dieser Kurve ist nicht so einheitlich wie bei einer einzelnen fundamentalen Störung. Der zeitliche Mittelwert von σ oszilliert für Zeiten $t > 1.0$ um eine Gerade, welche leicht nach unten geneigt ist.



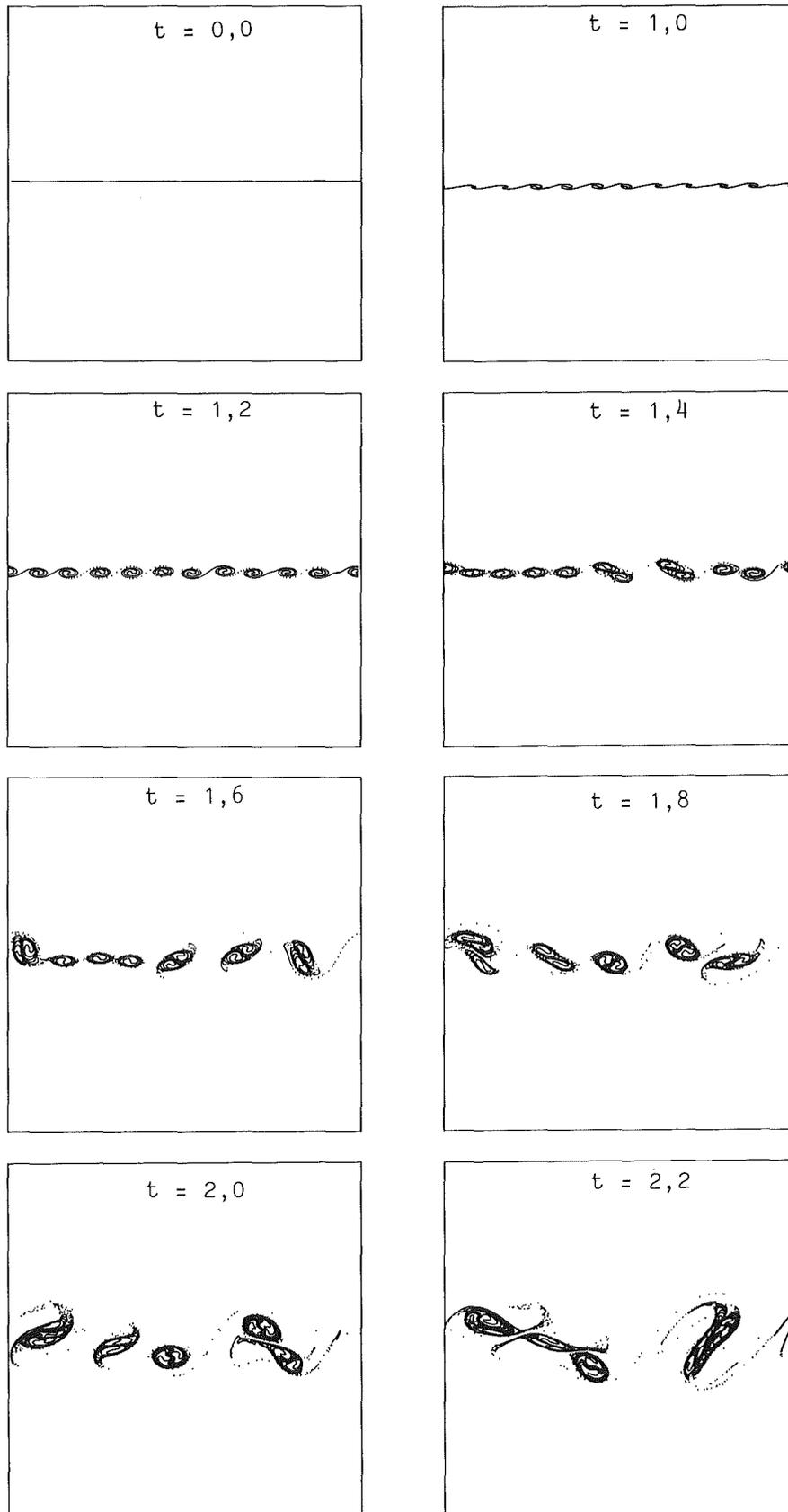
Figur 5.13 Druckstörung weißes Rauschen $a = 0.3, b = 0.3$ und $M = 50$



Figur 5.14 Zeitlicher Verlauf von σ für die Simulation in Figur 5.13

Für die Simulation von Figur 5.15 haben wir die Parameter der Störung etwas geändert. So ist die Amplitude und auch die räumliche Ausdehnung der Störung um den Faktor 10 verkleinert ($a = 0.03$, $b = 0.03$). Die Entwicklung der Störung verläuft dadurch etwas verzögert. Es ergibt sich ein anderes Bild als in Figur 5.13. Lokal können die numerischen Lösungen sehr verschieden sein, aber man sieht wieder die typischen Strukturen: Aufrollen der Scherschicht zu kleinen Wirbeln, Paaren der kleinen Wirbel und dadurch die Vergrößerung der Mischzone.

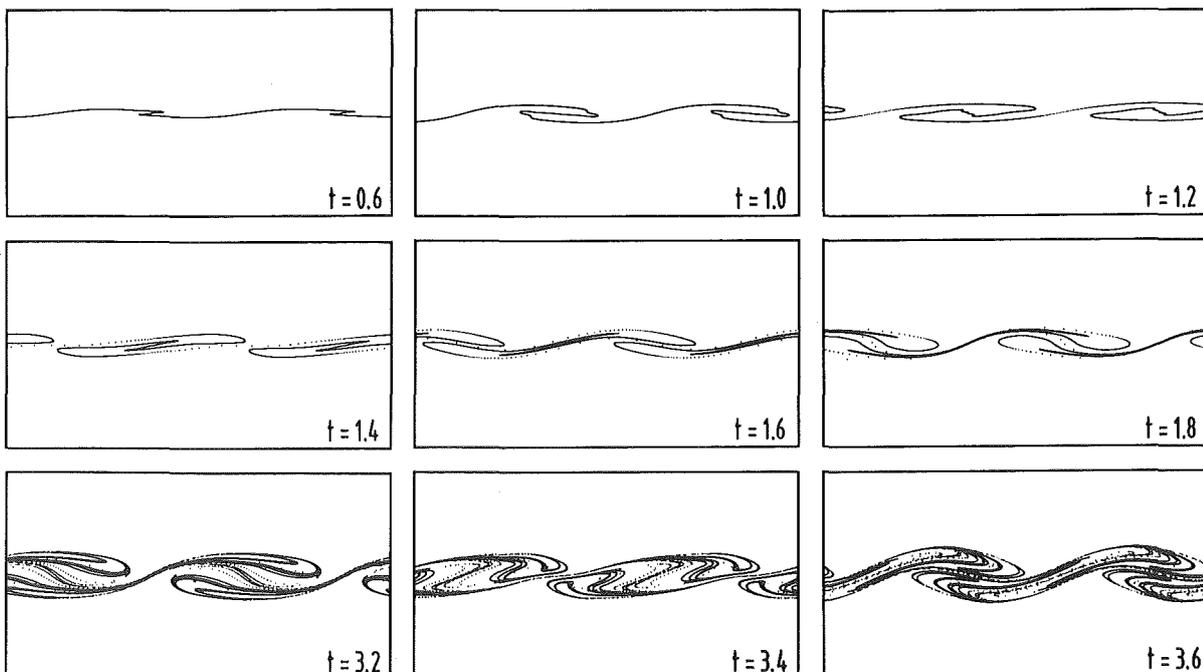
Die Approximationsfehler des numerischen Verfahrens spielen bei diesen Rechnungen durchaus eine Rolle. Da die physikalische Viskosität Null ist, müssen aus physikalischen Gründen jegliche Störungen anwachsen und sich mit der Anfangsstörung (5.35) mischen. Die Auswirkungen der Approximationsfehler lassen sich dabei natürlich nicht mehr von der Entwicklung der Anfangsstörung trennen. Die Verfeinerung des Gitters bei gleicher Anfangsstörung hat eine Änderung der Ergebnisse zur Folge, da die Approximationsfehler von den Gitterschrittweiten abhängen. Durch Gitterverfeinerung treten immer kleinere Strukturen auf, die von Approximationsfehlern erzeugt werden, und aufgrund der physikalischen Instabilität anwachsen.



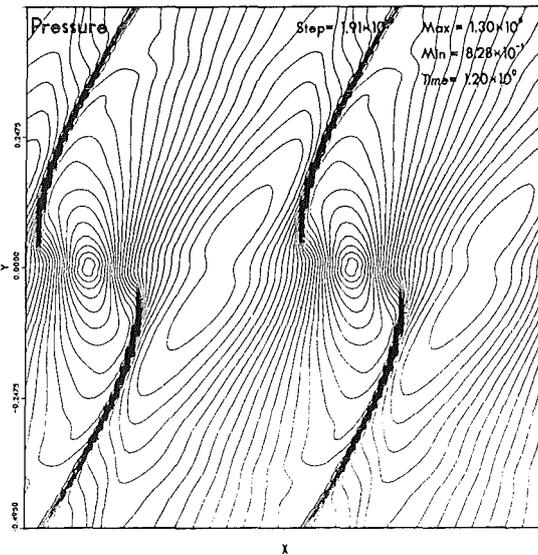
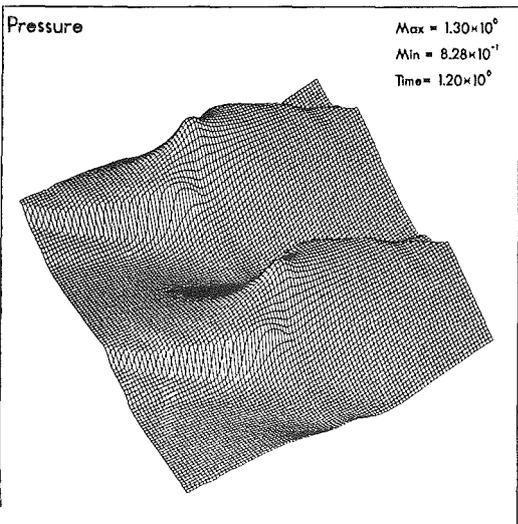
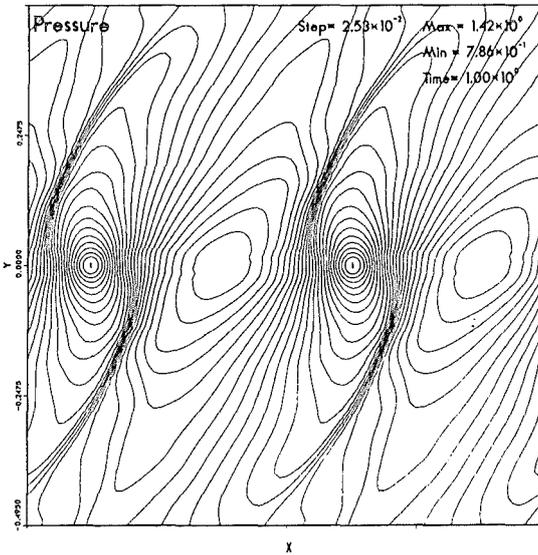
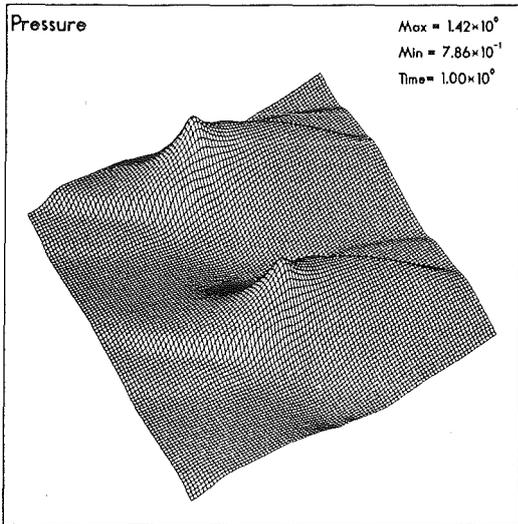
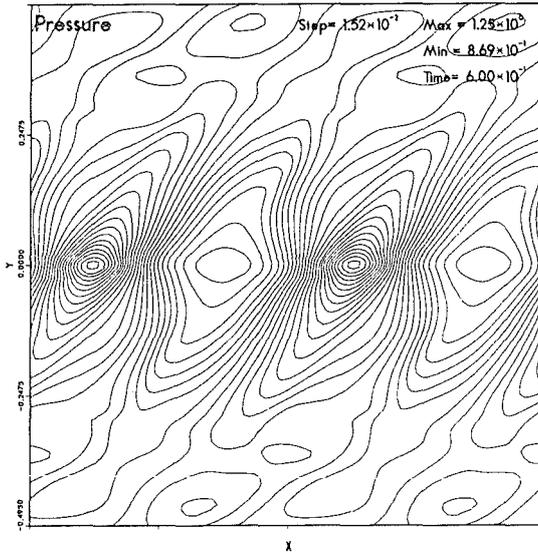
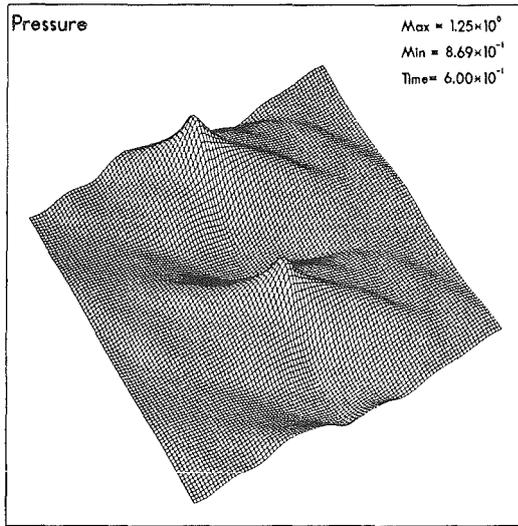
Figur 5.15 Druckstörung weißes Rauschen $a = 0.03$, $b = 0.03$ und $M = 50$

5.4 Instabilität einer Scherströmung im Überschallbereich

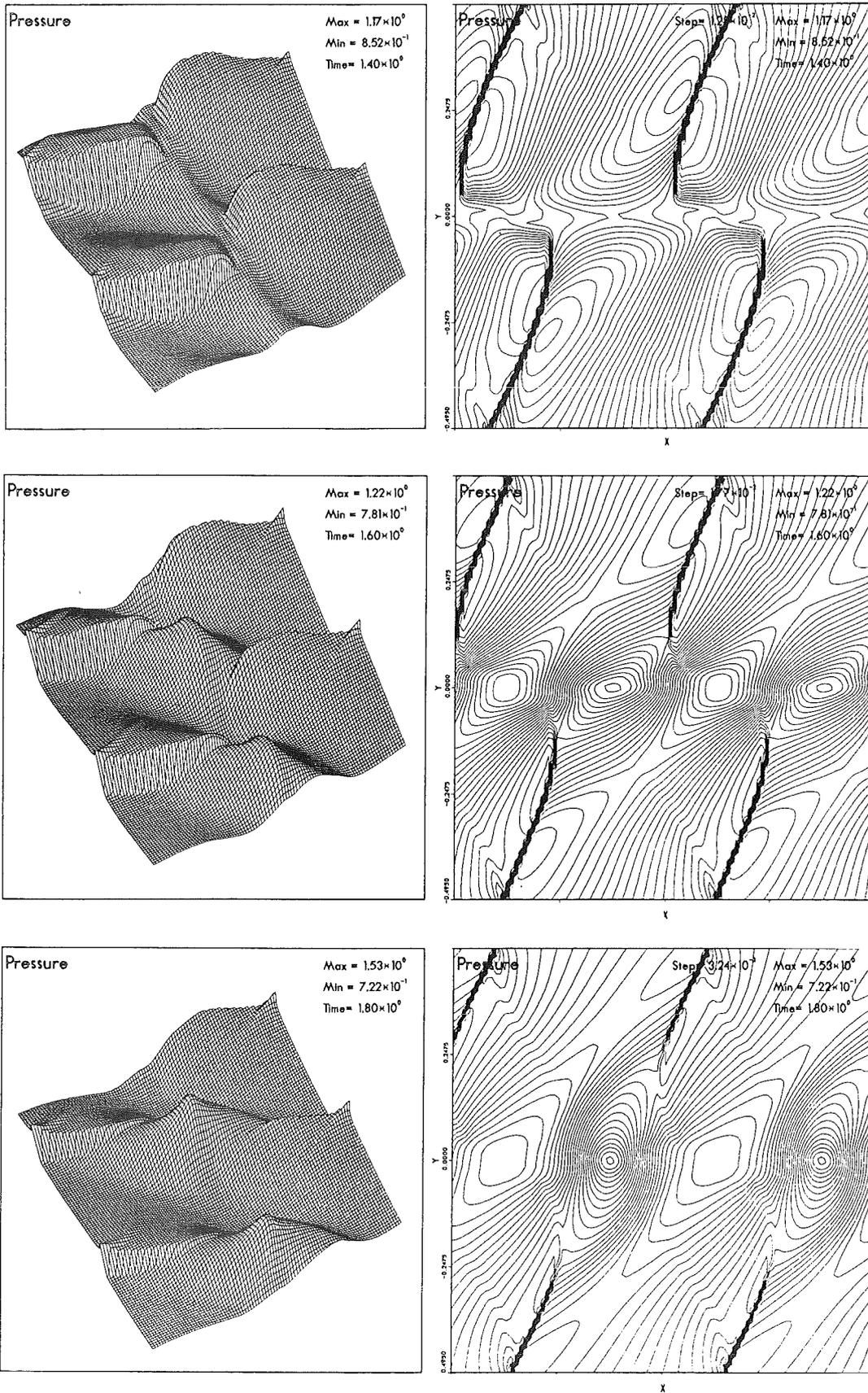
Bei der Erhöhung der relativen Machzahl der Scherströmung zeigen die numerischen Ergebnisse, daß die Kelvin-Helmholtz Instabilität eine immer geringere Rolle spielt, wie die theoretische Stabilitätstheorie dies voraussagt. Figur 5.16 zeigt an Hand der Lage der Markerteilchen die zeitliche Entwicklung der Kontaktfläche der Scherströmung bei Machzahl $M = 2$. Die Instabilität entwickelt sich zunächst ähnlich wie beim Fall mit $M = 1$ (vergleiche Figur 5.5) und es sieht zur Zeit $t = 1,0$ so aus, als ob die Scherfläche sich gleich zu einem Wirbel aufrollt. Aber dieses Aufrollen findet nicht statt. Die entstandene Wirbelstruktur wird vor dem Aufrollen durch die starke Außenströmung wieder auseinandergerissen und in eine neue Wirbelstruktur hineingezogen, die sich jetzt um eine halbe Wellenlänge versetzt ausbildet. Dieser Prozeß wiederholt sich immer wieder, wie sich dies in Figur 5.16 abzeichnet. Weiter sieht man, daß die Mischzone sich im Laufe der Zeit verbreitert, indem durch diesen Vorgang Material von der Außenströmung in die Mischzone hineingezogen wird. Die Breite der Mischzone wächst jedoch bei weitem nicht so stark an wie im Falle kleiner Machzahlen.



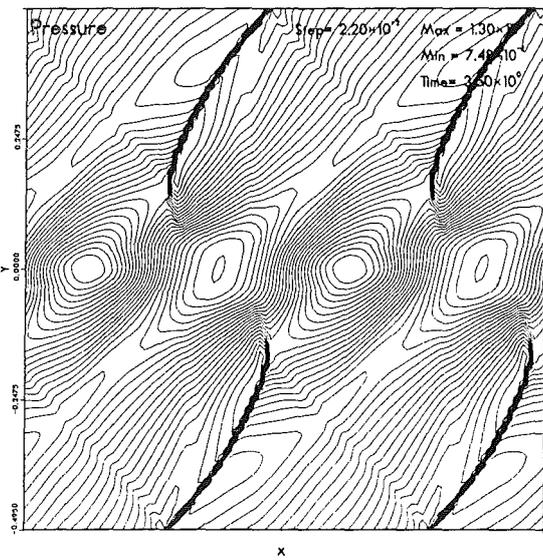
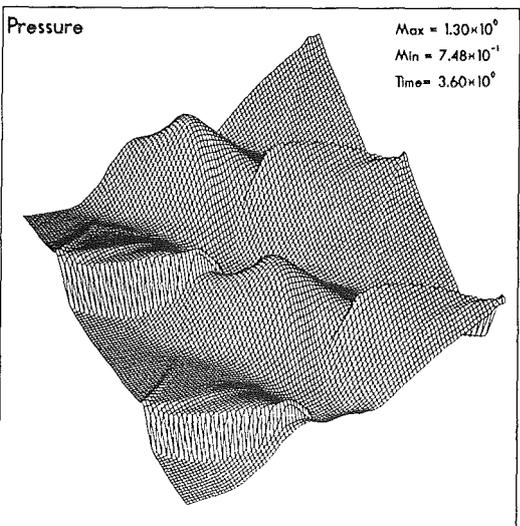
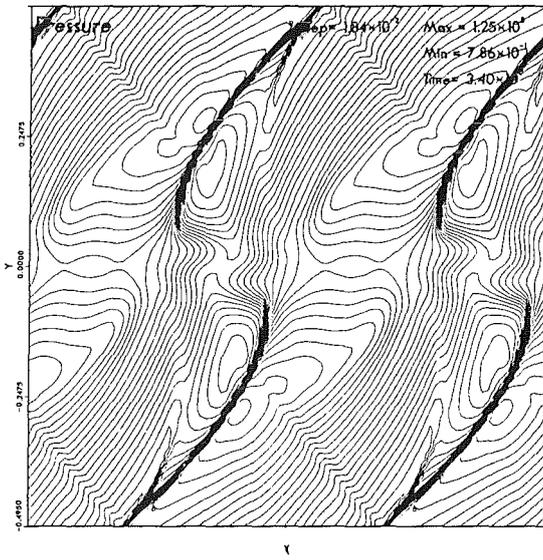
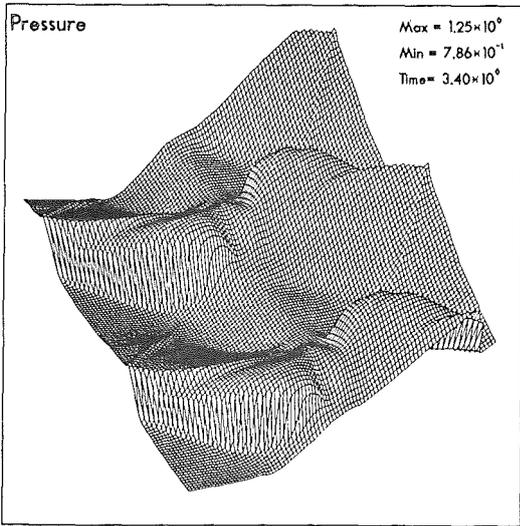
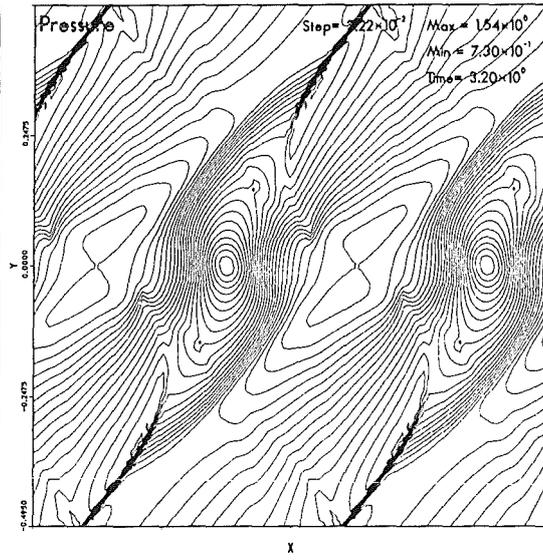
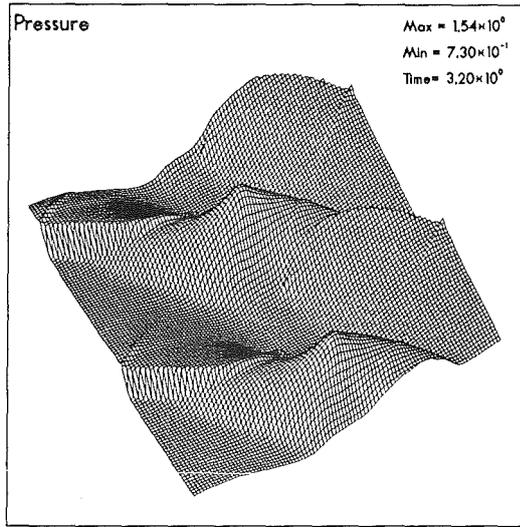
Figur 5.16 Instabilität der Scherschicht, $M = 2$, $R = 11\,800$, $a_0 = 0.1$, $b_0 = 0.005$



Figur 5.17 Druckverlauf zur Simulation in Figur 5.16



Figur 5.17 Fortsetzung



Figur 5.17 Fortsetzung

Die 3-dimensionale Darstellung und die Höhenlinien für den Druck zu dieser numerischen Simulation verraten etwas über den Mechanismus dieses Prozesses (Figur 5.17). Zur Zeit $t = 1.6$ sieht man etwa ein Paar gekrümmter Stoßwellen, welche die Wirbelstruktur aus den Bildern der Markerteilchen einschließen. Diese Stoßwellen entstehen wohl aus den stationären Knick-Moden, die Artola und Majda in [3] ableiten. Da mehr und mehr Material von außen in diese Wirbel einfließt, wachsen diese an und drücken die Stoßwellen auseinander bis sie zuletzt über den Stau-punkt zwischen den beiden Wirbelstrukturen rutschen. Die Druckspitzen, welche diese Staupunktströmung aufrecht erhalten, brechen zusammen und geben den Weg frei, so daß Material der Mischzone mit der Strömung mitgerissen wird und neue Wirbelstrukturen mit dem Material der benachbarten Zellen bildet. Die neuen Wirbel werden wieder eingeschlossen durch die Knick-Stoßwellen und der Zyklus beginnt von neuem. Dieser Mechanismus gründet sich auf die Wechselwirkung der gasdynamischen Strukturen in der Überschallströmung mit den Wirbelstrukturen in der (Unterschall) Mischzone.

Die numerische Simulation dieser Mach-Zwei-Scherströmung wurde mit einem MUSCL-Typ Verfahren auf einem 300×300 Punktegitter ausgeführt. Die Störung in den Anfangswerten wurde wieder vorgegeben wie in (5.35) als Druckstörung nahe der Trennfläche:

$$(5.36) \quad p = p_0 + a_0 e^{-y^2/b_0^2} \sin(2k\pi x) \quad .$$

Dabei war die Modenzahl $k = 2$, die Amplitude $a_0 = 0.1$ und der Abklingfaktor $b_0 = 0.005$. Diese Druckstörung führt dann auf eine sinusförmige geometrische Störung der Trennfläche, wie wir sie in (5.20) als Anfangsstörung vorschreiben.

Bei weiterer Erhöhung der Machzahl zeigt sich, daß die Breite der Mischzone immer langsamer anwächst (siehe [33]). Diese Aussage wird auch gut durch experimentelle Resultate bestätigt ([55]).

6. Kompressible Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten

Die Bewegung eines kontinuierlichen Mediums kann auf zwei verschiedene Arten beschrieben werden. Mittels Eulerkoordinaten definiert man den Zustand eines Gases als Funktion der Koordinaten x eines Punktes in einem festen Koordinatensystem. So bedeutet etwa $v = v(x, t)$ die Geschwindigkeit des Teilchens, das sich zur Zeit t am Punkt x befindet. Die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in diesen Eulerkoordinaten haben wir in Kapitel 4 betrachtet. Der andere Weg, eine Bewegung zu beschreiben, sind die Lagrangekoordinaten. Hierbei werden die Zustandsgrößen für jedes Teilchen der Strömung als Funktion der Zeit betrachtet. Die einzelnen Teilchen werden durch einen bestimmten Parameter, die Lagrangekoordinate m charakterisiert. Alle Größen, welche die Strömung bestimmen, sind nun Funktionen von m und der Zeit t . So bedeutet hier $\bar{v} = \bar{v}(m, t)$ die Geschwindigkeit des Teilchens m zur Zeit t . Im folgenden betrachten wir die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie in dieser Darstellung für eine Raumdimension. Die Beschreibung in Lagrangekoordinaten ist insbesondere vorteilhaft bei der Approximation einer Strömung von verschiedenen getrennten Materialien.

Als Lagrangekoordinate m nehmen wir hier die Masse zur Zeit $t = 0$:

$$(6.1) \quad m = \int_{x_0}^x \rho_0(s) ds \quad .$$

Dabei ist x_0 der linke Randpunkt unseres Rechengebietes und ρ_0 bezeichnet die Dichte zum Zeitpunkt $t = 0$: $\rho_0 = \rho_0(x) = \rho(x, 0)$. Gleichung (6.1) liefert die Position des Teilchens mit der Koordinate m zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Position eines Teilchens zur Zeit $t > 0$ ergibt sich folgendermaßen: Ist $\bar{v} = \bar{v}(m, t)$ für festes m die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion der Zeit t , so ist seine Position $x = x(m, t)$ gegeben durch

$$(6.2) \quad x(m, t) = x(m, 0) + \int_0^t v(m, s) ds \quad .$$

Weiter ist die Masse in einem von $x_0 : = x(0, t)$ und $x = x(m, t)$ mit festem m beschränkten Volumen konstant:

$$(6.3) \quad \int_{x_0}^{x(m,t)} \rho(x,t) dx = m \quad \text{für alle } t \quad .$$

Ist $f = f(x, t)$ eine Funktion in Eulerkoordinaten und $\bar{f} = \bar{f}(m, t)$ die Darstellung derselben Funktion in Lagrangekoordinaten, so gilt nach (6.2)

$$(6.4) \quad \bar{f}(m, t) = f(x(m, 0)) + \int_0^t \bar{v}(m, s) ds, t)$$

und für die Zeitableitung von f somit

$$(6.5) \quad \frac{\partial \bar{f}(m, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \quad ,$$

wobei $v = v(x, t)$ die Darstellung der Geschwindigkeit $\bar{v} = \bar{v}(m, t)$ in Eulerkoordinaten ist.

6.1 Gleichungen

Mit Hilfe der Formeln (6.1) - (6.5) können wir nun die Erhaltungsgleichungen in Eulerkoordinaten (4.1) in Erhaltungsgleichungen in Lagrangekoordinaten transformieren. Wir wollen dies nur im Falle der ersten Gleichung (Massenerhaltung) kurz durchführen. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$(6.6) \quad \rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0 \quad ,$$

so entsprechen die beiden ersten Terme schon der zeitlichen partiellen Ableitung der Dichte in Lagrangekoordinaten $\bar{\rho} = \bar{\rho}(m, t)$. Die x -Ableitung des letzten Terms muß somit nur noch in eine m -Ableitung umgeformt werden. Da die Differentiation der Gleichung (6.3)

$$(6.7) \quad \frac{\partial m}{\partial x} = \bar{\rho}(m, t)$$

liefert, ergibt sich aus (6.6) nach der Kettenregel

$$\bar{\rho}_t + \rho^2 \bar{v}_m = 0 \quad .$$

Division durch $\bar{\rho}^2$ und Einführen des spezifischen Volumens $\bar{V} = 1/\bar{\rho}$ als neue abhängige Größe gestattet, diese Gleichung wieder in Erhaltungsform zu schreiben - mit \bar{V} als Erhaltungsgröße.

In ähnlicher Weise ergeben sich die übrigen **Erhaltungsgleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten** (siehe z.B. [56]). Läßt man den oberen Querstrich "-" wieder weg, so lauten sie

$$(6.8) \quad V_t - v_m = 0$$

$$(6.9) \quad v_t + p_m = 0$$

$$(6.10) \quad E_t + (v p)_m = 0 \quad ,$$

mit den Bezeichnungen wie in Kapitel 4; hinzu kommen V als das spezifische Volumen $V = 1/\rho$ und die spezifische Gesamtenergie E

$$(6.11) \quad E = \frac{e}{\rho} = \varepsilon + \frac{1}{2} v^2$$

(e Gesamtenergie pro Einheitsvolumen, ε spezifische innere Energie, s. Kap. 4).

Durch Differentiation von (6.2) nach t erhalten wir eine Differentialgleichung für die Eulerkoordinate $x = x(m, t)$

$$(6.12) \quad x_t = v \quad .$$

Zusammen mit (6.7) ist sie gerade äquivalent zu der Massenerhaltung (6.8).

Die **Zustandsgleichung** geben wir in der allgemeinen Form

$$(6.13) \quad p = p(V, \varepsilon)$$

an und betrachten im folgenden numerische Verfahren für diesen allgemeinen Fall. Die Zustandsgleichung des idealen Gases tritt nur als Spezialfall auf. Die Erhaltungsgleichungen (6.8) - (6.10) schreiben wir wieder in der Kurzschreibweise als System von Erhaltungsgleichungen

$$(6.14) \quad u_t + f(u)_m = 0$$

mit dem Vektor der Erhaltungsgrößen $u = (V, v, E)^T$ und dem physikalischen Fluß $f(u) = (-v, p, v p)^T$.

Die Funktionalmatrix des Flusses $f(u)$ hat die Form

$$(6.15) \quad A(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_V & -v p_E & p_E \\ v p_V & p - v^2 p_E & v p_E \end{pmatrix} .$$

Dabei sind mit p_V und p_E die thermodynamischen Ableitungen $\partial p / \partial V$ und $\partial p / \partial \varepsilon$ bezeichnet.

Die Eigenwerte der Matrix $A(u)$ lauten der Größe nach geordnet

$$(6.16) \quad a_1 = -C \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = C \quad ,$$

wobei C die Lagrangesche Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Sie ergibt sich aus

$$(6.17) \quad C^2 = p p_E - p_V .$$

Der Zusammenhang zwischen der Lagrangeschen und Eulerschen-Schallgeschwindigkeit c ist durch die Relation

$$(6.18) \quad C = \rho c = \rho V$$

gegeben. Im Fall des idealen Gases vereinfacht sich (6.17) zu

$$(6.19) \quad C^2 = \gamma p / V \quad \text{mit} \quad p = \frac{(\gamma - 1) \varepsilon}{V} .$$

Zur Konstruktion von Upwind-Verfahren benötigt man neben den Eigenwerten (6.16), welche die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellen angeben, auch die zugehörigen Eigenvektoren. Diese liefern die Richtungen der Wellen im Phasenraum. Wir schreiben sie wieder als Spalten einer Matrix $R = (r^1(u) \ r^2(u) \ r^3(u))$ und erhalten

$$(6.20) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ C & 0 & -C \\ vC - p & -pV/p_E & -vC - p \end{pmatrix} .$$

6.2 Verfahren von Roe

Wir wenden uns nun den Näherungsverfahren zu und führen eine Diskretisierung der Lagrangekoordinate und der Zeit ein. Sei Δm_i der Wert der Masse, welche im i -ten Gitterintervall enthalten ist. Das i -te Gitterintervall läßt sich dann in der Form

$$(6.21) \quad I_i = [m_{i-1/2}, m_{i+1/2}]$$

schreiben, wobei die Intervallgrenzen durch Aufsummieren gewonnen werden:

$$(6.22) \quad m_{i+1/2} = \sum_{j \leq i} \Delta m_j \quad .$$

Mit u_i^n bezeichnen wir Näherungswerte für die bezüglich der Masse gewichteten Mittelwerte der Erhaltungsgrößen

$$(6.23) \quad u_i^n \approx \frac{1}{\Delta m_i} \int_{m_{i-1/2}}^{m_{i+1/2}} u(m, t_n) dm \quad .$$

Das Integral eines Vektors ist wieder komponentenweise zu verstehen. Die Mittelpunkte der Gitterzellen bezeichnen wir mit m_i :

$$(6.24) \quad m_i = \frac{1}{2} (m_{i+1/2} + m_{i-1/2}) \quad .$$

Der Zeitschritt wird mit Δt bezeichnet; t_n ist wieder wie üblich die Abkürzung für $n \Delta t, n \in \mathbb{N}_0$.

Günstig ist es auch die Raumkoordinate

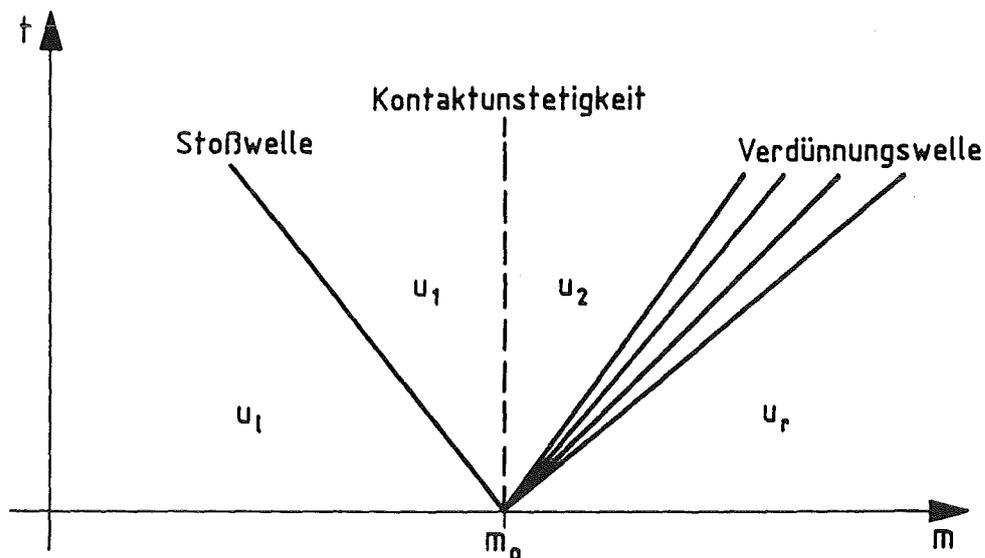
$$(6.25) \quad x_{i+1/2}^n = x(m_{i+1/2}, t_n)$$

als weitere abhängige Variable mit in den numerischen Algorithmus aufzunehmen. Dies ist insbesondere dann unumgänglich, wenn die Gleichungen in Zylinder- oder Kugelkoordinaten mit Winkelsymmetrie oder auch mit ortsabhängigen Quelltermen gelöst werden sollen. In diesen Fällen treten x -abhängige Terme in den Gleichungen auf.

Das Riemannproblem für die Gleichungen in Lagrangekoordinaten (6.14) für ein ideales Gas mit den Anfangswerten

$$(6.26) \quad u(m,0) = \begin{cases} u_l & \text{für } m < m_0, \\ u_r & \text{für } m > m_0, \end{cases}$$

wobei m_0 die Massenkoordinate des Sprungs bezeichnet, hat eine ähnliche Struktur wie bei den Eulergleichungen. Das erste und dritte charakteristische Feld ist streng nichtlinear, während das zweite linear entartet ist. Die äußeren konstanten Zustände u_l und u_r sind somit getrennt von u_1 bzw. u_2 durch eine Stoß- oder Verdünnungswelle, während die inneren Zustände u_1 und u_2 durch eine Kontaktunstetigkeit getrennt werden (vergl. Figur 6.1).



Figur 6.1 (m, t) -Diagramm der Lösung eines Riemannproblems (6.14), (6.26)

Die exakte Lösung läßt sich im Falle der Zustandsgleichung des idealen Gases mittels der Lösung einer Fixpunktgleichung bestimmen. Wir werden etwas später noch näher darauf eingehen. Die Struktur der Lösung des Riemannproblems bleibt aber auch für eine allgemeine Zustandsgleichung (6.13) erhalten, solange die charakteristischen Felder streng nichtlinear oder linear entartet sind. Zum Beispiel bei Phasenübergängen kommt es jedoch vor, daß diese Bedingungen verletzt werden (siehe z.B. [46]). Im folgenden wollen wir dies jedoch nicht berücksichtigen, d.h. wir gehen von obiger Lösungsstruktur des Riemannproblems aus.

Zuerst wollen wir das **Verfahren von Roe** auf die Gleichungen in Lagrangekoordinaten übertragen. Für die Eulergleichungen führte Roe [59] sogenannte Parametervektoren ein und konnte damit aus der Mittelwertseigenschaft

$$(6.27) \quad f(u_r) - f(u_l) = A_{lr} (u_r - u_l)$$

und der Annahme $A_{lr} = A(\bar{u})$, die Roe-Mittelwerte \bar{u} ableiten. Für allgemeine Zustandsgleichungen findet man einen solchen Mittelwert u nicht mehr, sondern man muß $A_{lr} = A_{lr}(u_l, u_r)$ ansetzen (siehe [21], [42]). Die Situation bei den Gleichungen in Lagrangekoordinaten sieht ganz ähnlich aus. Für die Gleichungen (6.14) lassen sich auch nur im Falle der Zustandsgleichung des idealen Gases Parametervektoren und ein Mittelwert \bar{u} mit $A_{lr} = A(\bar{u})$ finden. Wir wollen hier einen anderen Weg einschlagen, um allgemeine Zustandsgleichungen behandeln zu können und gehen direkt aus von der Mittelwertseigenschaft (6.27).

Unter Benutzung der Abkürzung

$$(6.28) \quad \Delta z := z_r - z_l$$

lauten die einzelnen Gleichungen der Mittelwertseigenschaft (6.27) im Falle der Gleichungen in Lagrangekoordinaten

$$(6.29) \quad -\Delta v = -\Delta v \quad ,$$

$$(6.30) \quad \Delta p = \bar{p}_v \Delta V - \bar{v} \bar{p}_\varepsilon \Delta v + \bar{p}_\varepsilon \Delta E \quad ,$$

$$(6.31) \quad \Delta(vp) = \bar{v} \bar{p}_v \Delta V + (\bar{p} - \bar{v}^2 \bar{p}_\varepsilon) \Delta v + \bar{v} \bar{p}_\varepsilon \Delta E \quad .$$

Die Größen mit dem oberen Querstrich "-" sind die Elemente der Matrix A_{lr} , d.h. die gesuchten Mittelwerte. Die erste Gleichung (6.29) ist natürlich automatisch erfüllt. Bei der zweiten Gleichung kann man die spezifische Energie E mit Hilfe von (6.11) in ihren inneren und kinetischen Anteil aufspalten und neu zusammenfassen. Man erhält

$$(6.32) \quad \Delta p = \bar{p}_v \Delta V + \bar{p}_\varepsilon \Delta \varepsilon - \bar{p}_\varepsilon \Delta v \left(\bar{v} - \frac{v_r + v_l}{2} \right) \quad .$$

Da p eine Funktion nur von V und ε ist, sollte der letzte Term in (6.32) mit den Geschwindigkeiten wegfallen. Dies läßt sich erreichen, indem wir

$$(6.33) \quad \bar{v} := \frac{v_r + v_l}{2}$$

setzen. Gleichung (6.32) reduziert sich damit zu

$$(6.34) \quad \Delta p = \bar{p}_V \Delta V + \bar{p}_e \Delta e \quad .$$

Wir wenden uns nun der dritten Gleichung (6.31) zu. Zerlegt man die Gesamtenergie E wieder in ihren kinetischen und inneren Anteil und setzt \bar{v} nach (6.33) ein, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$(6.35) \quad \Delta(vp) = \bar{v} (\bar{p}_V \Delta V + \bar{p}_e \Delta e) + \bar{p} \Delta v \quad .$$

Mit Hilfe von (6.34) folgt daraus sofort

$$(6.36) \quad \Delta(vp) = \bar{v} \Delta p + \bar{p} \Delta v \quad .$$

Die Elimination von p in dieser Beziehung liefert dann den Mittelwert des Drucks in der Gestalt

$$(6.37) \quad \bar{p} = \frac{\Delta(vp) - \bar{v} \Delta p}{\Delta v} = \frac{p_r + p_l}{2} \quad .$$

Die Gleichungen (6.29) - (6.31) sind somit erfüllt, mit \bar{p} und \bar{v} nach (6.33) bzw. (6.37), falls nur die Gleichung (6.34) erfüllt ist. Neben den Mittelwerten \bar{p} und \bar{v} fehlen somit noch geeignete Mittelwerte für die thermodynamischen Ableitungen \bar{p}_V und \bar{p}_e .

Wir betrachten zunächst einmal die **Zustandsgleichung des idealen Gases** und machen den Ansatz

$$(6.38) \quad \bar{p} = p(\bar{V}, \bar{e})$$

$$(6.39) \quad \bar{p}_V = p_V(\bar{V}, \bar{e}), \quad \bar{p}_e = p_e(\bar{V}, \bar{e})$$

mit geeigneten Mittelwerten \bar{V} und \bar{e} . Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases erhalten wir somit die Mittelwerte für den Druck und die thermodynamischen Ableitungen

$$(6.40) \quad \bar{p} = (\gamma - 1) \frac{\bar{e}}{\bar{V}}, \quad \bar{p}_V = -(\gamma - 1) \frac{\bar{e}}{\bar{V}^2}, \quad \bar{p}_e = (\gamma - 1) \frac{1}{\bar{V}} \quad .$$

Eingesetzt in die Beziehung (6.34) ergibt nach kurzer Umformung

$$(6.41) \quad \bar{V} \Delta p + \bar{p} \Delta V = (\gamma - 1) \Delta \varepsilon = \Delta(Vp) \quad .$$

Dies ist erfüllt, falls der Mittelwert des spezifischen Volumens

$$(6.42) \quad \bar{V} = \frac{V_1 + V_r}{2}$$

lautet. Wir fassen dieses Ergebnis kurz zusammen.

Bemerkung 1: Im Falle der Zustandsgleichung des **idealen Gases** (6.19) existiert für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten eine **Roe-Matrix** $A_{1r} = A(\bar{u})$. Die Roe-Mittelwerte $\bar{u} = (\bar{V}, \bar{v}, \bar{E})^T$ berechnen sich aus den Beziehungen

$$(6.43) \quad \bar{V} = \frac{V_r + V_1}{2}, \quad \bar{v} = \frac{v_r + v_1}{2}, \quad \bar{p} = \frac{p_r + p_1}{2}$$

und

$$(6.44) \quad \bar{E} = \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \bar{v}^2, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{p} \bar{V}}{\gamma - 1} \quad .$$

Der Mittelwert der Schallgeschwindigkeit ergibt sich aus

$$(6.45) \quad \bar{C}^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{V}} = \frac{V_r C_r^2 + V_1 C_1^2}{V_r + V_1}$$

und der Wert der thermodynamischen Ableitungen aus den Formeln (6.40).

Für eine allgemeine Zustandsgleichung ist diese Sachlage nicht mehr so einfach. Die Mittelwerte \bar{p}_V und \bar{p}_ε der thermodynamischen Ableitungen lassen sich nicht mehr als $p_V(\bar{V}, \bar{\varepsilon})$ und $p_\varepsilon(\bar{V}, \bar{\varepsilon})$ berechnen ohne daß Bedingung (6.34) verletzt wird. Zusätzlich zu den Mittelwerten (6.44) müssen wir somit geeignete Mittelwerte \bar{p}_V und \bar{p}_ε finden. Eine einfache Wahl ist

$$(6.46) \quad \bar{p}_V = \frac{p(V_r, \varepsilon_1) + p(V_r, \varepsilon_r) - p(V_1, \varepsilon_1) - p(V_1, \varepsilon_r)}{2(V_r - V_1)} \quad ,$$

$$(6.47) \quad \bar{p}_\varepsilon = \frac{p(V_r, \varepsilon_r) + p(V_1, \varepsilon_r) - p(V_r, \varepsilon_1) - p(V_1, \varepsilon_1)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_1)} \quad .$$

Diese Mittelwerte genügen der Bedingung (6.34), jedoch sind sie in zweierlei Hinsicht nicht so ganz befriedigend. Zum einen benötigt man die Berechnung des Druckes für die Argumente (V_l, ε_r) und (V_r, ε_l) . Ist die reale Zustandsgleichung sehr kompliziert oder liegt sie sogar nur in Tabellenform vor, so bedeutet dies zusätzlichen Rechenaufwand. Zum anderen könnten diese Zustände bei einer nicht konvexen Zustandsgleichung gerade in einen Bereich führen, in dem die Zustandsgleichung nicht mehr gültig ist. Für die Eulergleichungen wurde diese Wahl (6.46), (6.47) von Glaister [21] vorgeschlagen.

Die folgenden Vorschläge basieren ebenfalls auf Ideen zur Übertragung von näherungsweise Riemannlösern der Eulergleichungen auf allgemeine Zustandsgleichungen. Wir übernehmen hier Ideen von Liou, van Leer und Shuen [42] und übertragen sie auf die Gleichungen in Lagrangekoordinaten. Zunächst führen wir die Bezeichnungen

$$(6.48) \quad \check{p}_V := p_V(\bar{V}, \bar{\varepsilon}) \quad , \quad \check{p}_\varepsilon := p_\varepsilon(\bar{V}, \bar{\varepsilon})$$

ein. Diese Mittelwerte erfüllen im allgemeinen nicht die Bedingung (6.34). Wir erhalten somit einen Defekt δp mit

$$(6.49) \quad \delta p := \Delta p - \check{p}_V \Delta V - \check{p}_\varepsilon \Delta \varepsilon \quad .$$

Mittelwerte \bar{p}_V und \bar{p}_ε , welche der Bedingung (6.34) genügen, können wir nun in der Form

$$(6.50) \quad \bar{p}_\varepsilon = \check{p}_\varepsilon + \omega \frac{\delta p}{\Delta \varepsilon} \quad ,$$

$$(6.51) \quad \bar{p}_V = \check{p}_V + (1 - \omega) \frac{\delta p}{\Delta V}$$

schreiben. Dabei ist ω ein Parameter, der bestimmt, wie das Residuum δp auf \check{p}_ε und \check{p}_V "verteilt" wird. Setzt man die Ausdrücke (6.50) und (6.51) für \bar{p}_V und \bar{p}_ε in Gleichung (6.34) ein, so sieht man sofort, daß diese Bedingung damit erfüllt ist.

Man muß jetzt noch ein geeignetes ω für (6.50), (6.51) finden. Eine einfache Wahl wäre etwa $\omega = 1/2$. Schwierigkeiten treten dabei aber auf, falls $\Delta \varepsilon$ oder ΔV gegen Null streben. Eine wünschenswerte Eigenschaft von ω wäre, daß die Grenzwerte

$$(6.52) \quad \lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta \varepsilon} \quad , \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1 - \omega}{\Delta V}$$

existieren, welches natürlich von $\omega = 1/2$ nicht erfüllt wird. Eine geeignetere Wahl ist somit

$$(6.53) \quad \omega = \frac{|\tilde{p}_\varepsilon \Delta\varepsilon|}{|\tilde{p}_\varepsilon \Delta\varepsilon| + |\tilde{p}_V \Delta V|} ,$$

oder

$$(6.54) \quad \omega = \frac{(\tilde{p}_\varepsilon \Delta\varepsilon)^2}{(\tilde{p}_\varepsilon \Delta\varepsilon)^2 + (\tilde{p}_V \Delta V)^2} .$$

Streben ΔV und $\Delta\varepsilon$ gleichzeitig gegen Null, so strebt das Residuum (6.49) gegen Null und es gilt sofort $\bar{p}_V = \tilde{p}_V$ und $\bar{p}_\varepsilon = \tilde{p}_\varepsilon$.

Wir fassen die Ergebnisse bei der Berechnung einer Roe-Matrix für eine allgemeine Zustandsgleichung zusammen in

Bemerkung 2: Im Falle einer realen Zustandsgleichung $p = p(V, \varepsilon)$ existiert für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten eine **Roe-Matrix** $A_{1r} = A(u_l, u_r)$. Sie ist bestimmt durch die Mittelwerte

$$(6.55) \quad \bar{V} = \frac{V_r + V_l}{2} , \quad \bar{v} = \frac{v_r + v_l}{2} , \quad \bar{p} = \frac{p_r + p_l}{2}$$

und die Mittelwerte der thermodynamischen Ableitungen

$$(6.56) \quad \bar{p}_V \quad \text{und} \quad \bar{p}_\varepsilon ,$$

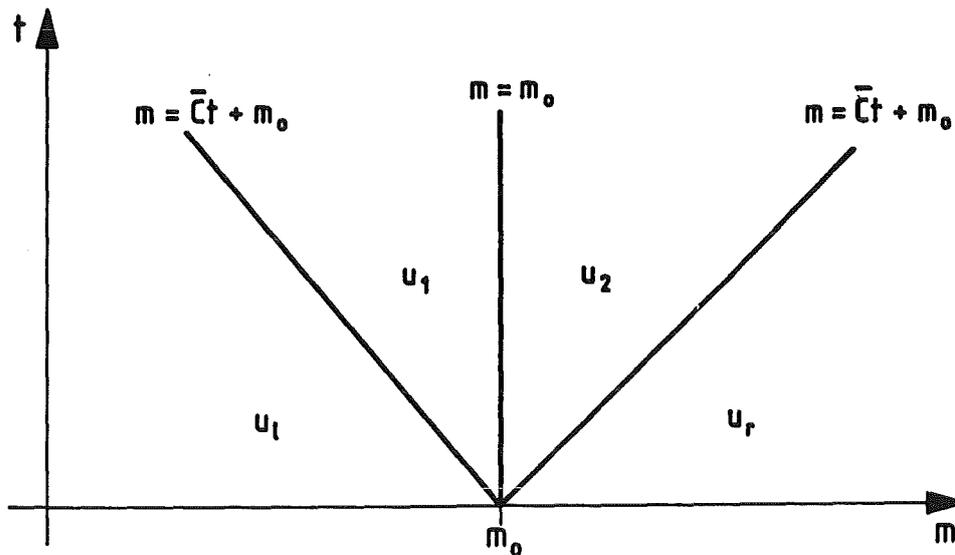
wie sie in den Formeln (6.46), (6.47) oder (6.50), (6.51) mit ω aus (6.53) oder (6.54) definiert sind. Alle übrigen Mittelwerte berechnen sich aus diesen. Insbesondere ergibt sich die mittlere Schallgeschwindigkeit aus der Formel

$$(6.57) \quad \bar{c}^2 = \bar{p} \bar{p}_\varepsilon - \bar{p}_V$$

und die mittlere Energie aus

$$(6.58) \quad \bar{E} = \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 ,$$

wobei die innere Energie aus der Zustandsgleichung $\bar{p} = p(\bar{V}, \bar{\varepsilon})$ ermittelt werden muß (thermische Zustandsgleichung).



Figur 6.2 (m, t)-Diagramm der Lösung des linearisierten Riemannproblems

Wir wollen jetzt noch kurz das Verfahren von Roe für reale Zustandsgleichungen vervollständigen. Die Rechtseigenvektoren der Roe-Matrix erhalten wir aus der Formel (6.20), indem wir dort alle Größen mit einem Querstrich versehen und (6.55) - (6.57) einsetzen. Wie die exakte Lösung besitzt die Lösung des linearisierten Problems zwei konstante mittlere Zustände (siehe Figur 6.2). Die verschiedenen mittleren Zustände in der Lösung des linearisierten Riemannproblems erhalten wir nach Kapitel 3 (3.47) in der Form

$$(6.59) \quad u_k = u_l + \sum_{j=1}^k \beta_j r^j \quad ,$$

wobei sich die Koeffizienten β_j aus dem linearen Gleichungssystem

$$(6.60) \quad u_r - u_l = \sum_{j=1}^3 \beta_j r^j$$

ergeben. Die Lösung von (6.60) lautet mit $z := u_r - u_l = (z_1, z_2, z_3)^T$

$$\beta_3 = - \frac{\bar{p}_e}{2\bar{C}^2} \left(z_3 + \frac{1}{\bar{C}} \left(\bar{p} - \bar{v}\bar{C} - \frac{\bar{p}_V}{\bar{p}_e} \right) z_2 + \frac{\bar{p}_V}{\bar{p}_e} z_1 \right) \quad ,$$

$$(6.61) \quad \beta_2 = z_1 - z_2/\bar{C} - 2\beta_3 \quad ,$$

$$\beta_1 = z_2/\bar{C} + \beta_3 \quad .$$

Damit haben wir das Roe-Verfahren vervollständigt. Der numerische Fluß lautet dann

$$(6.62) \quad g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = \frac{1}{2} \left(f(u_l) + f(u_r) - \bar{C} (\beta_1 r^1 + \beta_3 r^3) \right) .$$

Im Falle der Eulergleichungen haben wir in Kapitel 4 gezeigt, daß das Roe-Verfahren in Bereichen mit sehr kleiner Dichte, d.h. nahe Vakuum, nicht mehr durchführbar sein kann, da negative Dichten und innere Energien auftreten. Da in den Gleichungen in Lagrangekoordinaten das spezifische Volumen als Erhaltungsgröße auftritt, welches nahe Vakuum stark anwächst, können dort keine solchen Schwierigkeiten auftreten. Aber in Bereichen starker Kompression wird das spezifische Volumen sehr klein und es könnten ähnliche Probleme auftreten. Wir untersuchen diese Fragestellung im folgenden.

Analog zu den Eulergleichungen gehen wir aus von einem Riemannproblem mit

$$(6.63) \quad u(m, 0) = \begin{cases} u_l = (V_0, -v_0, E_0)^T & \text{für } m < m_0 \quad , \\ u_r = (V_0, v_0, E_0)^T & \text{für } m > m_0 \quad . \end{cases}$$

Als Zustandsgleichung betrachten wir die des idealen Gases. Nach Bemerkung 1 lauten die Roe-Mittelwerte dann

$$(6.64) \quad \bar{V} = V_0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{p} = p_0, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_0, \quad \bar{E} = \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \bar{C} = C_0, \quad ,$$

wobei p_0 , ε_0 und C_0 die aus V_0 , v_0 und E_0 abgeleiteten Größen bezeichnen. Wir berechnen nun die mittleren Zustände des nach Roe linearisierten Riemannproblems. Dazu benötigen wir die Komponenten β_1 , β_2 und β_3 der Darstellung (6.60) von $u_r - u_l$ bezüglich den Rechtseigenvektoren der Roe-Matrix. Nach den Formeln (6.61) erhält man

$$(6.65) \quad \beta_1 = \frac{v_0}{C_0}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{v_0}{C_0} .$$

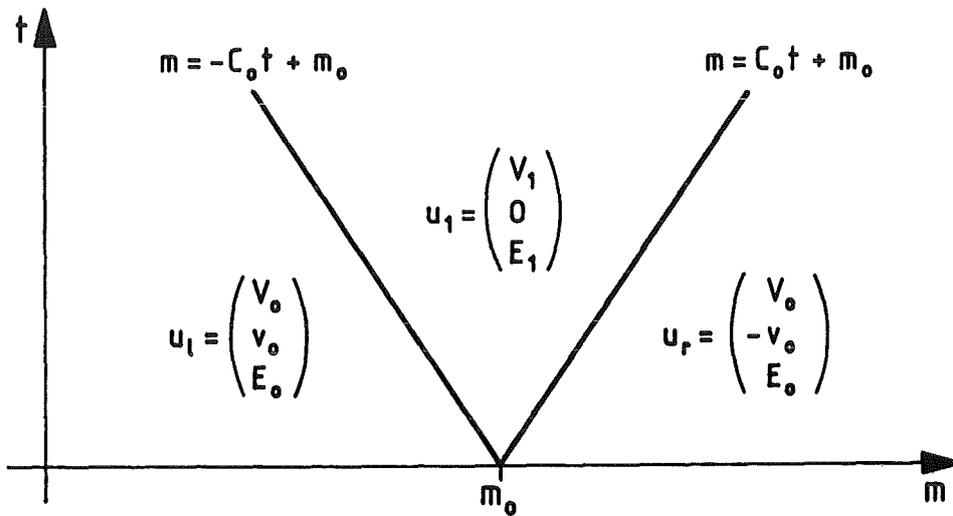
Es ergibt sich somit in der Lösung des linearisierten Riemannproblems wie bei der exakten Lösung nur ein mittlerer Zustand u_1 , welcher durch

$$u_1 = u_l + \beta_1 r^1(u) = u_r - \beta_3 r^3(u)$$

gegeben ist (vgl. Figur 6.3) und ausgeschrieben

$$(6.66) \quad V_1 = V_0 + \frac{v_0}{C_0}, \quad v_1 = 0, \quad E_1 = E_0 - \frac{v_0 p_0}{C_0}$$

lautet.



Figur 6.3 (m, t)-Diagramm der Lösung des linearisierten Riemannproblems (6.14), (6.63)

Aus (6.66) sieht man sofort, daß im Falle $v_0 \geq 0$ das spezifische Volumen immer positiv bleibt. Im Falle der inneren Energie ist dies nicht gleich einzusehen. Wir formulieren den Ausdruck für die innere Energie etwas um:

$$\varepsilon_1 = E_0 - \frac{v_0 p_0}{C_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{v_0 C_0 V_0}{\gamma} = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{v_0 c_0}{\gamma}$$

Dabei haben wir die Formeln (6.18) und (6.19) ausgenutzt. Die innere Energie ist somit positiv, falls

$$(6.67) \quad \frac{v_0^2}{c_0^2} - \frac{2}{\gamma} \frac{v_0}{c_0} + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} > 0$$

gilt.

Wegen $\gamma > 1$ besitzt jedoch der in v_0/c_0 quadratische Ausdruck auf der linken Seite keine reelle Nullstelle. Da er z.B. für $v_0/c_0 = 0$ positiv ist, muß die gesamte Parabel in der oberen Halbebene liegen, d.h., die innere Energie ε_1 bleibt positiv. Damit ist gezeigt, daß für das Riemannproblem (6.63) im Falle $v_0 \geq 0$ das Verfahren von Roe für die Gleichungen in Lagrangekoordinaten positivitätserhaltend ist.

Eine andere Situation liegt vor im Falle $v_0 \leq 0$. Wie die exakte Lösung besitzt die Lösung des linearisierten Riemannproblems wiederum nur einen mittleren Zustand. In diesem Fall ist der mittlere Zustand ein Bereich mit großer Dichte und großem Druck, der nach rechts und links durch Stoßwellen eingegrenzt wird, während im ersten Fall $v_0 \geq 0$ ein Bereich mit niedriger Dichte und Druck eingegrenzt durch Verdünnungswellen, vorliegt. Der mittlere Zustand der Lösung des linearisierten Riemannproblems ist wieder gegeben durch (6.66). Ist v_0 negativ, so kann die innere Energie natürlich nicht negativ werden, sondern sie wird anwachsen. Aber beim spezifischen Volumen sieht die Situation anders aus. Es bleibt nur positiv, solange

$$(6.68) \quad V_0 + \frac{v_0}{C_0} > 0$$

gilt. Mittels (6.18) erhält man umgeformt $v_0/c_0 > -1$, d.h. das spezifische Volumen wird negativ, falls

$$(6.69) \quad \frac{v_0}{c_0} < -1$$

In diesem Fall ist das Verfahren von Roe nicht mehr durchführbar.

Im Falle der Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten liegt eine etwas andere Situation vor als bei den Gleichungen in Eulerkoordinaten, wie die obigen Betrachtungen zeigen. In Lagrangekoordinaten macht die Approximation von Bereichen mit sehr kleinen Dichten oder von Bereichen mit hoher Energie, in denen die kinetische Energie dominiert, keinerlei Probleme. Probleme tauchen auf bei starker Kompression. Die Gleichungen in Lagrangekoordinaten sind dann nicht mehr Roe-linearisierbar. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Lagrange-Schallgeschwindigkeit im komprimierten Zustand deutlich größer ist als in den beiden ungestörten Zuständen und der Roe-Mittelwert diese unterschätzt.

6.3 HLL-Verfahren

Aufbauend auf den Roe-Mittelwerten können wir nun auch ein HLL-Verfahren für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten mit realer Zustandsgleichung angeben. Der numerische Fluß lautet nach (3.60)

$$(6.70) \quad g_{\text{HLL}}(u_l, u_r) = \frac{a_r f(u_l) - a_l f(u_r)}{a_r - a_l} + \frac{a_r a_l}{a_r - a_l} (u_r - u_l) \quad .$$

Wir setzen dabei voraus, daß für die Gleichungen in Lagrangekoordinaten (6.14) die numerischen Signalgeschwindigkeiten die Ungleichungen $a_r \geq 0$ und $a_l \leq 0$ immer erfüllen. Beim HLL-Verfahren wird die exakte Lösung des Riemannproblems ersetzt durch eine näherungsweise Lösung, welche nur aus drei konstanten Zuständen besteht: den ungestörten Zuständen u_r und u_l und einem mittleren Zustand

$$(6.71) \quad u_{lr} = \frac{a_r u_r - a_l u_l}{a_r - a_l} - \frac{f(u_r) - f(u_l)}{a_r - a_l}$$

(siehe Kapitel 3). Die größte und kleinste Signalgeschwindigkeit a_r und a_l wählen wir gerade als den größten und kleinsten Eigenwert der Roematrix, d.h.

$$(6.72) \quad a_r = \bar{C}_{\text{ROE}} \quad , \quad a_l = -\bar{C}_{\text{ROE}}$$

mit C_{ROE} aus (6.57).

Wie wir in Kapitel 3 ausgeführt haben, sollten diese Werte für die Signalgeschwindigkeiten noch korrigiert werden durch

$$(6.73) \quad a_r = \max \left\{ \bar{C}_{\text{ROE}}, C_r \right\} \quad , \quad a_l = \min \left\{ -\bar{C}_{\text{ROE}}, -C_l \right\} \quad .$$

Dabei sind C_r und C_l die Lagrange-Schallgeschwindigkeiten der ungestörten Zustände. Diese Modifikation liefert eine bessere Abschätzung der maximalen und minimalen Signalgeschwindigkeiten, falls Verdünnungswellen in der exakten Riemannlösung auftreten.

Im vorigen Abschnitt zeigte es sich, daß beim Roe-Verfahren für die Gleichungen in Lagrangekoordinaten Schwierigkeiten bei Problemen auftreten, in denen starke Kompressionen vorkommen. Wir wollen im folgenden diese Situation auch für das HLL-Verfahren analysieren. Dazu betrachten wir wieder das Riemannproblem (6.14), (6.63). Man wird erwarten, daß das HLL-Verfahren natürlich dann zusammenbricht, falls der mittlere Zustand physikalisch unsinnig ist. Der mittlere Zustand ist nach (6.71) gerade durch

$$(6.74) \quad V_{lr} = V_o + \frac{v_o}{C_o}, \quad v_{lr} = 0, \quad E_{lr} = E_o - \frac{v_o p_o}{C_o}$$

gegeben und identisch mit dem mittleren Zustand beim Roe-Verfahren. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da für dieses spezielle Riemannproblem auch für die näherungsweise Riemannlösung beim Roe-Verfahren nur ein mittlerer Zustand auftritt und die numerischen Signalgeschwindigkeiten nach (6.72) bzw. (6.73) identisch sind. Die Gleichheit der mittleren Zustände folgt dann direkt aus der Konsistenz mit der integralen Erhaltungsgleichung. Bei dem durch (6.70) und (6.72) bzw. (6.73) definierten HLL-Verfahren treten somit die gleichen Schwierigkeiten wie beim Roe-Verfahren auf. Die Roe-Mittelwerte (6.72) für die Schallgeschwindigkeit unterschätzen die wahren Signalgeschwindigkeiten. Man muß somit in dieser Situation eine Korrektur der Roe-Mittelwerte einführen.

Wir machen dazu den Ansatz

$$(6.75) \quad \bar{C}^2 = \bar{C}_{ROE}^2 + \eta^2$$

mit

$$(6.76) \quad \eta^2 = \eta_o^2 \frac{(v_r - v_l)^2}{(V_r + V_l)^2}$$

Wir berechnen nun das spezifische Volumen des mittleren Zustandes nach Formel (6.71) für ein allgemeines Riemannproblem, bei welchem der mittlere Zustand stark komprimiert wird. Dies bedingt, daß sich nach rechts und links Stoßwellen ausbreiten und die Signalgeschwindigkeiten mit \bar{C} und $-\bar{C}$ angegeben werden können. Der mittlere Wert des spezifischen Volumens ist somit

$$(6.77) \quad V_{lr} = \frac{V_r + V_l}{2} + \frac{v_r - v_l}{2 \bar{C}}$$

Wir fordern nun die Positivität von V_{lr} und erhalten daraus die Ungleichung

$$(6.78) \quad (V_r + V_l)^2 \left(\bar{C}_{ROE}^2 + \eta_0^2 \frac{(v_r - v_l)^2}{(V_r + V_l)^2} \right) > (v_r - v_l)^2$$

und weiter

$$(6.79) \quad (V_r + V_l)^2 \bar{C}_{ROE}^2 + (\eta_0^2 - 1)(v_r - v_l)^2 > 0 \quad .$$

Diese Ungleichung ist sicherlich erfüllt, falls nur

$$(6.80) \quad \eta_0 > 1$$

gilt. Das HLL-Verfahren mit den korrigierten Signalgeschwindigkeiten (6.75), (6.76) und (6.80) ist somit positivitätserhaltend. Wir wollen diesen Sachverhalt im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 1: Das HLL-Verfahren für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten (6.70) ist positivitätserhaltend, falls die Signalgeschwindigkeiten durch

$$(6.81) \quad a_r = \max \left\{ \sqrt{\bar{C}_{ROE}^2 + \eta^2}, C_r \right\}, \quad a_l = \min \left\{ -\sqrt{\bar{C}_{ROE}^2 + \eta^2}, -C_l \right\}$$

mit

$$(6.82) \quad \eta = \eta_0 \frac{\max \{0, v_l - v_r\}}{V_r + V_l} \quad \text{mit} \quad \eta_0 > 1 \quad .$$

definiert sind.

Der Korrekturterm (6.76) wurde im Satz 1 noch etwas modifiziert, da er nur hinzugefügt werden muß, falls ein komprimierter Zustand auftritt, d.h. falls $v_l > v_r$. Andernfalls bleibt nach (6.77) V_{lr} immer positiv. Die Gestalt des Korrekturterms in (6.82) wird neben der Ausrechnung (6.77) - (6.80) auch motiviert durch die Situation bei den Eulergleichungen. Der Roe-Mittelwert für die Schallgeschwindigkeit in Eulerkoordinaten (4.14) läßt sich durch Einsetzen von (4.12) und (4.13) schreiben als Mittelwert der Schallgeschwindigkeiten c_l und c_r und einem Zusatzterm. Bei Umrechnung auf die Lagrange-Schallgeschwindigkeit besitzt dieser Term eine ähnliche Gestalt wie η in (6.76). In Abschnitt 6.6 werden wir das Verhal-

ten des HLL-Verfahrens bei starken Kompressionen noch genauer untersuchen. Mittels einer asymptotischen Entwicklung für starke Kompression können wir dort einen optimalen Wert für die Konstante η_0 angeben. Ergebnisse für Testprobleme bestätigen diesen Wert.

Durch den Ansatz beim HLL-Verfahren, daß die approximative Riemannlösung nur einen mittleren Zustand enthält, wird das HLL-Verfahren sehr einfach. Dadurch gelingt es natürlich auch, in einfacher Weise die Modifikationen einzubringen, welche das Verfahren positivitätserhaltend werden läßt. Auf der anderen Seite bringt die Einführung nur eines mittleren Zustandes natürlich zusätzliche numerische Dämpfung mit. Da bei den Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik gerade die Zustände vor und hinter einer Kontaktunstetigkeit durch einen konstanten Zustand ersetzt werden, kann man erwarten, daß eine Kontaktunstetigkeit stärker gedämpft wird als durch das Verfahren von Roe. Wir wollen uns diesen Sachverhalt noch etwas genauer anschauen.

Dazu betrachten wir ein Riemannproblem, dessen exakte Lösung aus zwei Zuständen besteht, welche durch eine **Kontaktunstetigkeit** getrennt werden. Die Anfangswerte lauten

$$(6.83) \quad u(x, 0) = \begin{cases} (V_l, v_l, E_l)^T & \text{für } m < m_0 \\ (V_r, v_r, E_r)^T & \text{für } m > m_0 \end{cases} ,$$

mit

$$(6.84) \quad v_l = v_r = : v_* \quad \text{und} \quad p_l = p_r = : p_* .$$

Die exakte Lösung hat damit die einfache Gestalt

$$(6.85) \quad u(m, t) = u(m, 0) , \quad (m, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ .$$

Diese Situation wird natürlich nicht durch die näherungsweise Riemannlösung beim HLL-Verfahren reproduziert. Die Näherungslösung besteht hier nach wie vor aus drei konstanten Zuständen, den ungestörten Zuständen u_r, u_l und dem mittleren Zustand

$$(6.86) \quad u_{lr} = \left(\frac{a_r V_r - a_l V_l}{a_r - a_l} , v_* , \frac{a_r E_r - a_l E_l}{a_r - a_l} \right)^T .$$

Betrachten wir demgegenüber das Roe-Verfahren, so ergeben sich die beiden mittleren Zustände nach (6.59) zu

$$(6.87) \quad u_1 = u_l + \beta_1 r^1, \quad u_2 = u_r - \beta_3 r^3.$$

Nach Einsetzen der Anfangswerte und der Roe-Mittelwerte folgt aus (6.61) jedoch

$$(6.88) \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = V_r - V_l, \quad \beta_3 = 0,$$

so daß hier die Lösung des approximativen Riemannproblems gerade mit der exakten identisch ist.

Drücken wir diesen Sachverhalt über die numerischen Flüsse aus, so gilt für die numerischen Flüsse des Godunov- und des Roe-Verfahrens

$$(6.89) \quad g_{\text{GOD}}(u_l, u_r) = g_{\text{ROE}}(u_l, u_r) = f_{\text{exakt}} = (-v_*, p_*, v_* p_*)^T.$$

Der numerische Fluß des HLL-Verfahrens lautet demgegenüber

$$(6.90) \quad g_{\text{HLL}} = f_{\text{exakt}} + \frac{a_r a_l}{a_r - a_l} (u_l - u_r).$$

Im Falle der Eulergleichungen gab Einfeldt [17] eine Korrektur des HLL-Verfahrens an, die diese numerische Dämpfung an Kontaktunstetigkeiten reduziert. Wir modifizieren diese Ideen hier und übertragen sie auf die Gleichungen in Lagrangekoordinaten.

Informationen über die Kontaktunstetigkeit werden in die näherungsweise Riemannlösung eingebaut, indem der konstante Zustand u_{lr} durch eine lineare Verteilung ersetzt wird. Die näherungsweise Riemannlösung hat dann die Form

$$(6.91) \quad w = w(m/t; u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & \text{für } m < a_l t, \\ u_{lr} + \delta \left(\frac{m}{t} - b \right) \beta_2(\bar{u}) r^2(\bar{u}) & \text{für } a_l t < m < a_r t, \\ u_r & \text{für } m > a_r t. \end{cases}$$

Dabei ist $r^2(u)$ der zweite Rechtseigenvektor, ausgewertet an einem Mittelwert $\bar{u} = \bar{u}(u_r, u_l)$ und $\beta_2(\bar{u})$ der Koeffizient der Projektion von $u_r - u_l$ auf $r^2(\bar{u})$ nach Formel (6.61). Die Größen δ und b werden im folgenden bestimmt.

Der Riemannlöser (6.91) muß natürlich konsistent mit der Integralform der Erhaltungsgleichung sein, d.h. die Bedingung 1 der Definition 4 in Kapitel 3 muß erfüllt sein. Um dies zu verifizieren, integrieren wir $w(m/\Delta t; u_l, u_r)$ über das Intervall $[-\Delta m/2, \Delta m/2]$:

$$\int_{-\Delta m/2}^{\Delta m/2} w(m/\Delta t; u_l, u_r) dm$$

$$= \left(\frac{\Delta m}{2} + a_l \Delta t \right) u_l + (a_r - a_l) \Delta t u_{lr} + \left(\frac{\Delta m}{2} - a_r \Delta t \right) u_r$$

$$+ \int_{a_l \Delta t}^{a_r \Delta t} \delta \left(\frac{m}{\Delta t} - b \right) \beta_2 r^2(\bar{u}) dm \quad .$$

Setzen wir u_{lr} nach Formel (6.71) in die rechte Seite ein, so ergibt sich daraus sofort die Konsistenz mit der Integralform nach (3.36), falls

$$(6.92) \quad \int_{a_l \Delta t}^{a_r \Delta t} \delta \left(\frac{m}{\Delta t} - b \right) \beta_2 r^2(\bar{u}) dm = 0$$

gilt. Führt man die Integration aus, so erhält man eine Bedingung an b :

$$(6.93) \quad b = \frac{a_r + a_l}{2} \quad .$$

Nach den Formeln (3.39) können wir den numerischen Fluß des durch die approximative Riemannlösung (6.91) definierten Godunov-Typ Verfahrens, welches wir **HLLEM-Verfahren** (HLL modifiziert) nennen wollen, ausrechnen. Es ergibt sich

$$(6.94) \quad g_{\text{HLLEM}}(u_l, u_r) = g_{\text{HLL}}(u_l, u_r) - \frac{1}{2} a_r a_l \delta \beta_2(\bar{u}) r^2(\bar{u}) \quad ,$$

d.h. der Fluß des HLLEM-Verfahrens läßt sich in einfacher Weise als Fluß des HLL-Verfahrens mit Korrekturterm schreiben.

Wir wählen δ nun so, daß für das Problem mit den Anfangswerten (6.83) $g_{\text{HLLEM}} = f_{\text{exakt}}$ gilt. Dies gelingt durch die Wahl

$$(6.95) \quad \delta = \frac{2}{a_r - a_l} .$$

Damit ist das HLLEM-Verfahren in der Lage, eine einzelne Kontaktunstetigkeit wie das Verfahren von Godunov und das von Roe exakt wiederzugeben.

Den zusätzlichen Aufwand kann man leicht abschätzen. Zusätzlich zum Fluß des HLL-Verfahrens muß man die Projektion von $u_r - u_l$ auf den zweiten Rechtseigenvektor berechnen, d.h. β_2 aus (6.61). Der Korrekturterm ergibt sich dann aus (6.94) und (6.95) zu

$$(6.96) \quad g_{\text{HLLEM}}(u_l, u_r) = g_{\text{HLL}}(u_l, u_r) - \frac{a_r a_l}{a_r - a_l} \beta_2(\bar{u}) r^2(\bar{u}) .$$

Das modifizierte HLL-Verfahren müßte somit ca. 20 % mehr Rechenzeit benötigen.

6.4 Verfahren zweiter Ordnung

Aufbauend auf den Ausführungen in Kapitel 3 für ein allgemeines System von Erhaltungsgleichungen, werden wir im folgenden eine Methode angeben, wie die Upwind-Verfahren erster Ordnung modifiziert werden können, so daß man die Konsistenzordnung Zwei erhält.

Im ersten Schritt berechnen wir in jedem Gitterintervall einen Vektor von Steigungen S_i^n . Diese Steigungen definieren uns die Randwerte

$$(6.97) \quad u_{i\pm}^n = u_i^n \pm \frac{\Delta m}{2} S_i^n$$

am rechten (+) und linken Rand (-) jedes Gitterintervalls. Aus den integralen Näherungswerten erhält man somit Näherungsfunktionen, welche innerhalb eines Gitterintervalls linear sind. Aus dieser Verteilung kann man dann die numerischen Flüsse mit höherer Genauigkeit berechnen. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten solche Steigungen zu berechnen. In (3.86) wurde eine solche Steigungsberechnung angegeben. Es bleibt dabei aber immer noch offen, auf welche Variablen eine solche Steigungsberechnung angewandt wird. Naheliegend ist

natürlich, die Erhaltungsgrößen V , v und E oder auch die primitiven Variablen V , v und p zu nehmen.

Die beste Übertragung der skalaren Theorie der Steigungsberechnung gelingt jedoch bei der Verwendung von charakteristischen Variablen. Dazu führt man eine lokale Linearisierung des nichtlinearen Systems durch. Die Steigungen werden dann berechnet aus den Differenzenquotienten der charakteristischen Variablen. Eine Rücktransformation liefert dann die Randwerte der Erhaltungsgrößen in den einzelnen Gitterzellen. Eine Beschreibung dieses Vorgehens wurde in Kapitel 3 ((3.88) - (3.90)) gegeben. Diese Methode benötigt jedoch etwas mehr Rechenzeit.

Bevor man die numerischen Flüsse zwischen den Gitterzellen mittels der Randwerte (6.97) berechnet, berücksichtigt man noch die zeitliche Änderung der linearen Verteilung durch die Strömung innerhalb eines halben Zeitschritts. Dies liefert die zweite Ordnung in der Zeit. Da die Näherungsfunktion innerhalb des Gitterintervalls stetig ist, kann man dies in einfacher Weise durch eine Taylorentwicklung approximieren und man erhält

$$(6.98) \quad u_{i\pm}^{n+1/2} = u_{i\pm}^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta m} \left(f(u_{i+}^n) - f(u_{i-}^n) \right) .$$

Berechnet man die Steigungen in den Variablen V , v und p , so kann man etwas Rechenzeit sparen, indem man die dritte Gleichung in (6.98) umformt. Nehmen wir an, die Zustandsgleichung ist die des idealen Gases, so läßt sich die Gleichung der Energieerhaltung (6.10) in der Form

$$(6.99) \quad \left(\frac{pV}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2 \right)_t + (vp)_m = 0$$

schreiben. Diese kann man nach p_t auflösen; ersetzt man weiter alle Zeitableitungen außer p_t mit Hilfe der übrigen Erhaltungsgleichungen (6.8) und (6.9), so ergibt sich eine einfache Gleichung für den Druck

$$(6.100) \quad p_t + \frac{\gamma p}{V} v_m = 0 ,$$

welche natürlich nicht mehr in Erhaltungsform geschrieben werden kann. Mit Hilfe dieser Gleichung berechnen wir nun die Randwerte $p_{i\pm}$ der linearen Verteilung des Drucks zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$.

Der gesamte Schritt (6.98) sieht dann folgendermaßen aus

$$(6.101) \quad V_{i\pm}^{n+1/2} = V_{i\pm}^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta m} (v_{i+}^n - v_{i-}^n) ,$$

$$(6.102) \quad v_{i\pm}^{n+1/2} = v_{i\pm}^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta m} (p_{i+}^n - p_{i-}^n) ,$$

$$(6.103) \quad p_{i\pm}^{n+1/2} = p_{i\pm}^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta m} \frac{\gamma p_i^n}{V_i^n} (v_{i+}^n - v_{i-}^n) .$$

Der Vorteil dabei ist, daß im ersten Schritt keinerlei andere Variable als spezifisches Volumen, Geschwindigkeit und Druck berechnet werden muß.

6.5 Bemerkungen und Ergebnisse für Testprobleme

Bei der Konstruktion der verschiedenen Godunov-Typ Verfahren gingen wir bisher immer von den Gleichungen in Lagrangekoordinaten, formuliert in der Erhaltungssform (6.8) bis (6.10), aus. Wir haben bei der Herleitung dieser Gleichungen gesehen, daß die Massenerhaltung (6.8) äquivalent ist zu der kinematischen Gleichung (6.12) $x_t = v$ für die Eulerkoordinate $x = x(m, t)$ und der Gleichung (6.7) $m_x = \rho(m, t)$. Für praktische Berechnungen empfiehlt sich, die Eulerkoordinate zusätzlich als abhängige Größe zu betrachten und im numerischen Verfahren mit zu berechnen. Die Diskretisierung von (6.7) liefert hierfür die Bestimmungsgleichung

$$(6.104) \quad x_{i+1/2}^{n+1} = x_{i-1/2}^{n+1} + \Delta m V_i^{n+1} .$$

Treten in den praktischen Berechnungen ortsabhängige Quellterme auf oder betrachtet man Probleme in Zylinder- oder Kugelkoordinaten, welche sich durch Ausnutzen von Symmetrien auf eindimensionale Probleme reduzieren lassen, so muß die Ortskoordinate x zwingend mitberechnet werden.

Eine andere Möglichkeit der Konstruktion von Näherungsverfahren bietet aber die Äquivalenz der Massenerhaltung mit (6.12) und (6.7). So kann die diskrete Gleichung der Massenerhaltung durch die diskretisierten Gleichungen (6.12) und (6.7) ersetzt werden. Da die kinematische Gleichung (6.12) im Grunde eine gewöhnliche Differentialgleichung ist, erscheint dieser Weg etwas einfacher und

wurde deshalb bei der Konstruktion von Verfahren oft genutzt. Diskretisiert man (6.12) z.B. nach den Vorschlägen von Richtmyer und Morton [56], so erhält man

$$(6.105) \quad x_{i+1/2}^{n+1} = x_{i+1/2}^n + \Delta t v_{i+1/2}^n \quad .$$

Dabei ist $v_{i+1/2}$ die Geschwindigkeit des Randes der Gitterzelle. Die diskretisierte Impulserhaltung (6.9) liefert zunächst nur die mittleren Geschwindigkeiten in einer Gitterzelle. Man könnte sich vorstellen, daß eine geeignete Geschwindigkeit am Rande der Gitterzelle sich gerade ergibt aus dem arithmetischen Mittelwert

$$(6.106) \quad v_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (v_i^n + v_{i+1}^n) \quad .$$

Dieser wird dann in (6.105) eingesetzt.

Im numerischen Algorithmus löst man somit Impuls- und Energieerhaltung und berechnet daraus die Geschwindigkeiten an den Rändern der Gitterzonen z.B. mittels (6.106). Gleichung (6.105) liefert dann die Eulerkoordinaten der Gitterränder. Das spezifische Volumen ergibt sich aus der diskreten Form von (6.7), d.h. aus (6.104), zu

$$(6.107) \quad v_i^{n+1} = \frac{x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta m} \quad .$$

Damit sind alle Größen bestimmt.

Es zeigt sich an den Ergebnissen von Testproblemen, daß die einfache Berechnung der Geschwindigkeiten nach (6.106) an starken Gradienten Oszillationen hervorrufen. Dies ist natürlich nicht so sehr verwunderlich, da dieser Mittelwert die Richtungen der Wellenausbreitung nicht berücksichtigt. Wir müssen somit (6.106) in geeigneter Weise ersetzen. Wenden wir auf die Impuls- und Energiegleichung ein Godunov-Typ Verfahren an, so sollte man natürlich die Geschwindigkeiten an den Zellrändern konsistent mit dem näherungsweise Riemannlöser machen, d.h. wir wählen den Wert $v_{i+1/2}$ gerade so, daß er mit der Geschwindigkeit aus der Riemannlösung $w((m - m_{i+1/2})/\Delta t; u_i, u_{i+1})$ am Punkt $m = m_{i+1/2}$ übereinstimmt. Bezeichnet w_2 die zweite Komponente des Vektors der Riemannlösung, so gilt somit

$$(6.108) \quad v_{i+1/2}^n = w_2(0; u_i^n, u_{i+1}^n) \quad .$$

Wir setzen dies in (6.105) ein und erhalten

$$x_{i+1/2}^{n+1} = x_{i+1/2}^n + \Delta t w_2(0; u_i^n, u_{i+1}^n)$$

und weiter aus (6.107)

$$(6.109) \quad v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m} \left(w_2(0; u_i^n, u_{i+1}^n) - w_2(0; u_{i-1}^n, u_i^n) \right) .$$

Daran zeigt sich sofort, daß das zugehörige Verfahren in Erhaltungsform geschrieben werden kann.

Diese Aussage gilt auch für den arithmetischen Mittelwert (6.106), aber zusätzlich gilt für die Wahl (6.108):

Satz 2: Wird bei den Verfahren von Godunov oder dem Godunov-Typ Verfahren von Roe die Massenerhaltung ersetzt durch die kinematische Gleichung (6.105) und (6.107), so ändert sich das Verfahren nicht, falls die Geschwindigkeit an den Gitterändern konsistent mit der Riemannlösung nach (6.108) gewählt wird.

Beweis: Für das Godunov-Verfahren ist diese Aussage trivial, da der Fluß des Godunov-Verfahrens gerade die Darstellung

$$(6.110) \quad g_{\text{GOD}}(u_i, u_{i+1}) = f\left(w(0; u_i, u_{i+1})\right)$$

mit der exakten Riemannlösung w besitzt. Daraus ergibt sich sofort (6.109) und damit die Äquivalenz beider Approximationen.

Bei den Verfahren von Roe muß man etwas länger umformen. Nach (6.62) lautet der Fluß für die diskretisierte Massenerhaltung

$$(6.111) \quad g_{\text{ROE}}^1(u_i, u_{i+1}) = -\frac{1}{2} \left(v_i + v_{i+1} + \bar{C} (\beta_1 + \beta_3) \right)$$

mit β_1 und β_3 aus (6.61). Nach (6.59) und (6.60) gilt für das Roe-Verfahren

$$(6.112) \quad w_2(0; u_i, u_{i+1}) = v_i + \beta_1 r_2^1 = v_{i+1} - \beta_3 r_2^3 ,$$

wobei r^1 und r^3 jeweils die zweite Komponente des ersten bzw. dritten Rechtseigenvektors der Roe-Matrix bedeutet. Setzt man die Größe nach (6.20) ein, so läßt sich $w_2(0; u_i, u_{i+1})$ angeben in der Form

$$(6.113) \quad w_2(0; u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} \left(v_i + v_{i+1} + \bar{C} (\beta_1 + \beta_3) \right) ,$$

d.h. (6.109) ist identisch zu der diskreten Massenerhaltung mit dem numerischen Fluß (6.111).

Diese Aussage gilt im allgemeinen nicht mehr für das HLL-Verfahren. Es zeigte sich aber in unseren Testrechnungen, daß bei der oben beschriebenen Vorgehensweise die Unterschiede in den Resultaten auch beim HLL-Verfahren sehr gering sind.

Im folgenden zeigen wir Ergebnisse der hier vorgestellten HLL-Verfahren und diskutieren die Auswirkungen der verschiedenen Modifikationen. Testprobleme sind Riemannprobleme für die Erhaltungsgleichung in Lagrangekoordinaten mit der Zustandsgleichung des idealen Gases. Diese Anfangswertprobleme sind deshalb als Testprobleme günstig und werden auch häufig dafür eingesetzt, da hier die Berechnung der exakten Lösung möglich ist.

Die **Lösung des Riemannproblems** der Gleichungen in Lagrangekoordinaten ist recht ähnlich zur Lösung für die Eulergleichungen. Es ist sogar so, daß der wesentliche Teil, der aus einer Fixpunktgleichung besteht, identisch ist. Die Lösung des Riemannproblems für die Eulergleichungen ist in mehreren Arbeiten skizziert, z.B. von Sod in [67]. Ausführliche Darstellungen sind in den Büchern von Chorin und Marsden [6] und Smoller [66] enthalten. Es ist nicht weiter schwierig, diese Ableitung einer Lösung auf die Gleichungen in Lagrangekoordinaten zu übertragen. Da dem Verfasser jedoch keine Arbeit bekannt ist, die dies explizit beschreibt, sei die Lösung des Riemannproblems für die Gleichungen in Lagrangekoordinaten hier zumindest kurz skizziert.

Die Lösung des Riemannproblems besteht nach den Ausführungen in Kapitel 2 aus vier konstanten Zuständen, getrennt durch einfache Wellen d.h. Stoßwellen, Verdünnungswellen und eine Kontaktunstetigkeit. Wir wollen zunächst die verschiedenen Beziehungen an diesen Wellen zusammenfassen.

An einer **Stoßwelle** sind der rechte und linke Zustand des Sprunges verknüpft über die Rankine-Hugoniot Bedingungen (2.6)

$$(6.114) \quad s = - \frac{v_l - v_r}{V_l - V_r} ,$$

$$s = \frac{p_l - p_r}{v_l - v_r} ,$$

$$s = \frac{v_l p_l - v_r p_r}{E_l - E_r} .$$

Dabei bezeichnet s die Stoßwellengeschwindigkeit.

Die Lösung in einer **Verdünnungswelle** ist stetig. Da die Lösung des Riemannproblems selbstähnlich ist, d.h. nur von $\zeta = m/t$ abhängt, führt man ζ als neue Variable ein und erhält aus den Erhaltungsgleichungen die Beziehungen

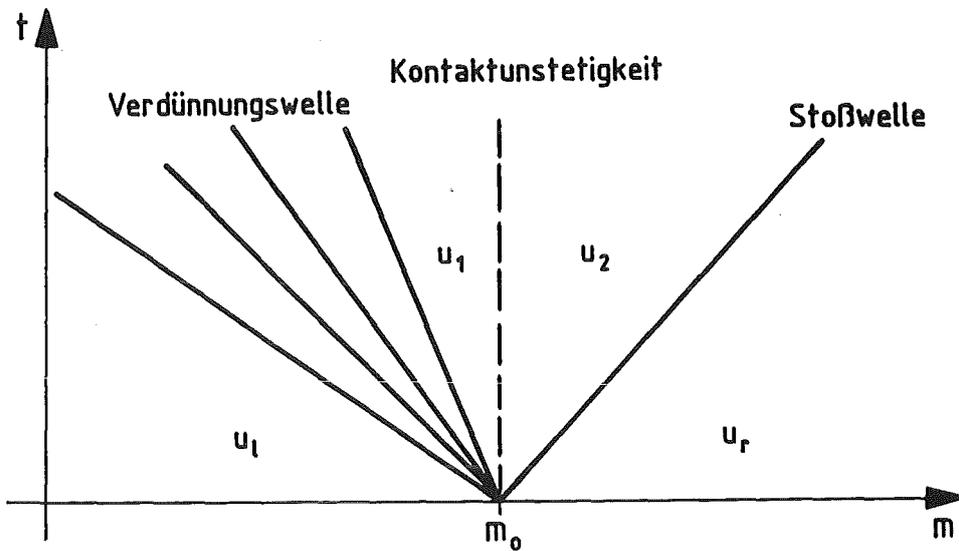
$$(6.115) \quad \zeta^2 = p_p - p_v = C^2 ,$$

$$(6.116) \quad \frac{dv}{dV} = -\zeta ,$$

$$(6.117) \quad \frac{de}{dv} = \frac{p}{\zeta} ,$$

die in einer Verdünnungswelle erfüllt sein müssen. Weiter sind in einer nach links laufenden Verdünnungswelle die Riemanninvarianten $v + 2 VC/(\gamma - 1)$ und die Entropie S konstant, in einer nach rechts laufenden ist $v - 2 VC/(\gamma - 1)$ und die Entropie S konstant.

Ein Diagramm einer möglichen Lösung haben wir in Figur 6.4 aufgezeichnet. Hier trennt eine Stoßwelle den rechten Zustand u_r von dem mittleren Zustand u_2 und eine Verdünnungswelle den linken Zustand u_l von dem mittleren Zustand u_1 . Die beiden mittleren Zustände sind dadurch ausgezeichnet, daß sie durch eine Kontaktunstetigkeit bei $m = m_0$ verbunden sind und damit dort die Dichte einen Sprung macht, jedoch Druck und Geschwindigkeit stetig sind (d.h. $v_1 = v_2 =: v_*$, $p_1 = p_2 =: p_*$).



Figur 6.4 (m, t)-Diagramm der Lösung eines Riemannproblems

Zur Lösung eines Riemannproblems muß man nun den linken und rechten Zustand durch solche geeignete einfache Wellen (Verdünnungswellen, Stoßwellen und Kontaktunstetigkeit) verbinden. Wie im Falle der Eulergleichungen (siehe [66], [67]) läßt sich dieses Problem reduzieren auf die Lösung einer Fixpunktgleichung für den Druck p_* des mittleren Zustandes. Die Fixpunktgleichung ist sogar identisch mit der im "Euler-Fall", da die Werte des Druckes in beiden Darstellungen übereinstimmen. Die Fixpunktgleichung lautet

$$(6.118) \quad p_* = \frac{(v_1 - v_r) M_1 M_r + p_r M_r + p_l M_l}{M_1 + M_r}$$

mit

$$(6.119) \quad M_1 := \sqrt{\frac{p_1}{V_1}} \Phi\left(\frac{p_*}{p_1}\right) = -\frac{p_1 + p_*}{v_1 - v_*}$$

$$(6.120) \quad M_r := \sqrt{\frac{p_r}{V_r}} \Phi\left(\frac{p_*}{p_r}\right) = -\frac{p_r + p_*}{v_r - v_*}$$

Ist $p_* > p_l$, so läuft nach links eine Stoßwelle, andernfalls eine Verdünnungswelle. Analog ergibt sich der Typ der Welle nach rechts abhängig von $p_* > p_r$. Die Funktion Φ ist gerade die Umschaltfunktion zwischen der Lösung mit einer Stoßwelle und der mit einer Verdünnungswelle und lautet

$$(6.121) \quad \Phi(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1 + (\gamma + 1)\omega)} , & \omega \geq 1 \quad (\text{Stoßwelle}) , \\ \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{1 - \omega}{1 - \omega^\beta} , & 1 > \omega \geq 0 \quad (\text{Verdünnungswelle}) , \end{cases}$$

mit $\beta = (\gamma - 1)/2\gamma$.

Die Gleichung (6.118) besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $p_* \in (0, \infty)$, wenn die Ungleichung

$$(6.122) \quad v_l - v_r + \frac{2}{\gamma - 1} (C_l V_l + C_r V_r) \geq 0$$

erfüllt ist. Falls (6.122) nicht erfüllt ist, tritt ein Gebiet mit Vakuum in der Lösung des Riemannproblems auf.

Aus p_* lassen sich sukzessive alle anderen Größen berechnen. So ergibt sich etwa v_* aus (6.119) oder (6.120). Gilt $p_*/p_l \geq 1$, so wird der linke Zustand mit dem ersten mittleren Zustand durch eine Stoßwelle verbunden. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen (6.114) liefern dann Stoßwellengeschwindigkeit und den Wert von V_1 . Gilt $0 \leq p_*/p_l < 1$, so läuft nach links eine Verdünnungswelle. Grenzen und Lösung innerhalb der Verdünnungswelle folgen aus der Stetigkeit der Lösung, den Gleichungen (6.115) - (6.117) und der Konstanz der Riemanninvarianten (siehe z.B. [66] für die Eulergleichungen).

Das erste Testproblem ist ein **Riemannproblem**, welches von Sod [67] für den Test verschiedener numerischer Verfahren benutzt wurde. Es wird daher üblicherweise Sod-Problem genannt. Es handelt sich dabei um ein sogenanntes Stoßwellenrohrproblem, bei dem die Geschwindigkeiten des rechten und linken Zustandes Null sind. Die Anfangswerte zum Sod-Problem sind

$$(6.123) \quad (\rho, v, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0) & \text{für } m < m_0 , \\ (0.125, 0.0, 0.1) & \text{für } m > m_0 . \end{cases}$$

Die Lösung des Cauchyproblems für die Gleichungen (6.8) - (6.10) besteht aus vier konstanten Zuständen, welche durch eine Stoßwelle, eine Verdünnungswelle und eine Kontaktunstetigkeit getrennt werden. Die Stoßwelle läuft nach rechts, die Verdünnungswelle nach links. Die beiden mittleren Zustände sind getrennt durch eine Kontaktunstetigkeit, deren Ausbreitungskurve im Lagrangeschen Fall mit der Geraden $m = m_0$ zusammenfällt. Ein (m, t) -Diagramm dieser Lösung zeigt gerade Figur 6.4. Die entsprechenden Werte der konstanten Zustände sind in der Tabelle 6.1 zusammengestellt.

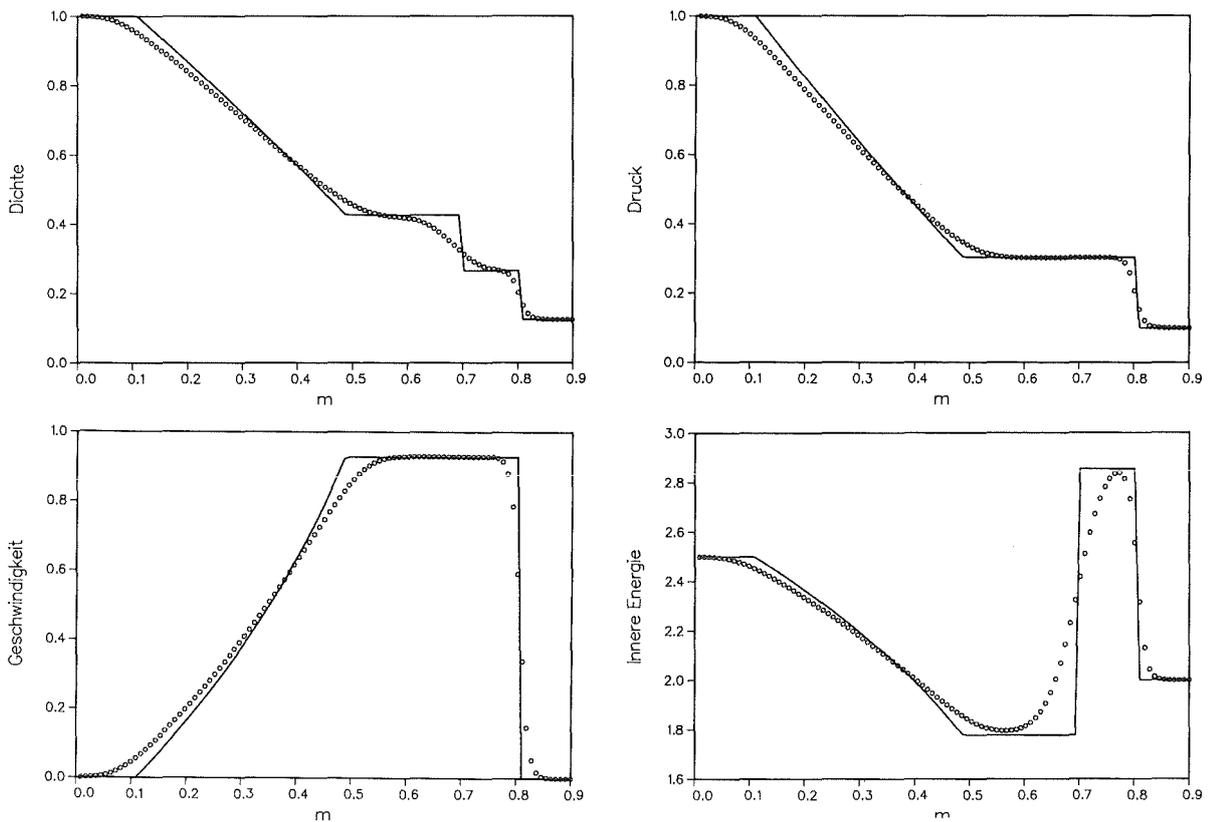
	links	Mitte 1	Mitte 2	rechts
ρ	1.0	0.426	0.265	0.125
v	0.0	0.927	0.927	0.0
p	1.0	0.303	0.303	0.1

Tabelle 6.1 Werte der konstanten Zustände beim Sod Problem

In Figur 6.5 haben wir die numerischen Resultate des HLL-Verfahrens erster Ordnung zusammen mit der exakten Lösung zum Zeitpunkt $t = 0,5$ dargestellt. Bei diesen Rechnungen wurde das Massenintervall $[0.0, 0.9]$ äquidistant in 100 Gitterzellen unterteilt. Der Sprung der Anfangswerte war bei $m_0 = 0,7$. Die Zeitschrittweite wurde adaptiv in jedem Zeitschritt nach der Formel

$$(6.124) \quad \Delta t = \sigma \frac{\Delta m}{\max C}$$

mit $\sigma = 0,8$ gewählt, so daß die CFL-Bedingung erfüllt sein sollte. Die einhundert Näherungswerte wurden als Kreise (ooo) gezeichnet, die exakte Lösung als Linie (—). Wie erwartet besitzt dieses Upwind-Verfahren erster Ordnung eine starke numerische Dämpfung. Die Stoßwelle wird hier über 7 - 8 Punkte verschmiert, die Kontaktunstetigkeit über weit mehr. Die Dämpfung der Kontaktunstetigkeit nimmt dabei mit der Zeit noch zu, wogegen die Dämpfung der Stoßwelle konstant bleibt. Dies liegt daran, daß in die Stoßwelle Charakteristiken hineinlaufen und ein konstanter Fluß entlang der Stoßwelle auftritt, wogegen die Kontaktunstetigkeit wie eine lineare Unstetigkeit gedämpft wird. An den Unstetigkeiten treten keinerlei Oszillationen auf. Die Signalgeschwindigkeiten wurden hier berechnet nach den Formeln (6.73). Für dieses Verfahren erster Ordnung ist die numerische Dissipation so groß, daß es zur Anwendung auf praktische Probleme ungeeignet ist.



Figur 6.5 HLL-Verfahren

Zur Reduzierung dieser numerischen Dämpfung führen wir die zweiter Ordnung Terme nach dem MUSCL-Verfahren ein. Dabei berechnen wir die Steigungen zunächst in primitiven Variablen V , v und p . Für den ersten Transportschritt um $\Delta t/2$ innerhalb der Gitterzellen benutzen wir (6.101) - (6.103). Ansonsten sind alle Diskretisierungsparameter gleich. Als Formel für die Steigungsberechnung benutzen wir einen Vorschlag, welcher von Sweby im Zusammenhang mit Flußlimiter-Verfahren gemacht wurde (siehe [50]). Der Vorteil dieser Steigungsberechnung ist, daß sie stärker oder schwächer - abhängig von einem Parameter - gewählt werden kann. Man kann somit in einfacher Weise sehen, bis zu welchem Wert dieses Parameters das numerische Verfahren stabil bleibt. Sie lautet

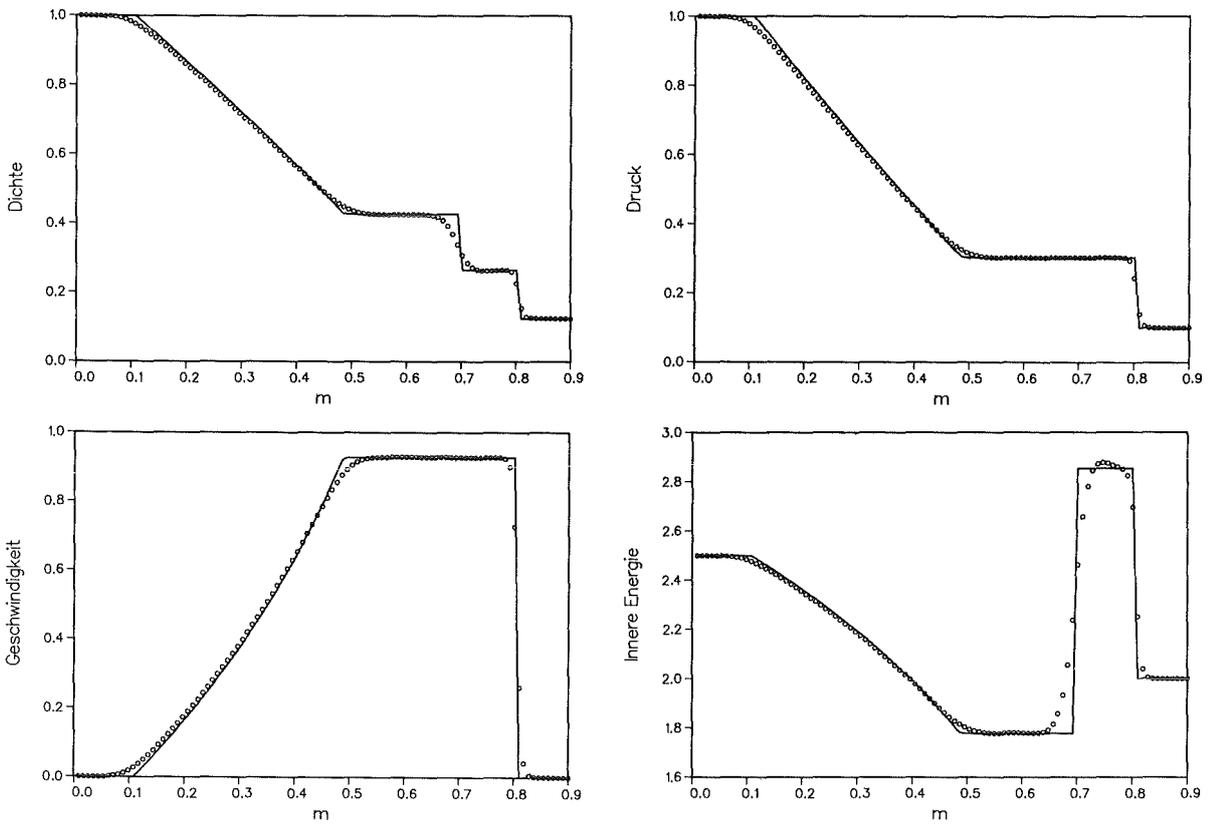
$$(6.125) \quad s_k(a, b) = \text{sign}(a) \max \{ |\min\text{mod}(ka, b)|, |\min\text{mod}(a, kb)| \}$$

mit $1 \leq k \leq 2$. Dabei ist die minmod -Funktion definiert in (3.87); a und b stehen jeweils für den rechtsseitigen und linksseitigen Differenzenquotienten der zur Steigungsberechnung benutzten Variablen V , v und p . Für $k = 1$ reduziert sich die Berechnung (6.125) auf die einfache minmod -Funktion, d.h. auf Formel (3.86). Der Wert $k = 2$ steht für die obere Grenze, bei dem noch ein stabiles (bezüglich

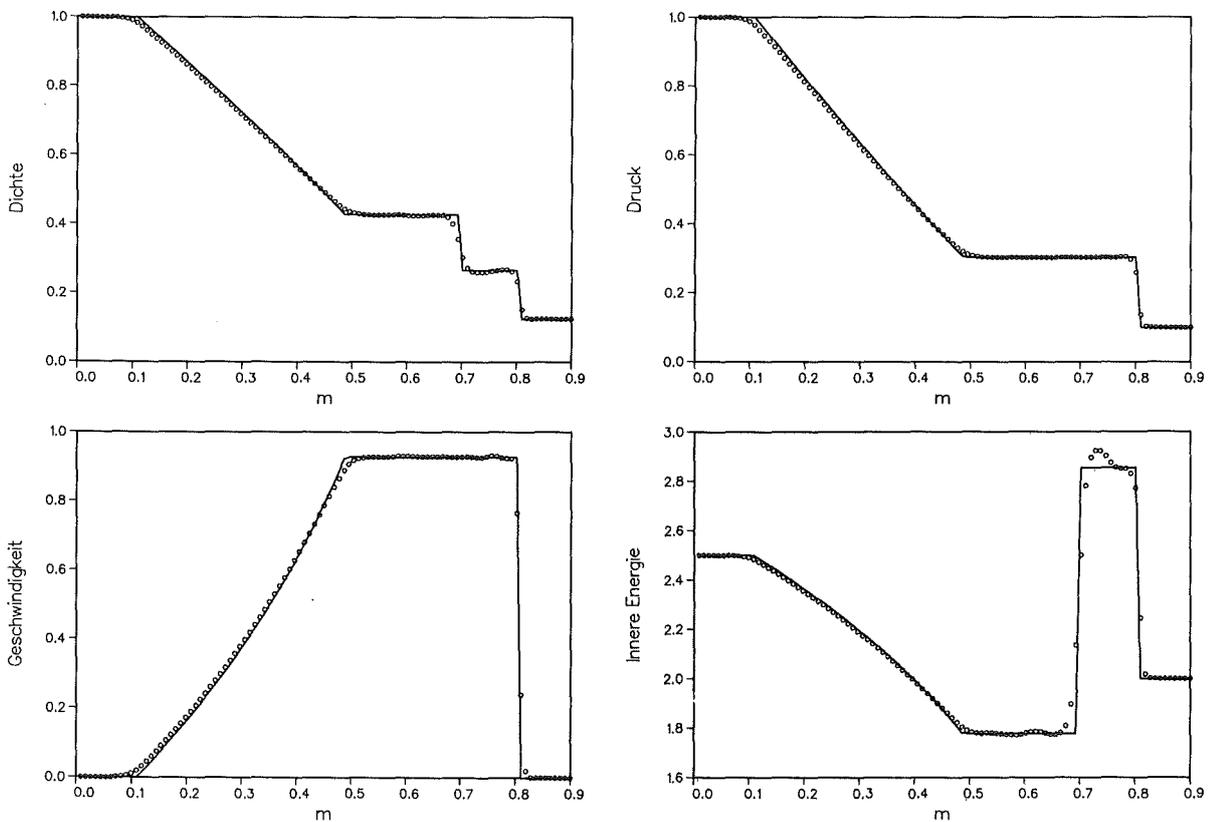
der Totalvariation) Verfahren für eine lineare Advektionsgleichung vorliegt. Im hier betrachteten nichtlinearen Fall kann $k = 2$ zu Oszillationen an starken Gradienten führen (siehe [50], [51]).

Figur 6.6 zeigt die Ergebnisse ($t = 0,5$) eines Verfahrens zweiter Ordnung, wobei die **Steigungen in den primitiven Variablen V , v und p** nach der Formel (6.125) berechnet wurden mit $k_V = k_v = k_p = 1.0$. Man sieht hier schon, daß die numerische Dämpfung drastisch reduziert ist. Die Stoßwelle ist nun über 4 Punkte hinweg approximiert, die Kontaktunstetigkeit ist jetzt als solche zu erkennen und auch die Verdünnungswelle ist deutlich besser approximiert. Die Güte der Approximation wird besser, falls die Werte für k noch etwas erhöht werden. Jedoch kann man diese Werte nicht auf Zwei setzen, ohne daß starke Oszillationen an den Unstetigkeiten auftreten. Als optimalen Wert ermittelten wir etwa Werte um 1,4. Figur 6.7 zeigt die numerischen Ergebnisse für diesen Wert. Die Auflösung der Stoßwelle ist dabei recht ähnlich, deutlich besser ist die der Kontaktunstetigkeit, die Verdünnungswelle ist etwas weniger verschmiert. Jedoch treten sowohl an der Stoßwelle als auch an der Kontaktunstetigkeit schon leichte Oszillationen auf. Besonders deutlich wird dies an den Ergebnissen für die innere Energie.

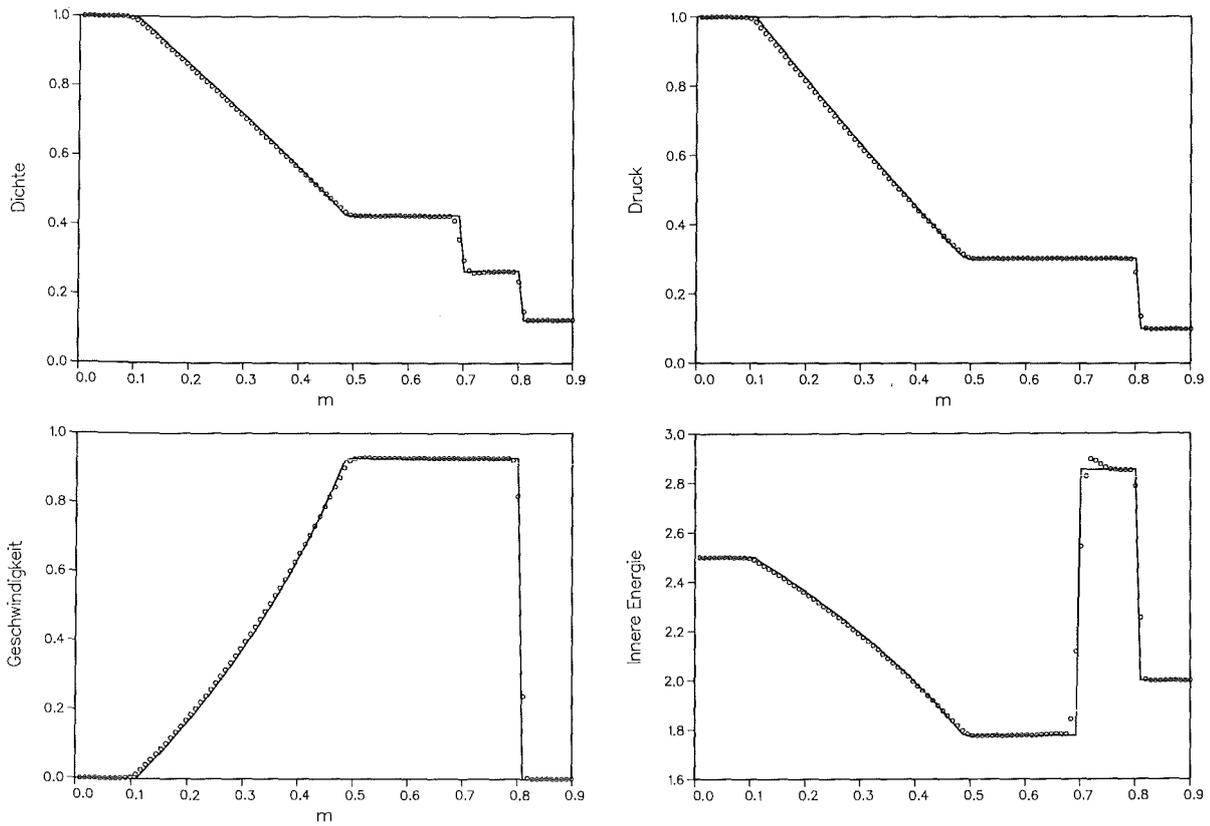
Figur 6.8 zeigt nun das MUSCL-Typ Verfahren mit der **charakteristischen Steigungsberechnung** wie wir dies in (3.88) - (3.90) ausgeführt haben. Bei dieser Steigungsberechnung ist es möglich, den maximalen Wert $k = 2$ in (6.125) auf allen charakteristischen Feldern zu benutzen. Man sieht lediglich vor der Verdünnungswelle ein leichtes "Unterschießen" der numerischen Lösung. Deutlich wird es an den Ergebnissen für die Dichte und etwas verstärkt an denen für die innere Energie. Treten stärkere Stoßwellen auf, so liefert jedoch auch die charakteristische Steigungsberechnung mit diesen Werten für k Oszillationen an den Stoßwellen. Das heißt, es ist für eine allgemeine Anwendung sinnvoll, die Werte in den nichtlinearen charakteristischen Feldern zu reduzieren. Figur 6.9 zeigt Ergebnisse, für die wir diese Werte auf 1.6 reduziert haben. Es zeigt sich, daß sich die Approximation der Stoßwelle nach rechts und der Verdünnungswelle nach links kaum ändert. Den Wert für k auf dem linearen charakteristischen Feld ließen wir dabei bei Zwei. Da dieser maximale Wert sich gerade aus Überlegungen für eine lineare Gleichung ergibt, erwartet man im linearen Feld keinerlei Probleme. Zusätzlich haben wir die Modifikation (6.96) des HLL-Verfahrens hier benutzt, welches eine bessere Approximation von Kontaktunstetigkeiten liefert. Die Approximation der Kontaktunstetigkeit wird dadurch noch weiter verbessert. Dies zeigt der Vergleich mit den Ergebnissen in Figur 6.8.



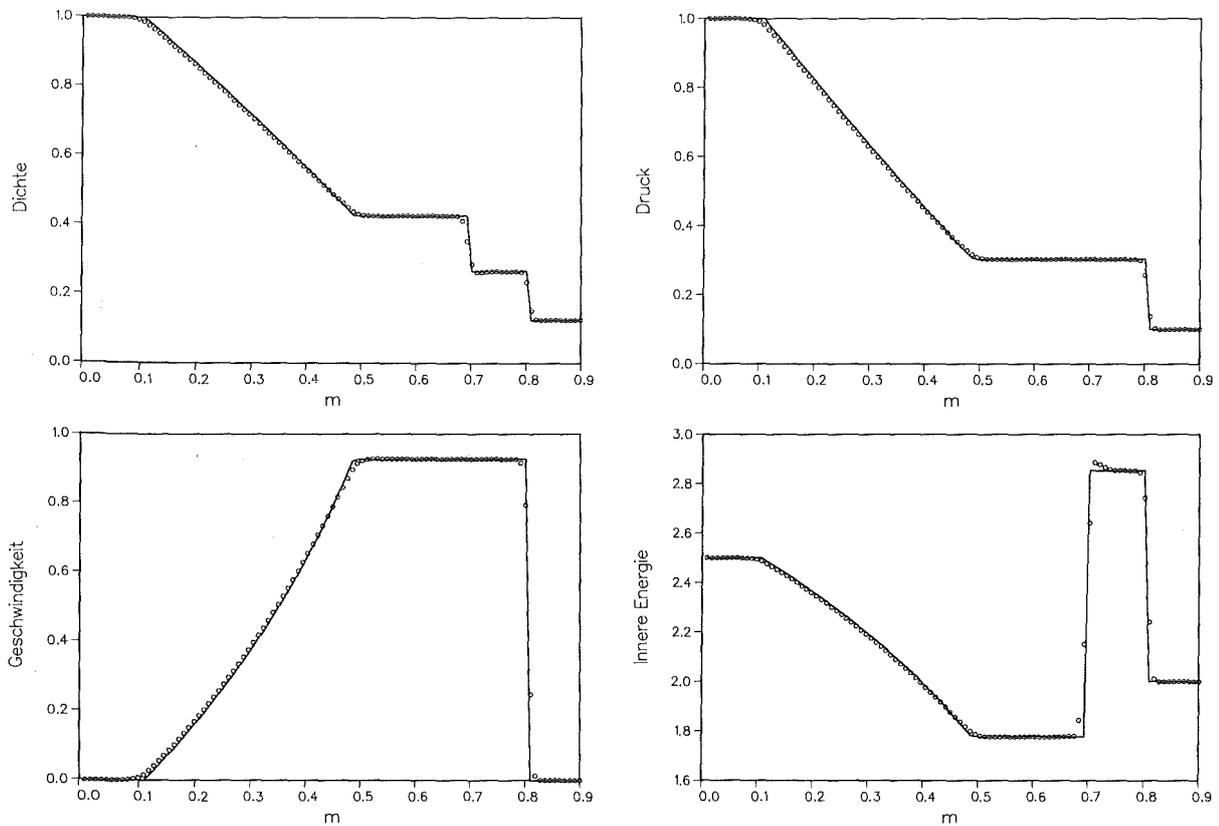
Figur 6.6 HLL-Verfahren 2.-ter Ordnung, $k_V = k_v = k_p = 1.0$



Figur 6.7 HLL-Verfahren 2.-ter Ordnung, $k_V = k_v = k_p = 1.4$



Figur 6.8 HLL-Verfahren 2.-ter Ordnung, $k_1 = k_2 = k_3 = 2.0$



Figur 6.9 HLLEM-Verfahren 2.-ter Ordnung, $k_1 = k_3 = 1.6, k_2 = 2.0$

Ein zweites klassisches Testbeispiel für numerische Verfahren der Gasdynamik ist das **Riemannproblem von Lax** ([36]). Die Anfangswerte dieses Problems sind

$$(6.126) \quad (\rho, v, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528) & \text{für } m < m_0 \text{ ,} \\ (0.5, 0.0, 0.57) & \text{für } m > m_0 \text{ .} \end{cases}$$

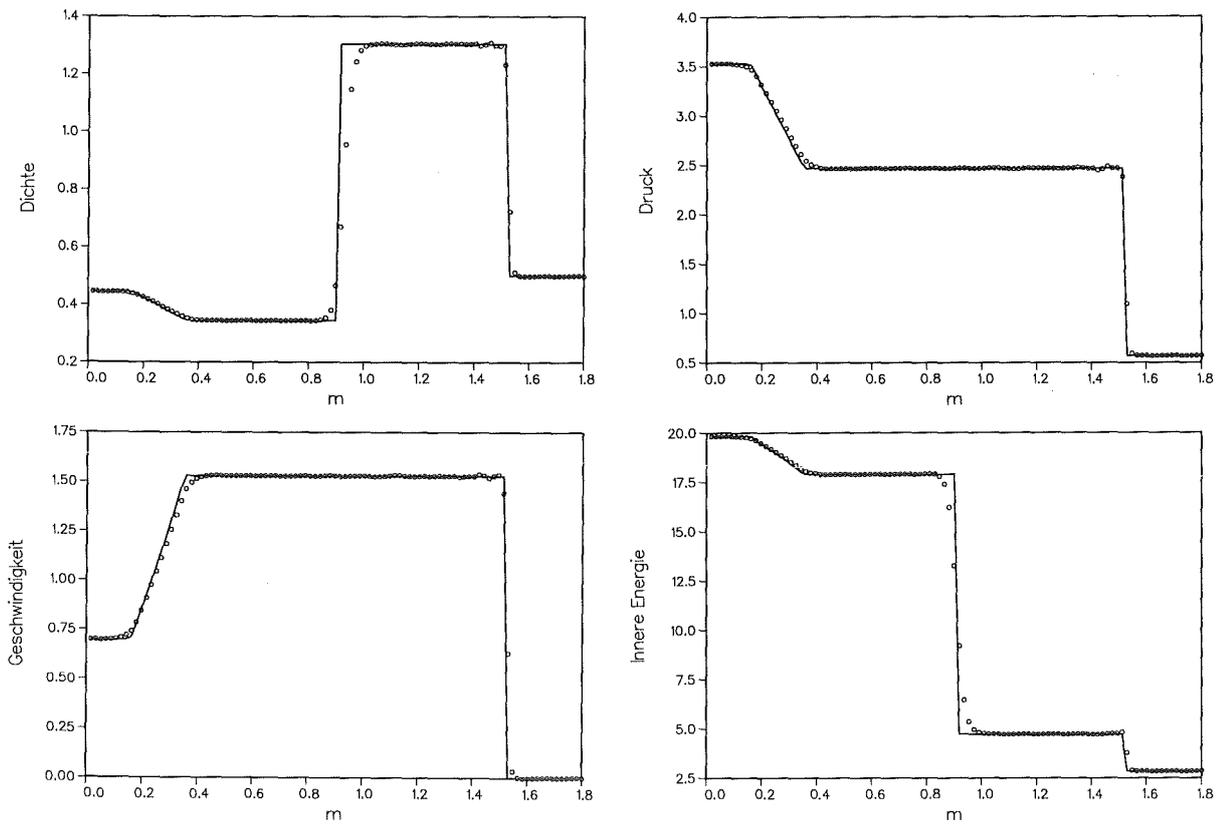
Die Struktur der Lösung ist recht ähnlich zu der vom Problem von Sod. Der wesentliche Unterschied ist, daß die Geschwindigkeit auf der linken Seite ungleich Null ist. Ansonsten läuft eine Stoßwelle in den rechten ungestörten Zustand; eine Verdünnungswelle läuft nach links. Die mittleren Zustände sind durch eine Kontaktunstetigkeit getrennt. Die Werte der konstanten Zustände sind in Tabelle 6.2 festgehalten.

	links	Mitte 1	Mitte 2	rechts
ρ	0.445	0.345	1.304	0.5
v	0.698	1.529	1.529	0.0
p	3.528	2.466	2.466	0.571

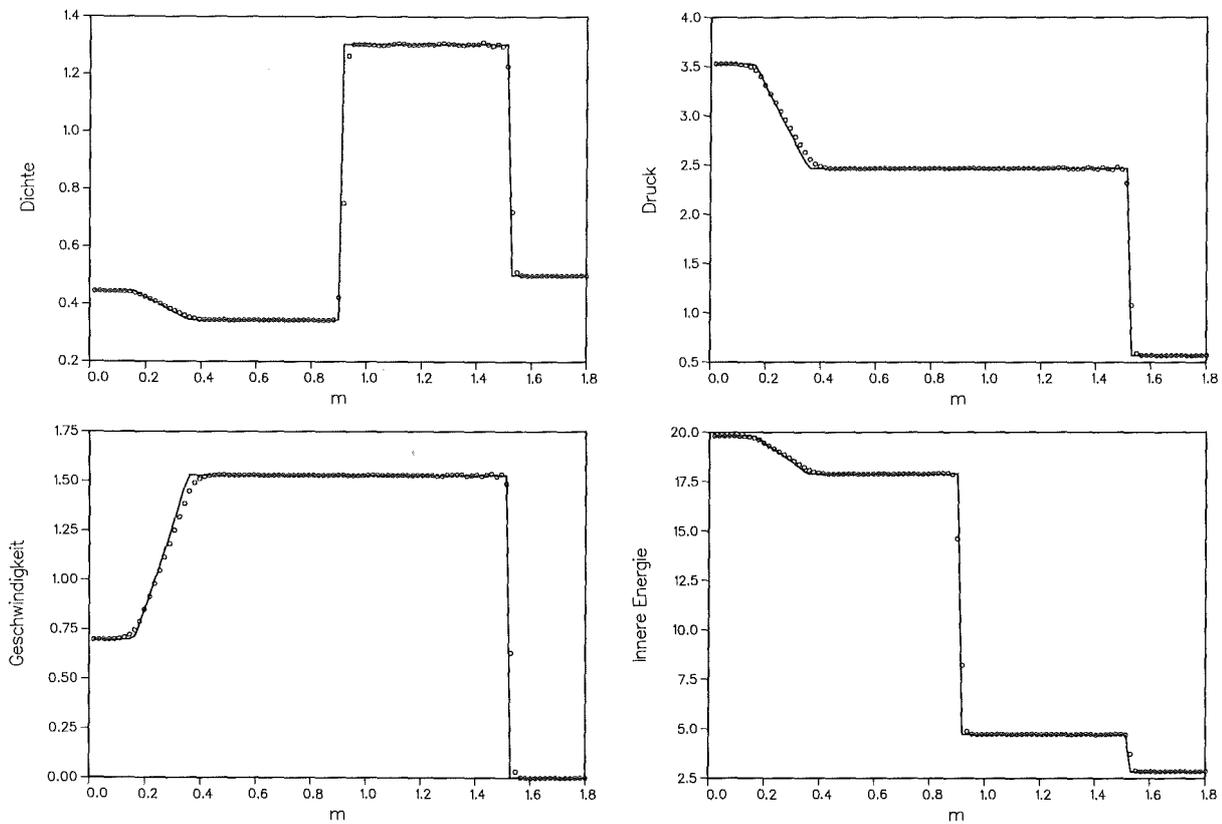
Tabelle 6.2 Werte der konstanten Zustände beim Lax Problem

Die Bilder 6.10 und 6.11 zeigen für dieses Problem die numerischen Ergebnisse (ooo) zusammen mit der exakten Lösung (—) ($t = 0,5$). Dabei benutzen wir beim ersten Bild die Steigungsberechnung in den primitiven Variablen mit $k_v = k_v = k_p = 1,4$. Es zeigen sich dabei leichte Oszillationen hinter der Stoßwelle. Diese leichten Oszillationen verschwinden auch nicht bei der charakteristischen Steigungsberechnung mit dem gleichen Wert $k = 1,4$ auf den nichtlinearen charakteristischen Feldern eins und drei und $k = 2,0$ auf dem linear entarteten Feld 2. Man sieht dies deutlich an einer besseren Approximation der Kontaktunstetigkeit. In beiden Rechnungen haben wir dabei die Modifikation (6.96) eingeschaltet.

Sowohl beim Riemannproblem von Sod, als auch bei dem von Lax treten Stoßwellen nur von mittlerer Stärke auf (Stoßmachzahl 1,4 und 2,0). Für diese Probleme läßt sich auch das Verfahren von Roe ohne Schwierigkeiten ausführen. Nach den Resultaten in Abschnitt 2 ergeben sich allerdings damit Schwierigkeiten, falls die Stoßwellen stärker werden, d.h. die Kompression der Materie zunimmt. Im Rahmen eines HLL-Verfahrens haben wir eine Korrektur der Roe-Signalgeschwindigkeiten in Kapitel 6.3 eingeführt, die diese Schwierigkeiten verhindern sollte. In



Figur 6.10 HLLEM-Verfahren 2.-ter Ordnung, $k_v = k_p = 1.4$



Figur 6.11 HLLEM-Verfahren 2.-ter Ordnung, $k_1 = k_3 = 1.4, k_2 = 2.0$

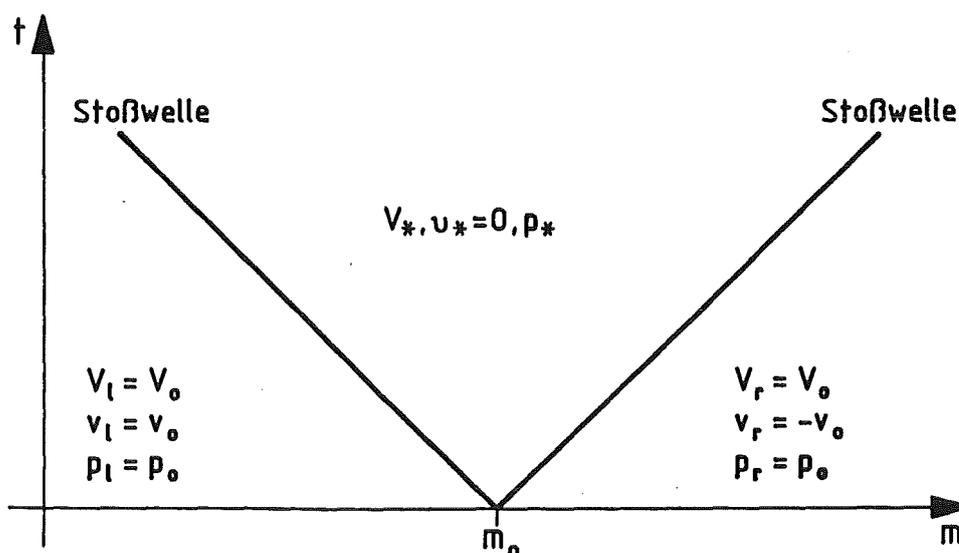
den Resultaten für beide Probleme haben wir diese Korrektur bislang nicht berücksichtigt. Wir werden uns im folgenden Abschnitt speziell den Problemen widmen, in denen starke Kompression auftritt und die Auswirkungen des Korrekturterms genau untersuchen. Es zeigt sich, daß bei Hinzunahme des Korrekturterms sich die Ergebnisse für das Sod-Problem kaum ändern und beim Lax-Problem die Oszillationen noch etwas reduziert sind.

6.6 Starke Kompression und automatische Zeitschrittweitensteuerung

Als Testbeispiel, um insbesondere die optimale Wahl der Konstante η_0 in der Korrektur der Signalgeschwindigkeit zu untersuchen, betrachten wir die starke Kompression von Materie, wie sie im Problem (6.63) auftritt. Wir geben dabei Anfangswerte der Form

$$(6.127) \quad (V, v, p) = \begin{cases} (V_0, v_0, p_0) & \text{für } m < m_0, \\ (V_0, -v_0, p_0) & \text{für } m > m_0 \end{cases}$$

mit $v_0 > 0$ vor. Die exakte Lösung ist symmetrisch zur Geraden $m = m_0$ und besteht aus zwei Stoßwellen, die einen mittleren Zustand vom rechten und linken Zustand trennen. Ein (m, t) -Diagramm der Lösung haben wir in Figur 6.12 skizziert. Es gilt insbesondere $v_* = 0$.



Figur 6.12 (m, t) -Diagramm der Lösung des Riemannproblems (6.14), (6.127)

Wir wollen für diesen Fall ableiten, wie die Konstante η_0 in dem Korrekturterm (6.82) optimal gewählt werden kann. Dazu betrachten wir die Lösung dieses Riemannproblems, wie sie durch die Fixpunktgleichung (6.118) und die Beziehungen (6.119) - (6.121) gegeben ist. Aus Symmetriegründen folgt zunächst, daß für die Geschwindigkeit im mittleren Zustand $v_* = 0$ gilt. Für den hier betrachteten Fall $v_0 > 0$ folgt weiter $w := p_*/p_0 > 1$ und die Gleichungen (6.118) - (6.121) lassen sich zusammenfassen in eine Gleichung für w :

$$(6.128) \quad w = 1 + \delta^2 \sqrt{1 + \delta^2 \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2} + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \delta^2$$

mit $\delta := v_0/c_0$, wobei c_0 die Eulersche Schallgeschwindigkeit ist ($c_0^2 = \gamma p_0 V_0$).

Aus den ersten beiden Beziehungen der Rankine-Hugoniot Bedingungen (6.114) kann man eine Formel für die Stoßwellengeschwindigkeit in der Form

$$\frac{s^2}{c_0^2} = \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)w}{2\gamma}$$

ableiten. Durch Einsetzen von (6.128) ergibt sich weiter

$$(6.129) \quad \frac{s^2}{c_0^2} = 1 + \frac{\gamma + 1}{2} \delta \left(\frac{\gamma + 1}{4} \delta + \sqrt{1 + \delta^2 \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2} \right)$$

Diese Formel gibt uns nun Aufschluß über das Verhältnis der exakten Stoßwellengeschwindigkeit und der Approximation durch den Roe-Mittelwert, welcher hier gerade den Wert c_0 annimmt. Wir sehen an (6.129), daß der Roe-Mittelwert die Stoßwellengeschwindigkeit unterschätzt, sobald nur $\delta > 0$ ist und diese Diskrepanz mit δ anwächst. Insofern ist es nicht sehr verwunderlich, daß das Roe-Verfahren bei starker Kompression Schwierigkeiten hat.

Wir nehmen an, eine solche starke Kompression liegt vor und δ ist sehr viel größer als Eins, dann ist die Eins im Vergleich zu dem δ^2 -Term unter der Wurzel in (6.129) vernachlässigbar. Wir erhalten somit asymptotisch für große δ

$$\left(\frac{s}{c_0} \right)^2 \approx 1 + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 \delta^2$$

oder umgeschrieben

$$(6.130) \quad s^2 \approx C_0^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 \left(\frac{v_0}{V_0} \right)^2 .$$

Der Vergleich mit (6.75) liefert uns damit den Korrekturfaktor

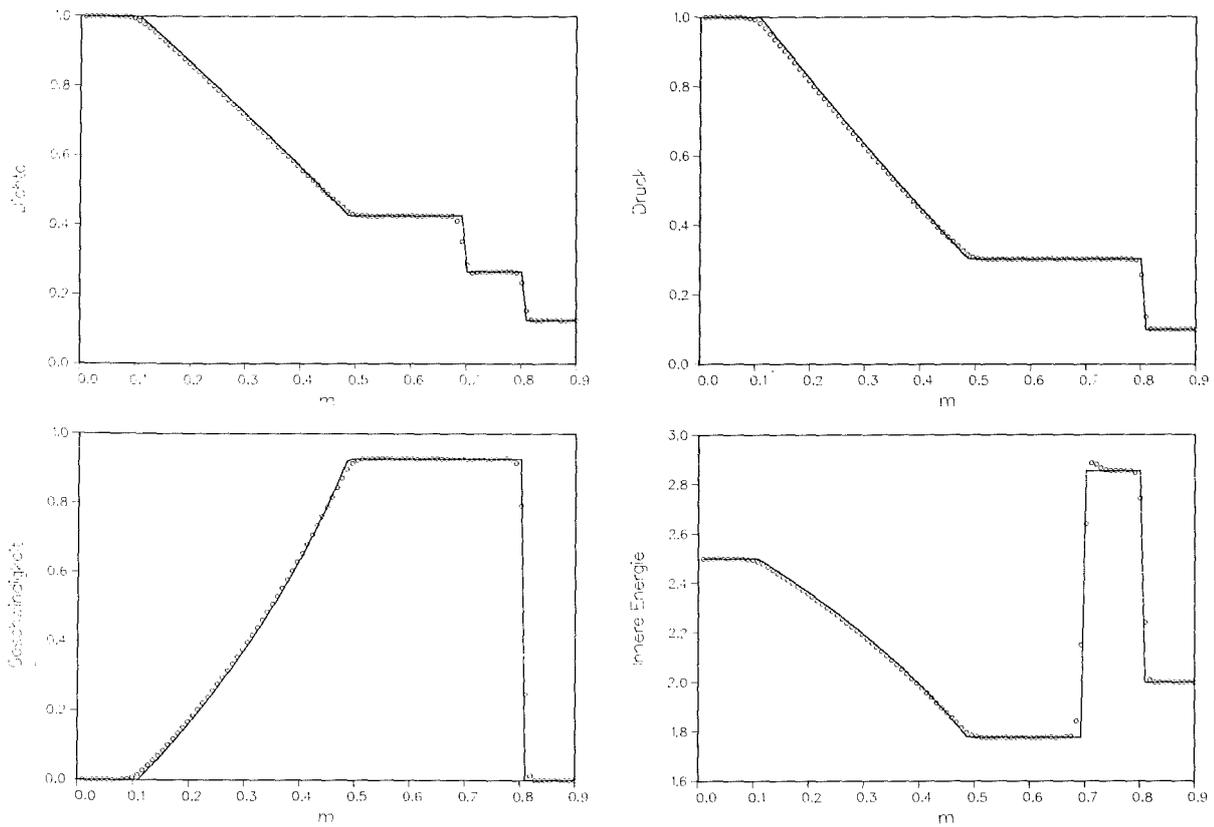
$$(6.131) \quad \eta_0 = \frac{\gamma + 1}{2} .$$

Für die physikalisch sinnvollen Werte des Adiabatenindex $\gamma > 1$ ist die Bedingung $\eta_0 > 1$ erfüllt.

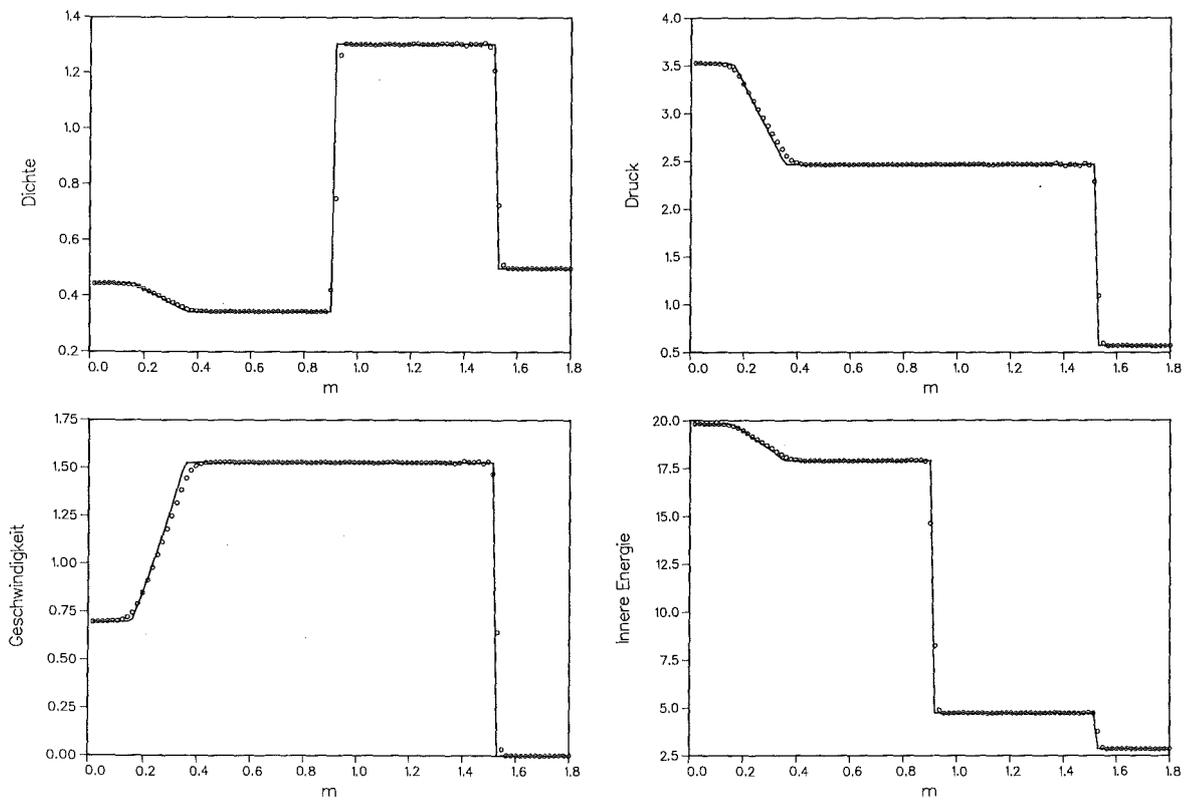
Bevor wir Ergebnisse für Testprobleme mit starker Kompression zeigen, möchten wir kurz noch einmal die Testprobleme vom vorherigen Abschnitt 6.5 aufgreifen, bei denen Stoßwellen von nur mittlerer Stärke auftreten. Zur Approximation dieser Probleme ist der Korrekturterm für die Roe-Signalgeschwindigkeiten nicht nötig, wie wir in Abschnitt 6.5 gesehen haben.

In Figur 6.13 haben wir das zweite Ordnung HLL-Verfahren mit Korrekturterm auf das Problem von Sod angewandt. Dabei haben wir ansonsten dieselben Diskretisierungs- und Verfahrensparameter verwendet, wie sie zur Erzeugung der Ergebnisse in Figur 6.9 benutzt wurden. Insbesondere wurden die Steigungen in den charakteristischen Variablen mit $k_1 = k_3 = 1.6$, $k_2 = 2.0$ berechnet. Eine Vergrößerung der numerischen Dämpfung an der Stoßwelle, bedingt durch den Korrekturterm, läßt sich nicht feststellen. Wie erwartet bleibt die Approximation der Kontaktunstetigkeit identisch erhalten, da hier kein Geschwindigkeitsgradient auftritt und der Korrekturterm somit nicht wirksam ist.

Daß das Einführen des Korrekturterms bei Stoßwellen mittlerer Stärke nur geringfügige Änderungen bringt, zeigen Ergebnisse für das Lax-Problem in Figur 6.14 im Vergleich mit denen in Figur 6.11. Die Diskretisierungs- und Verfahrensparameter blieben dabei unverändert. Die Steigungen wurden in charakteristischen Variablen berechnet mit Hilfe von (6.125). Dabei wurde auf den nichtlinearen charakteristischen Feldern $k = 1,4$ und auf dem linear entarteten $k = 2,0$ vorgegeben. Die Approximation der Kontaktunstetigkeit ist identisch. Die leichten Wellen an der Stoßwelle sind bei Hinzunahme des Korrekturterms etwas reduziert.



Figur 6.13 Ergebnisse mit Korrekturterm zum Vergleich mit Figur 6.9



Figur 6.14 Ergebnisse mit Korrekturterm zum Vergleich mit Figur 6.11

Wir kommen nun zurück zur starken Kompression und Problem (6.14), (6.127). Ein dimensionsloses Maß für die Stärke der Kompression im Riemannproblem (6.14), (6.127) ist das Verhältnis der Geschwindigkeit der Materie v_0 und ihrer Eulerschen Schallgeschwindigkeit c_0 . Für unsere numerischen Rechnungen wählten wir die Dichte und den Druck gerade so, daß diese Schallgeschwindigkeit Eins wird: $V_0 = 1.0$, $p_0 = 1/\gamma$. Der Wert der Geschwindigkeit ist somit in unserem Fall gerade das Maß für die Kompression. Ein Maß für die Stärke der Stoßwellen nach rechts und links ist die **Stoß-Machzahl** M_s , welche als das Verhältnis der Stoßgeschwindigkeit s und der Eulerschen Schallgeschwindigkeit vor dem Stoß c_0 definiert ist. Durch unsere Normierung gilt $M_s = s$, wobei s sich direkt aus Formel (6.129) ergibt. Im folgenden zeigen wir Ergebnisse für das Anfangswertproblem (6.14), (6.127) mit den Parametern

$$(6.132) \quad v_0 = 5,0 \quad , \quad M_s = 6,16 \quad , \quad c_0 = 1,0$$

($V_0 = 1,0$, $p_0 = 1/\gamma$). Die Zustandsgleichung ist wiederum die des idealen Gases mit dem Adiabatenindex $\gamma = 1,4$ (Luft). Die konstanten Zustände der exakten Lösung sind in Tabelle 6.3 eingetragen.

	links	Mitte	rechts
p	1.0	5.302	1.0
v	5.0	0.0	- 5.0
ρ	0.7143	31.526	0.7143

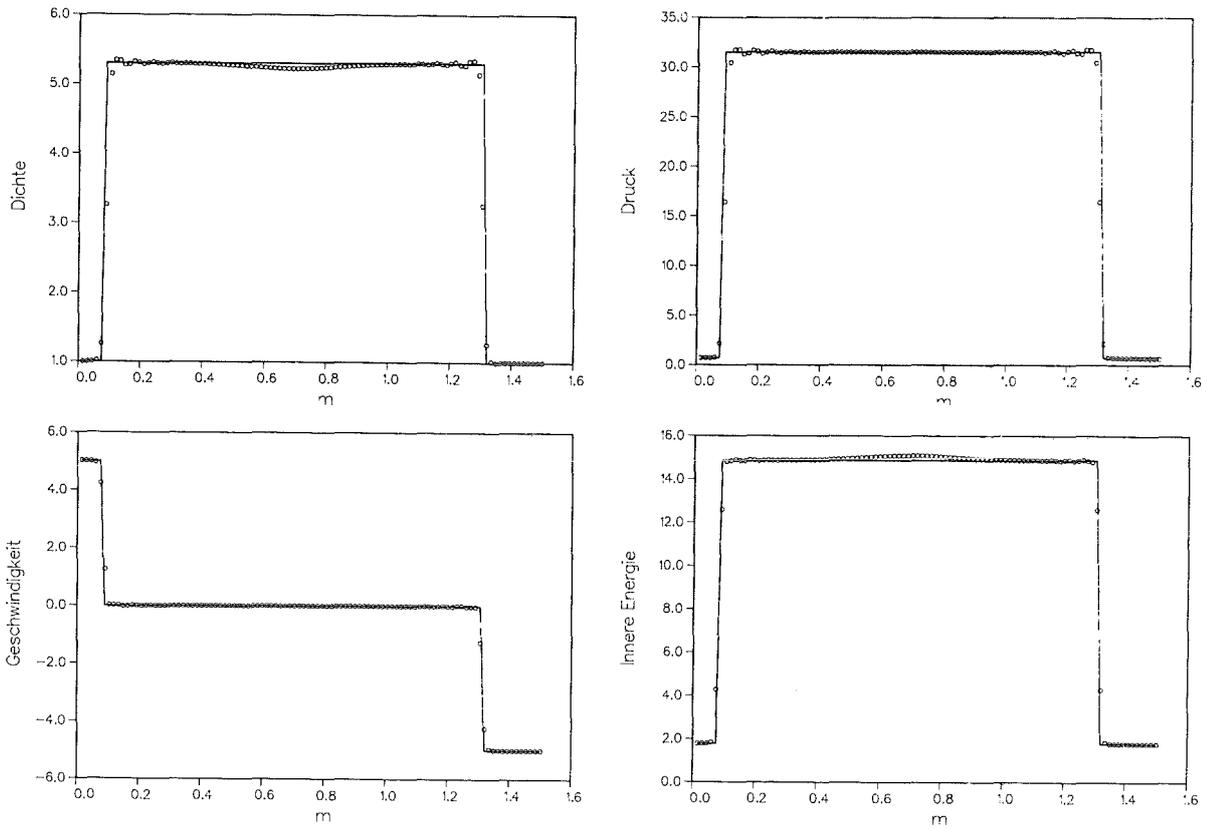
Tabelle 6.3 Werte der konstanten Zustände beim Kompressions-Problem (6.127)

Als Diskretisierungsparameter für das numerische Verfahren benutzen wir 100 Gitterzellen für das Massenintervall $[0.0, 1.5]$. Wie bisher werden die Gitterpunkte äquidistant angeordnet. Der Sprung der Anfangswerte ist bei $m_0 = 0.7$. Die Ergebnisse werden zur Zeit $t = 0.1$ aufgezeichnet. Dabei wird der Zeitschritt wiederum adaptiv nach der Bedingung (6.124) mit $\sigma = 0.8$ gewählt, wobei wir aber für das Maximum der Schallgeschwindigkeit in diesen Rechnungen gerade den Maximalwert der exakten Lösung einsetzen. Auf die Frage einer optimalen Zeitschrittweitensteuerung werden wir gleich ausführlicher eingehen. Bis zur Zeit $t = 0.1$ werden in unseren Rechnungen etwa 130 Zeitschritte ausgeführt.

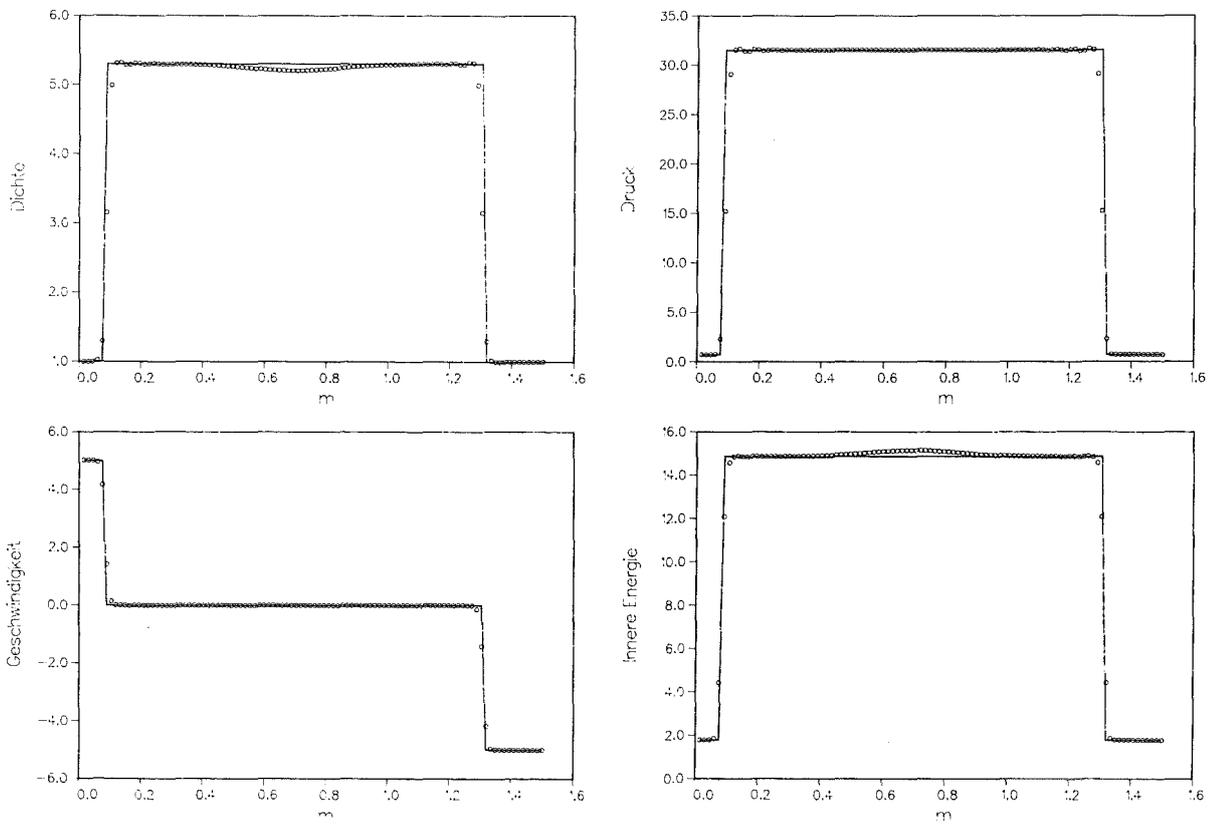
Figur 6.15 zeigt die Ergebnisse mit dem HLL-Verfahren ohne Korrekturterm. Es treten bei dieser Stärke der Kompression und der Wahl des Zeitschritts keine negativen Werte für das spezifische Volumen auf. Man sieht jedoch leichte Oszillationen an den Stoßwellen. Führt man den Korrekturterm für die numerischen Signalgeschwindigkeiten ein, wie wir ihn in Abschnitt 6.3 abgeleitet haben, so nimmt die Stärke der Oszillationen wie erwartet ab. Figur 6.16 zeigt Ergebnisse, bei denen die Konstante η_0 des Korrekturterms entsprechend dem asymptotischen Wert (6.131) gewählt wurde. Mit diesem Wert gelingt es jedoch nicht ganz, die Oszillationen völlig zum Verschwinden zu bringen.

Es zeigt sich, daß die Approximation von starken Kompressionen in den Lösungen der Gleichungen in Lagrangekoordinaten mittels eines expliziten numerischen Verfahrens ein fundamentales Problem ist. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen. Wesentlich für eine stabile Approximation von starken Stoßwellen ist, daß die Wellen in den nichtlinearen charakteristischen Feldern richtig erfaßt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen sind gerade die Signalgeschwindigkeiten. Abschätzungen dieser Signalgeschwindigkeiten gehen z.B. beim HLL-Verfahren explizit in die Berechnung der numerischen Flüsse ein. In einem expliziten Verfahren werden diese Signalgeschwindigkeiten aus den Werten der Variablen vom alten Zeitschritt abgeschätzt. Wir betrachten einmal den ersten Schritt des Verfahrens für das Kompressionsproblem mit den Anfangswerten (6.127). Die maximale Lagrangesche Schallgeschwindigkeit in den Anfangswerten ist gerade $C_0 = 1.0$. In das explizite Verfahren wird dieser Wert als Abschätzung der Signalgeschwindigkeiten übernommen. Damit berechnen sich die numerischen Flüsse und die Näherungslösung für $t = \Delta t$.

Nun ist dieser Wert aber eine äußerst schlechte Approximation für die wirkliche Situation: Berechnen wir die maximale Schallgeschwindigkeit für $t > t_0$, so erhalten wir laut Tabelle 6.3 den Wert $C_{\text{exakt}} = 15,3$. Durch das Einführen des Korrekturterms bei der Berechnung der numerischen Signalgeschwindigkeiten für das HLL-Verfahren versucht man diesen Defekt der expliziten Approximation zu beheben. Das Kriterium für die Konstruktion dieses Terms ist, daß der mittlere Zustand des näherungsweise Riemannlösers physikalisch sinnvoll bleibt und daß die numerischen Signalgeschwindigkeiten eine gute Approximation der exakten sind. Die leichten Oszillationen in den Resultaten in Figur 6.16 zeigen, daß diese Kriterien nicht garantieren, daß die Oszillationen völlig verschwinden. Die numerischen Verfahren reagieren sehr sensibel in diesem Bereich. Eine ganz ähnliche



Figur 6.15 HLL-Verfahren ohne Korrekturterm



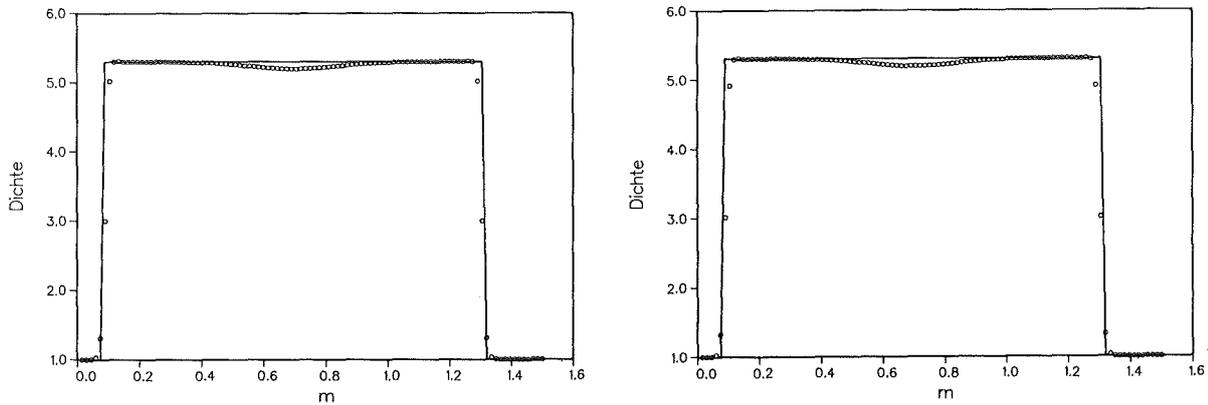
Figur 6.16 HLL-Verfahren mit Korrekturterm

Situation hat man bei den Gleichungen in Eulerkoordinaten, dort jedoch in Bereichen geringer Dichte, wie wir dies in Kapitel 4 geschildert haben (siehe auch [18]).

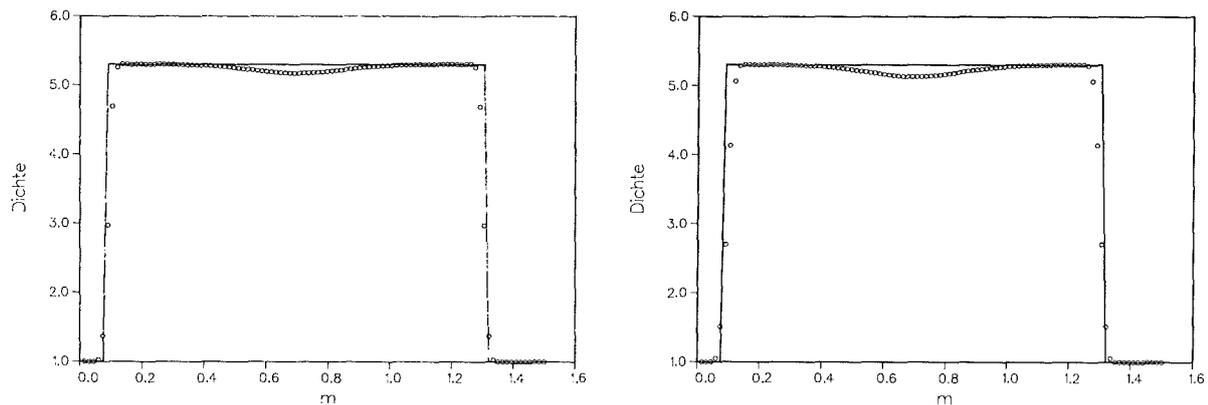
Neben möglichen Verbesserungen bei Flußberechnung und Berechnung der Signalgeschwindigkeiten bleiben zwei Möglichkeiten, diese Oszillationen zu vermeiden. Eine Reduktion der Größe der Zeitschritte mittels Verkleinerung des Wertes von σ führt natürlich zu einer Verringerung der Auswirkung der Fehler in der Flußberechnung durch das explizite Unterschätzen der Signalgeschwindigkeiten. Etwa bei Halbierung der Schrittweite wird der "falsche" Fluß nur ein halbes Zeitintervall angewandt. Für das zweite halbe Zeitintervall liefert die numerische Lösung wieder verbesserte Signalgeschwindigkeiten. Der Einfluß der Verkleinerung der Zeitschritte ist in Figur 6.17 dargestellt. Die Oszillationen an den Stoßwellen verschwinden, falls im unkorrigierten Fall die Zeitschritte halbiert werden ($\sigma = 0,4$) oder falls im Falle des HLL-Verfahrens mit Korrektur $\sigma = 0,6$ vorgegeben wird. Wir haben in diesen Abbildungen nur die Dichte als Vergleichsgröße herangezogen.

Die andere Möglichkeit ist, die Konstante η_0 im Korrekturterm für die numerische Signalgeschwindigkeit zu erhöhen. Der Wert von η_0 in (6.131) ist aus dem Vergleich der korrigierten Signalgeschwindigkeit mit der exakten Stoßwellengeschwindigkeit abgeleitet. Er konvergiert gegen diese von unten, falls die Stoßwellenstärke gegen unendlich geht. Eine Vergrößerung von η_0 bewirkt eine Überschätzung der exakten Signalgeschwindigkeiten durch die numerischen. Dies resultiert aber in einer Vergrößerung der numerischen Dämpfung insbesondere an starken Gradienten. Figur 6.18 zeigt die Ergebnisse für die Dichte bei jeweiliger Verdopplung von η_0 . Es zeigt sich, daß die Oszillationen verschwinden, jedoch nimmt, wie erwartet, die numerische Dämpfung zu. Die Courantzahl wurde hier bei $\sigma = 0,8$ festgehalten.

Wir müssen hier jedoch warnen: Größere Änderungen in η_0 sind nicht möglich bei festgehaltener Zeitschrittweite. Durch Vergrößerung von η_0 wächst die numerische Signalgeschwindigkeit. Die Herleitung des numerischen Flusses aus der näherungsweise Riemannlösung ist jedoch nur dann sinnvoll, falls die Zeitschrittweite der diskreten CFL-Bedingung genügt. In unserem Fall (Figur 6.18) ist dies schon nicht mehr erfüllt, ohne jedoch zu Schwierigkeiten zu führen. Bei weiterer Erhöhung von η_0 wird das Verfahren instabil. Das Fazit daraus ist, daß die Zeitschrittweitensteuerung somit im gewissen Einklang mit der Korrektur der Signalgeschwindigkeiten stattfinden muß.



Figur 6.17 HLL-Verfahren a.) ohne Korrekturterm, $\sigma = 0.4$,
b.) mit Korrekturterm, $\sigma = 0.6, \eta_0 = 1.2$



Figur 6.18 HLL-Verfahren a.) mit Korrekturterm $\sigma = 0.8, \eta_0 = 2.4$,
b.) mit Korrekturterm $\sigma = 0.8, \eta_0 = 4.8$

Wir wollen uns dies noch etwas genauer ansehen. Die CFL-Bedingung besagt, daß der Abhängigkeitsbereich der numerischen Lösung den Abhängigkeitsbereich der exakten Lösung beinhalten muß. Ist $\max C$ die maximale Wellengeschwindigkeit des Problems, so ist dies erfüllt, falls

$$(6.133) \quad \frac{\Delta t}{\Delta m} \max C \leq 1$$

gilt. Im allgemeinen hat man natürlich nicht den exakten Wert $\max C$ zur Verfügung. Insofern wird zur Steuerung der Zeitschrittweite die exakte CFL-Bedingung

approximiert durch eine "diskrete" CFL-Bedingung

$$(6.134) \quad \frac{\Delta t}{\Delta m} \max_i C_i^n \leq \sigma \leq 1 \quad ,$$

wobei hier das Maximum über alle numerischen Wellengeschwindigkeiten gebildet wird. Die Konstante σ wird dem numerischen Verfahren vorgegeben. Die Zeitschrittweite wird dann adaptiv in jedem Zeitschritt aus (6.134) bestimmt. Der Wert von σ ist eine Art Sicherheitsfaktor. Gleichung (6.134) sollte garantieren, daß die exakte CFL-Bedingung (6.133) erfüllt ist. Sind die numerischen Wellengeschwindigkeiten gute Approximationen der exakten, so kann σ recht nahe dem Grenzwert 1.0 gewählt werden. Für ein Godunov-Typ Verfahren ist Gleichung (6.134) zudem eine grundsätzliche Bedingung bei der Herleitung des numerischen Flusses. Die näherungsweise Riemannlösungen dürfen sich gegenseitig nicht beeinflussen oder zumindest die Flüsse nicht ändern (siehe Definition 4 und Bemerkung 1 in Kapitel 3).

Wir betrachten nun einmal die Situation bei unserem Testproblem (6.127), (6.132) zur starken Kompression zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Anfangswerte für dieses Problem sind gerade so gewählt, daß die Schallgeschwindigkeit im gesamten Gebiet 1,0 ist. Damit schätzt man den Maximalwert im ersten Rechenintervall $[0, \Delta t]$ mit 1,0 ab und bestimmt nach (6.134) mit einem Sicherheitsfaktor $\sigma = 0,8$ den Zeitschritt zu $\Delta t = 0,8 \Delta m$. In der exakten Lösung tritt jedoch eine starke Kompression auf. Aus den Werten der Tabelle 6.3 berechnet sich dort die Lagrangesche Schallgeschwindigkeit zu 15,3, d.h. der oben berechnete Zeitschritt ist um eine Größenordnung zu groß. Das numerische Verfahren wird somit im allgemeinen instabil und es können negative Werte für das spezifische Volumen auftreten.

Die Rechnung läßt sich nur dann durchführen, falls σ drastisch vermindert wird. Man geht somit folgendermaßen vor: Man halbiert zunächst den Wert von σ und startet die Rechnung erneut. Bei erneutem Abbruch wiederholt man die ganze Prozedere bis nach Versuch und Irrtum ein geeigneter Wert von σ gefunden wird. Dies ist natürlich keine Lösung des eigentlichen Problems. Bei Verkleinerung von σ erzwingt man die kleinen Zeitschritte für die ganze Rechnung, also auch zu den Zeitpunkten, in denen die starke Kompression noch nicht eingetreten oder bereits abgeflaut ist.

Die Lösung des Problems muß lauten, im Falle der Kompression in (6.134) eine bessere Abschätzung der tatsächlich auftretenden Wellengeschwindigkeiten zu finden. Das heißt, eine Korrektur der numerischen Signalgeschwindigkeiten, wie wir sie z.B. für das HLL-Verfahren in Satz 1 ausgeführt haben, muß auch in einer adaptiven Zeitschrittweitensteuerung benutzt werden. Die Bedingung (6.134) sollte durch

$$(6.135) \quad \frac{\Delta t}{\Delta m} \max_i \sqrt{C_{i+1/2}^2 + \eta_{i+1/2}^2} = \sigma \leq 1$$

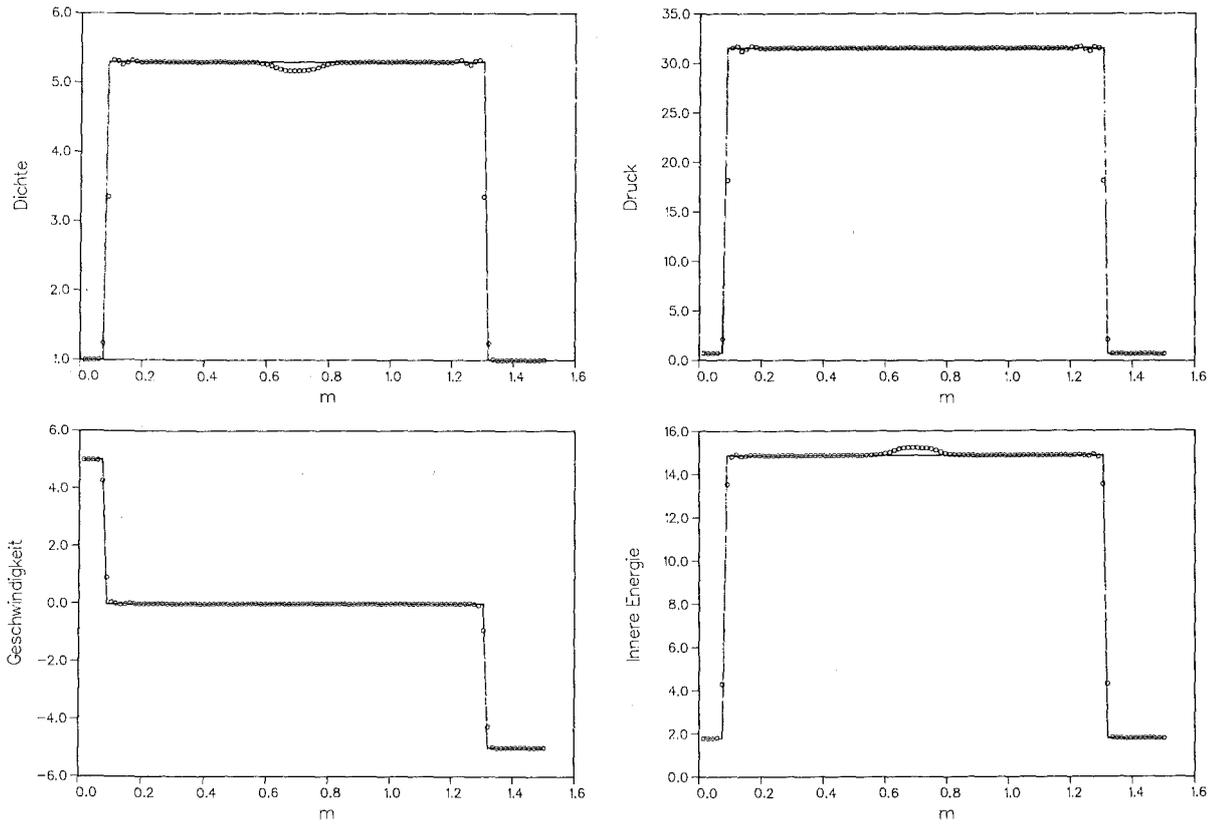
mit

$$(6.136) \quad \eta_{i+1/2} = \eta_0 \frac{\max\{0, v_i - v_{i+1}\}}{V_{i+1} + V_i}$$

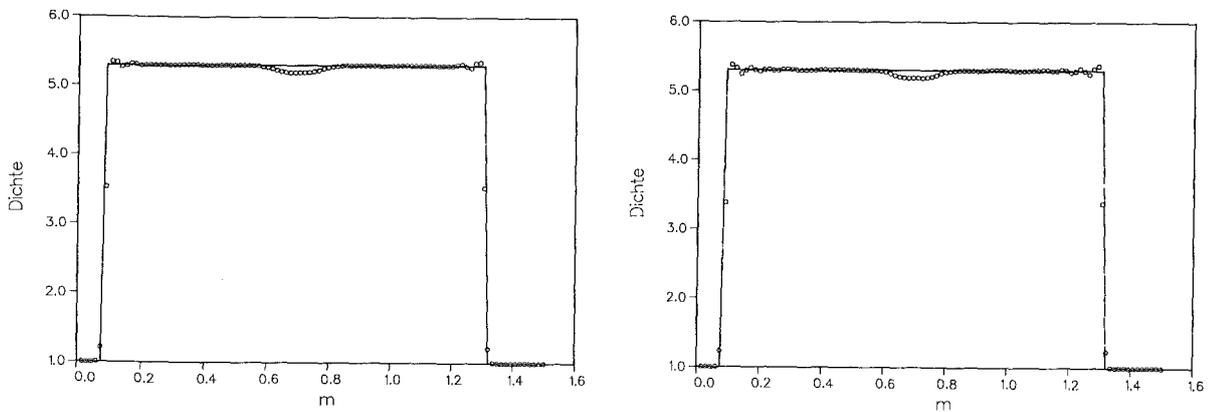
ersetzt werden. Dabei ist $C_{i+1/2}$ etwa ein Mittelwert zwischen C_i und C_{i+1} oder einfach der Maximalwert; die Konstante η_0 sollte größer oder gleich $(\gamma + 1)/2$ sein, wie wir dies in (6.131) abgeleitet haben; den oberen Index "n" haben wir in (6.135) - (6.136) weggelassen. Mit dieser Korrektur wird somit versucht, innerhalb einer expliziten Approximation eine bessere Abschätzung für die maximale Wellenausbreitungsgeschwindigkeit zu finden. Insbesondere bei Problemen, bei denen eine starke Kompression auftritt, sollte (6.134) durch (6.135), (6.136) ersetzt werden.

Für das Problem von Sod und Lax braucht man diese Modifikation nicht, da hier keine starke Kompression auftritt. Die Ergebnisse mit dem HLL-Verfahren zu diesen Problemen wurde mit der üblichen diskreten CFL-Bedingung (6.134) ($\sigma = 0.8$) durchgeführt. Bei den Rechnungen für das Problem (6.127) haben wir aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten in der diskreten CFL-Bedingung (6.134) den Wert der maximalen Schallgeschwindigkeit durch den exakten ersetzt. Dies ließ sich in diesem Fall natürlich nur deshalb durchführen, da die exakte Lösung als Lösung eines Riemannproblems bekannt ist. Wird für dieses Problem die korrigierte Schrittweitenbedingung (6.135), (6.136) benutzt mit $\eta_0 = (\gamma + 1)/2$, so erhält man nahezu identische Resultate.

Im folgenden wollen wir noch Ergebnisse des Verfahrens zweiter Ordnung zeigen, wobei wir sowohl die automatische Schrittweitensteuerung als auch den Korrekturterm im HLL-Verfahren benutzen. Es zeigt sich in diesen Ergebnissen



Figur 6.19 Verfahren zweiter Ordnung mit $\sigma = 0.4$, $\eta_0 = 2.4$



Figur 6.20 Verfahren zweiter Ordnung mit a) $\sigma = 0.4$, $\eta_0 = 1.2$,
b) $\sigma = 0.6$, $\eta_0 = 2.4$

wiederum, daß die Approximation von starken Kompressionen einem "Lagrange-Verfahren" deutlich mehr Schwierigkeiten bereitet, als den entsprechenden Verfahren für die Gleichungen in Eulerkoordinaten. Um alle kleinen Oszillationen an den Stoßwellen des Problems (6.127) zu vermeiden, muß der Korrekturterm

verstärkt und die Courantzahl zusätzlich etwas reduziert werden. Bei starker Kompression sollten natürlich auch in der Steigungsberechnung die Werte für k etwas reduziert werden.

Bei den folgenden Resultaten wählten wir einheitlich $k_1 = k_2 = k_3 = 1.2$, wobei der Wert für das linear entartete charakteristische Feld hier keine Rolle spielt. Figur 6.19 zeigt Ergebnisse, bei denen nur noch ganz leichte Oszillationen zu sehen sind. Dafür mußten wir aber $\eta_0 = 2,4$ setzen und die Courantzahl σ auf 0,4 reduzieren. Wird η_0 reduziert, so verstärken sich die leichten Oszillationen. Figur 6.20 a zeigt die Ergebnisse für den Wert $\eta_0 = 1,2$ (vergl. Figur 6.19). Der gleiche Effekt liegt vor bei Vergrößerung der Courantzahl. Die zweite Abbildung in Figur 6.20 zeigt dies im Vergleich mit Figur 6.19 für die Vergrößerung von σ von 0,4 auf 0,6. Die Oszillationen an den starken Stoßwellen wachsen bei Änderung dieser Parameter nicht sprunghaft an, wie diese Bilder zeigen. Die gleiche Situation liegt auch vor bei Vergrößerung der k -Werte in der Steigungsberechnung.

Die Ergebnisse zeigen, daß man zur Vermeidung leichter Oszillationen an starken Stoßwellen die Zeitschrittweite deutlich reduzieren muß. Dies ist ein Effekt, welcher bei numerischen Verfahren für die Gleichungen in Eulerkoordinaten nicht bekannt ist. Hier muß man an starken Stoßwellen die Parameter in der Steigungsberechnung in den nichtlinearen charakteristischen Feldern ebenso reduzieren auf Werte um 1,3 (vergl. [51]) und sollte auch den Sicherheitsfaktor in der Schrittweitensteuerung vielleicht noch auf 0,6 reduzieren. Diese Maßnahmen garantieren jedoch dann eine Stoßwellenapproximation ohne jegliche Oszillationen.

7. Relativistische und ultra-relativistische Hydrodynamik

In Anwendungen, bei denen Strömungsgeschwindigkeiten auftreten, welche nahe an die Lichtgeschwindigkeit heranreichen, müssen in den strömungsmechanischen Grundgleichungen relativistische Effekte mitberücksichtigt werden. Solche Situationen gibt es vor allem in der Astrophysik, aber durchaus auch auf der Erde, etwa bei dem Zusammenprall hoch beschleunigter Teilchen. So treten bei Kern-Kern Stößen von Schwerionen mit einer Energie von mehr als 100 GeV pro Nukleon, welche derzeit erreicht wird, relativistische Lorentzfaktoren von etwa 10 auf. Relativistische Effekte spielen bei diesen Lorentzfaktoren natürlich eine entscheidende Rolle. Geplante zukünftige Experimente sollen sogar im TeV Bereich liegen, d.h. die Lorentzfaktoren werden für zukünftige Experimente noch deutlich anwachsen. Gewöhnlich nennt man den Bereich, in dem Lorentzfaktoren von über 10 auftreten, ultra-relativistische Hydrodynamik.

Ein möglicher theoretischer Zugang, die Kollision von Schwerionen mit hohen Energien zu beschreiben, ist die relativistische Strömungsmechanik. Die Annahme dabei ist, daß die dynamische Entwicklung dieser Kern-Kern Stöße durch die Grundgleichungen der relativistischen Hydromechanik, vervollständigt durch eine geeignete Zustandsgleichung, beschrieben werden kann (siehe z.B. [2], [20]). Bei der Kollision von Schwerionen mit hohen Energien erwartet man, daß sich eine "nukleare" Stoßwelle ausbildet, welche durch die Atomkerne läuft. Durch die Winkelverteilung der beim Durchlaufen dieser Stoßwelle durch den Kern emittierten Nukleonen, hofft man über den nuklearen Kompressibilitätsfaktor und die nukleare Zustandsgleichung Aufschluß zu bekommen.

Die Anforderungen an numerische Verfahren in diesem Bereich sind insbesondere geprägt durch verschiedene Positivitätseigenschaften. So dürfen die Masendichte R , die Impulsdichte M und die Energiedichte E nicht die relativistischen Bedingungen

$$(7.1) \quad E \geq R \quad , \quad E \geq M$$

verletzen und jegliche Wellengeschwindigkeiten dürfen natürlich die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten (Lichtgeschwindigkeit ist auf Eins normiert). Instabilitäten oder Oszillationen des numerischen Verfahrens an starken Gradienten können zu solchen Inkonsistenzen und dadurch zum sofortigen Zusammenbruch der Lösung führen.

Die Pionierarbeiten bei der numerischen Simulation von Problemen der relativistischen Hydrodynamik in der Astrophysik stammen von Wilson und seinen Mitarbeitern (siehe [5]). Spätere wichtige Arbeiten auf diesem Gebiet sind die von Norman und Winkler (siehe z.B. [52]). Im Bereich der Kollisionen von schweren Kernen gibt Amsden, Harlow und Nix in [2] eine Übersicht über die frühen numerischen Simulationen mittels relativistischer Hydrodynamik.

Wir übertragen im folgenden das Verfahren von Harten, Lax und van Leer in der expliziten Formulierung, wie wir es für die nicht-relativistischen Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Eulerkoordinaten in Kapitel 4 beschrieben haben, auf den relativistischen Fall und zeigen seine Anwendbarkeit für relativistische und ultra-relativistische Probleme.

Die eindimensionalen **Gleichungen der relativistischen Hydrodynamik in Eulerkoordinaten** lassen sich schreiben in der Form (siehe [1])

$$(7.2) \quad R_t + (Rv)_x = 0 \quad ,$$

$$(7.3) \quad M_t + (Mv + p)_x = 0 \quad ,$$

$$(7.4) \quad E_t + (v(E + p))_x = 0$$

und haben somit formal die Gestalt wie im nichtrelativistischen Fall (vergl. Gleichungen (4.1)). Sie sind hier formuliert als **System in Erhaltungsform**

$$(7.5) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

mit

$$(7.6) \quad u = \begin{pmatrix} R \\ M \\ E \end{pmatrix} \quad , \quad f(u) = \begin{pmatrix} Rv \\ Mv + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} \quad .$$

Der wesentliche Unterschied zum nichtrelativistischen Fall ist, daß in (7.5) Größen auftreten, welche in verschiedenen Bezugssystemen gemessen werden. So ist die Massendichte R , die Impulsdichte M und die Energiedichte E bezogen auf ein festes Inertialsystem, welches wir als **Laborsystem** bezeichnen. Auf der anderen Seite haben wir ein **lokales Ruhesystem**, welches sich von Fluidelement zu Fluidelement ändert. Größen, welche auf dieses System bezogen sind, bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben; es sind hier die Massendichte n , die Energiedichte e , die Strömungsgeschwindigkeit v und der Druck p .

Die Größen im Laborsystem und die im lokalen Ruhesystem hängen zusammen über das folgende System von nichtlinearen Transformationen:

$$(7.7) \quad R = \beta n \quad ,$$

$$(7.8) \quad E = \beta^2 (e + p) - p \quad ,$$

$$(7.9) \quad M = \beta^2 (e + p) v \quad ,$$

wobei β den Lorentzfaktor

$$(7.10) \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2}}$$

bezeichnet. Die Gleichungen sind so normiert, daß die Lichtgeschwindigkeit c gerade Eins ist. Zusätzlich zu den Gleichungen (7.5) - (7.10) wird natürlich noch - wie im nichtrelativistischen Fall - eine **Zustandsgleichung** benötigt, welche den Druck als Funktion

$$(7.11) \quad p = p(n, e)$$

spezifiziert. Wir wollen uns dabei beschränken auf die Zustandsgleichung des idealen Gases, welche hier in der Form

$$(7.12) \quad p = (\gamma - 1)(e - n)$$

angegeben werden kann, und deren ultra-relativistischer Grenzwert ($e \gg n$)

$$(7.13) \quad p = (\gamma - 1)e$$

mit dem Adiabatenindex $1 \leq \gamma \leq 2$.

Die Beziehungen (7.7) bis (7.11) führen eine sehr starke nichtlineare Kopplung zwischen den einzelnen hydrodynamischen Gleichungen (7.2) bis (7.4) ein. Dies ist der Grund, wieso die relativistischen Gleichungen sehr viel schwieriger numerisch zu lösen sind als die nichtrelativistischen, obwohl sie in der Struktur sehr ähnlich sind. Neben den Beziehungen (7.1) muß natürlich auch $-1 \leq v \leq 1$ erfüllt sein, da die Strömungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ nicht überschreiten darf. Andernfalls existiert keine Lösung von (7.7) - (7.11).

Insofern scheint auch die Bemerkung von Norman und Winkler [52] motiviert, daß diese Kopplung eine gleichzeitige implizite numerische Lösung der Gleichungen (7.5) - (7.11) nötig macht. Wir probieren hier einen anderen Ansatz. Die hy-

drodynamischen Gleichungen (7.5) werden numerisch gelöst durch ein auf die relativistischen Gleichungen übertragenes explizites Shock-Capturing Verfahren vom Godunov-Typ. Dabei lösen wir iterativ an jeder Stelle, an der wir die Größen von einem Koordinatensystem ins andere übertragen müssen, die nichtlinearen Gleichungen (7.7) bis (7.9). Wir beschreiben im folgenden zunächst die Modifikationen für das relativistische HLL-Verfahren und gehen danach auf die Umrechnung der Größen in den einzelnen Bezugssystemen genauer ein.

Das HLL-Verfahren für die relativistischen Gleichungen nennen wir **RHLL-Verfahren**. Es läßt sich, wie in Kapitel 3 beschrieben, als Verfahren in Erhaltungsform mit dem numerischen Fluß (3.60) und geeigneten Abschätzungen für die Signalgeschwindigkeiten schreiben. Im relativistischen Fall berechnen wir solche Abschätzungen der Signalgeschwindigkeiten nach den Formeln

$$(7.14) \quad a_r = \bar{v} \oplus \bar{c}_s := \frac{\bar{v} + \bar{c}_s}{1 + \bar{v} \bar{c}_s}, \quad a_l = \frac{\bar{v} - \bar{c}_s}{1 - \bar{v} \bar{c}_s},$$

wobei \oplus die relativistische Addition, c_s die relativistische Schallgeschwindigkeit und "-" ein Mittelwert des rechten und linken Zustandes bedeuten. Für die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet dabei die Schallgeschwindigkeit

$$c_s^2 = \frac{\gamma(\gamma - 1)(e - n)}{n + \gamma(e - n)}.$$

Obige Signalgeschwindigkeiten (7.14) entsprechen gerade denjenigen der Eulergleichungen, wenn dort die Addition von Geschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit durch die relativistische Addition ersetzt wird.

Eine einfache Möglichkeit der Definition der Mittelwerte \bar{v} und \bar{c}_s , sind natürlich die arithmetischen Mittelwerte

$$(7.15) \quad \bar{v} = \frac{v_l + v_r}{2}, \quad \bar{c}_s = \frac{c_{s,l} + c_{s,r}}{2}$$

zu nehmen. Wie man vom nichtrelativistischen Fall weiß, ist dies für schwache Stöße eine sehr gute Approximation (zweiter Ordnung in der Stoßstärke). Für starke Stöße sollte diese Wahl jedoch zu Oszillationen an den Stoßwellen führen. Angeregt durch die Roe-Mittelwerte (4.12) im nichtrelativistischen Fall, könnte man (7.15) auch durch

$$(7.16) \quad \bar{v} = \frac{\sqrt{R_r} v_r + \sqrt{R_l} v_l}{\sqrt{R_r} + \sqrt{R_l}}$$

$$(7.17) \quad c_s = \frac{\sqrt{R_r} c_{s,r}^2 + \sqrt{R_l} c_{s,l}^2}{\sqrt{R_r} + \sqrt{R_l}} \oplus \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sqrt{R_r R_l}}{(\sqrt{R_r} + \sqrt{R_l})^2} (v_r - v_l)^2$$

ersetzen, wobei \oplus die relativistische Addition bedeutet (vgl. 7.14). Es zeigten sich in Ergebnissen für einige Testprobleme sehr geringe Unterschiede; deutlich bessere Ergebnisse durch (7.16), (7.17) gab es nur in Spezialfällen, in denen c_s sehr klein wurde. Bei der Diskussion der Ergebnisse für einige Testprobleme kommen wir darauf zurück.

Relativ grobe obere und untere Schranken sind natürlich nach der CFL-Bedingung gegeben durch

$$(7.18) \quad a_r = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad a_l = -\frac{1}{\lambda}$$

(vergl. 3.74) oder sogar

$$(7.19) \quad a_r = c = 1 \quad , \quad a_l = -c = -1 \quad .$$

Die letztere Wahl hat natürlich nur dann einen Sinn, falls die Wellengeschwindigkeiten im gesamten Rechengebiet tatsächlich in der Nähe von Eins (Lichtgeschwindigkeit) liegen. Ansonsten wird durch (7.19) zu viel numerische Dämpfung in das RHLL-Verfahren eingeführt.

Sinnvoll ist sicherlich, die Mittelwerte (7.15) oder (7.16), (7.17) noch so zu korrigieren, daß die Signalgeschwindigkeiten an Verdünnungswellen besser approximiert werden, wie wir dies in Kapitel 3 ausgeführt haben. Die Größen a_r und a_l werden dabei ersetzt durch

$$(7.20) \quad \bar{a}_r = \max \left(a_r , \frac{v_r + c_{s,r}}{1 + v_r c_{s,r}} \right) \quad ,$$

$$(7.21) \quad \bar{a}_l = \min \left(a_l , \frac{v_l - c_{s,l}}{1 - v_l c_{s,l}} \right) \quad .$$

Die Approximation von Stoßwellen wird dabei nicht geändert.

Die Gleichungen für den numerischen Fluß (3.60) zusammen mit der Berechnung der Signalgeschwindigkeiten definiert das erste Ordnung relativistische HLL-Verfahren. Um ein Verfahren zweiter Ordnung zu erhalten, benutzen wir wieder den MUSCL-Algorithmus von van Leer [38], wie wir ihn in Kapitel 3 ausführlich erklärt haben. Dabei ist es natürlich am einfachsten, Steigungen in den Erhaltungsgrößen oder in den primitiven Variablen n , v und p zu berechnen. Die Berechnung in den charakteristischen Größen, welche auf einer lokalen Linearisierung des nichtlinearen Systems beruht, bedingt wiederum die Kenntnis und Berechnung der Rechtseigenvektoren des Flusses. In Testrechnungen, welche wir zum Teil anschließend diskutieren, haben wir die zwei ersten Methoden miteinander verglichen. Es zeigte sich hier, daß nur sehr kleine Unterschiede in den numerischen Ergebnissen auftraten.

Während eines Zeitschritts eines numerischen Verfahrens für die relativistischen Gleichungen (7.2) - (7.4) müssen aus den konservativen Variablen R , M und E die Größen n , e , p , v und β berechnet werden. Dazu stehen die fünf nichtlinearen Gleichungen (7.7) bis (7.11) zur Verfügung, welche im allgemeinen mittels eines Iterationsverfahrens numerisch gelöst werden müssen. Man nennt diesen Vorgang **Entflechtung**. Für die Zustandsgleichung eines idealen Gases (7.12) können diese Gleichungen noch etwas umgeformt und vereinfacht werden. Zunächst werden (7.7), (7.10) und (7.12) in (7.8) und (7.9) eingesetzt. Diese beiden Gleichungen lassen sich nun weiter auf eine Gleichung vierter Ordnung reduzieren. Sie hat die Gestalt

$$(7.22) \quad [\gamma v (E - Mv) - M(1 - v^2)]^2 - (1 - v^2)v^2(\gamma - 1)^2 R^2 = 0$$

mit $0 \leq v \leq 1$. Es zeigt sich, daß im Intervall $0 \leq v \leq 1$ zwei Lösungen existieren, wobei jedoch nur eine die physikalisch sinnvolle und auch Lösung der Ausgangsgleichungen (7.7) - (7.10) und (7.12) ist. Die zweite Lösung schleicht sich ein durch die Quadratur von (7.9) zur Herleitung von (7.22).

Die numerische Lösung von (7.22) und die Auswahl der physikalisch relevanten Lösung erweist sich jedoch als nicht so schwierig, da man einen unteren und oberen Grenzwert für den "richtigen" Wert von v angeben kann. Den unteren Grenzwert v_u von v findet man durch Einsetzen des ultra-relativistischen Grenzwerts $R = 0$ in Gleichung (7.22):

$$(7.23) \quad v_u = \frac{1}{2M(\gamma - 1)} \left(\gamma E - \sqrt{(\gamma E)^2 - 4(\gamma - 1)M^2} \right)$$

Ein oberer Grenzwert v_0 ist natürlich gegeben durch die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$. Der Wert v_0 läßt sich aber noch etwas verbessern. Kombiniert man (7.8) und (7.9), so erhält man

$$(7.24) \quad v = \frac{M}{E + p} .$$

Da der Druck positiv ist, findet man daraus die obere Schranke

$$(7.25) \quad v_0 = \frac{M}{E} .$$

Ein guter Startwert für die Iteration ist demnach

$$(7.26) \quad v^{(0)} = \frac{1}{2} (v_u + v_0) .$$

Dieser Startwert kann für ultra-relativistische Probleme noch etwas modifiziert werden. Man addiert zu $v^{(0)}$ noch eine Größe z :

$$(7.27) \quad v^{(0)} = \frac{1}{2} (v_u + v_0) + z \quad \text{mit} \quad z = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{E} \right) (v_u - v_0) ,$$

die so beschaffen ist, daß der Startwert näher an der ultra-relativistischen Lösung liegt ([63]). In unseren Rechnungen für verschiedene Testprobleme lösen wir Gleichung (7.22) mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend von dem Startwert (7.26) oder (7.27), wobei wir für eine Genauigkeit von neun Ziffern höchstens fünf Iterationen durchführen mußten.

Ist v bekannt, so bekommt man die weiteren Größen e , β , n und p aus der Beziehung

$$(7.28) \quad e = E - v M ,$$

welche sich durch Kombination von (7.8) - (7.9) ergibt, und den Gleichungen (7.10), (7.7) und (7.12).

Im ultra-relativistischen Grenzwert (7.13) der Zustandsgleichung lassen sich die nichtlinearen Gleichungen explizit lösen. Diese Lösung ist gegeben durch

$$(7.29) \quad e = \frac{1}{2(\gamma - 1)} \left[(\gamma - 2)E + \sqrt{\gamma^2 E^2 - 4(\gamma - 1)M^2} \right]$$

und

$$(7.30) \quad \beta^2 = \frac{E + (\gamma - 1)e}{\gamma e} .$$

Die übrigen Größen p , n und v ergeben sich aus (7.13), (7.7) und (7.10).

Die **Testprobleme** für das relativistische HLL-Verfahren sind Riemannprobleme für die relativistischen Gleichungen (7.2) - (7.4) mit den Zustandsgleichungen (7.12), (7.13). Die Lösung hat die gleiche Struktur wie im nichtrelativistischen Fall: vier konstante Zustände werden getrennt durch Verdünnungswellen, Stoßwellen und eine Kontaktunstetigkeit. Die exakte Lösung kann jedoch nicht mehr "so einfach" bestimmt werden wie im nichtrelativistischen Fall. So erfordert etwa die Angabe der Lösung in einer Verdünnungswelle die numerische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Ausführlich beschrieben wird die Lösung von Centrella und Wilson [5]. Eine Kurzbeschreibung unserer Testprobleme - der relativistischen Version des Problems von Sod [67] (siehe auch Kapitel 6.5) und der relativistischen Version des Problems (4.20) mit $v_0 < 0$ - ist in [63] enthalten. Die hier gezeigten numerischen Ergebnisse von Rechnungen mit dem relativistischen HLL-Verfahren wurden am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt durchgeführt. Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit zwei anderen Verfahren findet sich in [63].

Das **relativistische Riemannproblem von Sod** ist ein **relativistisches Stoßwellenrohrproblem** [5], d.h. $v_l = v_r = 0$. Die exakte Lösung besteht wieder aus einer nach links laufenden Verdünnungswelle und einer nach rechts laufenden Stoßwelle, der eine Kontaktunstetigkeit nachfolgt. Der wesentliche Unterschied zwischen dem relativistischen und nichtrelativistischen Fall kommt aus der nichtlinearen Addition der Geschwindigkeiten und der Lorentz-Kontraktion. Der erste Effekt produziert z.B. ein gekrümmtes Geschwindigkeitsprofil in einer Verdünnungswelle, während es im nichtrelativistischen Fall linear ist. Die Lorentz-Kontraktion verkleinert das Plateau hinter der Stoßwelle und führt auch dazu, daß das Kompressionsverhältnis σ an der Stoßwelle den nichtrelativistischen Grenzwert $\zeta = (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ eines idealen Gases übertreffen kann. Dies läßt sich auch quantifizieren. Man benötigt dazu die Sprungbedingungen an der Stoßwelle, üblicherweise im relativistischen Fall als **Rankine-Hugoniot-Taub-Bedingungen** bezeichnet. So erhält man etwa für einen Stoß, der in ein kaltes Medium läuft ($p_0 = 0$), ein Kompressionsverhältnis $\zeta = n/n_0$ mit dem Wert

$$(7.31) \quad \zeta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\beta - 1) , \quad \beta > 1 .$$

Diese Effekte werden natürlich im ultra-relativistischen Grenzwert (β sehr groß) sehr stark.

Die Anfangswerte für das relativistische Sod-Problem sind gegeben durch

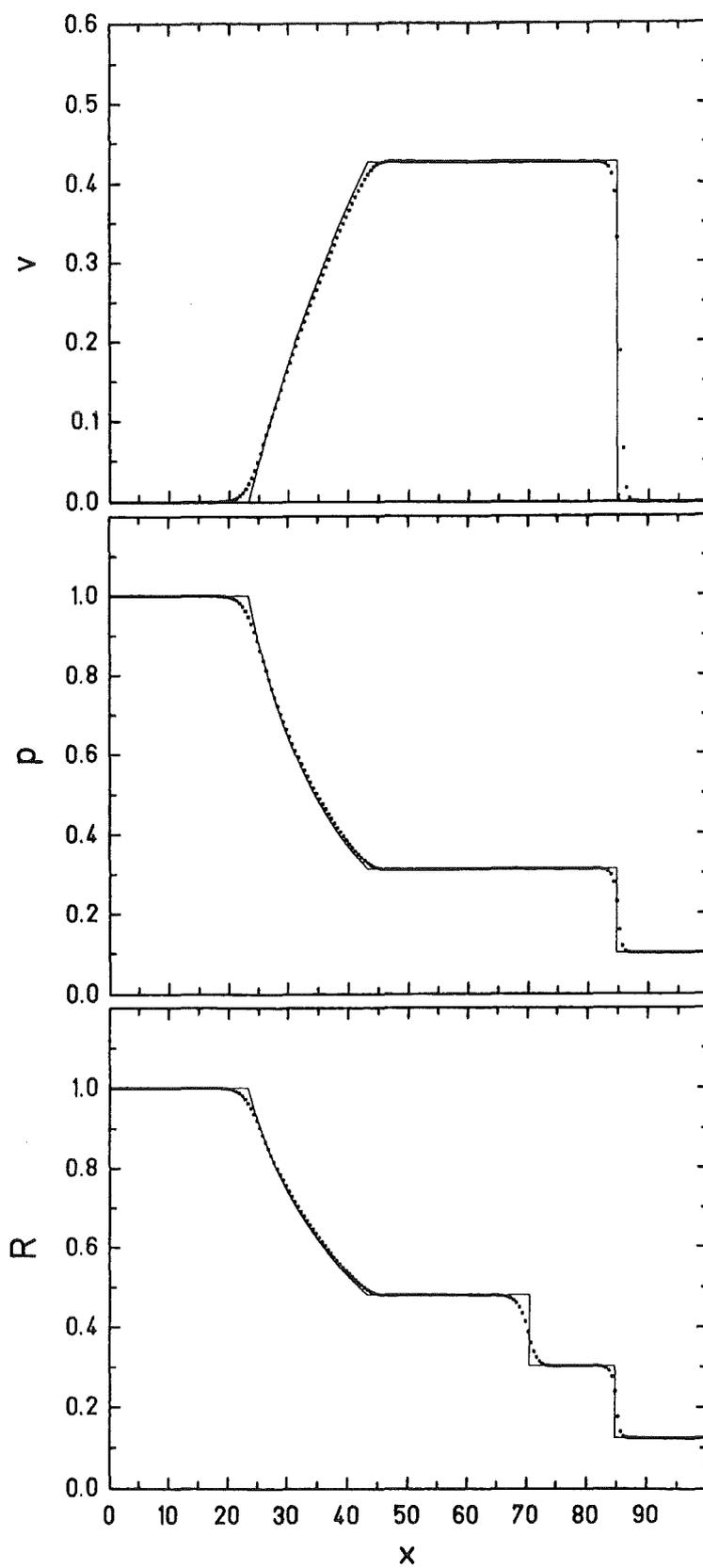
$$(7.32) \quad (n, v, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0) & \text{für } x < 0 \quad , \\ (0.125, 0.0, 0.1) & \text{für } x > 0 \quad . \end{cases}$$

Die Zustandsgleichung des idealen Gases (7.12) mit $\gamma = 1,4$ wird in den folgenden Rechnungen benutzt. Figur 7.1 zeigt die numerischen Ergebnisse des RHLL-Verfahrens zur Zeit $t = 48$. Die Diskretisierungsparameter sind hier $\Delta x = 0.5$ entsprechend 200 Gitterzellen und $\Delta t = \Delta x/3$. Es zeigt sich, daß die verschiedenen Niveaus sehr gut approximiert werden. Die exakte Lösung ist als Linie in den Bildern eingetragen, die Punkte sind die numerischen Werte. Die Stoßwelle ist über 4 Gitterpunkte hinweg approximiert, während zur Darstellung der Kontaktunstetigkeit 10 - 12 Gitterpunkte nötig sind. In dieser Rechnung wurden die Steigungen in den Erhaltungsgrößen berechnet; wobei die Steigungsberechnung mit der einfachsten Vorschrift (3.86) durchgeführt wurde.

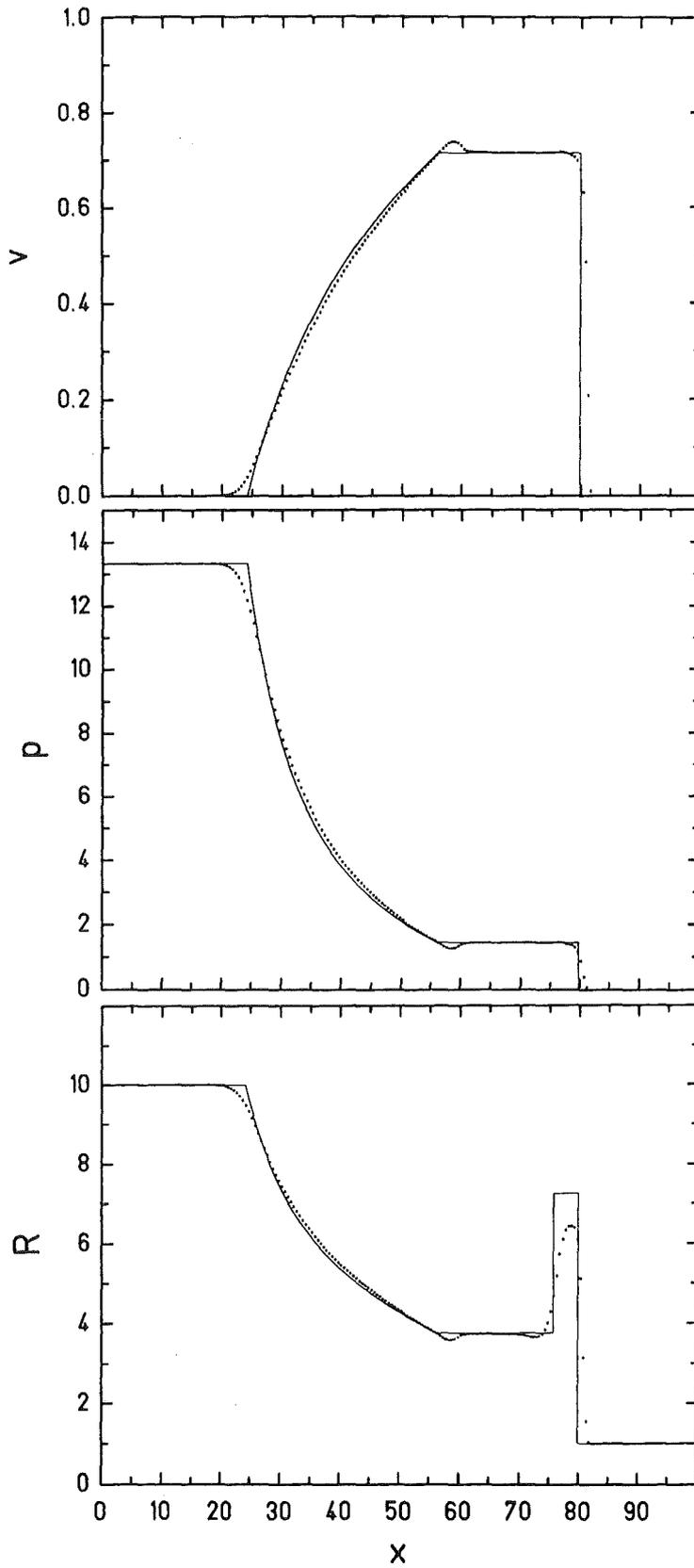
Diese Ergebnisse lassen sich gut vergleichen mit den Rechnungen von Norman und Winkler [52], die dasselbe Riemannproblem als Test für ihren vollimpliziten relativistischen Hydrodynamik-Code benutzt haben. Sie führten Rechnungen auf drei verschiedenen 200 Punkte-Gittern aus: ein äquidistantes Euler-, ein Lagrange- und ein adaptives Gitter. Die Eulerrechnungen zeigen ein starkes Überschießen zwischen Kontaktunstetigkeit und Verdünnungswelle. Die Stoßfront wird über 9 Gitterzellen dargestellt. In der Rechnung in Lagrangekoordinaten sind die Überschießer etwas kleiner, die Stoßfront wird jetzt über 13 Gitterzellen dargestellt - allerdings ist die Breite des diskreten Stoßes reduziert, da die Schrittweiten Δx im Stoß kleiner sind. Gute Resultate wurden hier nur im Falle des adaptiven Gitters erzielt, bei dem die Gitterzellen an den Unstetigkeiten konzentriert werden.

Das zweite Testproblem ist ein relativistisches Stoßwellenrohrproblem jedoch mit deutlich stärkeren relativistischen Effekten. Die Strömungsgeschwindigkeit erreicht hier fast einen Wert von 0,7. Es enthält einen sehr kalten Bereich ($p \approx 0$), welcher durch eine Stoßwelle erhitzt wird. Die Anfangswerte sind

$$(7.33) \quad (n, v, p) = \begin{cases} (10.0, 0.0, 13.33) & \text{für } x < 0 \quad , \\ (1.0, 0.0, 0.667 \cdot 10^{-6}) & \text{für } x > 0 \quad . \end{cases}$$



Figur 7.1 Relativistisches HLL-Verfahren; Problem von Sod (relativistisch)



Figur 7.2 Relativistisches HLL-Verfahren; Riemannproblem (7.33)

Die Zustandsgleichung ist die des idealen relativistischen Gases mit $\gamma = 5/3$. Durch den starken Drucksprung ist dies ein sehr schwieriges Testproblem für jedes numerische Verfahren der relativistischen Strömungsmechanik. Der HLL-Algorithmus zeigt auch bei diesem Problem eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung (Figur 7.2) und liefert eine deutlich bessere Approximation als die Methode von Centrella und Wilson [5]. Ein leichtes Unterschießen hinter der Verdünnungswelle ist jedoch beim Druck und auch bei der Dichte R an der Kontaktunstetigkeit zu sehen.

Die numerischen Resultate des Riemannproblems für die relativistischen Eulergleichungen (7.2) - (7.4) mit der ultra-relativistischen Zustandsgleichung (7.13) zeigt Figur 7.3. Der Adiabatenindex ist dabei $\gamma = 1.99$ und die Anfangswerte sind

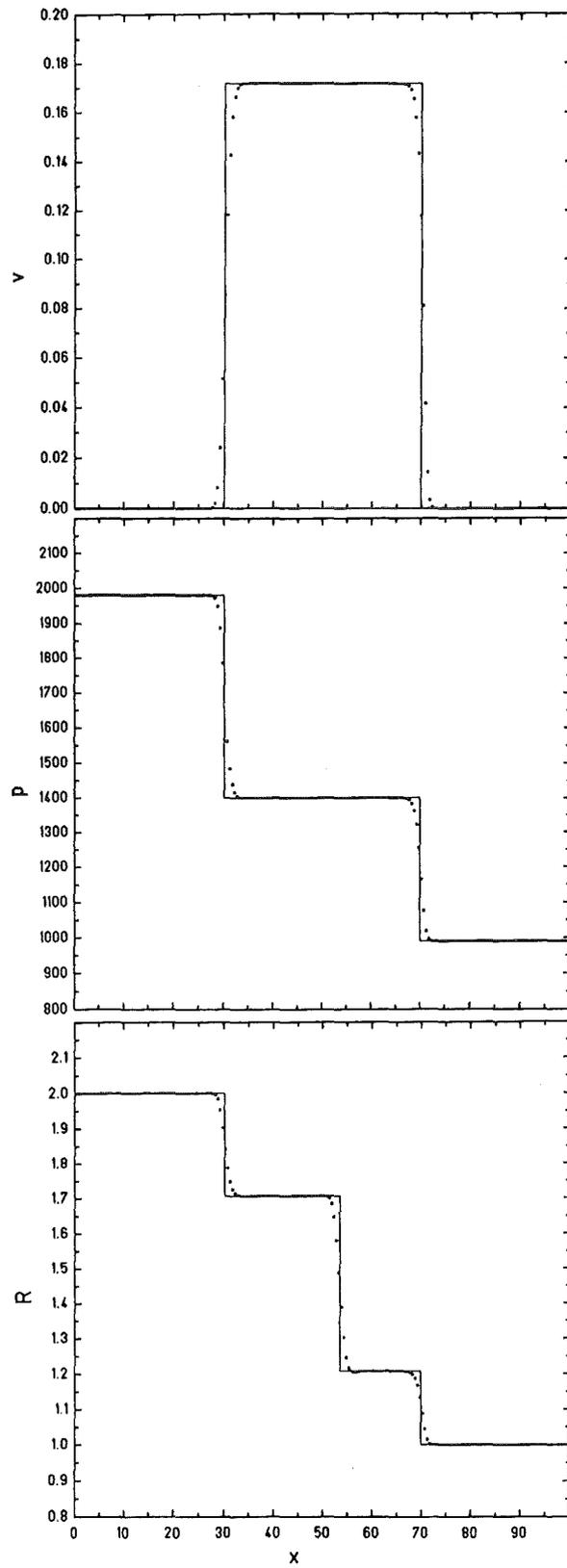
$$(7.34) \quad (n, v, p) = \begin{cases} (2.0, 0.0, 1990.0) & \text{für } x > 0 \quad , \\ (1.0, 0.0, 995.0) & \text{für } x < 0 \quad . \end{cases}$$

Die relativistische Schallgeschwindigkeit hat hier einen konstanten Wert von 0.995, die Geschwindigkeit besitzt hier ein kastenähnliches Profil. Die Approximation des HLL-Verfahrens zeigt wieder eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung. Lediglich im Dichteprofil treten ganz leichte Wellen zwischen Stoßwelle und Kontaktunstetigkeit auf.

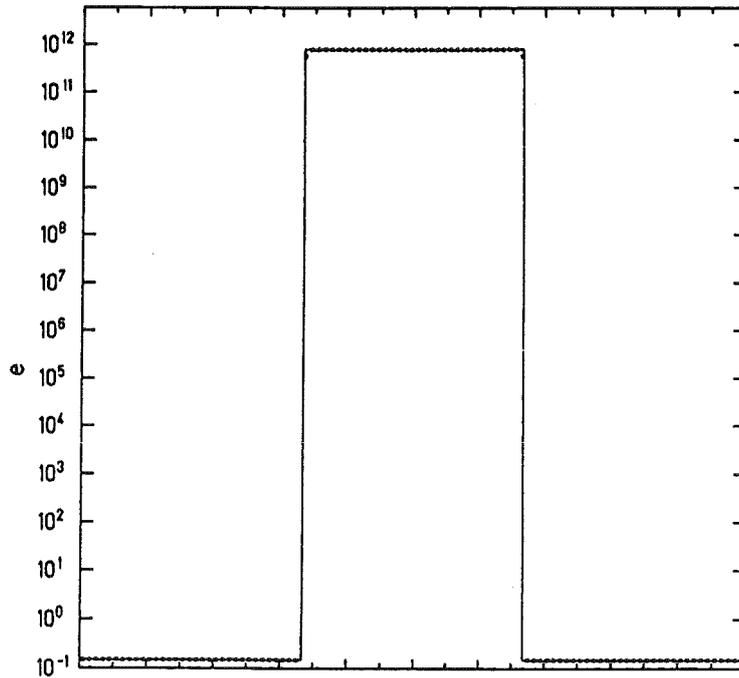
Ein weiteres Testproblem ist ein Riemannproblem, welches in [20] vorgeschlagen wurde und welches gerade im nichtrelativistischen Fall dem Anfangswertproblem entspricht, für das wir die Erhaltung der Positivität der numerischen Verfahren in Kapitel 4 und 6 ((4.20), (6.63)) untersucht haben. Die Anfangswerte lauten

$$(7.35) \quad (n, v, e) = \begin{cases} (n_0, v_0, e_0) & \text{für } x > 0 \quad , \\ (n_0, -v_0, e_0) & \text{für } x < 0 \quad . \end{cases}$$

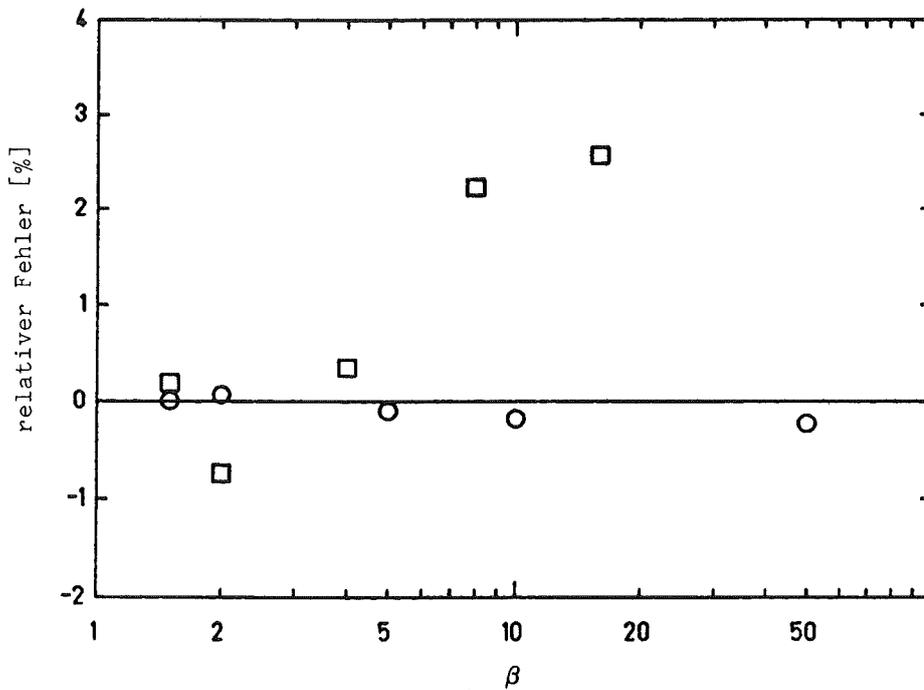
mit $v_0 > 0$. Dieses Problem hat durchaus auch einen praktischen Hintergrund. So werden in [57] damit Zustandsgleichungseffekte bei relativistischen Schwerionenkollisionen abgeschätzt. Die exakte Lösung besitzt, wie schon in Kapitel 6 beschrieben, nur einen mittleren Zustand, bestehend aus zusammengedrückter Materie mit einer Dichte $n > n_0$ und $e > e_0$. Stoßwellen laufen nach beiden Seiten in die einströmende Materie hinein. Dieses Problem ist insbesondere ganz ähnlich zu der Wechselwirkung einer festen Wand mit einer Stoßwelle, ein oft benutztes Standardtestproblem der numerischen Hydrodynamik (siehe z.B. [5], [44], [52]).



Figur 7.3 RHLL-Verfahren zweiter Ordnung; Riemannproblem 7.34, ultrarelativistische Zustandsgleichung (7.13)



Figur 7.4 RHLL-Verfahren zweiter Ordnung; Riemannproblem (7.35) mit einem Lorentzfaktor von $\beta = 10^6$



Figur 7.5 Relativer Fehler im Kompressionsverhältnis beim Aufheizen kalter Materie durch eine Stoßwelle: O RHLL-Verfahren, □ Werte aus [44]

Das HLL-Verfahren liefert hier sehr gute Ergebnisse. Figur 7.4 zeigt die Energie bei einer Kollision mit einem Lorentzfaktor β von 10^6 . Andere explizite Verfahren haben hier ganz deutliche Probleme und Beschränkungen des Lorentzfaktors ([5], [44]). Anhand des relativen Fehlers vergleichen wir in Figur 7.5 die Ergebnisse des relativistischen HLL-Verfahrens mit denen, welche von McAbee, Wilson, Zingman und Alonso [44] angegeben wurden. Sie benutzten ein gegenüber [5] etwas verbessertes Verfahren. Die Anfangswerte sind $n_0 = 1$ und $e_0 = 1$. Die Zustandsgleichung ist die des idealen Gases mit $\gamma = 5/3$. In das Diagramm in Figur 7.5 sind die relativen Fehler für verschiedene Lorentzfaktoren zwischen 1.5 und 50 eingetragen, wie sie in [5] angegeben wurden. Der relative Fehler wird dort folgendermaßen berechnet: Zunächst wird der Mittelwert \bar{n} der Dichte auf dem Plateau hinter der Stoßwelle ermittelt. Dabei wird angenommen, daß die diskrete Stoßwelle eine Breite von zwei Gitterzellen besitzt. Die Definition des relativen Fehlers lautet dann

$$(7.36) \quad \frac{\bar{n} - n_{\text{Theorie}}}{n_{\text{Theorie}}}$$

Das Diagramm 7.5 zeigt deutlich die Güte der Approximation des RHLL-Verfahrens. Insbesondere wird deutlich, daß der relative Fehler des RHLL-Verfahrens nicht von der Größe des Lorentzfaktors β abhängt.

Wir wollen noch kurz das Verhalten des RHLL-Verfahrens erster Ordnung für dieses Beispiel analysieren und nachprüfen, ob die relativistischen Bedingungen (7.1) durch die näherungsweise Riemannlösung der RHLL-Methode erfüllt werden. Die ungestörten Zustände erfüllen als sinnvolle Anfangswerte sicher (7.1). Der mittlere Zustand $U_{1r} = (R_{1r}, M_{1r}, E_{1r})$ ergibt sich nach der Formel (3.59) zu

$$(7.37) \quad R_{1r} = R_0 \left(1 + \frac{v_0}{c_s} \right), \quad M_{1r} = 0, \quad E_{1r} = E_0 \left(1 + \frac{v_0}{c_s} \right) + p_0 \frac{v_0}{c_s},$$

wobei c_s irgendein Mittelwert der Schallgeschwindigkeit ist. Dabei haben wir angenommen, daß der Mittelwert der Geschwindigkeiten v gerade Null ist, wie dies sowohl in (7.15) als auch (7.16) der Fall ist. Die Ungleichung $E_{1r} \geq M_{1r}$ folgt sofort aus der Positivität von E_0 , v_0 , c_s und p_0 . Die erste Ungleichung in (7.1) macht auch keine sehr große Mühe. So folgt aus $E_0 > R_0$ sofort

$$(7.38) \quad E_0 \left(1 + \frac{v_0}{c_s} \right) > R_0 \left(1 + \frac{v_0}{c_s} \right)$$

und weiter $E_{lr} > R_{lr}$. Die approximative Riemannlösung des HLL-Verfahrens erfüllt somit für jede Kombination der Anfangswerte (7.35) die Ungleichungen der relativistischen Hydrodynamik.

Ist v_0 in den Anfangswerten (7.35) negativ, so erkennt man sofort die Wichtigkeit der Korrektur (7.20), (7.21). Ohne diese Korrekturen folgt aus (7.37) z.B., daß die Dichte des mittleren Zustandes R_{lr} negativ wird, falls nur c_s größer als v_0 wird. An einer starken Verdünnung würden somit negative Dichten auftreten, und damit das Verfahren zusammenbrechen. Dies ist zurückzuführen auf eine Unterschätzung der physikalisch auftretenden Signalgeschwindigkeiten, die durch (7.20), (7.21) korrigiert werden.

Wir können die Ergebnisse mit dem relativistischen HLL-Verfahren zweiter Ordnung (RHLL-Verfahren) wie folgt zusammenfassen. Das RHLL-Verfahren produziert sehr gute Näherungslösungen, wie Vergleiche sowohl mit analytischen Lösungen als auch mit Ergebnissen von numerischen Verfahren aus der Literatur zeigen. In [63] wird ein Vergleich mit zwei weiteren modernen Shock-Capturing Verfahren aus der Familie der "Flux-Corrected Transport"-Verfahren durchgeführt. Diese Verfahren sind konzipiert für die numerische Lösung einer einzelnen (nichtlinearen) Transportgleichung. Das System (7.2) - (7.4) der relativistischen Hydrodynamik wird dabei wie drei einzelne Gleichungen behandelt. Diese modernen Methoden liefern auch durchweg bessere Ergebnisse als die, welche aus der Literatur bekannt sind. Als robuster und genauer - insbesondere bei hohen Lorentzfaktoren - erweist sich dabei jedoch das relativistische RHLL-Verfahren.

Anhang: Parametervektoren und Roe-Matrix in Lagrangekoordinaten

Roe gelang es in seiner Arbeit [59], eine Mittelwertmatrix für die Eulergleichungen mit der Zustandsgleichung des idealen Gases abzuleiten. Er führte dazu sogenannte Parametervektoren ein. Wir wollen hier zeigen, daß für die Gleichungen in Lagrangekoordinaten mit der Zustandsgleichung des idealen Gases ebenso ein solcher Parametervektor gefunden werden kann und damit die Roe-Matrix bestimmt werden kann.

Nach (6.14) können wir die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik in Lagrangekoordinaten in der Erhaltungsform

$$(A.1) \quad u_t + f(u)_m = 0$$

mit dem Vektor der Erhaltungsgrößen und dem Fluß

$$(A.2) \quad u = \begin{pmatrix} V \\ v \\ E \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} -v \\ p \\ vp \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Zusammenhang zwischen Druck p , spezifischem Volumen V und innerer Energie ε ist durch die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$(A.3) \quad p = (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{V} = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$$

gegeben. Weiter benötigt man noch den Zusammenhang zwischen Gesamt- und innerer Energie in der Form

$$(A.4) \quad E = \varepsilon + \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{\gamma - 1} p V + \frac{1}{2} v^2 .$$

Die Lagrangesche Schallgeschwindigkeit ist durch

$$(A.5) \quad C = \sqrt{\gamma p / V}$$

gegeben.

Wir führen nun einen sogenannten **Parametervektor** $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ ein. Dieser soll die Eigenschaft besitzen, daß sich sowohl u als auch f durch seine Komponenten ausdrücken läßt: $u = u(\mathbf{w})$, $f = f(\mathbf{w})$, wobei die Komponenten jedoch höchstens quadratisch auftreten dürfen. Diese Eigenschaft besitzt der Vektor

$$(A.6) \quad \mathbf{w} = (V, v, p)^T .$$

Die Darstellung von u und f durch die Komponenten von \mathbf{w} lautet dann

$$(A.7) \quad u = \left(w_1, w_2, \frac{1}{\gamma - 1} w_1 w_3 + \frac{1}{2} w_2^2 \right) ,$$
$$f = (-w_2, w_3, w_2 w_3) .$$

Wie gefordert treten in (A.7) nur einfache Produkte zwischen Komponenten von \mathbf{w} auf.

Die wesentliche Eigenschaft der Roe-Matrix A_{lr} ist die Mittelwertseigenschaft (3.44):

$$(A.8) \quad f(u_r) - f(u_l) = A_{lr} (u_r - u_l)$$

oder anders ausgedrückt: der Sprung in u wird durch A_{lr} auf einen Sprung in f abgebildet. Wir gehen nun einen Umweg über den Parametervektor \mathbf{w} . Wir wollen sowohl den Sprung in u als auch den in f in einfacher Weise darstellen durch sein Bild des "w-Raums", d.h. wir suchen Matrizen B_{lr} und C_{lr} mit den Eigenschaften

$$(A.9) \quad u_r - u_l = B_{lr} (w_r - w_l) ,$$

$$(A.10) \quad f(u_r) - f(u_l) = C_{lr} (w_r - w_l) .$$

Findet man solche Matrizen, so kann man daraus leicht die Roe-Matrix mittels der Beziehung

$$(A.11) \quad A_{lr} = C_{lr} B_{lr}^{-1}$$

bestimmen, welche sich aus (A.9), (A.10) direkt durch Elimination von $w_r - w_l$ ergibt.

Die Matrizen B_{lr} und C_{lr} lassen sich recht einfach bestimmen, wenn man sich die folgenden Beziehungen ins Gedächtnis ruft:

Bezeichnet $\Delta(\cdot)$ die Differenz $(\cdot)_r - (\cdot)_l$, so gelten für zwei skalare Funktionen g und h die Beziehungen

$$(A.12) \quad \Delta(g + h) = \Delta g + \Delta h$$

$$(A.13) \quad \Delta(gh) = \bar{g} \Delta h + \bar{h} \Delta g$$

wobei "—" den arithmetischen Mittelwert

$$(A.14) \quad \bar{g} = \frac{1}{2} (g_l + g_r) \quad , \quad \bar{h} = \frac{1}{2} (h_l + h_r)$$

bezeichnet. Da in (A.7) nur einfache Produkte zwischen den Komponenten von w und eine Summe auftreten, läßt sich mittels (A.12) - (A.14) leicht verifizieren, daß

$$(A.15) \quad B_{lr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma-1} \bar{w}_3 & \bar{w}_2 & \frac{1}{\gamma-1} \bar{w}_1 \end{pmatrix}$$

und

$$(A.16) \quad C_{lr} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{w}_3 & \bar{w}_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Dabei bezeichnet "—" wie oben den arithmetischen Mittelwert.

Nach Formel (A.11) können wir die Roe-Matrix A_{lr} bestimmen. Ihre Eigenwerte $a_i, i = 1, 2, 3$, ergeben sich aus

$$(A.17) \quad \det(C_{lr} - a B_{lr}) = 0$$

zu

$$(A.18) \quad a_1 = -\sqrt{\gamma \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}} \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = \sqrt{\gamma \frac{\bar{w}_3}{\bar{w}_1}} \quad .$$

Setzt man die Definitionen von w_1 , w_2 und w_3 in (A.18) ein, so sieht man, daß A_{1r} gerade der Jakobi-Matrix $df(u)/du$ ausgewertet an dem Mittelwert u entspricht, wobei sich u aus

$$(A.19) \quad \bar{V} = \frac{1}{2} (V_1 + V_r)$$

$$(A.20) \quad \bar{v} = \frac{1}{2} (v_1 + v_r)$$

$$(A.21) \quad \bar{p} = \frac{1}{2} (p_1 + p_r)$$

ergibt. Alle weiteren Mittelwertsgrößen berechnen sich daraus nach (A.3) bis (A.5). Die Matrix A_{1r} stimmt dabei mit der in Kapitel 5 gefundenen Roe-Matrix (siehe Bemerkung 1 von Kapitel 6) überein.

Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die Roe-Matrix für die Zustandsgleichung des idealen Gases unter den hier benutzten Annahmen $A_{1r} = A(\bar{u})$ und (6.39) eindeutig bestimmt ist. Dies ist folgendermaßen einzusehen. Seien \tilde{u} und \bar{u} zwei verschiedene Roe-Mittelwerte, welche jeweils eine Roe-Matrix $A(\tilde{u})$ und $A(\bar{u})$ definieren. Nach den Ausführungen in Kapitel 6 (Formel (6.33), (6.37) gilt zunächst $\tilde{V} = \bar{V}$ und $\tilde{p} = \bar{p}$. Setzt man die Beziehungen (6.39) voraus, so folgt aus (6.36) weiter auch $\tilde{V} = \bar{V}$. Damit ist \tilde{u} und \bar{u} bestimmt und es ergibt sich $\tilde{u} = \bar{u}$ als Widerspruch zu unserer Annahme. Im allgemeinen Fall ist die Eindeutigkeitsaussage falsch, wie die Ausführungen in Kapitel 6 zeigen.

Literatur

- [1] A.A. Amsden, G.F. Bertsch, F.H. Harlow und J.R. Nix: Relativistic hydrodynamic theory of heavy-ion collisions, *Physical Review Letters* 35 (1975), 905 - 908
- [2] A.A. Amsden, F.H. Harlow und J.R. Nix: Relativistic nuclear fluid dynamics, *Physical Review C* 15 (1977), 2059 - 2071
- [3] M. Artola und A.J. Majda: Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets I: The basic kink modes, *Physica* 28 D (1987), 253 - 281
- [4] G.L. Brown und A. Roshko: On density effects and large structures in turbulent mixing layers, *J. Fluid Mech.* 64 (1974), 775 - 816
- [5] J. Centrella und J.R. Wilson: Planar numerical cosmology II. The difference equations and numerical tests, *Astrophys. J. Suppl.* 54 (1984), 229 - 249
- [6] A.J. Chorin und J.E. Marsden: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1979
- [7] P. Colella und H.M. Glaz: Efficient solution algorithms for the Riemann problem for real gases, *J. Comput. Phys.* 59 (1985), 264 - 289
- [8] R. Courant, E. Isaacson und M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 5 (1953), 243-255
- [9] R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy: Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, *Math. Annalen* 100 (1928), 31 - 74
- [10] M. Crandall and A. Majda: The method of fractional steps for conservation laws, *Numer. Math.* 34 (1980), 285 - 314
- [11] S.F. Davis: Simplified second-order Godunov-type methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 9 (1988), 445 - 473

- [12] R.J. DiPerna: Convergence of approximate solutions to conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 27 - 70
- [13] R.J. DiPerna: Finite difference schemes for conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1982), 379-450
- [14] P.G. Drazin und W.H. Reid: Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge 1981
- [15] D.W. Dunn und C.C. Lin: On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid, J. Aero. Sci. 22 (1955), 455 - 477
- [16] M. van Dyke: An Album of Fluid Motion, Parabolic Press, Stanford California 1982
- [17] B. Einfeldt: On Godunov-type methods for gas dynamics, SIAM J. Numer. Anal. 25 (1988), 294 - 318
- [18] B. Einfeldt, C.-D. Munz, P.L. Roe und B.J. Sjögreen: On Godunov-type methods near low densities, J. Comput. Phys. 92 (1991), 273 - 295
- [19] B. Einfeldt und C.-D. Munz: Die numerische Behandlung zweidimensionaler Strömungen mit starken Stoßwellen, KfK-Bericht Nr. 4191, Kernforschungszentrum Karlsruhe 1987
- [20] J.M. Eisenberg und W. Greiner: Nuclear Theory Volume I: Nuclear Models, North Holland, Amsterdam/Oxford/New York/Tokio 1987
- [21] P. Glaister: An approximate linearised Riemann solver for the Euler equations for real gases, J. Comput. Phys. 74 (1988), 382 - 401
- [22] J. Glimm: Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure and Appl. Math. 18 (1965), 697-715
- [23] S.K. Godunov: Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, Mat. Sbornik 47 (1959), 271 - 306 (russisch)

- [24] B. Gustafsson und A. Sundström: Incompletely parabolic problems in fluid dynamics, *SIAM J. Appl. Math.* 35 (1978), 343 - 357
- [25] A. Harten: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 49 (1983), 357 - 393
- [26] A. Harten: On the symmetric form of conservation laws with entropy, *J. Comput. Phys.* 49 (1983), 151 - 164
- [27] A. Harten, P.D. Lax und B. van Leer: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.* 25 (1983), 35-62
- [28] A. Harten und P.D. Lax: A random choice finite difference scheme for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 18 (1981), 289 - 315
- [29] J.F. Hawley, L.L. Smarr und J.R. Wilson: A numerical study of nonspherical black hole accretion I. Equations and test problems, *Astrophysical J.* 277 (1984), 296 - 311
- [30] C.-M. Ho und P. Huerre: Perturbed free shear layers, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 16 (1984), 365 - 424
- [31] E. Hopf: On the right weak solution of the Cauchyproblem for a quasi-linear equation of first order, *J. of Math. and Mech.* 19 (1969), 483-487
- [32] T.L. Jackson and C.E. Grosch: Spatial stability of a compressible mixing layer, ICASE-Report 88 - 3
- [33] R. Klein, C.-D. Munz und L. Schmidt: A numerical study of interfacial instabilities at high Mach numbers, *Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. 29* (Ed. P. Wesseling), Vieweg Verlag, Wiesbaden 1990, 242 - 251
- [34] P.D. Lax: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, SIAM 1972

- [35] P.D. Lax: Shock waves and entropy, Proc. Symposium at the University of Wisconsin, 1971, E.H. Zarantonello (Ed.), 603-634
- [36] P.D. Lax: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure and Appl. Math. 7 (1954), 159-193
- [37] P.D. Lax und B. Wendroff: Systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 217-237
- [38] B. van Leer: On the relation between the upwind differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, SIAM J. Sci. Stat. Comp. 5 (1984), 1-20
- [39] B. van Leer: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method, J. Comput. Phys. 32 (1979) 101-136
- [40] M. Lessen, J.A. Fox und H.M. Zien: Stability of laminar mixing of two parallel streams with respect to supersonic disturbances, J. Fluid Mech. 25 (1966), 737 - 742
- [41] C.C. Lin: The Theory of Hydrodynamic Instability, Cambridge University Press, Cambridge 1955
- [42] M.-S. Liou, B. van Leer und J.S. Shuen: Splitting of inviscid fluxes for real gases, J. Comput. Phys. 87 (1990), 1 - 24
- [43] G.I. Marchuk: Methods of Numerical Mathematics, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1975
- [44] T.L. McAbee, J.R. Wilson, J.A. Zingman und T.C. Alonso: Hydrodynamic simulations of $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ collisions at 200 GeV/N, Mod. Phys. Lett. A 4 (1989), 983 - 993
- [45] R.W. McCormack: Current status of numerical solutions of the Navier-Stokes equations, AIAA-Paper 85-0032 (1985)
- [46] R. Menikoff und B.J. Plohr: The Riemann problem for fluid flow of real material, Reviews of Modern Physics 61 (1989), 75 - 130

- [47] J.W. Miles: On the disturbed motion of a plane vortex sheet, *J. Fluid Mech.* 4 (1958), 538 - 552
- [48] J.L. Montagne, H.C. Yee und M. Vinokur: Comparative study of high-resolution shock-capturing schemes for a real gas, *AIAA Journal* 27 (1988), 1332 - 1346
- [49] C.-D. Munz: Theorie und Numerik nichtlinearer hyperbolischer Differentialgleichungen I. Die skalare Erhaltungsgleichung, KfK-Bericht 4805, Kernforschungszentrum Karlsruhe 1990
- [50] C.-D. Munz: On the numerical dissipation of high resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 77 (1988), 18 - 39
- [51] C.-D. Munz: On the construction and comparison of two-step schemes for the Euler equations, *Notes on Numerical Fluid Mechanics* 14, E.H. Hirschel (Ed), Vieweg Verlag Wiesbaden 1986, 195 - 217
- [52] M.L. Norman und K.A. Winkler: Why ultra-relativistic numerical hydrodynamics is difficult, in *Astrophysical Radiation Hydrodynamics* (ed. M.L. Norman und K.A. Winkler), D. Reidel Publishing Company (1986), 449 - 476
- [53] O.A. Oleinik: Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation, *Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2*, 33 (1963), 285 - 289
- [54] O.A. Oleinik: Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, *Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2*, 26 (1957), 95-172
- [55] D. Papamoschou: Experimental investigation of heterogeneous compressible shear layers, Thesis, California Institute of Technology, Pasadena 1986
- [56] R.D. Richtmyer und K.W. Morton: *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York/London/Sydney 1967
- [57] D.H. Rischke, B.L. Friman, B.M. Waldhauser, H. Stöcker und W. Greiner: Shock discontinuities around the confinement-deconfinement transition in baryon-rich dense matter, *Physical Review D* 41 (1990), 111 - 128

- [58] P.L. Roe: Some contributions to the modelling of discontinuous flows, Lectures in Applied Mathematics 22 (AMS, Providence 1985), 163 - 193
- [59] P.L. Roe: Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, J. Comput. Phys. 43 (1981), 357 - 372
- [60] P.L. Roe: The use of the Riemann problem in finite difference schemes, Lecture Notes in Physics 141, Springer Verlag 1981, 354 - 359
- [61] V.V. Rusanov: Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles, J. Comput. Math. Phys., USSR, 1 (1961), 267 - 279
- [62] H. Schlichting: Grenzschichttheorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958
- [63] V. Schneider, U. Katscher, D.H. Rischke, B. Waldhauser, J.A. Maruhn und C.-D. Munz: New algorithms for ultra-relativistic numerical hydrodynamics, UFTP-Preprint 250/1990
- [64] W. Schröder und D. Hänel: An unfactored implicit scheme with multigrid acceleration for the solution of the Navier-Stokes equations, Computers and Fluids 15 (1987), 313 - 336
- [65] J. Serrin: Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, Handbuch der Physik Band VIII/1, Springer Verlag 1959
- [66] J. Smoller: Shock Waves and Reaction Diffusion Equations, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983
- [67] G.A. Sod: A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 27 (1978), 1 - 31
- [68] G. Strang: On the construction and comparison of difference schemes, SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968), 506 - 517
- [69] J.A. Vieceilli: Estimating limits on resolution and predictability in computations of hydrodynamically unstable flows, J. Comput. Phys. 74 (1988), 456 - 476

- [70] C.D. Winant und F.K. Browand: Vortex pairing, the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 63 (1974), 237 - 255

- [71] P. Woodward und P. Colella: The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.* 54 (1984), 115 - 173

- [72] N.N. Yanenko: *The Method of Fractional Steps*, Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin 1971

Benutzte Symbole

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}_0^+	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
C^k	Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen
C_0^k	Raum der Funktionen aus C^k mit kompaktem Träger
L^∞	Raum der Lebesgue-meßbaren Funktionen, welche fast überall beschränkt sind
L^1	Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen
L_{lok}^1	Raum der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen
\subset	Teilmenge
ε	Element von
u_x	Abkürzung von $\partial u / \partial x$
(a, b) mit Vektoren a, b	Skalarprodukt

Stichwortverzeichnis

Anfangswertproblem	5	Navier-Stokes Gleichungen	47
approximative Riemannlösung	23, 25, 29	numerische Dissipation	20, 74, 111
CFL-Bedingung	19, 51	numerischer Fluß	15, 20, 24
CIR-Verfahren	19	numerischer Entropiefluß	16, 27
charakteristisches Feld	13	positive Verfahren	42, 95
charakteristische Form	18, 36	positivitätserhaltend	42, 95
Dreipunkt-Verfahren	19	Prandtlzahl	47
Entropiefluß	7, 16	quasilineare Form	5, 18
Entropiefunktion	7, 16	Rankine Hugoniot Bedingungen	6, 39
Entropieungleichung	8, 9, 16	relativistische Hydrodynamik	132
Erhaltungsgleichungen	5, 83	Reynoldszahl	54, 61
Erhaltungsform	15	RHLL-Verfahren	134
Eulergleichungen	38	Riemannlöser	23, 25
Fluß	5	Riemannproblem	12, 21, 86, 107
Flußvektor-Splitting Verfahren	32	Roe-Verfahren	25, 40, 85, 87
Gasdynamik	9, 38	Roe-Matrix	25, 89, 91, 147
Godunov-Verfahren	21, 40, 45, 106	Rusanov-Verfahren	32
Godunov-Typ Verfahren	24, 46, 106	Scherströmung	51
harmonische Störung	63, 66	schwache Lösung	5, 16
HLL-Verfahren	28, 96, 134	Splitting-Methode	48
HLL-Verfahren	31, 101	Sprungbedingung	6
hyperbolisch	5, 18	Steigungsberechnung	35, 37, 103, 112
integrale Formulierung	6, 15	Stoßwelle	11, 14, 30, 108
Kelvin-Helmholtz Instabilität	53, 59	Streichlinien	56
klassische Lösung	6	streng nichtlinear	13
Knick-Moden	56, 80	Upwind-Verfahren	19
Konsistenz	15, 16, 23	Vakuum	43, 93
Kontaktunstetigkeit	11, 29, 99	Verdünnungswelle	13, 30, 44, 108
Lagrangekoordinaten	81, 83	Verfahren in Erhaltungsform	15
Lax-Friedrichs Verfahren	32	Viskosität	7, 9, 47, 49
linear entartet	13	Wärmeleitung	47
lineares hyperbolisches System	18	Wirbelpaaren	51, 63
Lyapunov Zahlen	69	Wirbelverschmelzen	64, 66
Markerteilchen	57	Zeitschrittweitensteuerung	125
Mittelwertseigenschaft	25, 40, 87, 148	Zustandsgleichung	38, 83, 88
MUSCL-Verfahren	33, 102	Zwischenschrittmethode	48