



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5527

Berechnung des Verformungs- verhaltens einer Mikrobiegevorrichtung

W. Jansohn, P. Piesch,
T. J. Reinke, Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Februar 1995

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5527

Berechnung des Verformungsverhaltens einer Mikrobiegevorrichtung

W. Jansohn

P. Piesch

T.J. Reinke

Ch. Tsakmakis

Institut für Materialforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Im vorliegenden Bericht wurde mittels des Finite-Elemente Programms ABAQUS das Verformungsverhalten einer mit dem LIGA-Verfahren gefertigten Mikro-Biegevorrichtung untersucht. Diese besteht aus einem Biegekörper, der mit einem Druckstift belastet wird. Die FE-Berechnungen bestätigten, daß die Euler-Bernoulli-Balkentheorie den Verformungsvorgang hinreichend genau charakterisiert. Im Kerbbereich des Biegekörpers ist jedoch eine Plastifizierung des Materials schon bei geringer Belastung und großen Ausrundungsradien festzustellen. Desweiteren konnte der Bewegungsablauf im Kontaktbereich Druckstift/Biegekörper beschrieben werden. Die Berechnungen zeigten einen geringen Einfluß der Reibung beim Kontakt beider Körper auf das Verformungsverhalten der Gesamtstruktur.

Analysis of deformation behaviour of a micro-bending-system

Abstract

In this report the deformation behaviour of a micro-bending-system manufactured by the LIGA technique was studied using the ABAQUS finite element code. The system consists of an elastic beam containing symmetrical notches at its clamped end and an elastic loading device of the same material. A pressure load is applied to the device which makes contact with the beam beginning at one point near its free end. Finite element calculations confirmed that Euler-Bernoulli beam theory characterizes the deformation process with sufficient accuracy. At the notches, the yield limit was reached even for small loads and large notch radii. The deformed configuration at the free end of the beam including the contact area between the beam and the loading device was studied in detail. The friction coefficient of the contact area turned out to have only a slight influence on the deformation behaviour of the total system.

Vorwort

Die Durchführung von Experimenten im Bereich der Mikrostrukturtechnik ist in der Regel sehr aufwendig und vor allem kostspielig. Aus diesem Grund ist beim Entwurf und der Herstellung von Mikrokonstruktionen die Anwendung möglichst genauer Berechnungsmethoden sehr wichtig. Mit Hilfe solcher Berechnungen kann die Anzahl der notwendigen Experimente zur endgültigen Auslegung von Bauteilen der Mikrostrukturtechnik erheblich reduziert werden. Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zur Auslegung einer Mikrobiegevorrichtung dar.

Da die vorliegende Problemstellung aufgrund des zu modellierenden Kontakts zweier Körper einen hohen Berechnungsaufwand beinhaltet, wurde ein zweidimensionales mechanisches Ersatzmodell entwickelt. Mit diesem wurde der Einfluß verschiedener Modellparameter untersucht. Die Richtigkeit der Modellierung wurde durch eine Berechnung eines dreidimensionalen Modells der Biegevorrichtung bestätigt.

Es zeigt sich, daß durch den Einsatz von Methoden der numerischen Mechanik das Verformungsverhalten einer Mikrostruktur besser verstanden werden kann.

Die Autoren dieses Berichtes möchten sich an dieser Stelle bei Herrn Dr. K. Feit und Herrn Dipl.-Phys. P. Ruther für das Zustandekommen dieser Arbeit bedanken.

Karlsruhe, Januar 1995

W. Jansohn, P. Piesch, T.J. Reinke, Ch. Tsakmakis

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	iii
1 Einleitung und Aufgabenstellung	1
2 Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode	4
3 Modellbildung der Mikrobiegevorrichtung	12
3.1 Mechanisches Ersatzmodell	12
3.2 FE-Modellierung	14
3.2.1 Auswahl der Elemente	14
3.2.2 Diskretisierung der einzelnen Komponenten	16
3.3 Kontaktdefinition in <i>ABAQUS</i>	20
4 Berechnungsergebnisse	23
4.1 Analytische Beschreibung der Balkendeformation	23
4.1.1 Schubstarrer Balken	25
4.1.2 Schubweicher Balken	27
4.1.3 Vergleich mit numerisch ermittelten Verschiebungswerten	28
4.2 Variation der Modellparameter	28
4.2.1 Einfluß der Geometrie	30
4.2.2 Einfluß der Materialparameter	35
4.2.3 Einfluß der Belastung	37
4.2.4 Einfluß der Reibung	38

4.2.5	Abschließende Betrachtungen	39
4.3	Beschreibung der Kontaktstelle	42
4.4	Spannungsverhältnisse an der Kerbstelle	44
4.5	Diskussion der FE-Rechnungen mit dreidimensionaler Netzstruktur	48
5	Zusammenfassung	51
	Literaturverzeichnis	53
	Anhang	55
	A	55
	B	60

Bezeichnungen

Tensoren erster und zweiter Stufe werden in Fettdruck dargestellt, Tensoren vierter Stufe werden zusätzlich noch durch kalligrafische Buchstaben gekennzeichnet. Gleichungen in Indexschreibweise unterliegen der Einstein'schen Summationskonvention. Die verwendeten Rechenregeln können der Literatur [4] entnommen werden.

$()^{-1}$	Inverse von $()$
$()^T$	Transponierte von $()$
<i>GRAD</i>	Gradient-Operator (bezüglich der Referenzkonfiguration)
<i>grad</i>	Gradient-Operator (bezüglich der Momentankonfiguration)
$\underline{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\mathbf{A} \mathbf{B}$	Multiplikative Verknüpfung zweier Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	dyadisches Produkt zweier Tensoren
<i>sp</i> \mathbf{A}	Spur von \mathbf{A}
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = Sp \mathbf{A} \mathbf{B}^T$	Skalarprodukt zweier Tensoren gleicher Stufe
\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration
\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
\mathbf{E}	Green'scher Verzerrungstensor
\mathbf{T}	Cauchy'scher Spannungstensor
\mathbf{S}	Gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor

$\tilde{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
\mathcal{C}	Isotroper Tensor vierter Stufe des Elastizitätsgesetzes bezüglich der Momentankonfiguration
$\tilde{\mathcal{C}}$	Isotroper Tensor vierter Stufe des Elastizitätsgesetzes bezüglich der Referenzkonfiguration
\mathbf{f}	Volumenkraftvektor
\mathbf{t}	Oberflächenkraftvektor
\mathcal{I}	Einheitstensor vierter Stufe
$\mathcal{K}[\mathbf{A}] = \mathcal{K}_{ijmn} A_{mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	

Indizes

Für eine indizierte Größe ${}^d\mathbf{A}_b^c$ kennzeichnet

- a die Konfiguration C^a , bzgl. deren die Größe \mathbf{A} dargestellt ist, und
- b den Iterationsindex.
- Falls \mathbf{A} eine Kraft darstellt, dann kennzeichnet c die Konfiguration C^c in der die Größe \mathbf{A} wirkt und d entfällt.
- Falls \mathbf{A} einen Verschiebungsvektor darstellt, kennzeichnen c und d eine Verschiebung aus Konfiguration C^d nach Konfiguration C^c
- Aus dem Verschiebungsvektor abgeleitete Größen werden in gleicher Weise indiziert.

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

Zur Herstellung von Mikrostrukturen wurde am Institut für Mikrosystemtechnik (IMT) im Kernforschungszentrum Karlsruhe das LIGA-Verfahren (RöntgentiefenLithographie, Galvanoformung, KunststoffAbformung) entwickelt. Dieses Verfahren ermöglicht die Fertigung von Bauteilen mit Strukturhöhen von mehreren hundert Mikrometern bei kleinsten lateralen Abmessungen bis zu einem Mikrometer [1, 2]. Die mechanischen Eigenschaften dieser Mikrobauteile und -systeme lassen sich nicht ohne weiteres mit den aus der "Makrowelt" bekannten Methoden und Gesetzmäßigkeiten bestimmen. So stoßen auch die bewährten Konzepte der Kontinuumsmechanik im Mikrobereich auf ihre Gültigkeitsgrenzen [3]. Je kleiner die Abmessungen der Bauteile sind, um so näher kommt man in den Dimensionsbereich der Gefügestruktur. Einflüsse durch Anisotropie und Inhomogenität erschweren eine Beschreibung des Materialverhaltens durch Stoffgesetze. Für die Konstruktion von Mikrostrukturbauteilen ist es jedoch erforderlich, verlässliche Materialkennwerte zu bestimmen, um eine sinnvolle Dimensionierung durchführen zu können.

Am Institut für Mikrostrukturtechnik (IMT) wurde die in Abb. 1.1 dargestellte Mikrobiegevorrichtung, bestehend aus Aktor, Biegekörper und Sensor, entworfen und mit Hilfe des LIGA-Verfahrens gefertigt. Im Aktor ist ein horizontal verschiebbarer Druckstift gelagert, der durch Druckbeaufschlagung mittels Kompressionsmedium (Gas oder Flüssigkeit) eine Belastungskraft auf den Biegekörper überträgt. Als Biegekörper wird ein Balken verwendet, welcher an einem Ende klotzförmig ausgebildet ist (siehe Abb. 1.2). Die Befestigung erfolgt an der Unterseite des Klotzes mit dem Substrat. Bei Druckbeaufschlagung am Druckstift wird die erzeugte Auslenkung des Biegekörperbalkens (siehe Abb. 1.2) durch den Sensor optisch erfasst.

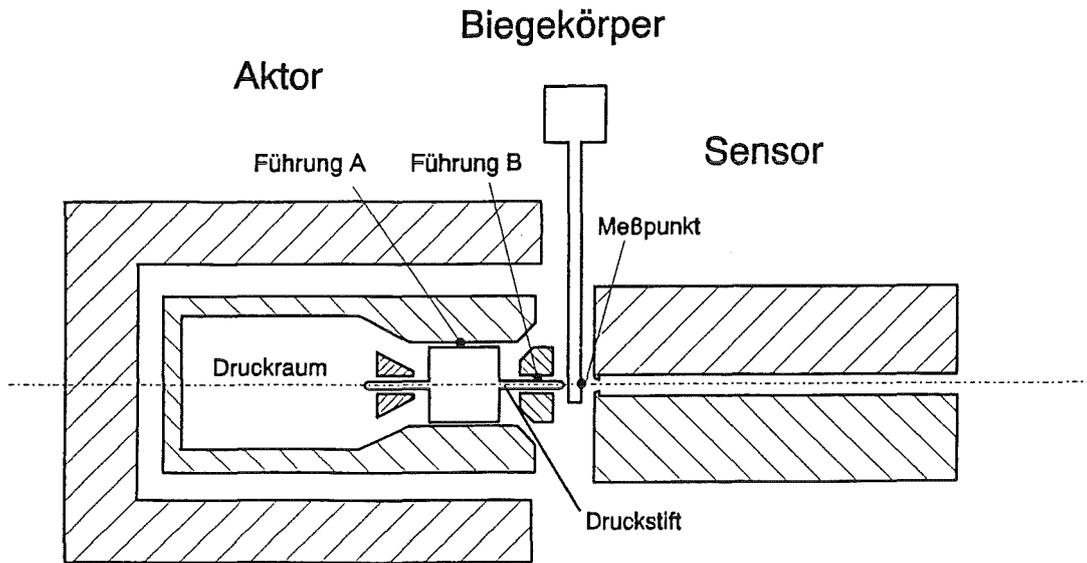


Abbildung 1.1: Aufbau der Mikrobiegevorrichtung

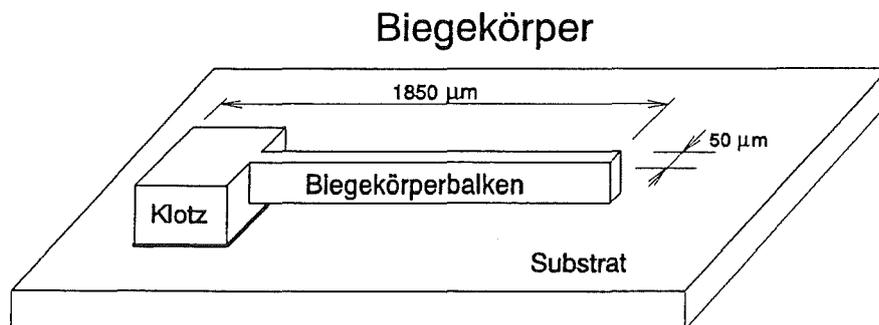


Abbildung 1.2: Biegekörper der Mikrobiegevorrichtung mit Biegekörperbalken und Klotz

Im Rahmen dieser Arbeit soll das Verformungsverhalten der Mikrobiegevorrichtung anhand eines mechanischen Ersatzmodells mittels der Finite-Elemente-Methode numerisch simuliert werden.

Zur Modellbildung der Mikrobiegevorrichtung wird im Anschluß an eine theoretische Betrachtung der mittels Finite-Elemente-Methode zu lösenden Gleichungen ein zweidimensionales und dreidimensionales mechanisches Ersatzmodell vorgestellt. Für das zweidimensionale Ersatzmodell wird ein optimiertes Finite-Elemente-Netz erstellt und die Kontaktdefinition des verwendeten Finite-Elemente-Programms *ABAQUS* erläutert. Das Verformungsverhalten des Biegekörperbalkens wird sowohl analytisch als auch numerisch bestimmt, und die gewonnenen

Ergebnisse werden miteinander verglichen.

Desweiteren wird für das zweidimensionale Ersatzmodell der Einfluß der Druckbeaufschlagung des Druckstiftes und der Reibung sowie die Auswirkung verschiedener Modellparameter wie Geometrie und Materialeigenschaften auf die Verschiebung des Meßpunktes am Biegekörperbalcken untersucht. Weiterhin beinhaltet die Arbeit eine Beschreibung der im Kontaktbereich Biegekörper/Druckstift ablaufenden Bewegungsvorgänge und eine Untersuchung der Spannungsverläufe im Kerbbereich des Biegekörpers.

Zur Ergänzung der mit dem zweidimensionalen Modell gewonnenen Ergebnisse und zur Bewertung der hierfür getroffenen Näherungen werden abschließend Finite-Elemente-Rechnungen mit dem dreidimensionalen Modell diskutiert.

Alle Berechnungen wurden mit dem Finite-Elemente-Programm *ABAQUS* der Version 4.9 und der Version 5.3 durchgeführt. Dabei wurde ein linear-elastisches Materialverhalten zugrundegelegt.

Kapitel 2

Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen muß zu jedem Zeitpunkt der Deformation eines Körpers erfüllt sein. In der Finite-Elemente-Methode wird, ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtszustand zur Zeit t und bekannten Randbedingungen zur Zeit $t + \Delta t$, ein Gleichgewichtszustand zur Zeit $t + \Delta t$ gesucht. In dynamischen Berechnungen sowie im Falle einer Geschwindigkeitsabhängigkeit des Stoffgesetzes ist die Zeit als physikalische Größe gegeben, andernfalls wird eine dimensionslose Zeit eingeführt [7]. Somit kann in einer Berechnung die äußere Belastung inkrementell erhöht werden (Schritte t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, etc). Obwohl die Randbedingungen innerhalb eines Inkrements konstant sind, können die äußeren Lasten t und f sich im Inkrement ändern (Bsp.: Oberflächenkraft infolge Druckbelastung, Zentrifugalkräfte). Muß in einer Berechnung geometrische oder materielle Nichtlinearität berücksichtigt werden, so kann der Gleichgewichtszustand zur Zeit $t + \Delta t$ nur iterativ bestimmt werden. Aufgrund seiner quadratischen Konvergenz wird das Newton-Verfahren in den meisten Anwendungen bevorzugt. Es ist daher nötig, das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu linearisieren.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen kann für den Zeitpunkt t bzgl. der Ausgangskonfiguration

$$\int_{A^0} {}_0\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u}^t dA^0 + \int_{V^0} {}_0\mathbf{f}^t \cdot \delta\mathbf{u}^t dV^0 = \int_{V^0} {}_0\tilde{\mathbf{T}}^t \cdot \delta {}_0\mathbf{E}^t dV^0 \quad (2.1)$$

oder der Momentankonfiguration

$$\int_{A^t} {}_t\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u}^t dA^t + \int_{V^t} {}_t\mathbf{f}^t \cdot \delta\mathbf{u}^t dV^t = \int_{V^t} \mathbf{T}^t \cdot \text{sym} \left[\frac{\partial \delta\mathbf{u}^t}{\partial \mathbf{x}^t} \right] dV^t \quad (2.2)$$

formuliert werden.

Startwert der Integration: ${}^0u_0^{t+\Delta t} = {}^0u^t$

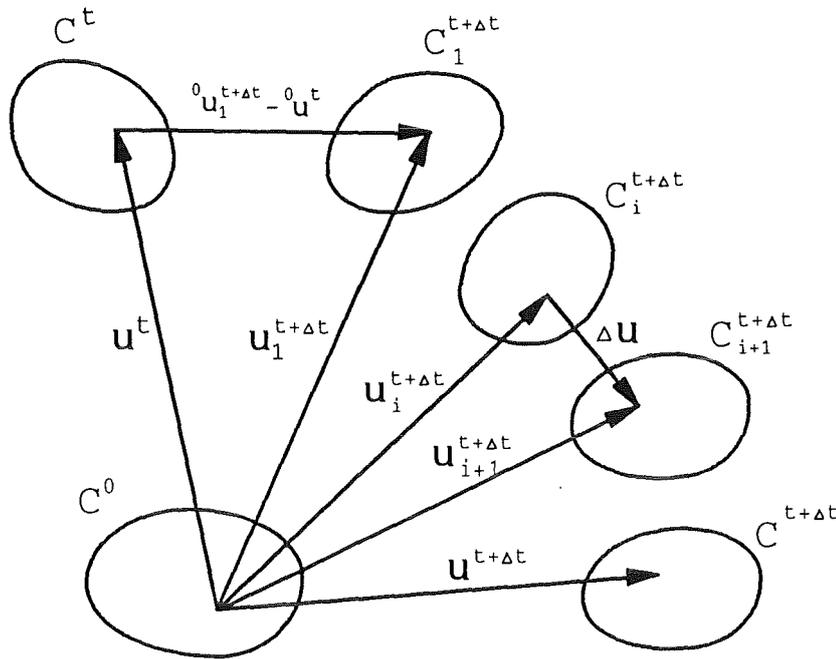


Abbildung 2.1: Konfigurationen der FE-Methode

Zur Herleitung der Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode werden fünf Konfigurationen betrachtet (siehe Abbildung 2.1):

- die Ausgangskonfiguration C^0
- die letzte Gleichgewichtskonfiguration C^t
- die zuletzt iterierte Nichtgleichgewichtskonfiguration $C_i^{t+\Delta t}$
- die Nichtgleichgewichtskonfiguration $C_{i+1}^{t+\Delta t}$
- die gesuchte Gleichgewichtskonfiguration $C^{t+\Delta t}$.

Mit den oben genannten Gleichgewichtskonfigurationen lautet das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ bzgl. der Ausgangskonfiguration C^0

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\mathcal{G}_{0 \leq \bar{t} \leq t+\Delta t} (\mathbf{u}(\bar{t})), \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right) := & - \int_{A^0} {}^0t^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^0 - \int_{V^0} {}^0f^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^0 \\ & + \int_{V^0} {}^0\tilde{\mathbf{T}}^{t+\Delta t} \cdot \delta_0 \mathbf{E}^{t+\Delta t} dV^0 = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

bzgl. der letzten Gleichgewichtskonfiguration C^t

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\mathcal{G}_{0 \leq \bar{t} \leq t+\Delta t} (\mathbf{u}(\bar{t})), \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right) = & - \int_{A^t} {}_t \mathbf{t}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^t - \int_{V^t} {}_t \mathbf{f}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^t \\ & + \int_{V^0} {}_t \tilde{\mathbf{T}}^{t+\Delta t} \cdot \delta {}_t \mathbf{E}^{t+\Delta t} dV^t = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

sowie bzgl. der gesuchten Gleichgewichtskonfiguration $C^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\mathcal{G}_{0 \leq \bar{t} \leq t+\Delta t} (\mathbf{u}(\bar{t})), \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right) = & - \int_{A^{t+\Delta t}} {}_{t+\Delta t} \mathbf{t}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^{t+\Delta t} \\ & - \int_{V^{t+\Delta t}} {}_{t+\Delta t} \mathbf{f}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} \\ & + \int_{V^{t+\Delta t}} \mathbf{T}^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} \left[\frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}} \right] dV^{t+\Delta t} = 0 . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei bedeutet $\mathcal{F}(\cdot)$ ein Ortsfunktional während das Funktional $\mathcal{G}(\cdot)$ die Geschichtsabhängigkeit des Stoffgesetzes darstellt. Für elastische Materialien reduziert sich $\mathcal{G}(\cdot)$ auf eine Funktion.

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\rho^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} = \rho^0 dV^0 \quad \Leftrightarrow \quad dV^0 = (\det {}^0 \mathbf{F}^{t+\Delta t}) dV^{t+\Delta t} , \quad (2.6)$$

den Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{t+\Delta t} &= \frac{\rho^{t+\Delta t}}{\rho^0} \mathbf{S}^{t+\Delta t} = (\det {}^0 \mathbf{F}^{t+\Delta t})^{-1} \mathbf{S}^{t+\Delta t} \\ {}_{t+\Delta t} \mathbf{t} dA^{t+\Delta t} &= {}_0 \mathbf{t} dA^0 \\ {}_{t+\Delta t} \mathbf{f} dV^{t+\Delta t} &= {}_0 \mathbf{f} dV^0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

und der Definition

$$\text{sym}[\delta \mathbf{h}] := \text{sym} \left[\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \text{sym}[\text{grad } \delta \mathbf{u}] \quad (2.8)$$

kann Gleichung (2.5) wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\mathcal{G}_{0 \leq \bar{t} \leq t+\Delta t} (\mathbf{u}(\bar{t})), \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right) = & \int_{V^0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{h}^{t+\Delta t} dV^0 \\ & - \int_{A^0} {}_0 \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^0 - \int_{V^0} {}_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^0 = 0 . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Gesucht ist diejenige Verschiebung \mathbf{u} , für die das Funktional \mathcal{F} unter den gegebenen Randbedingungen zur Zeit $t + \Delta t$ verschwindet.

Ist der Zustand zur Zeit t bekannt, wird für das Stoffgesetz angenommen, daß für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{t+\Delta t} &= \mathbf{S}^t + \bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\bar{\mathbf{S}}}({}^0\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \quad , \\ \bar{\mathbf{u}} &:= {}^0\mathbf{u}^{t+\Delta t} - {}^0\mathbf{u}^t \end{aligned}$$

gilt, wobei $\bar{\mathbf{S}}(\cdot)$ und $\bar{\bar{\mathbf{S}}}(\cdot)$ tensorwertige Funktionen repräsentieren. Damit reduziert sich Gleichung (2.9) zu einem Ortsfunktional Γ ,

$$\Gamma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}^{t+\Delta t}} = 0 \quad (2.10)$$

Zur Ermittlung der gesuchten Verschiebung ist (2.10) mittels Newton-Verfahren zu lösen. Die Verschiebung der zuletzt ermittelten Gleichgewichtskonfiguration C^t stellt den Startwert des Newton-Verfahrens dar.

Ausgehend von einer Verschiebung ${}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}$ liefert das Newton-Verfahren eine verbesserte Lösung ${}^0\mathbf{u}_{i+1}^{t+\Delta t}$. Die Verfahrensvorschrift lautet:

$$\begin{aligned} -\Gamma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} &= D\Gamma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta\mathbf{u}] \quad ; \\ \text{mit } \Delta\mathbf{u} &:= {}^0\mathbf{u}_{i+1}^{t+\Delta t} - {}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t} \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Der Algorithmus wird abgebrochen, wenn das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bis auf eine vorgegebene Genauigkeit TOL erfüllt ist, d. h. wenn

$$\left| \Gamma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} \right| \leq \text{TOL} \quad (2.12)$$

gilt.

Da das Newton-Verfahren lediglich lokal konvergent ist, muß eine maximal zulässige Iterationsanzahl festgelegt werden. Wird diese überschritten, muß das Inkrement Δt verkleinert werden. Man erkennt aus Gleichung (2.11), daß das Newton-Verfahren die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen bzgl. \mathbf{u} enthält, die im folgenden bestimmt werden :

$$\begin{aligned} &D\Gamma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta\mathbf{u}] \\ &= D \left\{ \int_{V^0} \mathbf{S}^{t+\Delta t} \cdot \delta\mathbf{h}^{t+\Delta t} dV^0 - \int_{V^0} {}^0\mathbf{f}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^0 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{A^0} \left. {}_0\mathbf{t}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^0 \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \\
= & \int_{V^0} D \left\{ \mathbf{S}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{h}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] dV^0 \\
& - \int_{V^0} D \left\{ {}_0\mathbf{f}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] dV^0 \\
& - \int_{A^0} D \left\{ {}_0\mathbf{t}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] dA^0 \\
=: & \int_{V^0} A dV^0 - \int_{V^0} B dV^0 - \int_{A^0} C dA^0 \quad . \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Mit den im Anhang A angegebenen Umrechnungen für die Terme A , B , C und den Definitionen

$$\begin{aligned}
{}_{t+\Delta t}\mathbf{c}_i^{t+\Delta t} & := (\det {}_0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t}) \mathbf{c} \\
J & := \frac{dV^{t+\Delta t}}{dV^0} & J_i & := \frac{dV_i^{t+\Delta t}}{dV^0} \\
A_r & := \frac{dA^{t+\Delta t}}{dA^0} & A_{r_i} & := \frac{dA_i^{t+\Delta t}}{dA^0} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

ergibt sich eine mit in [4] übereinstimmende Formulierung für die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebung

$$\begin{aligned}
& \int_{V^0} A dV^0 - \int_{V^0} B dV^0 - \int_{A^0} C dA^0 = \\
& = \int_{V^0} \mathbf{c} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \text{sym} [\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] dV^0 + \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} [\bar{\mathbf{h}}_i^{-T} \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] dV^0 \\
& - \int_{V^0} D \left\{ {}_{t+\Delta t}\mathbf{f}_i^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot J_i \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^0 \\
& - \int_{V^0} {}_{t+\Delta t}\mathbf{f}_i^{t+\Delta t} D \{J\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^0 \\
& - \int_{A^0} D \left\{ {}_{t+\Delta t}\mathbf{t}_i^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot A_{r_i} \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^0 \\
& - \int_{A^0} {}_{t+\Delta t}\mathbf{t}_i^{t+\Delta t} D \{A_r\} \Big|_{\mathbf{u}=0, \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_i^{t+\Delta t}} \mathbf{C}_i^{t+\Delta t} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \text{sym} [\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] dV_i^{t+\Delta t} \\
&\quad + \int_{V_i^{t+\Delta t}} \mathbf{T}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} [\bar{\mathbf{h}}_i^{-T} \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] dV_i^{t+\Delta t} \\
&\quad - \int_{V_i^{t+\Delta t}} D \left\{ {}_{t+\Delta t} \mathbf{f}_i^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV_i^{t+\Delta t} \\
&\quad - \int_{V_i^{t+\Delta t}} {}_{t+\Delta t} \mathbf{f}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} D \{J\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \frac{1}{J} dV_i^{t+\Delta t} \\
&\quad - \int_{A_i^{t+\Delta t}} D \left\{ {}_{t+\Delta t} \mathbf{t}_i^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA_i^{t+\Delta t} \\
&\quad - \int_{A_i^{t+\Delta t}} {}_{t+\Delta t} \mathbf{t}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} D \{dA_r\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \frac{1}{A_r} dA_i^{t+\Delta t} . \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Die letzten vier Terme treten lediglich bei deformationsabhängigen Lasten auf. Dieser Fall ist in den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

Der Zusammenhang mit der Formulierung nach [5] ist im Anhang B dargestellt.

Für deformationsunabhängige Lasten ergibt sich die Verfahrensvorschrift des Newton-Verfahrens zu

$$\begin{aligned}
& - \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} dV^0 + \int_{A^0} {}_0 \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dA^0 + \int_{V^0} {}_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} dV^0 = \quad (2.16) \\
&= \int_{V^0} \mathbf{C} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \text{sym} (\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}) dV^0 + \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} (\bar{\mathbf{h}}_i^{-T} \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}) dV^0 .
\end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, daß das Skalarprodukt eines symmetrischen mit einem antisymmetrischen Tensor verschwindet. Da die äußeren Kräfte innerhalb eines Inkrements unveränderlich sind, weisen sie in Gleichung (2.16) keinen Iterationsindex mehr auf. Durch Diskretisierung des Verschiebungsfeldes erhält man einen Satz von algebraischen Gleichungen, die sogenannten Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode. Die Verschiebungen und die von diesen abgeleiteten Größen in diskretisierter Form sind mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{N}_a u^a \\
\delta \mathbf{u} &= \delta \mathbf{N}_a u^a \\
\Delta \mathbf{u} &= {}^0 \mathbf{u}_{i+1}^{t+\Delta t} - {}^0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{N}_b \left({}^0 u_{i+1}^{b,t+\Delta t} - {}^0 u_i^{b,t+\Delta t} \right) = \mathbf{N}_b \Delta u^b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i &= \text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_b \Delta u^b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) = \text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \Delta u^b \\
\text{sym } \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} &= \text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \delta u_a \\
\text{sym} \left(\bar{\mathbf{h}}_i^T \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} \right) &= \text{sym} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \Delta u^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \delta u_a \right) \\
&= \delta u_a \text{sym} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \Delta u^b \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right) \Delta u^b
\end{aligned}$$

gegeben. Dabei stellt \mathbf{N}_a den Vektor der Formfunktionen dar. Die Indizes a, b repräsentieren die Freiheitsgrade des Finite-Elemente-Modells. Einsetzen der diskretisierten Größen in Gleichung (2.16) liefert

$$\begin{aligned}
&\delta u_a \left(- \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \left(\text{sym} \frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) dV^0 + \int_{A^0} {}_0 \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}_a dA^0 + \int_{V^0} {}_0 \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}_a dV^0 \right) = \\
&= \delta u_a \left(\int_{V^0} \mathbf{C} \left[\text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right] \cdot \left(\text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right) dV^0 \right. \\
&+ \left. \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right) dV^0 \right) \Delta u^b \quad . \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Da die virtuellen Verschiebungen δu_a beliebig sind, ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem, indem man nacheinander eine Komponente von δu_a gleich 1 und alle anderen gleich 0 setzt. Die sich ergebenden Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode lauten

$$\begin{aligned}
&- \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \left(\text{sym} \frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) dV^0 + \int_{A^0} {}_0 \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}_a dA^0 + \int_{V^0} {}_0 \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}_a dV^0 \\
&= \left(\int_{V^0} \mathbf{C} \left[\text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right] \cdot \left(\text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right) dV^0 \right. \\
&+ \left. \int_{V^0} \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \right) dV^0 \right) \Delta u^b \quad . \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems nach den Unbekannten Δu^b erhält man ${}^0 u_{i+1}^{b+\Delta t}$ aus

$${}^0 u_{i+1}^{b+\Delta t} = {}^0 u_i^{b+\Delta t} + \Delta u^b \quad . \quad (2.19)$$

Mit der diskretisierten Form von Gleichung (2.12) wird überprüft, ob die gefundenen Verschiebungen das Prinzip der virtuellen Verschiebung hinreichend genau erfüllt oder ob ein weiterer Iterationsschritt nötig ist. Die Verschiebungen im Inneren des Elements erhält man mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_b \mathbf{u}^b \quad . \quad (2.20)$$

Kapitel 3

Modellbildung der Mikrobiegevorrichtung

3.1 Mechanisches Ersatzmodell

Der in Kapitel 1 erläuterte Aufbau der Mikrobiegevorrichtung ist aufgrund seiner Komplexität für die numerische Simulation des Verformungsverhaltens ungünstig. Die Durchführung einer Parameterstudie ist aufgrund der erforderlichen Rechenzeiten nur mit hohen Kosten möglich. Hinzu kommen die sich aus dem Kontaktalgorithmus ergebenden Konvergenzprobleme. Daher wurde zunächst das in Abb. 3.1 dargestellte zweidimensionale mechanische Ersatzmodell untersucht. Die Zulässigkeit dieser Modellbildung, insbesondere im Hinblick auf die kinematischen Randbedingungen, wurde mittels FE-Analysen an einer dreidimensionalen Struktur bestätigt.

Zweidimensionales Modell

Bei der Mikrobiegevorrichtung ist der Biegekörper an der Unterseite des Klotzes mit dem Substrat verklebt. Für das zweidimensionale Ersatzmodell wurden die kinematischen Randbedingungen so gewählt, daß sie das Verformungsverhalten des Klotzes in der Schnittfläche A-A (siehe Abb. 3.1) möglichst gut approximieren. Die Abb. 3.2 zeigt das Verformungsverhalten des Klotzes bei Belastung *a*) der dreidimensionalen Struktur und *b*) der angenommenen zweidimensionalen Struktur, die ein Kompromiß zwischen der festen Einspannung an der Unterseite und der freien Verformbarkeit der Oberseite darstellt.

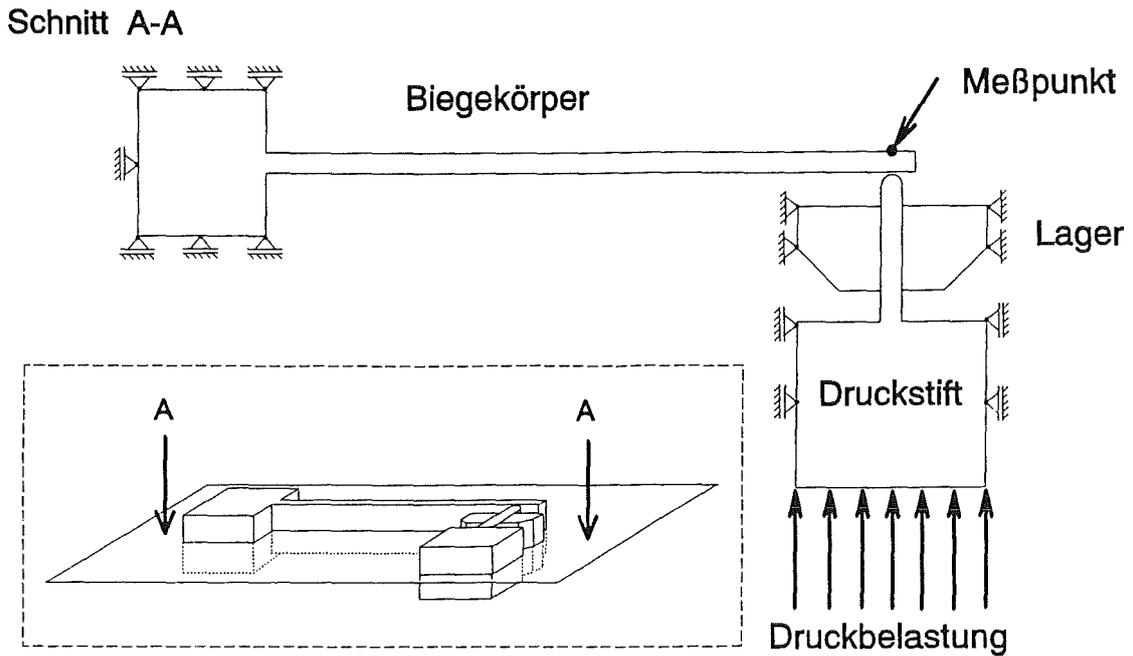


Abbildung 3.1: zweidimensionales mechanisches Ersatzmodell der Mikrobiegevorrichtung

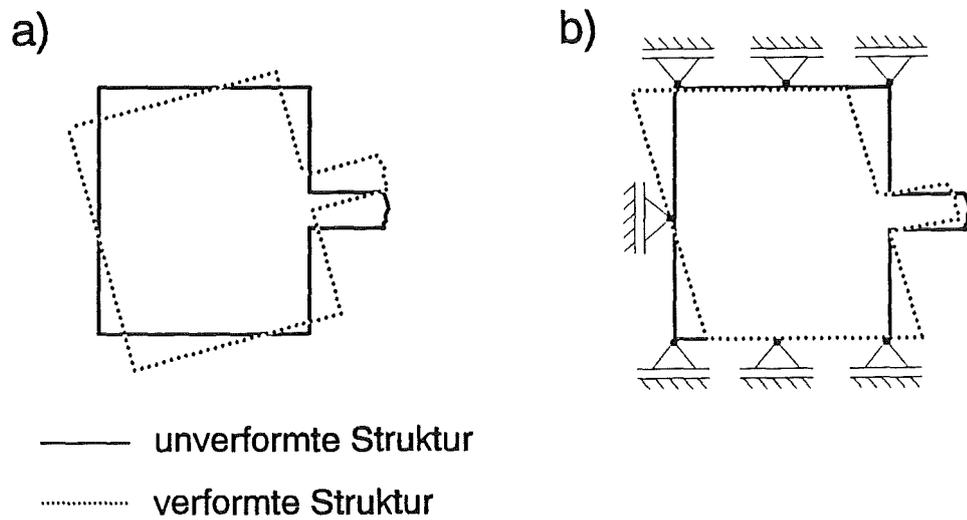


Abbildung 3.2: Verformungsverhalten des Klotzes für Schnitt A-A aus Abb. 3.1
 a) beim dreidimensionalen Modell auf der Oberseite
 b) des realisierten zweidimensionalen Modells

Der Spalt zwischen Druckstiftkolben und dessen Führung A (siehe Abb. 1.1) beträgt $1 \mu\text{m}$ und ist mit Kompressionsflüssigkeit gefüllt. Diese ermöglicht ein annähernd reibungsfreies Gleiten in der Führung, so daß hier mögliche Reibungskräfte im Modell vernachlässigt werden können. Der Abstand zwischen Druckstiftvorderteil und Führung B (siehe Abb. 1.1) beträgt ebenfalls mindestens $1 \mu\text{m}$. Kontakt tritt erst bei einer Biegebeanspruchung des Druckstiftes auf, wobei diese ausschließlich über den Kontaktbereich Biegekörper/Druckstift aufgebracht werden kann.

Dreidimensionales Modell

Im dreidimensionalen Modell können die realen geometrischen Verhältnisse durch eine starre Lagerung der Klotzunterseite erfaßt werden. Die für das zweidimensionale Modell getroffenen Annahmen bezüglich des Druckstiftes bleiben erhalten.

3.2 FE-Modellierung

3.2.1 Auswahl der Elemente

Für die Modellierung von ebenen Problemen kann je nach Randbedingungen und Geometrie zwischen ebenem Spannungszustand (ESZ) und ebenem Verzerrungszustand (EVZ) unterschieden werden [11, 12, 13]. Die Annahme eines ESZ kann für Bauteile verwendet werden, deren Dicke t klein gegenüber ihren sonstigen Abmessungen ist und nur durch Kräfte in der Ebene belastet werden (siehe Abb. 3.3). Diese Bauteile werden in der Elastizitätstheorie als *Scheiben* bezeichnet. Im Vergleich zu den übrigen Spannungskomponenten sind diejenigen in z -Richtung vernachlässigbar klein. Die Spannungen werden über die Dicke t als konstant angenommen. Damit läßt sich der Spannungstensor für den ESZ wie folgt reduzieren:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Körper kann in z -Richtung eine Dehnung ε_z infolge Querkontraktion erfahren, ε_{xz} und ε_{yz} sind jedoch gleich Null.

Der EVZ kann für die Betrachtung von Bauteilen verwendet werden, deren Geometrie und Belastung sich in Längsrichtung nicht ändert, wobei die Längenänderung durch geeignete Lagerung verhindert wird. Das bedeutet, daß der Körper in z -Richtung eingespannt ist und daher

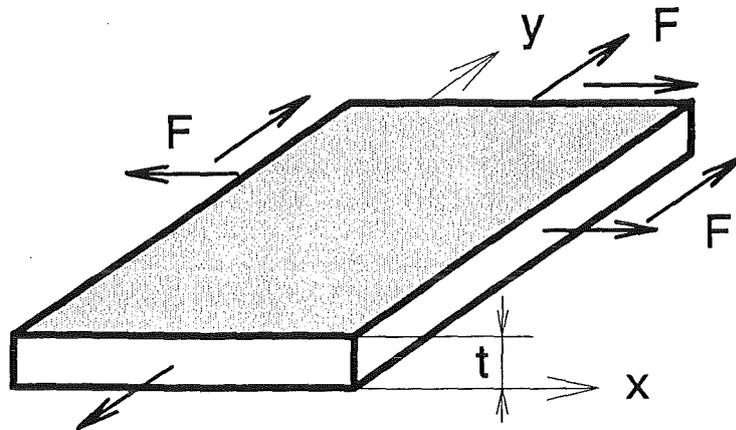


Abbildung 3.3: Darstellung einer Scheibe

nur in der x, y -Ebene frei dehnbar bleibt. Damit reduziert sich der Verzerrungstensor für den EVZ folgendermaßen:

$$V = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Dabei tritt zwar eine Spannung σ_z in z -Richtung auf, die jedoch durch σ_x und σ_y bestimmt wird.

Aufgrund der vorliegenden Geometrie und Belastung wurde ein ESZ angenommen und mit achtknotigen Elementen (CPS8-Elemente) simuliert. Für die dreidimensionalen Vergleichsrechnungen wurden zwanzigknotige Elemente (C3D20) mit quadratischem Interpolationsansatz verwendet.

3.2.2 Diskretisierung der einzelnen Komponenten

Biegekörper

Das FE-Netz des Biegekörpers wird in die drei Bereiche Biegekörperbalken, Kerbe und Klotz (siehe Abb. 3.4) unterteilt.

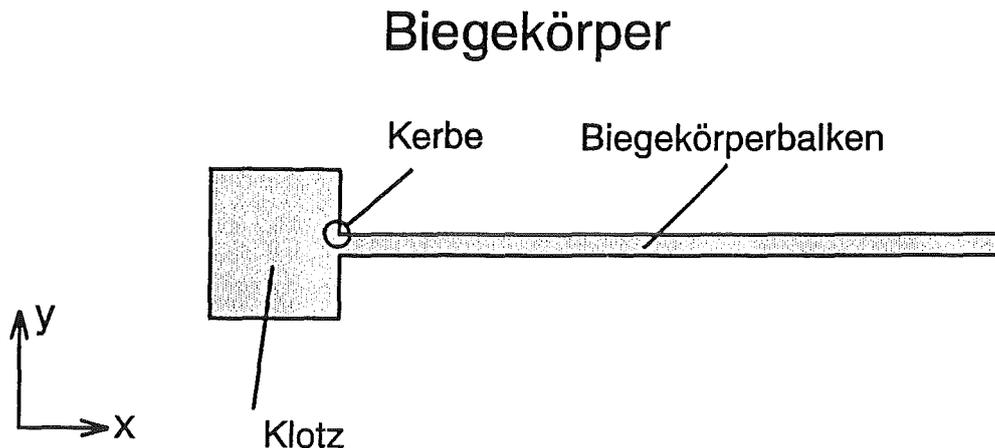


Abbildung 3.4: Darstellung der Untergruppen des Biegekörpers

Diese Bereiche werden unabhängig voneinander nach folgenden Kriterien optimiert:

- möglichst geringe Knotenanzahl
- bei weiterer Netzverfeinerung keine signifikante Änderung der
 - Spannungsisolinien
 - Meßpunktverschiebung

Durch die Diskretisierung des *Balkens* wird die Verschiebung des Meßpunktes wesentlich beeinflusst. Das Netz wurde solange in Längs- und Querrichtung verfeinert, bis die Diskretisierung keinen Einfluß auf die Meßpunktverschiebung mehr hatte. Der dargestellte Verlauf nach Abb. 3.5 zeigt, daß sich bei einer Unterteilung in Querrichtung (y -Richtung) zwischen 2 und 3 Elementen nur noch geringe Änderungen der Verschiebungswerte ergeben. Bei einer Erhöhung der Unterteilung in Längsrichtung (x -Richtung) sind ab 60 Elemente ebenfalls nur noch geringe Verschiebungsänderungen nachweisbar.

Die Diskretisierung der *Kerbstelle* hat nur geringen Einfluß auf die Meßpunktverschiebung, jedoch muß für eine Spannungsanalyse in diesem Bereich ein feineres Netz gewählt werden. Der

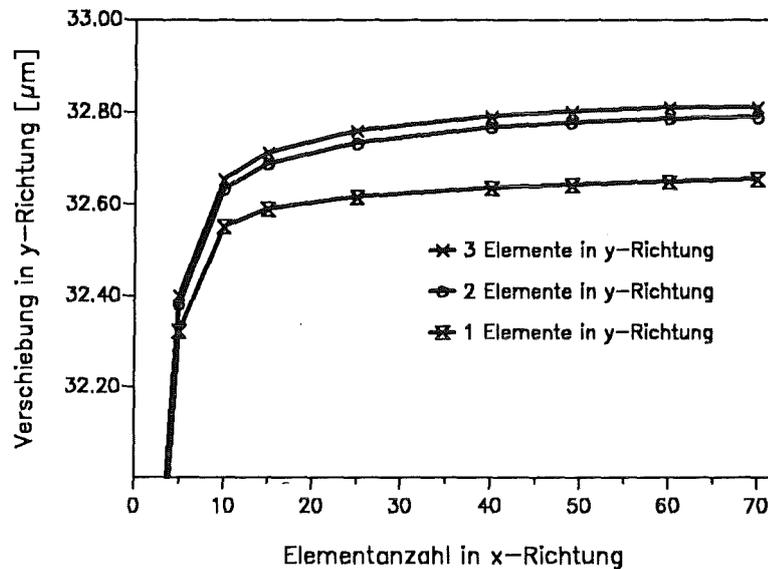


Abbildung 3.5: Verschiebungswerte des Meßpunktes in y-Richtung für verschiedene Unterteilungen des Balkens

Einfluß der Diskretisierung wurde mit Hilfe der Spannungsisolinien beurteilt.

Für die Vernetzung des *Klotzes* wurden drei unterschiedliche Vernetzungsgerüste (siehe Abb. 3.6) generiert, die wiederum individuell verfeinert wurden. Die sich einstellenden Verschiebungswerte sind in Abb. 3.7 in Abhängigkeit von der Gesamtknotenanzahl aufgetragen.

Der Verschiebungsverlauf für Grundgerüst 3 ergibt schon bei geringer Knotenanzahl nur noch kleine Verschiebungsänderungen. Auch im Hinblick auf die Spannungsisolinien ist Grundgerüst 3 zu bevorzugen. Diese Ergebnisse zeigen, daß eine feinere Unterteilung im vorderen Bereich des Klotzes und eine grobe Vernetzung im hinteren Bereich die günstigste Verteilung darstellt.

An der *Kontaktstelle*, wo der Druckstift die Belastung auf den Biegekörper überträgt, wurde fein diskretisiert (siehe Abb. 3.8), um die dort auftretende Druckbelastung möglichst genau zu erfassen. Hier war die Netzauswahl im wesentlichen durch die Spannungsisolinien und die für den Kontaktalgorithmus erforderliche Rechenzeit bestimmt.

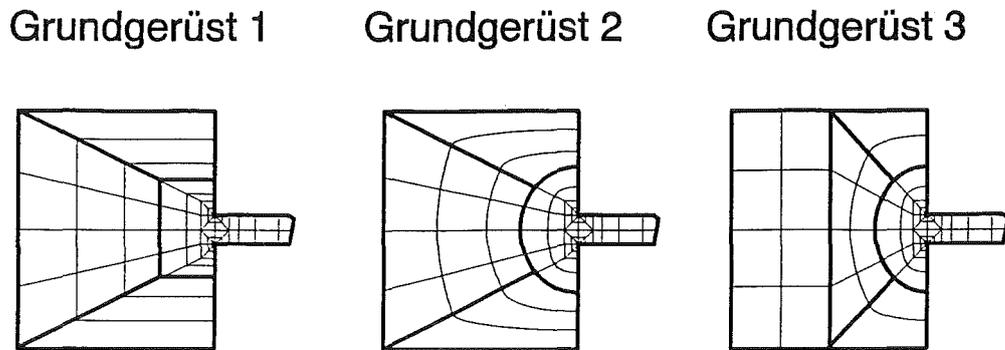


Abbildung 3.6: Grundgerüste zur Netzgenerierung des Klotzes

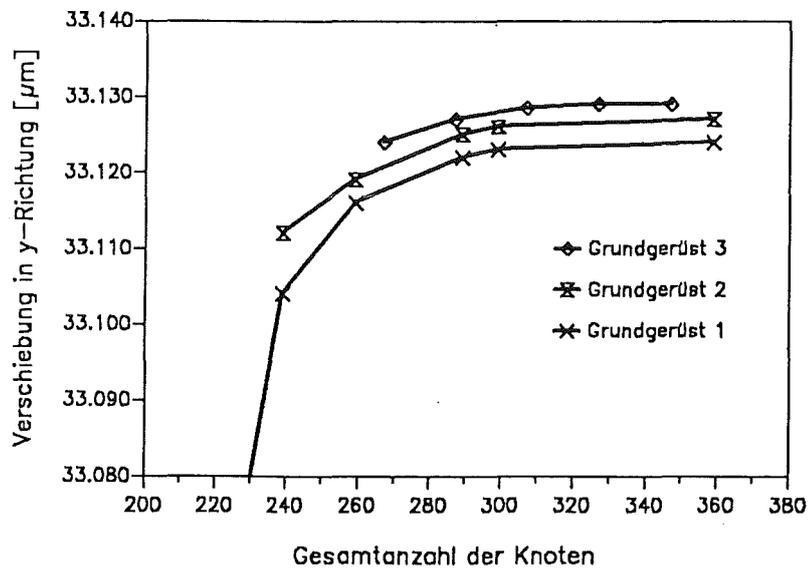


Abbildung 3.7: Meßpunktverschiebung in Abhängigkeit von der Gesamtknotenanzahl für die drei verschiedenen Grundgerüste des Klotzes und für dieselbe Belastung

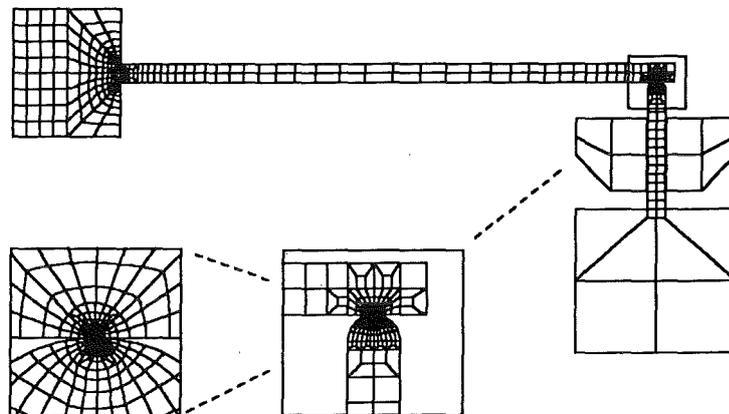


Abbildung 3.8: FE-Netz des Gesamtsystems mit vergrößerten Ausschnitten im Kontaktbereich

Druckstift

Die Diskretisierung des Druckstifts ist im wesentlichen durch den Kontaktbereich bestimmt, in dem die Belastung auf den Biegekörper übertragen wird. Hier ist ein Kompromiß zwischen der Knotenanzahl und der erforderlichen Rechenzeit zu finden, wobei die Elementgröße des Druckstifts und des Biegekörpers gleich gewählt wird (siehe Abb. 3.8).

Lager

Das Lager (siehe Abb. 3.1) ist als zusätzliche Führung des Druckstiftes vorgesehen. Solange der Stift mit dem Lager nicht in Kontakt kommt, soll mit dem in Abb. 3.9 a) dargestellten groben Netz gerechnet werden. Kontakt kann dann bei Auftreten von Verschiebungen an der Ecke 1 bzw. Ecke 2 erkannt werden. Für diesen Fall wird für die betroffene Ecke eine wie in Abb. 3.9 b) dargestellte Netzverfeinerung vorgenommen.

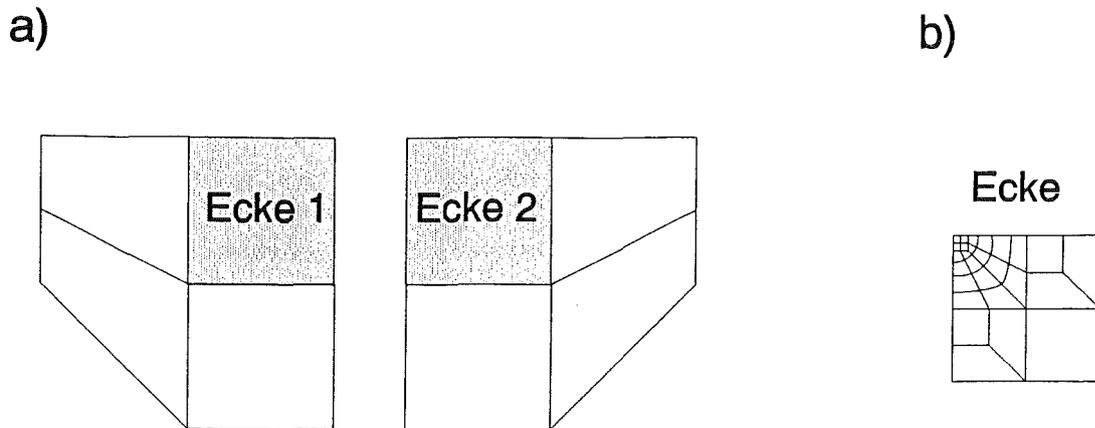


Abbildung 3.9: FE-Netz des Lagers

3.3 Kontaktdefinition in *ABAQUS*

Für die Lösung von Kontaktproblemen müssen an der Oberfläche der Körper, die in Kontakt treten, sogenannte Kontaktelemente definiert werden [8]. *ABAQUS* stellt hierfür drei verschiedene Arten von Kontaktelementen zur Verfügung. Die Tabelle 3.1 stellt die möglichen Paarungen und deren Bedeutung dar.

	Interelemente	Rigid-Surface	Slideline
Interelemente	beide Körper defomierbar und geringe Gleitungen zulässig	ein Körper defomierbar und große Gleitungen zulässig	beide Körper defomierbar und große Gleitungen zulässig

Tabelle 3.1: Kontaktpaarungen im FE-Programm *ABAQUS*

Unter geringen Gleitungen ist zu verstehen, daß die Relativbewegung zwischen gegenüberliegenden Kontaktknoten max. 10 % der Elementlänge des zugehörigen Interelements beträgt.

Soll in der Kontaktzone Druckstift/Biegekörper die Paarung Interelemente/Interelemente zur Anwendung kommen, so müßte die Elementlänge mindestens das zehnfache des Gleitweges betragen, so daß die zur genaueren Spannungsanalyse notwendige feine Diskretisierung nicht mehr realisierbar wäre. Folglich ist von einer solchen Paarung abzusehen. Für den eventuell eintretenden Kontakt zwischen Druckstift und Lager müssen ebenfalls große Gleitungen berücksichtigt werden. Da alle Kontaktpartner als deformierbar angenommen werden, muß in beiden Fällen eine Paarung Interelemente/Slideline zur Anwendung kommen.

Für die zweidimensionale Anwendung dieser Paarung werden Linien bzw. Knotensätze entlang der Körperkonturen definiert. Während bei zweidimensionalen Modellen die Kontaktkörper entlang einer Linie gleiten, müssen im dreidimensionalen Fall Gleitflächen definiert werden. Die ABAQUS-Version 4.9 besitzt jedoch nur eine Slideline-Option für Körper, die eine Bewegung entlang einer durch die Kontaktknoten vorgegebenen Linie ermöglichen. Das Aneinanderabgleiten zweier Körper in beliebiger Richtung ist nicht möglich. Die Annäherung der beiden Körper wird durch die Zuordnung einer sogenannten Slide-Ebene (siehe Abb. 3.10) bestimmt, d.h., die Linien A (Slideline) und B (Interelemente), die gegeneinander abgleiten, sind vordefiniert.

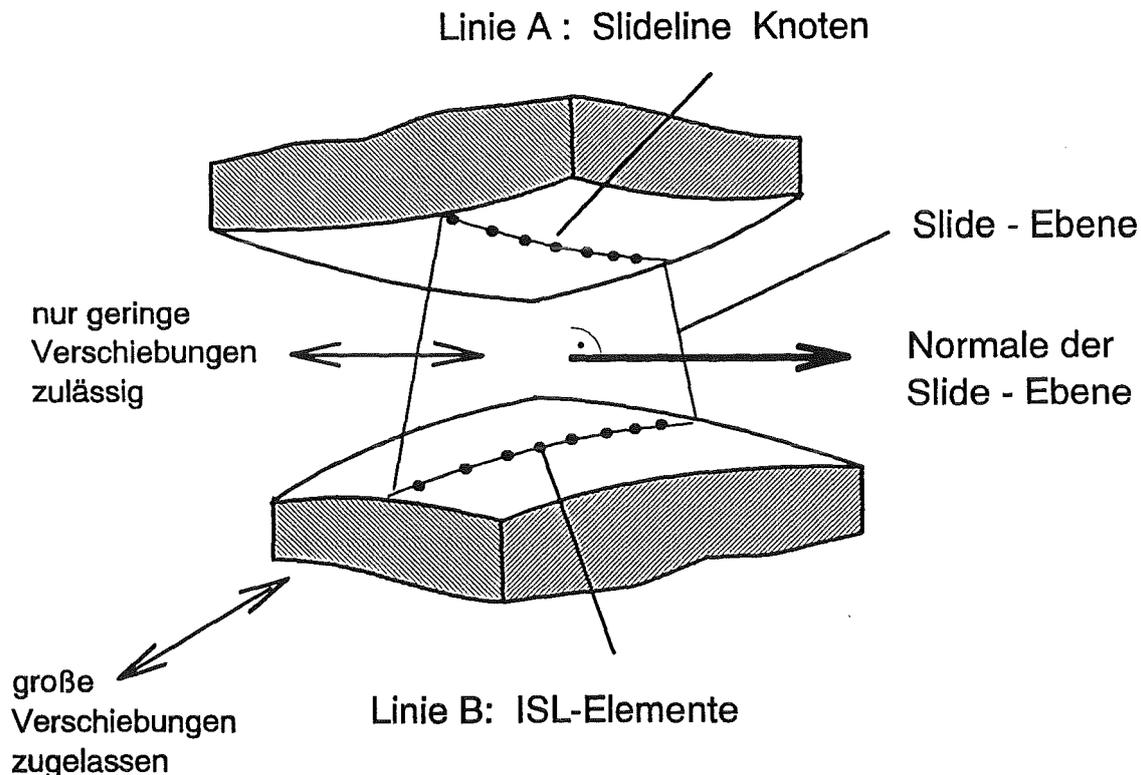


Abbildung 3.10: Erläuterung des dreidimensionalen Slideline-Kontaktes

Somit findet die Bewegung entlang einer Linie in der Slide-Ebene statt, die durch die Kontaktknoten beider Kontaktpartner eindeutig beschrieben ist. Im Dreidimensionalen müssen die Oberflächenknoten im Kontaktbereich in mehrere parallele Slide-Ebenen zusammengefaßt werden. Praktisch realisiert man dies, wie in Abb. 3.11 gezeigt, durch einen schichtweisen Aufbau des Netzes in der Kontaktzone. Eine uneingeschränkte Gleitung der Kontaktflächen ohne vordefinierte Bewegungsrichtung ist mit der *ABAQUS*-Version 5.3 möglich. Es sei jedoch betont, daß die verwendete Kontaktdefinition von Version 4.9 sowohl den zweidimensionalen als auch den dreidimensionalen Fall der hier betrachteten Kontaktprobleme gut beschreibt.

Biegekörperbalken

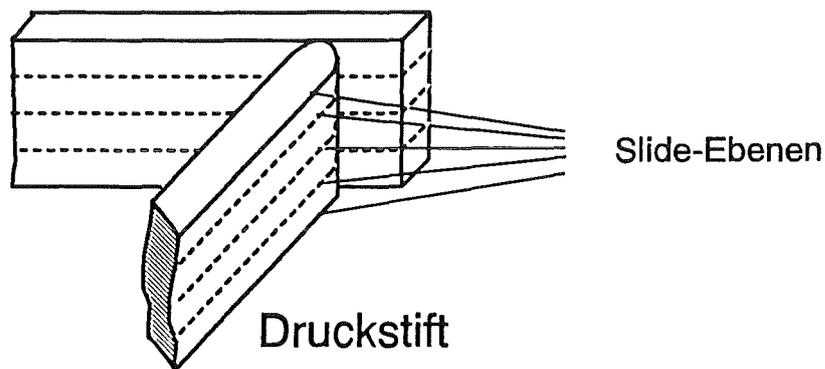


Abbildung 3.11: Schichtweiser Aufbau in 5 Slide-Ebenen des dreidimensionalen Netzes an der Kontaktstelle zwischen Druckstift und Biegekörper

Kapitel 4

Berechnungsergebnisse

4.1 Analytische Beschreibung der Balkendeformation

Zur Vereinfachung kann der vordere Teil des Biegekörpers als ein einseitig eingespannter Balken, der an seinem freien Ende mit einer Kraft belastet wird, angesehen werden. Sein Verformungsverhalten kann daher näherungsweise analytisch mit der Balkentheorie beschrieben werden. Im folgenden sollen die Grundgleichungen der einachsigen Biegung aufgestellt [9, 10, 11] und anschließend die Differentialgleichung der Biegelinie für den hier betrachteten Balken hergeleitet werden.

Es wird vorausgesetzt, daß die y - und z -Achse Hauptachsen des Querschnitts sind und daß die äußeren Lasten nur Querkräfte in z -Richtung und Momente um die y -Achse hervorrufen. Dies stellt eine Änderung zu dem in den anderen Kapiteln dieser Arbeit zugrundegelegten Koordinatensystem dar. Für ein freigeschnittenes Element der infinitesimalen Länge dx (siehe Abb. 4.1) lassen sich über Gleichgewichtsbedingungen die folgenden Beziehungen herleiten:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad ; \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad , \quad (4.1)$$

wobei das Biegemoment M bzw. die Querkraft Q die Resultierenden der über den Querschnitt verteilten Normalspannung σ in x -Richtung bzw. der Schubspannung τ in z -Richtung sind und sich unter Annahme kleiner Deformationen wie folgt formulieren lassen:

$$M = \int z\sigma dA \quad ; \quad Q = \int \tau dA \quad . \quad (4.2)$$

Die Deformation eines freigeschnittenen Balkenelements ist in Abb. 4.1 b) dargestellt. Es kann die Dehnung ϵ und die Winkeländerung γ folgendermaßen definiert werden:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad . \quad (4.3)$$

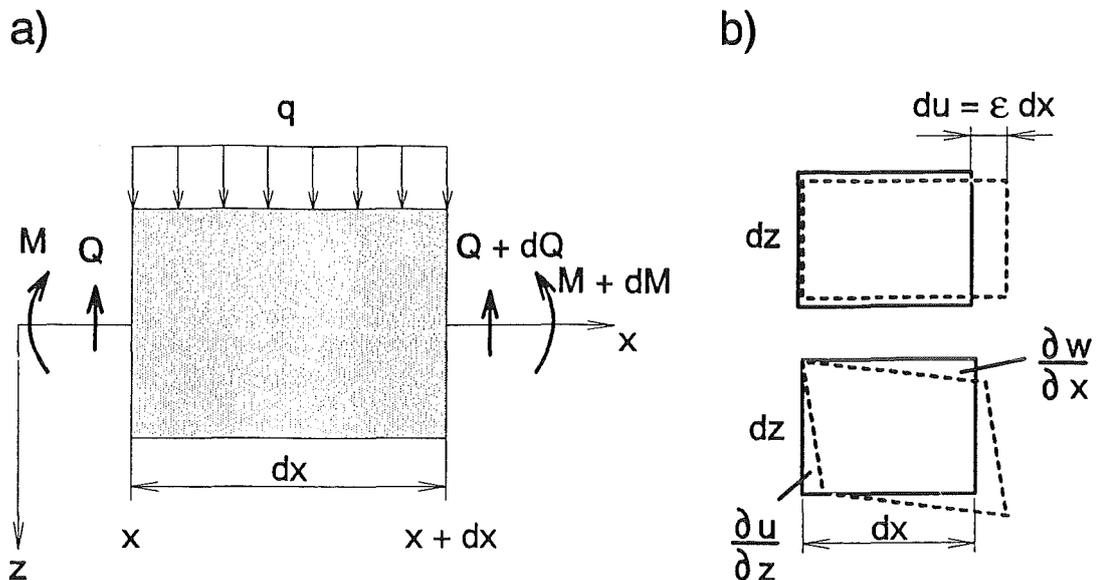


Abbildung 4.1: a) Freischnitt eines Balkenelements
b) Deformationen des Balkenelements

Das *Hookesche Gesetz* beschreibt den Zusammenhang zwischen Dehnung und Normalspannung bzw. Winkeländerung und Schubspannung:

$$\sigma = E\epsilon \quad ; \quad \tau = G\gamma . \quad (4.4)$$

An dieser Stelle muß die weitere Annahme getroffen werden, daß ursprünglich ebene Schnittflächen senkrecht zur Balkenachse auch nach der Verbiegung des Balkens eben und senkrecht zur gebogenen Balkenachse sind. Hieraus ergeben sich die folgenden Bedingungen:

1. Alle Punkte eines Querschnitts erfahren die gleiche Verschiebung (Durchbiegung) in z -Richtung, damit ist

$$w = w(x) . \quad (4.5)$$

Die Balkenhöhe bleibt konstant bei der Biegung $\epsilon = \partial w / \partial z = 0$.

2. Ein Querschnitt erfährt neben der Verschiebung w eine reine Drehung $\psi = \psi(x)$. Damit ist für jeden Punkt im beliebigen Abstand z von der Balkenachse die Verschiebung u in x -Richtung durch

$$u(x, z) = \psi(x)z \quad (4.6)$$

gegeben.

Mit Einsetzen von (4.3) in (4.4) und mit den aus (4.5) und (4.6) festgelegten Abhängigkeiten ergibt sich:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E\psi'z, \quad (4.7)$$

$$\tau = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G(w' + \psi). \quad (4.8)$$

Die Neigung w' der deformierten Balkenachse ist wegen $|w'| \ll 1$ gleich dem Neigungswinkel. Mit Gleichung (4.7) folgen aus Gleichung (4.2) und dem Flächenträgheitsmoment $I = I_y = \int z^2 dA$ das Elastizitätsgesetz für das Biegemoment

$$M = EI\psi'. \quad (4.9)$$

Damit ist die Änderung des Drehwinkels $d\psi$ über die Länge dx proportional zum wirkenden Moment M .

Die Gleichung (4.8) beschreibt einen konstanten Verlauf der Schubspannung über dem Querschnitt. Dies entspricht nicht den realen Verhältnissen, sondern ergibt sich aus der oben beschriebenen Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte. Der ungleichförmige Verlauf der Schubspannung wird deshalb mit einem Schubkorrekturfaktor κ berücksichtigt. Damit ergibt sich aus (4.8) und (4.2) das Elastizitätsgesetz für die Querkraft:

$$Q = \kappa GA(w' + \psi) = GA_S(w' + \psi). \quad (4.10)$$

Die Fläche A_S wird als Schubfläche bezeichnet und ist von der Querschnittsfläche und Querschnittsform abhängig. Abb. 4.2 zeigt die Biegeverformung und die Schubverzerrung eines Balkenelementes.

Mit den Grundgleichungen der geraden Biegung läßt sich nun die Differentialgleichung der Biegelinie aufstellen. Dabei wird zwischen dem schubstarreren und dem schubweichen Balken unterschieden.

4.1.1 Schubstarrer Balken

Es wird angenommen, daß die Schubsteifigkeit GA_S sehr groß ist und die Querkraft endlich. Unter dieser Annahme läßt sich die Gleichung (4.10) wie folgt reduzieren:

$$w' + \psi = 0. \quad (4.11)$$

Die Annahme schubstarreren Verhaltens und des bereits erwähnten Ebenbleibens der Querschnitte ist in der Literatur als *Bernoullische Annahmen* [10] bezeichnet. Mit dem Elastizitätsgesetz für das Biegemoment (4.9) und (4.11) ergibt sich die Differentialgleichung für die

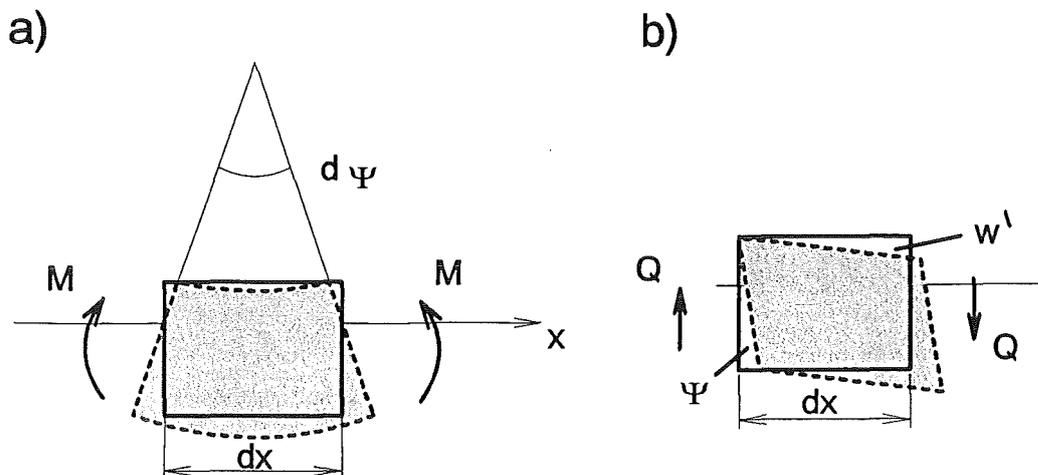


Abbildung 4.2: Verformung eines Balkenelements infolge a) Momentenbelastung M und b) Querkraft Q

Biegelinie:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI} . \quad (4.12)$$

Für den hier betrachteten Fall eines einseitig eingespannten Balkens der Länge l mit konstanter Biegesteifigkeit EI , der an seinem freien Ende mit einer Ersatzkraft F belastet wird, kann aus (4.12) die Durchbiegung $w(x)$ bestimmt werden:

$$M(x) = F(x - l) . \quad (4.13)$$

Somit folgt für die Differentialgleichung (4.12):

$$EIw'' = F(l - x) . \quad (4.14)$$

Die zweimalige Integration liefert:

$$EIw(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2}\right) + c_1x + c_2 . \quad (4.15)$$

Für die Einspannstelle gilt $w'(0) = 0$ und $w(0) = 0$, wodurch die beiden Konstanten c_1 und c_2 gleich Null werden. Damit ergibt sich für den betrachteten Fall der folgende Biegeverlauf:

$$w(x) = \frac{Fl^3}{6EI} \left(-\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{lx^2}{l^2}\right) , \quad (4.16)$$

und für die maximale Durchbiegung an der Belastungsstelle:

$$w(x=l) = f = \frac{Fl^3}{3EI} . \quad (4.17)$$

4.1.2 Schubweicher Balken

Im folgenden soll der unter Kapitel 4.1.1 vernachlässigte Schubeinfluß betrachtet werden, insbesondere die damit verbundene Durchbiegung des hier zu untersuchenden Balkens. Mit (4.11) gilt für die Balkenneigung infolge der Biegebelastung $w'_B = -\psi$. Setzt man

$$w' = w'_S + w'_B , \quad (4.18)$$

wobei w'_S den Anteil der Balkenneigung infolge Schub (Querkraft) darstellt, so ergibt sich durch Einsetzen in (4.10):

$$w'_S = \frac{Q}{GA_S} . \quad (4.19)$$

Ferner ist die Gesamtdurchbiegung die Summe aus den Durchbiegungen infolge Biegung und Schub:

$$w = w_S + w_B . \quad (4.20)$$

Für den hier betrachteten Balken ergibt sich somit:

$$w'_S = \frac{F}{GA_S} x . \quad (4.21)$$

Bei der Integration dieser Gleichung ergibt sich eine Integrationskonstante, die mit der Randbedingung an der Einspannstelle $w(x=0) = 0$ zu Null wird. Damit ist die Durchbiegung infolge Schubbelastung für den einseitig eingespannten Balken an der Belastungsstelle

$$w_S(x=l) = f_S = \frac{F}{GA_S} l . \quad (4.22)$$

Für die Gesamtverschiebung ergibt sich nach (4.20) mit dem Biegeanteil aus (4.17) und dem Schubanteil aus (4.22):

$$f = f_B + f_S = \frac{Fl^3}{3EI} \left(1 + \frac{3EI}{l^2 GA_S} \right) . \quad (4.23)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und dem Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, der Schubfläche $A_S = \kappa A$ und dem Flächenträgheitsmoment $I = hb^3/12$ des hier vorliegenden rechteckigen Querschnitts läßt sich Gleichung (4.23) wie folgt formulieren:

$$f = \frac{Fl^3}{3EI} \left(1 + \frac{1+\nu}{2\kappa} \frac{b^2}{l^2} \right) , \quad (4.24)$$

wobei der zweite Summand in der Klammer dem Schubanteil entspricht. Es wird anschaulich, daß für schlanke, also lange (l groß) und dünne (b klein) Balken der Schubanteil klein wird und die Annahme von Schubstarrheit gerechtfertigt ist.

Bezüglich des hier betrachteten Balkens ($l/b = 30$) mit einer Querkontraktionszahl $\nu = 0,35$ (für Kupfer) und einem Schubkorrekturfaktor von $\kappa = 1,2$ [10] für rechteckige Querschnitte beträgt der Schubanteil an der Gesamtdurchbiegung lediglich $6,25 \cdot 10^{-2}$ % des Biegeanteils.

4.1.3 Vergleich mit numerisch ermittelten Verschiebungswerten

Um die mit (4.17) bzw. (4.24) analytisch berechneten Verschiebungswerte mit FE-Rechnungen vergleichen zu können, wurde ein Balken entsprechend den Abmessungen des Biegekörperbalkens generiert. Dieser wurde am einen Ende mit einer Ersatzkraft von 7 mN belastet und am anderen Ende fest eingespannt. Die numerisch ermittelten Meßpunktverschiebungen sind zusammen mit den analytisch ermittelten Werten in der folgenden Tabelle 4.1 dargestellt:

	anal. erm. Wert schubstarr	anal. erm. Wert schubweich	FE-Ergebnisse mit ESZ	FE-Ergebnisse 3D
Meßpunkt- verschiebungswerte des Balkens in μm	31,8316	31,8515	31,806	31,389

Tabelle 4.1: Analytisch und numerisch ermittelte Meßpunktverschiebungswerte des einseitig fest eingespannten Balkens

Die Berücksichtigung des Schubeinflusses führt bei den analytisch ermittelten Werten nur zu einer geringen Verschiebungsänderung. Für die numerisch ermittelten Werte ergeben sich bei der dreidimensionalen Rechnung, bei feiner Diskretisierung, geringere Verschiebungswerte.

4.2 Variation der Modellparameter

Für die vorgesehene Anwendung der Mikrobiegevorrichtung ist es erforderlich, das Verformungsverhalten des Biegekörpers durch Variation der Geometrie- und Materialparameter zu untersuchen. Ausgangswerte für die Variationen wurden den Angaben von [1] entnommen. Damit

ergeben sich nachfolgende Ausgangswerte (siehe auch Abb. 4.3):

- Geometrische Daten
 - Kerbradius $r = 2 \mu m$
 - Biegekörperbalkenbreite $b = 50 \mu m$
 - Biegekörperbalkenhöhe $h = 190 \mu m$
 - Biegekörperlänge $l_h = 1500 \mu m$
- Material-Daten für Kupfer [14]
 - Elastizitätsmodul $E = 125 GPa$
 - Querkontraktionszahl $\nu = 0.35$
- Lastaufbringung:
 - Belastung mit einer Ersatzkraft $F_{res} = 7 mN$, entspricht einer Druckbelastung des Druckstiftes von $p = 8.187 \cdot 10^{-2} \frac{N}{mm^2}$
 - Reibwert $\mu = 0$

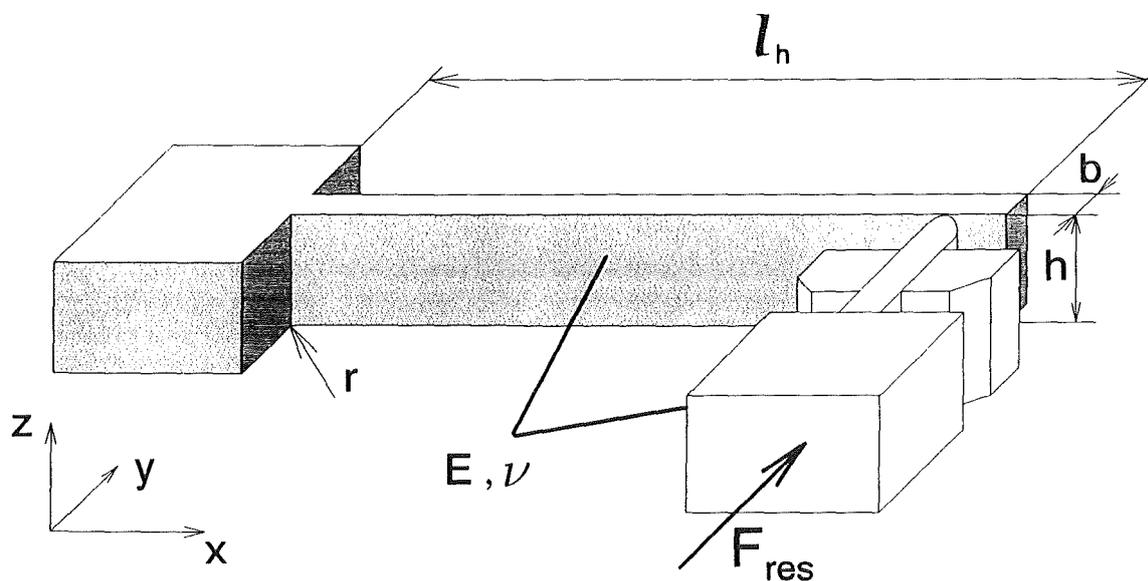


Abbildung 4.3: Erläuterung der zu variierenden Parameter

Ausgehend von den angegebenen Daten wurden die einzelnen Parameter in anwendungsrelevanten Bereichen (Vorgabe IMT) variiert.

4.2.1 Einfluß der Geometrie

Kerbradius

Es wurden FE-Netze mit Kerbradien von 0, 0.1, 1, 2, 5, 7 und 10 μm generiert (siehe Abb. 4.4), wobei sowohl die Elementanzahl als auch die Elementgröße annähernd beibehalten wurde. Die Abb. 4.5 zeigt die Verschiebung f des Meßpunktes in y -Richtung und die Verschiebung des Kontaktpunktes des Biegekörpers in y -Richtung in Abhängigkeit vom Kerbradius.

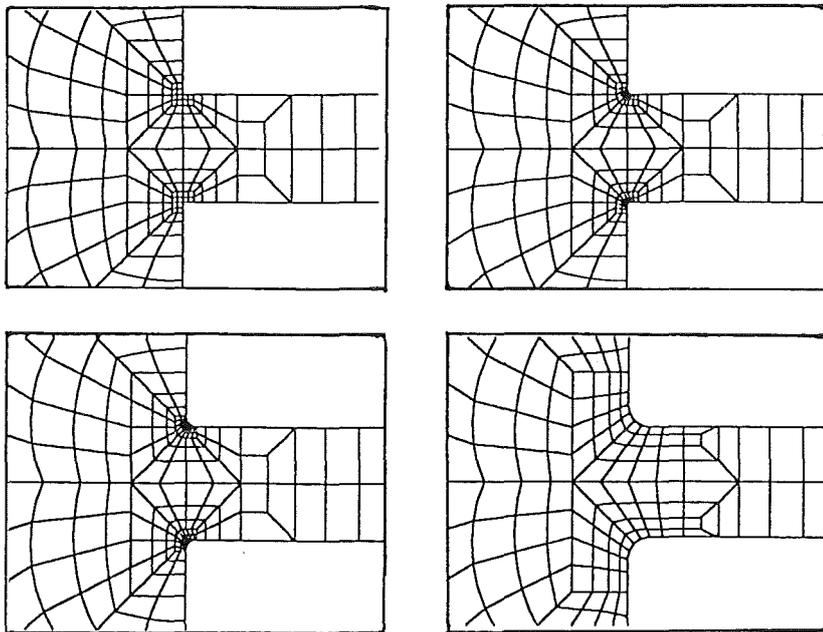


Abbildung 4.4: Vernetzung der Kerben für unterschiedliche Radien

Es zeigt sich, daß mit abnehmendem Radius die entsprechenden Verschiebungen zunehmen. Die Verschiebungsdifferenz infolge Variation des Kerbradius von $r = 0.1 \mu\text{m}$ bis $10 \mu\text{m}$ entspricht lediglich etwa 1% der Gesamtverschiebung. Die Gesamtsteifigkeit läßt sich mit dem Kerbradius demnach nur unwesentlich beeinflussen, jedoch beeinflusst der Radius die maximalen Spannungen im Kerbbereich erheblich (siehe Kapitel 4.4).

Biegekörperbreite

Die Biegekörperbreite wurde in $10 \mu\text{m}$ -Schritten zwischen $10 \mu\text{m}$ und $100 \mu\text{m}$ variiert. In Abb. 4.6 ist die aufzubringende Ersatzkraft für vorgegebene Druckstiftverschiebungen in Abhängig-

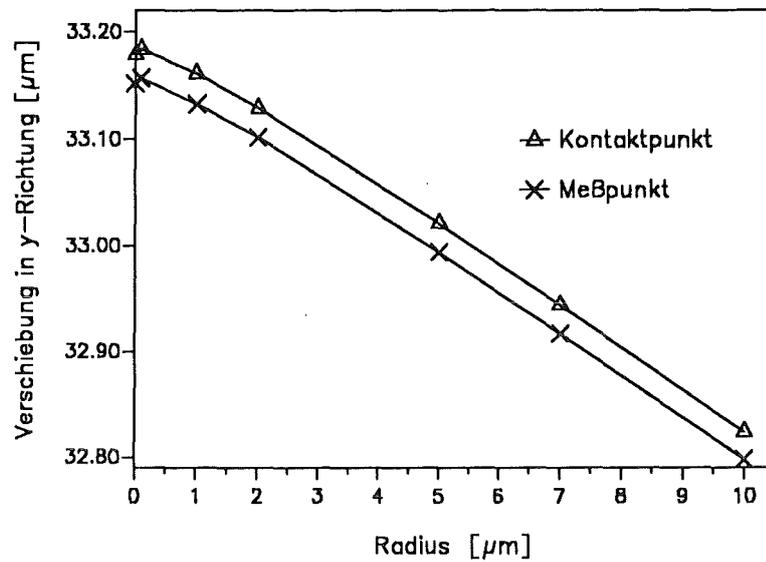


Abbildung 4.5: Verschiebungswerte in y -Richtung bei verschiedenen Kerbradien

keit von der Biegekörperbreite b aufgetragen. Abb. 4.7 stellt die erforderliche Ersatzkraft in Abhängigkeit von b^3 dar. Da die Druckstiftverschiebungsvorgabe gleich der Meßpunktverschiebung f in y -Richtung ist, kann folgende Proportionalitätsbeziehung zwischen Meßpunktverschiebung f und Biegekörperbreite b nachgewiesen werden:

$$f \sim \frac{1}{b^3}. \quad (4.25)$$

In der analytischen Betrachtung ist dieser Zusammenhang durch (4.17) mit $I = hb^3/12$ gegeben.

Die Ergebnisse in Abb. 4.6 verdeutlichen, daß die Biegekörperbreite die Steifigkeit des Biegekörpers wesentlich bestimmt.

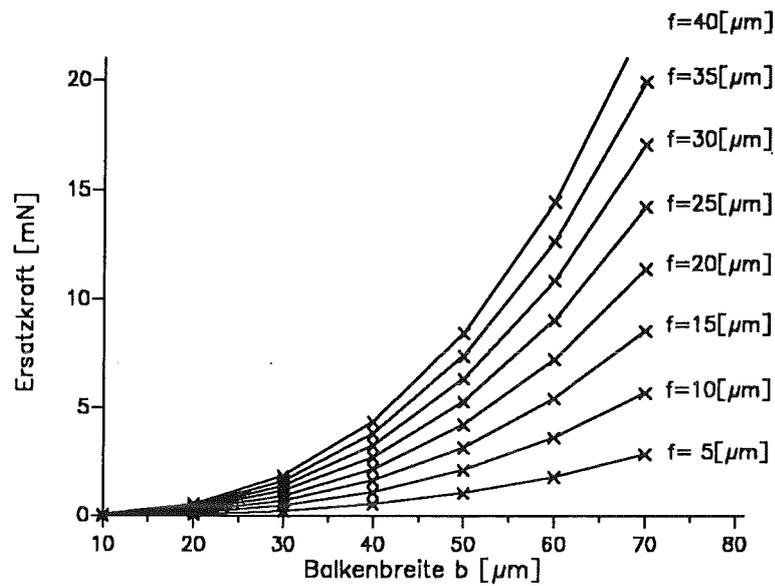


Abbildung 4.6: Ersatzkräfte in Abhängigkeit der Biegekörperbreiten b für verschiedene Meßpunktverschiebungen f in y -Richtung

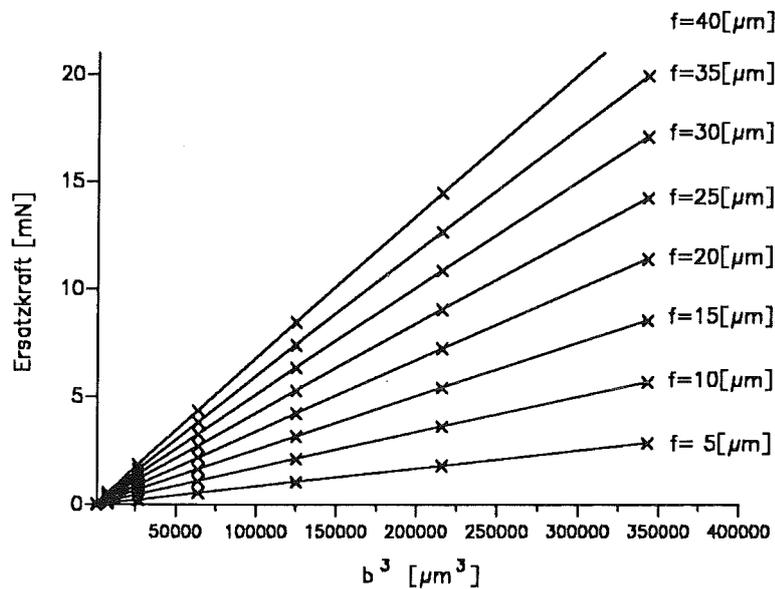


Abbildung 4.7: Ersatzkräfte in Abhängigkeit der dritten Potenz der Biegekörperbreite b für verschiedene Meßpunktverschiebungen f in y -Richtung

Biegekörperbalkenhöhe

Die Biegekörperbalkenhöhe wurde zwischen $100 \mu\text{m}$ und $300 \mu\text{m}$ in Schritten von $20 \mu\text{m}$ variiert. Abb. 4.8 zeigt die aufzubringende Ersatzkraft in Abhängigkeit von der Biegekörperbalkenhöhe h für eine Meßpunktverschiebung f in y -Richtung von $30 \mu\text{m}$. Es zeigt sich eine lineare Abhängigkeit zwischen der Ersatzkraft und der Biegekörperbalkenhöhe gemäß (4.17).

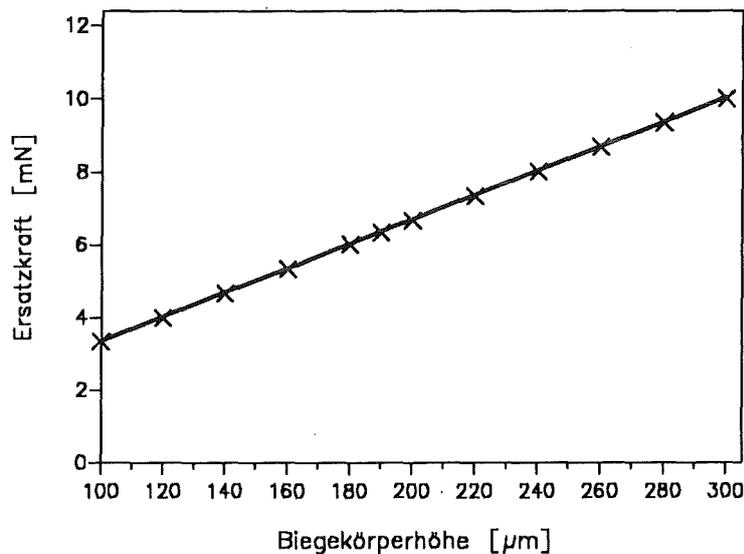


Abbildung 4.8: Ersatzkräfte für verschiedene Biegekörperbalkenhöhen bei der Meßpunktverschiebung f in y -Richtung

Biegekörperlänge

Es wurden insgesamt 10 Netze mit Biegekörperlängen l_h zwischen $0,75 \text{ mm}$ und $1,875 \text{ mm}$ generiert. In Abb. 4.9 ist die für eine konstante Meßpunktverschiebung f in y -Richtung erforderliche Ersatzkraft in Abhängigkeit von der Hebellänge l dargestellt. Eine Auftragung der erforderlichen Kraft in Abhängigkeit von $1/l^3$ (siehe Abb. 4.10) kann die Proportionalität

$$f \sim b^3 \quad (4.26)$$

gemäß (4.17) nachweisen.

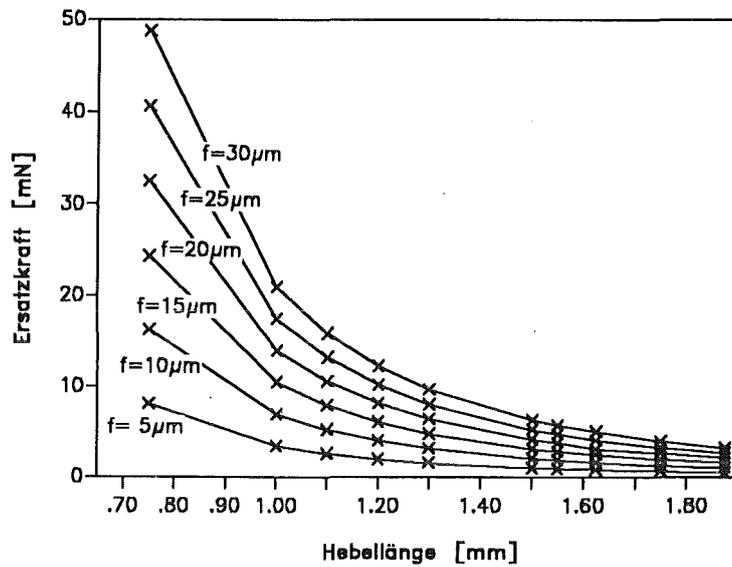


Abbildung 4.9: Ersatzkräfte in Abhängigkeit von der Hebellänge l des Biegekörpers für verschiedene Meßpunktverschiebungen f in y -Richtung

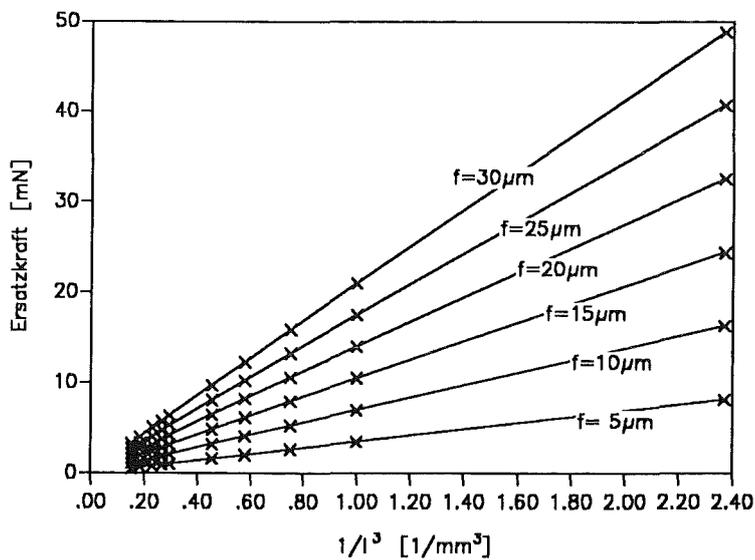


Abbildung 4.10: Ersatzkräfte in Abhängigkeit von der Hebellänge $1/l^3$ für verschiedene Meßpunktverschiebungen f in y -Richtung

4.2.2 Einfluß der Materialparameter

Elastizitätsmodul

Der Elastizitätsmodul wurde zwischen 60 GPa und 160 GPa in Schritten zu 10 GPa variiert. Die Rechnungen wurden für Meßpunktverschiebungen f in y -Richtung von $10, 20$ und $30 \mu\text{m}$ durchgeführt. Dabei ergab sich die in Abb. 4.11 dargestellte Abhängigkeit zwischen der Ersatzkraft für eine konstante Meßpunktverschiebung f in y -Richtung und dem Elastizitätsmodul. Auch hier zeigt sich ein linearer Verlauf zwischen der Ersatzkraft und dem Elastizitätsmodul. Diese Proportionalität läßt sich auch aus der Biegelinie des schubstarren Balkens bestimmen.

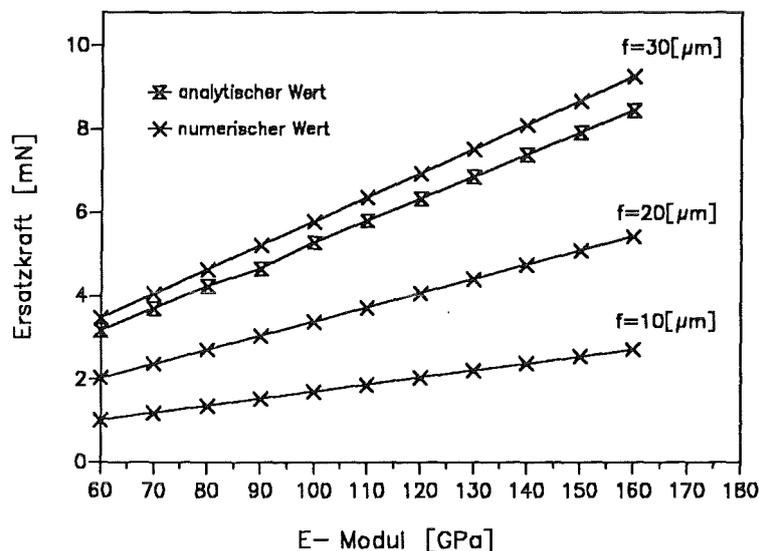
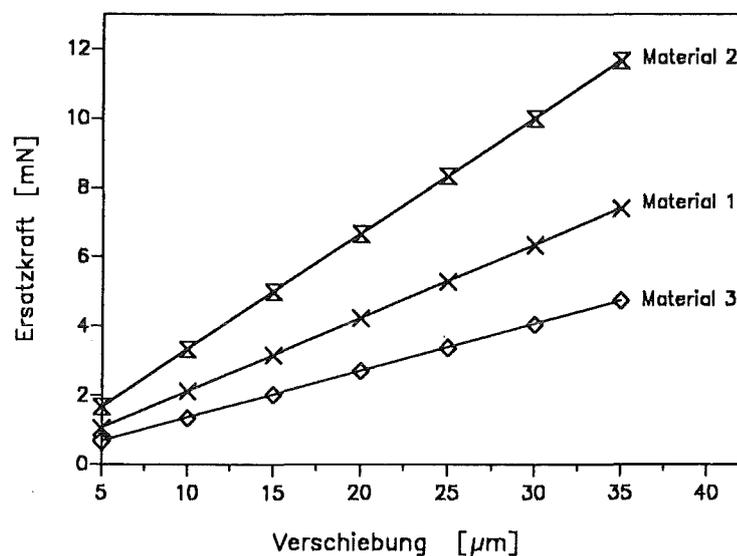


Abbildung 4.11: Ersatzkräfte für verschiedene Elastizitätsmoduln bei verschiedenen Meßpunktverschiebungen f in y -Richtung

Zusätzlich wurden verschiebungsgesteuerte Rechnungen für die in der Mikrostrukturtechnik einsetzbaren Werkstoffe Kupfer, Nickel und Gold durchgeführt (siehe Abb. 4.12), deren in Tabelle 4.2 aufgelisteten Materialkonstanten durch makroskopische Versuche ermittelt wurden [14, 15].

	Material 1	Material 2	Material 3
Elastizitätsmodul E [GPa]	125	197	80
Querkontraktionszahl ν	0.35	0.31	0.37
entsprechen makroskopischen Werkstoffkenndaten von	Kupfer	Nickel	Gold

Tabelle 4.2: Makroskopische Werkstoffkenndaten

Abbildung 4.12: Erforderliche Kraft in Abhängigkeit von der Verschiebung des Meßpunkte f in y -Richtung für drei verschiedene Materialien

Querkontraktionszahl

Die Querkontraktionszahl wurde zwischen 0.1 und 0.42 variiert, und es wurden entsprechende Rechnungen für drei verschiedene Elastizitätsmoduln durchgeführt. Der Einfluß der Querkontraktionszahl auf die Ersatzkräfte, die zu einer Meßpunktverschiebung in y -Richtung von $30 \mu\text{m}$ erforderlich sind (siehe Abb. 4.13), liegt bei ca. $1,3 \cdot 10^{-2} \%$ und kann deshalb vernachlässigt werden.

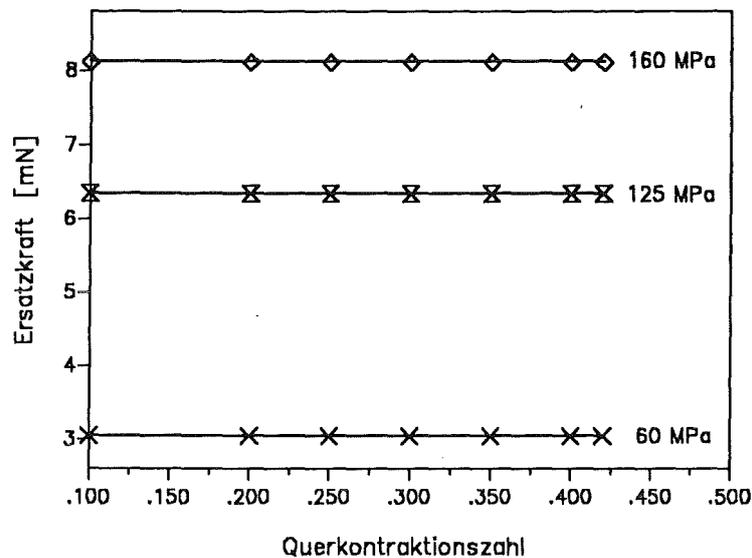


Abbildung 4.13: Ersatzkraft in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl für drei verschiedene Elastizitätsmoduln

4.2.3 Einfluß der Belastung

Um den Zusammenhang zwischen Belastung und Meßpunktverschiebung zu ermitteln, wurden verschiebungsgesteuerte Rechnungen bei unterschiedlichen Biegekörperbreiten b durchgeführt. Für eine vorgegebene Druckstiftverschiebung wurde die Ersatzkraft am Druckstift und die Meßpunktverschiebung f in y -Richtung bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.14 dargestellt.

Es zeigt sich für alle Biegekörperbreiten ein linearer Verlauf zwischen der Ersatzkraft und der Meßpunktverschiebung f in y -Richtung. Für die gleichen Voraussetzungen - konstanter Elastizitätsmodul und gleiche geometrische Randbedingungen - sind mit (4.17) gleiche Proportionalitätsverhältnisse nachzuweisen.

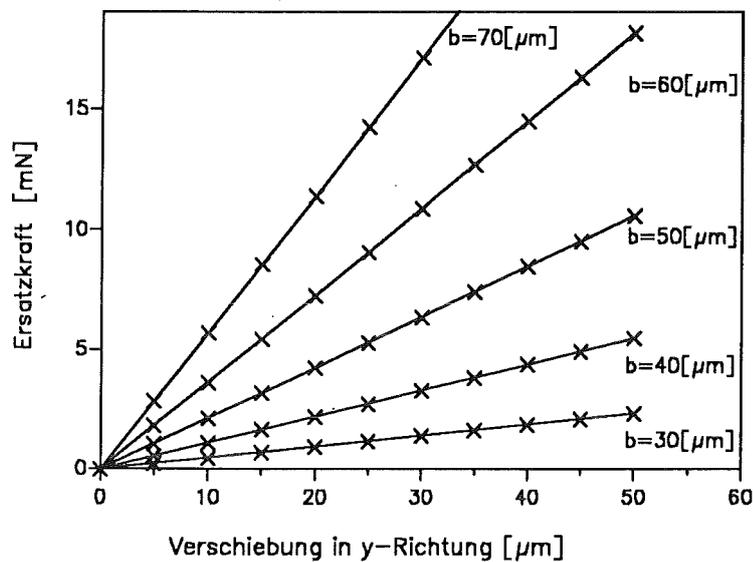


Abbildung 4.14: Verschiebung in Abhängigkeit von der Ersatzkraft für verschiedene Biegekorperbreiten b

4.2.4 Einfluß der Reibung

Die Betrachtung des Reibungsverhaltens betrifft den Kontaktbereich zwischen Biegekörper und Druckstift. *ABAQUS* [8] stellt hierfür nur die Eingabemöglichkeit eines Reibkoeffizienten zur Verfügung. Es besteht somit nicht die Möglichkeit, zwischen Haft- und Gleitreibungswert zu unterscheiden. Bei der Variation des Reibwertes zeigt sich der in Abb. 4.15 wiedergegebene Verlauf der Verschiebung in y -Richtung des Biegekörpers im Kontakt- und Meßpunkt sowie der vom Kontaktpunkt des Druckstiftes (siehe auch Abb. 4.19).

Die Verschiebungsdifferenz infolge Berücksichtigung der Reibung beträgt lediglich $6 \cdot 10^{-3} \%$ der Gesamtverschiebung und führt somit zu einer unwesentlichen Änderung des Verformungsverhaltens.

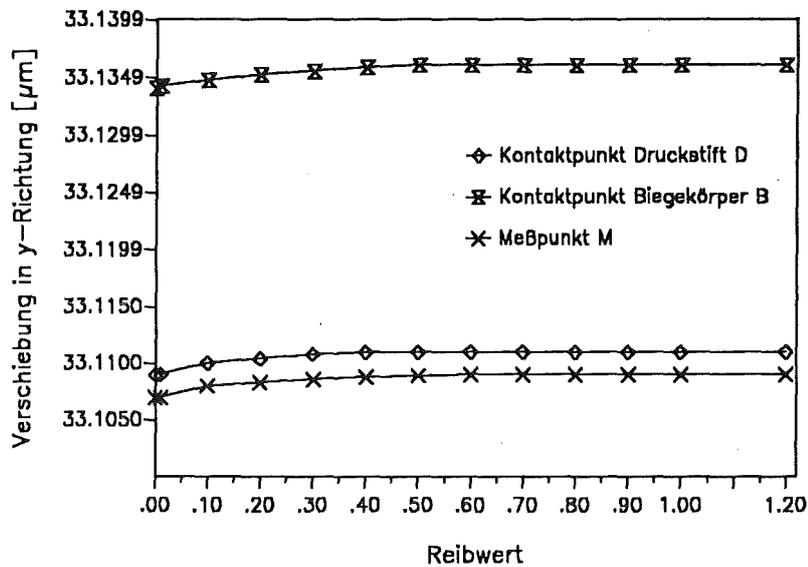


Abbildung 4.15: Verschiebungswerte in Abhängigkeit der Reibwerte bei konstanter Ersatzkraft

4.2.5 Abschließende Betrachtungen

Die in diesem Kapitel gewonnenen Abhängigkeiten der Meßpunktverschiebung in y -Richtung von den variierten Parametern lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Kerbradius: nur bedingt Proportionalität bezüglich der Verschiebung nachweisbar
- Biegekörperbalkenbreite: $f \sim \frac{1}{b^3}$
- Biegekörperbalkenhöhe: $f \sim \frac{1}{h}$
- Biegekörperlänge: $f \sim l^3$
- E-Modul: $f \sim \frac{1}{E}$
- Querkontraktionszahl: beeinflusst nur unwesentlich die Meßpunktverschiebungswerte (ca. $10^{-2} \%$)
- Belastung: $f \sim F$
- Reibwert: beeinflusst nur unwesentlich die Meßpunktverschiebungswerte (ca. $6 \cdot 10^{-3} \%$)

Wegen des vernachlässigbaren Einflusses der Querkontraktionszahl und des Reibwertes ergibt sich hinsichtlich der Meßpunktverschiebungswerte in y -Richtung für konstante Kerbradien folgende Proportionalitätsbeziehung:

$$f \sim \frac{Fl^3}{Ehb^3} \quad (4.27)$$

Diese Proportionalität läßt sich für einen rechteckigen Balkenquerschnitt auch aus (4.17) mit $I = hb^3/12$ erkennen, jedoch ergeben sich bei den FE-Rechnungen größere Durchbiegungen. Der Proportionalitätsfaktor c , welcher gemäß (4.27) aus

$$f = \frac{Fl^3}{Ehb^3} \quad (4.28)$$

ermittelt werden kann, liegt für die analytische Ermittlung nach (4.17) bei 4,0 und für die FE-Rechnungen bei etwa 4,162.

Bisher wurde bei den FE-Ergebnissen aus Kapitel 4.2 nur die Meßpunktverschiebung Δy in y -Richtung betrachtet (siehe Abb. 4.16). Die bei der experimentellen Bestimmung der Durchbiegung des Biegekörpers gemessene Verschiebung Δy_{Mess} ist daher größer als Δy .

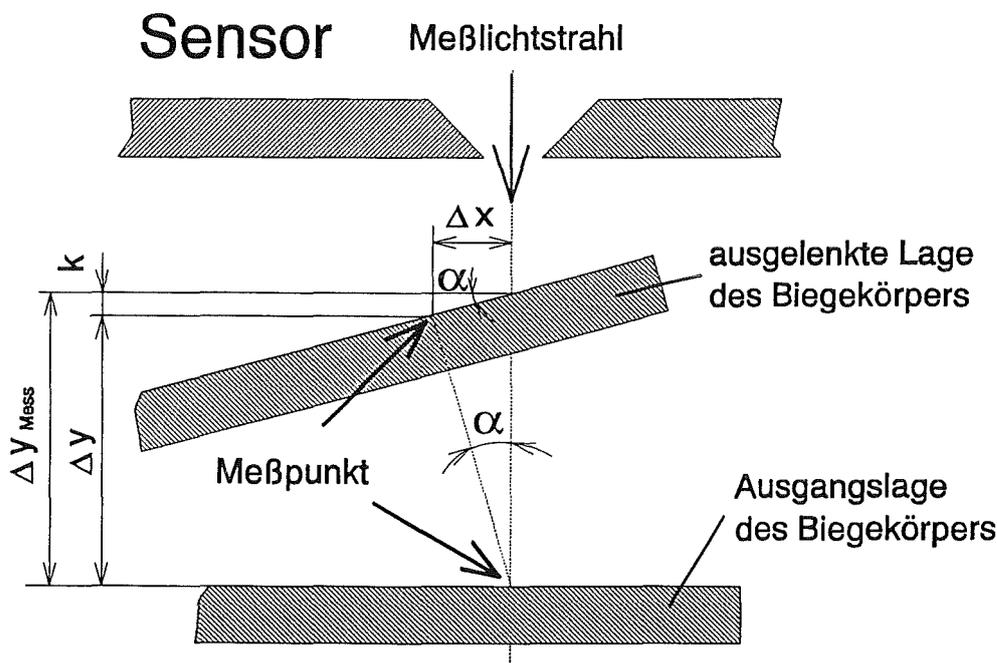


Abbildung 4.16: Meßpunktverschiebungen Δy und Δx für FE-Berechnungen und die im Experiment zu messende Verschiebung Δy_{Mess} bei der Auslenkung des Biegekörperbalkens

Mit Einführung eines Korrekturfaktors k kann der Zusammenhang zwischen Δy und Δy_{Mess} wie folgt beschrieben werden:

$$\Delta y_{Mess} = \Delta y + k \quad (4.29)$$

Zur Bestimmung von k ist die Verschiebung Δx des Meßpunktes in x -Richtung heranzuziehen. Mit Gleichsetzen der Winkelbeziehungen

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (4.30)$$

und

$$\tan \alpha = \frac{k}{\Delta x} \quad (4.31)$$

folgt für den Korrekturfaktor

$$k = \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \quad (4.32)$$

Die Abhängigkeit zwischen der Verschiebung Δx und der Verschiebung Δy zeigt Abb. 4.17 für verschiedene Biegekörperbalkenbreiten und Abb. 4.18 für verschiedene Biegekörperbalkenlängen.

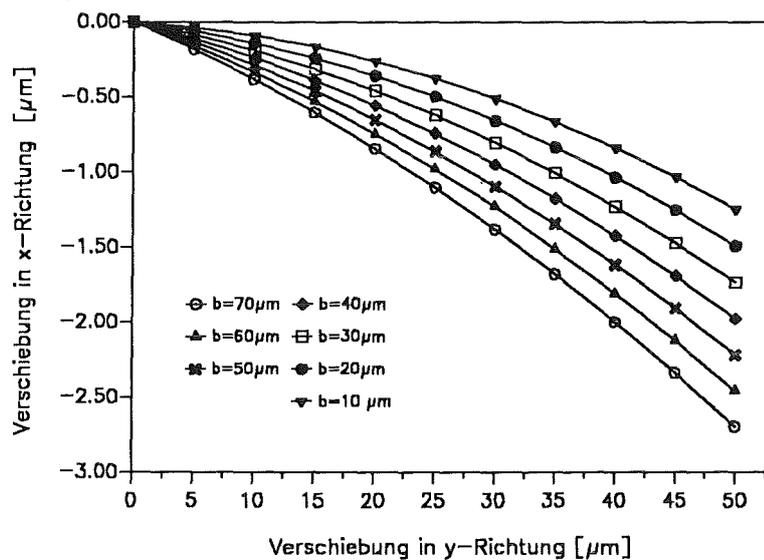


Abbildung 4.17: Verschiebung Δx in Abhängigkeit von Δy für verschiedene Biegekörperbalkenbreiten bei einer Biegekörperhöhe von $1500 \mu m$

Damit besteht die Möglichkeit, mit den aus FE-Rechnungen gewonnenen Meßpunktverschiebungswerten für verschiedene Kerbradien sowie den nachgewiesenen Proportionalitäten (4.27), der ermittelten Konstante c und dem Korrekturfaktor k eine Bestimmung der zu erwartenden Verschiebung Δy_{Mess} durchzuführen.

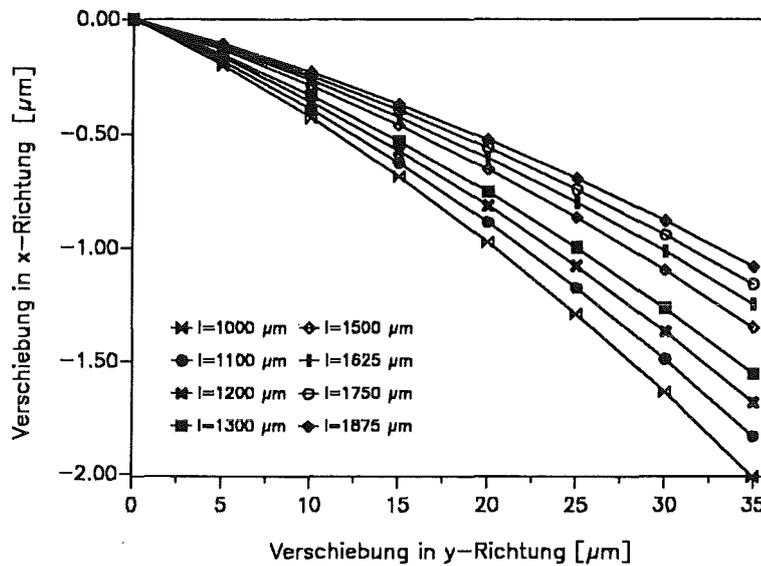


Abbildung 4.18: Verschiebung Δx in Abhängigkeit von Δy für verschiedene Biegekörperlängen bei einer Biegekörperbalkenbreite von $50 \mu\text{m}$

4.3 Beschreibung der Kontaktstelle

Bewegungsablauf

Um den Bewegungsablauf an der Kontaktstelle zwischen Druckstift und Biegekörperbalken zu beschreiben, werden (wie in Abb. 4.19 dargestellt) drei Punkte der Mikrobiegevorrichtung betrachtet, und zwar zum einen der Meßpunkt M an der Oberseite des Biegekörperbalkens und zum anderen die beiden im Ausgangszustand in Kontakt stehenden Punkte B des Biegekörperbalkens und D des Druckstiftes.

Die Indizes "0" und "t" kennzeichnen jeweils die Ausgangslage bzw. den Momentanzustand. Im Laufe des Verformungsvorganges wird der Punkt B in die positive x -Richtung um Δb_x verschoben, der Meßpunkt M hingegen erfährt eine Verschiebung Δm_x in die negative x -Richtung. Im Kontaktbereich des Druckstiftes ist eine Verschiebung des Punktes D in x -Richtung nachweisbar. Das bedeutet, daß durch die Neigung des Biegekörperbalkens aus der horizontalen Lage eine Kraftkomponente in x -Richtung initiiert wird, die zu einer Biegebeanspruchung des Druckstiftes führt.

Die folgende Tabelle 4.3 zeigt die numerisch ermittelten Verschiebungen des Meßpunktes M und der beiden Punkte B und D, die sich infolge der Druckbelastung des Druckstiftes entsprechend

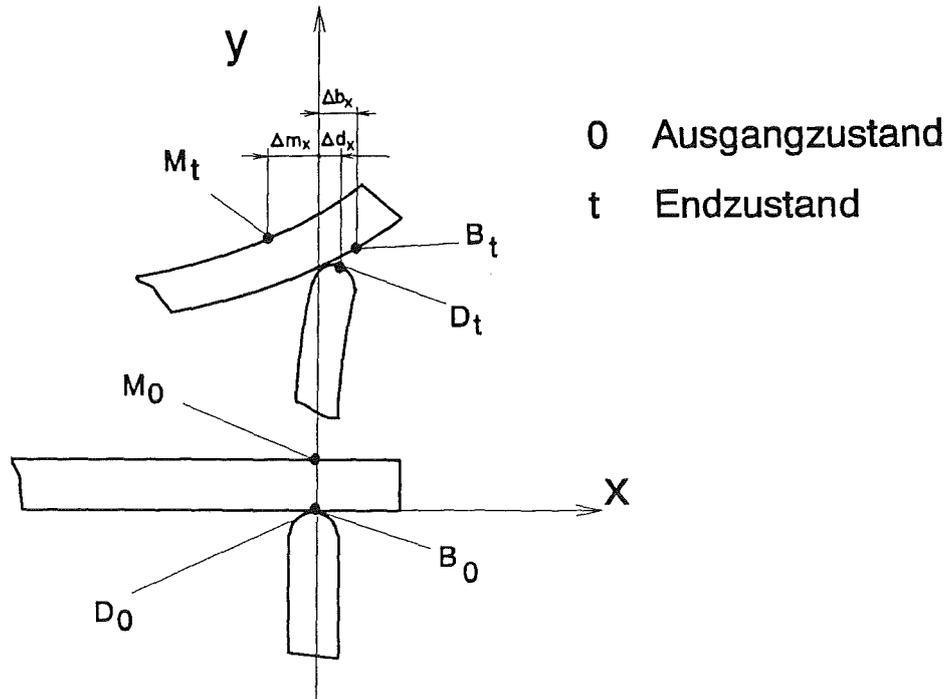


Abbildung 4.19: Bewegungsablauf der ortsfesten Bezugspunkte M (Meßpunkt), D (Punkt des Druckstiftes) und B (Punkt des Biegebalkens) vom Ausgangszustand (0) zum Endzustand (t)

einer resultierenden Kraft von 12 mN ergeben.

	Verschiebung in x -Richtung	Verschiebung in y -Richtung
Meßpunkt M	$\Delta m_x = -2,6606 \mu m$	$\Delta m_y = 56,582 \mu m$
Punkt B des Biegekörpers	$\Delta b_x = 0,12858 \mu m$	$\Delta b_y = 56,661 \mu m$
Punkt D des Druckstiftes	$\Delta d_x = 4,2584 \cdot 10^{-2} \mu m$	$\Delta d_y = 56,616 \mu m$

Tabelle 4.3 : Verschiebung des Meßpunktes M und der anfangs in Kontakt stehenden Punkte B und D (siehe Abb. 4.19)

Reibungseinfluß

Unter Berücksichtigung der Reibung können größere Verschiebungswerte für den Meßpunkt M und die beiden Punkte B und D (siehe Abb. 4.19) in y -Richtung nachgewiesen werden, wie bereits in Kapitel 4.2.4 (siehe auch Verschiebungswerte Abb. 4.15) erwähnt. Dies kann mit der

Gleitbehinderung der beiden Körper im Kontaktbereich erklärt werden, die zu einer geringeren Verschiebung des Druckstiftes in x -Richtung in der Kontaktzone und damit zu einer weiteren Auslenkung des Biegekörpers führt. Bezogen auf das Koordinatensystem in Abb. 4.19 führt dies zu einer größeren Verschiebung Δm_x des Meßpunktes in x -Richtung und zu einer geringeren Verschiebung Δx_b in x -Richtung des Punktes B.

Die Reibungseinflüsse im Kontaktbereich Druckstift/Biegekörper tragen jedoch nur unwesentlich zur Verschiebungsänderung des Meßpunkts bei.

4.4 Spannungsverhältnisse an der Kerbstelle

Für die Spannungsanalyse im Kerbbereich wird für fünf verschiedene Kerbradien r eine Netzverfeinerung vorgenommen. Zur besseren Beschreibung der Spannungsverteilung werden auch Spannungszustände unter der Oberfläche betrachtet. Abb. 4.20 *a* zeigt ein Netz an der Kerb-
stelle mit den in verschiedenen Tiefen T angeordneten Linien, entlang denen die v . Mises-Vergleichsspannungen aufgetragen werden. Für den Grundkerbradius von $2 \mu\text{m}$ ergibt sich der in Abb. 4.20 *b* dargestellte Spannungsverlauf für unterschiedliche Tiefen T .

Bezogen auf das in Abb. 4.20 *a* dargestellte s, T -Koordinatensystem erfolgt im weiteren eine Beschreibung der Spannungsverläufe.

Der Anfangsbereich ($-10 < s < 0$) (Abb. 4.20 *b*) zeigt einen schnellen Anstieg der Spannungswerte, was mit der Lasteinleitung vom Biegekörperbalken in den Klotz erklärt werden kann. Hier liegen an der Oberfläche zunächst geringere Spannungen als im Inneren vor. Der Vergleichsspannungsverlauf zeigt im weiteren Verlauf eine infolge Kerbwirkung, insbesondere auf der Oberfläche, stark überhöhte Vergleichsspannung ($0 < s < 5$), die sich dann mit zunehmendem Abstand von der Kerbe einer konstanten Biegespannung annähert ($s > 5$). Es ist die lineare Abnahme der Biegespannung senkrecht zu Oberfläche für $s > 5$ erkennbar. Ab einer Tiefe von $3,3 \mu\text{m}$ ist nur noch eine geringe Spannungsüberhöhung nachweisbar.

Basierend auf diesem Ergebnis erfolgte eine Betrachtung der Spannungen auf der Oberfläche und in einer Tiefe von $1,7 \mu\text{m}$ (Abb. 4.21) für unterschiedliche Ausrundungsradien.

Man erkennt, daß ein zunehmender Radius zu einem Abbau der Spannungsspitzen und zu einem flacheren Spannungsanstieg bis zum Maximum führt. Für einen Abstand $s \geq 20 \mu\text{m}$ von der Kerbe ist ein Kerbeinfluß bezüglich der Spannungen nicht mehr nachweisbar. Dies zeigen auch die in Abb. 4.22 *a* dargestellten Spannungsisolinien, die rechts vom Kerbbereich in einen horizontalen Verlauf übergehen. Der hier erreichte Spannungswert ist auf die Biegebelastung des Biegekörperbalkens zurückzuführen. Mit den Spannungsisolinien kann das Spannungsmaximum

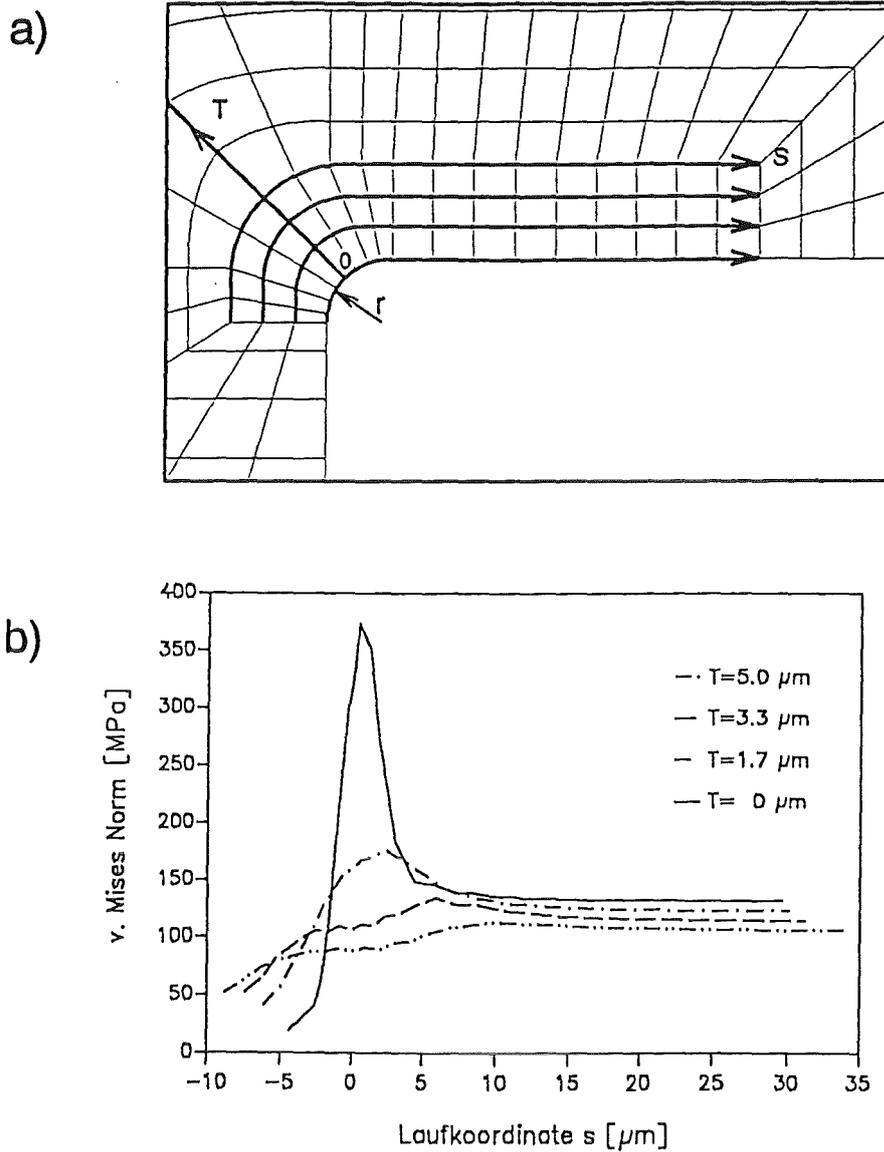


Abbildung 4.20: a) Netz an der Kerbe und b) Spannungsverlauf in unterschiedlichen Tiefen T für einen Kerbradius von $2 \mu m$

(siehe Punkt A in Abb. 4.22 b) lokalisiert werden, das sich nicht in der Mitte des Kerbbogens befindet, sondern in Richtung des Biegekörperbalkens verschoben ist.

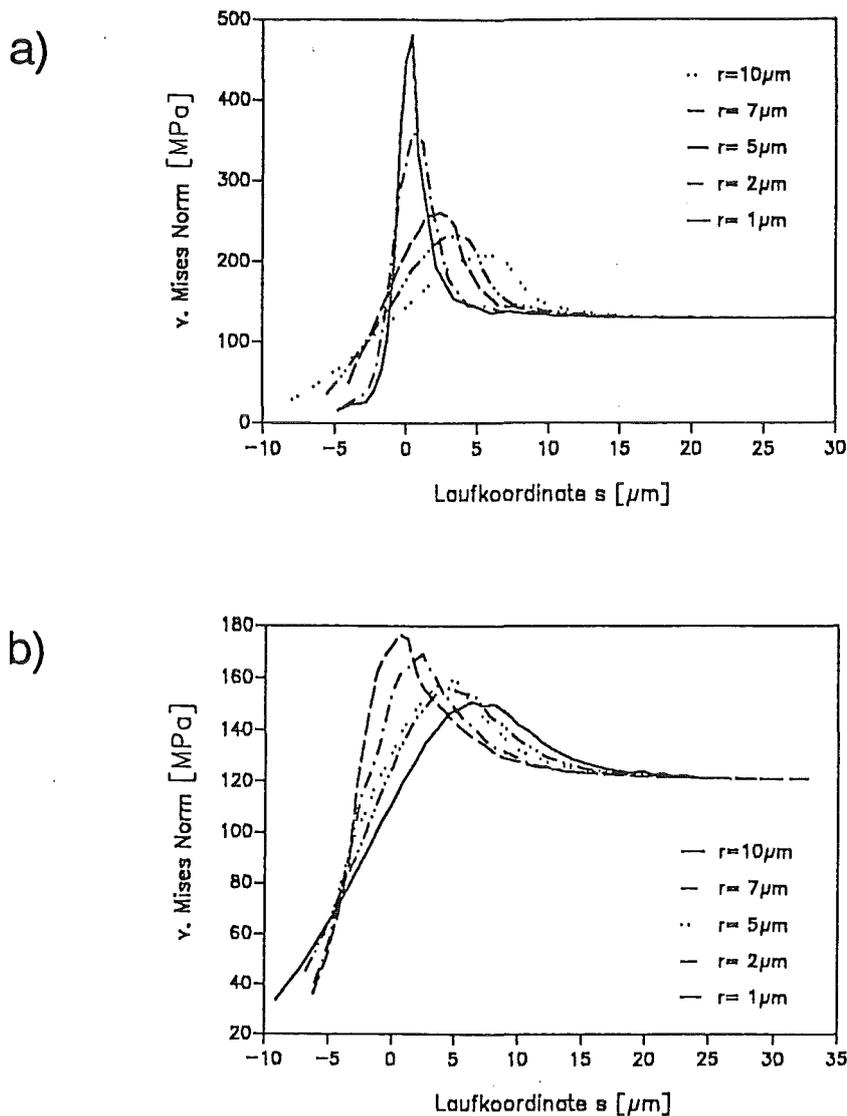


Abbildung 4.21: a) Spannungsverläufe an der Oberfläche und b) in einer Tiefe von $1.7 \mu\text{m}$ für verschiedene Kerbradien r

Im Bereich der Kerbe kommt es durch die vorgegebene Druckbeaufschlagung des Druckstiftes entsprechend einer Kraft von 7 mN zu plastischen Deformationen. Zur Ermittlung der maximal zulässigen Belastungskraft am Druckstift, bei der noch keine plastische Deformation im Kerbgrund eintritt, kann Abb. 4.23 herangezogen werden. Hier ist die Vergleichsspannung ($v.$ Mises Norm) des maximal belasteten Knotens im Kerbgrund (siehe Punkt A in Abb. 4.22 b) in Abhängigkeit von der Belastungskraft durch den Druckstift für unterschiedliche Kerbradien r dargestellt. Dabei wurde am Beispiel eines Kerbradius von $r = 2 \mu\text{m}$ die Proportionalität zwischen der Vergleichsspannung und der Druckbeaufschlagung des Druckstiftes nachgewiesen.

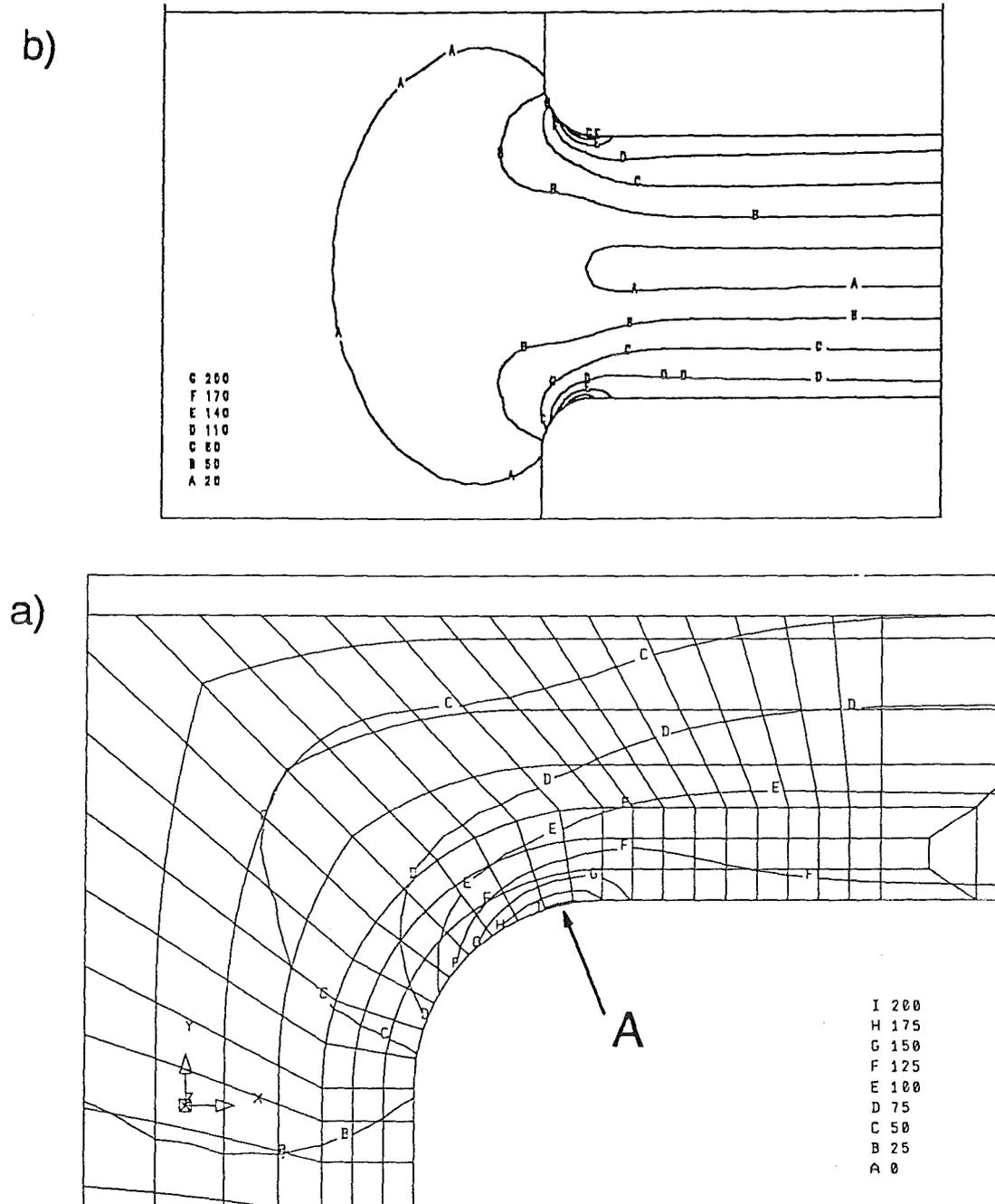


Abbildung 4.22: Spannungsisolinien der Kerbstelle für einen Kerbradius von $r = 10 \mu m$

Oberhalb der Fließgrenze, die bei einer Vergleichsspannung von 50 N/mm^2 (hier für reines geglähtes Kupfer aus [16]) erreicht wird, erwartet man plastische Verformung. An der Fließgrenze kann für große Kerbradien eine entsprechend höhere Druckbeaufschlagung toleriert werden. Bei der zugrundegelegten Belastung von 7 mN wird die Fließgrenze für alle Kerbradien überschritten.

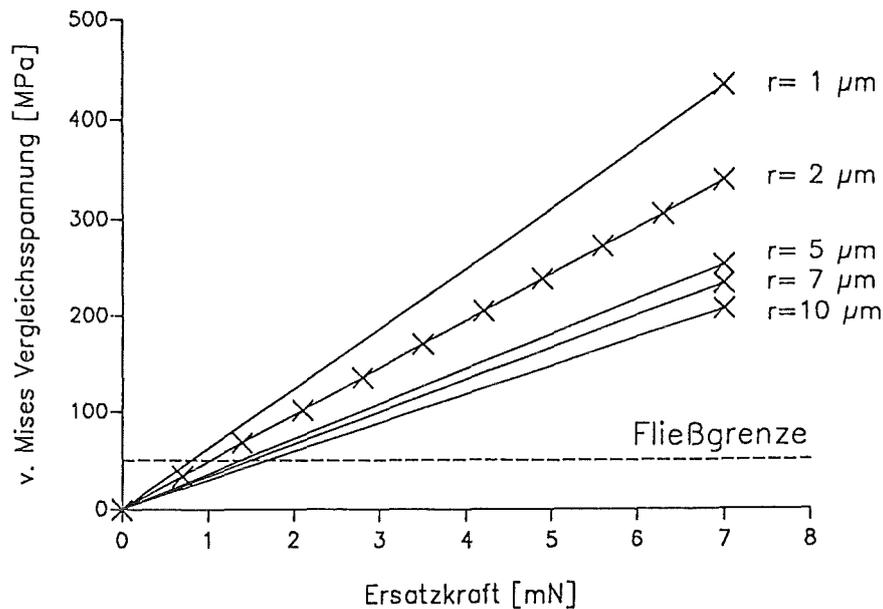


Abbildung 4.23: Vergleichsspannung des maximal belasteten Knotens im Kerbgrund (siehe Punkt A aus Abb. 4.23) für verschiedene Kerbradien r in Abhängigkeit von der Druckbeaufschlagung des Druckstiftes für Kupfer

4.5 Diskussion der FE-Rechnungen mit dreidimensionaler Netzstruktur

Zur genaueren Ermittlung des Verformungsverhaltens der Mikrobiegevorrichtung sowie zur Beurteilung der für das zweidimensionale Modell getroffenen Annahmen wurden FE-Berechnungen, basierend auf dem in Kapitel 3.1 beschriebenen dreidimensionalen Ersatzmodell, durchgeführt. Um die in Kapitel 3.3 beschriebene dreidimensionale Kontaktpaarung Interelement/Slideline zwischen Druckstift und Biegekörper zu realisieren, wurde das dreidimensionale Netz schichtweise generiert (siehe Abb. 3.11). Dabei entstand das in Abb. 4.24 dargestellte Netz mit insgesamt 8 Slide-Ebenen. Zur genaueren Analysierung der Spannungsverhältnisse im Kontakt- und Kerbbereich wurde an der Unter- und Oberseite des Netzaufbaus ein geringer Abstand zwischen den Ebenen vorgesehen. Die dreidimensionalen Rechnungen wurden aus Konvergenzgründen ohne Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten durchgeführt.

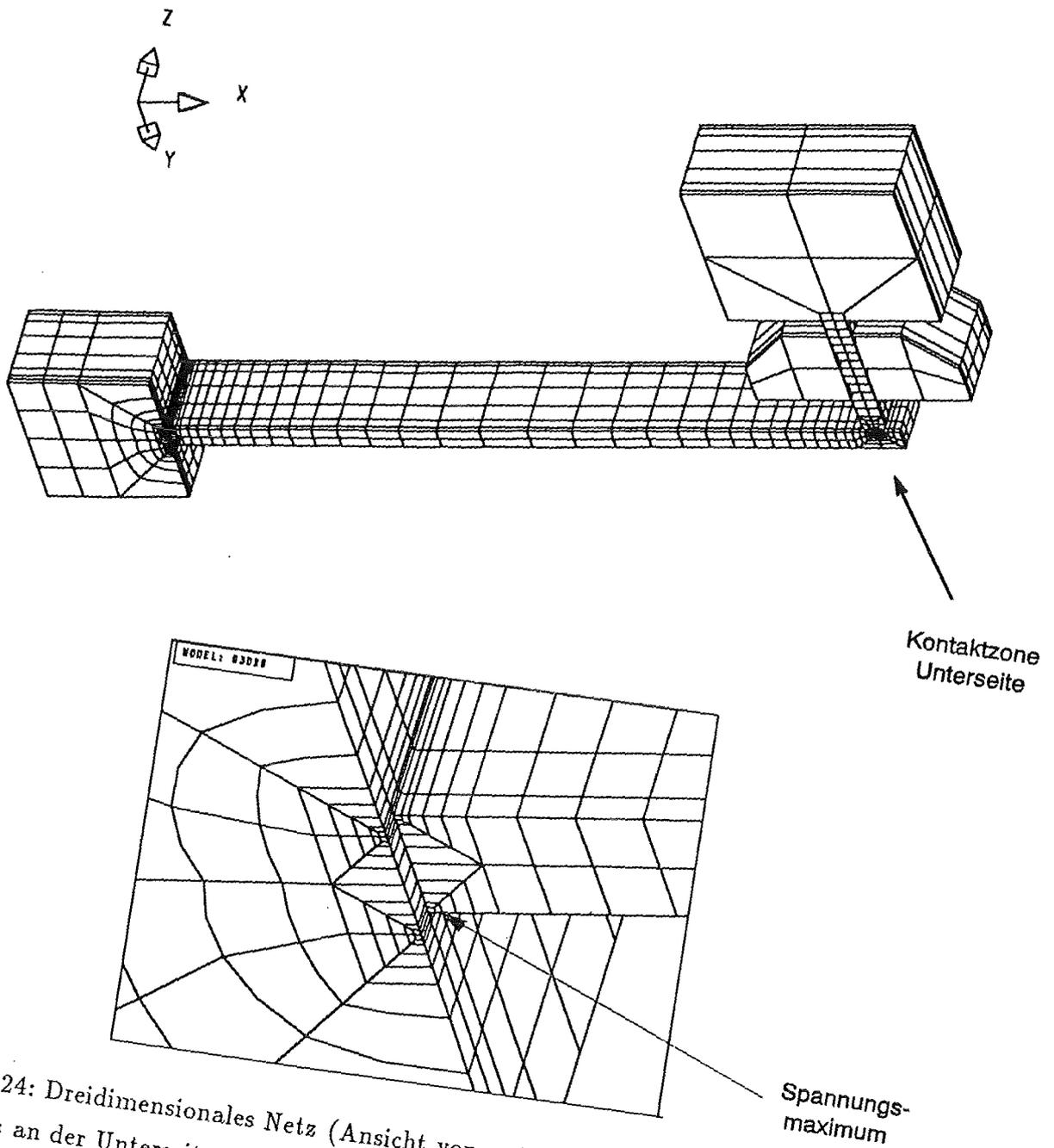


Abbildung 4.24: Dreidimensionales Netz (Ansicht von unten) mit Ausschnittvergrößerung des Kerbbereiches an der Unterseite

Verschiebungswerte

Die Belastung des Druckstifts führt bei der dreidimensionalen FE-Rechnung (verglichen mit einer zweidimensionalen Berechnung ohne Berücksichtigung nichtlinearer Geometrie) zu einer geringeren Durchbiegung des Biegekörperbalkens. In Tabelle 4.4 ist die Meßpunktverschiebung in y -Richtung für diese beiden Fälle wiedergegeben.

	2D-Rechnung	3D-Rechnung
Meßpunktverschiebung in <i>y</i> -Richtung in μm	33,097	32.627

Tabelle 4.4: Verschiebungswerte des Meßpunktes mit zweidimensionalen und dreidimensionalen FE-Rechnungen

Bei dem in Kapitel 4.1.3 untersuchten Balken konnten für die dreidimensionale Berechnung ebenfalls geringere Durchbiegungen nachgewiesen werden (siehe Tabelle 4.1).

Die Abweichung der Meßpunktverschiebung bei der Mikrobiegevorrichtung kann sowohl mit den unterschiedlichen Einspannverhältnissen des Klotzes als auch mit der unterschiedlichen Vernetzung erklärt werden. Eine weitere Netzverfeinerung kann mit den gewonnenen Erfahrungen nur zu einer geringfügig verbesserten Genauigkeit führen. Der dafür erforderliche Rechenaufwand rechtfertigt nicht die zu erwartenden Ergebnisse. Unter der Annahme, daß die dreidimensionale Struktur das reale Verformungsverhalten besser beschreibt, ergibt sich bei den zweidimensionalen Berechnungen ein Fehler für die Meßpunktverschiebung von 1,44 %. Im Vergleich zur experimentellen Bestimmung des Elastizitätsmoduls würde ein Fehler dieser Größenordnung Abweichungen von 1,42 % erwarten lassen.

Kontakt- und Kerbbereich

An der Unterseite der Kontaktzone (siehe Abb. 4.24) kann eine Erhöhung der Kontaktspannung nachgewiesen werden. Diese kann mit den Einspannverhältnissen des Biegekörpers erklärt werden, da im Vergleich zur zweidimensionalen Rechnung die Unterseite des Klotzes fest eingespannt ist. Die ungleichmäßige Spannungsverteilung im Kontaktbereich des Biegekörpers führt zu einer Torsionsbeanspruchung des Biegekörperbalkens. Damit erklärt sich auch die im unteren Kerbbereich auftretende maximale Spannungsbelastung, die in der Ausschnittvergrößerung von Abb. 4.24 dargestellt ist.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Verformungsverhalten der Mikrobiegevorrichtung unter Verwendung makroskopisch ermittelter Elastizitätsgesetze mit Hilfe eines Finite-Elemente-Programms simuliert. In zweidimensionalen FE-Rechnungen wurden für den Biegekörper die geometrischen Abmessungen, die Materialparameter und die Belastung durch Druckbeaufschlagung des Druckstiftes variiert. Mit diesen Rechnungen konnte nachgewiesen werden, daß das Verformungsverhalten des Biegekörpers hinreichend genau mit der Balkentheorie für den schubstarrten Balken beschrieben werden kann.

Zur vollständigen Beschreibung des Verformungsverhaltens der Mikrobiegevorrichtung wurden zusätzlich dreidimensionale Vergleichsrechnungen durchgeführt. Ein Vergleich der zweidimensionalen mit den dreidimensionalen Berechnungsergebnissen bestätigt die für die zweidimensionalen Rechnungen zugrundegelegten Annahmen bezüglich der Einspannverhältnisse des Klotzes sowie der Elementwahl. Die Meßpunktverschiebung des Biegekörpers kann daher mit einer zweidimensionalen Struktur hinreichend genau beschrieben werden. Geringfügige Differenzen ergaben sich im Verformungsverhalten des Klotzes und der daraus resultierenden Torsion des Biegekörperbalkens.

Es zeigte sich, daß die Reibung im Kontaktbereich, in dem die Lasteinleitung vom Druckstift in den Biegekörper stattfindet, nur unwesentlichen Einfluß auf die Auslenkung des Biegekörperbalkens hat.

Die durchgeführten Berechnungen ermöglichen eine Beschreibung der im Kontaktbereich Druckstift/Biegekörper auftretenden Vorgänge. Dies betrifft den Bewegungsablauf des Druckstiftes und des Biegekörperbalkens sowie deren Reibungseinfluß. Ein Kontakt des Druckstiftes mit dem Lager konnte bei der hier verwendeten Führung des Druckstiftes nicht nachgewiesen werden.

Von besonderer Bedeutung war die Untersuchung der an der Kerbstelle des Biegekörpers auftretenden Spannungsüberhöhungen in Abhängigkeit vom Kerbradius. Es konnten Aussagen über den Beginn plastischer Deformationen im Kerbbereich, abhängig vom Kerbradius und der Belastung, gemacht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] K. WEINDEL: unveröffentlichter Bericht des Instituts für Mikrosystemtechnik (1993).
- [2] KfK 5238: 1. Statuskolloquium des Projektes Mikrosystemtechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe (9/1993).
- [3] E. SOMMER UND J.M. OLAF: *Mechanische Eigenschaften von Mikrokomponenten bestimmen*, Materialprüfung 36 (1994).
- [4] R. DE BOER: *Vektor- und Tensorrechnung für den Ingenieur*, Springer-Verlag (1982).
- [5] K. -J. BATHE: *Finite Elemente Methoden*, Springer-Verlag (1986).
- [6] ST. HARTMANN: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität - Ein Finite-Elemente-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Dissertation Kassel (1993).
- [7] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS theory version 5.3*
- [8] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS user's manual version 5.3*
- [9] SCHELL, GROSS, HAUGER: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*, Springer-Verlag (1989).
- [10] E. PESTEL, J. WITTENBURG: *Technische Mechanik Band 2: Festigkeitslehre*, B.I.-Wissenschaftsverlag (1981).
- [11] BRAESS, DIETRICH : *Finite Elemente*, Springer-Verlag (1982).
- [12] SCHWARZ, HANS RUDOLF: *Methode der finiten Elemente*, Teubner (1980).
- [13] GROSS, HAUGER, SCHELL, WRIGGERS: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*, Springer-Verlag (1983).
- [14] DUBBEL: *Taschenbuch für den Maschinenbau*, 16. Auflage, Springer-Verlag (1987).

- [14] DUBBEL: *Taschenbuch für den Maschinenbau*, 16. Auflage, Springer-Verlag (1987).
- [15] HÜTTE: *Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*, 29. Auflage, Springer-Verlag (1989).
- [16] H. SCHUMANN: *Metallographie*, 9. Auflage, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig (1975).

Anhang

A: Bestimmung der Terme A , B , C

Es werden folgende Definitionen und Umformungen benötigt:

$$\bar{\mathbf{h}} := \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}$$

$$\delta \mathbf{h}^{t+\Delta t} := \text{grad } \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}$$

$$= \frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}$$

$$= \frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}} = \text{GRAD } \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{F}^{t+\Delta t}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}} \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^0} = \bar{\mathbf{h}} {}^0 \mathbf{F}^{t+\Delta t}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} = \frac{\partial (\mathbf{x}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^0} = {}^0 \mathbf{F}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{1}$$

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} \Rightarrow D(\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1})[\Delta \mathbf{u}] = D(\mathbf{F})[\Delta \mathbf{u}] \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} D(\mathbf{F}^{-1})[\Delta \mathbf{u}] = 0$$

$$D(\mathbf{F})[\Delta \mathbf{u}] = \left. \frac{d}{d\lambda} \left(\mathbf{1} + \frac{\partial (\mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}^0} \right) \right|_{\lambda=0} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}$$

$$\Rightarrow D(\mathbf{F}^{-1})[\Delta \mathbf{u}] = -\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{F}^{-1}$$

Das Materialgesetz ist mit

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathcal{C}}[\mathbf{E}]$$

gegeben [6].

- Bestimmung von Term A :

$$\begin{aligned}
A &= D \left\{ \mathbf{S}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{h}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \\
&= D \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{u}) \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} + \\
&\quad + \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot D \left\{ \delta \mathbf{h}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \\
&: = A_1 + A_2 \\
A &= A_1 \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} + A_2 \\
&= \left(\bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} + \mathcal{C} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] + \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i^T \right) \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i \\
&= \mathcal{C} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} + \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} + \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} \\
&\quad - \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i \\
&= \mathcal{C} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} + \text{sp} \left[\bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} (\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t})^T \right] + \text{sp} \left[\mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i (\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t})^T \right] \\
&\quad - \text{sp} \left[\mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i^T (\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t})^T \right] \\
&= \mathcal{C} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} + \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \bar{\mathbf{h}}_i^T \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t} \\
A &= \mathcal{C} [\text{sym } \bar{\mathbf{h}}_i] \cdot \text{sym} [\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] + \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{sym} [\bar{\mathbf{h}}_i^T \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}]
\end{aligned}$$

- Bestimmung von Term A_1 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= D \{ \mathbf{F}(\mathbf{u}) \} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot {}_0 \tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left({}^0 \mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T + \\
&\quad + {}^0 \mathbf{F}_i^{t+\Delta t} D \left\{ \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \left({}^0 \mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T + \\
&\quad + {}^0 \mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \cdot {}_0 \tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} D \left\{ \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0 \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \\
&: = A_{11} + A_{12} + A_{13} \\
A_1 &= \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} + \mathcal{C} [\text{sym} (\bar{\mathbf{h}}_i)] + \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} (\bar{\mathbf{h}}_i)^T
\end{aligned}$$

- Bestimmung von A_{11} :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= D \{ \mathbf{F}(\mathbf{u}) \} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \mathbf{0}\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= D \{ \mathbf{1} + \mathbf{H}(\mathbf{u}) \} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \mathbf{0}\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left(\mathbf{1} + \frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} \right) \Bigg|_{\substack{\lambda=0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}} \mathbf{0}\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^0} \mathbf{0}\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \frac{\partial\mathbf{x}_i^{t+\Delta t}}{\partial\mathbf{x}^0} \mathbf{0}\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \mathbf{0}\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
A_{11} &= \bar{\mathbf{h}}_i \mathbf{S}_i^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

- Bestimmung von A_{12} :

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} D \{ \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} D \{ \tilde{\mathcal{C}}[\mathbf{E}] \} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[D \{ \mathbf{E} \} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \right] \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} + \left(\frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} \right)^T \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} \right)^T \frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} \right) \right] \Bigg|_{\substack{\lambda=0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T \\
&= \mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^0} + \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^0} \right)^T + \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^0} \right)^T \frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial(\mathbf{u} + \lambda\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}^0} \right)^T \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^0} \right) \right] \Bigg|_{\substack{\lambda=0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}} \left(\mathbf{0}\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} + (\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T + (\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0} \right)^T \bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right) \right]_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \\
&= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} + (\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T + (\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T + ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right) \right] ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \\
&= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{2} \left(({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \bar{\mathbf{h}}_i^T {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} + ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \bar{\mathbf{h}}_i {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right) \right] ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \\
&= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{C}} \left[({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T (\text{sym}(\bar{\mathbf{h}}_i)) {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \right] ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T
\end{aligned}$$

Mit der im nächsten Punkt in Indexnotation angegebenen Umformung ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \left(({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \otimes ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^T \right)^{T^{14}} \tilde{\mathcal{C}} ({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} \otimes {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t})^{T^{14}} [\text{sym}(\bar{\mathbf{h}}_i)] \\
&:= \mathcal{C} [\text{sym}(\bar{\mathbf{h}}_i)]
\end{aligned}$$

- Zwischenschritt zur Bestimmung von A_{12} :

$$\tilde{h}_{ij} = (\text{sym} \bar{\mathbf{h}})_{ij}$$

$$\begin{aligned}
A_{12}_{fe} &= F_{fa} \tilde{\mathcal{C}}_{abcd} F_{ic} \tilde{h}_{ij} F_{jd} F_{eb} \\
&= F_{eb} F_{fa} \tilde{\mathcal{C}}_{abcd} F_{jd} F_{ic} \tilde{h}_{ij} \\
&= F_{be}^T F_{af}^T \tilde{\mathcal{C}}_{abcd} F_{jd} F_{ic} \tilde{h}_{ij} \\
&= (F^T \otimes F^T)_{feab}^{T^{14}} \tilde{\mathcal{C}}_{abcd} (F \otimes F)_{cdij}^{T^{14}} \tilde{h}_{ij} \\
\Rightarrow A_{12} &= (F^T \otimes F^T)^{T^{14}} \tilde{\mathcal{C}} (F \otimes F)^{T^{14}} [\text{sym} \bar{\mathbf{h}}] \\
&:= \mathcal{C} [\text{sym} \bar{\mathbf{h}}]
\end{aligned}$$

- Bestimmung von A_{13} :

Analog zur Bestimmung von A_{11} ergibt sich

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} {}^0\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} D\left\{\mathbf{F}^T(\mathbf{u})\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \\
 &= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} {}^0\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{H}}^T \\
 &= {}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t} {}^0\tilde{\mathbf{T}}_i^{t+\Delta t} \left({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t}\right)^T \bar{\mathbf{h}}_i^T \\
 A_{13} &= \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i^T
 \end{aligned}$$

- Bestimmung von A_2 :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot D\left\{\delta \mathbf{h}^{t+\Delta t}\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \\
 &= \mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \left(D\{\text{GRAD } \delta\mathbf{u}\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \left({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t}\right)^{-1}\right. \\
 &\quad \left.+ (\text{GRAD } \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}) D\left\{\left({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t}\right)^{-1}\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}]\right) \\
 &= -\mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \text{GRAD } \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t} \left({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t}\right)^{-1} \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}_0} \left({}^0\mathbf{F}_i^{t+\Delta t}\right)^{-1} \\
 &= -\mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \frac{\partial\delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial\mathbf{x}_0} \frac{\partial\mathbf{x}_0}{\partial\mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}_0} \frac{\partial\mathbf{x}_0}{\partial\mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \\
 &= -\mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \frac{\partial\delta\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}{\partial\mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \\
 A_2 &= -\mathbf{S}_i^{t+\Delta t} \cdot \delta\mathbf{h}_i^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{h}}_i
 \end{aligned}$$

- Bestimmung von B :

$$\begin{aligned}
 B &= D\left\{{}^0\mathbf{f}^{t+\Delta t} \cdot \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \\
 &= D\left\{{}^0\mathbf{f}^{t+\Delta t}\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \cdot \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t} + {}^0\mathbf{f}_i^{t+\Delta t} \cdot D\left\{\delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \\
 &= D\left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{t+\Delta t} \frac{dV^{t+\Delta t}}{dV^0}\right\}\Big|_{\mathbf{u}={}^0\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}}[\Delta\mathbf{u}] \cdot \delta\mathbf{u}^{t+\Delta t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D \left\{ {}_{t+\Delta t} \mathbf{f}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \frac{dV^{t+\Delta t}}{dV^0} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \\
&\quad + {}_{t+\Delta t} \mathbf{f}_i^{t+\Delta t} D \left\{ \frac{dV^{t+\Delta t}}{dV^0} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

- Bestimmung von C :

Analog zur Bestimmung von B ergibt sich

$$\begin{aligned}
C &= D \left\{ {}_0 \mathbf{t}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \\
&= D \left\{ {}_{t+\Delta t} \mathbf{t}^{t+\Delta t} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \frac{dA^{t+\Delta t}}{dA^0} \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \\
&\quad + {}_{t+\Delta t} \mathbf{t}_i^{t+\Delta t} D \left\{ \frac{dA^{t+\Delta t}}{dA^0} \right\} \Big|_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} [\Delta \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

B

An dieser Stelle wird der Zusammenhang zwischen der Formulierung des Newton-Verfahrens nach [7] und der nach [5] S.370 angegebenen Update-Lagrange-Formulierung für deformationsunabhängige Lasten unter Einbeziehung folgender Definitionen dargestellt. Da in [5] die Update-Lagrange-Formulierung für ein modifiziertes Newton-Verfahren (Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen im 1. Iterationsschritt wird für das Inkrement beibehalten) angegeben ist, entfällt der Iterationsindex

$$\begin{aligned}
e &:= \text{sym} [\bar{\mathbf{h}}_i] = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{h}}_i + \bar{\mathbf{h}}_i^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \right) \\
\delta e &:= \text{sym} [\delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \right) \\
\delta \eta &:= \text{sym} [\bar{\mathbf{h}}^T \delta \mathbf{h}_i^{t+\Delta t}] = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right)^T \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_i^{t+\Delta t}} \right) \\
\int_{V^t} C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV^t + \int_{V^t} T_{ij} \delta \eta_{ij} dV^t &= R^{t+\Delta t} - \int_{V^t} T_{ij} \delta e_{ij} dV^t
\end{aligned}$$