

KfK 5362
Juni 1994

Diskussion plastischer Instabilitäten eines Druckbehälters mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente

H. Lämmer, B. Ritter, Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe
Institut für Materialforschung

KfK 5362

Diskussion plastischer Instabilitäten
eines Druckbehälters mit Hilfe der
Methode der Finiten Elemente

H. Lämmer
B. Ritter
Ch. Tsakmakis

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0303-4003

Kurzfassung

Im vorliegenden Bericht wurde mittels des Finite-Elemente Programms *ABAQUS* der Einfluß geometrischer und thermischer Imperfektionen auf den Versagensdruck von Druckbehältern bestimmt. Im Rahmen der Theorie großer Deformationen wurde ausgehend von einem Materialmodell der Thermoplastizität Versagen durch plastische Instabilität berechnet. Die dazu notwendigen Materialparameter wurden anhand einachsiger Zugversuche identifiziert. Die Parameter wurden so angepaßt, daß das Einschnürverhalten der Zugprobe gut wiedergegeben wurde. Ausgehend vom Zugstab wurde der Einfluß von Imperfektionen auf das Einschnürverhalten diskutiert. In 2D- und 3D-Rechnungen wurde gezeigt, daß bei Druckbehältern durch ausreichend große Imperfektionen eine Verformungslokalisierung erzielt werden kann. Erwartungsgemäß zeigte sich, daß der maximal ertragbare Innendruck sowie der Beginn der Verformungslokalisierung von der Größe der Imperfektion abhängt.

Abstract

Discussion of Plastic Instabilities of a Pressure Vessel by Means of the Finite Element Method

In this report the influence of geometrical and thermal imperfections on the load-carrying capacity of pressure vessels has been studied by means of the *ABAQUS* finite element code. Using a thermo-plasticity model for finite strains failure due to plastic instability has been investigated. The parameters needed for this model were identified with uniaxial tensile tests. The parameters were fitted in such a way that necking of the tensile rod was described in a satisfactory manner. Starting from the tensile rod the influence of imperfections on necking of a structure is discussed. Axisymmetric and three dimensional calculations showed that for a sufficient size of the imperfection necking can be obtained. As expected, the maximum internal pressure at failure and the beginning of localization of plastic deformations depend on the size of the imperfection.

Vorwort

Auslegungsüberschreitende Unfälle in Kernkraftwerken gewinnen nicht zuletzt durch den schweren Unfall in Tschernobyl im Jahre 1986 für die Planung künftiger Anlagen mehr und mehr an Bedeutung. Bei diesen Anlagen soll aufgrund eines erweiterten Sicherheitskonzepts durch (teilweise bereits vorhandene) präventive Maßnahmen Kernschmelzen möglichst verhindert und durch mitigative Maßnahmen die Schadenfolgen eines solchen Unfalls auf die Anlage selbst beschränkt bleiben [1]. Eine mögliche Folge eines Kernschmelzunfalls stellt das Versagen des Reaktordruckbehälters unter Innendruck dar. Tritt ein solcher Unfall ein, so ist für die Auslegung der mitigativen Sicherheitsvorkehrungen der zeitliche Ablauf eines solchen Unfalls von entscheidender Bedeutung. Kann beispielsweise durch anlageninterne Notfallmaßnahmen der Innendruck im Reaktordruckbehälter nicht schnell genug auf einen unterkritischen Wert abgebaut werden, können aufgrund der zum Versagenszeitpunkt vorherrschenden Zustände unterschiedliche mechanische und thermische Belastungen auf das Containment resultieren, die bis hin zum Versagen des Containments führen können.

Es gibt viele Möglichkeiten, das Versagen eines Druckbehälters unter Innendruck zu definieren. Die vorliegende Arbeit ist eine Untersuchung des Reaktordruckbehälters auf instabiles Verhalten im Rahmen der Theorie großer Deformationen. Diese Untersuchungsart setzt voraus, daß das Materialverhalten des Behälterwerkstoffs ausreichend genau beschrieben ist. Deswegen wird auf die Bestimmung der Materialparameter im Stoffgesetz ausführlich eingegangen.

Die durchgeführten Untersuchungen haben grundlegenden Charakter und befassen sich in erster Linie mit Versagen infolge plastischer Instabilität. Es wird anhand zahlreicher Beispiele die Versagensart erläutert und zum Schluß einige Konsequenzen für den Reaktordruckbehälter diskutiert.

Karlsruhe, April 1994

H. Lämmer, B. Ritter und Ch. Tsakmakis

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	v
1 Einleitung	1
2 Allgemeine Grundlagen der Mechanik	2
2.1 Kinematik des deformierbaren Körpers	2
2.2 Verzerrungstensoren	6
2.3 Spannungstensoren	8
2.4 Methode der konjugierten Variablen	10
2.5 Erläuterungen zur Plastizität	11
3 Untersuchungen am Zugstab	16
3.1 Einführende Bemerkungen	16
3.2 Theoretische Grundlagen	17
3.3 Diskretisierung	20
3.4 Materialmodell	22
3.5 Bestimmung der Materialparameter	23
3.6 Einfluß geometrischer Imperfektionen	30
3.7 Einfluß thermischer Imperfektionen	34

4 Kugel unter Innendruck	42
4.1 Einfluß geometrischer Imperfektionen	43
4.2 Einfluß thermischer Imperfektionen	47
5 Reaktordruckbehälter	51
5.1 Einführende Bemerkungen	51
5.2 Diskretisierung	52
5.3 Einfluß geometrischer Imperfektionen	54
5.4 Einfluß thermischer Imperfektionen	60
5.5 3D-Rechnungen	64
6 Zusammenfassung	70
Literaturverzeichnis	72
Anhang	74

Bezeichnungen

Tensoren erster und zweiter Stufe werden in Fettdruck dargestellt, Tensoren vierter Stufe werden zusätzlich noch durch kalligrafische Buchstaben gekennzeichnet. Gleichungen in Indexschreibweise unterliegen der Einstein'schen Summationskonvention. Die verwendeten Rechenregeln können der Literatur [2] entnommen werden.

$()'$	Materielle zeitliche Ableitung von $()$
$()^{-1}$	Inverse von $()$
$()^T$	Transponierte von $()$
$GRAD$	Gradient-Operator (bezüglich der Referenzkonfiguration)
$grad$	Gradient-Operator (bezüglich der Momentankonfiguration)
DIV	Divergenz-Operator (bezüglich der Referenzkonfiguration)
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\mathbf{A B}$	Multiplikative Verknüpfung zweier Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	dyadisches Produkt zweier Tensoren
$Sp \mathbf{A}$	Spur von \mathbf{A}
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = Sp \mathbf{A B}^T$	Skalarprodukt zweier Tensoren gleicher Stufe
$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration, dem in der Referenzkonfiguration der Vektor \mathbf{X} zugeordnet ist
$d\mathbf{X}$	materielles Linienelement in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	materielles Linienelement in der Momentankonfiguration
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{R}	Rotationstensor
\mathbf{U}	Rechts-Strecktensor
\mathbf{V}	Links-Strecktensor

\mathbf{C}	Rechter Cauchy-Green Tensor
\mathbf{B}	Linker Cauchy-Green Tensor
λ_i	Eigenwerte von \mathbf{U} bzw. \mathbf{V}
\mathbf{u}_i	normierter Eigenvektor von \mathbf{U} zum Eigenwert λ_i
\mathbf{v}_i	normierter Eigenvektor von \mathbf{V} zum Eigenwert λ_i
$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t)$	Verschiebungsvektor
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
\mathbf{L}	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{D}	Symmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten
\mathbf{W}	Antisymmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (Wirbeltensor)
Ω_u, Ω_v	Antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe, die die Eigenvektoren \mathbf{u}_i bzw. \mathbf{v}_i in deren zeitliche Ableitung überführen
\mathbf{A}	Almansi'scher Verzerrungstensor
\mathbf{E}	Green'scher Verzerrungstensor
$\tilde{\mathbf{E}}$	Geometrisch linearisierter Green'scher Verzerrungstensors
\mathbf{E}_L^m	Verzerrungstensoren in Lagrangescher Schreibweise
\mathbf{E}_E^m	Verzerrungstensoren in Eulerscher Schreibweise
$(\ln \mathbf{V})$	Logarithmischer Verzerrungstensor
$d\mathbf{k}$	Differentieller Kraftvektor der Momentankonfiguration
$d\mathbf{K}$	Differentieller Kraftvektor der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{a}$	Gerichtetes Flächenelement der Momentankonfiguration
$d\mathbf{A}$	Gerichtetes Flächenelement der Referenzkonfiguration
\mathbf{n}	Einheitsnormale des differentiellen Flächenelementes $d\mathbf{a}$
\mathbf{N}	Einheitsnormale des differentiellen Flächenelementes $d\mathbf{A}$
W	Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Bezugskonfiguration
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{T}	Cauchy'scher Spannungstensor
$\sigma = T_{11}$	Wahre Spannung
\mathbf{T}^D	Deviatorischer Anteil des Cauchy'schen Spannungstensors
\mathbf{S}	Gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor
\mathbf{T}_R	1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

\mathcal{C}	Isotroper Tensor vierter Stufe des Elastizitätsgesetzes
\mathcal{I}	Einheitstensor vierter Stufe
σ_t	Technische Spannung
σ_y	Fließgrenze
R_m	Zugfestigkeit
e	Technische Dehnung
ε	Wahre (logarithmische) Dehnung
ε_e	Elastischer Anteil der wahren Dehnung
ε_p	Plastischer Anteil der wahren Dehnung
$\bar{\varepsilon}_p$	Plastische Vergleichsdehnung
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
ν	Querkontraktionszahl
μ, λ	Lamésche Elastizitätskonstanten

Kapitel 1

Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit sollten mit Hilfe des Finite Elemente Programms *ABAQUS* die Auswirkungen von geometrischen und thermischen Imperfektionen auf das Verformungsverhalten und den maximal ertragbaren Innendruck eines Reaktordruckbehälters untersucht werden. Berechnet werden sollte hierbei Versagen durch plastische Instabilität unter Verwendung eines Materialmodells der Thermoplastizität, wobei thermisch induzierte Spannungen vernachlässigt wurden.

Die daraus gewonnen Erkenntnisse sollen als Grundlage dienen, um das Versagensverhalten von Reaktordruckbehältern nach schweren Kernschmelzunfällen besser beurteilen zu können. Bei einem solchen Unfallszenarium geht man davon aus, daß die höchsten thermischen Belastungen des Druckbehälters im Bereich der Bodenkalotte auftreten, wo sich die Behälterschale nach Verdampfen des Restwassers in direktem Kontakt mit der Kernmasse befindet. Dadurch kommt es zu einer zunehmenden Aufheizung der Kalottenwand, wobei sich zunächst Temperaturprofile über der Wandstärke mit steilen Gradienten nahe der Innenfläche ausbilden.

Einige für diese Arbeit grundlegende Zusammenhänge zwischen mechanischen Größen werden in Kapitel 2 aufgezeigt. In Kapitel 3 wird als verwendete Materialmodell und die Bestimmung der dafür notwendigen Materialparameter erläutert sowie der Einfluß unterschiedlicher geometrischer und thermischer Imperfektionen auf das Verformungsverhalten einer Zugprobe aufgezeigt. Anhand von 2D-Rechnungen wird das nachkritische Verhalten einer Kugel unter Innendruck (Kapitel 4) und des Reaktordruckbehälters (Kapitel 5) für unterschiedliche rotationssymmetrische Temperaturverteilungen und geometrische Imperfektionen aufgezeigt. In Kapitel 5 werden ferner noch die Ergebnisse einiger 3D-Rechnungen zur Bestimmung des maximal ertragbaren Innendrucks des Reaktordruckbehälters bei einer lokalen Temperaturüberhöhung (hot spot) vorgestellt und erläutert.

Kapitel 2

Allgemeine Grundlagen der Mechanik

2.1 Kinematik des deformierbaren Körpers

Es sei \mathbf{X} der Ortsvektor eines materiellen Punktes in einer Konfiguration zum Zeitpunkt t_0 , die man als Referenzkonfiguration bezeichnet. Der vom materiellen Körper in dieser Referenzkonfiguration eingenommene Raumbereich sei R_0 . Zu einem späteren Zeitpunkt $t > t_0$ kann die Lage dieses Materialteilchens durch den Vektor

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

dargestellt werden. Die zu diesem Zeitpunkt vorliegende Konfiguration wird als Momentankonfiguration bezeichnet. Entsprechend wird der dazugehörige Raumbereich, der vom materiellen Körper im euklidischen Raum eingenommen wird, mit R_t gekennzeichnet.

Den zugehörigen Verschiebungsvektor \mathbf{h} erhält man aus der Differenz der beiden Ortsvektoren

$$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

(s. Abbildung 2.1).

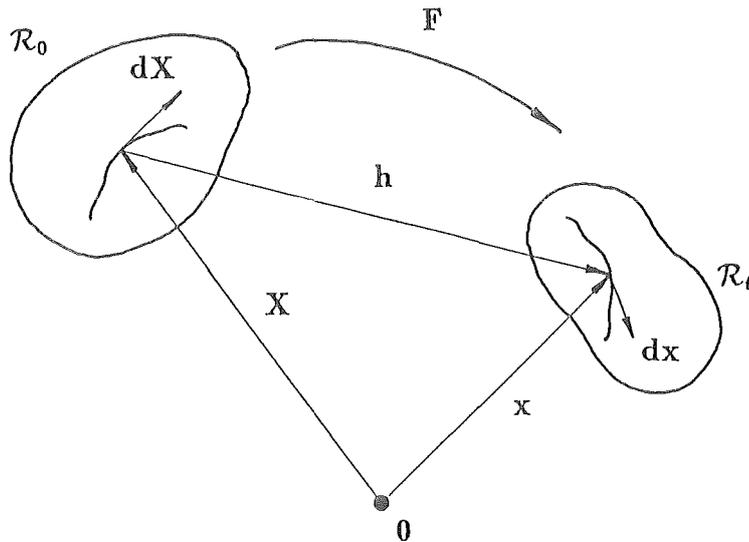


Abbildung 2.1

Als Deformationsgradient \mathbf{F} definiert man für einen beliebigen aber festen Zeitpunkt t :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) . \quad (2.3)$$

\mathbf{F} ist eine Transformationsvorschrift, die ein materielles Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration in ein Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration abbildet, d.h.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

oder in Indexschreibweise (relativ zu einem kartesischen Koordinatensystem):

$$dx_i = F_{ij} dX_j = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial X_j} dX_j . \quad (2.5)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Determinante von \mathbf{F} größer Null ist. Deswegen existiert für \mathbf{F} eine eindeutige polare Zerlegung [3] der Form:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} . \quad (2.6)$$

\mathbf{U} und \mathbf{V} sind symmetrische, positiv definite Tensoren und werden als Rechts-Strecktensor bzw. Links-Strecktensor bezeichnet, während \mathbf{R} ein orthogonaler Tensor ist, der eine Rotation beschreibt.

Mit Hilfe von \mathbf{U} und \mathbf{V} wird der rechte Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 , \quad (2.7)$$

und der linke Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.8)$$

definiert.

Es kann gezeigt werden, daß die beiden Strecktensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} dieselben Eigenwerte λ besitzen. Sei \mathbf{u}_i bzw. \mathbf{v}_i der normierte Eigenvektor von \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} zum Eigenwert λ_i , so lautet die Spektraldarstellung der Strecktensoren

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (2.10)$$

Für die Eigenvektoren gilt die Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{R}\mathbf{u}_i \quad (2.11)$$

Aus den Gleichungen (2.6), (2.9) und (2.11) folgt:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u}_i \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (2.13)$$

Definiert man durch \mathbf{H} den Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H} = \text{GRAD } \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.14)$$

so läßt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (2.2) der Deformationsgradient in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{1} \\ &= \mathbf{H} + \mathbf{1} \quad (2.15) \end{aligned}$$

Als ein Maß für die Deformationsgeschwindigkeit wird der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L} = \text{grad } \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.16)$$

eingeführt, wobei gilt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{X}, t) . \quad (2.17)$$

\mathbf{L} entspricht einer Abbildungsvorschrift

$$(\mathbf{dx})' = \mathbf{L} \mathbf{dx} , \quad (2.18)$$

wobei \mathbf{dx} ein materielles Linienelement der Momentankonfiguration darstellt.

Aus Gleichung (2.4) folgt zunächst

$$\begin{aligned} (\mathbf{dx})' &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{dX} \\ &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{dx} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vergleicht man dies mit Beziehung (2.18), so ergibt sich

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} . \quad (2.20)$$

Der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} läßt sich additiv aufspalten in einen symmetrischen Anteil \mathbf{D} und in einen antisymmetrischen Anteil \mathbf{W} , den sogenannten Wirbeltensor

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) . \quad (2.23)$$

Differenziert man Gleichung (2.12) nach der Zeit, so erhält man

$$\dot{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\Omega}_v \mathbf{F} + \mathbf{F} \boldsymbol{\Omega}_u^T . \quad (2.24)$$

Wird dieses Ergebnis sowie die Beziehung (2.13) in Gleichung (2.20) eingesetzt, so erhält man für den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} und dessen symmetrischen Anteil \mathbf{D} folgende Beziehung:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\Omega}_v + \mathbf{F} \boldsymbol{\Omega}_u^T \mathbf{F}^{-1} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i + \left[\mathbf{F} \boldsymbol{\Omega}_u^T \mathbf{F}^{-1} \right]_{sym} . \quad (2.26)$$

Ω_v und Ω_u sind antisymmetrische Tensoren, d.h.

$$\Omega_v = -\Omega_v^T \quad (2.27)$$

$$\Omega_u = -\Omega_u^T \quad (2.28)$$

und beschreiben die Transformationsvorschrift

$$\dot{v}_i = \Omega_{v_i} v_i \quad (2.29)$$

$$\dot{u}_i = \Omega_{u_i} u_i \quad (2.30)$$

2.2 Verzerrungstensoren

Ein mögliches Maß zur Beschreibung der Verzerrungen lautet:

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{dx}\|^2 - \|\mathbf{dX}\|^2 \right) \quad (2.31)$$

$\|\mathbf{y}\|$ entspricht der euklidischen Norm eines Vektors \mathbf{y} . Darunter versteht man die nichtnegative reelle Zahl

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \quad (2.32)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.4) läßt sich das Verzerrungsmaß in folgender Form

$$\Delta = \mathbf{dX} \cdot \left[\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \right] \mathbf{dX} = \mathbf{dX} \cdot \mathbf{E} \mathbf{dX} \quad (2.33)$$

bzw.

$$\Delta = \mathbf{dx} \cdot \left[\frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \right] \mathbf{dx} = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{A} \mathbf{dx} \quad (2.34)$$

darstellen.

\mathbf{E} bezeichnet man als Green'schen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad (2.37)$$

und \mathbf{A} als Almansi'schen Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) \quad (2.40)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.33), (2.4) und (2.34) kann gezeigt werden, daß zwischen dem Green'schen und dem Almansi'schen Verzerrungstensor folgender Zusammenhang besteht:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.41)$$

Beachtet man den Zusammenhang zwischen \mathbf{F} und \mathbf{H} (Gleichung (2.15)), so läßt sich der Green'sche Verzerrungstensor in der Form

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \quad (2.42)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}} + O(\|\mathbf{H}\|^2) \quad (2.43)$$

darstellen.

Definiert man als Norm des Verschiebungsgradienten eine skalare Größe ε , so gilt im Falle kleiner Deformationen:

$$\varepsilon \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon^2 \ll \varepsilon \quad (2.44)$$

Unter dieser Voraussetzung kann der Restterm der Ordnung $O(\|\mathbf{H}\|^2)$ bzw. $O(|\varepsilon|^2)$ gegenüber dem Anteil $\tilde{\mathbf{E}}$ vernachlässigt werden.

$\tilde{\mathbf{E}}$ bezeichnet man als den geometrisch linearisierten Green'schen Verzerrungstensor:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) \quad (2.45)$$

Bildet man die zeitliche Ableitung des Green'schen Verzerrungstensors und verwendet die Beziehungen (2.20) und (2.22), so erhält man für die Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^{T-1} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T \left[\frac{1}{2} (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \right] \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \quad (2.46) \end{aligned}$$

Zeitliche Differentiation des Verzerrungsmaßes Δ (Gleichung (2.31)) liefert die Beziehung

$$\dot{\Delta} = d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{T-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{x} . \quad (2.47)$$

Aus [4] geht hervor, daß eine Vielzahl von Verzerrungstensoren existiert, die in Lagrangescher bzw. Eulerscher Schreibweise in der Form

$$\mathbf{E}_L^{(m)} = \frac{1}{|m|} (\mathbf{U}^m - \mathbf{1}) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{E}_E^{(m)} = \frac{1}{|m|} (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-m}) \quad (2.49)$$

dargestellt werden können.

Es ist ersichtlich, daß für $m=2$ aus den Gleichungen (2.48) und (2.49) gerade der Green'sche bzw. Almansi'sche Verzerrungstensor folgt.

Im Hinblick auf Kapitel 2.4 sei hier noch auf den logarithmischen Verzerrungstensor

$$\ln \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (2.50)$$

verwiesen, der aus Gleichung (2.49) für den Grenzfall $m \rightarrow 0$ hervorgeht.

Differentiation des logarithmischen Verzerrungstensors nach der Zeit ergibt unter Berücksichtigung von Gleichung (2.26)

$$(\ln \mathbf{V})' = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i + \Omega_v (\ln \mathbf{V}) + (\ln \mathbf{V}) \Omega_v^T . \quad (2.51)$$

Der symmetrische Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten läßt sich durch Kombination von Gleichung (2.46) und (2.25) auch in der Form

$$\mathbf{D} = (\ln \mathbf{V})' - \Omega_v (\ln \mathbf{V}) - (\ln \mathbf{V}) \Omega_v^T + [\mathbf{F} \Omega_u^T \mathbf{F}^{-1}]_{sym} \quad (2.52)$$

darstellen.

2.3 Spannungstensoren

Neben dem symmetrischen Cauchy'schen Spannungstensor \mathbf{T} , der auf die Momentankonfiguration bezogen ist, existieren eine Reihe weiterer Spannungstensoren. In diesem Abschnitt soll

auf den 1. und den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor näher eingegangen werden.

$d\mathbf{k}$ sei ein differentieller Kraftvektor, der an einem gerichteten Flächenelement $d\mathbf{a}$ der Momentankonfiguration angreift (s. Abbildung 2.2).

Der an die Momentankonfiguration gebundene Spannungsvektor \mathbf{t} wird definiert als

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{k}}{da} = \mathbf{T} \mathbf{n} , \quad (2.53)$$

wobei \mathbf{n} die Einheitsnormale des differentiellen Flächenelements da ($d\mathbf{a} = da \mathbf{n}$) darstellt.

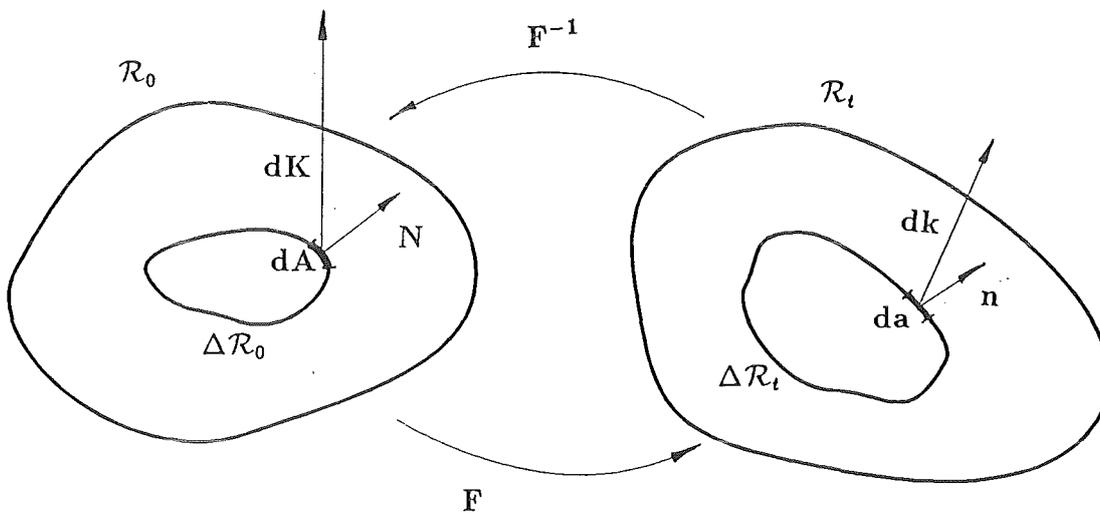


Abbildung 2.2

Beachtet man die Transformationsvorschrift zweier Flächenelemente [3]

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{N} dA = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{T-1} d\mathbf{A} , \quad (2.54)$$

wobei \mathbf{N} die Einheitsnormale an dem betrachteten Flächenelement in der Bezugsconfiguration ist, so läßt sich der differentielle Kraftvektor $d\mathbf{k}$ in der Form

$$\begin{aligned} d\mathbf{k} &= \mathbf{T} (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{N} dA \\ &= \mathbf{T}_R \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (2.55)$$

schreiben.

Das nichtsymmetrische Zwei-Punkt-Tensorfeld \mathbf{T}_R

$$\mathbf{T}_R = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1} \quad (2.56)$$

bezeichnet man als 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

Betrachtet man einen differentiellen Kraftvektor $d\mathbf{K}$ in der Referenzkonfiguration mit der Abbildungsvorschrift

$$d\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{k} , \quad (2.57)$$

so erhält man nach Einsetzen der Gleichungen (2.55) und (2.56) folgende Beziehung für den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1} . \quad (2.58)$$

$\tilde{\mathbf{T}}$ ist hierbei ein in der Referenzkonfiguration operierender symmetrischer Tensor.

2.4 Methode der konjugierten Variablen

Die Methode der konjugierten Variablen ermöglicht einem Verzerrungstensor einen Spannungstensor zuzuordnen und zwar unabhängig von Materialgleichungen [4]. Allgemein bezeichnet man einen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ konjugiert zu einem Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$, wenn das skalare Produkt des Spannungstensors und der zeitlichen Ableitung des Verzerrungstensors gerade der Spannungsleistung W pro Volumeneinheit der Bezugskonfiguration entspricht, d.h.

$$W = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} . \quad (2.59)$$

Aus der Bilanz der mechanischen Leistung erhält man für die Spannungsleistung

$$W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} , \quad (2.60)$$

wobei \mathbf{S} der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.61)$$

ist.

Zunächst soll gezeigt werden, daß der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ und der Green'sche Verzerrungstensor \mathbf{E} zueinander konjugiert sind.

Gleichung (2.58) liefert zusammen mit (2.61) folgenden Zusammenhang zwischen \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T . \quad (2.62)$$

Setzt man diese Beziehung in Gleichung (2.60) ein und berücksichtigt (2.46), so erhält man für die Spannungsleistung W pro Volumeneinheit der Bezugskonfiguration

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \\ &= \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Desweiteren kann gezeigt werden, daß der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{S} die zum logarithmischen Verzerrungstensor $(\ln \mathbf{V})$ konjugierte Größe darstellt.

Vorausgesetzt wird hierbei Koaxialität zwischen \mathbf{S} und $(\ln \mathbf{V})$ bzw. \mathbf{S} und \mathbf{V} , d.h. alle drei Tensoren besitzen dieselben Eigenrichtungen.

Der symmetrische Tensor \mathbf{D} (Gleichung (2.52)) läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (2.6), (2.27) und (2.28) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (\ln \mathbf{V})' - \Omega_v (\ln \mathbf{V}) + (\ln \mathbf{V}) \Omega_v \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\mathbf{V} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T \mathbf{V}^{-1} + \left(\mathbf{V} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T \mathbf{V}^{-1} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

ausdrücken.

Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (2.60) liefert:

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{S} \cdot (\ln \mathbf{V})' - Sp \left((\ln \mathbf{V}) \mathbf{S} \Omega_v \right) + Sp \left(\mathbf{S} (\ln \mathbf{V}) \Omega_v \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} Sp \left(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T \right) + \frac{1}{2} Sp \left(\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T \right) . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Da Koaxialität zwischen \mathbf{S} und $(\ln \mathbf{V})$ bzw. \mathbf{S} und \mathbf{V} vorliegt, gilt:

$$\mathbf{S} (\ln \mathbf{V}) = (\ln \mathbf{V}) \mathbf{S} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} . \quad (2.67)$$

Infolgedessen reduziert sich Gleichung (2.65) auf

$$W = \mathbf{S} \cdot (\ln \mathbf{V})' . \quad (2.68)$$

Somit stellt \mathbf{S} eine konjugierte Größe zum logarithmischen Verzerrungstensor $(\ln \mathbf{V})$ dar.

2.5 Erläuterungen zur Plastizität

Es wird angenommen, daß sich der Deformationsgradient \mathbf{F} in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten läßt, gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p . \quad (2.69)$$

Da \mathbf{F}_e und \mathbf{F}_p in (2.69) als invertierbar vorausgesetzt werden, besitzt \mathbf{F}_e (analog (2.6)) eine polare Zerlegung

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e . \quad (2.70)$$

Bekannterweise ist die Zerlegung in (2.69) und folglich auch \mathbf{R}_e in (2.70) nur bis auf eine beliebige Starrkörperrotation eindeutig bestimmt. Diese Nichteindeutigkeit kann z.B. durch die Wahl $\mathbf{R}_e \equiv \mathbf{1}$ aufgehoben werden. In diesem Fall erhält man aus Gleichung (2.70)

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e . \quad (2.71)$$

Einsetzen der Beziehung (2.69) in Gleichung (2.20) liefert für den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1} , \quad (2.72)$$

mit

$$\mathbf{L}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} = \dot{\mathbf{V}}_e \mathbf{V}_e^{-1} , \quad (2.73)$$

$$\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} . \quad (2.74)$$

Der symmetrische Anteil von \mathbf{L} kann ebenfalls additiv zerlegt werden:

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}}_e + \bar{\mathbf{D}}_p , \quad (2.75)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_e + \mathbf{L}_e^T) , \quad (2.76)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1}) + (\mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1})^T \right) . \quad (2.77)$$

Die Formulierung eines Plastizitätsmodells besteht nun darin, Materialgleichungen für $\bar{\mathbf{D}}_e$ und $\bar{\mathbf{D}}_p$ in (2.75) anzugeben. Aus den Gleichungen (2.76) und (2.73) geht hervor, daß $\bar{\mathbf{D}}_e$ eindeutig bestimmt ist, wenn \mathbf{V}_e als bekannt erachtet wird. Dazu wird angenommen, daß $(\ln \mathbf{V}_e)$ mit dem entsprechenden konjugierten Spannungstensor \mathbf{S} durch ein Elastizitätsgesetz verbunden wird:

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(\ln \mathbf{V}_e) . \quad (2.78)$$

Hierbei beschreibt $\mathbf{f}(\cdot)$ eine tensorwertige Materialfunktion. Durch die Wahl $\mathbf{R}_e \equiv \mathbf{1}$ wurde berücksichtigt, daß jedes Elastizitätsgesetz zwischen \mathbf{S} und \mathbf{V}_e (bzw. $(\ln \mathbf{V}_e)$) ein isotropes

Stoffgesetz darstellt. Da die Determinante von \mathbf{F}_e aufgrund von Beziehung (2.71) auch als Funktion von $(\ln \mathbf{V}_e)$ aufgefaßt werden kann, erhält man aus den Gleichungen (2.78) und (2.61) für den Fall der Elastizität

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{V}_e} \mathbf{f}(\ln \mathbf{V}_e) = \mathbf{g}(\ln \mathbf{V}_e) , \quad (2.79)$$

wobei $\mathbf{g}()$ zunächst eine beliebige isotrope tensorwertige Tensorfunktion darstellt.

In *ABAQUS* wird hierbei eine linearisierte Version der Gleichung (2.79) verwendet:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} [\ln \mathbf{V}_e] . \quad (2.80)$$

Der isotrope Tensor \mathbf{C} ist ein Tensor vierter Stufe

$$\mathbf{C} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.81)$$

mit den Elastizitätskonstanten

$$\mu = G , \quad (2.82)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} . \quad (2.83)$$

Bei Plastizität wird im folgenden angenommen, daß die elastischen Verzerrungen klein sind.

Dies bedeutet, daß

$$\|\mathbf{V}_e - \mathbf{1}\| \ll 1 \quad (2.84)$$

ist und somit $\mathbf{V}_e - \mathbf{1}$ einen linearisierten Green'schen Verzerrungstensor, der elastische Verzerrungen beschreibt, darstellt:

$$\tilde{\mathbf{E}}_e := \mathbf{V}_e - \mathbf{1} . \quad (2.85)$$

Es kann gezeigt werden, daß unter dieser Annahme gilt:

$$(\ln \mathbf{V}_e) \approx \tilde{\mathbf{E}}_e , \quad (2.86)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_p \approx \mathbf{D}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p^T) . \quad (2.87)$$

Der symmetrische Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten kann somit näherungsweise in der Form

$$\mathbf{D} \approx \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p \quad (2.88)$$

geschrieben werden, wobei \mathbf{D}_e gleich der materiellen zeitlichen Ableitung von $\tilde{\mathbf{E}}_e$ gesetzt wird, d.h.

$$\mathbf{D}_e = \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e . \quad (2.89)$$

Ausgehend vom Prinzip der maximalen Dissipationsleistung [5] läßt sich die assoziierte Normalenregel

$$\mathbf{D}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} \quad (2.90)$$

mit

$$F = \hat{F}(\mathbf{T}, \mathbf{H}_\alpha) \quad : \text{ Fließfunktion } , \quad (2.91)$$

$$\Lambda = \hat{\Lambda}(\dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \mathbf{H}_\alpha) \quad (2.92)$$

herleiten, die besagt, daß \mathbf{D}_p in Richtung der Außennormalen der Fließfläche $F = 0$ am betrachteten Spannungspunkt zeigt. Der Vektor \mathbf{H}_α beinhaltet die plastischen inneren Variablen. Im Falle einer von Mises-Fließfunktion mit rein isotroper Verfestigung kann

$$F = \hat{F}(\mathbf{T}, \bar{\varepsilon}_p, \Theta) = f - q \quad (2.93)$$

gesetzt werden, mit

$$f(t) = \hat{f}(\mathbf{T}(t)) = \left(\frac{3}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (2.94)$$

$$q(t) = \hat{q}(\bar{\varepsilon}_p(t), \Theta(t)) . \quad (2.95)$$

Es entsprechen f der Vergleichsspannung nach von Mises, q dem Radius der von Mises Fließfläche, Θ der Temperatur und $\bar{\varepsilon}_p$ der arbeitsäquivalenten plastischen Dehnung (plastische Vergleichsdehnung), die wie folgt definiert ist:

$$\bar{\varepsilon}_p(t) = \int_0^t \frac{\mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{D}_p(\tau)}{q(\tau)} d\tau . \quad (2.96)$$

\mathbf{T}^D ist der deviatorische Anteil des Cauchy'schen Spannungstensors \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T} - \frac{1}{3} (S_p \mathbf{T}) \mathbf{1} . \quad (2.97)$$

Für festgehaltenes $\bar{\varepsilon}_p$ und Θ beschreiben alle Spannungstensoren \mathbf{T} , die die Fließbedingung

$$F = \hat{F}(\mathbf{T}, \bar{\varepsilon}_p, \Theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(\mathbf{T}) = \hat{q}(\bar{\varepsilon}_p, \Theta) \quad (2.98)$$

erfüllen, eine sogenannte Fließfläche.

Der rein elastische Bereich ist gekennzeichnet durch Werte $F < 0$.

Werte größer Null sind nicht zulässig. Liegt der Spannungspunkt auf dem Rand der Fließfläche unterscheidet man zwischen folgenden Fällen:

$$F = 0 \quad \& \quad \dot{F} \Big|_{\dot{\bar{\epsilon}}_p=0} \begin{cases} < 0 & : \text{Entlastung} \\ = 0 & : \text{Neutrale Belastung} \\ > 0 & : \text{Belastung} \end{cases} \quad (2.99)$$

Aus der zeitlichen Ableitung der Fließfunktion

$$\dot{F} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial \bar{\epsilon}_p} \dot{\bar{\epsilon}}_p - \frac{\partial \hat{q}}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (2.100)$$

erhält man als Belastungskriterium bei konstant gehaltenem $\bar{\epsilon}_p$:

$$\dot{F}_{\dot{\bar{\epsilon}}_p=0} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (2.101)$$

Differenziert man Gleichung (2.94) partiell nach \mathbf{T} , so ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehung (2.97) der Zusammenhang

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{3}{2q} \mathbf{T}^{\mathbf{D}} \quad (2.102)$$

Die noch zu bestimmende Funktion Λ erhält man aus der Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = 0 \quad (2.103)$$

Diese Bedingung gewährleistet die Zeitunabhängigkeit bei reiner Plastizität. Einsetzen der Gleichungen (2.102), (2.96) und (2.90) zunächst in (2.100) anschließend in (2.103) liefert für Λ die Beziehung

$$\Lambda = \frac{\frac{3}{2q} \mathbf{T}^{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial \Theta} \dot{\Theta}}{\frac{\partial \hat{q}}{\partial \bar{\epsilon}_p}} \quad (2.104)$$

Kapitel 3

Untersuchungen am Zugstab

3.1 Einführende Bemerkungen

Die Berechnungen wurden mit Hilfe des Finite-Elemente Programms *ABAQUS*, Version 4.9, durchgeführt. Auf die Methode der Finiten Elemente soll in diesem Zusammenhang nicht näher eingegangen werden. Die Grundlagen hierzu können der entsprechenden Fachliteratur (z.B. [6], [7]), oder dem *ABAQUS* Handbuch [8] entnommen werden.

In Kapitel 3.4 wird das den FE-Rechnungen zugrunde gelegte Materialmodell erläutert. Im Anschluß daran wird ausführlich auf die Bestimmung der Materialparameter für unterschiedliche Temperaturen eingegangen, da diese für die weiteren Rechnungen von entscheidender Bedeutung sind. Als Grundlage dienen die am Institut für Materialforschung II durchgeführten Zugversuche [12] für den Werkstoff 20 MnMoNi 55 in einem Temperaturbereich zwischen 23°C und 900°C. Zielsetzung war, die Materialparameter so anzupassen, daß die experimentell ermittelten Spannungs- Dehnungs-Kurven möglichst gut wiedergegeben werden.

Bis zum Erreichen der maximalen Last kann man die Materialdaten aus den Kraft-Verlängerungskurven der einachsigen Zugversuche analytisch berechnen. Die nach Erreichen der Zugfestigkeit einsetzende Einschnürung bewirkt einen mehrachsigen, inhomogenen Spannungszustand und eine Verformungslokalisierung im Bereich der Einschnürstelle. Will man auch diesen nachkritischen Bereich möglichst exakt wiedergeben, so ist man auf FE-Rechnungen angewiesen, da die Materialparameter nicht mehr aus den Zugkurven bestimmt werden können. Rechnerisch wurde das Einschnürverhalten durch Vorgabe einer geometrischen bzw. thermischen Imperfektion simuliert.

Liegt eine ideale Probe vor, so entsteht während des Zugversuchs zunächst ein rein homogener Deformationszustand, d.h. alle materiellen Punkte erfahren dieselbe Deformation. Beim Erreichen einer kritischen Last ergeben sich nach der Verzweigungstheorie (z.B. [9], [10], [11]) neben dieser homogenen Grundlösung, weitere inhomogene Lösungen, die eine Einschnürung der Probe beschreiben können.

Dieser Einschnürvorgang läßt sich aber auch mit Hilfe von Imperfektionen beliebig genau approximieren. Dies bedeutet, daß die ideale Geometrie „gestört“ wird, und somit kein homogener Deformationszustand mehr vorliegt. Natürlich kann eine Störung der idealen Zugprobe auch in Form einer Störung des sonst als homogen angenommenen Anfangstemperaturfeldes vorgegeben werden.

3.2 Theoretische Grundlagen

Im folgenden sollen einige grundlegende Zusammenhänge für den isothermen Fall erläutert werden. Beim einachsigen Zugversuch läßt sich der Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{T} in der Form

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

schreiben.

Unter der Voraussetzung einer homogenen Deformation erhält man für den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

wobei α und β positive Konstanten sind [3].

Sei l_0 die Ausgangslänge der Zugprobe, l die aktuelle Länge und e die technische Dehnung

$$e = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (3.3)$$

so ergibt sich für die Größe α :

$$\alpha = \frac{l}{l_0} = e + 1. \quad (3.4)$$

Polare Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} (3.1) gemäß Beziehung (2.6) liefert für $\beta > 0$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{1} . \quad (3.6)$$

Infolgedessen kann der logarithmische Verzerrungstensor in der Form

$$(\ln \mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \ln \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ln \beta & 0 \\ 0 & 0 & \ln \beta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

geschrieben werden.

Betrachtet man lediglich die Komponente in axialer Richtung, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der wahren (logarithmischen) Dehnung ε und der technischen Dehnung e :

$$\varepsilon = \ln(e + 1) \quad (3.8)$$

Ausgehend vom 1. Piola-Kirchhoff Tensor (2.56) kann für den einachsigen Zugversuch eine entsprechende Beziehung zwischen der Nennspannung σ_t und der wahren (Cauchy'schen) Spannung hergeleitet werden:

$$\sigma_t = (\det \mathbf{F}) \sigma \left(\frac{1}{e + 1} \right) . \quad (3.9)$$

Zerlegt man den Deformationsgradienten gemäß Gleichung (2.69) in einen elastischen und einen plastischen Anteil, so läßt sich dessen Determinante in der Form

$$(\det \mathbf{F}) = (\det \mathbf{F}_e) (\det \mathbf{F}_p) \quad (3.10)$$

schreiben. Unter der Annahme plastischer Inkompressibilität gilt

$$(\det \mathbf{F}_p) = 1 . \quad (3.11)$$

Geht man im folgenden von kleinen elastischen Verzerrungen aus, so kann mittels der Gleichungen (2.71) und (2.84) gezeigt werden, daß

$$(\det \mathbf{F}_e) \approx 1 . \quad (3.12)$$

Somit erhält man aus Gleichung (3.9) folgende Beziehung für die wahre Spannung:

$$\sigma = \sigma_t (e + 1) . \quad (3.13)$$

Desweiteren soll ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den Steigungen im technischen und im wahren Spannungs-Dehnungs-Diagramm hergeleitet werden.

Differentiation der Nennspannung σ_t nach der technischen Dehnung e liefert unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.13)

$$\frac{d\sigma_t}{de} = \frac{d}{de} \left(\frac{\sigma}{1+e} \right) = \frac{d\sigma}{de} \left(\frac{1}{1+e} \right) - \frac{\sigma}{(1+e)^2} \quad (3.14)$$

bzw.

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{d\sigma_t}{de} (1+e) + \left(\frac{\sigma}{1+e} \right) . \quad (3.15)$$

Für die Steigung im (σ, ε) -Diagramm

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{de} \frac{de}{d\varepsilon} \quad (3.16)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.15) und (3.8)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma_t}{de} (1+e)^2 + \sigma . \quad (3.17)$$

Setzt man voraus, daß der (σ_t, e) -Verlauf beim Erreichen der Zugfestigkeit ein Maximum aufweist, so folgt daraus:

$$\left. \frac{d\sigma_t}{de} \right|_{\sigma_t=R_m} = 0 \quad (3.18)$$

bzw. gemäß Gleichung (3.17)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon_m} = \sigma_m = R_m (1+e_m) . \quad (3.19)$$

R_m entspricht hierbei der Zugfestigkeit und e_m der zugehörigen technischen Dehnung, so daß gemäß der Gleichungen (3.8) bzw. (3.13) gilt:

$$\varepsilon_m = \ln(e_m + 1) \quad (3.20)$$

bzw.

$$\sigma_m = R_m (e_m + 1) . \quad (3.21)$$

3.3 Diskretisierung

Die Zugprobe wurde mit axialsymmetrischen Elementen modelliert. Getestet wurden die beiden Elementtypen CAX8 und CAX8R, am Beispiel einer Kugel unter Innendruck mit einem Radienverhältnis $R_a/R_i = 1.1$, deren Innenfläche mit einer erhöhten Temperatur beaufschlagt wurde. Beides sind achtknotige Elemente mit biquadratischer Interpolationsvorschrift. Den CAX8R-Elementen liegt eine reduzierte Integrationsordnung zugrunde, d.h. verglichen mit den CAX8-Elementen, die insgesamt neun Integrationspunkte aufweisen, besitzen diese lediglich vier Integrationspunkte.

Zunächst wurde eine reine Wärmeausbreitungsrechnung (siehe Kap.3.7) durchgeführt. Simuliert wurde ein adiabatischer Aufheizvorgang, wobei die Knoten der Kugellinnenseite mit einer Temperatur von 500°C beaufschlagt wurden. Die Ausgangstemperatur betrug hierbei 20°C. Ein typisches Temperaturprofil, das sich nach einer bestimmten Zeit einstellt, zeigt Abbildung 3.1.

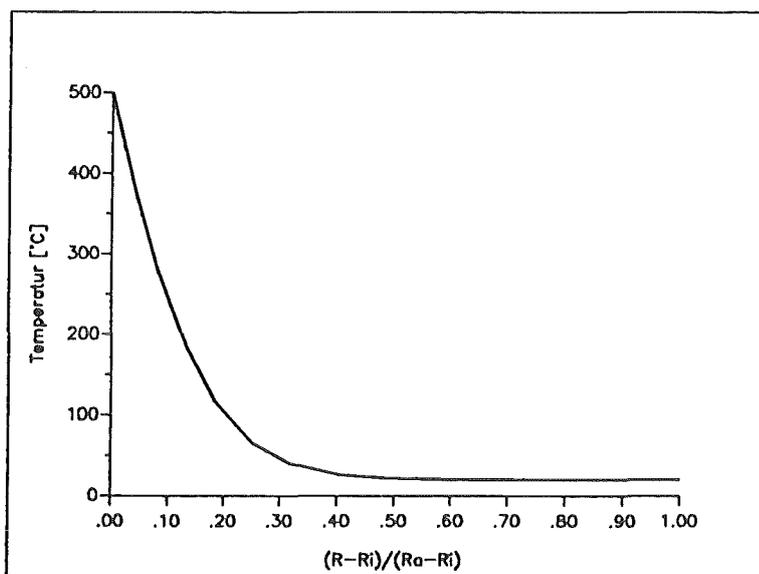


Abbildung 3.1: Temperaturprofil

Für Wärmeausbreitungsrechnungen stehen DCAX8-Elemente zur Verfügung. Dies sind achtknotige Elemente mit quadratischer Interpolationsvorschrift und insgesamt neun Integrationspunkten. Die in Abbildung 3.1 dargestellte Temperaturverteilung diente nun als Grundlage für eine anschließende Spannungsanalyse mittels eines Thermoelastizitätsgesetzes. Elastizitätsmodul und Wärmeausdehnungskoeffizient wurden in Abhängigkeit von der Temperatur angegeben,

wobei der E-Modul zwischen 20°C und 500°C durch lineare Interpolation bestimmt wurde. Den Verlauf der Radialspannung bei einer Druckbeaufschlagung von 15 MPa zeigt Abbildung 3.2.

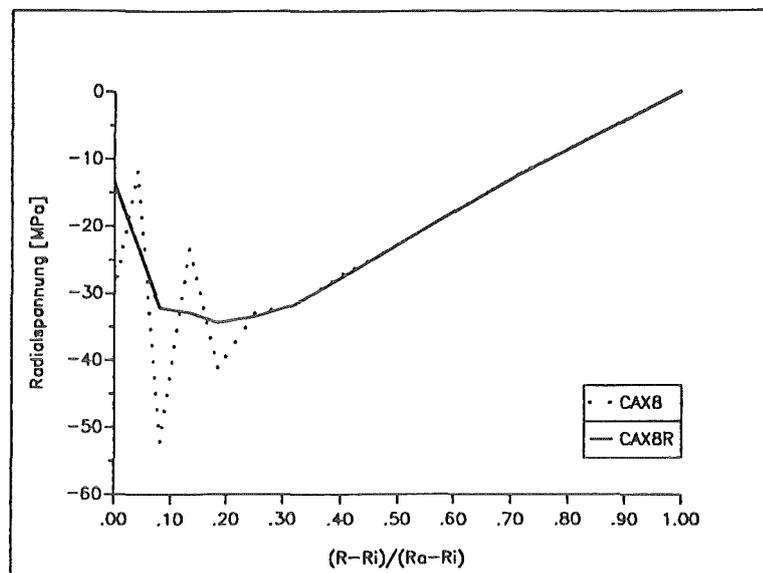


Abbildung 3.2: Verlauf der Radialspannung

Verwendet man bei der Spannungsanalyse Elemente mit reduzierter Integrationsordnung (CAX8R-Elemente), so wird der Verlauf der Radialspannung, einschließlich der Randbedingungen, gut wiedergegeben. Elemente mit voller Integrationsordnung (CAX8-Elemente) führen, wie Abbildung 3.2 verdeutlicht, zu Problemen. Betrachtet man hingegen den Verlauf der Tangentialspannung, so zeigen beide Elementtypen eine gute Übereinstimmung. Infolge dieser Ergebnisse wurden bei den weiteren FE-Rechnungen CAX8R-Elemente verwendet.

Entsprechend den experimentell durchgeführten Zugversuchen [12] wurde ein FE-Modell mit gleichen Abmaßen, d.h. einen Längen zu Durchmesser Verhältnis von 10:1 generiert. Macht man sich hierbei Symmetrieeigenschaften zunutze, so genügt es die Hälfte der kreiszylindrischen Zugprobe zu modellieren. Die Knoten des Randes L1 werden in axialer Richtung festgehalten. Im Bereich der Einschnüerstelle wird das FE Netz feiner diskretisiert. Abbildung 3.3 zeigt das FE Netz und die Randbedingungen.

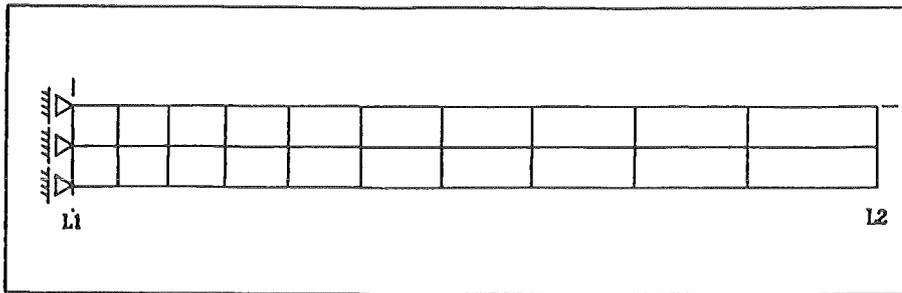


Abbildung 3.3: FE-Netz des Zugstabes

3.4 Materialmodell

Den Rechnungen zugrunde gelegt wurde ein Materialmodell der Thermoplastizität mit multilinear, isotroper Verfestigung. Abbildung 3.4 zeigt exemplarisch den qualitativen Verlauf einer solchen Verfestigungskurve. Diese wird durch einen Polygonzug angenähert, wobei die Knickpunkte den Eingabedaten der *PLASTIC Karte in ABAQUS entsprechen. Zwischen den Knickpunkten wird linear interpoliert. Die Steigung dieser Geraden bezeichnet man als Tangentenmodul. Die Tangentenmoduln werden so gewählt, daß sie immer größer oder im Grenzfall gleich Null (ideal plastisches Verhalten) sind, d.h. Entfestigung ist nicht zulässig. Somit wird instabiles Materialverhalten ausgeschlossen.

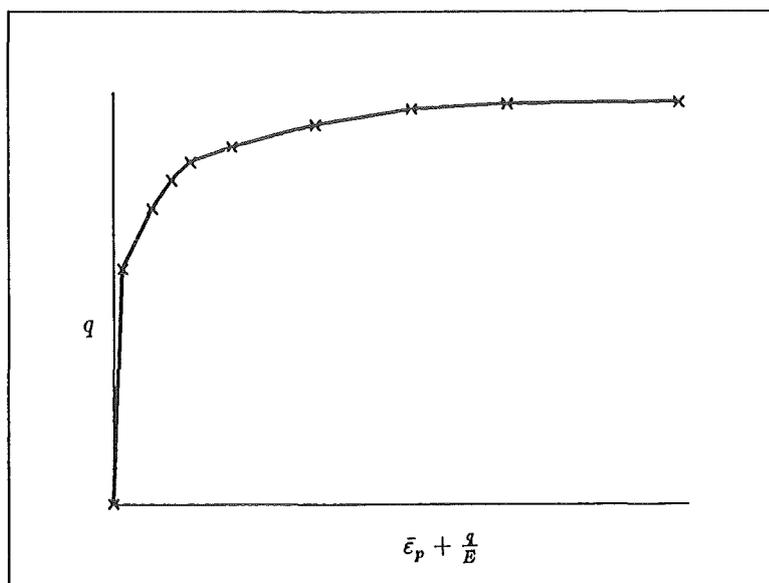


Abbildung 3.4: Qualitativer Verlauf einer Verfestigungskurve

Das rein elastische Materialverhalten wird in *ABAQUS* mittels der *ELASTIC Karte beschrieben. Diese enthält den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl in Abhängigkeit von der Temperatur. In der *PLASTIC Karte wird das plastische Materialverhalten definiert, indem der Radius der von Mises-Fließfläche in Abhängigkeit von den plastischen Vergleichsdehnungen und der Temperatur vorgegeben wird (s. Kapitel 2.5). Die entsprechenden Parameter können dem Anhang, Tabelle A.2 bis A.11, entnommen werden.

3.5 Bestimmung der Materialparameter

Der Arbeit zugrunde gelegt wurden die in den Abbildungen 3.5 und 3.6 dargestellten Zugkurven für Temperaturen zwischen 200°C und 900°C, jeweils in 100°C Schritten sowie die in Tabelle 3.1 angeführten Werkstoffkenngrößen. Diese Werkstoffdaten entsprechen den experimentellen Befunden in [12].

Temperatur [°C]	R_m [MPa]	$R_{p0.2}$ [MPa]	E-Modul [MPa]	A [%]	A_g [%]	Z [%]
23	620	460	194000	13.9	9.2	46.2
200	570	400	205000	9.2	6.8	34.6
300	590	420	175000	9.4	7.2	30.5
400	545	370	165000	14.2	8.0	39.9
500	420	355	150000	11.1	2.6	55.5
600	305	290	136000	12.5	1.0	75.0
700	150	147	130000	34.5	1.0	55.5
800	81	61	60000	31.9	17.0	24.9
900	57	45	16500	30.5	22.6	26.3

R_m : Zugfestigkeit

$R_{p0.2}$: 0.2% Dehngrenze

A : Bruchdehnung

A_g : Gleichmaßdehnung

Z : Brucheinschnürung

Tabelle 3.1: Werkstoffkenngrößen

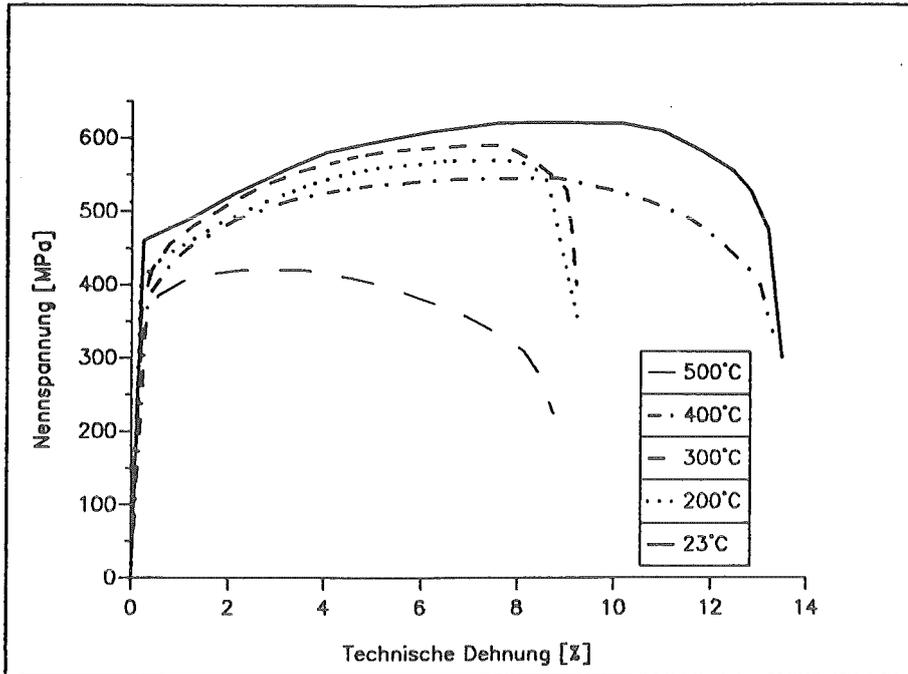


Abbildung 3.5: Spannungs-Dehnungs-Kurven für 23°C, 200°C, 300°C, 400°C und 500°C

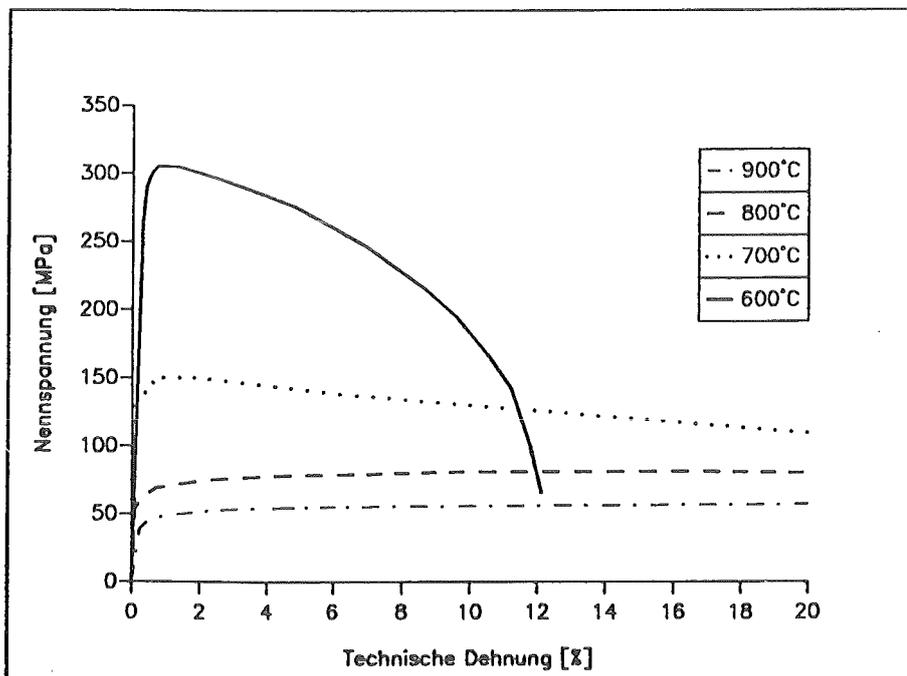


Abbildung 3.6: Spannungs-Dehnungs-Kurven für 600°C, 700°C, 800°C und 900°C

Anhand der in Kapitel 3.2 erläuterten Grundlagen kann nun die weitere Vorgehensweise erörtert werden. Zunächst wird der Bereich zwischen der Fließgrenze σ_y und der Zugfestigkeit R_m der (σ, ϵ) -Kurven durch Tangenten angenähert und deren Schnittpunkte aus dem Diagramm abgelesen.

Die in der *PLASTIC Karte benötigten Eingabedaten erhält man nun durch Umrechnung der technischen in wahre Größen. Die wahre plastische Dehnung ϵ_p berechnet sich gemäß:

$$\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_e = \epsilon - \frac{\sigma}{E} . \quad (3.22)$$

Ausgehend vom Instabilitätspunkt m wird ein Polygonzug konstruiert, der die (σ, ϵ) -Kennlinie umhüllt. Zu beachten ist hierbei, daß der Geradenteil des Polygonzugs, der durch den Instabilitätspunkt verläuft, entsprechend Gleichung (3.21), die Steigung

$$\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon_m} = \sigma_m = R_m (1 + \epsilon_m) . \quad (3.23)$$

besitzt. An der Fließgrenze müssen ferner die Bedingungen

$$\epsilon_p = 0 \quad (3.24)$$

$$\sigma = \sigma_y \quad (3.25)$$

eingehalten werden. Die Umrechnung der technischen in wahre Größen geschieht mittels der Gleichungen (3.8), (3.13) und (3.17).

Da nach Überschreiten des kritischen Punktes, aufgrund der beginnenden Einschnürung, keine homogene Deformation mehr vorliegt, können die Materialparameter, die das nachkritische Verhalten beschreiben nicht mehr direkt aus den Kraft-Verlängerungs-Kurven ermittelt werden. Aus diesem Grund wurden die Zugversuche mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente nachgerechnet. Die Materialparameter, die das nachkritische Verhalten beschreiben, wurden solange variiert, bis das experimentelle Verhalten der Zugprobe gut wiedergegeben wurde.

Variiert man den Tangentenmodul, so stellt man fest, daß mit zunehmender Steigung die Nennspannung im technischen Diagramm weniger steil abfällt. Mittels der Tangentenmoduln kann somit der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve in vertikaler Richtung beeinflusst werden.

Die Verlagerung eines beliebigen Knickpunktes zu größeren Dehnungen bewirkt, daß der Abfall der Nennspannung verzögert wird. Mittels der Knickpunkte kann daher der nachkritische Bereich in horizontaler Richtung verschoben werden.

Somit ist man Lage durch geeignete Wahl der Knickpunkte und der darauffolgenden Tangenten den Verlauf der experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kurve auch nach Überschreiten des Instabilitätspunktes in guter Näherung wiederzugeben.

In den Abbildungen 3.7 bis 3.9 ist das Verhalten des Materialmodells für unterschiedliche Temperaturen dargestellt. Die Abbildungen 3.10 bis 3.13 zeigen den Vergleich zwischen Experiment und Rechnung für die einzelnen Temperaturen. Rechnerisch wurde der Zugversuch mit Einschnürung weggesteuert simuliert durch Vorgabe einer sinusförmigen Imperfektion (s. Kap.3.6).

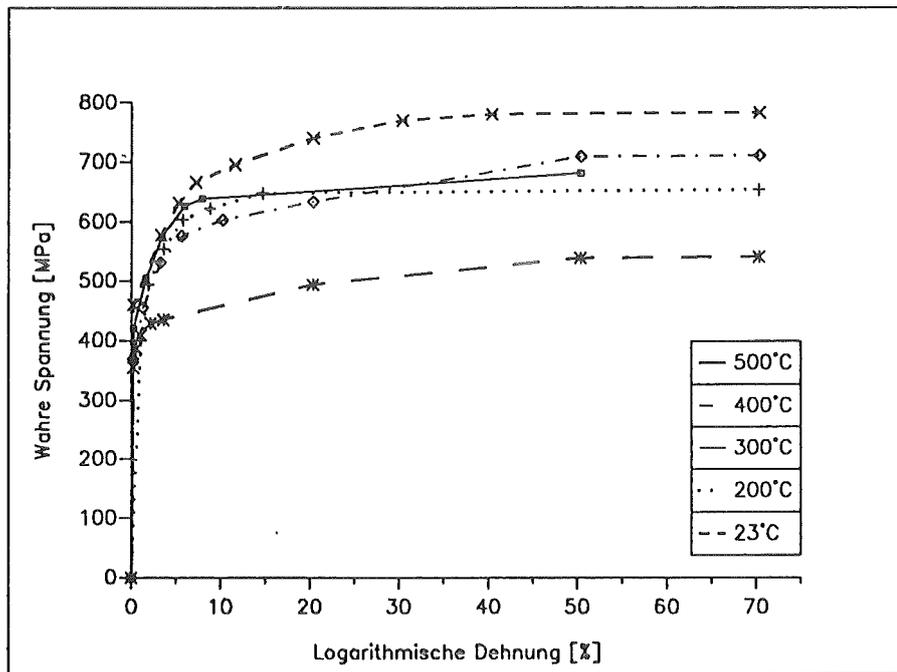


Abbildung 3.7: Das Modellverhalten für 23°C, 200°C, 300°C, 400°C und 500°C

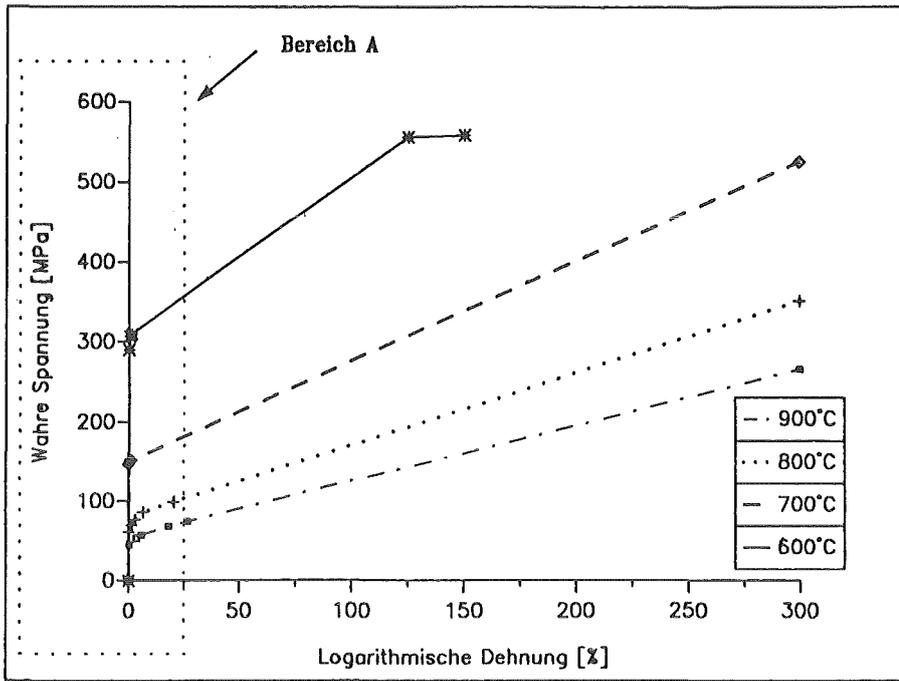


Abbildung 3.8: Das Modellverhalten für 600°C, 700°C, 800°C und 900°C

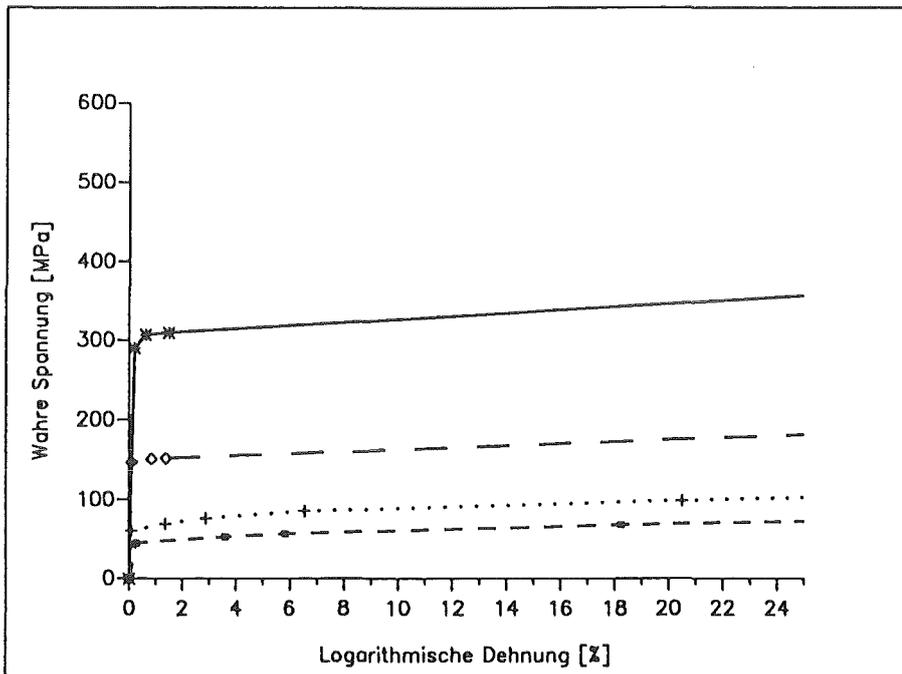


Abbildung 3.9: Vergrößerte Darstellung der Abbildung 3.8 (Bereich A)

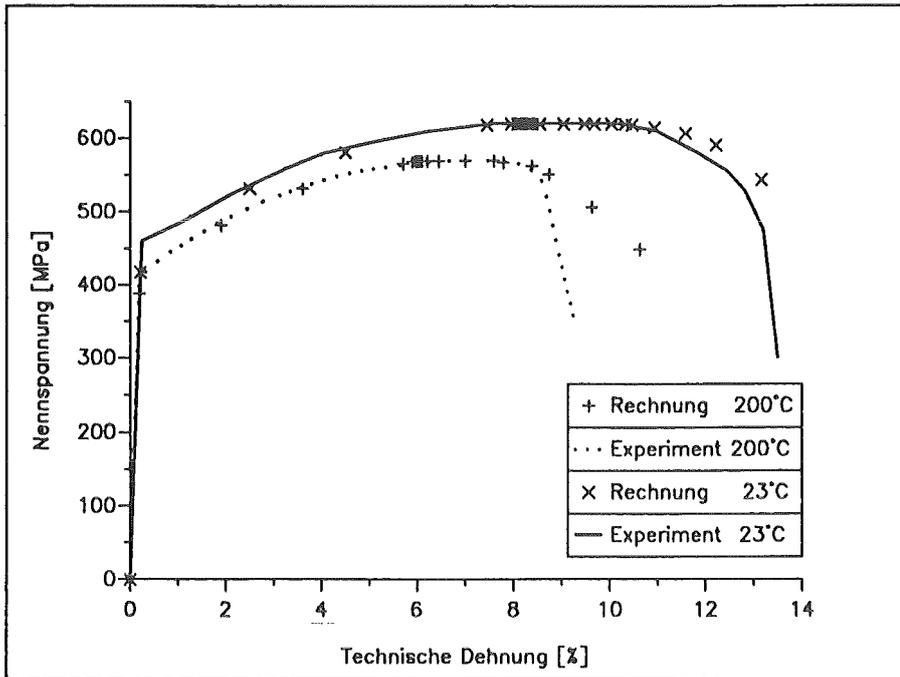


Abbildung 3.10: Vergleich Experiment - Rechnung
für 23°C und 200°C

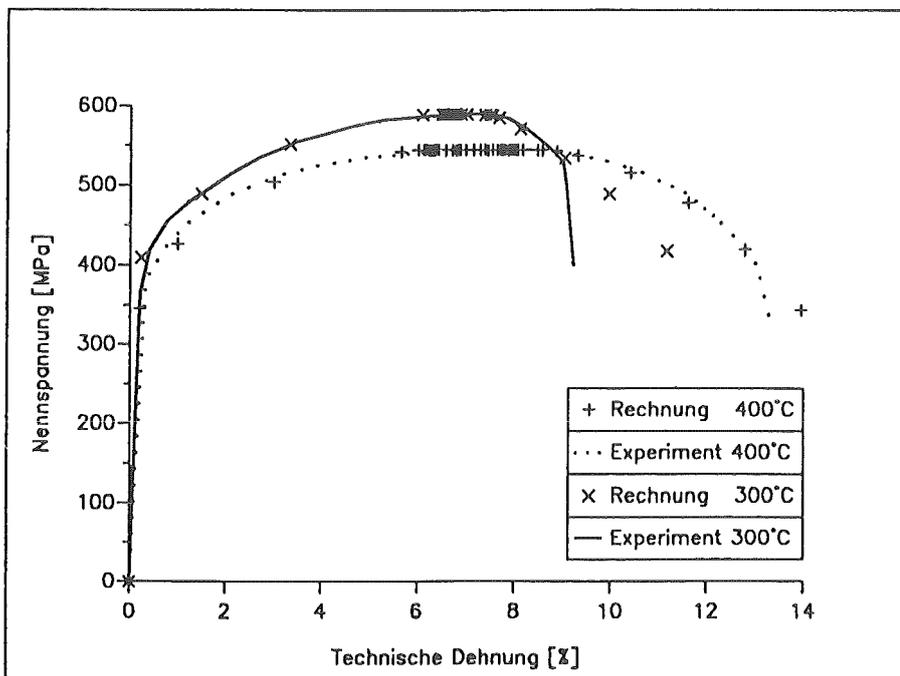


Abbildung 3.11: Vergleich Experiment - Rechnung
für 300°C und 400°C

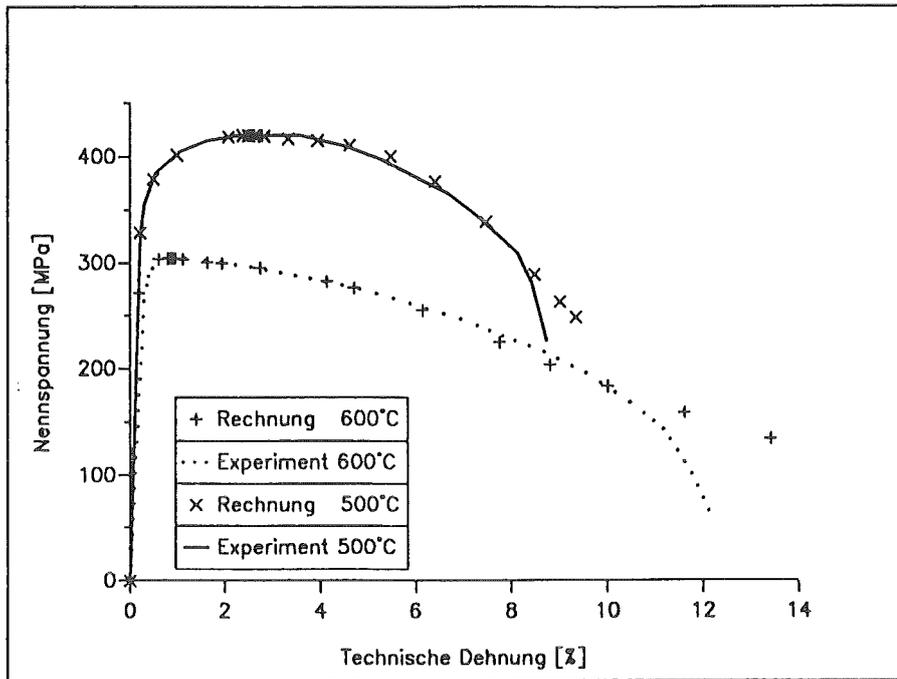


Abbildung 3.12: Vergleich Experiment - Rechnung für 500°C und 600°C

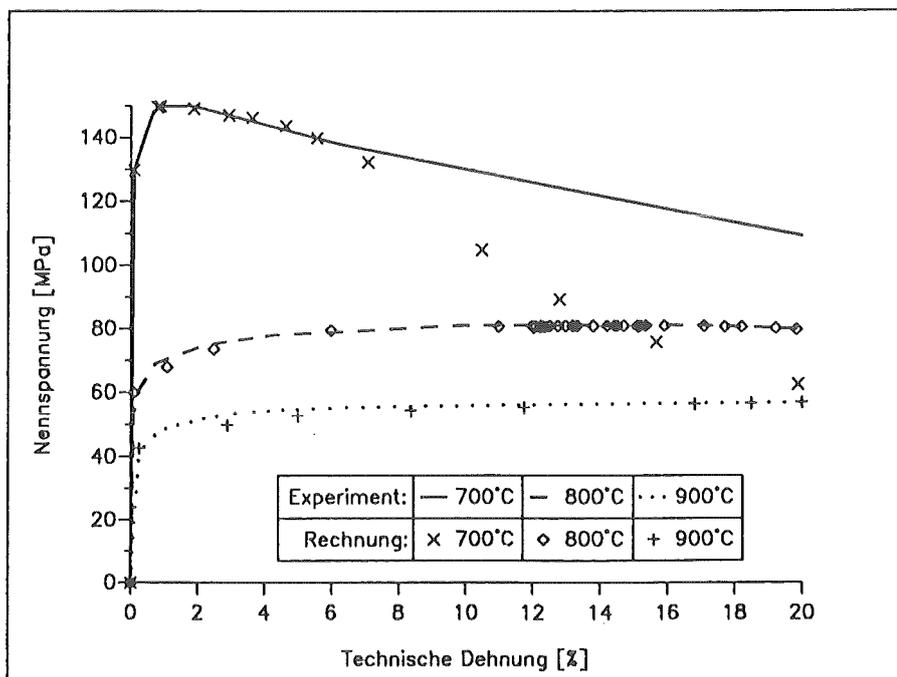


Abbildung 3.13: Vergleich Experiment - Rechnung für 700°C, 800°C und 900°C

3.6 Einfluß geometrischer Imperfektionen

Wie bereits mehrfach erwähnt, kann mittels geometrischer Imperfektionen der Einschnürvorgang beim Zugversuch rechnerisch simuliert werden. Der Zugprobe wurden hierbei sinusförmige Imperfektionen über der gesamten Probenlänge mit unterschiedlichen Kerbtiefen aufgeprägt. Abbildung 3.14 zeigt den qualitativen Verlauf einer sinusförmigen Imperfektion. Eine solche Imperfektion besitzt den Vorteil, daß im Kerbgrund eine horizontale Tangente vorliegt und somit scharfkantige Übergänge vermieden werden.

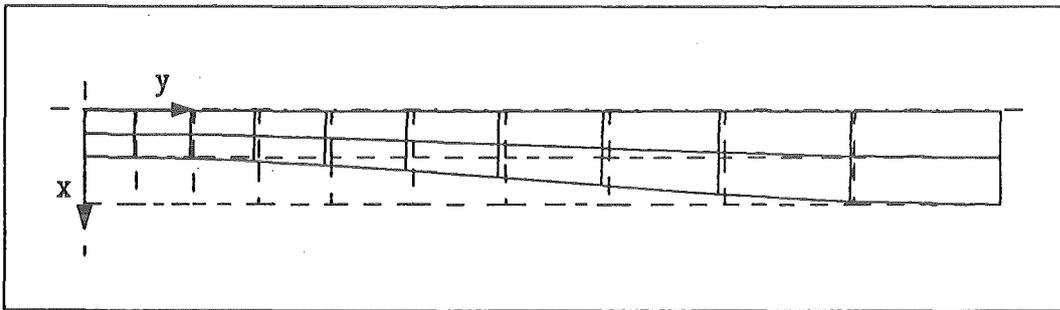


Abbildung 3.14: Qualitativer Verlauf einer sinusförmigen Imperfektion

Die x -Koordinaten der Außenkontur berechnen sich in Abhängigkeit von den jeweiligen y -Koordinaten gemäß der Vorschrift

$$x(y) = \left(r - \frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{y}{l_0}\right), \quad y \in \left[0, \frac{l_0}{2}\right], \quad (3.26)$$

wobei r dem Radius, t der Kerbtiefe und l_0 der Ausgangslänge der zylindrischen Zugprobe entspricht. Den Rechnungen wurden sinusförmige Imperfektionen mit Kerbtiefen von 0.3%, 0.1%, 0.01% und 0.001% des Radius zugrunde gelegt.

Die für Raumtemperatur durchgeführten Rechnungen haben gezeigt, daß trotz relativ grober Diskretisierung, auch mit kleinsten Imperfektionen eine Einschnürung erzielt werden kann. Abbildung 3.15 zeigt die Ausgangsgeometrie und die deformierte Geometrie.

Je größer man die vorgegebene Imperfektion wählt, desto früher schnürt die Zugprobe ein. Dieser Sachverhalt ist anschaulich in den Abbildungen 3.16 und 3.17 dargestellt. Zusätzlich wurde hierbei noch die homogene Lösung, die aus der perfekten Geometrie hervorgeht, aufgetragen.

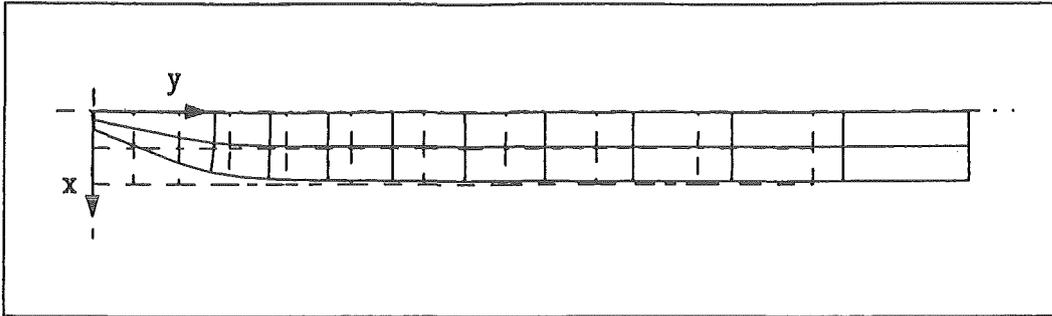


Abbildung 3.15: Ausgangsgeometrie und deformierte Geometrie eines imperfekten Zugstabes bei einem Querschnittsverhältnis $A/A_0=6\%$ und einer Totaldehnung von 21.3%

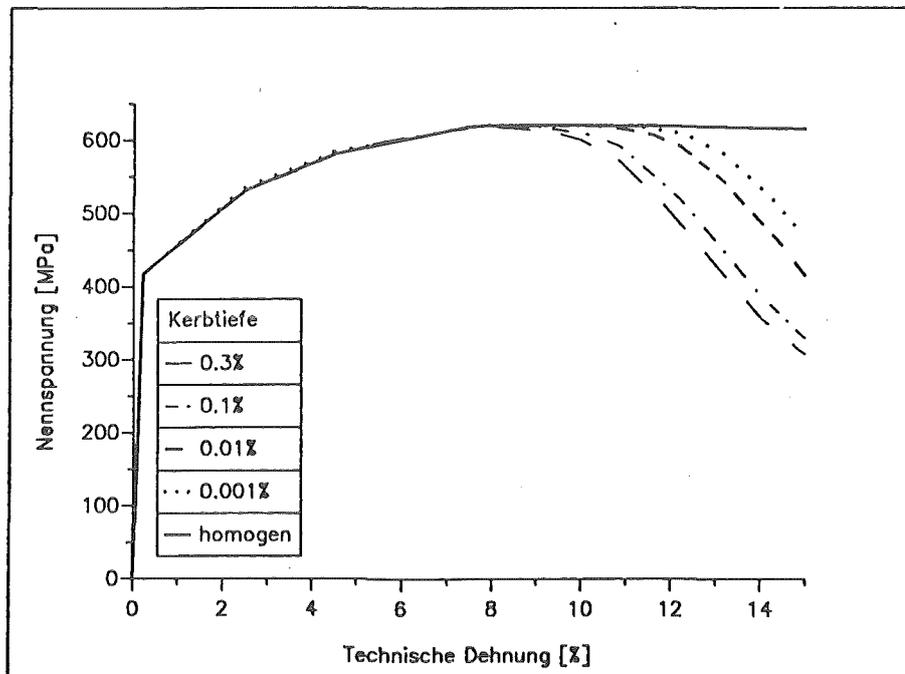


Abbildung 3.16: Einfluß sinusförmiger Imperfektionen unterschiedlicher Kerbtiefe auf die Spannungs-Dehnungs-Kurve ($T = 23^\circ\text{C}$).

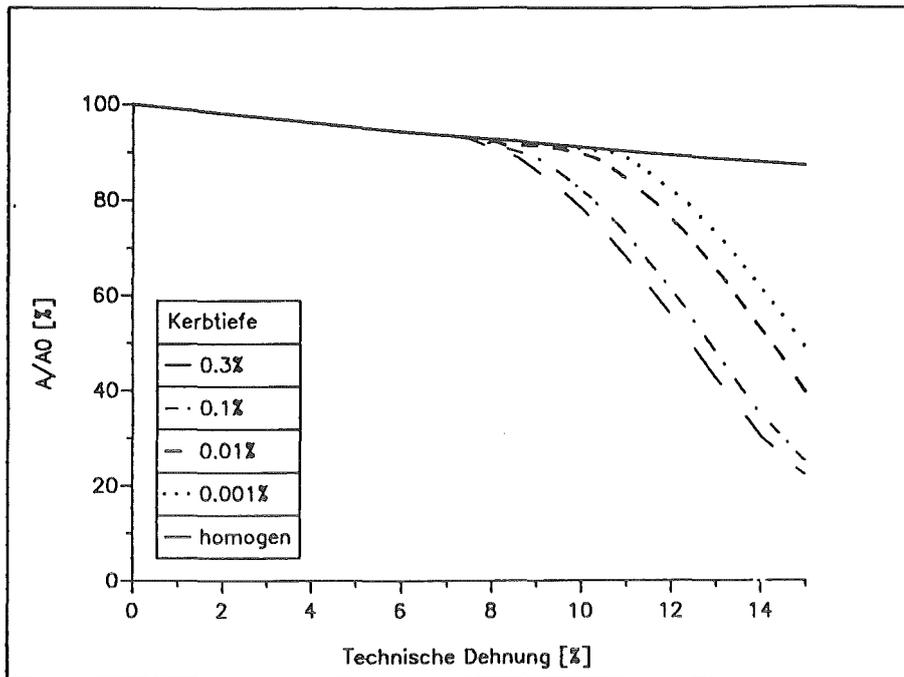


Abbildung 3.17: Einfluß sinusförmiger Imperfektionen unterschiedlicher Kerbtiefe auf die Querschnittsänderung ($T = 23^\circ\text{C}$).

Aus der Literatur (z.B. [9]) geht hervor, daß es sich bei einem perfekten Zugstab um ein Verzweigungsproblem handelt. Die verzweigte Lösung kann durch Imperfektionen angenähert werden, d.h. je kleiner man die Imperfektion wählt, desto näher liegt man bei der verzweigten Lösung. Durch Vorgabe der idealen Geometrie erhält man die homogene Lösung.

Bis zum Erreichen der Maximallast erfahren alle Bereiche der Zugprobe eine gleichmäßige plastische Beanspruchung. Erst mit fortschreitender Einschnürung wandert der plastische Bereich in Richtung Kerbgrund, wobei die hinteren Bereiche nach und nach entlastet werden. Die im Bereich der Einschnürstelle auftretende Verformungslokalisierung, exemplarisch für eine 0.01%-ige sinusförmige Imperfektion dargestellt, zeigt Abbildung 3.18. Aufgetragen wurde die plastische Vergleichsdehnung an der Außenseite über der y -Koordinate (s. Abbildung 3.14) der Ausgangskonfiguration für unterschiedliche Totaldehnungen.

Es ist ersichtlich, daß die plastische Vergleichsdehnung im Bereich der Einschnürstelle mit zunehmender Einschnürung stark ansteigt. Abbildung 3.19 zeigt im Vergleich die homogene Lösung, bei der die plastische Vergleichsdehnung in axialer Richtung konstant bleibt.

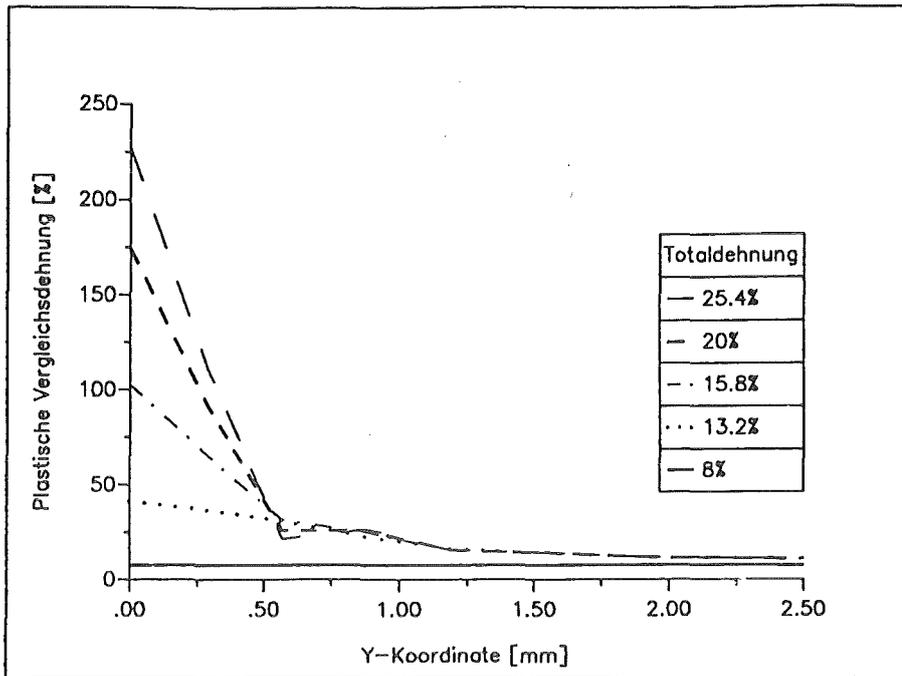


Abbildung 3.18: Plastische Vergleichsdehnungen bei einer 0.01%-igen sinusförmigen Imperfektion

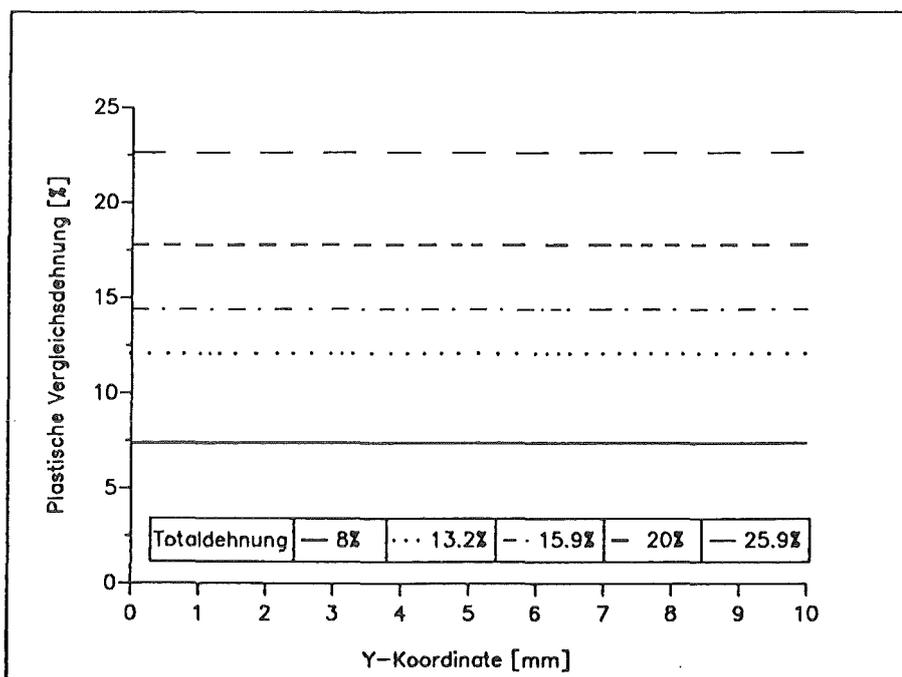


Abbildung 3.19: Plastische Vergleichsdehnungen bei homogener Lösung

In Abbildung 3.20 sind die plastischen Vergleichsdehnungen für die unterschiedlichen sinusförmigen Imperfektionen, einschließlich der homogenen Lösung, bei einer technischen Dehnung von 16% aufgetragen. Hieraus wird deutlich, daß bei größeren Imperfektionen eine größere plastische Vergleichsdehnung im Bereich der Einschnürstelle vorliegt und somit das Versagen zu einem früheren Zeitpunkt einsetzt.

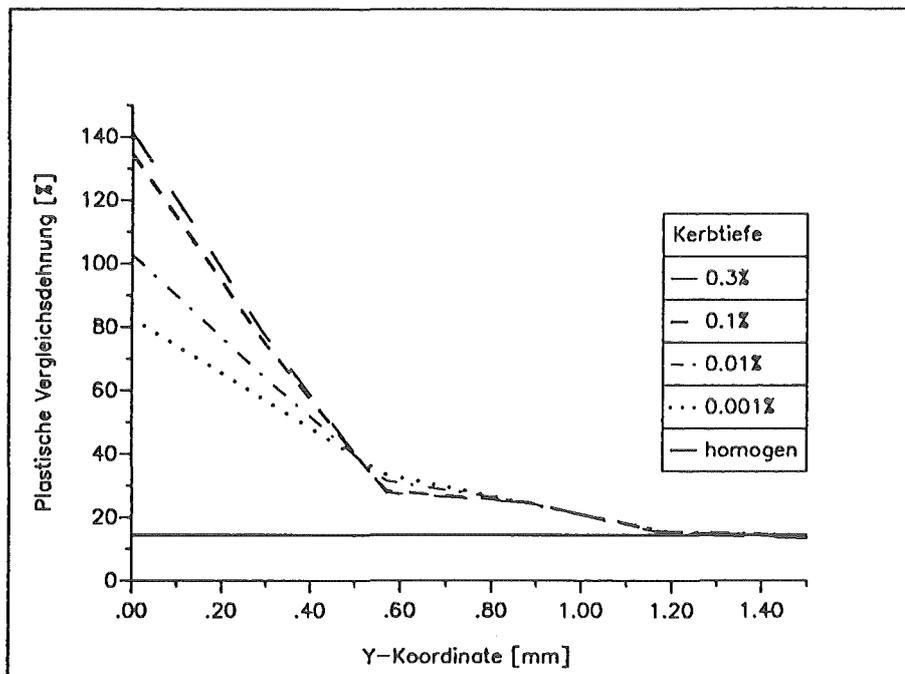
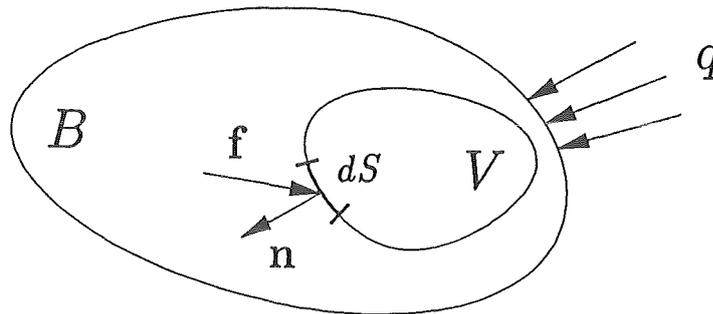


Abbildung 3.20: Plastische Vergleichsdehnungen bei einer technischen Dehnung von 16%

3.7 Einfluß thermischer Imperfektionen

Die Vorgabe einer Temperaturimperfektion, d.h. einer lokalen Temperaturerhöhung bietet eine weitere Möglichkeit den Einschnürvorgang zu simulieren. Dazu werden im Rahmen dieser Arbeit entkoppelte Wärmeausbreitungsrechnungen durchgeführt, wobei die dabei berechneten Temperaturverteilungen den anschließenden Spannungsanalysen als Eingabegrößen vorgegeben werden. Entkoppelte Wärmeausbreitungsrechnung bedeutet, daß die aufgrund der Deformation in Form von Wärme dissipierte Energie nicht berücksichtigt wird; andererseits werden die aus der Deformation resultierenden Geometrieänderungen bei der Wärmeausbreitungsrechnung vernachlässigt.

Es sei V ein Volumenelement des materiellen Körpers B in der Referenzkonfiguration.



Wir nehmen an, daß die Wärmeleitung dem Fourier'schen Gesetz

$$\mathbf{f} = -\mathbf{k} \text{GRAD} T \quad (3.27)$$

gehört; \mathbf{f} ist der Wärmeflußvektor, \mathbf{k} die Konduktivitätsmatrix und T ist die Temperatur. $\text{GRAD} T$ ist der Temperaturgradient bezüglich der Referenzkonfiguration.

Damit wird die durch Konduktion über die Oberfläche S_V des Volumenelements V ins Innere von V übertragene Energie zu

$$q_k = \int_{S_V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.28)$$

wobei \mathbf{n} die Einheitsnormale des differentiellen Flächenelements dS darstellt. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes ergibt sich (3.28) zu

$$q_k = \int_V \text{DIV} \mathbf{f} dV. \quad (3.29)$$

Die Finite Elemente Analyse basiert auf der Leistungsbilanz an einem materiellen Volumenelement V [8]

$$\int_V \rho \dot{U} dV - \int_V \text{DIV} \mathbf{f} dV = \int_{S_q} q dS + \int_V r dV, \quad (3.30)$$

wobei ρ die Dichte des Materials, U die zeitliche Ableitung der inneren Energie, q die über die freien Oberfläche S_q übertragene Energie und r die volumenspezifischen Wärmequellen darstellen. Am freien Rand des Körpers kann Energie durch aufgeprägte Wärmeströme, Konvektion oder durch Strahlung übertragen werden; dort ist gleichzeitig $q_k = 0$.

Bei Vernachlässigung von Phasenumwandlungen gilt folgende Beziehung zwischen der temperaturabhängigen Wärmekapazität $c(T)$ und der inneren Energie dU :

$$c(T) = \frac{dU}{dT} . \quad (3.31)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (3.30), unter Berücksichtigung von (3.27):

$$\int_V \rho c(T) \dot{T} dV + \int_V \text{DIV} (k \text{ GRAD} T) dV = \int_{S_q} q dS + \int_V r dV . \quad (3.32)$$

Die temperaturabhängigen Werte für die Wärmeleitfähigkeit, die spezifische Wärme sowie die Dichte können der Tabelle A.1 des Anhangs entnommen werden. Da in *ABAQUS* die Dichte ρ nicht als Funktion der Temperatur vorgegeben werden kann, wurde die spezifische Wärme $c(T)$ gemäß

$$\rho c(T) = \rho(T)^* c(T)^* , \quad (3.33)$$

unter der Annahme einer konstanten Dichte von $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, umgerechnet, wobei $\rho(T)^*$ und $c(T)^*$ den experimentell ermittelten Werten aus [15] (siehe Tabelle A.1) entsprechen.

Die folgenden Rechnungen sollen nun den Einfluß unterschiedlicher Temperaturimperfektionen aufzeigen, ausgehend von einer Anfangstemperatur von 400°C .

Beispiel 1:

Den Rechnungen wurde ein FE-Netz mit den Abmessungen $10 \times 1 \text{ mm}$ zugrunde gelegt, es besteht aus 30 8-knotigen, axialsymmetrischen Elementen (siehe Abbildung 3.21).

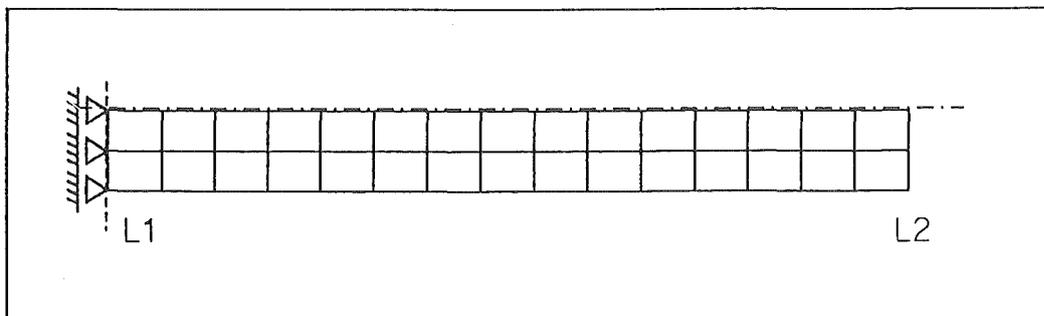


Abbildung 3.21: FE-Netz (Beispiel 1)

Den Knoten der Linie L1 (s. Abbildung 3.21) der Zugprobe wird eine konstante Temperatur von 410°C aufgeprägt. Die Oberfläche der Zugprobe sowie der freie Rand L2 werden als adiabatisch erachtet. Die aus der instationären Wärmeausbreitungsrechnung resultierenden zeitabhängigen Temperaturverteilungen in axialer Richtung zeigt Abbildung 3.22.

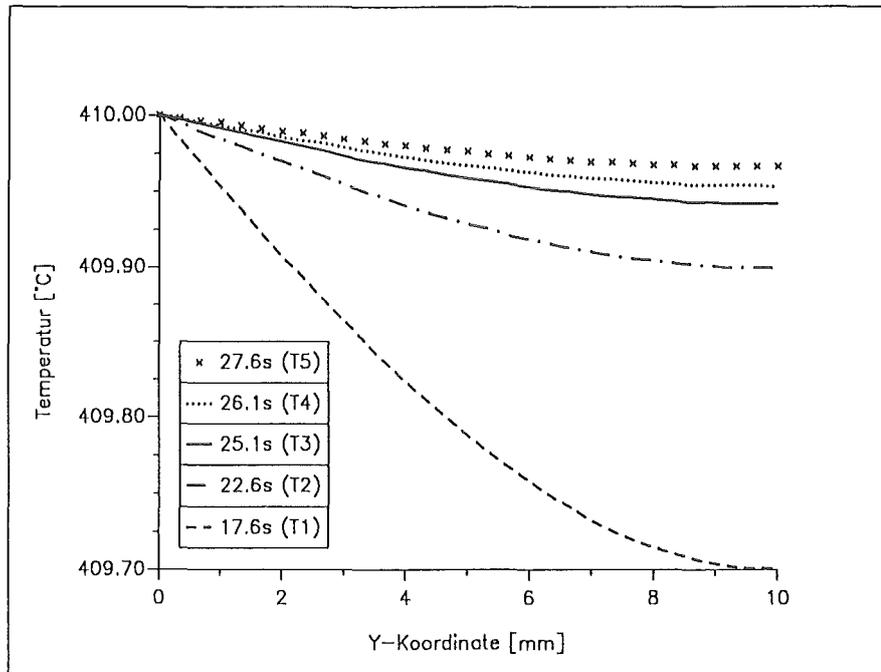


Abbildung 3.22: Temperaturverteilungen (Beispiel 1)

Im Anschluß daran wurde für jede der in Abbildung 3.22 dargestellten Temperaturverteilung ein einachsiger Zugversuch simuliert. Die Ergebnisse (Abbildungen 3.23 und 3.24) machen deutlich, daß sich der Zugstab bei Temperaturverteilungen für Zeiten $t \leq 25.1\text{s}$ bei einem steileren Temperaturgradient bereits bei kleineren Totaldehnungen beginnt einzuschnüren. Weiterhin ist erkennbar, daß sich für die Temperaturverteilung T4 dieselben Ergebnisse wie für die homogene Lösung ($T = 410^{\circ}\text{C}$) berechnet werden, während bei Vorgabe der Temperaturverteilung T5 die gleichen Kurvenverläufe wie für die Temperaturverteilung T3 resultieren.

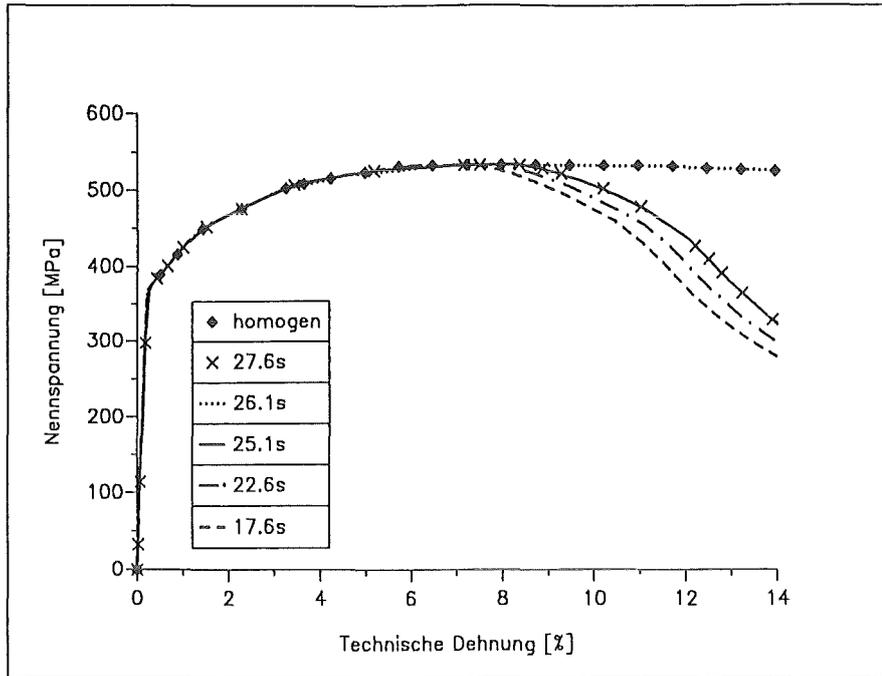


Abbildung 3.23: Spannungs-Dehnungs-Verläufe (Beispiel 1)

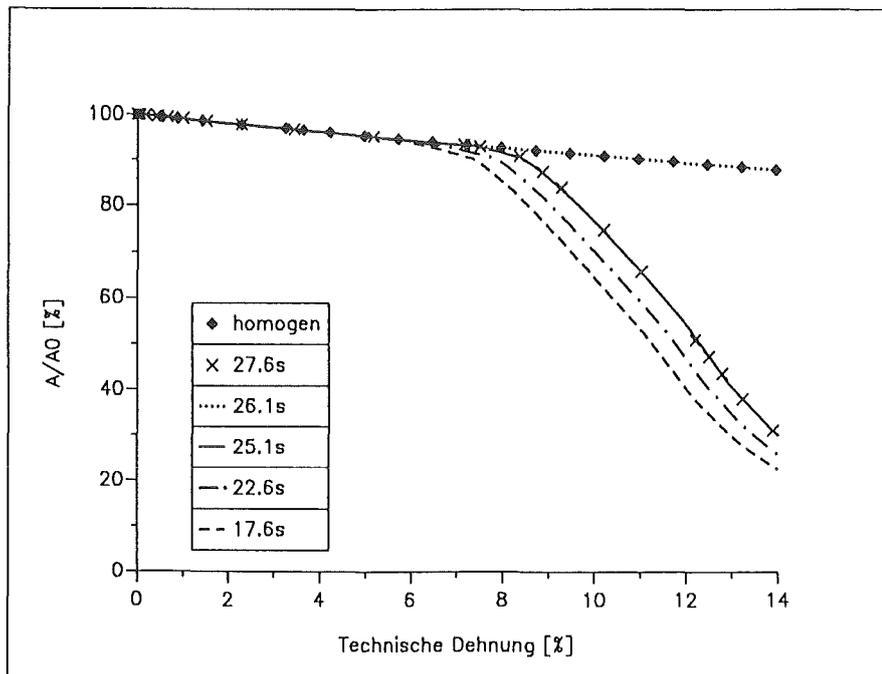


Abbildung 3.24: Querschnittsverhältnisse (Beispiel 1)

Es zeigte sich, daß sämtliche durchgeführten Rechnungen, denen Temperaturverteilungen für $t \geq 28.1s$ zugrundegelegt wurden, die gleichen Ergebnisse wie die homogene Lösung lieferten. Das unerwartete Verhalten für die Temperaturverteilungen T4 und T5 könnte durch numerische Ungenauigkeiten verursacht worden sein, denn beispielsweise durch Änderung des Lastinkrements ergaben sich für die Temperaturverteilung T5 dieselben Ergebnisse wie für die homogene Lösung. Zu beachten hierbei ist, daß die Temperaturdifferenz zwischen den Linien L1 und L2 bei T4 lediglich 0.048°C und bei T5 0.033°C beträgt und daß die Materialparameter durch lineare Interpolation aus den eingegebenen Daten für 400°C und 500°C berechnet werden.

Beispiel 2:

Ausgehend von dem in Abbildung 3.3 dargestellten FE-Netz wurde eine lokale Temperaturimperfektion so gewählt, daß die drei Knoten K1, K2 und K3 (siehe Abbildung 3.25) mit einer konstanten Temperaturüberhöhung ΔT beaufschlagt wurden. Die Oberfläche der Zugprobe wird wiederum als adiabatisch angenommen. Es wurden Temperaturüberhöhungen von $\Delta T=0.25^\circ\text{C}$, 1.0°C und 10.0°C vorgeben.

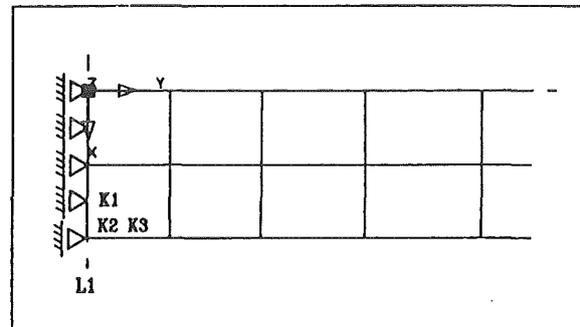


Abbildung 3.25

Den Spannungsanalysen wurden die Temperaturverteilungen, die sich 5.0 Sekunden nach Beginn der instationären Wärmeausbreitungsrechnung einstellten, zugrunde gelegt. Die Abbildungen 3.26 bis 3.28 zeigen die Analogie der thermischen Imperfektionen zu den geometrischen Imperfektionen auf. Es zeigt sich erwartungsgemäß auch hier, daß eine größere Imperfektion den Beginn des Einschnürvorgangs zu kleineren Totaldehnungen und gleichzeitig zu niedrigeren Spannungswerten hin verschiebt. Ein wichtiger Aspekt hierbei ist, daß selbst bei einer recht groben Diskretisierung zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden können, was insbesondere bei 3D-Rechnungen entscheidend ist.

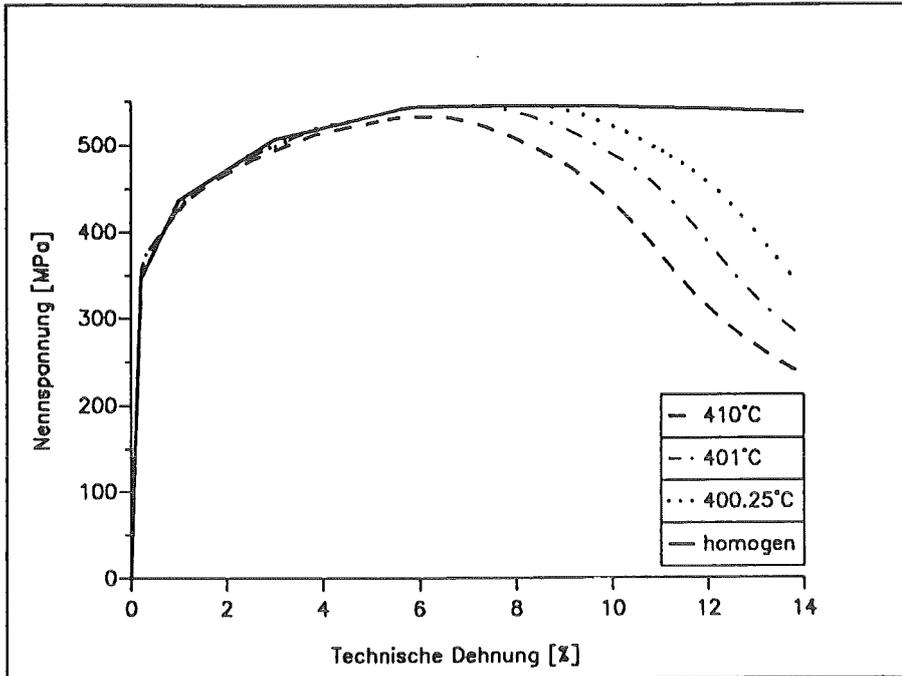


Abbildung 3.26: Spannungs-Dehnungs-Verläufe (Beispiel 2)

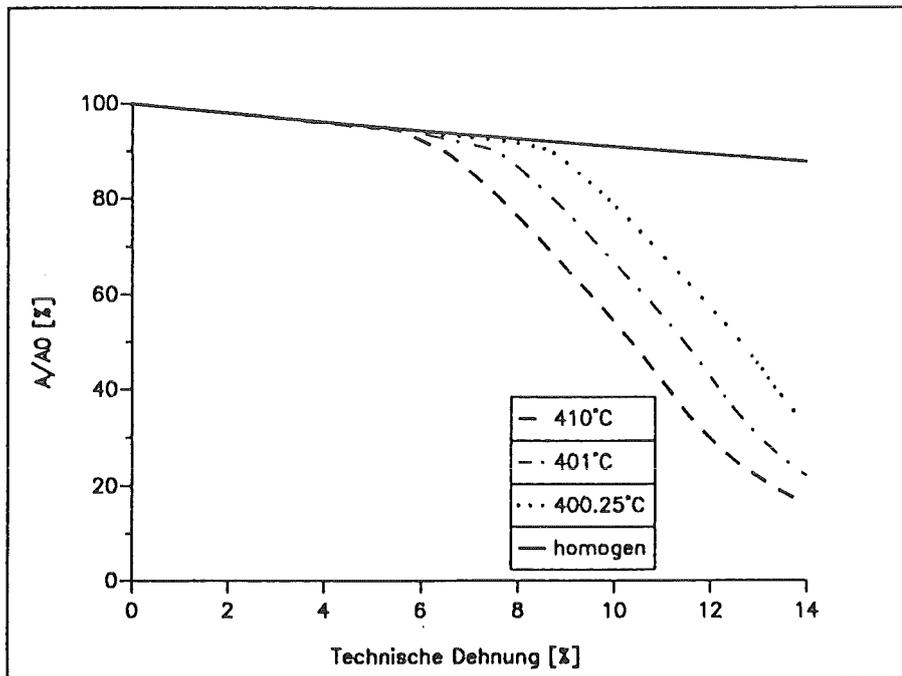


Abbildung 3.27: Querschnittsverhältnisse (Beispiel 2)

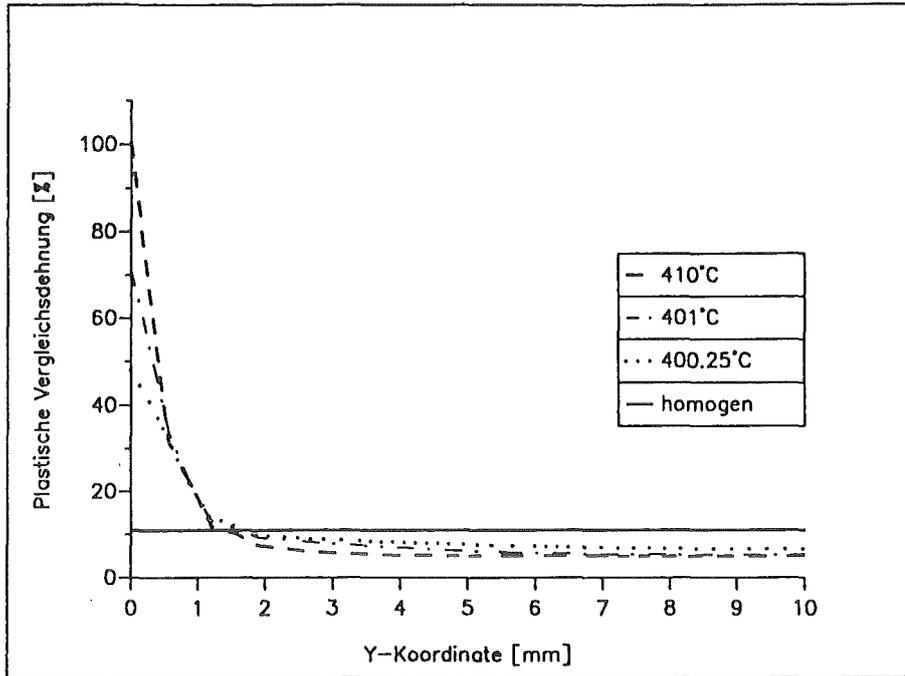


Abbildung 3.28: Plastische Vergleichsdehnung bei einer technischen Dehnung von 12% (Beispiel2)

Kapitel 4

Kugel unter Innendruck

Anhand der am Zugstab gewonnenen Erkenntnisse ist man nun in der Lage auch kompliziertere Geometrien zu untersuchen. Dieses Kapitel soll den Einfluß von Imperfektionen, am Beispiel einer Kugel unter Innendruck, aufzeigen.

Wie bereits beim Zugstab wurde auch hier axialsymmetrisch gerechnet unter Verwendung von CAX8R-Elementen. Modelliert wurde eine dünnwandige Kugel mit einem Innenradius R_i von 2560 mm und einem Außenradius R_a von 2708 mm. Macht man sich auch hier Symmetrieeigenschaften zunutze, so genügt es einen Viertelkreis zu generieren. Der Bereich, in dem die angenommenen Imperfektionen wirksam sind, weist eine feinere Diskretisierung auf. Abbildung 4.1 zeigt das FE-Netz und die Randbedingungen. Die in Abbildung 4.1 dargestellte Größe s entspricht der Bogenlänge an der Innenseite des Kugelquerschnitts in der undeformierten Lage.

Die FE-Rechnungen hierzu wurden lastgesteuert durchgeführt. Dies bedeutet, daß der Innendruck bis zum Erreichen des Maximalwertes, des sogenannten Versagensdrucks, kontinuierlich gesteigert wird. Zur Bestimmung des nachkritischen Verhaltens der Kugel wurde die RIKS-Option in den ABAQUS-Rechnungen verwendet. Es handelt sich hierbei um einen Pfadverfolgungsalgorithmus, der standardmäßig in ABAQUS implementiert ist. Ohne diese Option ginge die Konvergenz der Rechnung in der Umgebung des kritischen Punktes verloren. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode kann dem ABAQUS Theorie Handbuch [8] oder einer Veröffentlichung von Riks [13] entnommen werden.

Den Berechnungen wurden die, gemäß Kapitel 3.5, ermittelten Materialparameter für 400°C und 500°C zugrunde gelegt. Vorab wurde das Verhalten einer Kugel ohne Imperfektion bei einer Temperatur von 400°C untersucht. Die Rechnungen haben gezeigt, daß sich die Kugel unter

erheblicher Volumenzunahme ausdehnt, wobei sich ein Versagensdruck von 59.12 MPa einstellt. Will man im folgenden gezielt eine Einschnürung bzw. Versagen an einer bestimmten Stelle hervorrufen, so kann dies durch Vorgabe geometrischer oder thermischer Imperfektionen geschehen.

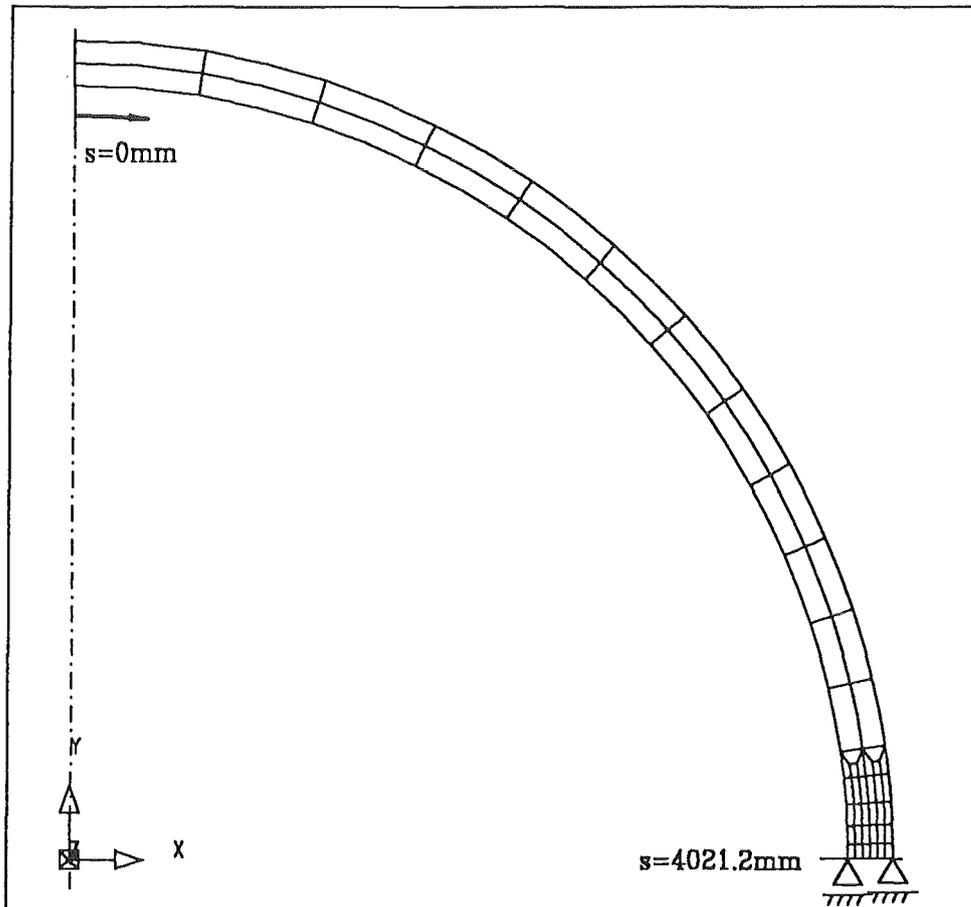


Abbildung 4.1: FE-Netz der perfekten Kugel

4.1 Einfluß geometrischer Imperfektionen

In unserem Fall wurden im Bereich der Äquators sinusförmige Imperfektionen mit Kerbtiefen von 10%, 5% und 1% der Wandstärke vorgegeben. In Abbildung 4.2 ist der qualitative Verlauf einer solchen Imperfektion dargestellt.

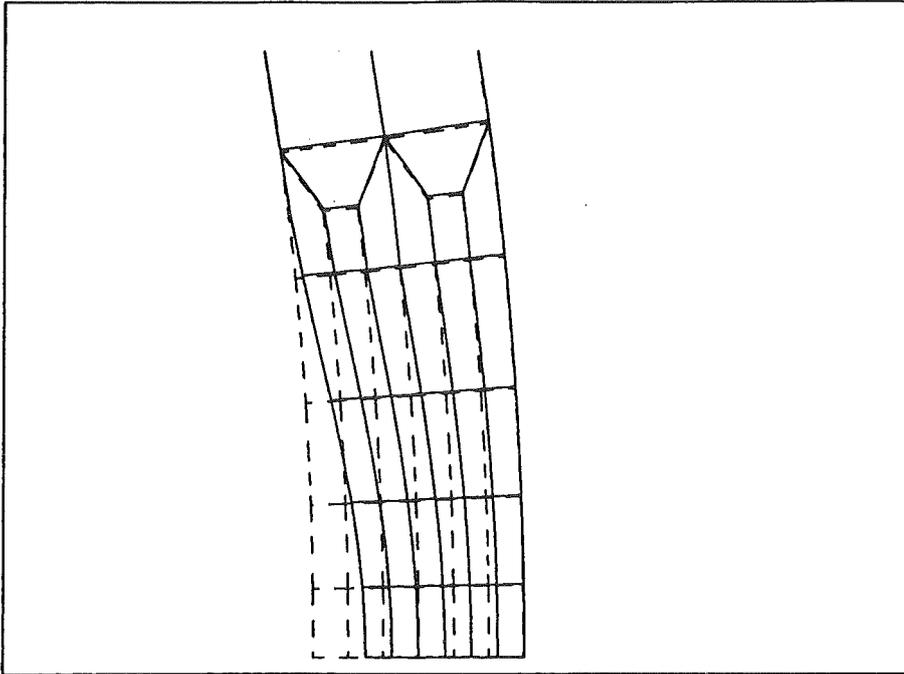


Abbildung 4.2: Sinusförmige Imperfektion

Nach Überschreiten des Versagensdrucks kommt es zu einer Verformungslokalisierung im Kerbgrund und somit zu einer Einschnürung. Mit zunehmender Einschnürung verlagert sich die plastisch beanspruchte Zone in Richtung Kerbgrund, wobei die übrigen Bereiche entlastet werden. Abbildung 4.3 verdeutlicht diesen Sachverhalt am Beispiel einer 5%-igen sinusförmigen Imperfektion. Betrachtet werden die plastischen Vergleichsdehnungen an der Kugelinnaenseite in Abhängigkeit von der Bogenlänge s für verschiedene Innendrucke. Abbildung 4.4 zeigt im Vergleich hierzu die plastischen Vergleichsdehnungen bei einer idealen Kugel. Diese weisen einen annähernd konstanten Verlauf auf.

In Abbildung 4.5 bzw. 4.6 ist der Innendruck bzw. das Wandstärkenverhältnis t/t_0 im Kerbgrund in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 dargestellt. Die Größe t_0 entspricht hierbei der Wandstärke der idealen Kugel. Es ist ersichtlich, daß der Beginn der Einschnürung wiederum von der Größe der Imperfektion abhängt, d.h. bei größeren Imperfektionen beginnt die Einschnürung bereits bei einem geringeren Innenvolumen.

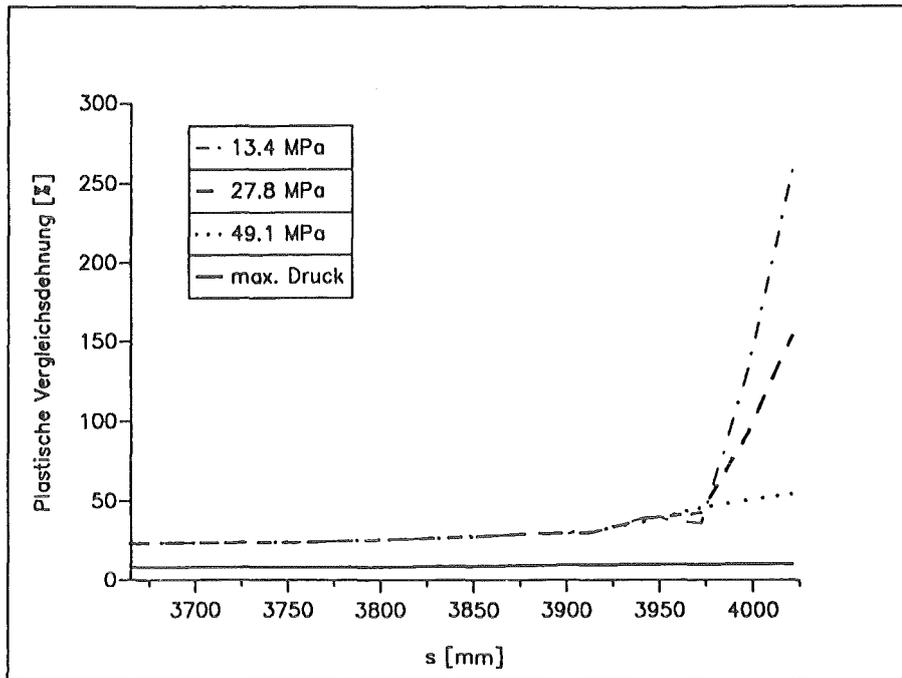


Abbildung 4.3: Plastische Vergleichsdehnungen bei 5%-iger sinusförmiger Imperfektion

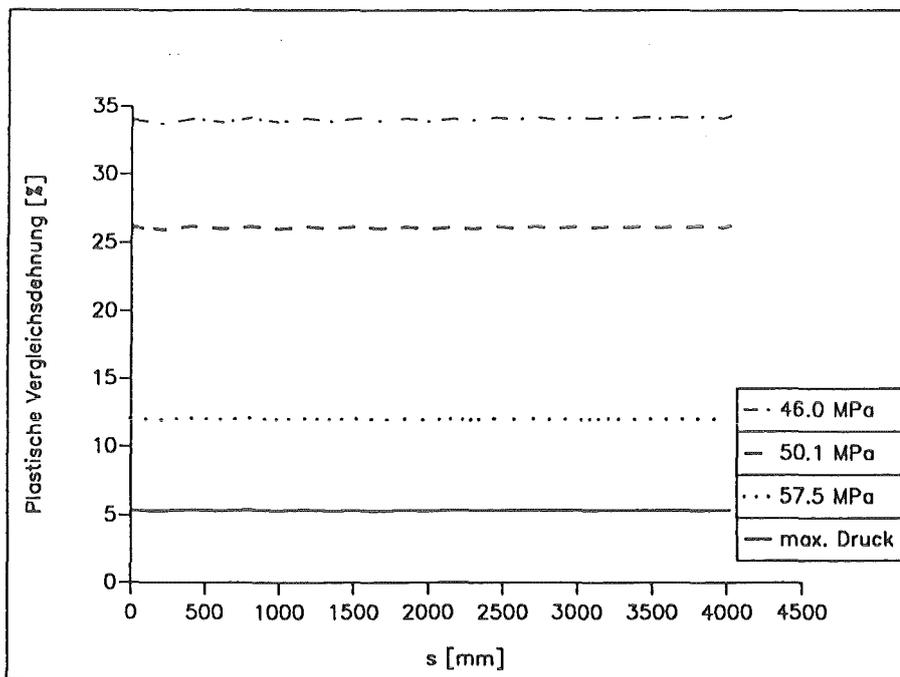


Abbildung 4.4: Plastische Vergleichsdehnungen bei idealer Kugel

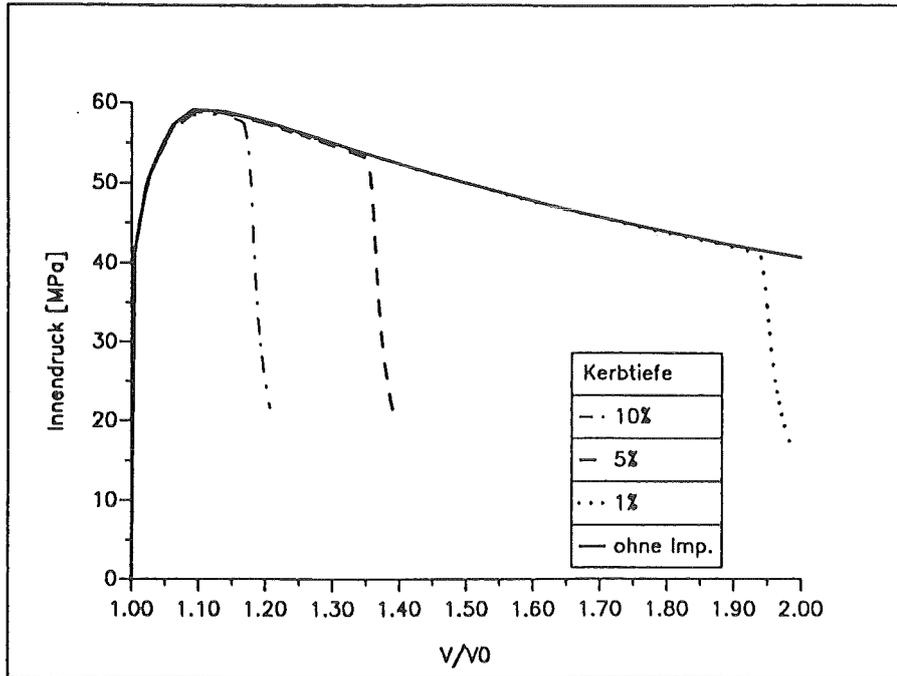


Abbildung 4.5: Innendruck in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen sinusförmigen Imperfektionen

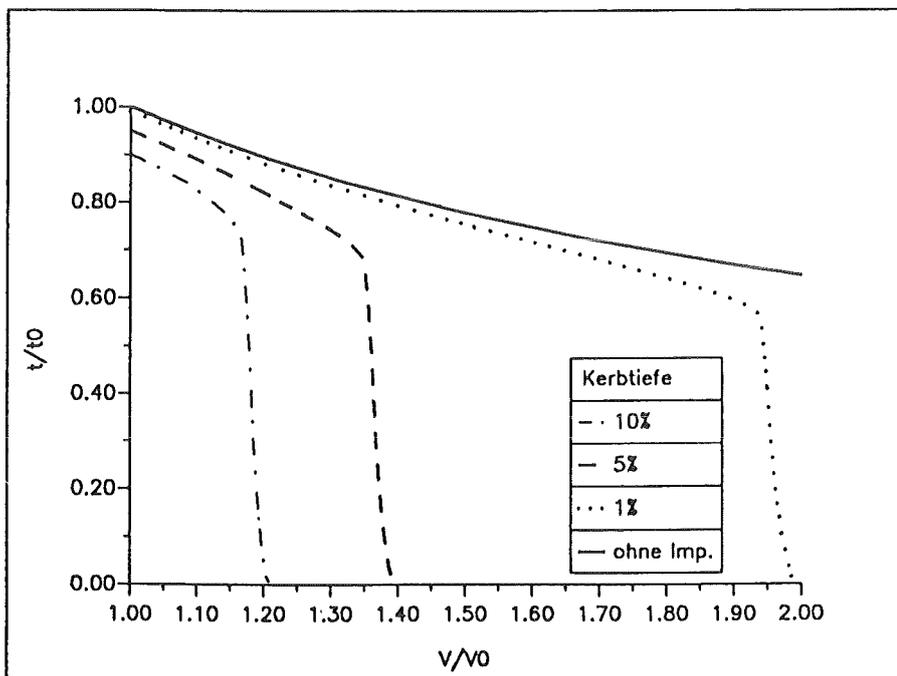


Abbildung 4.6: Wandstärkenverhältnis t/t_0 Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen sinusförmigen Imperfektionen

4.2 Einfluß thermischer Imperfektionen

Wie bereits beim Zugstab (siehe Kapitel 3.7) wurde auch hier zunächst eine entkoppelte, instationäre Wärmeausbreitungsrechnung durchgeführt. Ausgehend von einer Anfangstemperatur von 400°C wurden die beiden Innenknoten am Äquator mit einer höheren Temperatur beaufschlagt. Vorgegeben wurden Temperaturdifferenzen von 100°C , 60°C , 50°C , 25°C und 10°C . Die Kugeloberfläche wurde als adiabatisch erachtet. Die aus der Wärmeausbreitungsrechnung resultierende Temperaturverteilung am Äquator in radialer Richtung in Abhängigkeit von der Zeit zeigt Abbildung 4.7, am Beispiel einer Temperaturdifferenz von 50°C .

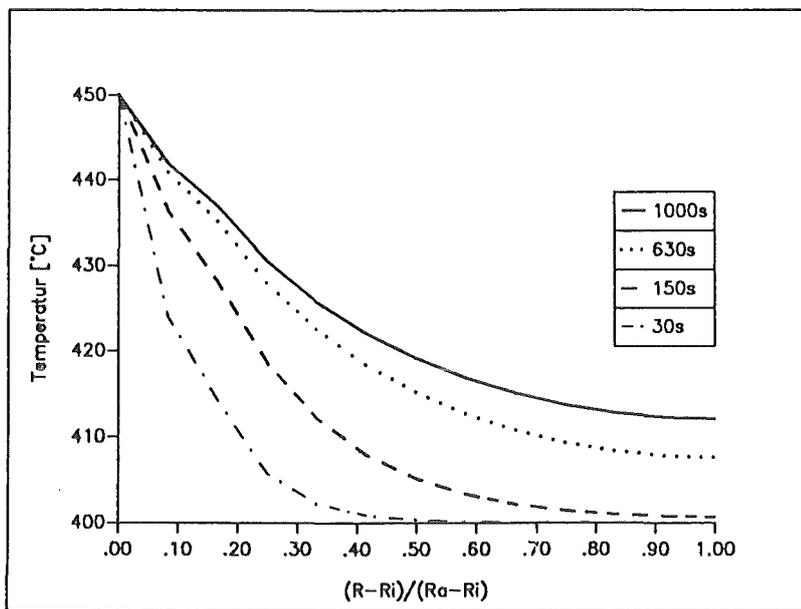


Abbildung 4.7: Temperaturverteilung am Äquator in radialer Richtung ($\Delta T = 50^{\circ}\text{C}$)

Im folgenden wurde das Temperaturprofil, das sich nach 1000 Sekunden einstellt, als Grundlage für eine anschließende Spannungsanalyse verwendet. In Abbildung 4.8 ist die Temperaturverteilung nach 1000 Sekunden, anhand der Isolinien, exemplarisch für eine Temperaturdifferenz von 50°C dargestellt. Die Abbildungen 4.9 und 4.10 machen deutlich, daß derartige Temperaturimperfektionen, die kleiner als 10°C sind, nach 1000 Sekunden keine Wirkung zeigen. Das Verhalten entspricht dem einer Kugel ohne Imperfektion, d.h. die Kugel dehnt sich aus, ohne daß es zu einer merklichen Einschnürung bzw. Verformungslokalisierung am Äquator kommt. Temperaturdifferenzen größer als 10°C zeigen folgendes Verhalten: Je größer der Temperaturunterschied ist, desto früher schnürt die Kugel am Äquator ein.

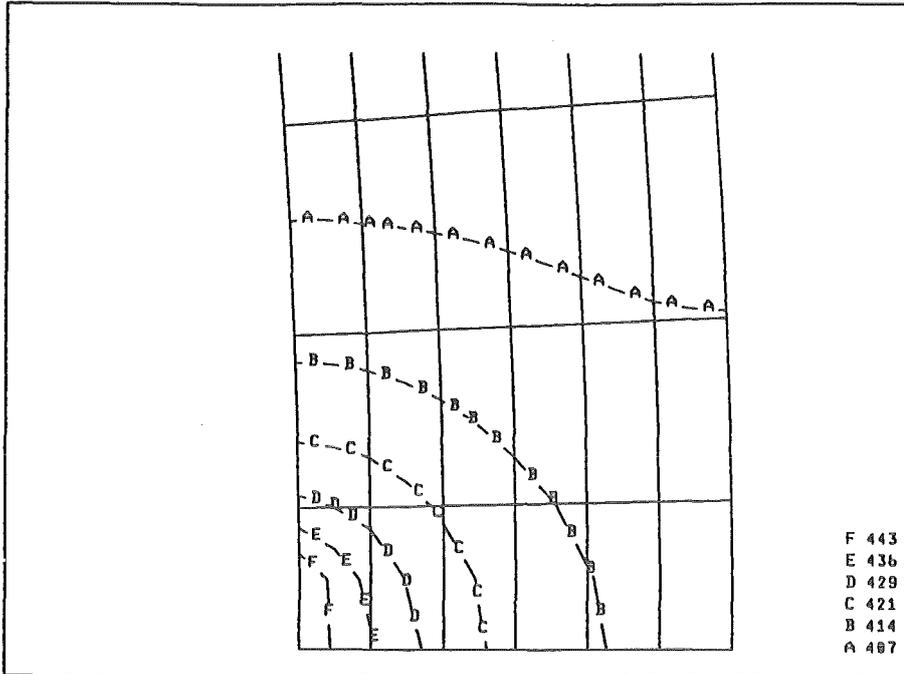


Abbildung 4.8: Temperaturverteilung nach 1000 Sekunden ($\Delta T = 50^\circ\text{C}$)

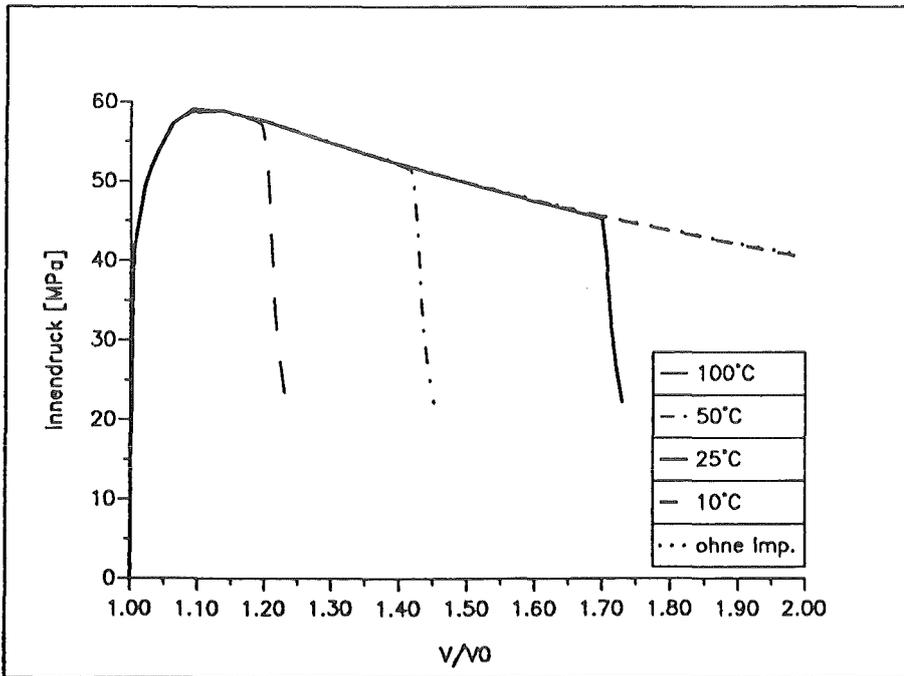


Abbildung 4.9: Innendruck in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen thermischen Imperfektionen

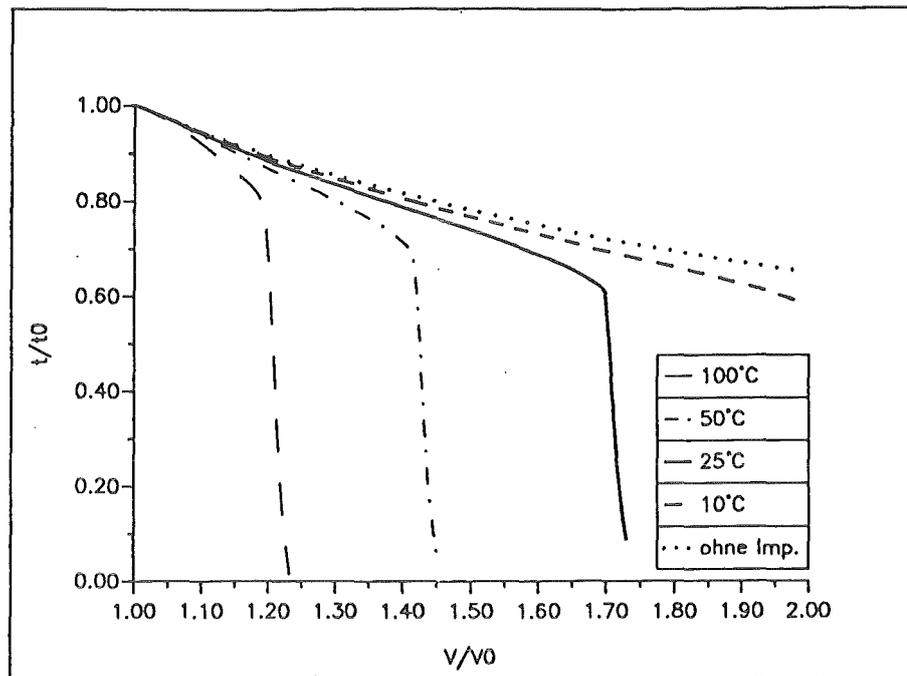


Abbildung 4.10: Wandstärkenverhältnis t/t_0 in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen thermischen Imperfektionen

Da man sowohl durch geometrische als auch durch thermische Imperfektionen gezielt Versagen an einer bestimmten Stelle einleiten kann, liegt es nahe einer bestimmten geometrischen Imperfektion eine entsprechende Temperaturimperfektion zuzuordnen, die beide dieselbe Wirkung haben. Einer 5%-igen geometrischen Imperfektion am Äquator entspricht z.B. eine Temperaturimperfektion von 60°C nach 1000 Sekunden (s. Abbildungen 4.11 und 4.12).

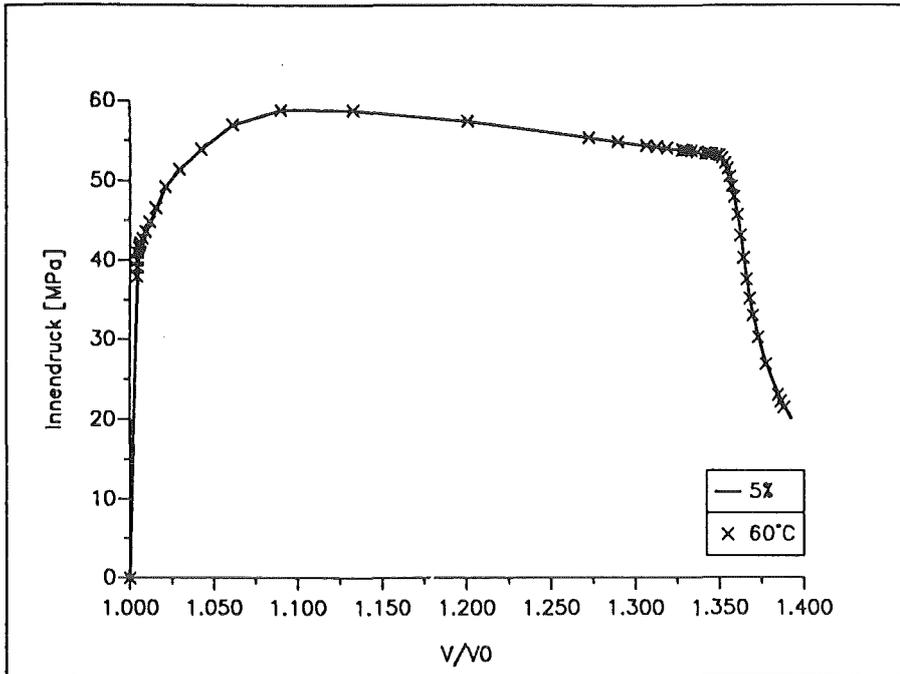


Abbildung 4.11: Vergleich 5%-ige sinusförmige Imperfektion :
Temperaturimperfektion $\Delta T = 60^\circ\text{C}$, $t = 1000\text{s}$

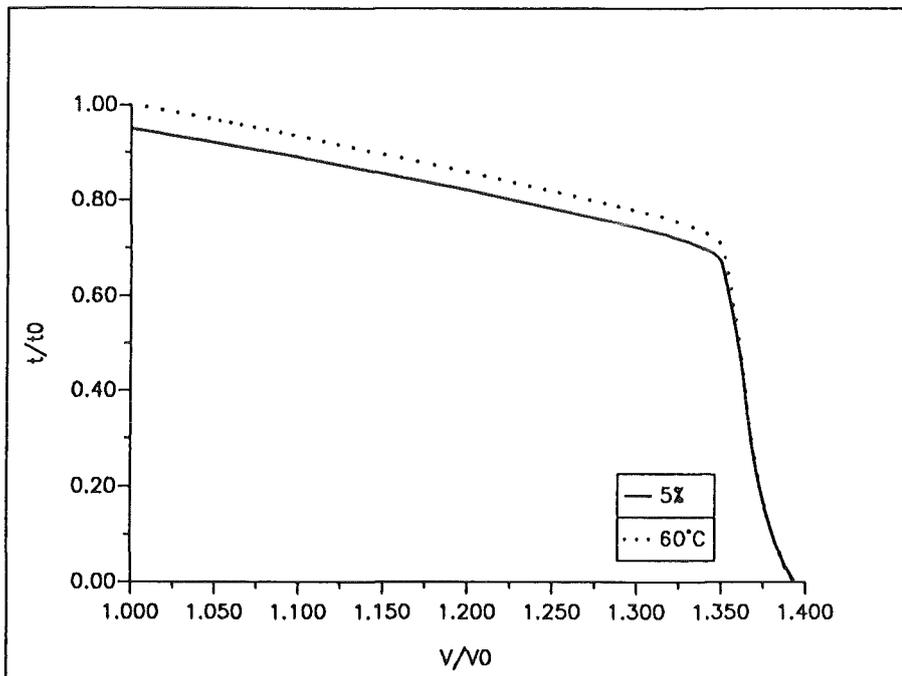


Abbildung 4.12: Vergleich 5%-ige sinusförmige Imperfektion :
Temperaturimperfektion $\Delta T = 60^\circ\text{C}$, $t = 1000\text{s}$

Kapitel 5

Reaktordruckbehälter

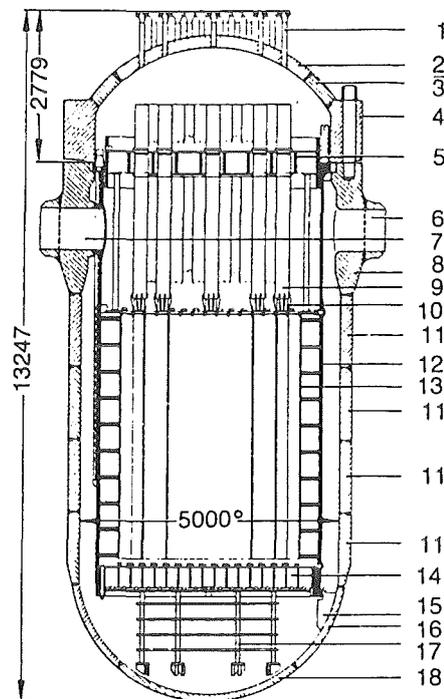
5.1 Einführende Bemerkungen

Bei den Untersuchungen von Kernschmelzunfällen sind die Vorgänge im Reaktorkühlkreislauf, insbesondere im Reaktordruckbehälter, von besonderem Interesse. Ist eine ausreichende Wärmeabfuhr durch anlageninterne Notfallmaßnahmen nicht gewährleistet, so kann es zu gravierenden Kernschäden bis hin zum Schmelzen kommen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine reine Tragfähigkeitsanalyse durchgeführt und der Einfluß geometrischer bzw. thermischer Imperfektionen auf das Verformungsverhalten untersucht. Die hieraus gewonnenen Erkenntnisse sollen als Grundlage zur Bewertung möglicher Unfallszenarien dienen.

Die in diesem Zusammenhang durchgeführten Rechnungen wurden lastgesteuert simuliert. Der Innendruck wurde bis zum Erreichen des Versagensdrucks kontinuierlich gesteigert. Anschließend muß mit der RIKS-Option weitergerechnet werden, um das nachkritische Verhalten wiederzugeben (siehe Kapitel 4). Anhand von 2D-Rechnungen wurde gezeigt, daß bei der perfekten Geometrie Versagen im Pol der Bodenkalotte auftritt. Geht man hingegen von einer imperfekten Struktur aus, so kann gezielt Versagen an einer bestimmten Stelle eingeleitet werden. Da bei den 2D-Rechnungen axialsymmetrisch gerechnet wurde, führt eine geometrische bzw. thermische Imperfektion zu einem Rundumversagen an dieser Stelle. Abschließend wurden noch einige 3D-Rechnungen für unterschiedliche lokale Temperaturimperfektionen (hot spots) durchgeführt.

5.2 Diskretisierung

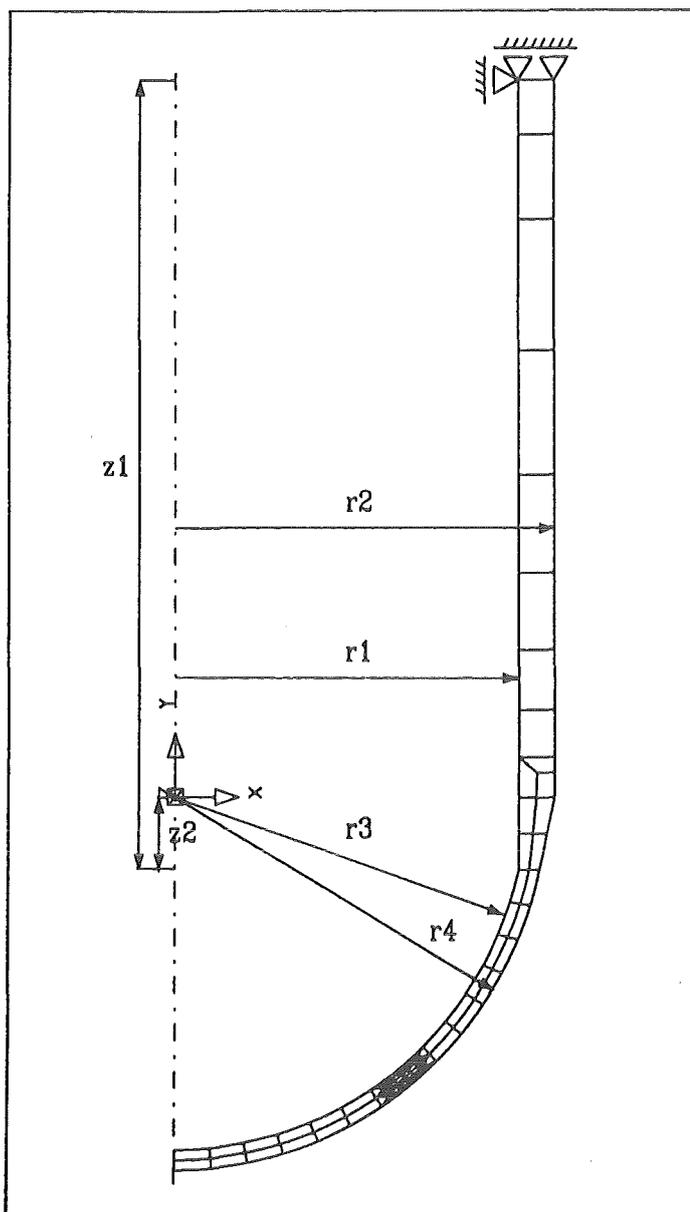
Abbildung 5.1 zeigt einen Längsschnitt durch einen Reaktordruckbehälter [14]. Der als Halbkugel ausgebildete Boden des Reaktordruckbehälters besteht aus der Bodenkalotte und dem aus mehreren Segmenten zusammenschweißten Bodenzonenring. An den Halbkugelboden schließt sich der zylindrische Behältermantel an. Den Übergang des Behältermantels zum Deckel bildet der Mantelflanschring mit den Kühlmittelstützen. Der Reaktordruckbehälter ist einheitlich aus dem Stahl 20 MnMoNi 5 5 gefertigt. Die Innenoberfläche, die mit dem Kühlmittel in Berührung kommt, ist mit einer korrosionsbeständigen austenitischen Schweißplattierung versehen.



- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| 1 Steuerstabstützen | 10 Gitterplatte |
| 2 Deckelkalotte | 11 Schmiedering |
| 3 Deckelzonenring | 12 Kernbehälter |
| 4 Deckelflanschring | 13 Kernumfassung |
| 5 oberer Rost | 14 unterer Rost |
| 6 Kühlmiteleintrittsstützen | 15 Kernbehälterabstützung |
| 7 Kühlmittelaustrittsstützen | 16 Bodenzonenring |
| 8 Mantelflanschring | 17 Kernschemel |
| 9 Steuerstabführungseinsatz | 18 Bodenkalotte |

Abbildung 5.1: Längsschnitt durch einen Reaktordruckbehälter (aus [14])

Abbildung 5.2 zeigt das den 2D-Rechnungen zugrunde gelegte FE Netz sowie die geometrischen Daten des Reaktordruckbehälters. Gerechnet wurde axialsymmetrisch mit CAX8R-Elementen. Der Reaktordruckbehälter wurde bis unmittelbar unterhalb der Kühlmittelstutzen modelliert. Die Knoten des oberen Randes wurden in axialer Richtung fixiert, zusätzlich wurde noch der entsprechende Innenknoten in radialer Richtung festgehalten. Die Schweißnähte sowie die austenitische Plattierung blieben unberücksichtigt. Der Bereich, in den die Imperfektionen eingebracht werden, weist eine feinere Diskretisierung auf.



$$\begin{aligned} r1 &= 2500 \text{ mm} \\ r2 &= 2756 \text{ mm} \\ r3 &= 2560 \text{ mm} \\ r4 &= 2708 \text{ mm} \\ z1 &= 5755 \text{ mm} \\ z2 &= 523 \text{ mm} \end{aligned}$$

Abbildung 5.2: FE Netz und Abmessungen

5.3 Einfluß geometrischer Imperfektionen

Der Einfluß von geometrischen Imperfektionen soll, wie schon bei den vorherigen Beispielen, anhand von sinusförmigen Imperfektionen aufgezeigt werden. Diese wurden dem Reaktordruckbehälter in dem feiner diskretisierten Bereich der Bodenkalotte vorgegeben (siehe Abbildung 5.3). Bei den folgenden Betrachtungen ging man von sinusförmigen Imperfektionen mit Kerbtiefen von 8%, 9% und 10% der Wandstärke aus. Die Ausgangstemperatur betrug hierbei 400°C.

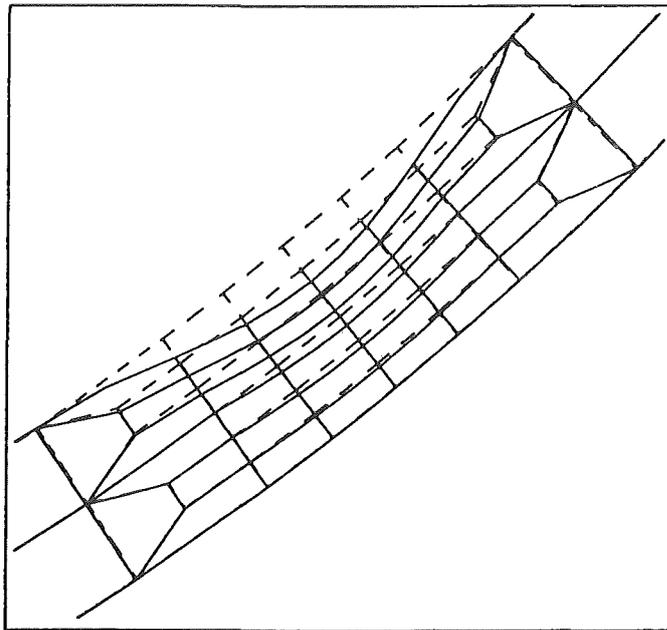


Abbildung 5.3: Sinusförmige Imperfektion

Die in diesem Zusammenhang durchgeführten FE-Rechnungen machen deutlich (Abbildungen 5.4 und 5.5), daß bei größeren Imperfektionen die Einschnürung bereits bei einem deutlich geringeren Innenvolumen eintritt. Die in Abbildung 5.4 dargestellten Kurven weisen einen charakteristischen Verlauf auf. Bis zum Erreichen des Versagensdrucks steigt der Innendruck kontinuierlich an. Nach Erreichen des Versagensdrucks ist zunächst ein leichter und im weiteren Verlauf ein sehr starker Druckabfall erkennbar. Unmittelbar nach Erreichen des maximal ertragbaren Druckes beginnt eine Verformungslokalisierung d.h. die plastisch beanspruchte Zone wandert allmählich in Richtung Kerbgrund, während die übrigen Bereiche nach und nach entlastet werden. Dieser Vorgang ist in Abbildung 5.4 durch den leichten Druckabfall gekennzeichnet. Der starke Druckabfall wird durch die nunmehr sehr rasch fortschreitende Einschnürung hervorgerufen. Aus Abbildung 5.4 geht ferner hervor, daß der Versagensdruck bei

derartigen Imperfektionen sich nur geringfügig von dem der perfekten Struktur unterscheidet (s. auch Tabelle 5.1).

Die im Kerbgrund auftretende Verformungslokalisierung kann anhand der plastischen Vergleichsdehnungen veranschaulicht werden. Die in Abbildung 5.6 dargestellte Größe s beschreibt die Bogenlänge an der Innenseite des undeformierten Behälterquerschnitts. In Abbildung 5.7 wurden die an der Innenseite des Reaktordruckbehälters vorliegenden plastischen Vergleichsdehnungen über der Bogenlänge der Ausgangskonfiguration für unterschiedliche Innendrucke aufgetragen.

Weitere Rechnungen haben gezeigt, daß derartige Imperfektionen mit einer Kerbtiefe kleiner als 8% der Wandstärke keine Wirkung zeigen. Sie weisen dasselbe Verhalten auf, wie die perfekte Geometrie, bei der es zu einer Verformungslokalisierung und somit zu einer Einschnürung im Pol der Bodenkalotte kommt (Abbildung 5.8). Abbildung 5.9 zeigt den deformierten Reaktordruckbehälter sowohl bei perfekter als auch geometrisch imperfekter Struktur bei einer Restwandstärke von 20% im engsten Querschnitt.

Kerbtiefe [%]	Versagensdruck [MPa]
0	59.76
8	59.32
9	59.20
10	59.16

Tabelle 5.1: Versagensdruck bei geometrischen Imperfektionen ($T=400^{\circ}\text{C}$)

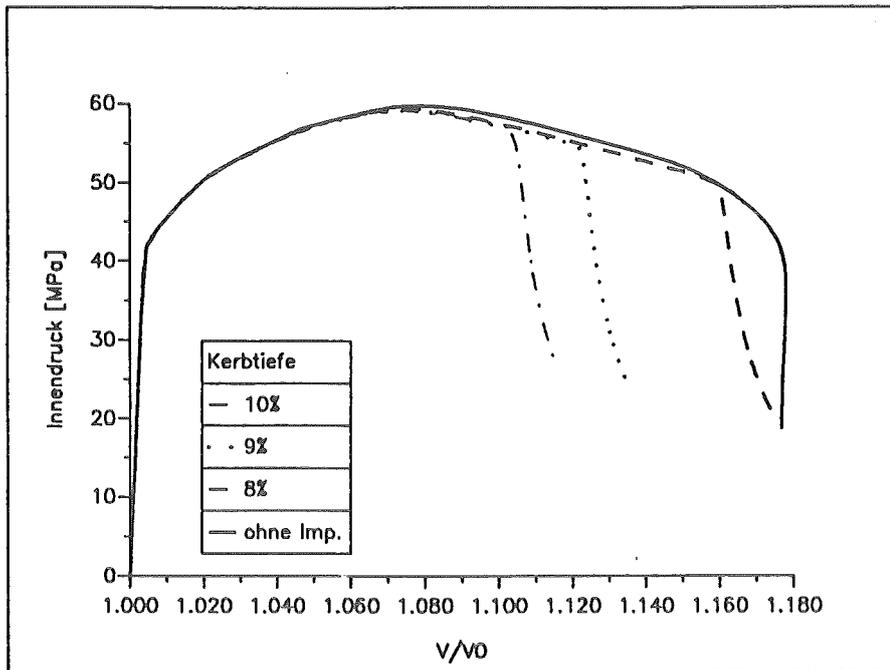


Abbildung 5.4: Innendruck in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen geometrischen Imperfektionen

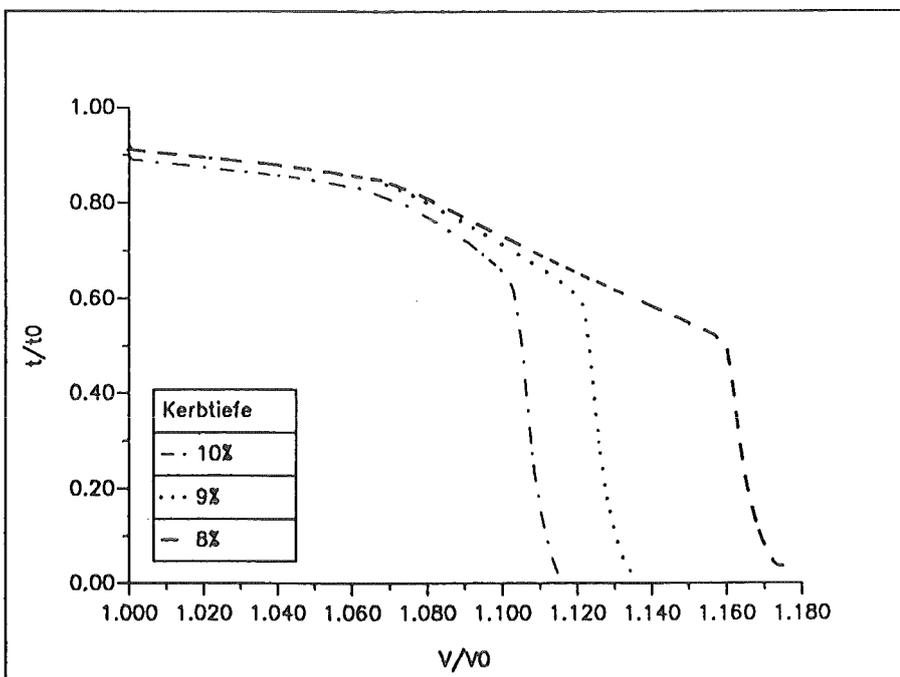


Abbildung 5.5: Wandstärkenverhältnis t/t_0 im Kerbgrund in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen geometrischen Imperfektionen

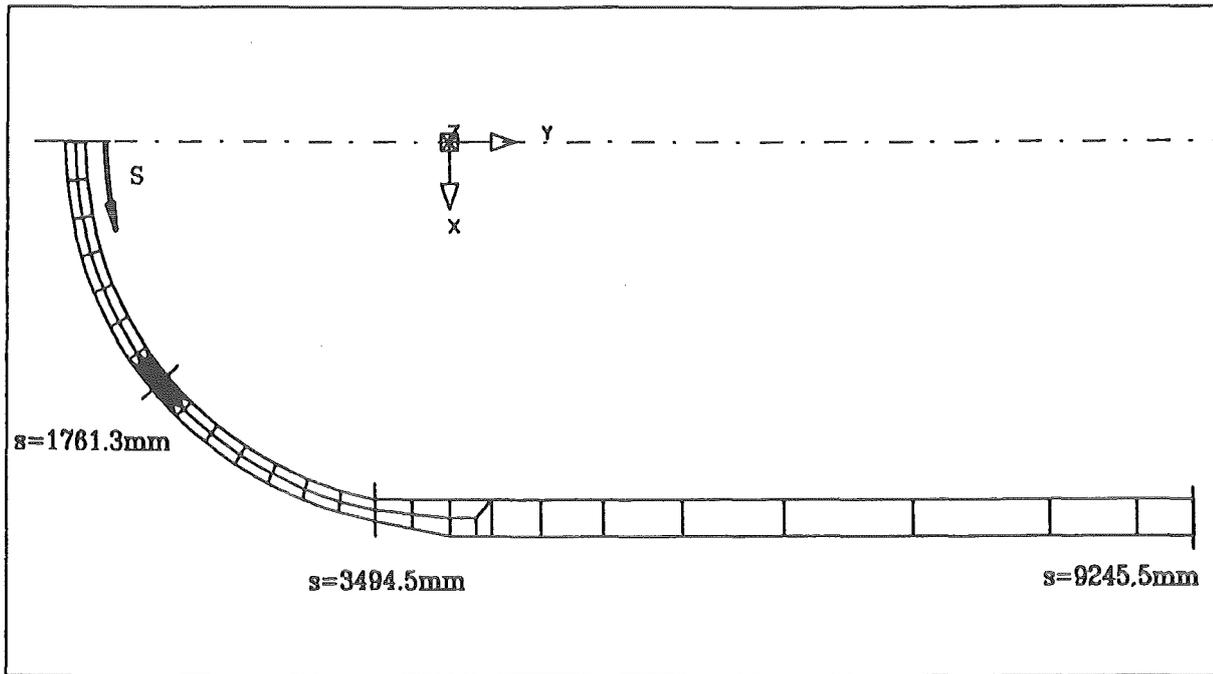


Abbildung 5.6: Laufrichtung der Bogenlänge s

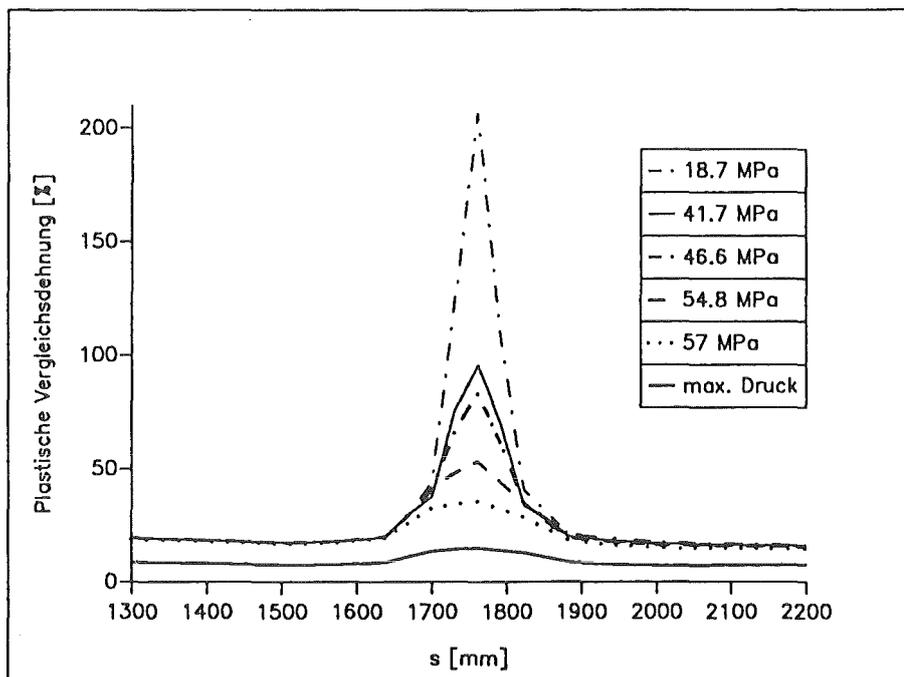


Abbildung 5.7: Plastische Vergleichsdehnung bei 10%-iger sinusförmiger Imperfektion für unterschiedliche Innendrucke

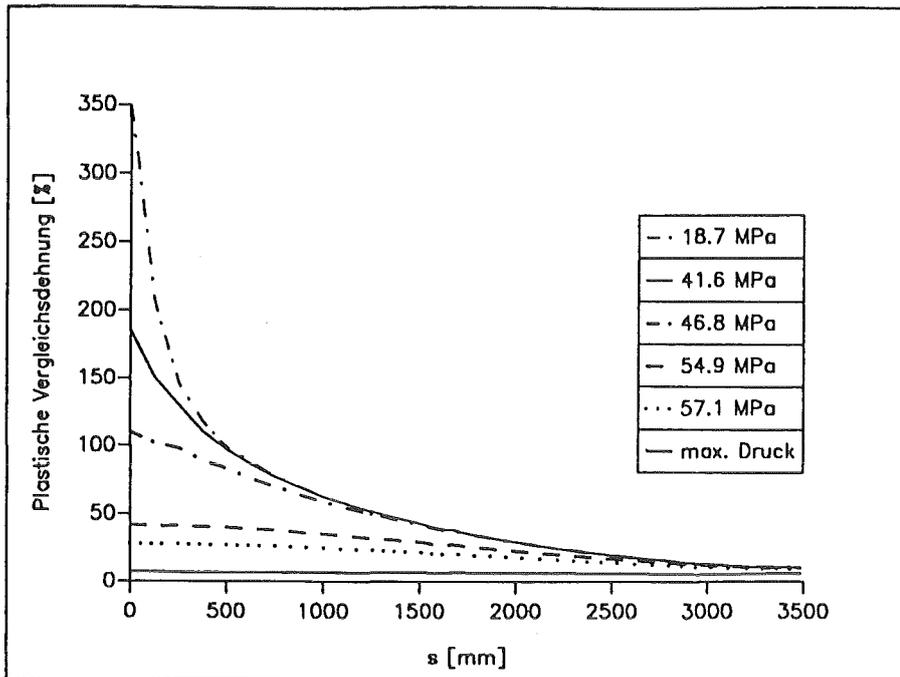


Abbildung 5.8: Plastische Vergleichsdehnung bei perfekter Geometrie für unterschiedliche Innendrucke

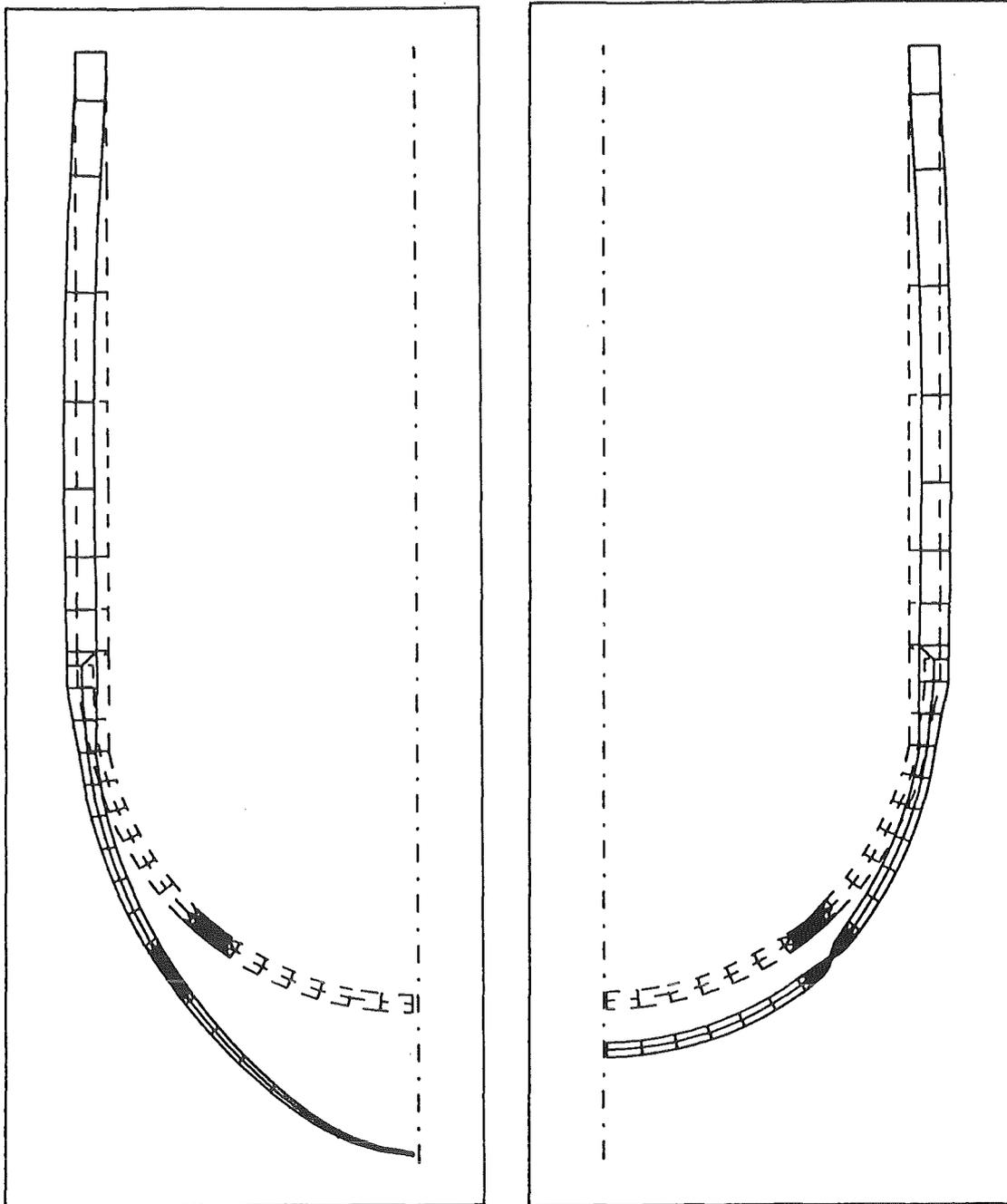


Abbildung 5.9: Deformierte Strukturen bei einer Restwandstärke von 20% im engsten Querschnitt; perfekte Geometrie $V/V_0=1.18$ (links)
10%-ige sinusförmige Imperfektion $V/V_0=1.11$ (rechts)

5.4 Einfluß thermischer Imperfektionen

Bei den 2D-Rechnungen wurden die Temperaturimperfektionen so gewählt, daß zwei Innennoten in dem feiner diskretisierten Bereich der Bodenkalotte mit einer erhöhten Temperatur beaufschlagt wurden. Die Ausgangstemperatur betrug auch hier 400°C .

Zunächst wurden lokale Temperaturerhöhungen von 75°C , 100°C und 125°C vorgegeben und eine entkoppelte, instationäre Wärmeausbreitungsrechnung durchgeführt. Die Außenseite des Reaktordruckbehälters wurde hierbei als adiabatisch aufgefaßt. Abbildung 5.10 zeigt die Temperaturverteilung nach 1000 Sekunden bei einer lokalen Temperaturerhöhung von 125°C .

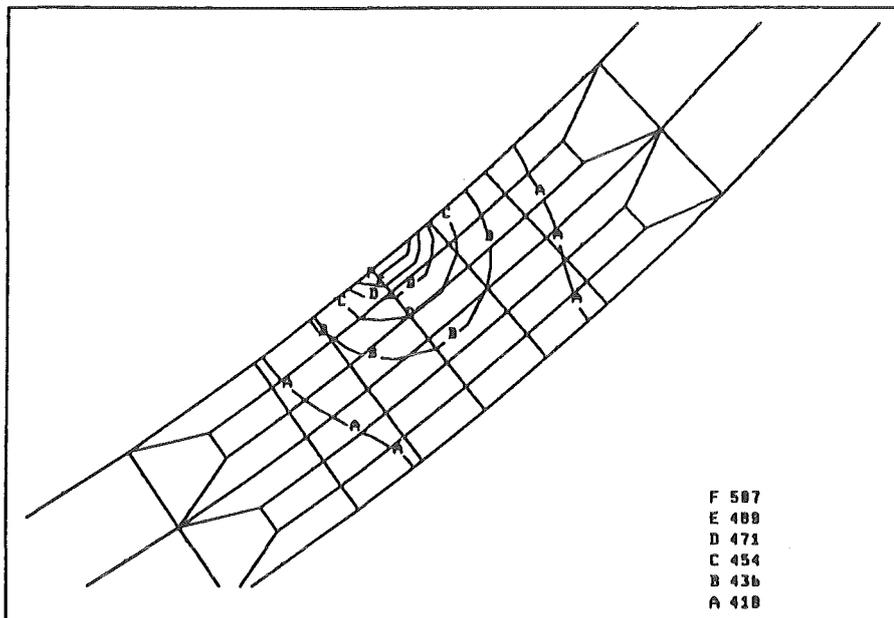


Abbildung 5.10: Temperaturverteilung nach 1000 Sekunden ($\Delta T = 125^{\circ}\text{C}$)

Verwendet man nun die jeweiligen Temperaturprofile, die sich nach 1000 Sekunden einstellen, als Grundlage für eine anschließende Spannungsanalyse, so stellt man fest, daß bei einer derartigen Imperfektion relativ hohe Temperaturdifferenzen notwendig sind, damit es zu einer Verformungslokalisierung und somit zu einer axialsymmetrischen Einschnürung im Bereich der Imperfektion kommt. Aus den Abbildungen 5.11 und 5.12 geht hervor, daß der Reaktordruckbehälter bei hohen Temperaturdifferenzen zwar bei einem geringeren Innenvolumen einschnürt, der Versagensdruck jedoch nur geringfügig sinkt (s. hierzu Tabelle 5.2). Eine Temperaturerhöhung von 75°C hat nach 1000 Sekunden noch keinen Einfluß, d.h. der Reaktordruckbehälter schnürt im Pol der Bodenkalotte ein.

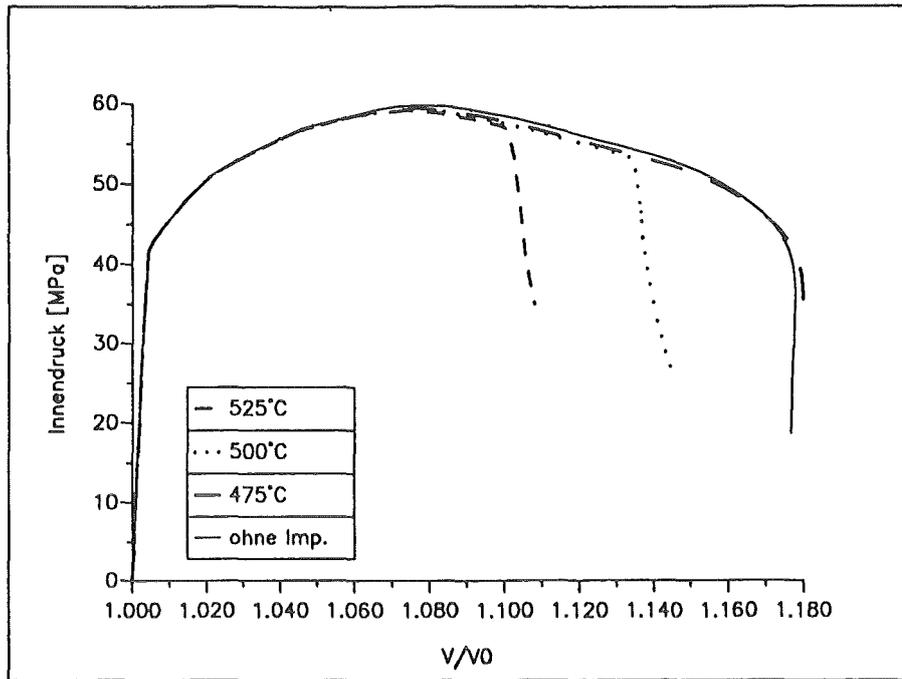


Abbildung 5.11: Innendruck in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen Temperaturdifferenzen ($t=1000$ s)

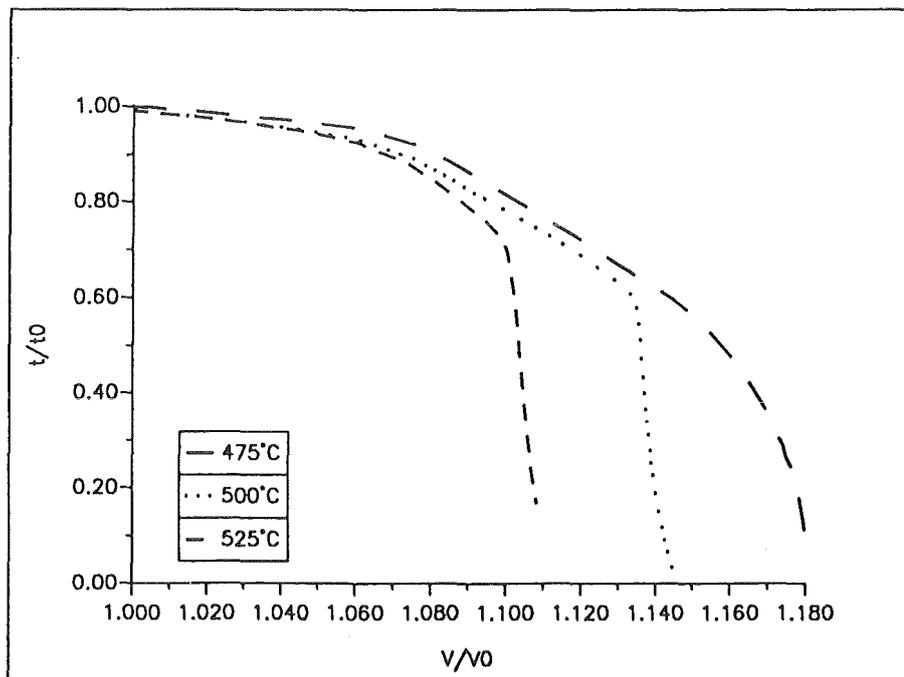


Abbildung 5.12: Wandstärkenverhältnis t/t_0 im engsten Querschnitt in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei unterschiedlichen Temperaturdifferenzen

ΔT [°C]	Versagensdruck [MPa]
75	59.42
100	59.29
125	59.16

Tabelle 5.2: Versagensdruck bei thermischen Imperfektionen nach 1000 Sekunden

Bei den weiteren Untersuchungen ging man nun von einer Temperaturdifferenz von 200°C aus. Die aus der instationären Wärmeausbreitungsrechnung resultierenden Temperaturverteilungen in radialer Richtung für unterschiedliche Zeitpunkte zeigt Abbildung 5.13. Da die Temperaturimperfection mit fortschreitender Zeit einen größeren Bereich einnimmt, tritt das Versagen erwartungsgemäß bereits bei einem geringeren Innenvolumen ein (Abbildungen 5.14 und 5.15). Die jeweiligen Versagensdrücke können der Tabelle 5.3 entnommen werden.

t [s]	Versagensdruck [MPa]
1000	58.22
5000	51.96
10000	49.08

Tabelle 5.3: Versagensdruck bei thermischen Imperfektionen (Temperaturdifferenz 200°C)

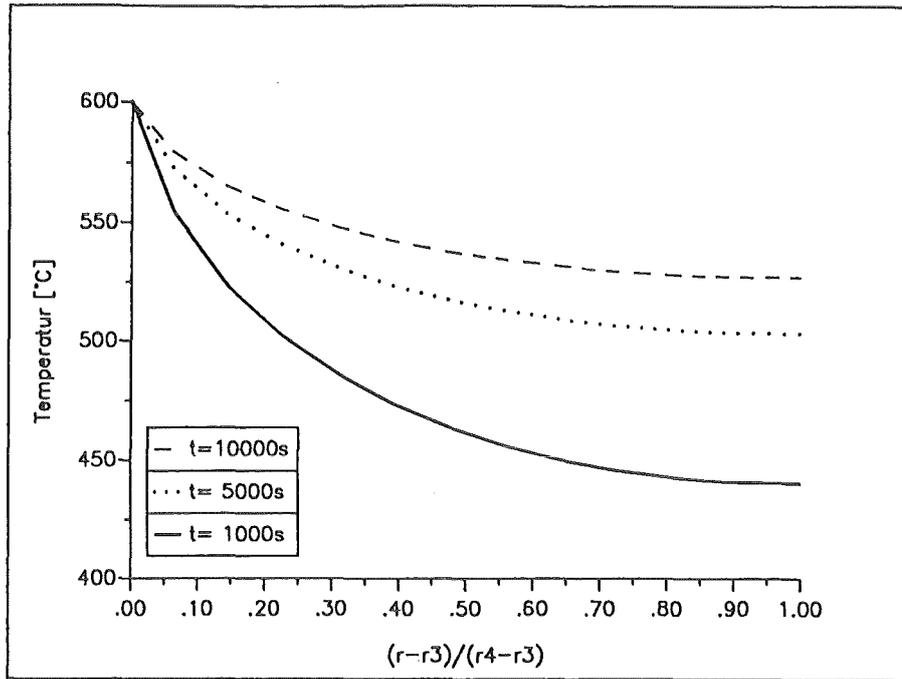


Abbildung 5.13: Temperaturverteilung in radialer Richtung ($\Delta T = 200^{\circ}\text{C}$)

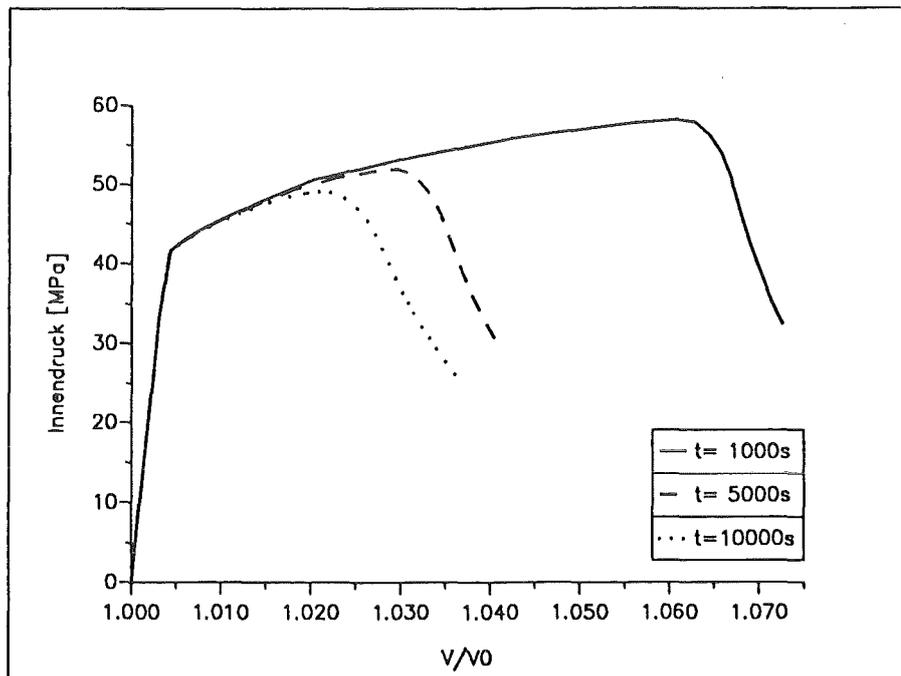


Abbildung 5.14: Innendruck in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei einer Temperaturdifferenz von 200°C

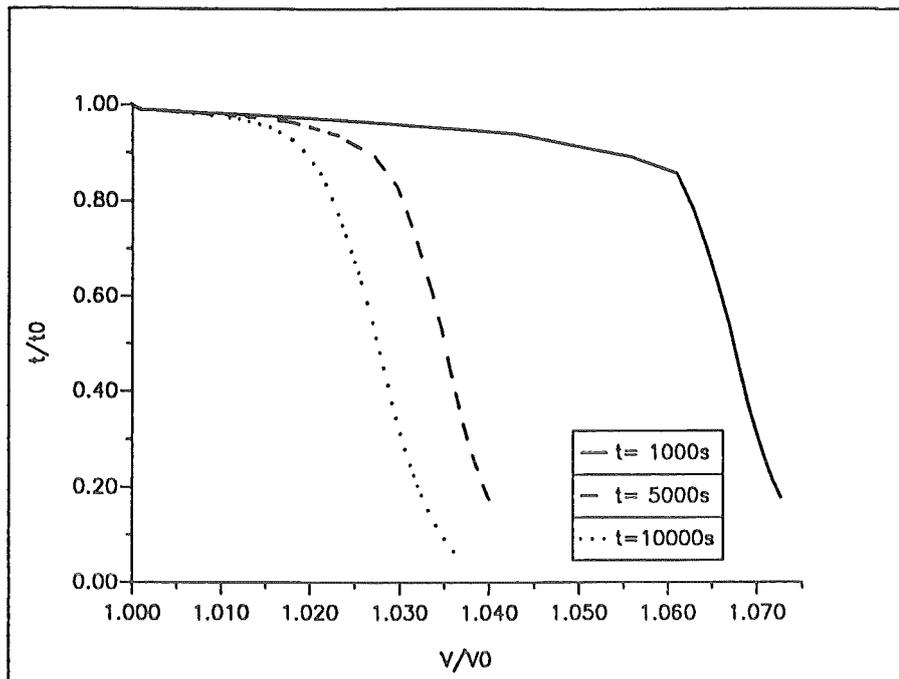


Abbildung 5.15: Wandstärkenverhältnis t/t_0 im engsten Querschnitt in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis V/V_0 bei einer Temperaturdifferenz von 200°C

5.5 3D-Rechnungen

Bei den folgenden 3D-Rechnungen wurden wiederum reine Tragfähigkeitsanalysen durchgeführt. In diesem Zusammenhang wurde jedoch lediglich der Versagensdruck, der sich bei einer bestimmten lokalen Temperaturimperfection (hot spot) einstellt, ermittelt.

Berücksichtigt man auch hier Symmetrieeigenschaften, so genügt es die Hälfte des Reaktordruckbehälters zu modellieren (s. Abbildung 5.16). Die Knoten der Schnittfläche F_1 wurden hierbei in Umfangsrichtung und die Knoten der Fläche F_2 in axialer Richtung festgehalten. Zusätzlich wurden noch die beiden verbleibenden translatorischen Freiheitsgrade der Knoten des Randes L_1 (siehe Abbildung 5.16) unterbunden. Bei der instationären Wärmeausbreitungsrechnung wurden DC3D20 und bei der Spannungsanalyse C3D20R Elemente verwendet. Beide Elementtypen besitzen 20 Knoten, wobei DC3D20 Elemente insgesamt 27 und C3D20R Elemente 8 Integrationspunkte aufweisen.

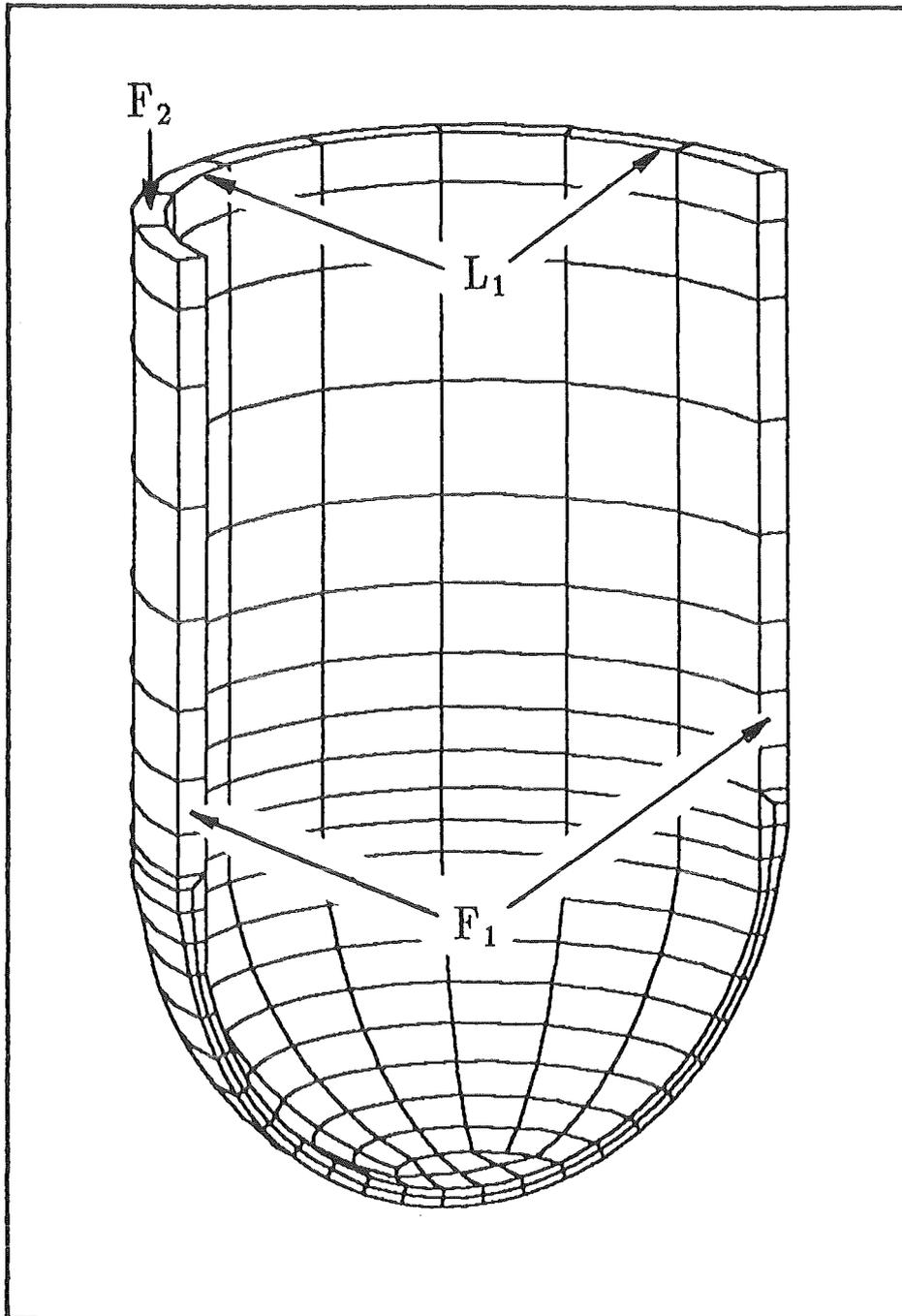


Abbildung 5.16: FE-Netz des Reaktordruckbehälters

Ausgehend von einer Anfangstemperatur von 400°C wurden zunächst drei Innenknoten im Bereich der Bodenkalotte mit einer Temperatur von 600°C beaufschlagt und eine instationäre Wärmeausbreitungsrechnung durchgeführt. Von Interesse für die anschließenden Spannungsanalysen waren die Temperaturverteilungen, die sich nach 1000 bzw. 10000 Sekunden einstellten. Abbildung 5.17 zeigt die Temperaturverteilung nach 10000 Sekunden.

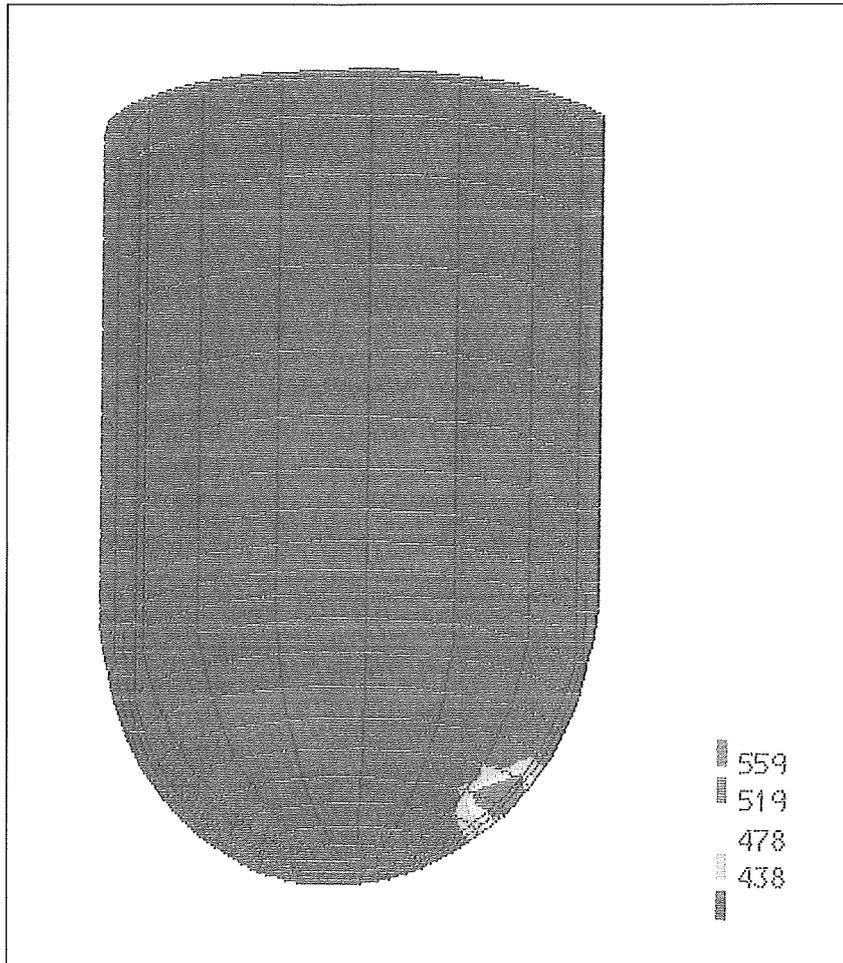


Abbildung 5.17: Hot spot nach 10000 Sekunden bei einer Temperaturbeaufschlagung von 600°C auf 3 Innenknoten

Infolge dieser lokalen Temperaturerhöhung kommt es nach Erreichen des maximal ertragbaren Innendrucks zu einer Verformungslokalisierung und somit zu einer Einschnürung in diesem Bereich. Abbildung 5.18 zeigt das nachkritische Verformungsverhalten des Reaktordruckbehälters sowie die maximale plastische Vergleichsdehnung $\bar{\epsilon}_{p,max}$ in Abhängigkeit vom Innendruck p für die in Abbildung 5.17 dargestellte Temperaturimperfection. Der maximal ertragbare Innendruck beträgt in diesem Fall 58.0 MPa, für die sich nach 1000 Sekunden einstellende Temperaturverteilung ergibt sich ein Versagensdruck von 59.3 MPa.

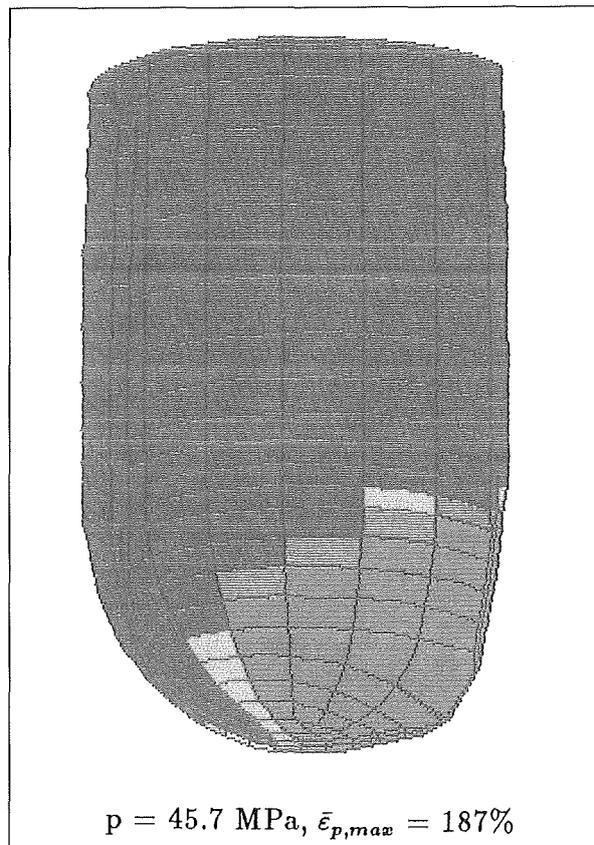
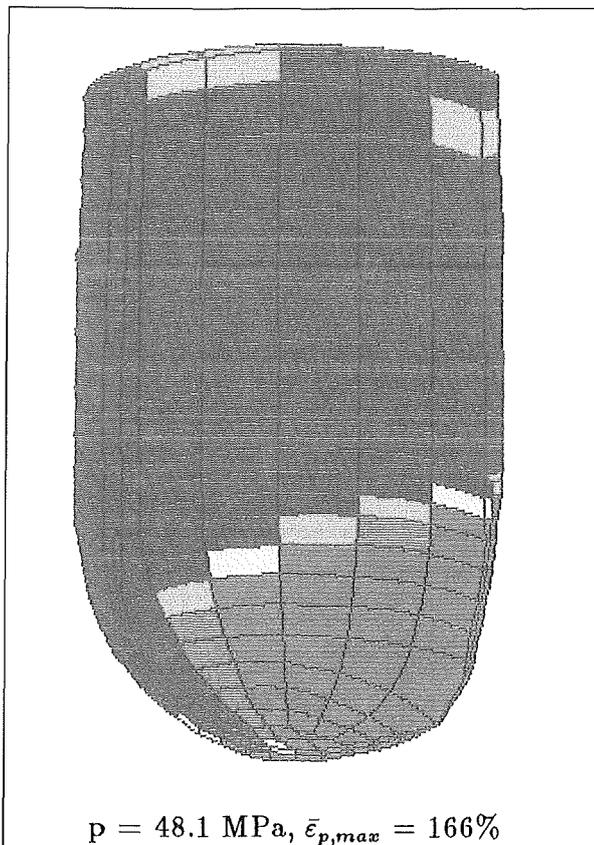
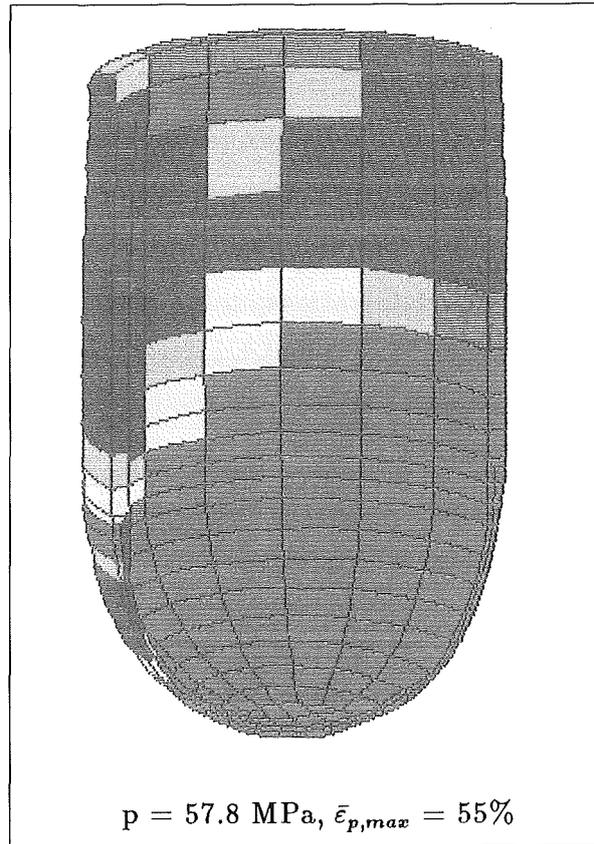
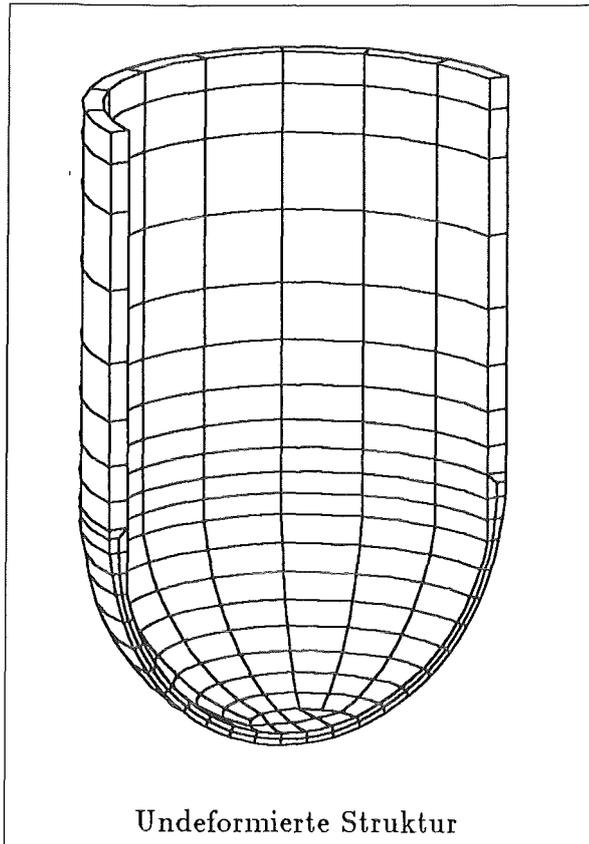


Abbildung 5.18: Nachkritisches Verformungsverhalten des Reaktordruckbehälters

Wie bereits bei den 2D-Rechnungen gezeigt, wandert auch hier, für eine hinreichend große Imperfektion, nach Erreichen des Versagensdrucks die plastisch beanspruchte Zone in Richtung Imperfektion, wobei die übrigen Bereiche eine Entlastung erfahren. Die roten Bereiche bedeuten, daß bei der entsprechenden Iteration an allen Integrationspunkten des Elements plastische Verformungen auftreten, während blau andeutet, daß momentan an keinem der im Element vorliegenden Integrationspunkte plastische Verformungen berechnet wurden. Anhand dieser Darstellungen kann lediglich gezeigt werden, welche Bereiche belastet bzw. entlastet werden, sie stellen somit kein Maß für die Größe der vorliegenden plastischen Verformung dar. Im Gegensatz zu den 2D-Rechnungen erkennt man, daß sich aufgrund der unsymmetrischen Belastung der Bereich in dem plastische Verformungen auftreten nicht mehr auf die unmittelbare Umgebung der Imperfektion beschränkt.

In einer weiteren FE-Rechnung wurde der hot spot nun vergrößert, indem insgesamt acht Knoten im Bereich der Bodenkalotte mit einer Temperatur von 600°C beaufschlagt wurden. Die sich nach 10000 Sekunden einstellende Temperaturverteilung zeigt Abbildung 5.19. Legt man nun diese Temperaturverteilung einer Spannungsanalyse zugrunde, reduziert sich der Versagensdruck auf 52.6 MPa. Somit wird deutlich, daß der maximal ertragbare Innendruck sowohl von der Temperaturverteilung in radialer Richtung, als auch von der Größe der Imperfektion abhängt. Tabelle 5.4 faßt noch einmal die aus den Rechnungen resultierenden Versagensdrücke zusammen.

Anzahl der Knoten	Zeit [s]	Versagensdruck [MPa]
3	1000	59.3
3	10000	58.0
8	10000	52.6

Tabelle 5.4: Versagensdruck bei unterschiedlichen thermischen Imperfektionen ($\Delta T = 200^\circ\text{C}$)

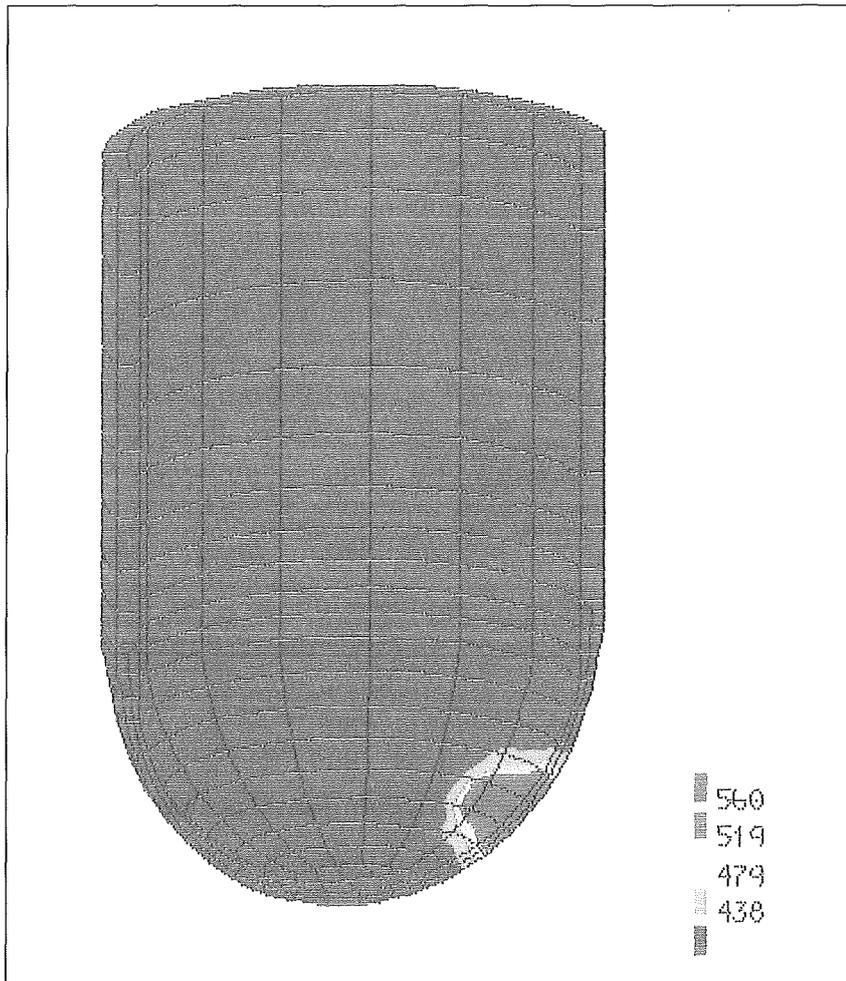


Abbildung 5.19: Hot spot nach 10000 Sekunden bei einer Temperaturbeaufschlagung von 600°C auf 8 Innenknoten

Kapitel 6

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente das Verformungsverhalten von Behältern unter Innendruck bei lokalen Temperaturüberhöhungen sowie bei geometrisch imperfekter Struktur untersucht und der maximal ertragbare Innendruck ermittelt. Ausgehend von einem Materialmodell der Thermoplastizität wurde Versagen durch plastische Instabilität berechnet. Bei den Berechnungen ging man von einem zeitunabhängigen Materialverhalten aus, d.h., daß z.B. Kriechvorgänge unberücksichtigt blieben. Desweiteren wurde die Wärmeausdehnung vernachlässigt.

Zunächst wurde anhand einer zylindrischen Zugprobe gezeigt, daß das Einschnürverhalten durch Vorgabe einer geometrischen bzw. thermischen Imperfektion simuliert werden kann. Die Materialparameter für das verwendete Materialmodell der Thermoplastizität basieren auf experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien in einem Temperaturbereich zwischen 23°C und 900°C und wurden so angepaßt, daß das Einschnürverhalten des Zugstabes gut wiedergegeben wurde. Ein Teil der Materialparameter konnte aus den Spannungs-Dehnungs-Kennlinien analytisch berechnet werden, während die übrigen Parameter durch Nachrechnen der einachsigen Zugversuche ermittelt wurden. Am Beispiel der Zugprobe wurde ferner deutlich, daß selbst kleinste Imperfektionen, trotz relativ grober Diskretisierung, eine Einschnürung bewirken. Das Einschnürverhalten hängt hierbei wesentlich von der Größe der vorgegebenen Imperfektion ab.

Im folgenden ging man zu komplizierteren Geometrien über. Sowohl bei einer Kugel unter Innendruck als auch beim Reaktordruckbehälter wurde gezeigt, daß eine ausreichend große geometrische bzw. thermische Imperfektion eine Verformungslokalisierung und somit eine Ein-

schnürung an dieser Stelle bewirkt. Bei größeren Imperfektionen tritt hierbei das Versagen bereits bei einem geringeren Innenvolumen ein.

Abschließend wurden für den Reaktordruckbehälter noch einige 3D-Rechnungen mit unterschiedlichen lokalen Temperaturüberhöhungen durchgeführt und der maximal ertragbare Innendruck ermittelt. Vergleicht man diese sogenannten hot spots mit entsprechenden axialsymmetrischen Temperaturimperfektionen, so stellt man fest, daß der maximal ertragbare Druck größer ist, da die aufgeprägte Temperaturimperfektion auf einen kleineren Bereich beschränkt ist. Insbesondere die 3D-Rechnungen haben gezeigt, daß unter Verwendung eines Materialmodells der Thermoplastizität mit einer relativ geringen Anzahl von Elementen in akzeptabler Rechenzeit (ca. 1 CPU-Stunde auf einen IBM 3090 Großrechner) eine Verformungslokalisierung erzielt werden kann, vorausgesetzt der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie wird in guter Näherung wiedergegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] B. Kuczera: *Innovative Trends in der Leichtwasserreaktor-Technik*, KfK-Nachrichten 4/93, Jahrgang 25, (S. 219-249), 1993.
- [2] R. de Boer: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*, Springer-Verlag, 1982.
- [3] Ch. Tsakmakis: *Vorlesungsumdruck Kontinuumsmechanik*, 1992 (unveröffentlicht).
- [4] R.W. Ogden: *Non-linear elastic deformations*, Ellis Horwood Limited. Halsted Press., 1984.
- [5] P.M. Naghdi: *Plasticity*, Proc. 2nd Symp. Naval Struct. Mech., (S. 121-169), Pergamon Press, 1960.
- [6] K.-J. Bathe: *Finite Element Methoden*, Springer Verlag, 1986.
- [7] O.C. Zienkiewicz: *The Finite Element Method*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1977
- [8] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.: *ABAQUS theory manual*, Version 5.2, 1992.
- [9] O. Bruhns, J. Mielniczuk: *Zur Theorie der Verzweigungen nicht-isothermer elastoplastischer Deformationen*, Ingenieur-Archiv 46, (S. 65-74), 1977.
- [10] J.W. Hutchinson, J.P. Miles: *Bifurcation Analysis of the Onset of Necking in an Elastic/Plastic Cylinder Under Uniaxial Tension*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 22, (S. 61-71), 1974.
- [11] A. Needleman: *A Numerical Study of Necking in Circular Cylindrical Bars*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 20, (S. 111-127), 1972.
- [12] W. Kuhn: *Ermittlung von Festigkeits- und Verformungskennwerten des Stahls 20 MnMoNi 55 bei Temperaturen zwischen 200°C und 900°C*, Studienarbeit am Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde der Universität Karlsruhe, 1991.

- [13] E. Riks: *The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability*, J. Appl. Mech., (S. 1060-1065), 1972.
- [14] Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS): *Deutsche Risikostudie Kernkraftwerke Phase B*, Verlag TÜV Rheinland, 1990.
- [15] Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS): *Untersuchungen von mechanischen Auswirkungen eines Kernschmelzunfalls auf den RDB und die umgebenden Gebäudeteile*, Beitrag zur deutschen Risikostudie Phase B - ND* Pfad, 1988.

Anhang

T [°C]	λ [W/m K]	c [J/kg K]	ρ [kg/m ³]
20	44.4	435	7850
200	43.2	500	7800
400	39.4	543	7730
600	33.0	600	7650
800	27.0	700	7600
1000	27.0	700	7500
1200	30.0	690	7350
1400	32.0	685	7200
1600	33.0	685	7100
2200	34.0	680	7000

Tabelle A.1: Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme und Dichte des Werkstoffs 20 MnMoNi 5 5 in Abhängigkeit von der Temperatur (aus [15])

Materialparameter zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens (*ELASTIC)

T [°C]	E [MPa]	ν []
23	194000.	0.3
200	205000.	0.3
300	175000.	0.3
400	165000.	0.3
500	150000.	0.3
600	136000.	0.3
700	130000.	0.3
800	60000.	0.3
900	16500.	0.3

Tabelle A.2: Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl in Abhängigkeit von der Temperatur

Materialparameter zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens (*PLASTIC)

23°C	
q [MPa]	$\bar{\epsilon}_p$ [%]
460.00	0.00
578.32	3.03
632.43	5.00
666.94	6.97
696.50	11.31
739.95	20.00
769.95	30.00
779.95	40.00
782.95	70.00

200°C	
q [MPa]	$\bar{\epsilon}_p$ [%]
400.00	0.00
493.93	1.69
554.33	3.35
603.97	5.50
622.59	8.54
648.43	15.00
653.93	70.00

300°C	
q [MPa]	$\bar{\epsilon}_p$ [%]
420.00	0.00
503.10	1.31
574.32	3.07
626.27	5.62
638.94	7.61
681.33	50.00

400°C	
q	$\bar{\epsilon}_p$
[MPa]	[%]
370.00	0.00
455.16	1.02
531.68	2.96
576.68	5.33
603.86	9.92
634.11	20.00
709.11	50.00
711.11	70.00

500°C	
q	$\bar{\epsilon}_p$
[MPa]	[%]
355.00	0.00
387.08	0.30
409.31	0.80
429.06	1.85
435.39	3.31
493.80	20.00
538.80	50.00
540.80	70.00

600°C	
q	$\bar{\epsilon}_p$
[MPa]	[%]
290.00	0.00
306.93	0.41
309.65	1.29
557.08	125.00
559.58	150.00

700°C	
q	$\bar{\epsilon}_p$
[MPa]	[%]
147.00	0.00
151.30	0.75
152.13	1.29
525.51	300.00

800°C	
q	$\bar{\epsilon}_p$
[MPa]	[%]
61.00	0.00
69.50	1.26
76.73	2.77
86.09	6.41
99.34	20.35
351.02	300.00

900°C	
q	$\bar{\epsilon}_p$
[MPa]	[%]
45.00	0.00
53.16	3.30
57.00	5.49
68.39	17.83
74.38	26.34
265.94	300.00

q : Radius der von Mises Fließfläche
 $\bar{\epsilon}_p$: Plastische Vergleichsdehnung