

KfK 5324  
Mai 1994

# **Asymptotische Lösung für die Nachlaufströmung eines beheizten Zylinders**

R. Griesbaum, P. Ehrhard, U. Müller  
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



**KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**

**Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik**

**KfK 5324**

**Asymptotische Lösung für die Nachlaufströmung  
eines beheizten Zylinders**

**R. Griesbaum, P. Ehrhard, U. Müller**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe**

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0303-4003

## Asymptotische Lösung für die Nachlaufströmung eines beheizten Zylinders

Ausgehend von der Näherungslösung für den laminaren, isothermen Zylindernachlauf wird der laminare Nachlauf hinter einem schwach beheizten Zylinder modelliert. Der Zylinder wird entgegen der Richtung des Schwerevektors angeströmt. Das Problem wird zweidimensional und stationär betrachtet. Unter Verwendung der *Boussinesq*-Approximation bilden die skalierten Grenzschichtgleichungen die Basis zur Beschreibung dieser Strömung. Die gesuchten asymptotischen Lösungen werden nach dem Parameter  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  entwickelt. Die ersten beiden Ordnungen dieser Entwicklung werden betrachtet.

Die Lösung der ersten Ordnung liefert das bekannte Stromfeld des linearisierten Zylindernachlaufs. Darüber hinaus ist das Temperaturprofil durch die eingebrachte Wärme gekennzeichnet. Die Temperaturunterschiede erzeugen jedoch in dieser Näherung keine Auftriebskräfte in der Impulsgleichung. Die zweite Ordnung der asymptotischen Lösung enthält die Nichtlinearitäten und berücksichtigt zudem Auftriebseffekte. Die typischen Merkmale des beheizten Nachlaufs, wie die Dicke von kinematischer und thermischer Grenzschicht sowie die Amplituden von Geschwindigkeit und Temperatur auf der Symmetrieachse, können so als Funktion der Parameter diskutiert werden. Dies sind neben den Geometrieparametern die *Reynolds*-Zahl, die *Prandtl*-Zahl und die *Grashof*-Zahl.

## Asymptotic solution for the far wake of a heated cylinder

Based on the approximate solution for the laminar far wake of an isothermal cylinder, we derive a model for the far wake of a weakly-heated cylinder. Forced flow is upward against gravity, while the problem is considered to be two-dimensional and steady. A scaled version of boundary layer equations in conjunction with *Boussinesq's* approximation are the basis for an asymptotic expansion using the small parameter  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$ . Two leading orders of this expansion are discussed.

In a first order we find the well-know flow field associated with the linearized far wake of a cylinder in conjunction with a gaussian temperature profile resulting from heat input. There are, however, no buoyancy forces present in the momentum equation of this approximation. The second order accounts for nonlinearities of momentum and heat transport and includes buoyant effects. The typical properties of this heated far wake, as e.g. kinematic or thermal boundary layer thickness and velocity or temperature amplitudes are discussed in their functional dependancy on the parameters. The parameters considered are the *Reynolds*-number, the *Prandtl*-number, the *Grashof*-number, as well as geometry.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problemstellung</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Mathematische Formulierung</b>	<b>5</b>
3.1	Grundgleichungen . . . . .	5
3.2	Grenzschichtapproximation . . . . .	8
3.3	Ähnlichkeitstransformation in der ersten Ordnung . . . . .	14
3.4	Ähnlichkeitstransformation in der zweiten Ordnung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>19</b>
4.1	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile im Nachlauf . . . . .	20
4.1.1	Lösung der ersten Ordnung . . . . .	20
4.1.2	Lösung der zweiten Ordnung . . . . .	22
4.2	Parametervariation . . . . .	28
4.2.1	Variation der REYNOLDS-Zahl . . . . .	28
4.2.2	Variation der GRASHOF-Zahl . . . . .	30
4.2.3	Variation der PRANDTL-Zahl . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Konvergenzbereich</b>	<b>35</b>
5.1	Abschätzung der Grenzschichtdicke . . . . .	35
5.2	Abschätzung der Amplituden der Ähnlichkeitsfunktionen . . . . .	36
5.3	Konvergenzbereich der asymptotischen Lösungen . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Diskussion, Zusammenfassung</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>47</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>49</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Nachlauf hinter dem beheizten Zylinder . . . . .	4
4.1	Profile der Längsgeschwindigkeit $u$ in der ersten Ordnung bei verändertem $x$ . . . . .	20
4.2	Profile der Quergeschwindigkeit $v$ in der ersten Ordnung bei verändertem $x$ . . . . .	21
4.3	Profile der Temperatur $\Theta$ in der ersten Ordnung bei verändertem $x$ . . . . .	21
4.4	Superposition der Lösungen von erster und zweiter Ordnung . . . . .	23
4.5	Profile der Längsgeschwindigkeit $u$ bei verändertem $x$ . . . . .	23
4.6	Profile der Quergeschwindigkeit $v$ bei verändertem $x$ . . . . .	24
4.7	Profile der Temperatur $\Theta$ bei verändertem $x$ . . . . .	24
4.8	Dicke der kinematischen Grenzschicht $\delta$ als Funktion von $x$ . . . . .	26
4.9	Dicke der thermischen Grenzschicht $\delta_{th}$ als Funktion von $x$ . . . . .	26
4.10	Längsgeschwindigkeit $u$ auf der $x$ -Achse als Funktion von $x$ . . . . .	27
4.11	Temperatur $\Theta$ auf der $x$ -Achse als Funktion von $x$ . . . . .	27
4.12	Profile der Längsgeschwindigkeit $u$ bei Variation der REYNOLDS-Zahl . . . . .	29
4.13	Profile der Temperatur $\Theta$ bei Variation der REYNOLDS-Zahl . . . . .	29
4.14	Dicke der kinematischen und der thermischen Grenzschicht, $\delta$ und $\delta_{th}$ , als Funktion der REYNOLDS-Zahl . . . . .	30
4.15	Profile der Längsgeschwindigkeit $u$ bei Variation der GRASHOF-Zahl . . . . .	31
4.16	Längsgeschwindigkeit $u$ auf der $x$ -Achse als Funktion der GRASHOF-Zahl . . . . .	31
4.17	Profile der Temperatur $\Theta$ bei Variation der GRASHOF-Zahl . . . . .	32
4.18	Profile der Längsgeschwindigkeit $u$ bei Variation der PRANDTL-Zahl . . . . .	33
4.19	Profile der Temperatur $\Theta$ bei Variation der PRANDTL-Zahl . . . . .	33
4.20	Dicke der thermischen Grenzschicht $\delta_{th}$ als Funktion der PRANDTL-Zahl . . . . .	34
5.1	Widerstandsbeiwert von Kreiszyklindern in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl . . . . .	38
5.2	Modell für den Widerstandsbeiwert von laminar umströmten Kreiszyklindern in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl . . . . .	39

5.3	Stabilitätsbereich für Wendepunktprofile in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl $Re_\delta$ . . . . .	39
-----	---	----

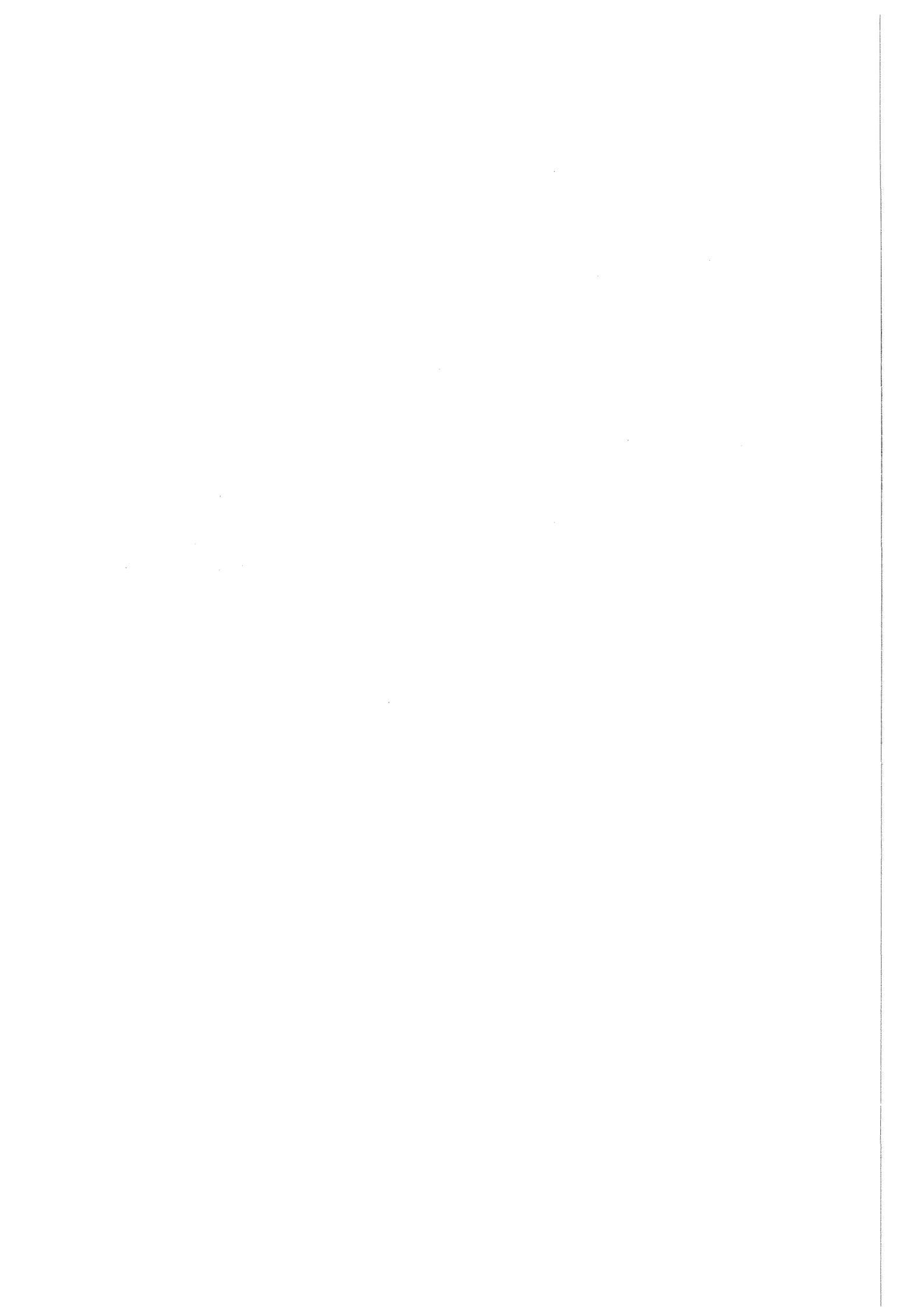


# Kapitel 1

## Zusammenfassung

Ausgehend von der ähnlichen Näherungslösung für den laminaren, isothermen Zylindernachlauf wird der laminare Nachlauf hinter einem schwach beheizten Zylinder modelliert. Der Zylinder wird entgegen der Richtung des Schwerevektors angeströmt. Das Problem wird zweidimensional und stationär betrachtet. Unter Verwendung der BOUSSINESQ-Approximation bilden die skalierten Grenzschichtgleichungen die Basis zur Beschreibung dieser Strömung. Die gesuchten asymptotischen Lösungen werden nach dem kleinen Parameter  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  entwickelt. Die ersten beiden Ordnungen dieser Entwicklung werden betrachtet.

Die Lösung der ersten Ordnung liefert das bekannte Stromfeld des linearisierten Nachlaufs. Darüber hinaus ist das Temperaturprofil durch die eingebrachte Wärme gekennzeichnet. Die Temperaturunterschiede erzeugen jedoch in dieser Näherung keine Auftriebskräfte in der Impulsgleichung. Die zweite Ordnung der asymptotischen Lösung enthält die Nichtlinearitäten und berücksichtigt zudem die Auftriebseffekte. Die typischen Merkmale des beheizten Nachlaufs, wie die Dicke der kinematischen und der thermischen Grenzschicht und die Amplituden von Geschwindigkeit und Temperatur auf der Symmetrieachse, können so als Funktion der Parameter diskutiert werden. Dies sind neben Geometrieparametern die REYNOLDS-Zahl, die PRANDTL-Zahl und die GRASHOF-Zahl.



# Kapitel 2

## Problemstellung

Wir behandeln den laminaren Nachlauf eines beheizten, unendlich langen Zylinders, der senkrecht zu seiner Achse von einem zähen, wärmeleitenden Fluid angeströmt wird. Wir beschränken uns dabei auf den ausgebildeten Nachlauf in einer gewissen Entfernung vom Zylinder.

Abbildung 2.1 zeigt eine Ansicht in Richtung der Achse des Zylinders. Mit  $U_\infty$  bezeichnen wir die Geschwindigkeit der gleichförmigen Anströmung, mit  $T_\infty$  ihre Temperatur und mit  $p_\infty$  ihren Druck. Die  $x$ -Achse hat die Richtung dieser Anströmung, die  $y$ -Achse steht senkrecht auf ihr und der Ursprung  $O$  liegt im Zentrum des Zylinders. Der Zylinder hat den Durchmesser  $d$ . Entgegen der Hauptströmungsrichtung wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . Der Zylinder wird mit einer konstanten Heizleistung  $\dot{Q}$  beheizt. Wir wollen das Problem zweidimensional und stationär betrachten.

Wir überlagern also Zwangskonvektion aufgrund der Anströmung und Naturkonvektion aufgrund der Beheizung zur Mischkonvektion. Das Geschwindigkeitsprofil  $u(x, y)$  in Abbildung 2.1 resultiert aus dieser Überlagerung. Die Nachlaufdelle (gepunktetes Profil) hat ihre Ursache allein in der Verdrängungswirkung des Zylinders. Durch den Widerstand des Zylinders in der Strömung wird die Strömung verzögert. Zusätzlich führt die Beheizung des Zylinders zu Temperaturunterschieden im Fluid. Diese sind im Temperaturprofil  $T(x, y) - T_\infty$  aufgetragen. Bei temperaturabhängiger Dichte stellt sich dann, unter dem Einfluß der Erdbeschleunigung, eine Naturkonvektion über dem Zylinder ein. Die daraus resultierende Beschleunigung der Strömung führt schließlich zum dargestellten Geschwindigkeitsprofil  $u(x, y)$ .

Der Widerstand  $W$  des Zylinders und die eingebrachte Wärme  $\dot{Q}$  gehen nicht in die Differentialgleichungen ein. Um ihren Einfluß zu erfassen, müssen wir einen Kontrollraum (A-B-C-D) festlegen und für diesen eine Impuls- und Wärmebilanz aufstellen.

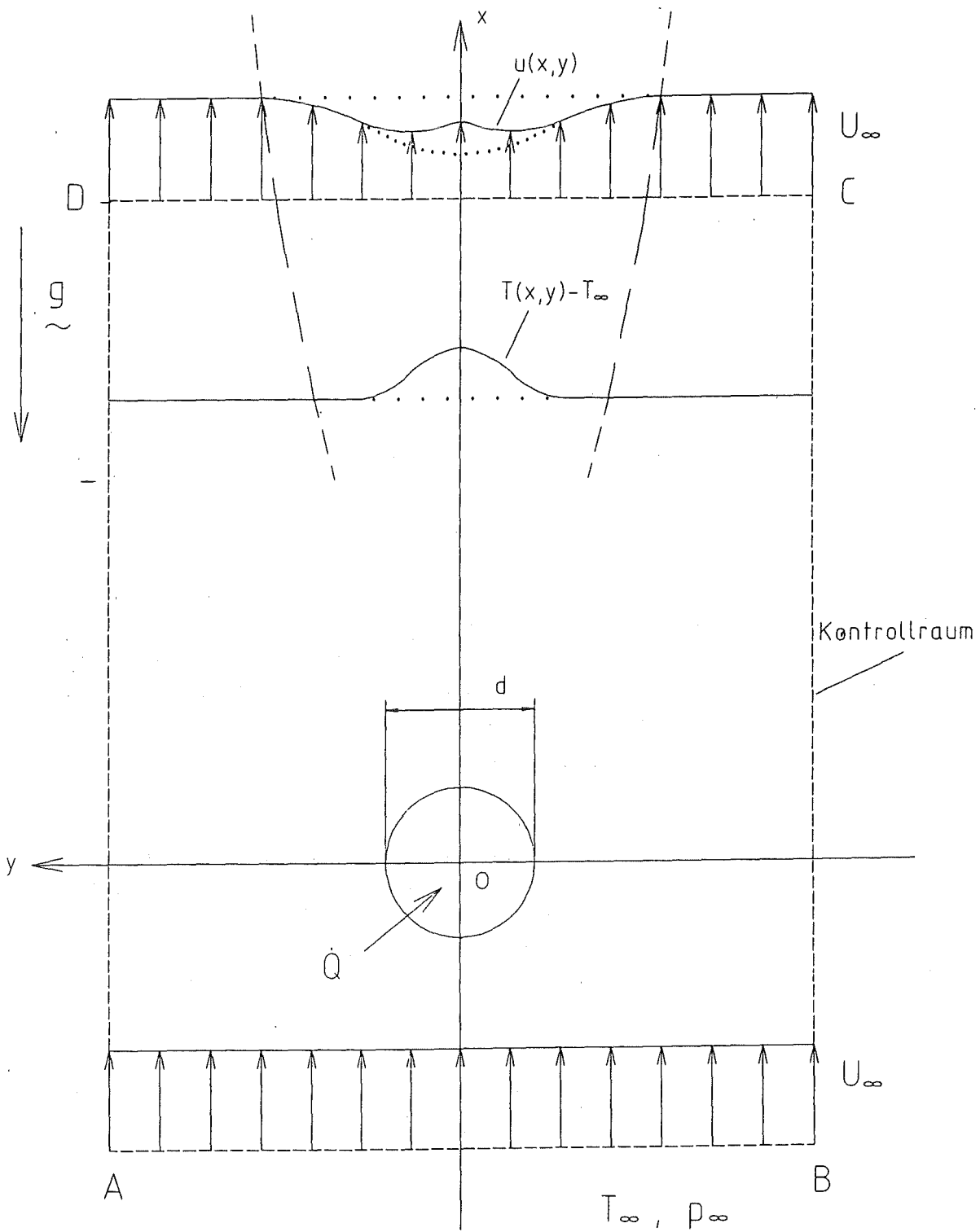


Abbildung 2.1: Nachlauf hinter dem beheizten Zylinder

# Kapitel 3

## Mathematische Formulierung

### 3.1 Grundgleichungen

Für inkompressible Strömungen einer NEWTONschen Flüssigkeit lauten die NAVIER-STOKES-Gleichungen für den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{w} = (u, v, w)$  und den Druck  $p$  in Vektorform, siehe [5] S. 143,

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{w},$$

mit der Dichte  $\rho$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$ . Hierbei ist der LAPLACE-Operator durch  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  gegeben. Wir wollen ausschließlich die laminare Nachlaufströmung behandeln. Die Reibungsterme auf der rechten Seite der NAVIER-STOKES-Gleichungen beschreiben somit die Schub- und Normalspannungen nach NEWTON. Die Massenkkräfte  $\vec{f}$  sind durch einen Auftriebsterm in der  $x$ -Richtung verursacht. Wenn wir im folgenden mit  $p$  den dynamischen Druck bezeichnen und uns auf den stationären Fall beschränken erhalten wir

$$(\vec{w} \text{ grad}) \vec{w} = -(\rho - \rho_\infty) g \vec{e}_x - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{w}.$$

Zur weiteren Vereinfachung der Impulsbilanzgleichungen verwenden wir die sogenannte BOUSSINESQ-Approximation (siehe [1], S. 8), die folgendes festlegt:

1. Zähes, wärmeleitendes Medium mit

- $\mu = \text{const.}$  (dynamische Viskosität),
- $\lambda = \text{const.}$  (Wärmeleitfähigkeit),
- $c_p = \text{const.}$  (spezifische Wärme),
- $\nu = \mu/\rho_\infty = \text{const.}$  (kinematische Viskosität),
- $\kappa = \lambda/\rho_\infty c_p = \text{const.}$  (Temperaturleitfähigkeit).

2. Die Dichte wird als konstant angesehen mit Ausnahme im Auftriebsterm der Impulsbilanzgleichung. Dort wird eine lineare Dichte-Temperatur-Beziehung gemäß

$$\rho = \rho_\infty (1 - \alpha(T - T_\infty))$$

verwendet, wobei  $\alpha$  den Volumenausdehnungskoeffizienten bezeichnet.

Mit diesen Voraussetzungen erhalten wir die Impulsbilanzgleichungen für die zweidimensionale Strömung zu

$$\rho_\infty \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \alpha(T - T_\infty)g, \quad (3.1)$$

$$\rho_\infty \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3.2)$$

Hinzu tritt die Massenbilanzgleichung (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

und die Energiebilanzgleichung (Wärmeproduktion durch Dissipation wird vernachlässigt)

$$\rho_\infty c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (3.4)$$

Die unser Problem beschreibenden Randbedingungen lauten (vgl. Abbildung 2.1)

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0 & : \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad x > 0 & : \quad u = U_\infty, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad T = T_\infty, \quad p = p_\infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dieses Gleichungssystem, Gl. (3.1) bis Gl. (3.5), hat die triviale Lösung

$$u = U_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad p = p_\infty,$$

die der ungestörten Anströmung entspricht. Wir wollen im folgenden zusätzliche Bedingungen angeben, die die Existenz einer nichttrivialen Lösung erzwingen. Zu diesem Zweck legen wir um den Zylinder einen Kontrollraum, der in  $y$ -Richtung den Nachlauf vollständig einschließt, siehe A-B-C-D in Abbildung 2.1. Auf diesen Kontrollraum werden wir zunächst den Impulssatz in  $x$ -Richtung anwenden und anschließend die Wärmebilanz aufstellen. Die integralen Bilanzen werden pro Längeneinheit formuliert. Formal wird der Kontrollraum zunächst mit endlichen Grenzen angenommen und anschließend der Grenzübergang für unendlich große Grenzen gemacht (im folgenden ist der Grenzübergang schon ausgeführt).

Der Impulssatz lautet nach [5], S. 103,

$$\vec{F}_j + \Sigma \vec{F}_a = 0,$$

mit der resultierenden Impulskraft  $\vec{F}_j$  und der Summe der äußeren Kräfte  $\Sigma \vec{F}_a$ .  
An der unteren Kontrollraumgrenze A-B wirkt in  $x$ -Richtung eine Impulskraft aufgrund der Anströmung und eine Druckkraft:

$$\rho_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} U_\infty^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty} p_\infty dy .$$

Über die seitlichen Kontrollraumgrenzen B-C und A-D strömt Fluid mit der Geschwindigkeit  $\pm v_\infty = v(x, y = \pm \infty)$  in  $y$ -Richtung und  $U_\infty$  in  $x$ -Richtung. Daraus resultiert eine Impulskraft in  $x$ -Richtung von insgesamt

$$-2 \rho_\infty \int_{-\infty}^x U_\infty v_\infty dx .$$

An der oberen Kontrollraumgrenze C-D wirkt in  $x$ -Richtung eine Impulskraft aufgrund der Abströmung und eine Druckkraft:

$$-\rho_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy - \int_{-\infty}^{+\infty} p dy .$$

Im Innern des Kontrollraumes wirkt durch die Beheizung des Zylinders eine Auftriebskraft pro Volumeneinheit:

$$F_A(x, y) = \rho_\infty \alpha g (T - T_\infty) .$$

Die Resultierende dieser Auftriebskräfte erhalten wir durch Integration über die gesamte Kontrollraumfläche:

$$\int_A F_A(x, y) dA .$$

Schließlich müssen wir noch die Haltekraft  $F_Z$  des Zylinders berücksichtigen, die wir mit dem Widerstand  $W = -F_Z$  des Zylinders in der Strömung, (siehe [5], S. 158)

$$W = \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 d c_w(Re),$$

ausdrücken können. Der Widerstandsbeiwert  $c_w$  ist hier eine Funktion der REYNOLDS-Zahl. Der Impulssatz lautet mit diesen Anteilen

$$\begin{aligned} 0 = & \rho_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\infty^2 - u^2) dy - 2 \rho_\infty \int_{-\infty}^x U_\infty v_\infty dx + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_\infty - p) dy + \rho_\infty \alpha g \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x (T - T_\infty) dx dy - \\ & - \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 d c_w(Re) . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Massenbilanz lautet für den gleichen Kontrollraum

$$\varrho_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_{\infty} - u) dy - 2 \varrho_{\infty} \int_{-\infty}^x v_{\infty} dx = 0. \quad (3.7)$$

Mit dieser Beziehung läßt sich der Impulssatz vereinfachen zu

$$\begin{aligned} 0 = & \varrho_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_{\infty} u - u^2) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy + \\ & + \varrho_{\infty} \alpha g \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x (T - T_{\infty}) dx dy - \frac{\varrho_{\infty}}{2} U_{\infty}^2 d c_w(Re). \end{aligned} \quad (3.8)$$

In die integrale Wärmebilanz gehen Anteile aufgrund von Wärmeleitung, konvektivem Wärmetransport und Beheizung ein. Im einzelnen sind dies konvektiver Wärmetransport über die untere Kontrollraumgrenze A-B:

$$\varrho_{\infty} c_p \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\infty} T_{\infty} dy,$$

konvektiver Wärmetransport über die seitlichen Kontrollraumgrenzen B-C und A-D:

$$-2 \varrho_{\infty} c_p \int_{-\infty}^x T_{\infty} v_{\infty} dx,$$

und schließlich konvektiver Wärmetransport und Wärmeleitung über die obere Kontrollraumgrenze C-D:

$$-\varrho_{\infty} c_p \int_{-\infty}^{+\infty} u T dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy.$$

Wir bilanzieren diese Anteile mit der konstanten Heizleistung  $\dot{Q}$ , vereinfachen die Ausdrücke mit der Massenbilanz Gl. (3.7) und erhalten

$$0 = \varrho_{\infty} c_p \int_{-\infty}^{+\infty} u (T_{\infty} - T) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy + \dot{Q}. \quad (3.9)$$

## 3.2 Grenzschichtapproximation

Wir nehmen an, die REYNOLDS-Zahl

$$Re = \frac{U_{\infty} d}{\nu} \quad (3.10)$$

ist groß, und die Strömung hat Grenzschichtcharakter. Damit läßt sich das Strömungsgebiet in zwei Bereiche einteilen:



1. Einen Bereich von sehr kleiner Abmessung, die sogenannte Grenzschicht, in der der Einfluß der Reibungskräfte ebenso wirksam ist wie der Einfluß aller anderen Kräfte.
2. Den Bereich der äußeren Strömung, in dem der Einfluß der Reibung vernachlässigbar ist. Hier können wir die Strömung als reibungslos ansehen.

In der Grenzschicht lassen sich die Bilanzgleichungen vereinfachen und leichter lösen als die allgemeinen NAVIER-STOKES-Gleichungen. Dies ist durch die verhältnismäßig kleine Dicke der Grenzschicht bedingt.

Zum Zweck einer Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Terme in den Gleichungen (3.1) bis (3.4) überführen wir diese in eine dimensionslose Form. Dazu wählen wir bestimmte, für die Strömung charakteristische Größen und skalieren hiermit unsere Strömungsvariablen. In der dimensionslosen Form sind deshalb alle Strömungsvariablen von  $O(1)$  groß. Dabei beachten wir die Anisotropie der Grenzschicht, daß nämlich die Querabmessungen dieses Bereiches der Strömung im Vergleich zu den Längsabmessungen klein sind. Entsprechendes gilt für die Quer- und Längsgeschwindigkeiten. Dies berücksichtigen wir, indem wir  $y$  und  $v$  zusätzlich mit  $\sqrt{Re}$  skalieren. Nach SCHLICHTING, siehe [2], S. 179, skaliert die Grenzschichtdicke für den isothermen Zylindernachlauf mit  $\sqrt{Re}$ . Wir verwenden also folgende Skalierung:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{d}, & y' &= \frac{\sqrt{Re}}{d} y, \\ u' &= \frac{u}{U_\infty}, & v' &= \frac{\sqrt{Re}}{U_\infty} v, \\ \Theta' &= \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, & p' &= \frac{p}{p_0}, & t' &= \frac{t}{t^*}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit

$$\begin{aligned} d &: \text{Zylinderdurchmesser,} \\ U_\infty &: \text{Anströmgeschwindigkeit,} \\ \Delta T &= \frac{\dot{Q}}{\nu \varrho_\infty c_p} : \text{charakteristische Temperaturdifferenz,} \\ p_0 &= \frac{\varrho_\infty}{2} U_\infty^2 : \text{Staudruck der Anströmung,} \\ t^* &= \frac{d}{U_\infty} : \text{charakteristische Zeit.} \end{aligned}$$

Aus der Skalierung ergeben sich zwei weitere Kennzahlen, die die Physik des Problems beschreiben, siehe [1], S. 6,

$$\begin{aligned} \text{GRASHOF-Zahl} &: Gr = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu^2}, \\ \text{PRANDTL-Zahl} &: Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \end{aligned}$$

Mit der GRASHOF-Zahl beschreiben wir die Intensität der thermischen Auftriebsströmung relativ zur viskosen Reibung. Die PRANDTL-Zahl ist das Verhältnis der Transportkoeffizienten von Impuls und Wärme.

Die dimensionslose Form der Grundgleichungen lautet (Striche wieder weggelassen)

Impulsbilanzgleichungen:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Gr}{Re^2} \Theta, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{Re} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{Re} v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (3.13)$$

Energiebilanzgleichung:

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right), \quad (3.14)$$

Massenbilanzgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.15)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0 &: \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad x > 0 &: u = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \Theta = 0, \quad p = \frac{p_\infty}{p_0}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

integrale Bilanzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_w(Re) \sqrt{Re} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(1-u) dy + \frac{Gr}{Re^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \Theta dx dy + \\ &+ \frac{\sqrt{Re}}{\rho_\infty U_\infty^2 d} \int_{-\infty}^{+\infty} (p_\infty - p) dy, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$1 = \sqrt{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} u \Theta dy - \frac{1}{Pr \sqrt{Re}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dy. \quad (3.18)$$

Das obige Gleichungssystem enthält den kleinen Parameter

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (3.19)$$

welchen wir schon bei der Skalierung benutzt haben. Für große REYNOLDS-Zahlen dürfen wir somit Terme der Ordnung

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{Re}$$

vernachlässigen. Im Falle hinreichend großer GRASHOF-Zahlen, was wir hier annehmen wollen, bleibt der Auftriebsterm in Gl. (3.12) und Gl. (3.17)

$$\frac{Gr}{Re^2} \Theta$$

aber erhalten. Für kleine GRASHOF-Zahlen müssten wir diesen Auftriebsterm konsistenterweise vernachlässigen und damit auch den Einfluß der Beheizung auf den Nachlauf. Dessen Untersuchung ist aber gerade Gegenstand der Arbeit.

Die Impulsbilanzgleichung in  $y$ -Richtung, Gl. (3.13), vereinfacht sich zu der Beziehung

$$O(\varepsilon^2) = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Dies bedeutet, daß in erster Näherung der Druck quer zur Strömungsrichtung konstant ist. Der Grenzschicht ist der konstante Druck  $p_\infty$  der Anströmung aufgeprägt. Für den Druckterm in der Impulsbilanzgleichung in  $x$ -Richtung, Gl. (3.12), gilt deshalb ebenso

$$O(\varepsilon^2) = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Damit können wir auch den Druckterm in der integralen Impulsbilanz Gl. (3.17) vernachlässigen. Den Anteil durch die Wärmeleitung in der integralen Wärmebilanz, Gl. (3.18), werden wir im folgenden für PRANDTL-Zahlen

$$Pr \gg \frac{1}{Re}$$

gleichfalls vernachlässigen.

Es verbleiben die Grenzschichtgleichungen (für große REYNOLDS-Zahlen)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Gr}{Re^2} \Theta + O(\varepsilon^2), \quad (3.20)$$

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + O(\varepsilon^2), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.22)$$

Die Randbedingungen reduzieren sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0 & : \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad x > 0 & : \quad u = 1, \quad \Theta = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Weil der Druck in den Gleichungen nicht mehr vorkommt, entfällt auch die zugehörige Randbedingung. Die Quergeschwindigkeit  $v$  kommt nur noch mit der ersten Ableitung vor. Daher kann auch nur noch eine Randbedingung für  $v$  erfüllt werden.

Wie bei der Behandlung von Nachlaufströmungen üblich, führen wir die Nachlaufgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y) &= 1 - u(x, y), \\ \bar{v}(x, y) &= v(x, y),\end{aligned}$$

ein und erhalten die modifizierten Grenzschichtgleichungen

$$(1 - \bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{Gr}{Re^2} \Theta, \quad (3.24)$$

$$(1 - \bar{u}) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad (3.25)$$

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.26)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}y = 0, \quad x > 0 &: \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad x > 0 &: \bar{u} = 0, \quad \Theta = 0.\end{aligned} \quad (3.27)$$

Die zugehörigen integralen Bedingungen lauten

$$\frac{1}{2} c_w(Re) \sqrt{Re} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(1 - \bar{u}) dy + \frac{Gr}{Re^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \Theta dx dy, \quad (3.28)$$

$$1 = \sqrt{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \bar{u}) \Theta dy. \quad (3.29)$$

Wir suchen eine asymptotische Lösung des Problems und entwickeln deshalb formal nach Potenzen des kleinen Parameters  $\varepsilon$ , gemäß der Darstellung

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots, \\ \bar{v} &= \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \dots, \\ \Theta &= \varepsilon \Theta_0 + \varepsilon^2 \Theta_1 + \dots.\end{aligned}$$

Später werden wir nachweisen, unter welchen Voraussetzungen diese Lösungen konvergieren.

Wir setzen diese Entwicklungen in die Gleichungen (3.24) bis (3.29) ein und vergleichen jeweils Terme von der gleichen Größenordnung im Entwicklungsparameter  $\varepsilon$ . Die Gleichungen der Ordnung  $\varepsilon^1$  lauten

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} = 0, \quad (3.31)$$

$$-\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad (3.32)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0 & : \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad v_0 = 0, \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow_{-}^{+} \infty, \quad x > 0 & : u_0 = 0, \quad \Theta_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

und den zugehörigen integralen Bedingungen für Impuls:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0 \, dy = \frac{1}{2} c_w(Re) Re, \quad (3.34)$$

und Wärme:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_0 \, dy = 1. \quad (3.35)$$

Die Gleichungen der Ordnung  $\varepsilon^2$  ergeben sich zu

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - Gr^* \Theta_0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} = u_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}, \quad (3.37)$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (3.38)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0 & : \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow_{-}^{+} \infty, \quad x > 0 & : u_1 = 0, \quad \Theta_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

und den zugehörigen integralen Bedingungen für Impuls:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 \, dy - Gr^* \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \Theta_0 \, dx \, dy, \quad (3.40)$$

und Wärme:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_1 \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 \Theta_0 \, dy. \quad (3.41)$$

Hierbei haben wir für den Auftriebsterm die Skalierung

$$Gr^* = \frac{Gr}{Re^{3/2}} = O(1)$$

eingeführt. Damit ist der Auftriebseinfluß ein Effekt der Ordnung  $\varepsilon^2$ . Dies entspricht physikalisch einer schwachen Beheizung des Zylinders.

### 3.3 Ähnlichkeitstransformation in der ersten Ordnung

Wir nehmen eine Transformation des Koordinatensystems  $x, y$  vor, mit dem Ziel, Lösungen der Gleichungen (3.30) bis (3.35) zu erhalten, die nur noch von einer Veränderlichen  $\eta = \eta(x, y)$  abhängen. Solche Lösungen heißen ähnliche Lösungen. Wir machen folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\eta &= y g_0(x), \\ u_0(x, y) &= F_0(\eta) h_0(x), \\ v_0(x, y) &= G_0(\eta) m_0(x), \\ \Theta_0(x, y) &= H_0(\eta) k_0(x).\end{aligned}\tag{3.42}$$

Die partiellen Ableitungen transformieren sich gemäß der Kettenregel wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= y g_0' \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= g_0 \frac{\partial}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung nach  $\eta$  wollen wir die Kurzschreibweise

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial \eta} = (\quad)'$$

verwenden. Die Funktionen  $g_0(x)$ ,  $h_0(x)$ ,  $m_0(x)$  und  $k_0(x)$  werden so festgelegt, daß die partiellen Differentialgleichungen, Gl. (3.30) bis Gl. (3.32), in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt werden. Nach einer kurzen Zwischenrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}g_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}, & h_0(x) &= \frac{c_w(Re) Re}{2\sqrt{x}}, \\ k_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}, & m_0(x) &= \frac{c_w(Re) Re}{2x}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Die Konstanten in diesen Funktionen sind so gewählt, daß sich möglichst eine einfache Darstellung der Differentialgleichungen ergibt. Wir finden die Beziehungen

$$F_0'' + \frac{1}{2} \eta F_0' + \frac{1}{2} F_0 = 0,\tag{3.44}$$

$$H_0'' + \frac{1}{2} Pr \eta H_0' + \frac{1}{2} Pr H_0 = 0,\tag{3.45}$$

$$G_0' + \frac{1}{2} \eta F_0' + \frac{1}{2} F_0 = 0.\tag{3.46}$$

Die Randbedingungen lauten in der neuen Variablen  $\eta$

$$\begin{aligned}\eta = 0 &: F_0' = 0, \quad G_0 = 0, \quad H_0' = 0, \\ \eta \rightarrow \pm \infty &: F_0 = 0, \quad H_0 = 0.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Die integralen Bilanzen vereinfachen sich für den Impuls zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_0 d\eta = 1, \quad (3.48)$$

und für die Wärme zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0 d\eta = 1. \quad (3.49)$$

Die Differentialgleichung (3.44) können wir ausgehend von der Form

$$F_0'' + \frac{1}{2} (F_0 \eta)' = 0$$

zweimal analytisch integrieren. Die beiden Integrationskonstanten bestimmen wir mit Hilfe der Randbedingung Gl. (3.47) bei  $\eta = 0$  und der integralen Impulsbilanz Gl. (3.48). Die zweite Randbedingung Gl. (3.47) bei  $\eta \rightarrow \pm \infty$  ist dann ebenfalls erfüllt. Die Lösung lautet schließlich

$$F_0(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2\right). \quad (3.50)$$

Entsprechend behandeln wir die Differentialgleichung (3.45) und erhalten

$$H_0(\eta) = \frac{\sqrt{Pr}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4}Pr\eta^2\right). \quad (3.51)$$

Wir subtrahieren nun Gl. (3.44) von Gl. (3.46). Es ergibt sich

$$G_0' = F_0'',$$

und nach einmaliger Integration

$$G_0 = F_0'.$$

Die Integrationskonstante verschwindet gemäß der Randbedingung Gl. (3.47) bei  $\eta = 0$ . Somit können wir das Ergebnis für  $G_0(\eta)$  sofort angeben:

$$G_0(\eta) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \eta \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2\right). \quad (3.52)$$

Mit den Ergebnissen gemäß den Gleichungen (3.43), (3.50) bis (3.52) können wir nun die dimensionslosen Nachlaufgeschwindigkeiten und die dimensionslose Temperatur nach Gl. (3.42) angeben:

$$u_0(x, y) = \frac{c_w(Re) Re}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}\right), \quad (3.53)$$

$$v_0(x, y) = -\frac{c_w(Re) Re}{8\sqrt{\pi}} \frac{y}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}\right), \quad (3.54)$$

$$\Theta_0(x, y) = \frac{\sqrt{Pr}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4}Pr\frac{y^2}{x}\right). \quad (3.55)$$

Die hier gefundene Lösung für die Längsgeschwindigkeit  $u_0$  ist in Einklang mit dem Ergebnis von SCHLICHTING, siehe [2], bzw. LOITSIANSKI, siehe [3], für den Nachlauf hinter einer unbeheizten Platte. Bis auf die unterschiedlichen Widerstände von Platte und Zylinder sind die Ergebnisse identisch.

### 3.4 Ähnlichkeitstransformation in der zweiten Ordnung

Mit den nun bekannten Lösungen der ersten Ordnung, Gl. (3.53) bis Gl. (3.55), können wir die rechten Seiten der Gleichungen der zweiten Ordnung, Gl. (3.36) bis Gl. (3.41), berechnen. Wir erhalten folgende inhomogene Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\frac{c_w^2(Re) Re^2}{32\pi} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{x}\right) - \frac{Gr^* \sqrt{Pr}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4} Pr \frac{y^2}{x}\right), \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} = -\frac{c_w(Re) Re \sqrt{Pr}}{16\pi} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x} (1 + Pr)\right), \quad (3.57)$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (3.58)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x > 0 &: \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = 0, \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad x > 0 &: u_1 = 0, \quad \Theta_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

und den zugehörigen integralen Bilanzen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy = \frac{\sqrt{2} c_w^2(Re) Re^2}{16\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} - Gr^* x, \quad (3.60)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_1 dy = \sqrt{\frac{Pr}{1 + Pr}} \frac{c_w(Re) Re}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (3.61)$$

Zur Lösung dieses Systems nehmen wir wieder eine Ähnlichkeitstransformation vor. Wir verwenden folgende Ansätze in der Ähnlichkeitsvariablen  $\eta$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y}{\sqrt{x}}, \\ u_1(x, y) &= F_1(\eta) h_1(x) + K_1(\eta) f_1(x), \\ v_1(x, y) &= G_1(\eta) m_1(x) + I_1(\eta) q_1(x), \\ \Theta_1(x, y) &= H_1(\eta) k_1(x). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Für die Geschwindigkeiten  $u_1$  und  $v_1$  wählen wir einen erweiterten Ansatz mit zwei Ähnlichkeitsfunktionen. Dadurch kann die rechte Seite von Gl. (3.56) separiert werden. Die partiellen Ableitungen werden gemäß den Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$



transformiert. Die Funktionen  $h_1(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $m_1(x)$ ,  $q_1(x)$  und  $k_1(x)$  werden wieder so festgelegt, daß die partiellen Differentialgleichungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen vereinfacht werden. Dies leisten die Funktionen

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{\sqrt{2} c_w^2(Re) Re^2}{16 \sqrt{\pi} x}, & f_1(x) &= Gr^* \sqrt{x}, \\ m_1(x) &= \frac{\sqrt{2} c_w^2(Re) Re^2}{16 \sqrt{\pi} x^{3/2}}, & q_1(x) &= Gr^*, \\ k_1(x) &= \sqrt{\frac{Pr}{1+Pr} \frac{c_w(Re) Re}{4 \sqrt{\pi} x}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Die Gl. (3.56) zerfällt durch die Transformation in zwei gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichungen für die Ähnlichkeitsfunktionen  $F_1(\eta)$  und  $K_1(\eta)$ :

$$F_1'' + \frac{1}{2} \eta F_1' + F_1 = \frac{1}{2 \sqrt{2} \pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right), \quad (3.64)$$

$$K_1'' + \frac{1}{2} \eta K_1' - \frac{1}{2} K_1 = \frac{\sqrt{Pr}}{2 \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4} Pr \eta^2\right), \quad (3.65)$$

mit den Randbedingungen:

$$\eta = 0 : F_1' = 0, \quad K_1' = 0, \quad (3.66)$$

$$\eta \rightarrow \pm \infty : F_1 = 0, \quad K_1 = 0. \quad (3.67)$$

Die integrale Impulsbilanz Gl. (3.60) zerfällt ebenfalls in zwei Anteile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) d\eta = 1, \quad (3.68)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\eta) d\eta = -1. \quad (3.69)$$

Die Kontinuitätsgleichung (3.58) liefert zwei Differentialgleichungen für die beiden Ähnlichkeitsfunktionen  $G_1(\eta)$  und  $I_1(\eta)$ . Diese lauten

$$G_1' = -F_1 - \frac{1}{2} \eta F_1', \quad (3.70)$$

$$I_1' = \frac{1}{2} K_1 - \frac{1}{2} \eta K_1', \quad (3.71)$$

mit den Randbedingungen:

$$\eta = 0 : G_1 = 0, \quad I_1 = 0. \quad (3.72)$$

Schließlich erhalten wir aus der Energiebilanzgleichung (3.57) die gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung für die Ähnlichkeitsfunktion  $H_1(\eta)$

$$H_1'' + \frac{1}{2} \eta Pr H_1' + Pr H_1 = \frac{Pr \sqrt{1+Pr}}{4 \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2 (1+Pr)\right), \quad (3.73)$$

mit den Randbedingungen:

$$\eta = 0 : H_1' = 0, \quad (3.74)$$

$$\eta \rightarrow_{\pm}^{\pm} \infty : H_1 = 0, \quad (3.75)$$

und der transformierten integralen Wärmebilanz Gl. (3.61):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\eta) d\eta = 1. \quad (3.76)$$

Bei den Gleichungen (3.64), (3.65), (3.70), (3.71) und (3.73) handelt es sich um gekoppelte, inhomogene Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten. Mit Hilfe eines Shooting-Verfahrens (siehe Anhang) werden die Differentialgleichungen numerisch integriert.

# Kapitel 4

## Ergebnisse

Die gesuchten dimensionslosen Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$ , sowie die dimensionslose Temperatur  $\Theta$  können wir nun als Näherungslösung angeben:

$$\begin{aligned} u &= 1 - \varepsilon u_0 - \varepsilon^2 u_1 - \dots, \\ &= 1 - \varepsilon F_0(\eta) h_0(x) - \varepsilon^2 (F_1(\eta) h_1(x) + K_1(\eta) f_1(x)) - \dots, \\ v &= \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \dots, \\ &= \varepsilon G_0(\eta) m_0(x) + \varepsilon^2 (G_1(\eta) m_1(x) + I_1(\eta) q_1(x)) + \dots, \\ \Theta &= \varepsilon \Theta_0 + \varepsilon^2 \Theta_1 + \dots, \\ &= \varepsilon H_0(\eta) k_0(x) + \varepsilon^2 H_1(\eta) k_1(x) + \dots. \end{aligned}$$

Wir setzen alle bekannten Funktionen, Gl. (3.53), Gl. (3.54), Gl. (3.55) und Gl. (3.63), ein und erhalten

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{c_w(Re) Re}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left( \frac{\sqrt{2} c_w^2(Re) Re^2}{16\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} F_1(\eta) + Gr^* \sqrt{x} K_1(\eta) \right) - \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{c_w(Re) Re}{8\sqrt{\pi}} \frac{y}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left( \frac{\sqrt{2} c_w^2(Re) Re^2}{16\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} G_1(\eta) + Gr^* I_1(\eta) \right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{Pr}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4} Pr \frac{y^2}{x}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{Pr}{1+Pr}} \frac{c_w(Re) Re}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} H_1(\eta) + \dots. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Funktionen  $F_1(\eta)$  und  $G_1(\eta)$  sind nur noch von der Ähnlichkeitsvariablen  $\eta$  abhängig. Die Funktionen  $K_1(\eta)$ ,  $I_1(\eta)$  und  $H_1(\eta)$  hängen zusätzlich noch von der PRANDTL-Zahl ab.

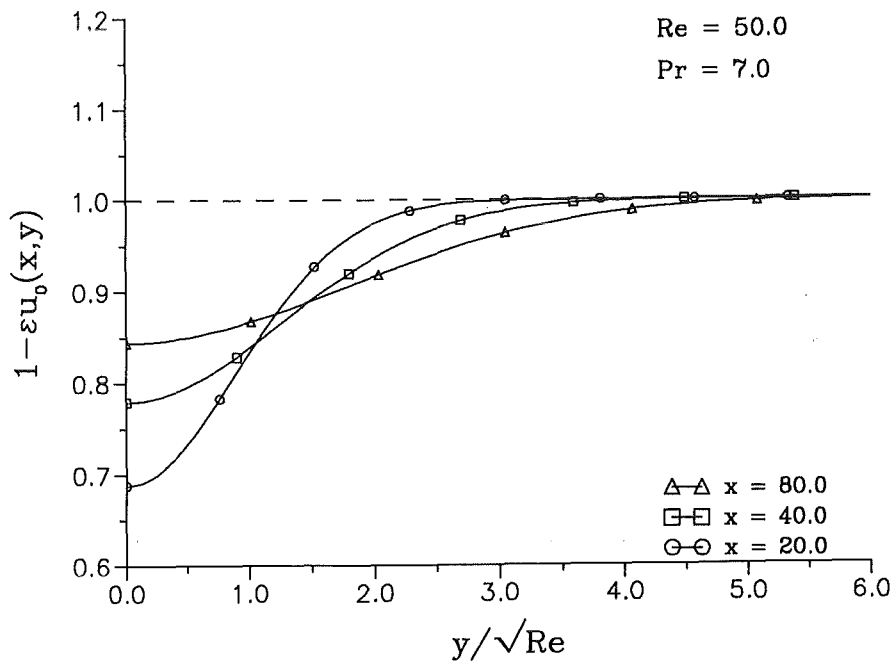


Abbildung 4.1: Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  in der ersten Ordnung bei verändertem  $x$

## 4.1 Geschwindigkeits- und Temperaturprofile im Nachlauf

### 4.1.1 Lösung der ersten Ordnung

Diese Näherung beschreibt den Nachlauf ohne Schwerkräfteinfluß hinter einem beheizten Zylinder. Die freigesetzte Wärme wird dann von der Strömung transportiert, beeinflusst ihrerseits aber die Strömung nicht.

Abbildung 4.1 zeigt Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  in der ersten Ordnung für unterschiedliche Abstände hinter dem Zylinder. Die Geschwindigkeitsverteilung ist über der Querkoordinate, bezogen auf den Zylinderdurchmesser, aufgetragen. In unserer Nomenklatur ist dies gerade  $y/\sqrt{Re}$ , siehe Gl. (3.11). Auf der Symmetrieachse finden wir eine verminderte Längsgeschwindigkeit aufgrund des Impulsverlustes durch den Strömungswiderstand des Zylinders. Im Außenfeld bleibt die Längsgeschwindigkeit ungestört. Die sich bildende Nachlaufdecke wird mit zunehmender Lauflänge aufgefüllt, die Geschwindigkeitswerte auf der Symmetrieachse steigen. Dazu muß Fluid von außen in den Kernbereich der Strömung zufließen. Die Profile der Quergeschwindigkeit in Abbildung 4.2 liegen daher alle im negativen Bereich. Zu dem ausgeprägten Profil der Längsgeschwindigkeit bei  $x = 20$  gehören hohe Werte für die Quergeschwindigkeit. Mit zunehmender Lauflänge beruhigt sich die Strömung. Die Profile beider Geschwindigkeitskomponenten flachen ab. Gleichzeitig breitet sich die Geschwindigkeitsstörung durch diffusiven Impulstransport im Nachlauf weiter aus.

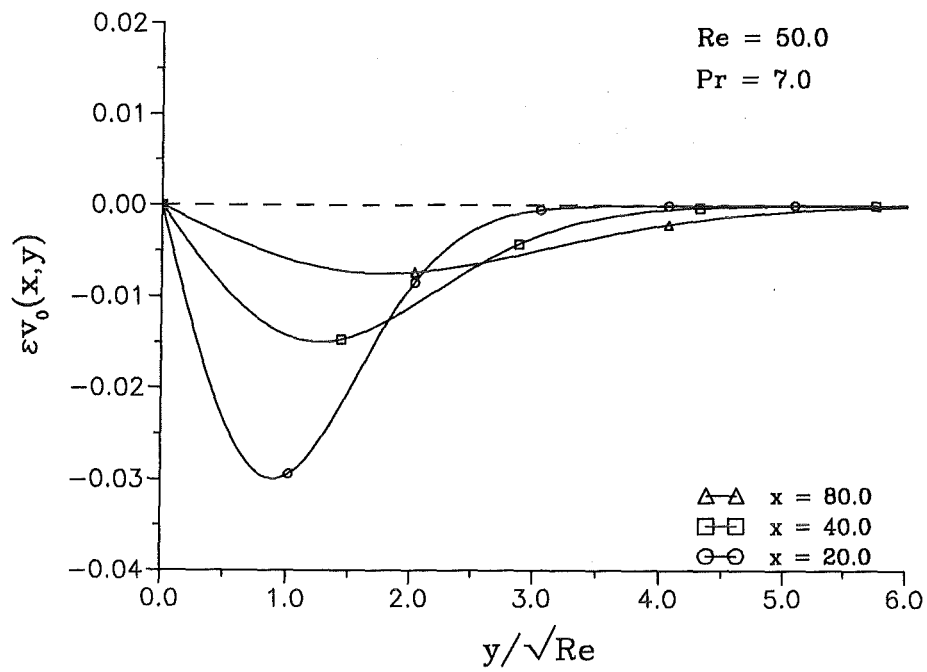


Abbildung 4.2: Profile der Quergeschwindigkeit  $v$  in der ersten Ordnung bei verändertem  $x$

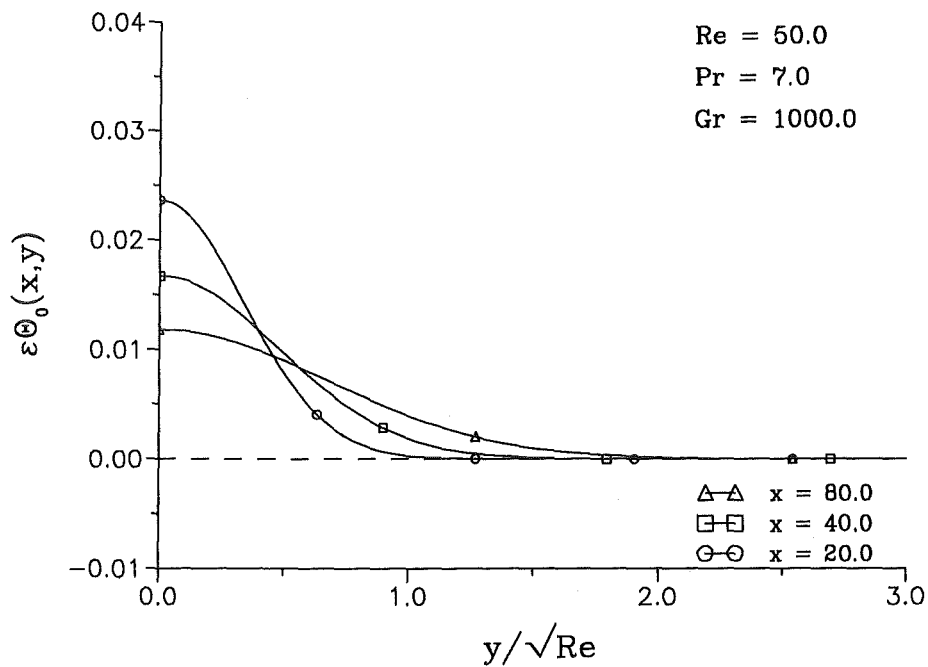


Abbildung 4.3: Profile der Temperatur  $\Theta$  in der ersten Ordnung bei verändertem  $x$

In der ersten Ordnung wird die Wärme durch die ungestörte Anströmung transportiert. Die Nachlaufdelle nach Abbildung 4.1 beeinflusst die Temperatur erst in der zweiten Ordnung. Somit findet ein konstanter konvektiver Wärmetransport statt. Das Zerfließen der Temperaturprofile mit zunehmender Lauflänge in Abbildung 4.3 geht dann allein auf diffusiven Wärmetransport zurück.

Die Dicke der kinematischen und der thermischen Grenzschicht nimmt mit wachsendem Abstand vom Zylinder zu. Die Ausbreitung der kinematischen und der thermischen Grenzschicht als Funktion der Lauflänge  $x$  und der Parameter berechnen wir aus den analytischen Lösungen der ersten Ordnung, Gl. (3.53) und Gl. (3.55). Als Rand der kinematischen Grenzschicht definieren wir den Ort, an dem die Geschwindigkeit nur noch um 1/1000 von der Anströmgeschwindigkeit abweicht. Als Rand der thermischen Grenzschicht definieren wir den Ort, an dem die Temperatur noch 1/100 vom Maximalwert beträgt. Wir finden die Proportionalitäten

$$\delta \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re}},$$

$$\delta_{th} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re} \sqrt{Pr}}. \quad (4.4)$$

Die Grenzschichtdicken  $\delta$  und  $\delta_{th}$  sind bezogen auf den Zylinderdurchmesser  $d$ .

### 4.1.2 Lösung der zweiten Ordnung

Die noch unbekanntenen Funktionen  $F_1(\eta)$ ,  $K_1(\eta)$ ,  $G_1(\eta)$ ,  $I_1(\eta)$  und  $H_1(\eta)$  berechnen wir numerisch. Die analytischen Lösungen der ersten Ordnung,  $u_0$ ,  $v_0$  und  $\Theta_0$ , werden innerhalb des Programms gleichfalls berechnet, und eine anschließende Superposition der Ergebnisse liefert uns schließlich die gesuchten Näherungslösungen.

In Abb. 4.4 ist die Superposition für die Längsgeschwindigkeit  $u$  dargestellt. Die Lösung der ersten Ordnung liefert eine reine Nachlaufdelle (vgl. Symbole  $\square$ ). Die Lösung der zweiten Ordnung enthält den Auftriebseinfluß und die in der ersten Ordnung vernachlässigten Nichtlinearitäten (vgl. Symbole  $\triangle$ ). Das zugehörige Profil ähnelt dem Geschwindigkeitsprofil eines Auftriebsstrahles. Beide Profile werden zur Gesamtlösung überlagert (vgl. dicke Linie).

Abbildung 4.5 zeigt Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  in unterschiedlicher Entfernung hinter dem Zylinder. Bei einem Vergleich der Profile bei  $x = 20$  in Abbildung 4.1 und Abbildung 4.5 erkennen wir ein geändertes Verhalten der Längsgeschwindigkeit  $u$  im Bereich der  $x$ -Achse. In Abbildung 4.5 ist die Geschwindigkeit in der Umgebung der  $x$ -Achse nahezu konstant. Dies ist untypisch für eine reine Nachlaufdelle, vgl. Abbildung 4.1. Hier macht sich also schon der Auftriebseinfluß bemerkbar. Mit zunehmender Entfernung flacht das Profil ab und wird gleichzeitig breiter. Im Kern der Strömung wird das Anwachsen der Geschwindigkeit durch die Auftriebskräfte verstärkt. Schließlich werden die Geschwindigkeitswerte auf der  $x$ -Achse größer als die Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$ . Wir haben bei  $Pr = 7$  eine deutlich dünnere thermische Grenzschicht im Vergleich zur kinematischen Grenzschicht. Dies finden wir in Abbildung 4.5 bestätigt.

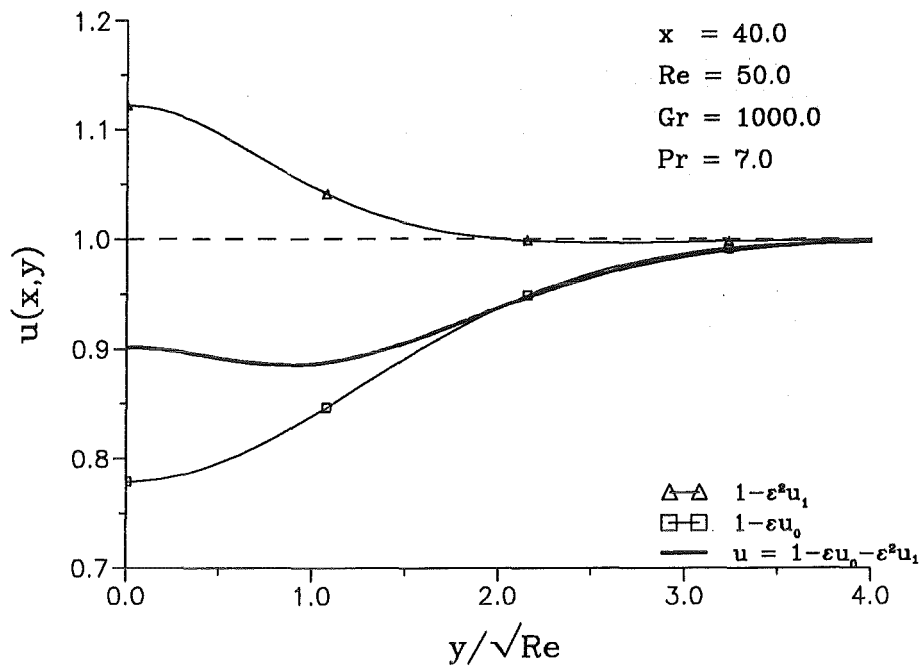


Abbildung 4.4: Superposition der Lösungen von erster und zweiter Ordnung

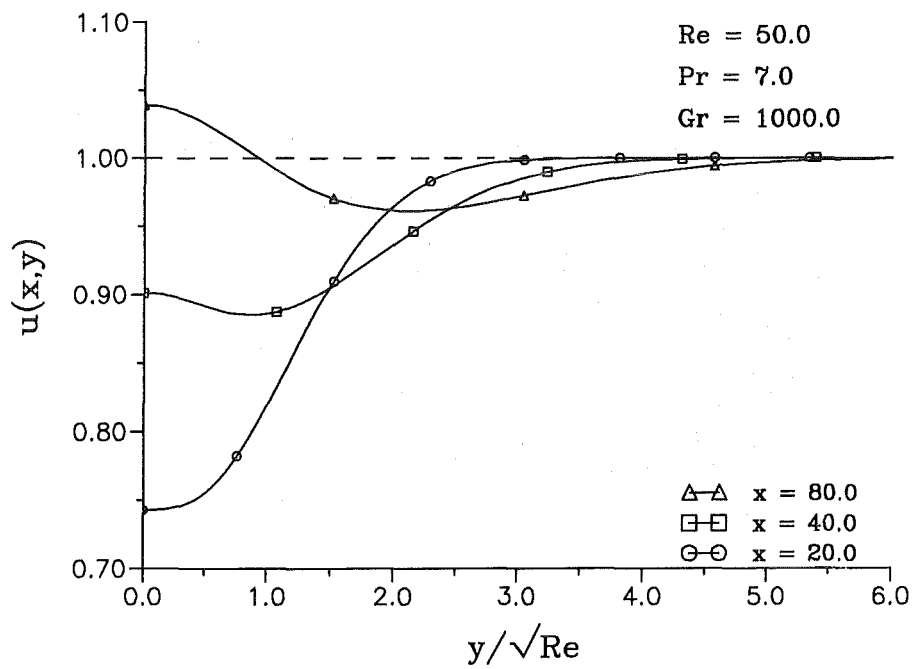
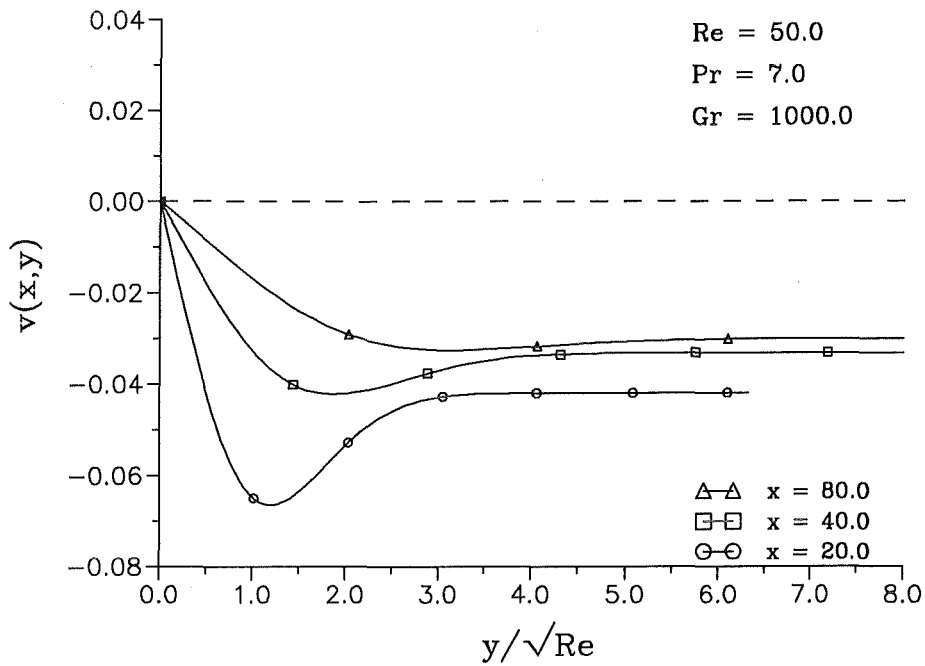
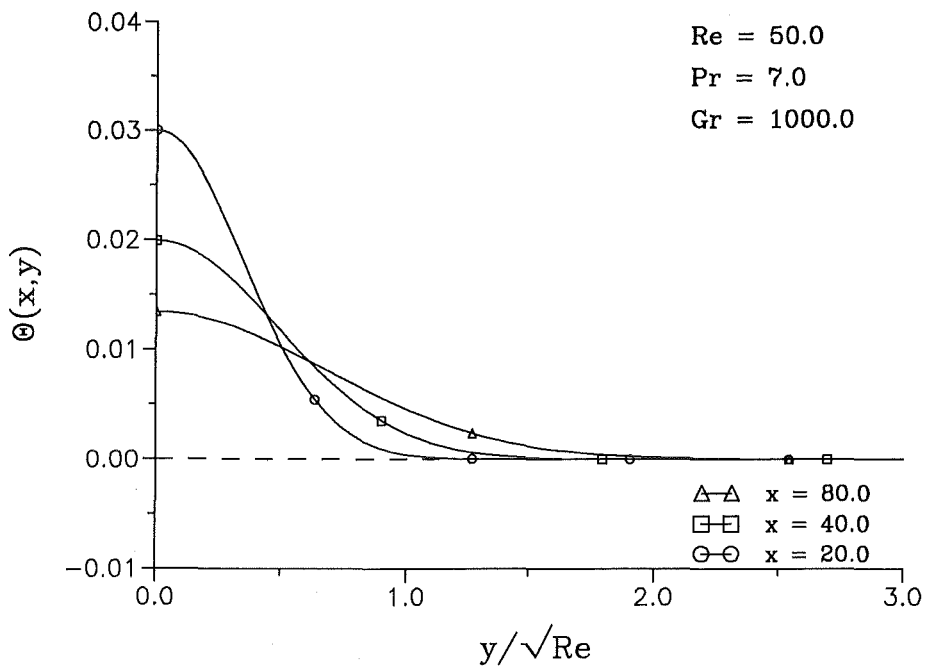


Abbildung 4.5: Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  bei verändertem  $x$

Abbildung 4.6: Profile der Quergeschwindigkeit  $v$  bei verändertem  $x$ Abbildung 4.7: Profile der Temperatur  $\Theta$  bei verändertem  $x$



Wir sehen, daß das Beschleunigen der Strömung durch die Beheizung auf den Kern der Strömung begrenzt ist. Im Bereich der Symmetrieachse wird das Geschwindigkeitsprofil eines Auftriebsstrahles zunehmend deutlicher.

Der Gradient der Längsgeschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung ist im Kern der Strömung positiv. Die Kontinuitätsgleichung fordert dann einen negativen Gradienten für die Quergeschwindigkeit in  $y$ -Richtung. Die zugehörigen Profile der Quergeschwindigkeit  $v$ , siehe Abbildung 4.6, liegen daher alle im negativen Bereich. Die Geschwindigkeitswerte werden mit zunehmender Lauflänge kleiner. Dies resultiert aus dem Abflachen der Profile für die Längsgeschwindigkeit, siehe Abbildung 4.5. Die große Nachlaufdelle bei  $x = 20$  wird durch einen starken Zustrom in Querrichtung aufgefüllt. Die flacheren Profile in größerer Entfernung vom Zylinder bedingen dann einen schwächeren Zustrom in Querrichtung. Im Außenfeld strebt die Quergeschwindigkeit für zunehmende Lauflänge gegen einen festen Wert. Es strömt also kontinuierlich Fluid von außen in den Kern der Strömung zu. Im Gegensatz zur Nachlaufdelle verschwindet die Auftriebsströmung nicht in großer Entfernung vom Zylinder sondern wächst ständig an. Dies macht den konstanten Zustrom in Querrichtung notwendig. Dies ist ein Effekt der zweiten Ordnung. In Abbildung 4.2 sehen wir, daß die Quergeschwindigkeit des linearisierten Stromfeldes im Außenfeld verschwindet.

Die Profile der Temperatur, siehe Abbildung 4.7, haben die Form einer Glockenkurve. Das Anfangsprofil zerfließt mit zunehmender Lauflänge durch Diffusion. Die beschleunigte Strömung in der Nähe der Symmetrieachse hat keinen Einfluß auf die Temperaturprofile. In unserer Näherung wird die Wärme nur durch das Stromfeld in der ersten Ordnung transportiert, siehe Gl. (3.37). Im Vergleich mit den Temperaturprofilen in der ersten Ordnung, siehe Abbildung 4.3, finden wir in Abbildung 4.7 erhöhte Temperaturwerte bei gleichbleibender Grenzschichtdicke. Die verminderten Geschwindigkeiten in der Nachlaufdelle bewirken einen schwächeren konvektiven Wärmetransport (im Vergleich zur ersten Ordnung) und somit höhere Temperaturen im Nachlauf.

Die Dicke der kinematischen Grenzschicht aus Abbildung 4.5 und für weitere Rechnungen ist in Abbildung 4.8 über der Lauflänge  $x$  aufgetragen. Wir erkennen für  $Gr = 1000$  die Abhängigkeit

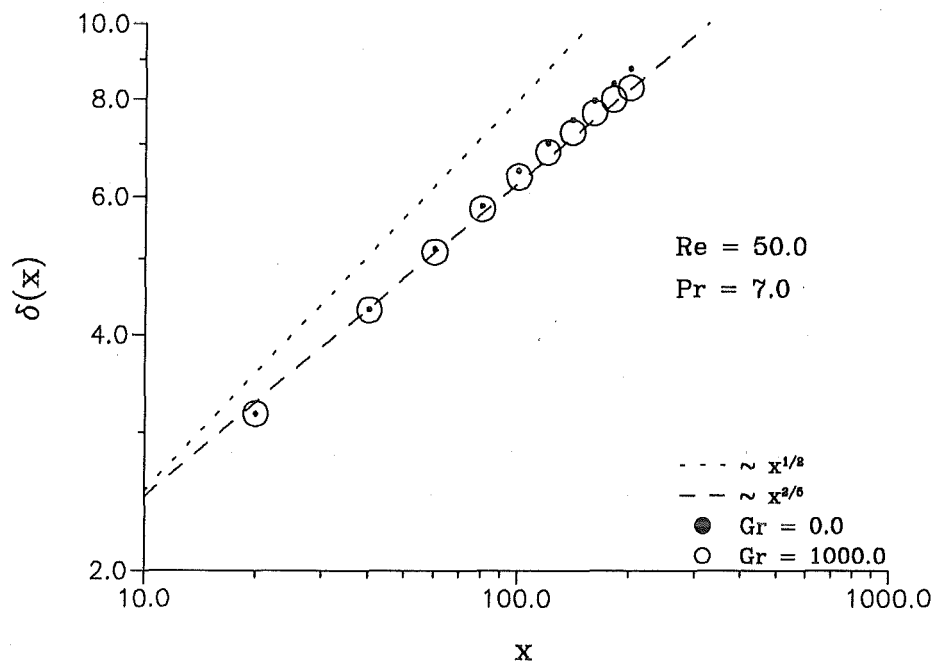
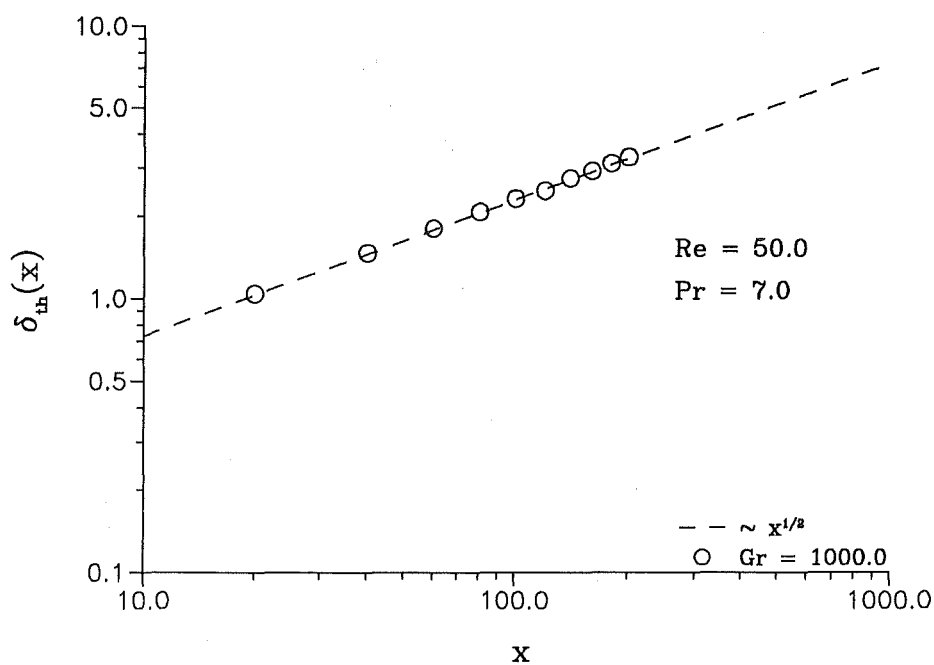
$$\delta(x) \sim x^{2/5}$$

der Grenzschichtdicke von der Lauflänge. Ohne Beheizung, d. h. für  $Gr = 0$  ändert sich diese Abhängigkeit hin zu einem größeren Exponenten. Dieser liegt zwischen  $1/2$  und  $2/5$ . Zum Vergleich ist in Abbildung 4.8 die Abhängigkeit der Dicke der kinematischen Grenzschicht in der ersten Ordnung von der Lauflänge  $x$  eingezeichnet. Das geänderte Ausbreitungsverhalten geht also zum einen auf die höhere Ordnung in der Näherung ( $Gr = 0$ ) und zum anderen auf die Beheizung ( $Gr = 1000$ ) zurück.

Für die Dicke der thermischen Grenzschicht können wir aus Abbildung 4.9 die Abhängigkeit

$$\delta_{th}(x) \sim x^{1/2}$$

ablesen. Die thermische Grenzschicht breitet sich also bezüglich der Lauflänge schneller aus als die kinematische Grenzschicht.

Abbildung 4.8: Dicke der kinematischen Grenzschicht  $\delta$  als Funktion von  $x$ Abbildung 4.9: Dicke der thermischen Grenzschicht  $\delta_{th}$  als Funktion von  $x$

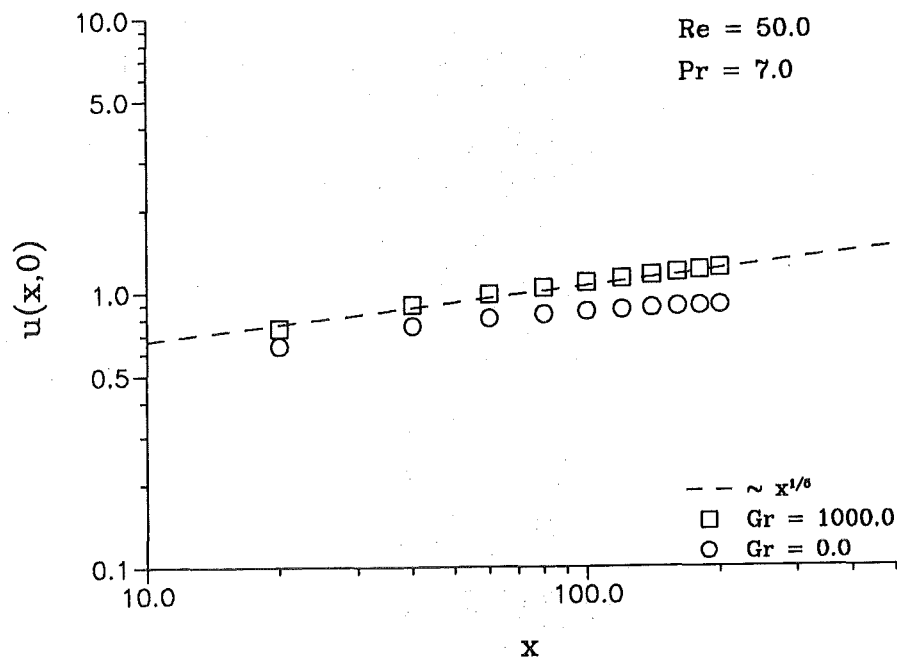


Abbildung 4.10: Längsgeschwindigkeit  $u$  auf der  $x$ -Achse als Funktion von  $x$

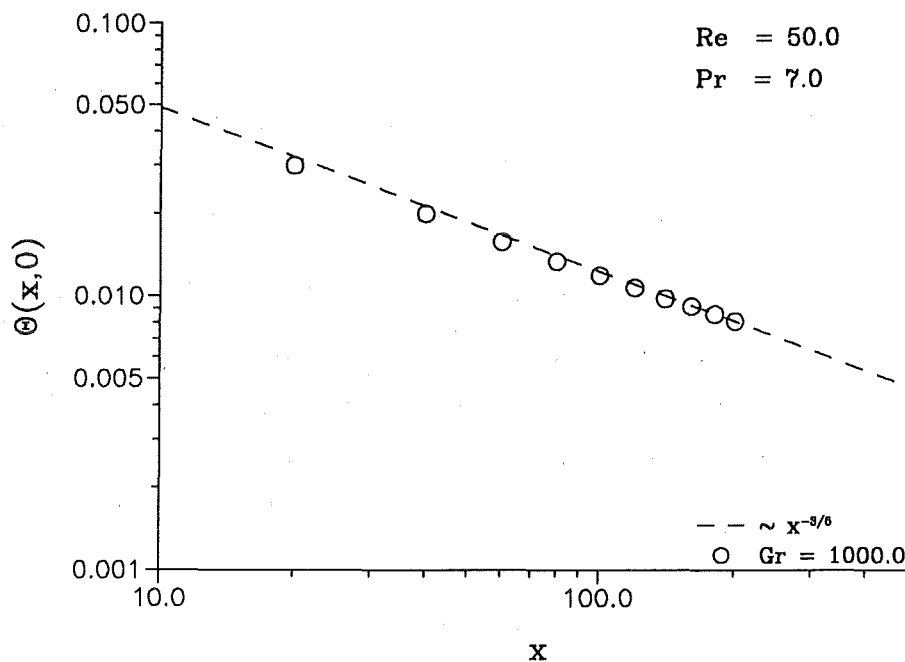


Abbildung 4.11: Temperatur  $\Theta$  auf der  $x$ -Achse als Funktion von  $x$

Abbildung 4.10 zeigt das Anwachsen der Längsgeschwindigkeit  $u$  auf der Symmetrieachse. Für  $Gr = 0$  ist der Auftriebseffekt ausgeschaltet. Die Nachlaufdüse wird mit zunehmender Lauflänge aufgefüllt, die Längsgeschwindigkeit  $u$  strebt gegen eins. Für  $Gr = 1000$  wächst die Längsgeschwindigkeit auf der Achse, angetrieben durch den Auftriebseffekt, über den Wert der Anströmung (normiert auf eins) an. Wir erkennen in Abbildung 4.10 für die Längsgeschwindigkeit auf der  $x$ -Achse die Proportionalität

$$u(x, 0) \sim x^{1/5} .$$

Wie wir schon in Abbildung 4.7 gesehen haben, flachen die Temperaturprofile mit zunehmender Lauflänge ab. Dies wird auch in Abbildung 4.11 deutlich. Das Maximum der Temperatur auf der  $x$ -Achse nimmt gemäß

$$\Theta(x, 0) \sim x^{-3/5} .$$

kontinuierlich ab.

## 4.2 Parametervariation

### 4.2.1 Variation der REYNOLDS-Zahl

Die REYNOLDS-Zahl wird – bei gleicher Geometrie und gleichem Fluid – über die Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  verändert.

Wie aus Abbildung 4.12 ersichtlich, gewinnt bei Vergrößerung der REYNOLDS-Zahl die Zwangsströmung gegenüber der Auftriebsströmung an Einfluß. Der Auftriebseffekt wird bei stärkerer Anströmung erst weiter stromab sichtbar. Die Dicke der kinematischen Grenzschicht nimmt mit zunehmender REYNOLDS-Zahl ab.

Bei konstanter PRANDTL-Zahl bleibt das Verhältnis der Dicken von kinematischer und thermischer Grenzschicht konstant. Die Dicke der thermischen Grenzschicht nimmt also ebenfalls mit der REYNOLDS-Zahl ab. Außerdem liegt bei größerer REYNOLDS-Zahl auch eine stärkere Zwangsströmung vor und damit eine effektivere Wärmeabfuhr. Bei konstanter Beheizung muß also die Temperatur auf der Symmetrieachse zurückgehen. Die Temperaturverteilungen in Abbildung 4.13 zeigen genau dieses Verhalten.

Die Dicken der kinematischen und der thermischen Grenzschicht für obige Profile und weitere Rechnungen sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Beide Grenzschichten gehorchen derselben Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} \delta(Re) &\sim Re^{-1/2} , \\ \delta_{th}(Re) &\sim Re^{-1/2} . \end{aligned}$$

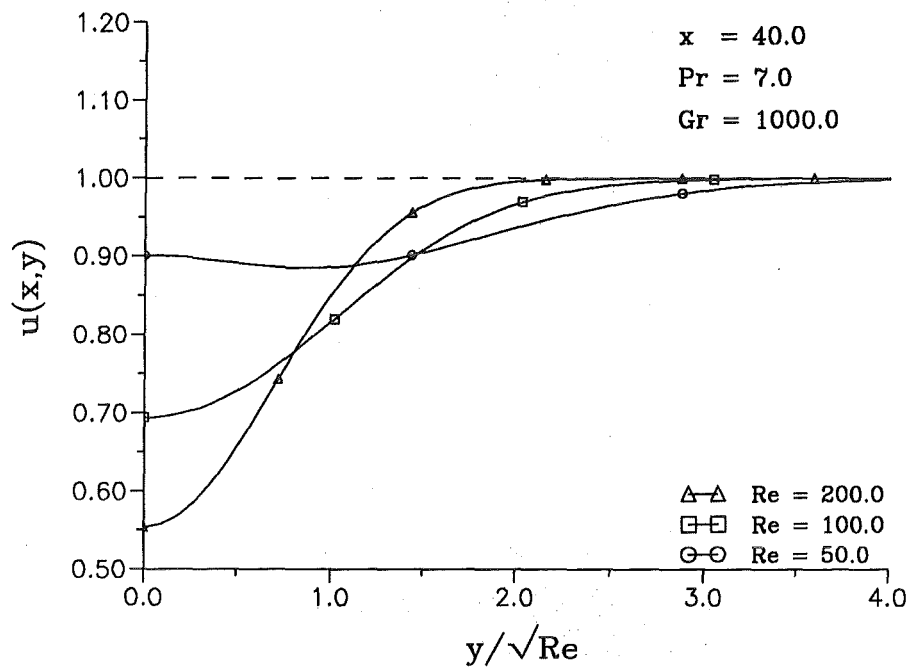


Abbildung 4.12: Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  bei Variation der REYNOLDS-Zahl

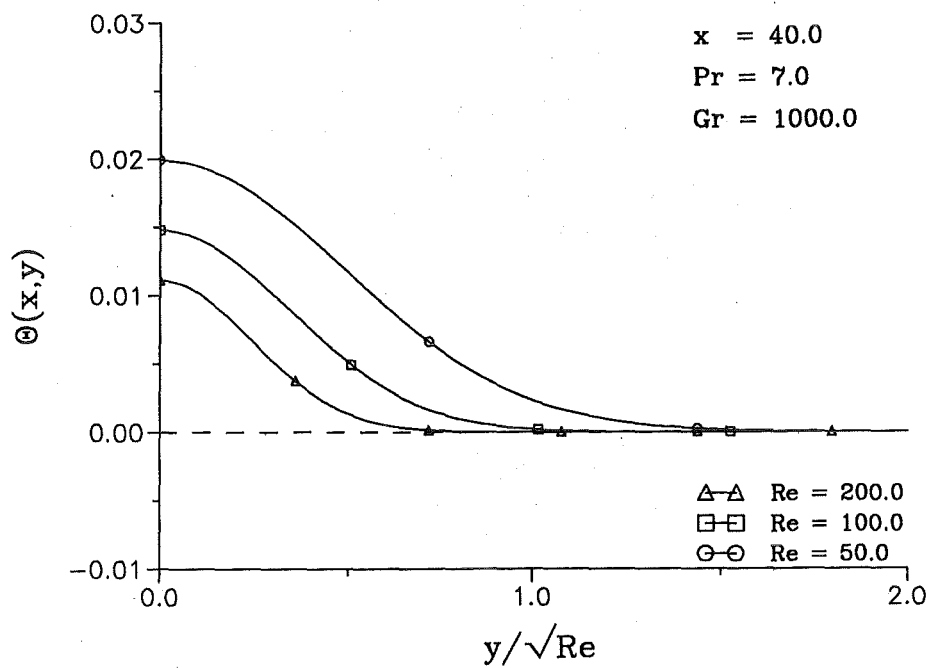


Abbildung 4.13: Profile der Temperatur  $\theta$  bei Variation der REYNOLDS-Zahl

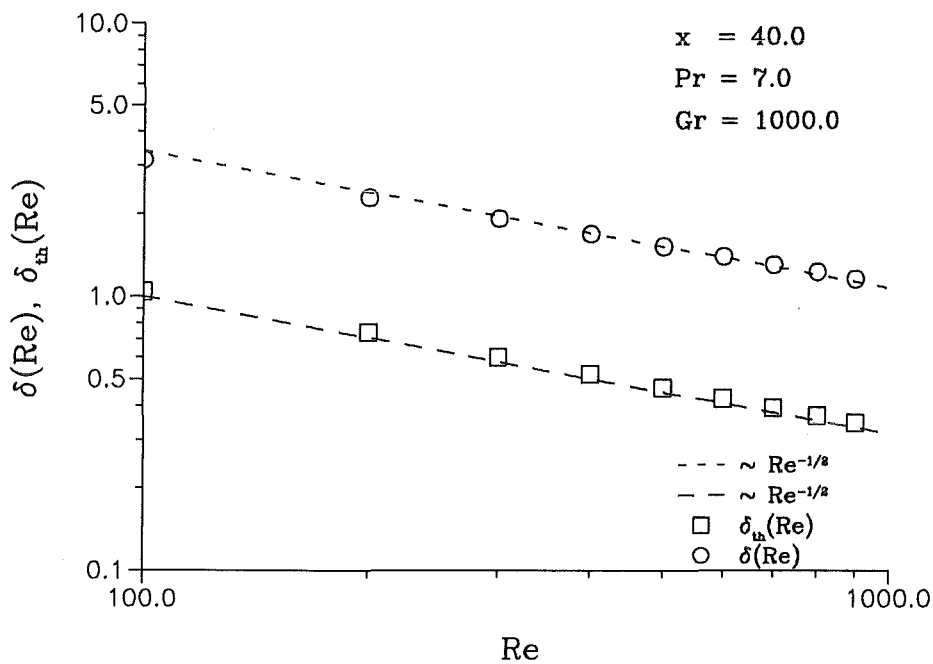


Abbildung 4.14: Dicke der kinematischen und der thermischen Grenzschicht,  $\delta$  und  $\delta_{th}$ , als Funktion der REYNOLDS-Zahl

## 4.2.2 Variation der GRASHOF-Zahl

Die Variation der GRASHOF-Zahl erfolgt – bei gleicher Geometrie und gleichem Fluid – am einfachsten durch Veränderung der Beheizung  $\dot{Q}$ .

Bei Variation der GRASHOF-Zahl ändert sich die Zwangsströmung nicht. Eine Vergrößerung der GRASHOF-Zahl hat nach Abbildung 4.15, bei konstanter REYNOLDS-Zahl, keinen Einfluß auf die Breite der kinematischen Grenzschicht. Da bei  $Pr = 7$  die thermische Grenzschicht sehr viel dünner ist als die kinematische Grenzschicht kann die stärkere Beheizung die kinematische Grenzschicht nicht beeinflussen. Der Auftriebseffekt dagegen nimmt deutlich zu, indem im Kernbereich der gesteigerte Auftrieb zu einer deutlich beschleunigten Strömung führt. Mit steigender GRASHOF-Zahl ändert sich also das Verhältnis von Zwangskonvektion und Naturkonvektion. Die Abhängigkeit (siehe Abbildung 4.16)

$$u(x, 0) \sim Gr^{2/5}$$

der Längsgeschwindigkeit auf der  $x$ -Achse von der GRASHOF-Zahl finden wir nur für große GRASHOF-Zahlen und für Geschwindigkeitswerte die größer sind als eins. Dort hat die Naturkonvektion aufgrund der Beheizung die Nachlaufdüse aufgefüllt und dominiert somit die Strömung. Die oben angegebene Proportionalität hat ihre Ursache demnach in der Naturkonvektion.

Die Temperatur  $\Theta$  bleibt hingegen für steigende GRASHOF-Zahlen konstant, siehe Abbildung 4.17. Der stärkere Auftriebseffekt in den Geschwindigkeitsprofilen in Abbildung 4.15 kann sich nicht in den Temperaturprofilen bemerkbar machen, da nur

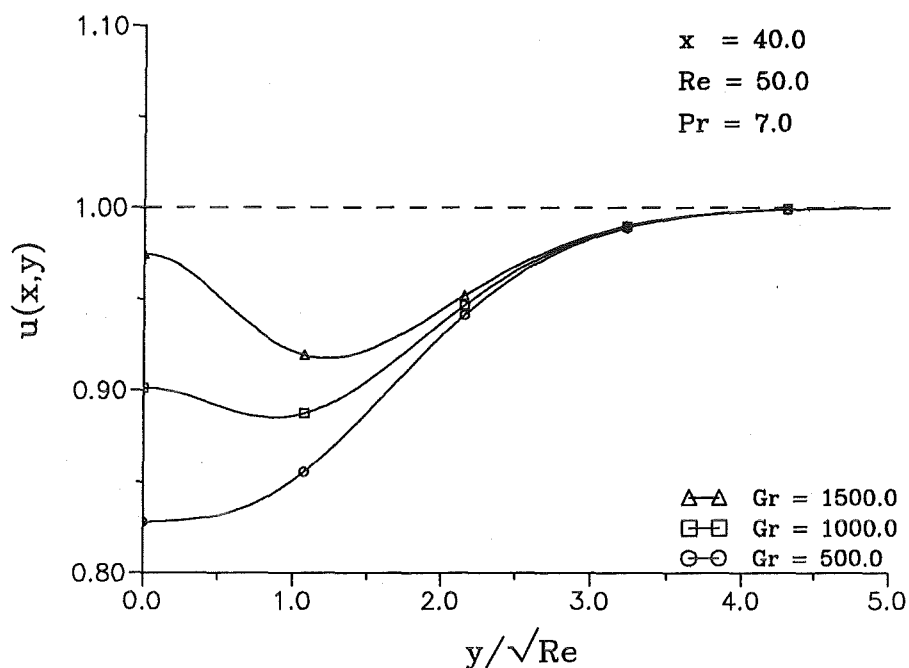


Abbildung 4.15: Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  bei Variation der GRASHOF-Zahl

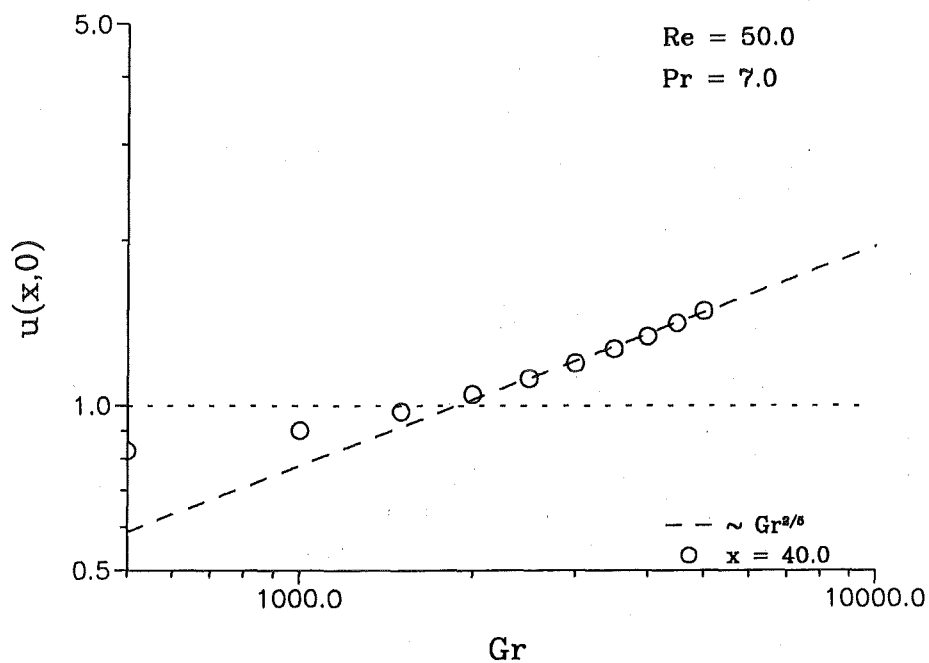


Abbildung 4.16: Längsgeschwindigkeit  $u$  auf der  $x$ -Achse als Funktion der GRASHOF-Zahl

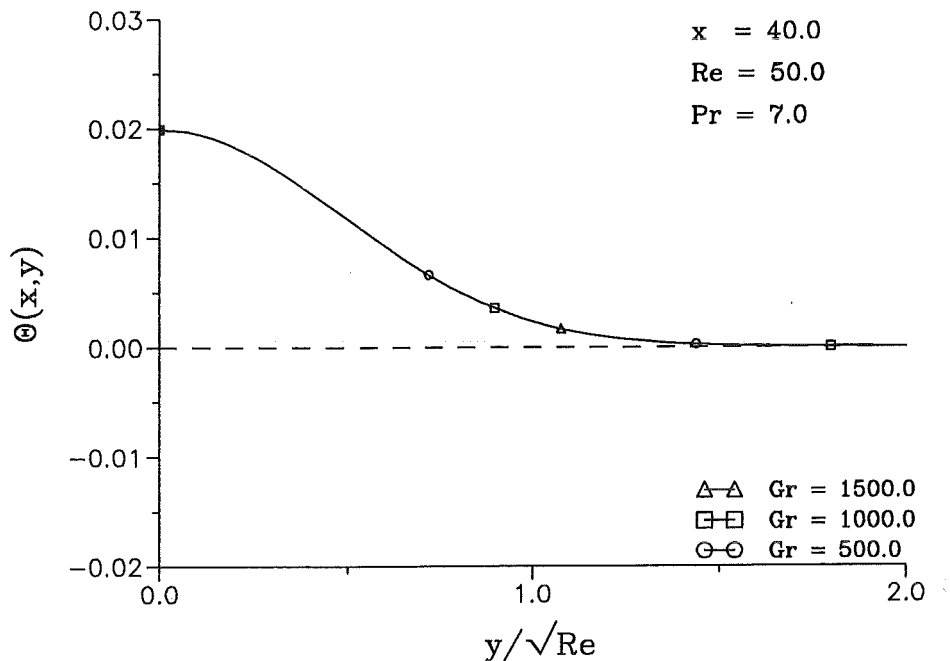


Abbildung 4.17: Profile der Temperatur  $\Theta$  bei Variation der GRASHOF-Zahl

die Geschwindigkeitsverteilung in der ersten Ordnung die Temperatur beeinflusst. Die stärkere Beheizung zeigt sich auch nicht in den Temperaturprofilen in Abbildung 4.17. Dies ist auf die Skalierung der Temperatur mit  $\Delta T$  zurückzuführen, welches gleichfalls in der GRASHOF-Zahl auftaucht. Auf diese Weise wird die dimensionslose Temperatur generell unabhängig von der GRASHOF-Zahl, während bei der Berechnung der dimensionsbehafteten Temperatur  $T$  nach Gl. (3.11) die Abhängigkeit von der GRASHOF-Zahl wieder erscheint.

### 4.2.3 Variation der PRANDTL-Zahl

Die Variation der PRANDTL-Zahl ist nur über einen Austausch des Fluids möglich.

Eine Erhöhung der PRANDTL-Zahl bedeutet eine stärkere Gewichtung des diffusiven Impulstransports gegenüber dem diffusiven Wärmetransport. Bei gleicher REYNOLDS-Zahl erwarten wir daher für größere PRANDTL-Zahlen eine Verkleinerung der thermischen Grenzschicht im Vergleich zur kinematischen Grenzschicht.

Dies erkennen wir bei einem Vergleich der Abbildungen 4.18 und 4.19. Die kinematische Grenzschicht ändert sich bei Variation der PRANDTL-Zahl nicht, siehe Abbildung 4.18. Eine Veränderung der PRANDTL-Zahl, ohne gleichzeitige Änderung der REYNOLDS-Zahl, ist bei unserer Skalierung nur über  $\kappa$  möglich. Die wachsende PRANDTL-Zahl bewirkt deshalb wegen der kleineren Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  eine dünnere thermische Grenzschicht, siehe Abbildung 4.19 und Abbildung 4.20. Die Wärme bleibt dann auf kleinerem Raum in der Nähe der Symmetrieachse konzentriert.



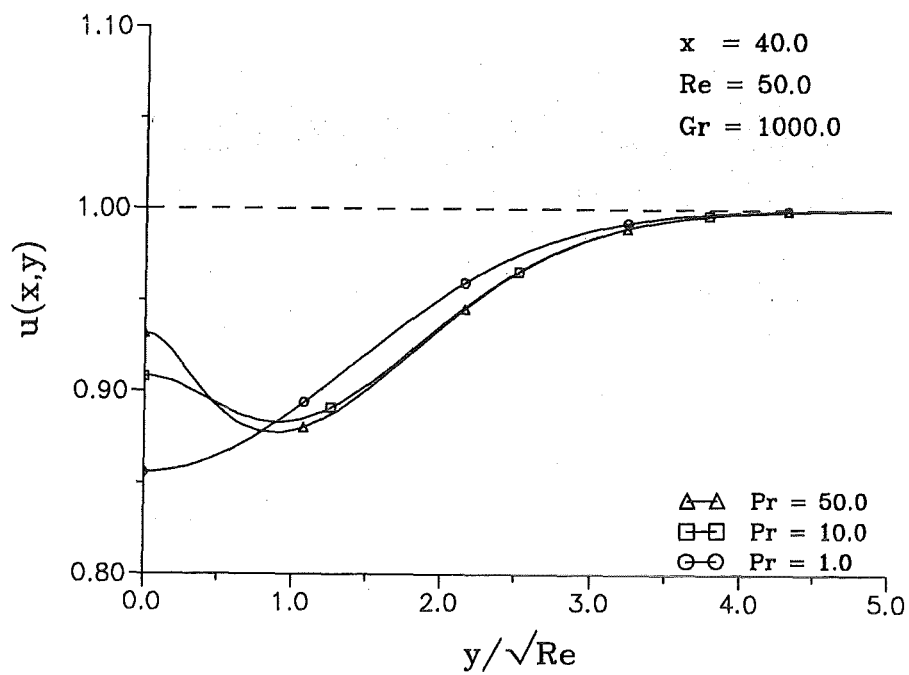


Abbildung 4.18: Profile der Längsgeschwindigkeit  $u$  bei Variation der PRANDTL-Zahl

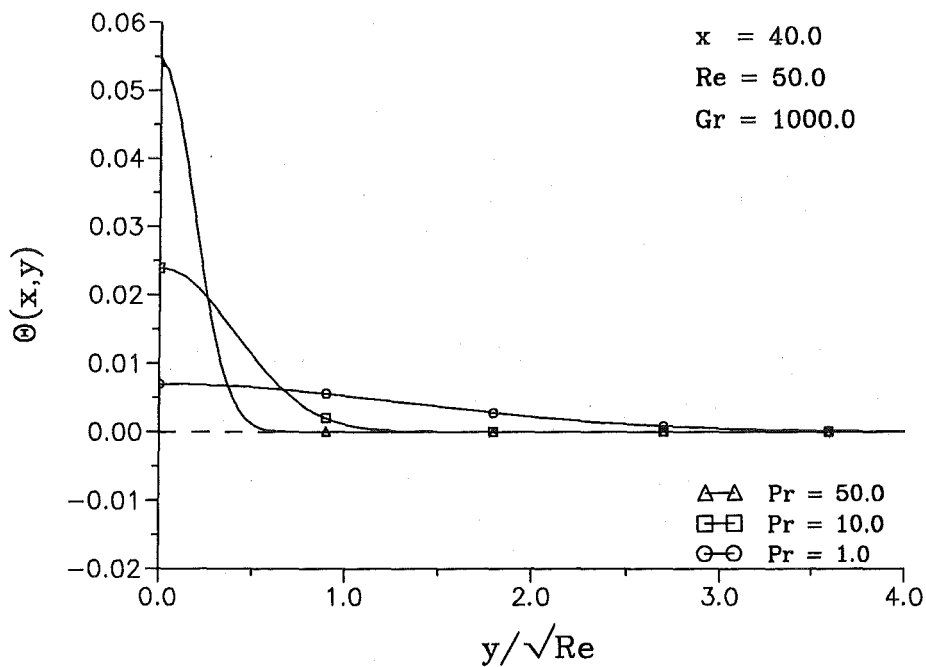


Abbildung 4.19: Profile der Temperatur  $\Theta$  bei Variation der PRANDTL-Zahl

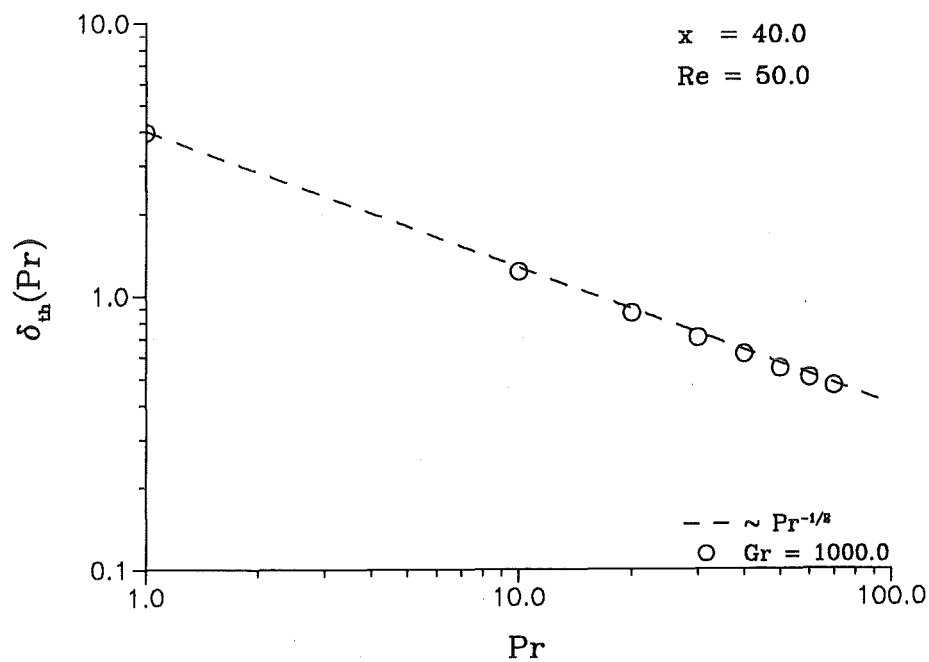


Abbildung 4.20: Dicke der thermischen Grenzschicht  $\delta_{th}$  als Funktion der PRANDTL-Zahl

In den Geschwindigkeitsprofilen in Abbildung 4.18 sehen wir deshalb auch eine zunehmende Beschränkung des Auftriebseffektes auf den Kernbereich der Strömung mit wachsender PRANDTL-Zahl.

Aus Abbildung 4.20 können wir die Abhängigkeit der Dicke der thermischen Grenzschicht von der PRANDTL-Zahl entnehmen. Wir erhalten die Proportionalität

$$\delta_{th}(Pr) \sim Pr^{-1/2} .$$

# Kapitel 5

## Konvergenzbereich

Wir müssen nun nachweisen, daß die asymptotischen Lösungen konvergieren. Dafür müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muß der Entwicklungsparameter stets kleiner eins sein. Zweitens darf kein Reihenglied beliebig groß werden. Aus diesen Bedingungen ergeben sich Einschränkungen für den Gültigkeitsbereich der asymptotischen Lösungen. Diesen wollen wir im folgenden herleiten. Vorab müssen wir die Grenzschichtdicke und die Amplituden der Ähnlichkeitsfunktionen abschätzen, weil wir diese für die Bestimmung des Konvergenzbereiches brauchen.

### 5.1 Abschätzung der Grenzschichtdicke

Wir wollen die Zunahme der Grenzschicht in Strömungsrichtung abschätzen. Dazu verwenden wir die bekannten Lösungen  $u_0$ ,  $\Theta_0$  der ersten Ordnung. Als erste Glieder der Reihe dominieren sie die asymptotischen Lösungen. Die höheren Anteile der Entwicklung werden die Grenzschichtdicke nicht mehr maßgebend ändern.

Wir müssen unterscheiden zwischen der kinematischen und der thermischen Grenzschicht. Die Ausbreitung der kinematischen Grenzschicht schätzen wir aus  $u_0$ , die der thermischen Grenzschicht aus  $\Theta_0$  ab. Wir definieren in beiden Fällen als Rand der Grenzschicht  $\delta^*(x)$  bzw.  $\delta_{th}^*(x)$  den Ort, an dem die Lösung auf 1/100 vom Maximalwert abgefallen ist. Wir definieren

$$\begin{aligned}u_0(x, \delta^*(x)) &= 0.01 u_{0max} , \\ \Theta_0(x, \delta_{th}^*(x)) &= 0.01 \Theta_{0max} .\end{aligned}$$

Die Maximalwerte berechnen wir aus Gl. (3.53) und Gl. (3.55) und erhalten schließlich für die dimensionslosen Grenzschichtdicken die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\delta^*(x) &\approx 8,6 \sqrt{x} , \\ \delta_{th}^*(x) &\approx \frac{8,6}{\sqrt{Pr}} \sqrt{x} .\end{aligned}\tag{5.1}$$

Die Grenzschichtdicken  $\delta^*$  und  $\delta_{th}^*$  sind Querabmessungen und skalieren folglich mit  $d/\sqrt{Re}$  (siehe Gl. (3.11)). Sie sind damit anders skaliert als die Grenzschichtdicken  $\delta$  und  $\delta_{th}$  in Gl. (4.4), welche mit  $d$  skalieren.

## 5.2 Abschätzung der Amplituden der Ähnlichkeitsfunktionen

Die Ähnlichkeitsfunktionen  $F_1(\eta)$ ,  $K_1(\eta)$  und  $H_1(\eta)$  erweisen sich aus unseren numerischen Lösungen der Gl. (3.64), Gl. (3.65) und Gl. (3.73) als Glockenkurven. Ihr maximaler Wert liegt also in jedem Fall auf der Symmetrieachse. Diesen können wir mittels der integralen Beziehungen Gl. (3.68), Gl. (3.69) und Gl. (3.76) abschätzen.

Die integrale Beziehung Gl. (3.68) geht auf Gl. (3.60) zurück. Der Integrand in Gl. (3.60) ist in erster Näherung nur innerhalb der kinematischen Grenzschicht  $\delta^*$  definiert. Dies gilt dann auch für den Integrand in Gl. (3.68), wenn wir die Grenzschichtdicke in der Variablen  $\eta$  ausdrücken. Wir finden

$$\eta_\delta = \frac{\delta^*(x)}{\sqrt{x}}.$$

Damit können wir die Fläche unter der Kurve  $F_1(\eta)$  durch ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\delta^*(x)/2\sqrt{x}$  und  $F_1(0)$  approximieren. Wir schreiben also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) d\eta = 1 \approx \frac{\delta^*(x)}{2\sqrt{x}} F_1(0).$$

Mit der Abschätzung für die Grenzschichtdicke  $\delta^*(x)$ , Gl. (5.1), erhalten wir

$$F_1(0) \approx \frac{1}{4}. \quad (5.2)$$

Mit der gleichen Vorgehensweise schätzen wir, unter Verwendung des Ausbreitungsverhaltens der thermischen Grenzschicht, Gl. (5.1), die beiden Ähnlichkeitsfunktionen  $K_1(\eta)$  und  $H_1(\eta)$  ab. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} K_1(0) &\approx -\frac{Pr}{4}, \\ H_1(0) &\approx \frac{Pr}{4}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Für die Abschätzung der Ähnlichkeitsfunktion  $K_1(\eta)$  haben wir die Dicke der thermischen Grenzschicht verwendet.  $K_1(\eta)$  erfaßt den Auftriebseinfluß auf die Längsgeschwindigkeit und dieser ist mit der thermischen Grenzschicht korreliert.

Über die Ähnlichkeitsfunktionen  $G_1(\eta)$  und  $I_1(\eta)$  können wir keine derartige quantitative Aussage machen. Wir können aber aus den Differentialgleichungen und den Randbedingungen, Gl. (3.70) bis Gl. (3.72), ersehen, daß die beiden Funktionen punktsymmetrisch bezüglich  $\eta = 0$  sind und für  $\eta \rightarrow \pm\infty$  konstante, endliche Werte annehmen.

### 5.3 Konvergenzbereich der asymptotischen Lösungen

Aus Gl. (4.1) erkennen wir, daß  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  nicht der maßgebende Entwicklungsparameter für die Längsgeschwindigkeit  $u$  ist. Vielmehr zeigt das Ergebnis eine Abhängigkeit von der Parameterkombination

$$\varepsilon^* = \frac{c_w(Re) \sqrt{Re}}{4 \sqrt{x}}.$$

Wir definieren  $\varepsilon^*$  als neuen Entwicklungsparameter und erhalten

$$u = 1 - \varepsilon^* \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x}\right) - \varepsilon^{*2} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} F_1(\eta) + \frac{16 Gr^*}{c_w^2(Re) Re^2} x^{3/2} K_1(\eta) \right) - \dots \quad (5.4)$$

Wir leiten nun zwei Bedingungen für die Konvergenz dieser Lösung ab. Zum einen muß der Entwicklungsparameter stets kleiner eins sein, d. h.

$$\varepsilon^* = \frac{c_w(Re) \sqrt{Re}}{4 \sqrt{x}} < 1,$$

bzw.

$$x > \frac{c_w^2(Re) Re}{16}. \quad (5.5)$$

Dies ist also bei gegebener REYNOLDS-Zahl eine untere Grenze für die Lauflänge  $x$ . Zum anderen dürfen die Funktionen, die mit Potenzen von  $\varepsilon^*$  multipliziert werden, nicht beliebig groß werden. Die Exponentialfunktion ist für negative Argumente

$$\exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x}\right) \leq 1$$

immer kleiner eins. Die Funktion  $F_1(\eta)$  bleibt ebenfalls beschränkt, wie wir im vorangegangenen Kapitel gezeigt haben, siehe Gl. (5.2). Die zweite Funktion in der Ordnung  $O(\varepsilon^{*2})$ ,

$$\frac{16 Gr^*}{c_w^2(Re) Re^2} x^{3/2} K_1(\eta),$$

müssen wir noch genauer untersuchen. Wir fordern, daß diese Funktion maximal von der gleichen Größenordnung ist wie die beiden anderen Funktionen,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} F_1(\eta).$$

Diese sind von der Größenordnung  $O(1)$ , d. h. wir schreiben:

$$\left| \frac{16 Gr^*}{c_w^2(Re) Re^2} x^{3/2} K_1(\eta) \right| \leq O(1).$$

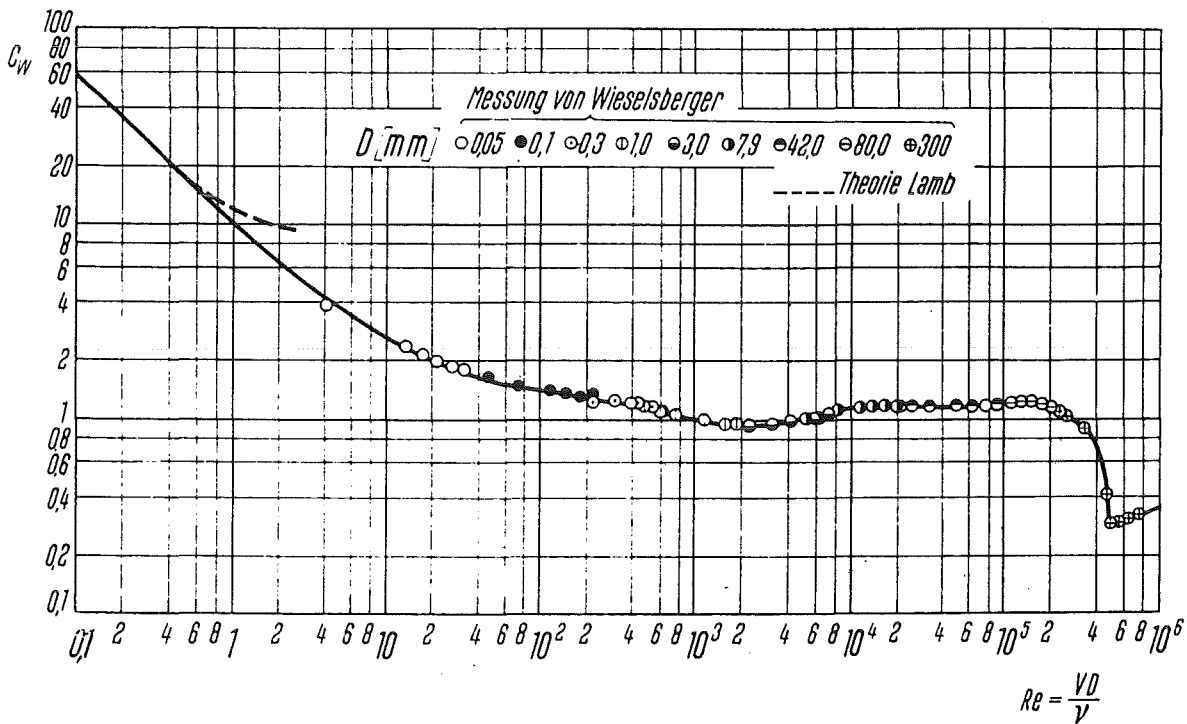


Abbildung 5.1: Widerstandsbeiwert von Kreiszyindern in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl

Mit der Abschätzung für  $K_1(0)$ , Gl. (5.3), erhalten wir hieraus eine obere Schranke für die dimensionslose Lauflänge:

$$x \leq \left( \frac{c_w^2(Re) Re^2}{4 Gr^* Pr} \right)^{2/3} \quad (5.6)$$

Dies beschränkt die Gültigkeit der Lösung auf das Gebiet

$$\frac{c_w^2(Re) Re}{16} < x \leq \left( \frac{c_w^2(Re) Re^2}{4 Gr^* Pr} \right)^{2/3} \quad (5.7)$$

Die Quergeschwindigkeit  $v$ , Gl. (4.2), lautet (mit demselben Entwicklungsparameter  $\varepsilon^*$ )

$$v = -\varepsilon^* \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{y}{x} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{y^2}{x}\right) + \varepsilon^{*2} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} G_1(\eta) + \frac{16 Gr^*}{c_w^2(Re) Re^2} x I_1(\eta) \right) + \dots \quad (5.8)$$

In Kapitel 5.2 konnten wir die Beschränktheit der Funktionen  $G_1(\eta)$  und  $I_1(\eta)$  nachweisen. Mit der oberen Schranke für die Lauflänge  $x$ , Gl. (5.7), erkennen wir, daß die Lösung für die Quergeschwindigkeit  $v$  ebenfalls beschränkt bleibt.

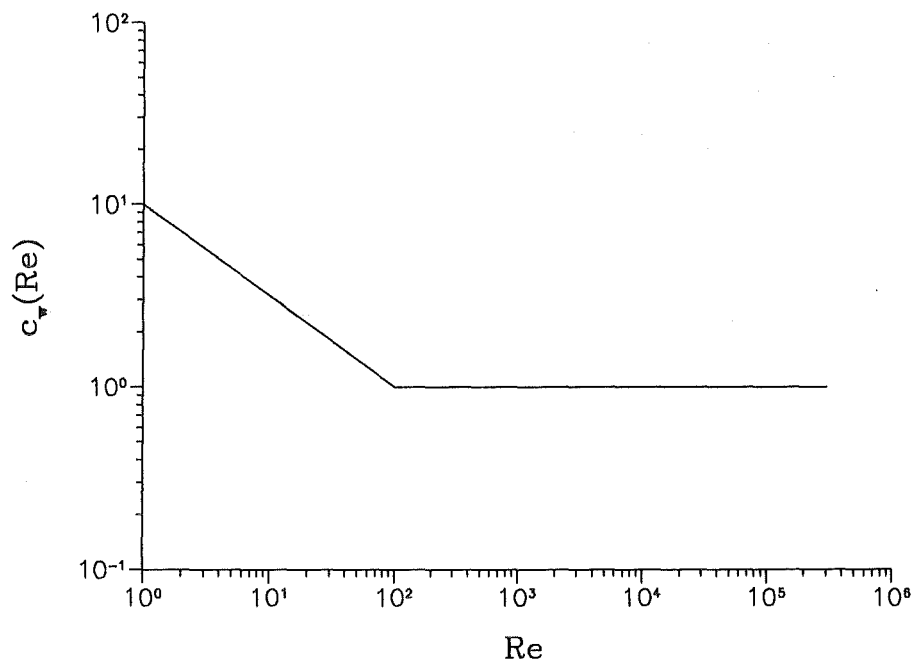


Abbildung 5.2: Modell für den Widerstandsbeiwert von laminar umströmten Kreiszy-  
lindern in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl

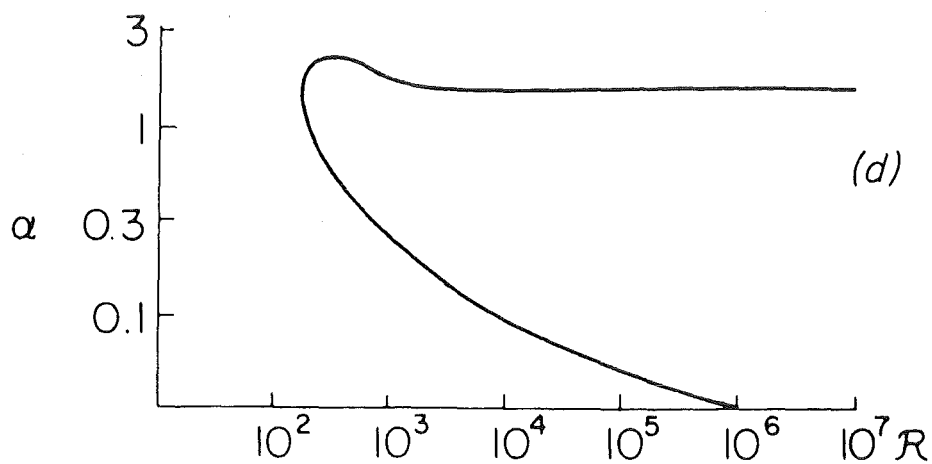


Abbildung 5.3: Stabilitätsbereich für Wendepunktprofile in Abhängigkeit von der  
REYNOLDS-Zahl  $Re_s$

Schließlich bleibt noch die Temperatur  $\Theta$ , Gl. (4.3), zu untersuchen. Wir erhalten (wieder mit dem gemeinsamen Entwicklungsparameter  $\varepsilon^*$ )

$$\begin{aligned} \Theta = & \varepsilon^* \frac{2\sqrt{Pr}}{c_w(Re) Re \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4} Pr \frac{y^2}{x}\right) + \\ & + \varepsilon^{*2} \sqrt{\frac{Pr}{1+Pr}} \frac{4}{c_w(Re) Re \sqrt{\pi}} H_1(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Da auch  $H_1(\eta)$  beschränkt bleibt, siehe Gl. (5.3), kann kein Anteil der Temperaturlösung beliebig groß werden.

Die Konvergenzbedingung Gl. (5.7) enthält den Widerstandsbeiwert  $c_w(Re)$ , für welchen nur experimentelle Werte existieren (siehe [2], S. 17). Wir wollen den tatsächlichen Verlauf der Funktion  $c_w(Re)$  in Abbildung 5.1 mit einem Modell approximieren und dieses in die Konvergenzbedingung einsetzen.

Bei  $Re = 3 \cdot 10^5$  fällt der Widerstandsbeiwert des Zylinders stark ab, siehe Abbildung 5.1 aus [2]. Hier findet der Umschlag der laminaren Grenzschicht an der Zylinderoberfläche in eine turbulente statt, (vgl. [2], S. 173). Wir dürfen aber nicht von einer laminaren Grenzschicht auf der Zylinderoberfläche auf einen laminaren Nachlauf schließen. Vielmehr ist der Nachlauf hinter einem Körper in den meisten Fällen turbulent. Da die Geschwindigkeitsprofile des Nachlaufs, welche sämtlich einen Wendepunkt aufweisen, inhärent instabil sind, schlägt der Nachlauf schon bei verhältnismäßig kleinen REYNOLDS-Zahlen in den turbulenten Strömungszustand um (vgl. [2], S. 179-180). Dennoch wollen wir uns in dieser Arbeit auf den laminaren Zylindernachlauf beschränken. Die Ergebnisse für den laminaren Fall dienen als Grundlage für eine zukünftige Modellierung des turbulenten Nachlaufs.

Abbildung 5.3 aus [6] zeigt den Stabilitätsbereich für Wendepunktprofile in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl. Oberhalb einer kritischen REYNOLDS-Zahl kann die Grenzschicht, abhängig von der Wellenzahl  $\alpha$ , laminar oder turbulent sein. Wir interessieren uns nur für den Bereich unterhalb der kritischen REYNOLDS-Zahl  $Re_{\delta_{krit}} = 200$  und gehen daher nicht näher auf die Wellenzahl  $\alpha$  ein. Die REYNOLDS-Zahl

$$Re_{\delta} = \frac{\Delta u \delta_{kin}}{2\nu} \quad (5.10)$$

wird mit der Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta u$  auf der  $x$ -Achse, mit der halben Dicke der kinematischen Grenzschicht  $\delta_{kin}$  und mit der kinematischen Viskosität  $\nu$  gebildet. Alle Größen werden dimensionsbehaftet eingesetzt. Wir verwenden zur Abschätzung dieser REYNOLDS-Zahl die Geschwindigkeitsverteilung  $u_0$  der ersten Ordnung, Gl. (3.53), und die Abschätzung der Dicke der kinematischen Grenzschicht  $\delta^*$ , Gl. (5.1). Wir erhalten für die dimensionsbehaftete Geschwindigkeitsdifferenz auf der  $x$ -Achse

$$\Delta u = \varepsilon U_{\infty} u_0 = U_{\infty} \frac{c_w(Re) \sqrt{Re}}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Dies und die halbe Grenzschichtdicke

$$\frac{\delta_{kin}}{2} = \frac{d}{\sqrt{Re}} \frac{\delta^*}{2} = 4,3 \sqrt{x} \frac{d}{\sqrt{Re}}$$



setzen wir in Gl. (5.10) ein. Wir finden den Zusammenhang

$$Re_\delta = \frac{4,3}{4\sqrt{\pi}} c_w(Re) Re$$

zwischen den unterschiedlich gebildeten REYNOLDS-Zahlen. Den Widerstandsbeiwert  $c_w(Re)$  nehmen wir für REYNOLDS-Zahlen  $Re > 100$  als konstant  $c_w = 1$  an, siehe Abbildung 5.2. Damit können wir die kritische REYNOLDS-Zahl

$$Re_{krit} = 330$$

berechnen. Bis zu dieser REYNOLDS-Zahl bleibt die Grenzschicht im Nachlauf laminar. Wir unterscheiden im laminaren Fall der Zylinderumströmung zwei Bereiche, siehe Abbildung 5.2:

1.

$$1 < Re < 100 : c_w = \frac{10}{\sqrt{Re}}$$

Für diesen Bereich lautet das Konvergenzkriterium Gl. (5.7)

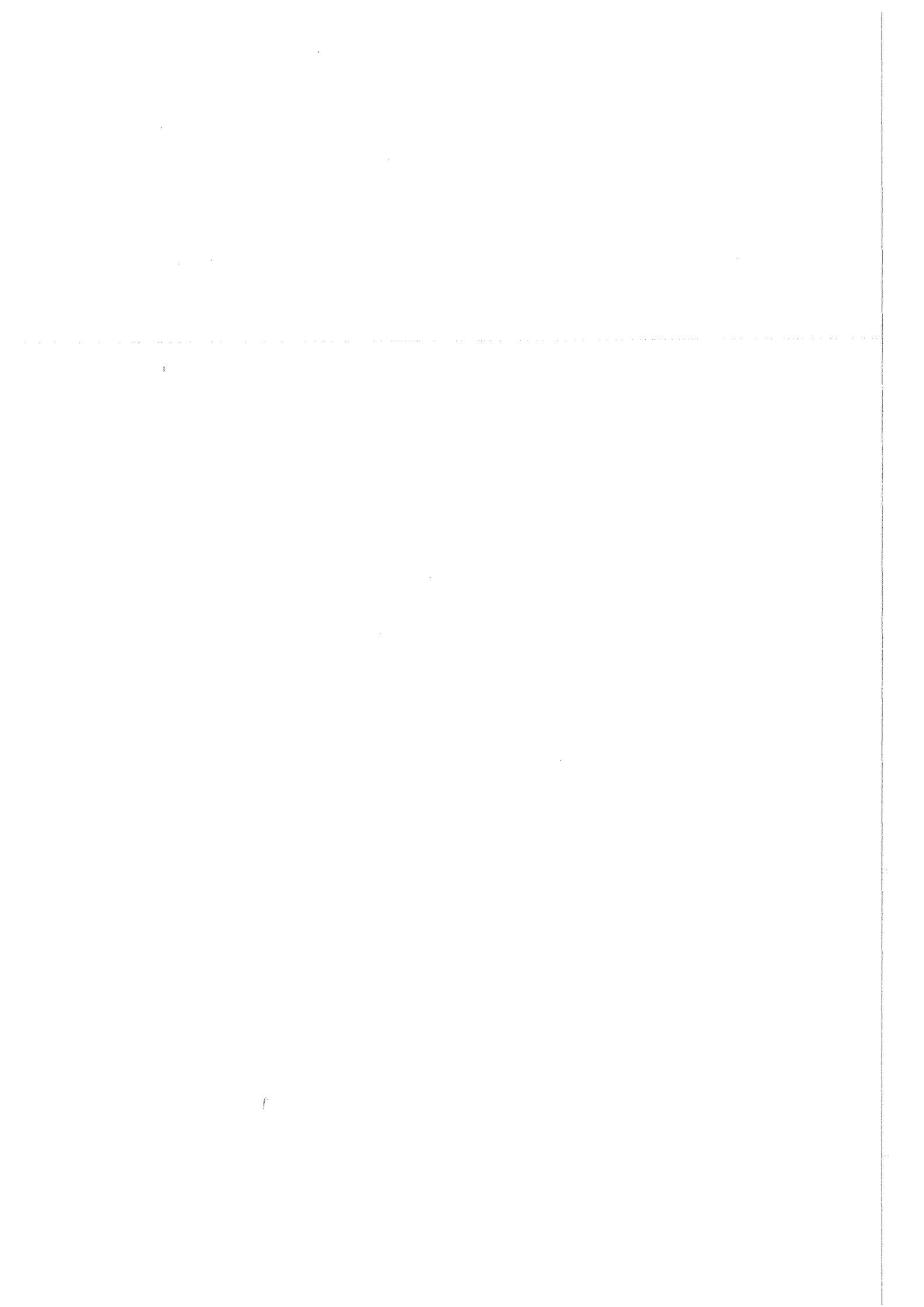
$$6.25 < x < \left( \frac{25 Re}{Gr^* Pr} \right)^{2/3}$$

2.

$$100 \leq Re < 330 : c_w = 1$$

Für diesen Bereich lautet das Konvergenzkriterium Gl. (5.7)

$$\frac{Re}{16} \leq x < \left( \frac{Re^2}{4 Gr^* Pr} \right)^{2/3}$$



# Kapitel 6

## Diskussion, Zusammenfassung

Ziel der Arbeit ist die Modellierung des laminaren Nachlaufs in einem Abstand hinter einem schwach beheizten Zylinder. Der Zylinder wird entgegen dem Schwerevektor angeströmt. Wir gehen aus von der ähnlichen Näherungslösung für das Strömungsfeld im isothermen, laminaren Nachlauf.

SCHLICHTING, siehe [2], und LOITSIANSKI, siehe [3], geben eine analytische Näherungslösung für die Nachlaufgeschwindigkeit hinter der längsangeströmten, ebenen Platte an. Die spezielle Gestalt des umströmten Körpers geht dabei nicht in die Lösung für den Nachlauf ein. Allein die integrale Wirkung des Körpers, d. h. sein Widerstand, bestimmt die Strömung. Somit gilt diese Lösung auch für den laminaren Nachlauf hinter einem Zylinder, wenn sie mit dem Zylinderwiderstand formuliert wird.

FUJII, siehe [4], behandelt den laminaren Freistrahler über der linienförmigen Wärmequelle. Er findet ähnliche Lösungen für das Strom- und Temperaturfeld. Die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen lassen sich nicht analytisch angeben, vielmehr wird eine numerische Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen ausgeführt.

Zur Beschreibung des vorliegenden Problems stehen uns die NAVIER-STOKES-Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Wärmetransportgleichung zur Verfügung. Der Widerstand des Zylinders geht in die integrale Impulsbilanz ein, die Heizleistung in die integrale Wärmebilanz. Wir vereinfachen die Gleichungen indem wir uns auf den zweidimensionalen, stationären Fall beschränken und die BOUSSINESQ-Approximation verwenden. Mit einer geeigneten Skalierung gehen wir zur dimensionslosen Form dieser Gleichungen über. Für große REYNOLDS-Zahlen, welche wir hier annehmen wollen, können wir die Gleichungen weiter vereinfachen und erhalten schließlich die Grenzschichtgleichungen. Bis auf die Randbedingung für die Längsgeschwindigkeit im Außenfeld sind dies dieselben Ausgangsgleichungen wie FUJII sie verwendet.

Analog zu SCHLICHTING bzw. LOITSIANSKI schreiben wir die Gleichungen um für kleine Nachlaufgeschwindigkeiten  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ . Wir suchen eine asymptotische Lösung und entwickeln die Nachlaufgeschwindigkeiten und die Temperatur nach Potenzen des kleinen Parameters  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$ . Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zwei gekoppelte

Gleichungssysteme für die ersten zwei Ordnungen der Entwicklung. Für schwache Beheizung erscheint der Auftriebsterm in den Gleichungen der zweiten Ordnung.

Mit einer Ähnlichkeitstransformation reduzieren wir die partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung auf gewöhnliche und finden analytische Lösungen für die Geschwindigkeiten und die Temperatur. Die Lösung für die Geschwindigkeiten ist identisch mit der Lösung die SCHLICHTING und LOITSIANSKI angeben, siehe [2], Gl. (9.35), und [3], Gl. (1.115). Wir finden also auch die gleiche Abhängigkeit der Dicke der kinematischen Grenzschicht  $\delta$  von der dimensionslosen Lauflänge  $x$  und von der REYNOLDS-Zahl wie SCHLICHTING/LOITSIANSKI (in Klammern):

$$\delta \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re}}, \left( \delta \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re}} \right).$$

Die Dicke der thermischen Grenzschicht hat die Abhängigkeit:

$$\delta_{th} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re} \sqrt{Pr}}.$$

Die Temperatur wird in dieser Ordnung passiv transportiert, d. h. Rückwirkungen des Temperaturfeldes auf die Strömung sind nicht möglich.

Die Gleichungen der zweiten Ordnung berücksichtigen den Einfluß der Nichtlinearitäten und des Auftriebs. Wir führen wiederum eine Ähnlichkeitstransformation aus und integrieren die gewöhnlichen Differentialgleichungen numerisch. Dies geschieht mit Hilfe eines Shooting-Verfahrens. Die analytischen Lösungen der ersten Ordnung werden innerhalb des gleichen Programms berechnet und die anschließende Superposition liefert uns die gesuchte Näherungslösung, siehe Abbildung 4.4.

Wir rechnen mit der PRANDTL-Zahl für Wasser,  $Pr = 7$ . Es liegt dann immer eine, im Vergleich zur kinematischen Grenzschicht, dünne thermische Grenzschicht vor. Wir erwarten daher einen starken Einfluß der Auftriebseffekte auf den Kern des Nachlaufs und im Außenfeld eine weitgehend ungestörte Nachlaufdecke. Bei kleinen PRANDTL-Zahlen sind die Verhältnisse völlig verschieden. Die thermische Grenzschicht wird dann dicker sein als die kinematische. Der Einfluß der PRANDTL-Zahl auf die charakteristischen Größen wird in Kapitel 4.2.3 diskutiert. Für die weitere Diskussion wollen wir uns auf den Fall  $Pr = 7$  beschränken.

Wir vergleichen nun die charakteristischen Abhängigkeiten mit denen die FUJII für den laminaren Freistrah über der Linienquelle angibt (in Klammern). Die Dicken der kinematischen und der thermischen Grenzschicht haben die Abhängigkeiten, siehe Abbildungen 4.8, 4.9, 4.14 und 4.20:

$$\delta \sim \frac{x^{2/5}}{\sqrt{Re}}, \left( \delta \sim \frac{x^{2/5}}{Q^{1/5}} \right),$$

$$\delta_{th} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{Re} \sqrt{Pr}}, \left( \delta_{th} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}} \right).$$

Die Dicke der kinematischen Grenzschicht ist durch den Nachlauf bestimmt. Die leicht veränderte Abhängigkeit von der Lauflänge  $x$ , im Vergleich zum linearisierten Nachlauf, geht wesentlich auf die Hinzunahme der Nichtlinearitäten zurück. Diese Nichtlinearitäten sind bei FUJII gleichfalls vorhanden, weshalb die gleiche Abhängigkeit resultiert. Die unterschiedlichen Ursachen für die Strömung (Zwangskonvektion–Naturkonvektion) bedingen die angegebenen Abhängigkeiten von  $Re$  und  $\dot{Q}$ . Die Dicke der thermischen Grenzschicht bleibt auch in der zweiten Ordnung rein durch den Nachlauf bestimmt. Dies wird aus einem Vergleich der Abhängigkeiten in der ersten und zweiten Ordnung deutlich.

Die dimensionslose Längsgeschwindigkeit  $u$  und die dimensionslose Temperatur  $\Theta$  auf der  $x$ -Achse haben die gleiche Abhängigkeit von der dimensionslosen Lauflänge  $x$  wie FUJII sie angibt, siehe Abbildungen 4.10, 4.11 und 4.16:

$$u(x, 0) \sim x^{1/5} \dot{Q}^{2/5}, \quad \left( u(x, 0) \sim x^{1/5} \dot{Q}^{2/5} \right),$$

$$\Theta(x, 0) \sim \frac{1}{x^{3/5}}, \quad \left( \Theta(x, 0) \sim \frac{1}{x^{3/5} \dot{Q}^{1/5}} \right).$$

Der Kernbereich der Strömung ist damit wesentlich durch die Auftriebseffekte geprägt. Wir schließen daraus, daß der laminare Nachlauf hinter dem beheizten Zylinder auf der Symmetrieachse weitgehend die Eigenschaften des laminaren Freistrahls über der Linienquelle hat. Eine Ursache für das geänderte Verhalten bezüglich der Heizleistung  $\dot{Q}$  ist die unterschiedliche Wärmeabfuhr in beiden Fällen. Während beim laminaren Freistrahls über der Linienquelle die Wärme durch Diffusion und Konvektion durch die Auftriebsströmung transportiert wird, kommt beim Zylindernachlauf der Wärmetransport durch die Zwangsströmung hinzu.

Die asymptotische Lösung hat für den Parametersatz

$$Re = 50, \quad Gr = 500, \quad Pr = 7$$

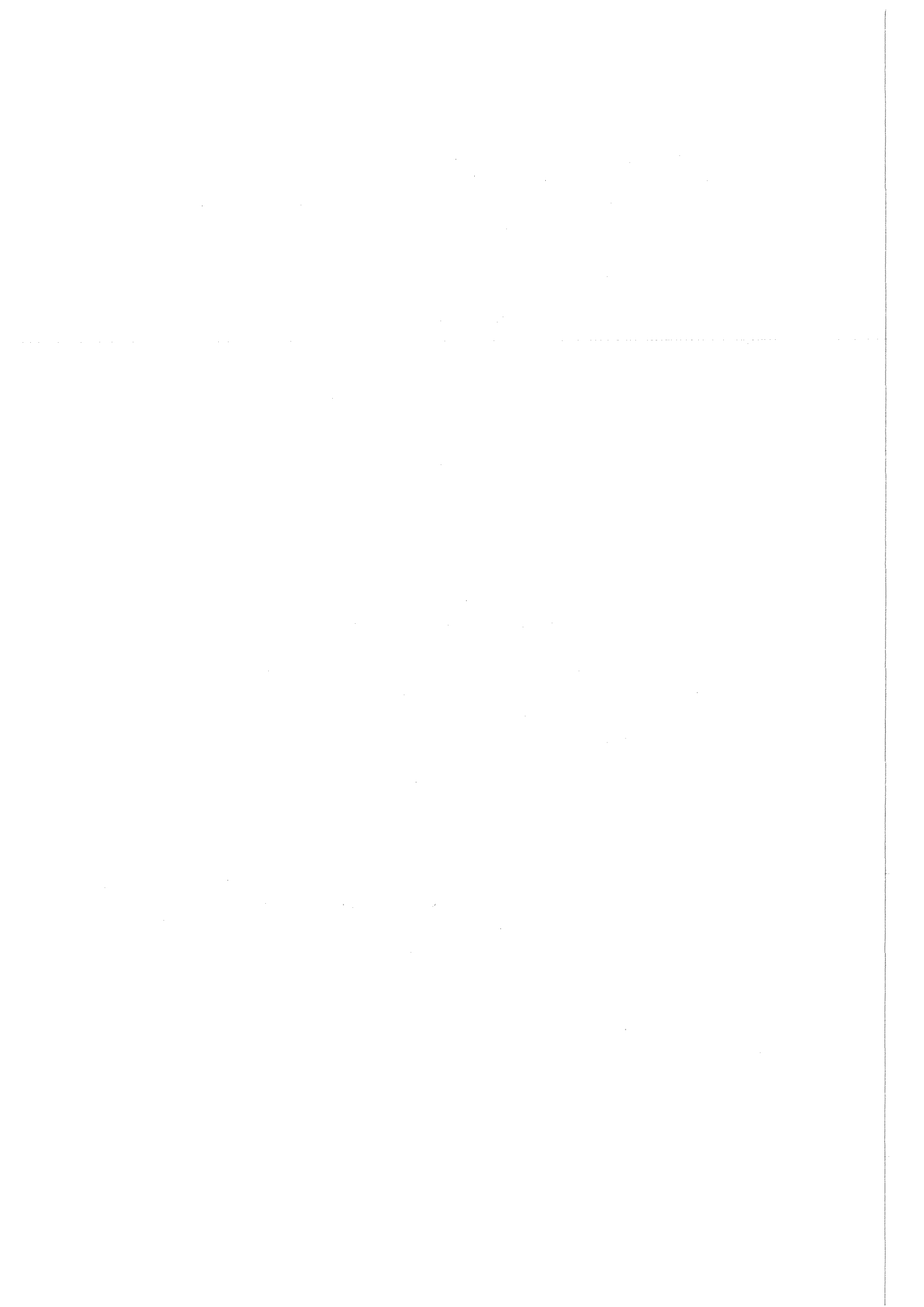
den Konvergenzbereich

$$6.25 \leq x \leq 25.2.$$

Somit sind unsere Lösungen nur in diesem Bereich gültig. Des weiteren gilt zu beachten, daß der laminar/turbulente Umschlag des Nachlaufs für die hier vorhandenen Wendepunktprofile recht früh erfolgen kann. Wir schätzen die kritische REYNOLDS-Zahl mit den Ergebnissen der ersten Ordnung ab und finden

$$Re_{krit} = 330.$$

Unterhalb dieser kritischen REYNOLDS-Zahl bleibt die Grenzschicht in erster Ordnung laminar.



# Anhang A

## Numerische Integration

Die Differentialgleichungen Gl. (3.64), Gl. (3.65), Gl. (3.70), Gl. (3.71) und Gl. (3.73) können nicht allgemein analytisch integriert werden. Je nach den Faktoren in diesen Differentialgleichungen sind gegebenenfalls analytische Darstellungen in Form unendlicher Reihen jedoch möglich. Es ist deshalb zweckmäßig, die Gleichungen numerisch zu integrieren.

Die gesuchte Funktion muß jeweils eine Randbedingung am linken und eine am rechten Rand erfüllen. Somit können wir keine reine Vorwärtsintegration verwenden, da ein solches Verfahren die rechte Randbedingung nicht zuverlässig erfüllen kann. Wir verwenden daher ein sogenanntes Shooting-Verfahren. Dabei wird ein Parameter, z. B. eine Randbedingung, variabel gehalten und so oft verändert bis die gesuchte Funktion alle Randbedingungen erfüllt. In der Programmbibliothek HARWELL für den IBM 3090 steht mit dem Unterprogramm DD03AD ein solches Verfahren zur Verfügung.

Wir wollen die Integration dieser Differentialgleichungen exemplarisch anhand der Differentialgleichungen (3.64) und (3.70) erläutern. Die gesuchte Funktion muß außer den Randbedingungen auch eine integrale Bedingung erfüllen. Die Differentialgleichung (3.70) wird mit der zu integrierenden Differentialgleichung (3.64) zusammengefaßt. Wir können so mit geringem Aufwand die Funktion  $G_1(\eta)$  mitberechnen. Zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung Gl. (3.64) kommt also noch jeweils eine Differentialgleichung erster Ordnung aus der integralen Bedingung Gl. (3.68) und eine aus Gl. (3.70) hinzu. Aus dem System zweiter Ordnung wird somit ein System vierter Ordnung.

Wir führen folgende Schreibweise für die Funktionen  $F_1$  und  $G_1$  ein:

$$\begin{aligned}\int F_1(\eta) d\eta &= Y(1), \\ F_1(\eta) &= Y(2), \\ F_1'(\eta) &= Y(3), \\ G_1(\eta) &= Y(4).\end{aligned}$$

Des weiteren werden die Werte der Funktionen an den Grenzen des Integrationsgebietes

wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} YA(1) &= \int_{-\infty}^0 F_1(\eta) d\eta, & YB(1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) d\eta, \\ YA(2) &= F_1(0), & YB(2) &= F_1(\infty), \\ YA(3) &= F_1'(0), & YB(3) &= F_1'(\infty), \\ YA(4) &= G_1(0), & YB(4) &= G_1(\infty). \end{aligned}$$

Integriert wird von  $\eta = A$  bis  $\eta = B$ . In unserem Fall ist  $A = 0$  und  $B = 10$ . Die Ergebnisse zeigen, daß die rechte Grenze ausreichend groß gewählt ist. Mit der Konvention

$$FG(i) = Y'(i)$$

können die Gleichungen (3.64), (3.68) und (3.70) unter Verwendung der obigen Schreibweise in ein System mit vier Gleichungen erster Ordnung umformuliert werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} FG(1) &= Y(2), \\ FG(2) &= Y(3), \\ FG(3) &= \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right) - \frac{1}{2}\eta Y(3) - Y(2), \\ FG(4) &= -Y(2) - \frac{1}{2}\eta Y(3). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} YA(1) &= 0, \\ YA(3) &= 0, \\ YA(4) &= 0, \\ YB(2) &= 0. \end{aligned}$$

Für ein System mit vier Gleichungen und einem Shooting-Parameter verlangt das Verfahren fünf Randbedingungen. Als Shooting-Parameter  $SP$  verwenden wir den Wert von  $Y(2)$  auf der Achse, d. h. die Randbedingung

$$YA(2) - SP = 0.$$

Die Amplitude der Funktion  $F_1(\eta)$  wird also am linken Rand solange verändert, bis die Randbedingungen am rechten Rand erfüllt sind.



# Literaturverzeichnis

- [1] U. Müller. *Freie Konvektion und Wärmeübertragung*. Skriptum der Vorlesung an der Universität Karlsruhe, WS 1991/92.
- [2] H. Schlichting. *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 8. Auflage, 1982.
- [3] L. G. Loitsianski. *Laminare Grenzschichten*. Akademie-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1967.
- [4] T. Fujii. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 6, pp. 597-606, 1963.
- [5] J. Zierep. *Grundzüge der Strömungslehre*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 3. Auflage, 1987.
- [6] R. Betchov, W. O. Criminale. *Stability of Parallel Flows*. Academic Press, New York/London, 1967.