

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5501

Nichtlineare Dynamik in der Paulschen Ionenfalle

F. Roßbach
Institut für Kernphysik

April 1995

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5501

Nichtlineare Dynamik in der Paulschen Ionenfalle

F. Roßbach

Institut für Kernphysik

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung hochauflösender spektroskopischer Methoden unter Verwendung einer Paulschen Ionenfalle wurde ein Farbstoff-Ringlaser umgebaut. Durch eine verbesserte Spiegelkonfiguration konnte der Laserbetrieb stabilisiert werden.

Die Paulsche Ionenfalle wurde mit einer Kühleinrichtung versehen, mit deren Hilfe die thermische Bewegung der Ionen reduziert werden konnte. Durch die Kühlung der Fallenelektroden auf ca. 100 K wurde die Dopplerbreite der Spektren um den Faktor 1,4 verringert.

Während der Meßphase fiel jedoch auf, daß die mittlere Geschwindigkeit vor allem von der Zahl der gespeicherten Ionen abhängt. Je nach Größe des Ionenensembles schwankte die Halbwertsbreite der Absorptionsspektren um den Faktor 2,5. Die Ursache für dieses unerwartete Verhalten wird in der gegenseitigen Coulombabstoßung der Ionen gesehen. Deshalb wurde die Mathieusche Differentialgleichung mit einem nichtlinearen Störterm versehen, der aus dem Potential des Ensembles abgeleitet wurde. Das System der gekoppelten Gleichungen wurde numerisch untersucht.

Mit Hilfe der Poincaré-Abbildung konnte eine „kritische“ Grenze der Ionendichte gefunden werden, ab der chaotisches Verhalten von Lösungen des Systems einsetzt.

Anhand verschiedener Messungen zur Dynamik der Ionenbewegung konnten wesentliche Eigenschaften des kollektiven Verhaltens aufgezeigt werden. Insbesondere wurde festgestellt, daß die Zahl der gespeicherten Ionen in hohem Maß die mittlere Geschwindigkeit der Ionen und damit die Dopplerbreite der Absorptionsspektren bestimmt.

Non-linear dynamics in Pauls ion trap

Abstract

In context of the development of high-resolution laser spectroscopy using Pauls ion trap a dye laser has been modified. The laser operation has been stabilized with the help of an improved mirror configuration.

In order to reduce the thermal ion movement, a cooling system has been mounted to the ion trap. The temperature of the trap electrodes has been lowered to 100 K. In this way the Doppler width of the absorption line is reduced by factor 1.4.

The measurement shows that the average velocity of the ions depends primarily on the number of trapped ions. The FWHM of the absorption spectral distributions varied by factor 2.5 with the size of the stored ion ensemble. The origin of this feature is the Coulomb repulsion. This effect is described by an additional non-linear perturbation term, derived from the Coulomb interaction of the ion, and added to the Mathieu differential equation. The solutions of the coupled equations are given numerically.

With the help of the Poincaré-transformation a critical density value has been discovered for the start of the chaotic behaviour.

On the basis of various measuring procedures of the dynamics of the ion movement the characteristic properties of the collective behaviour are described. It has been observed that the number of trapped ions affects decisively the velocity of the ions, and thus the Doppler width of the absorption spectra.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Aufbau des Experiments | 2 |
| 2.1 | Gesamtübersicht | 2 |
| 2.2 | Die Paulsche Ionenfalle mit Kühlvorrichtung | 4 |
| 3 | Der Laser | |
| 3.1 | Allgemeine Eigenschaften von Farbstofflasern | 6 |
| 3.2 | Aufbau des Farbstofflasers | 6 |
| 3.3 | Optische Stabilität | 7 |
| 3.3.1 | Die Stabilitätsbedingung | |
| 3.3.2 | Der Astigmatismus | 11 |
| 3.3.3 | Lage und Größe des Primär- und Sekundärwaistes | 14 |
| 3.4 | Der UV-Strahl | 17 |
| 4 | Dynamik der Ionenbewegung | 19 |
| 4.1 | Mathiesche Differentialgleichungen ohne Störung | |
| 4.2 | Störung der Ionenbewegung | 23 |
| 4.2.1 | Störpotential eines statischen Ionenensembles | 23 |
| 4.3 | Mathiesche Differentialgleichungen mit Störung in drei Raumrichtungen | 25 |
| 4.3.1 | Lösungen der gekoppelten Gleichungen | 27 |
| 4.3.1 | Mathiesche Differentialgleichung mit Störung in einer Raumrichtung | 33 |
| 4.3.2 | Poincaré-Abbildung in zwei Dimensionen | 35 |
| 4.3.2.1 | Erstellung einer Poincaré-Karte | 35 |
| 4.3.2.2 | Numerische Berechnung einer Poincaré-Abbildung | 38 |
| 4.3.2.3 | Eigenwerte der Poincaré-Abbildung als Stabilitätskriterium | 42 |
| 4.3.2.4 | Chaotische Systeme | 44 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3.3 | Poincaré-Abbildung im ungestörten System | 45 |
| 4.3.3.1 | Stabile Lösungen | 45 |
| 4.3.3.2 | Instabile Lösungen | 46 |
| 4.3.3.3 | Die Eigenwerte der Jakobi-Matrix im ungestörten Fall | 47 |
| 4.3.4 | Poincaré-Abbildung mit abstoßender Störung | 48 |
| 4.3.4.1 | Verlust der Strukturstabilität des Systems | 53 |
| 4.3.5 | Linearisierung der Störung im Ursprung | 55 |
| 4.3.6 | Chaotische Eigenschaften im Fall eines <u>starken</u> anziehenden Störpotentials | 56 |
| 4.3.6.1 | Einfluß der Wahl des Arbeitspunktes auf das Ausmaß des Chaos | 64 |
| 4.3.6.2 | Einfluß einer kleinen anziehenden Störung auf die Lösungen | 66 |
| 4.3.7 | Chaotische Eigenschaften im Fall eines abstoßenden Störpotentials | 68 |
| 4.3.8 | Gegenüberstellung der Eigenschaften der Lösungen im System anziehender und abstoßender Störung | 69 |
| 4.4 | Chaotische Eigenschaften des gekoppelten Systems in drei Raumrichtungen | 72 |
| 4.4.1 | Poincaré-Abbildung in sechs Dimensionen | 72 |
| 4.5 | Anpassung der Ionendichte an die äußere Feldverteilung | 76 |
| 4.5.1 | Abhängigkeit der „kritischen“ Ionenzahl von der statischen Dichteverteilung | 76 |
| 4.5.2 | Zeitabhängige Ionendichte | 78 |
| 5 | Messungen zur Dynamik des Ionenensembles | 80 |
| 5.1 | Die kontinuierliche Einstrahlung des UV-Lichtes | 81 |
| 5.2 | Die gepulste Anregung von ¹⁷⁸Hf | 82 |
| 5.3 | Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit von der Ionenzahl | 84 |
| 5.4 | Kühlung der Ionen über das Puffergas | 84 |
| 5.5 | Oszillation der Ionenwolke im Takt der Wechselspannung | 85 |
| 5.6 | Unterschied der mittleren Geschwindigkeit im Minimum und Maximum der Wechselspannung | 86 |

| | | |
|------------------|--|------------|
| 5.7 | Abhängigkeit der Signalzählrate von der angelegten Gleichspannung | 87 |
| 5.8 | Ergebnis und Ausblick | 89 |
| Anhang A: | Programm „Zweidim“ | 91 |
| Anhang B: | Programm „Map“ | 94 |
| Anhang C: | Programm „Sechsdim“ | 98 |
| | Literaturverzeichnis | 105 |

1 Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht das Ziel, hochauflösende spektroskopische Methoden unter Verwendung einer Paulschen Ionenfalle weiterzuentwickeln. Mit ihr ist es möglich, die Isomerieverschiebung der Isotope gegenüber ihrem Kerngrundzustand zu messen, wodurch die Änderung des mittleren Kernradius bestimmt werden kann. Die so gewonnenen Meßdaten spielen eine wichtige Rolle zur Beurteilung von Kernmodellen.

Ein großer Vorteil der Paulschen Ionenfalle ist die Speicherung von Isotopen, die in sehr geringen Mengen vorliegen. Typischerweise führen Mengen von nur wenigen Nanogramm zur vollständigen Füllung der Falle. Dies geschieht, indem das zu speichernde Isotop ionisiert und gleichzeitig einem durch die Fallenelektroden geformten elektrischen Hochfrequenzwechselfeld unterworfen wird. Die gespeicherten Ionen werden dann mit Hilfe eines frequenzstabilisierten Farbstofflasers zur Resonanzfluoreszenz angeregt. Das Emissionsspektrum der Ionen wird aufgezeichnet und aus der Lage des Emissionsmaximums die Isomerieverschiebung bestimmt.

Die schnelle Bewegung der Ionen im Hochfrequenzwechselfeld führt jedoch zu einer unerwünscht hohen Dopplerverbreiterung der Emissionsspektren, so daß spezielle spektroskopische Methoden angewendet werden müssen, um die Auflösung der Spektren zu verbessern. Eine bereits entwickelte Methode zur Reduzierung der Dopplerbreite ist die Anregung der Ionen im Takt der von außen angelegten Wechselspannung [Rink92].

Eine weitere Möglichkeit, die auch im Rahmen dieser Arbeit verfolgt wurde, ist die Reduzierung der thermischen Bewegung der Ionen. Die Ionenfalle befindet sich in einem Ultrahochvakuumrezipienten. Während einer Messung dient ein Quenchgas dazu, die Verfügbarkeit eines Ions für eine weitere Anregung zu erhöhen. Durch die Kühlung des Quenchgases sollte über gaskinetische Stöße auch die thermische Bewegung der Ionen vermindert werden. Deshalb wurde in den Rezipienten eine Kühlvorrichtung integriert. Die theoretisch zu erwartende Verminderung der Geschwindigkeit durch die Kühlung wurde nicht erreicht.

Ein Grund hierfür könnte die bislang unterschätzte gegenseitige Coulombabstoßung der Ionen sein. In dieser Arbeit wird die Ionenbewegung unter Berücksichtigung dieser Abstoßung untersucht. Die der Ionenbewegung zugrundeliegenden Mathieuschen Differentialgleichungen werden mit einem Störterm erweitert und numerisch gelöst. Verschiedene Methoden werden angewandt, um die Topologie der Lösungen in Abhängigkeit von der Störung zu untersuchen. Es zeigt sich, daß das System unter bestimmten Bedingungen deterministisch-chaotische Eigenschaften besitzt.

Es werden Messungen vorgestellt, die Einblick in die Dynamik des Ionenensembles geben.

2 Aufbau des Experiments

2.1 Gesamtüberblick

Im Mittelpunkt des Experiments steht eine Paulsche Ionenfalle, in der Hafniumionen mit Hilfe eines elektrischen Wechselfeldes gespeichert sind (Bild 1). Die Ionenfalle befindet sich mit einer Kühlvorrichtung in einem ausheizbaren Ultrahochvakuumrezipienten. Die Ionen werden dort von eingestrahlem UV-Licht der Wellenlänge 301,3 nm zur Resonanzfluoreszenz angeregt, welches in einem Ringlaser mit Hilfe eines Frequenzverdopplerkristalls erzeugt wird. Ein Argonionenlaser pumpt den Ringlaser mit Licht der Wellenlänge 514 nm. Die Messung der Laserfrequenz im Ringresonator erfolgt durch ein Wellenlängenmeßgerät, das durch einen frequenzstabilisierten Helium-Neon-Laser geeicht wird. Mit Hilfe einer Iodzelle erhält man ein Iodabsorptionsspektrum und mit ihm die absolute Frequenz des Ringlasers. Eine Computersteuerung übernimmt die Frequenzdurchstimmung des Ringlasers. Gleichzeitig wird die Signalzählrate mit einem Photomultiplier (PM) und einer Zähl Elektronik aufgenommen, so daß man ein Absorptionsspektrum erhält. Mit Hilfe des elektrooptischen Modulators wird das UV-Licht gepulst erzeugt. Die Pulse haben eine Pulsbreite von ca. 80 ns und eine Frequenz, die gleich der von außen angelegten Wechselspannung ist. Dieses Verfahren ermöglicht eine Anregung der Ionen in Abhängigkeit von der Phase der Wechselspannung, so daß eine stroboskopische Momentaufnahme von Bewegungszuständen der gespeicherten Ionen entsteht. Zur Unterdrückung des Untergrundes wird die Zähl Elektronik ebenfalls gepulst aktiviert.

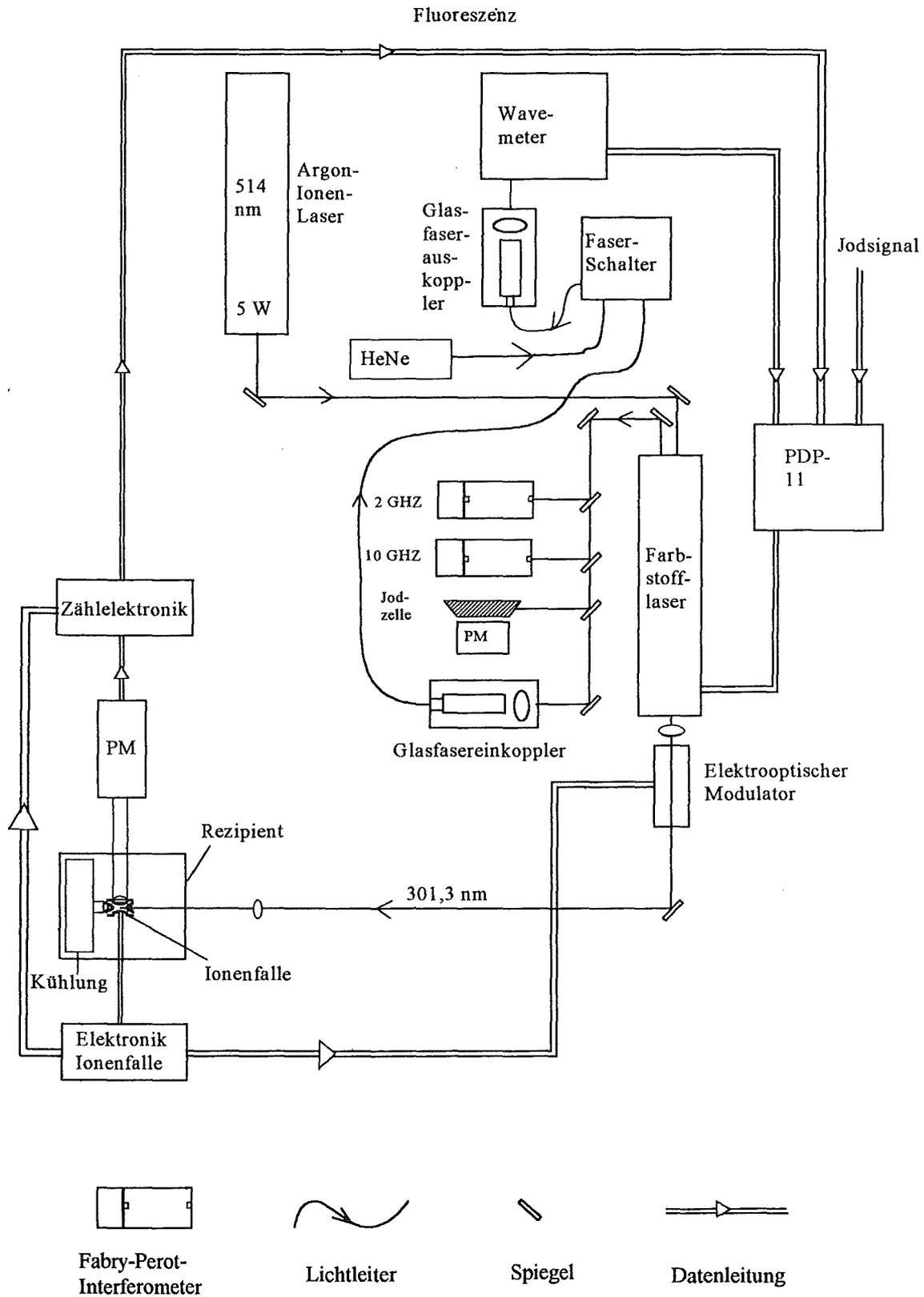


Bild 1: Schematischer Aufbau des Experiments.

2.2 Die Paulsche Ionenfalle mit Kühlvorrichtung

Bild 2 zeigt einen Schnitt durch die Ionenfalle und ihrer Kühlvorrichtung. Die Falle hängt an einem Edelstahlgefäß, das zur Aufnahme von flüssigem Stickstoff dient. Über Wärmeleitlitzen aus Kupfer, die mit dem Kühlgefäßboden verbunden sind, wird die Ionenfalle gekühlt. Ein Schirm aus Kupfer, der den gesamten Fallenkomplex umschließt, hält die Wärmestrahlung ab, die vom Rezipienten ausgeht. Er ist mit Kupferwinkeln am Kühlgefäßboden befestigt. Aussparungen dienen zum Durchlaß des Laserstrahls und der Fluoreszenzphotonen. Die Temperatur wird an verschiedenen Meßstellen mit Hilfe von Thermoelementen aus Chromel-Alumel gemessen.

An der Probenkalotte sind zwei Aussparungen für die Probendrähte angebracht. Die Drähte ragen leicht ins Falleninnere hinein. Auf einem Probendraht werden einige Nanogramm Hafniumchlorid aus einer Hafniumlösung eingetrocknet. Diese Probe wird verdampft, indem der Draht ca. 1-2 Sekunden mit einem Strom von 5-6 A durchflossen wird. Die Temperatur des Tantaldrahtes während des Glühvorgangs beträgt ca. 2500°C. Die Ionisation der verdampften Hafniumatome erfolgt durch Stoß mit Elektronen eines Glühemissionsstroms von ca. 5 mA, der zwischen Probendraht und Fallenelektrode durch Anlegen einer Gleichspannung von 10 V fließt.

Die Speicherdauer hängt in großem Maß von der Menge unerwünschter Restgase ab, die sich im Rezipienten befinden. Chemische Reaktion und Stöße mit schweren Molekülen führen zum Verlust von Ionen. Nach jedem Öffnen des UHV-Rezipienten lagern sich Gasmoleküle an, die vor einer Messung abgepumpt werden müssen. Um Restgase aus den Metallteilen der Ionenfalle auszuheizen, ist eine Tantalglühvorrichtung eingerichtet, mit der die Ionenfalle auf ca. 600°C erhitzt werden kann. Während der Ausheizphase wird der Rezipient zusätzlich von außen auf ca. 400°C erwärmt.

Ein Pumpsystem, das aus fünf hintereinandergeschalteten Vakuumpumpen besteht, vermindert den Enddruck im Rezipienten auf $2 \cdot 10^{-10}$ mbar bei Raumtemperatur.

Während der Messung wird ein leichtes Puffergas („Quenchgas“) aus Wasserstoff in den Rezipienten eingeleitet. Mit ihm stehen die Ionen für eine erneute Anregung häufiger zur Verfügung, weil sie ihre innere Energie über Stöße abgeben können. Der Druck des Puffergases wird über eine Druckregler-Elektronik und einem Reglerventil auf ca. $1 \cdot 10^{-5}$ mbar gehalten. Eine detaillierte Darstellung des Pumpstandes und des Ausheizvorganges ist in [Schre94] zu finden.

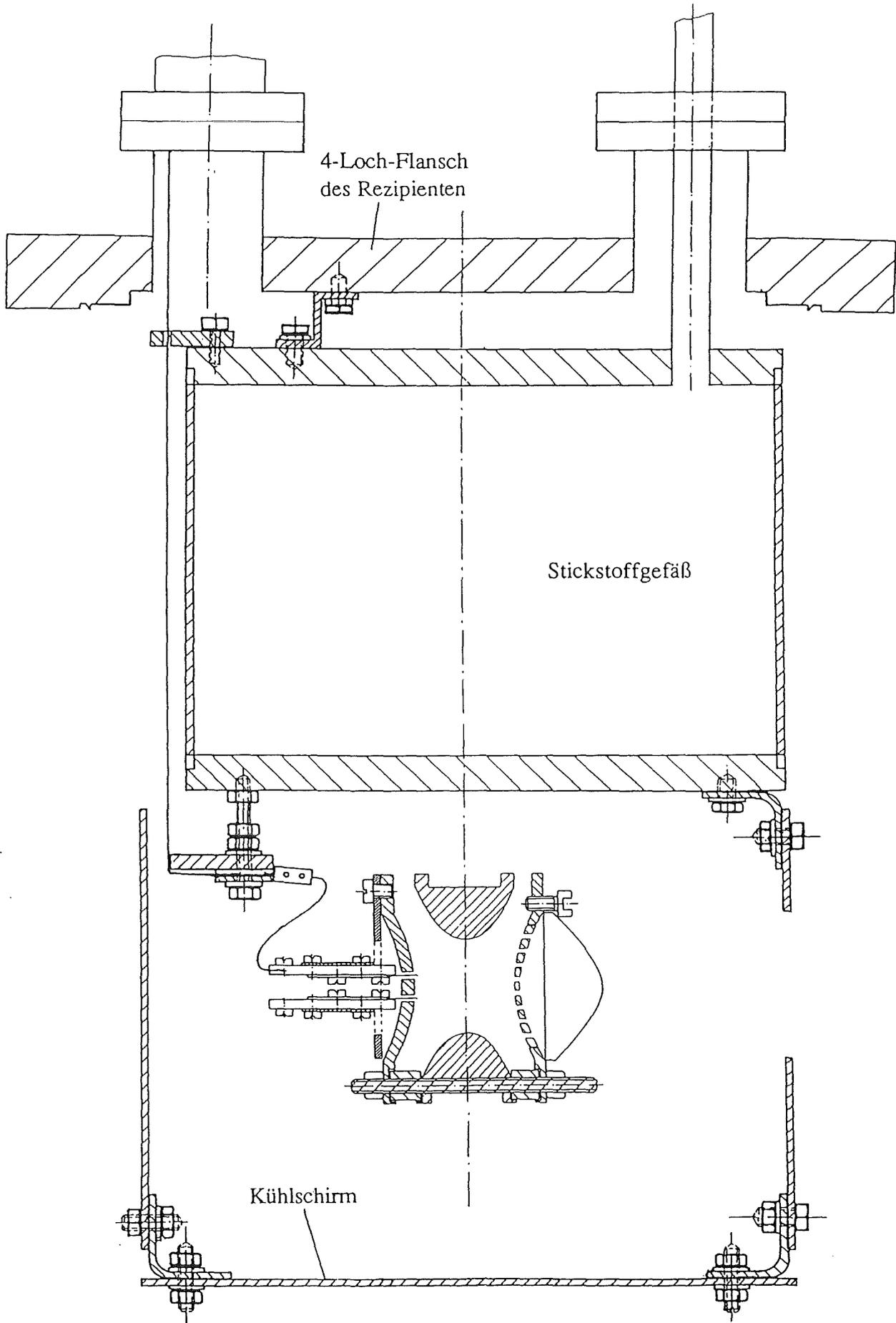


Bild 2: Schnitt durch den gesamten Fallenaufbau

3 Der Farbstofflaser

3.1 Allgemeine Eigenschaften von Farbstofflasern

Farbstofflaser zeichnen sich durch ihre weite Durchstimmbarkeit über einige zehn Nanometer aus. Durch die Verwendung verschiedener Farbstoffe läßt sich jeder gewünschte Frequenzbereich im optischen Spektralbereich überdecken. Frequenzen im Ultravioletten lassen sich durch die Verwendung von Frequenzverdopplerkristallen gewinnen. Die Frequenzverdopplung kann im Resonator oder außerhalb erfolgen. Bei der internen Frequenzverdopplung ist die ausgekoppelte UV-Leistung größer, weil im Resonator die Primärleistung sehr hoch ist im Vergleich zur Leistung des ausgekoppelten Primärlichtes. Ein Nachteil der internen Frequenzverdopplung ist die schwierigere Justierbarkeit des Farbstofflasers. Durch das zusätzliche Element im Resonator wird der Laserbetrieb viel empfindlicher.

Äußere Störungen akustischer oder thermischer Art, sowie die Brechungsindexfluktuation innerhalb des Flüssigkeitsstrahls führen zu Veränderungen des räumlichen Inversionsprofils im aktiven Medium, so daß im zeitlichen Mittel ein ganzes Modenspektrum anschwingt. Um einen einzigen Mode zu selektieren, sind optische Elemente nötig, die Verluste der unerwünschten Moden erhöhen, so daß diese die Oszillationsschwelle im Resonator nicht erreichen können. Dieses Ziel erreicht man mit Hilfe von wellenlängen-selektierenden Elementen wie z.B. dem Fabry-Perot-Etalon, der optischen Diode und dem Drei-Element-Lyotfilter [Kow91].

3.2 Aufbau des Farbstofflasers

Bild 3 zeigt schematisch die einzelnen Komponenten eines modifizierten Farbstoff-Ringlasers der Firma Coherent (Modell 699-21), der in unseren Experimenten bei 602 nm betrieben wird. Der Pumpstrahl eines Argon-Ionenlasers (Wellenlänge 514 nm) wird über den sphärischen Pumpspiegel auf den Farbstoffstrahl („Jet“) gelenkt. Die Ausgangsleistung des Argonionenlasers wurde auf 5 W eingestellt. Der Farbstoff Rhodamin-6G ist in Ethylenglykol mit einer Konzentration von ca. 1g/l gelöst. Die Flüssigkeit wird mit einem Druck von 2 bar durch eine Düse gepumpt, wobei sich an der Stelle des Pumpstrahles ein annähernd planparalleles Profil im Flüssigkeitsstrahl ausbildet. Durch eine optische Diode mit einem Faraday-Dreher wird nach dem Einsatz der Laseroszillation ein Umlaufsinn der fortschreitenden gaußschen Wellenfronten bevorzugt. Die Vielstrahlinterferenz an zwei unbeschichteten Fabry-Perot-Etalons mit freien Spektralbereichen (FSR) von 200 GHz und 50 GHz führt zusammen mit der doppelbrechenden Wirkung des Drei-Element-Lyotfilters zum Schwingen eines einzigen Mode. Die zwei gegensinnig zueinander drehenden Brewsterplatten variieren die Länge des Resonators ohne den Strahl zu versetzen, womit eine Frequenzdurchstimmung bewirkt wird. Mit ihnen werden auch Differenzen zwischen Soll- und Istwert der Laserfrequenz, die aus Störungen resultieren, über einen Regelkreis ausgeglichen. Ein Astigmatismuskompensator dient zur optischen Stabilität des Resonators.

Die Frequenzverdopplung des durch die optische Diode mit einem Umlaufsinn ausgezeichneten Lichtes geschieht in einem Lithiumjodatkristall (LiIO_3) der Länge 5,5 mm, der sich im oberen Resonatorarm zwischen den Spiegeln M3 und M4 befindet. Das UV-Licht wird anschließend am dichroitischen Spiegel M3 (Krümmungsradius 150 mm) aus dem Resonator ausgekoppelt. Die Transmission des Spiegels in der Nähe der Primärwellenlänge $\lambda=600$ nm beträgt 0,5%. Für das UV-Licht der Wellenlänge $\lambda=300$ nm beträgt sie hingegen ca. 90%. Die Spiegel M1

(„lower fold“) und M2 („tweeter“) haben Krümmungsradien von 100 mm, der Krümmungsradius von M3 („upper fold“) beträgt 150 mm, M4 ist eben.

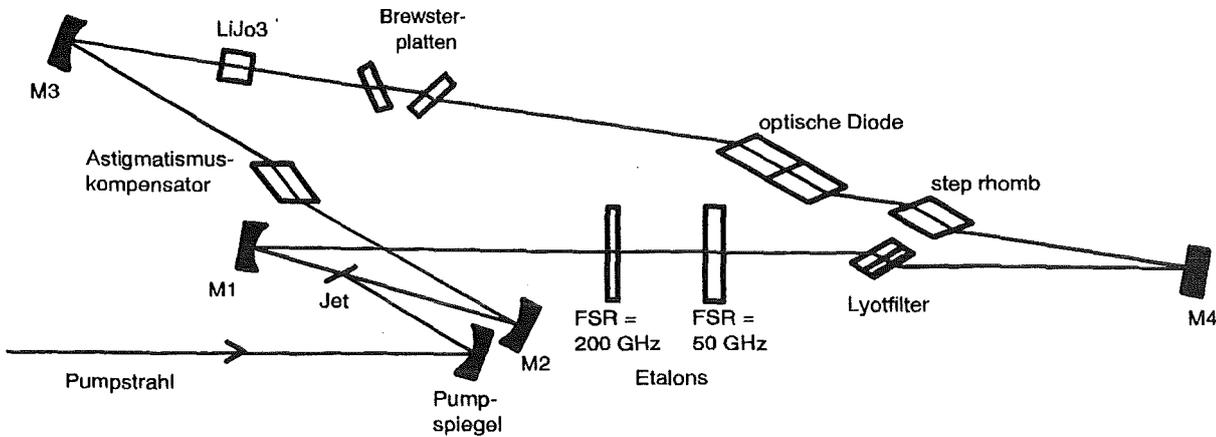


Bild 3: Die Komponenten des Farbstofflasers

Der Resonator hat insgesamt einen Umfang von ca. 1,6 m. Bereits geringfügige mechanische Störungen an den Spiegelhalterungen beeinflussen den Laser empfindlich. Aus diesem Grund wurden die von der Firma Coherent mitgelieferten Halterungen von „tweeter“, Pumpspiegel und „lower fold“-Spiegel durch stabilere mechanische Konstruktionen ersetzt und mit Differenzgewindeschrauben der Firma Microcontrol versehen. An den neuen Halterungen wurden außerdem noch Meßuhren angebracht, um die Grundjustierung des Lasers reproduzieren zu können. Der Austausch des Originaltweeterspiegels aus dem Spiegelsatz von Coherent durch einen mit einem größeren Durchmesser von 1/2 Zoll und einem größeren Krümmungsradius (100mm) vergrößert den Spielraum der Feinjustierung. Der im Nebenfokus des Resonators angebrachte Astigmatismuskompensator wurde zwecks Verringerung thermischer Effekte in Richtung des Spiegels M3 versetzt.

Befindet sich der LiIO_3 -Kristall im Resonator, wird die Primärleistung halbiert. Die ausgekoppelte UV-Leistung beträgt dann bis zu 4mW. Für die spektroskopischen Untersuchungen an Hafnium reicht eine UV-Leistung von ca. 0,7 mW aus. Während der Justierung des Lasers tritt somit das Ziel der Optimierung der Laserleistung hinter den Wunsch eines stabilen Laserbetriebs, der eine wichtige Voraussetzung für einen Vergleich und die Reproduzierbarkeit von Messungen ist.

3.3 Optische Stabilität

3.3.1 Die Stabilitätsbedingung

Da sich mit dem Austausch des Tweeterspiegels sämtliche Resonatorkenngrößen geändert haben, wurde eine Neuberechnung der wichtigsten Parameter, die für die Justierung von Bedeutung sind, angestellt. Die Laserleistung ist groß, wenn der Ort des kleinsten Strahldurchmessers (Primärfokus oder Primär„waist“), der sich zwischen den Spiegeln M1 und M2 befindet (Hauptarm), im Farbstoffstrahl („Jet“) liegt. Daher ist die Kenntnis des Ortes des Primärfokus im Hauptarm von Bedeutung. Der Ort wandert mit einer Veränderung der Spiegelabstände, so daß diese Abhängigkeit nachfolgend untersucht wird.

Befindet sich der Nebenfokus außerhalb des Astigmatismuskompensators, ist der Laserbetrieb unempfindlicher. Deshalb wurde auch die Lage des Nebenfokus in Abhängigkeit von den Spiegelabständen bestimmt.

Dazu geht man von den gaußschen Strahlparametern $w(z)$ und $R(z)$ aus. $w(z)$ bezeichnet den Radius, innerhalb dessen die elektrische Feldstärke $u(x,y)$ auf das 1/e-fache gesunken ist (Bild 5). $R(z)$ ist der Krümmungsradius der kugelförmigen Phasenflächen auf der z-Achse (Bild 4).

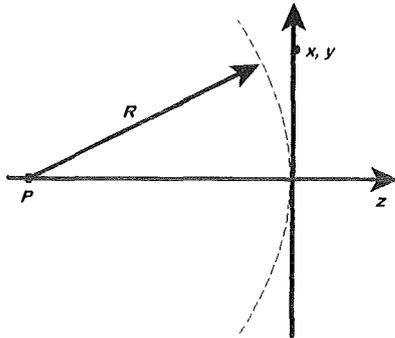


Bild 4: Krümmungsradius $R(z)$

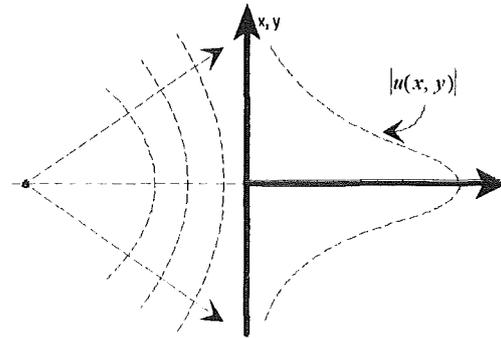


Bild 5: Waistradius $w(z)$

Diese zwei Parameter lassen sich folgendermaßen in einer Größe $q(z)$ („komplexer Krümmungsradius“) zusammenfassen:

$$\frac{1}{q(z)} := \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}$$

$\lambda=c/v$ ist die Wellenlänge des Laserlichtes. Hat der Strahl an einer Stelle z_0 des optischen Systems den Wert $q(z_0)=q_0$, so ändert sich dieser nach dem Durchqueren eines optischen Systems auf folgende Weise:

$$q_1 = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$$

Die Zahlen A , B , C und D dieser gebrochen linearen Transformation kennzeichnen das optische System und lassen sich in einer Matrix darstellen. Durchläuft der Strahl mehrere optische Elemente nacheinander, ergibt sich die Kenngröße M_{Ges} des gesamten durchlaufenen Systems durch Matrizenmultiplikation der Matrizen der Einzelelemente, wobei das Element M_1 zuerst passiert wird.

$$M_{ges} = M_n * M_{n-1} * \dots * M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

So wird z.B. ein Konkavspiegel der positiven Brennweite $f=R/2$ (R =Krümmungsradius) durch die Matrix

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix},$$

eine durchlaufene Strecke s in Luft durch die Matrix:

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Kehrt der Gauß-Strahl nach einem Umlauf an seinen Ausgangsort z_0 zurück, so fordert man [Sieg71], daß sich für eine Eigen-Feldverteilung die Strahlparameter nicht geändert haben:

$$q_1 = q_0 \quad \text{oder:} \quad q_0 = \frac{A q_0 + B}{C q_0 + D}$$

Die Berechnung der Eigenwerte ergeben sich aus den Elementen der Matrix M_{Ges} für einen Umlauf wie folgt:

$$\frac{1}{q_0} = \frac{D - A}{2B} \pm j \frac{\sqrt{4 - (A + D)^2}}{2B}$$

Für die Strahlparameter w und R gilt dann:

$$w^2(z_0) = \pm \frac{2\lambda}{\pi} \frac{B}{\sqrt{4 - (A + D)^2}} \quad \text{und} \quad R(z_0) = \frac{B}{D - A} \quad (\text{Gl. 3.3.1.1})$$

Für reelle und begrenzte w muß dann als Stabilitätsbedingung gelten:

$$-2 < A + D < +2$$

Bild 6 zeigt die Grundkonfiguration des Lasers.

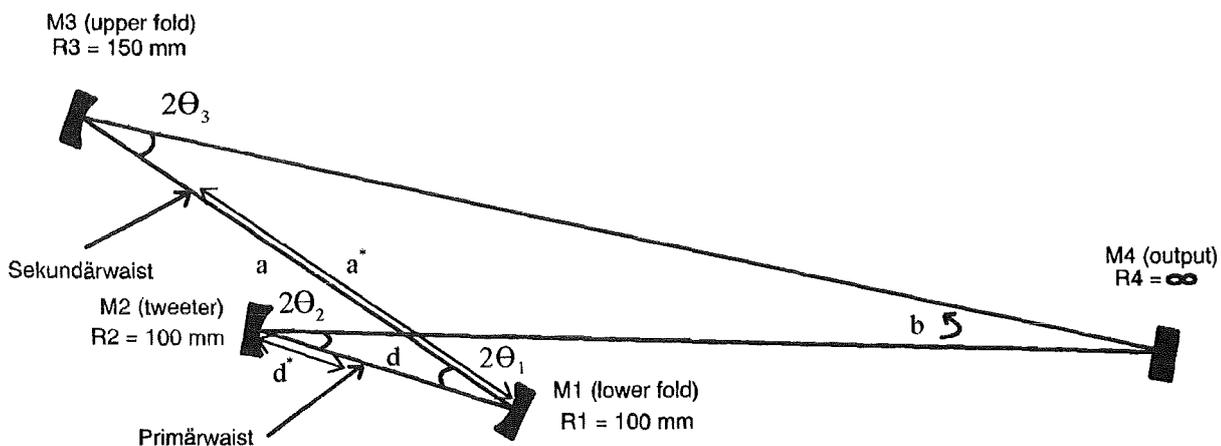


Bild 6: Bezeichnung der Krümmungsradien der Spiegel und der Spiegelabstände.

Die Matrix für einen vollen Umlauf, die eine Gaußsche Wellenfront auf sich selbst abbildet (Bild 7)

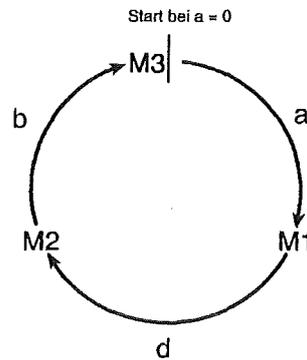


Bild 7: Die Matrizen werden in der Reihenfolge des Durchlaufs jeweils von links her multipliziert.

hat folgende Elemente:

$$A = 1 - \frac{b+d}{f_1} - \frac{b}{f_2} + \frac{b d}{f_1 f_2}$$

$$B = a + b + d - \frac{a(b+d)}{f_1} - \frac{b(a+d)}{f_2} + \frac{a b d}{f_1 f_2}$$

$$C = \left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right] + d \left[\frac{1}{f_1 f_2} + \frac{1}{f_1 f_3} \right] + b \left[\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_2 f_3} \right] - \frac{b d}{f_1 f_2 f_3}$$

$$D = 1 - a \left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right] - d \left[\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right] - \frac{b}{f_3} + a b \left[\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_2 f_3} \right] + a d \left[\frac{1}{f_1 f_2} + \frac{1}{f_1 f_3} \right] + \frac{b d}{f_2 f_3} - \frac{a b d}{f_1 f_2 f_3}$$

Zur Beantwortung der Frage, bei welchen Spiegelabständen die Stabilitätsbedingung erfüllt ist, genügt die Berechnung der Spur $A+D$ der Matrix M_{ges} . Sie ist eine Invariante, so daß es für ihre Berechnung keine Rolle spielt, an welchem Ort der Durchlauf begonnen wird. Auch der Umlaufsinn ist beliebig.

In Bild 8 ist der stabile Bereich für die Resonator Kenngrößen a und d (wobei b als fest angenommen wird) dargestellt.

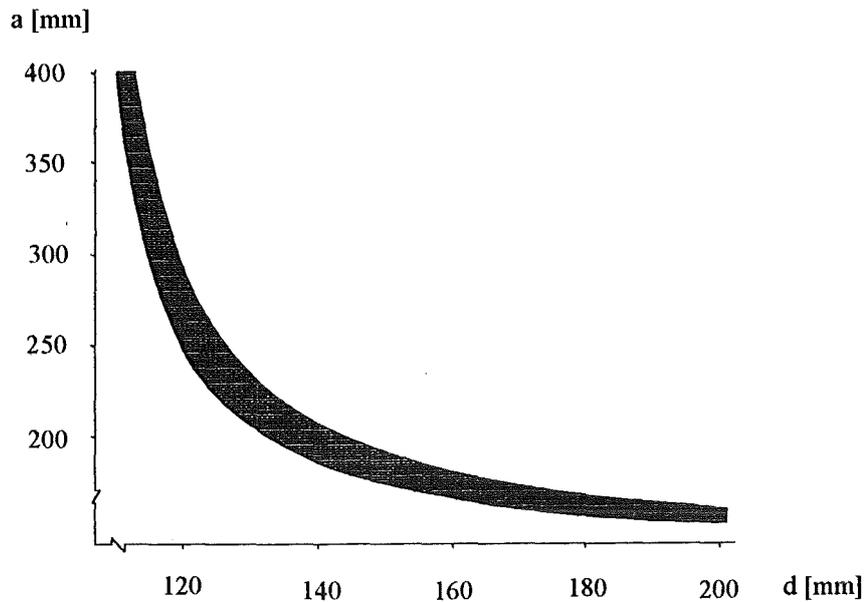


Bild 8: Stabilitätsbereich des Resonators.

3.3.2 Der Astigmatismus

Fällt ein Lichtkegel, ausgehend von einem Objektpunkt, schräg auf ein axiales optisches System, so gibt es eine Differenz in den Brennweiten der Strahlen, die sich in der Ebene befinden die durch die optische Achse und den Hauptstrahl geht (Meridionalebene) und den Strahlen, die sich in der Ebene befinden, die senkrecht zur Meridionalebene steht und Sagittalebene genannt wird (Bild 9).

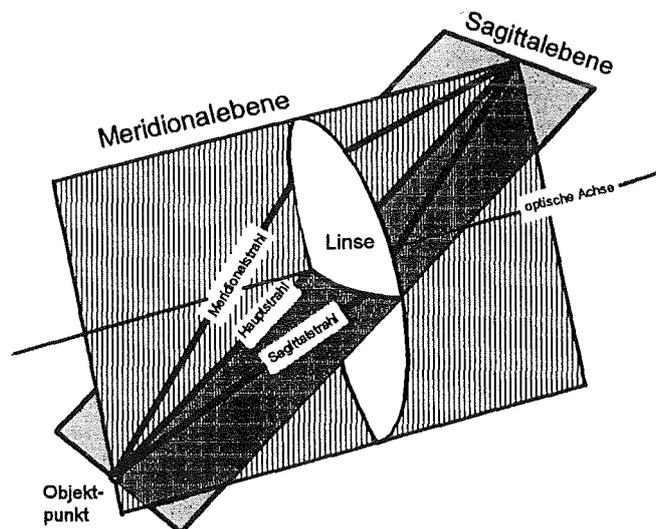


Bild 9: Festlegung der Meridionalebene und der Sagittalebene eines optischen Elementes

Ein paralleles Lichtbündel läuft in beiden Ebenen in verschiedenen Entfernungen hinter der Linse zusammen (Bild 10).

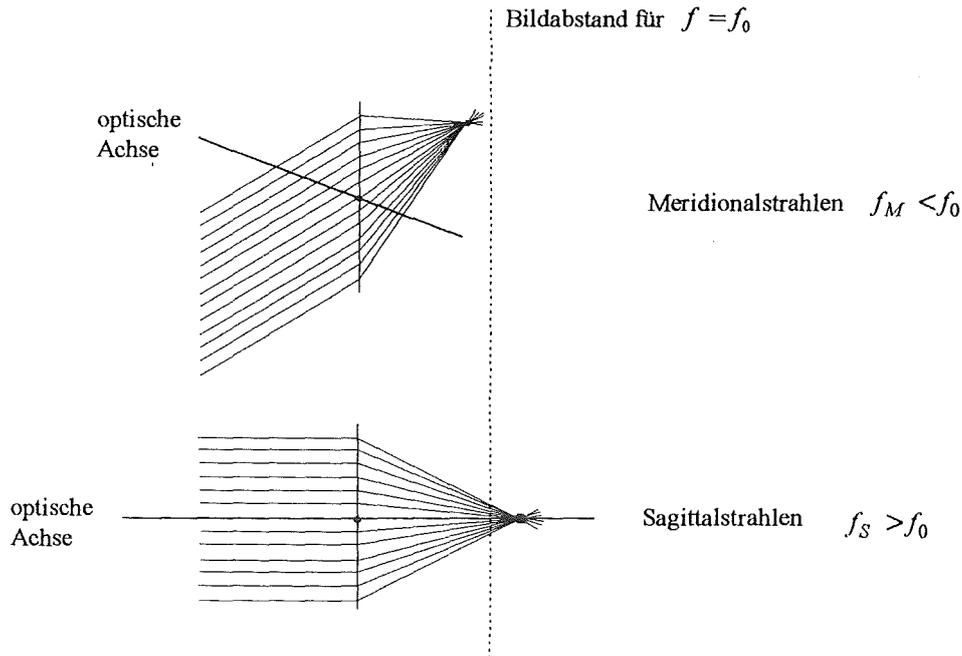


Bild 10: Meridionalstrahlen werden vor der Bildebene $f = f_0$ gebündelt, Sagittalstrahlen dahinter.

Diese astigmatische Differenz hängt von der Brechkraft des optischen Elementes und dem Einfallswinkel der Strahlen ab [Hech89]. Die gleiche Aussage gilt für Hohlspiegel mit der Brennweite $f=R/2$. Wenn θ der Einfallswinkel und f_0 die nominelle Brennweite ist, dann gilt für die Brennweiten in Meridional- und Sagittalebene:

$$f_M = f \cdot \cos \Theta < f_0 \quad \text{und} \quad f_S = \frac{f}{\cos \Theta} > f_0$$

Die Meridionalebene des Resonators ist die Ringebene. Die Sagittalebene steht zu ihr senkrecht. Es gibt also zwei verschiedene zueinander versetzte Stabilitätsbereiche (Bild 11). Der Buchstabe M kennzeichnet den meridionalen, S den sagittalen Bereich.

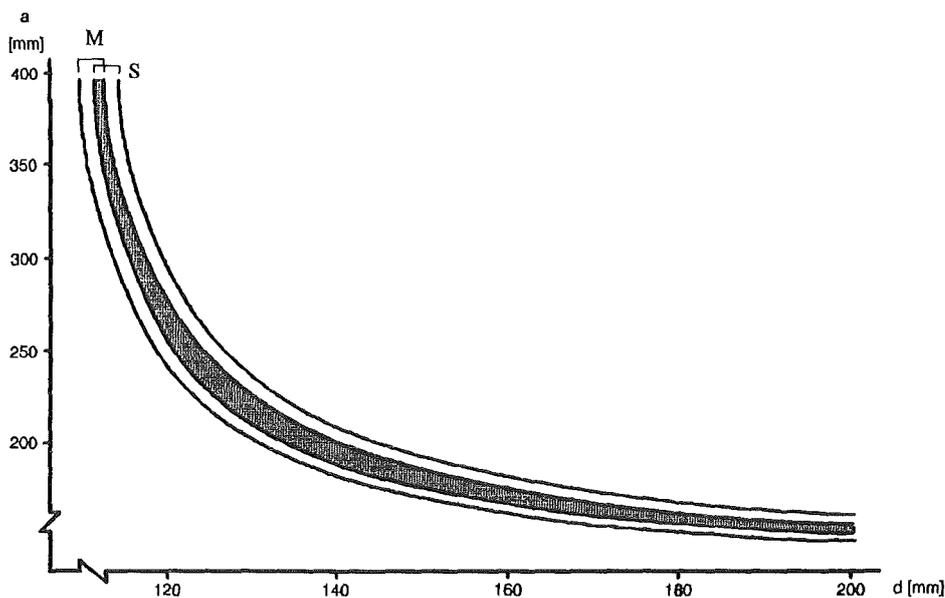


Bild 11: Der Überlapp des meridionalen und sagittalen Stabilitätsbereiches ist klein.

Der Überlapp beider Stabilitätsbereiche ist so klein, daß die Justierung des Lasers sehr unkomfortabel sein würde. Der Überlapp kann durch einen Astigmatismuskompensator vergrößert werden.

Dieser besteht aus einer Glasplatte der Dicke t und dem Brechungsindex n und steht im Brewsterwinkel zu den einfallenden Strahlen, um Intensitätsverluste zu minimieren.

Die Glasplatte hat zwei verschiedene effektive Wege für Meridional- und Sagittalstrahlen, die bei der Berechnung der Stabilitätsbereiche in beiden Ebenen berücksichtigt werden müssen. Sie werden durch folgende Formeln beschrieben:

$$l_M^{eff} = t \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^4} \quad \text{und} \quad l_S^{eff} = t \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2}$$

Durch die Vergrößerung der Dicke t werden beide Bereiche zueinander verschoben, bis die astigmatische Differenz kompensiert ist.

Stellt man einen Vergleich der effektiven Weglänge in Sagittal- und Meridionalebene mit dem geometrischen Weg

$$l_{geom}^{glas} = t \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$$

an, so gilt :

$$l_M^{glas} < l_S^{glas} < l_{geom}^{glas}$$

Es ist möglich, den Astigmatismuskompensator zwischen M2 und M1 oder zwischen M1 und M3 zu positionieren. Aus Platzgründen wurde er zwischen M1 und M3 angebracht. Der Weg, den die gaußschen Lichtstrahlen dann zwischen den Spiegeln zurücklegen, setzt sich aus dem Weg zusammen, den sie durch die Luft zurücklegen und aus dem effektiven Weg in der Meridional- und Sagittalebene der Brewsterplatte (Bild 12). Der Luftweg ist für alle Strahlen gleich.

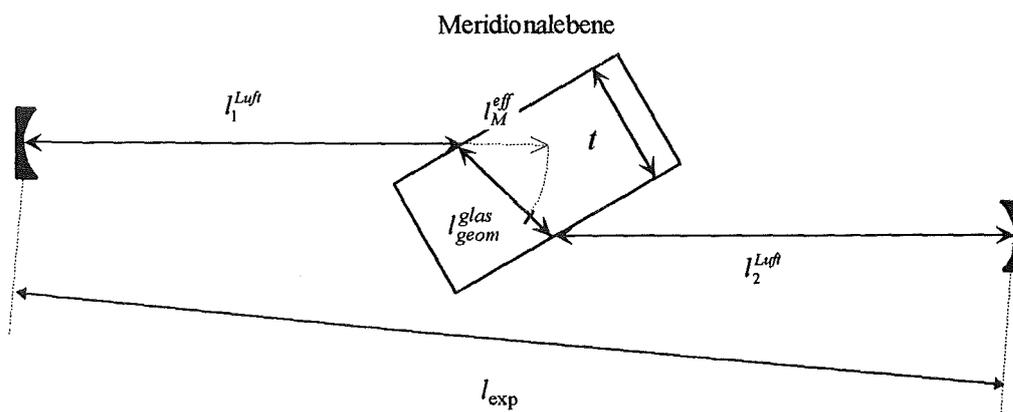


Bild 12: Die Summe aus Luftweg und geometrischem Weg ist größer als der experimentell gemessene Weg.

Ziel ist es nun, die Justierparameter a und d so zu wählen, wie es dem gewünschten Spielraum entspricht. In Bild 13 ist eine gewählte Kombination der Spiegelabstände dargestellt ($a=240\text{mm}$ und $d=127\text{mm}$). Andere Kombinationen haben einen größeren Spielraum in der Wahl des Abstandes a zu Lasten der Freiheit in der Wahl des Abstandes b oder umgekehrt zur Folge.

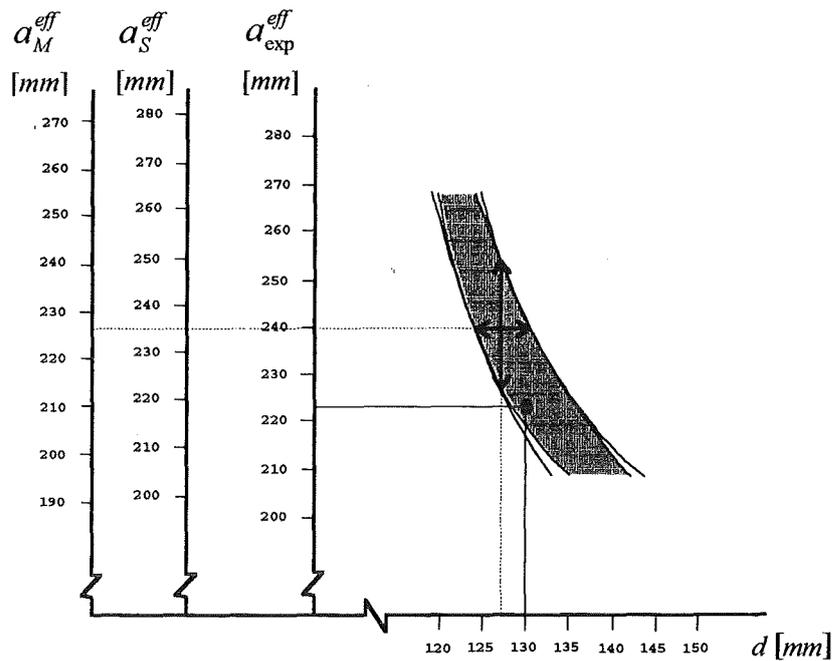


Bild 13: Die Lage des Arbeitspunktes im Stabilitätsbereich vor und nach der Feinjustierung.

Die Abstände $a=240$ mm und $d=127$ mm wurden als Ausgangspunkt der Grundjustierung benutzt. Die sich anschließende Feinjustierung mit dem Ziel, die interne Laserleistung unter Dauerbetrieb zu optimieren, ergab $a=223$ mm und $d=130$ mm. Der Arbeitspunkt liegt relativ nahe an der gerechneten Stabilitätsgrenze.

3.3.3 Lage und Größe des Primär- und Sekundärwaistes

Die Auswirkung einer Abweichung vom gewünschten Arbeitspunkt im Stabilitätsdiagramm auf den Strahlparameter w wird nachfolgend für den meridionalen Stabilitätsbereich untersucht. Der Strahlparameter $w(z)$ wurde für verschiedene Spiegelabstände a und d sowohl im a-Arm als auch im d-Arm berechnet. Die jeweils benötigte Abbildungsmatrix entsteht durch einen vollen Umlauf, der im a- bzw. d-Arm begonnen wird:

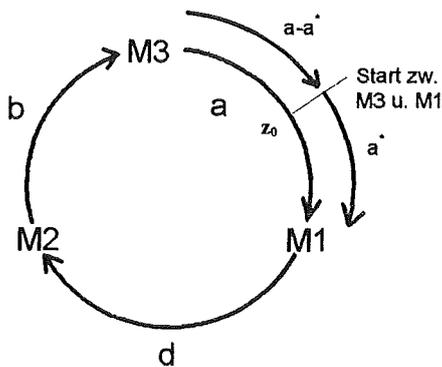


Bild 14: Sekundärwaistberechnung

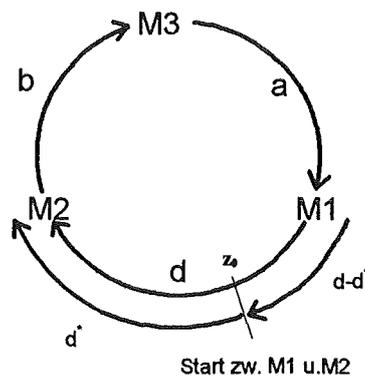


Bild 15: Primärwaistberechnung

Die Orte des kleinsten Strahldurchmessers z_0 , die sich zwischen M2 und M1 (Primärwaist), sowie zwischen M1 und M3 (Sekundärwaist) befinden, liegen dort, wo $R = \infty$ ist (siehe Gleichung 3.3.1.1):

$$R = \infty \quad \Leftrightarrow \quad A = D ,$$

Durch diese Bedingung kann der Ort a^* bzw. d^* in Abhängigkeit von a und d bestimmt werden. Bezeichnet man den Abstand zwischen dem Primärwaist und dem Spiegel M2 mit d_1^* , bzw. zwischen Sekundärwaist und dem Spiegel M1 mit a_2^* , so geben die Abbildungen 16 und 17 die bestehenden Abhängigkeiten wieder.

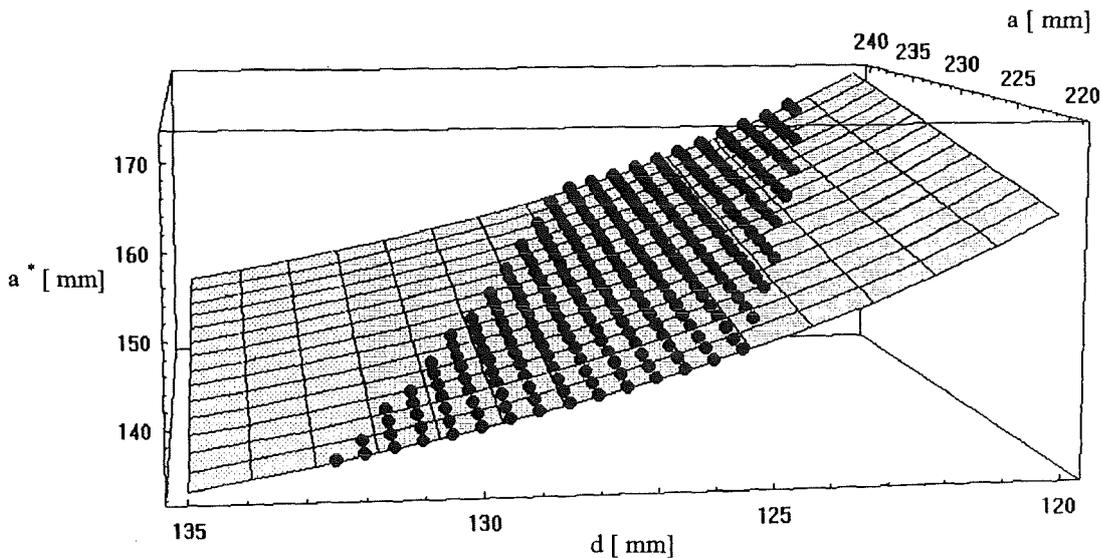


Bild 16: Änderung der Lage des Sekundärwaistes mit den Spiegelabständen a und d . Die Punkte markieren stabile Resonatorkombinationen.

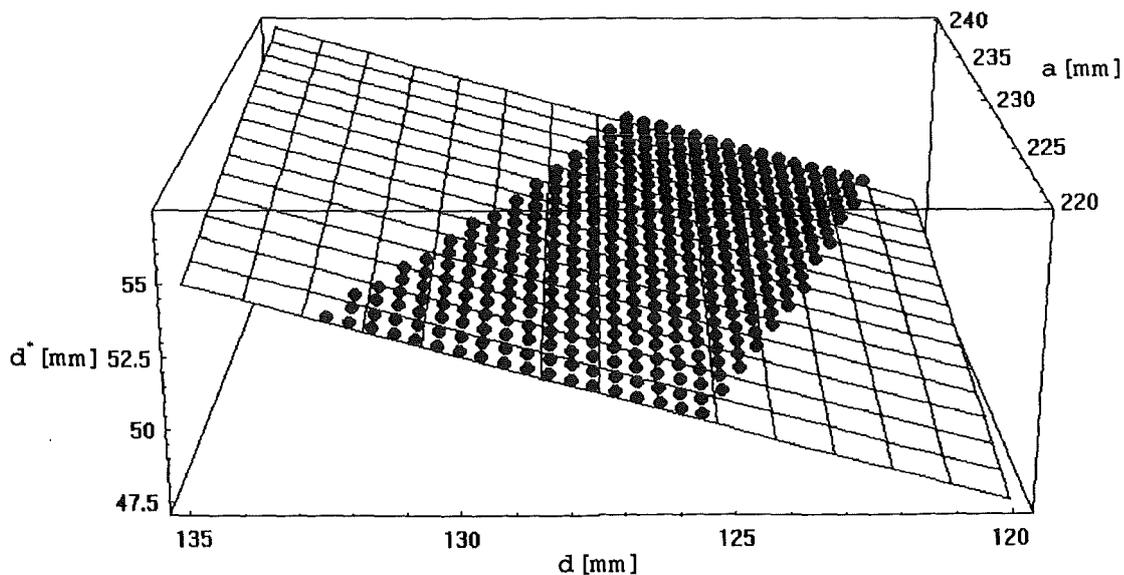


Bild 17: Änderung der Lage des Primärwaistes mit den Spiegelabständen a und d .

Der Primärwaist liegt rechnerisch mit den experimentellen Werten $a = 223 \text{ mm}$ und $d=130 \text{ mm}$ bei $d_1^* = 52,2 \text{ mm}$. Am Ende der Feinjustierung wurde der Abstand des Jets vom Spiegel M2 („tweeter“) mit $d_1^* = 51,5 \text{ mm}$ gemessen, was keiner nennenswerten Defokussierung des Laserstrahls im Jet entspricht, weil der Abstand $z_R(w)$, in dem der Waist um das $\sqrt{2}$ -fache größer geworden ist $z_R(w) = 1,33 \text{ mm}$ beträgt.

Die Waistgröße variiert ebenfalls mit den Spiegelabständen a und d . Sie wurde mit der Gleichung

$$w(z_0) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi} \frac{B}{\sqrt{4 - (A + D)^2}}}$$

in Abhängigkeit von a und d berechnet.

Die beiden folgenden Bilder (Bild 18 und Bild 19) zeigen jeweils Schnitte durch den Stabilitätsbereich für konstantes d ($d=130 \text{ mm}$).

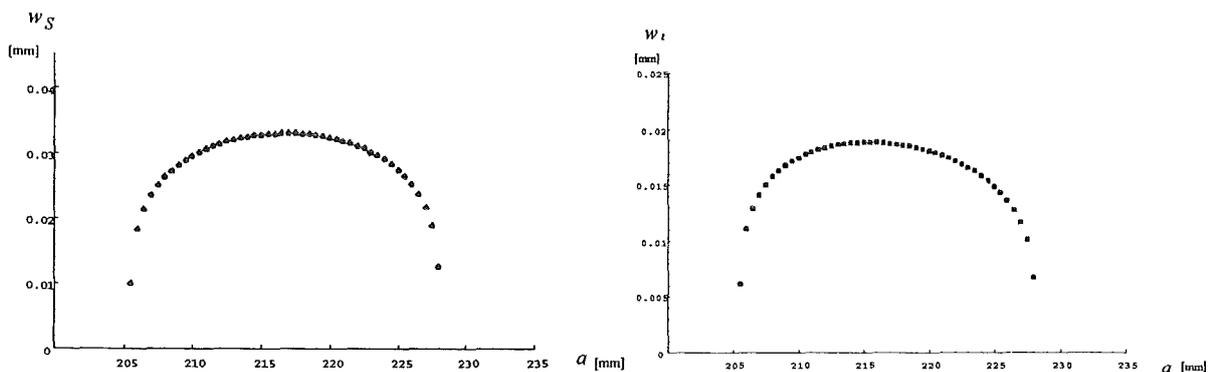


Bild 18 und 19: Abnahme der Waistgröße an den Stabilitätsgrenzen ($d=130 \text{ mm}$).

An den Grenzen des Stabilitätsbereiches schnüren sich beide Waists immer mehr zusammen, bis der Laser schließlich ausgeht. Gleiches gilt für Schnitte bei konstantem a unter Variation von d . In Bild 20 und Bild 21 ist der Maximalwert von w^P und w^S in Abhängigkeit von d aufgeführt. Der maximale Waistradius variiert in den Foki nicht sehr mit a und d . Kritisch wird das Laserverhalten nur am Rand des Stabilitätsbereiches (Bild 18 und 19).

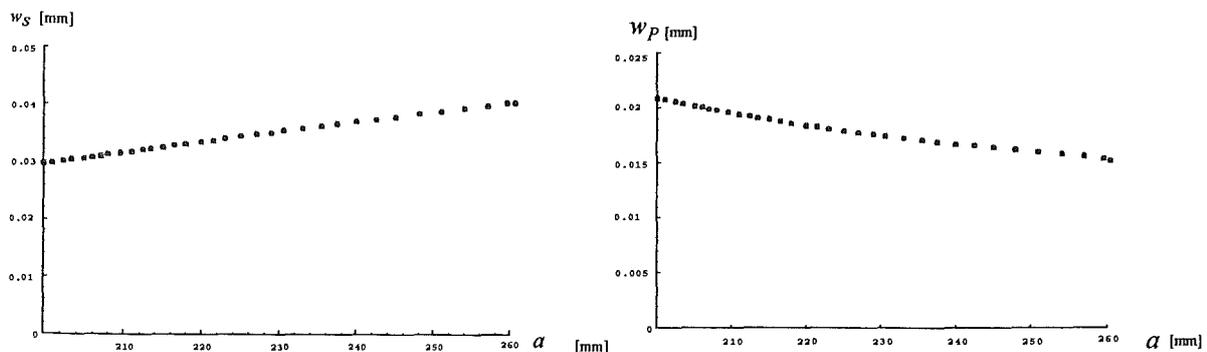


Bild 20 und 21: Maximaler Primärwaist und Sekundärwaist in Abhängigkeit von a .

Bei den experimentell bestimmten Spiegelabständen hat der Sekundärwaist die Größe $w^S=31\mu\text{m}$. Der Primärwaist ist $w^P=16\mu\text{m}$ groß. Der Waist des Argonionenlasers hat im Jet die Größe $w_{\text{Argon}}=8\mu\text{m}$ [Kow91]. Er ist wie vorgesehen kleiner als der Waist des Farbstofflasers.

Die Mitte des Astigmatismuskompensators wurde bei $a_2^* = 168\text{ mm}$ angebracht, was einer Verschiebung aus dem Sekundärwaist um 27 mm entspricht, der sich bei $a_2^* = 141\text{ mm}$ befindet. Der negative Einfluß der thermischen Effekte auf einen stabilen Laserbetrieb wurde auf diese Weise gering gehalten.

3.4 Der UV-Strahl

Nach der Frequenzverdopplung des Primärlichtes im LiIO_3 -Kristall nimmt das UV-Licht den in Bild 22 skizzierten Verlauf.

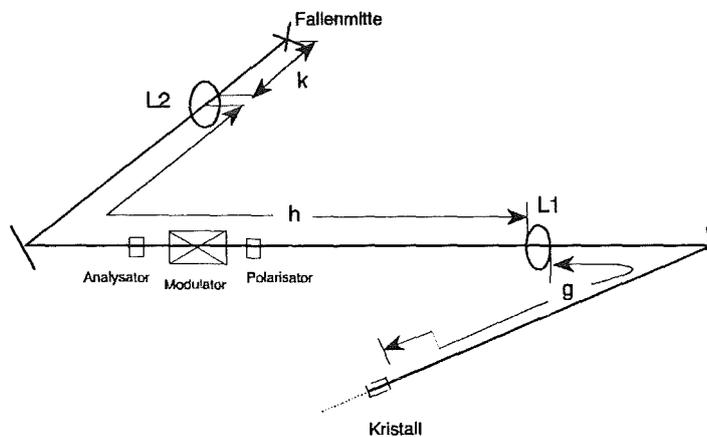


Bild 22: UV-Strahlengang vom Verdopplerkristall bis zur Fallenmitte. $g=646\text{ mm}$; $h=4460\text{ mm}$; $k=570\text{ mm}$

Es verläßt den Resonator am dichroitischen Auskoppelspiegel M_3 , wird anschließend an einem ebenen Spiegel reflektiert und durch eine Quarzglaslinse L_1 mit einer Brennweite von 500 mm fokussiert. Anschließend sorgen zwei gekreuzte Polarisatoren zusammen mit einem Modulator, der die Polarisation des Lichtes im Takt der Fallenspannung um 90 Grad dreht, für gepulstes Laserlicht. Ein ebener Umlenkspiegel richtet es anschließend auf die Ionenfalle. Bevor der Strahl die Fallenmitte erreicht, wird er durch eine weitere Linse L_2 (Brennweite: 500 mm) gebündelt.

Von besonderem Interesse ist die Kenntnis des Strahldurchmessers am Ort der Ionenwolke. Zur Bestimmung geht man von den Strahlparametern in der Mitte des Frequenzverdopplerkristalls aus. Da die UV-Leistung (P_{UV}) quadratisch mit der Primärleistung wächst:

$$P_{UV} \propto e \left[\frac{R^2}{\left(\frac{w_{Pr im}}{\sqrt{2}} \right)^2} \right]$$

gilt für die Waistgröße des UV-Strahls in der Mitte des Kristalls: $w_{UV} = \frac{w_{Pr im}}{\sqrt{2}}$.

Kennt man die Matrix der Abbildung bis zur Fallenmitte, läßt sich dort der Strahldurchmesser bestimmen. (Bei der Berechnung wurde der Strahlweg zwischen den beiden Polarisatoren und im Modulator mit einem Strahlweg durch Luft gleichgesetzt). Der Waist des Primärstrahls hat im Kristall eine Größe von $w=0,33$ mm. Die Gaußschen Wellenfronten weisen hier einen Krümmungsradius von $R=461,5$ mm auf. Die in Bild 6 skizzierte Grundkonfiguration wurde hierbei vorausgesetzt, wobei die experimentell gefundenen Spiegelabstände $a= 223$ mm und $d= 130$ mm in die Rechnung eingesetzt wurden. Die Elemente der Abbildungsmatrix bis zur Fallenmitte haben die Form:

$$A_{UV} = 1 - \frac{h+k}{L_1} - \frac{k}{L_2} + \frac{hk}{L_1L_2} \qquad B_{UV} = g+h+k - \frac{gh+gk}{L_1} - \frac{gk+hk}{L_2} + \frac{ghk}{L_1L_2}$$

$$C_{UV} = -\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} + \frac{h}{L_1L_2} \qquad D_{UV} = 1 - \frac{g}{L_1} - \frac{g+h}{L_2} + \frac{gh}{L_1L_2}$$

Setzt man diese Matrixelemente in die Formel zur Berechnung der Waistgröße und dem Krümmungsradius ein, so findet man $w_{UV}^{Falle} = 0,055$ mm, wobei die durchschreitenden Wellenfronten negative Krümmungsradien von $R=16,2$ mm besitzen.

4 Dynamik der Ionenbewegung

Das Verständnis der Ionenbewegung in der Paulschen Falle ist von Bedeutung, weil die experimentell gewonnenen Spektren eine unerwünschte Dopplerverbreiterung aufweisen. Gelingt es, die Ionen nur dann optisch anzuregen, wenn sie kleine Geschwindigkeiten besitzen, wird die Dopplerbreite reduziert. Die Linienspektren können dann besser aufgelöst werden. Die zeitliche Abfolge der Bewegung wird durch die Bewegungsgleichungen festgelegt. Deren Lösungen geben Aufschluß, wann und wo ein Ion in Ruhe ist. Deshalb ist es wichtig, eine Bewegungsgleichung aufzustellen, die der physikalischen Realität nahe kommt.

Die übliche Beschreibung der Ionenbewegung mit den ungestörten Mathieuschen Differentialgleichungen geht davon aus, daß das Ion ausschließlich den von außen angelegten Fallfeldern unterworfen ist. Die Theorie dieses Ansatzes ist in der Literatur bereits weit entwickelt [Pau58, Iff77, Daw76].

Die Bewegung eines Ions wird jedoch durch die Coulombabstoßung der übrigen Ionen beeinflusst. Es wird an dieser Stelle die Veränderung der Lösungen der Bewegungsgleichungen aufgezeigt, wenn zusätzlich eine Störung in den Mathieuschen Differentialgleichungen berücksichtigt wird. Wie sich zeigen wird, beschreiben diese realistischeren Betrachtungen die experimentellen Ergebnisse besser.

4.1 Mathieusche Differentialgleichungen ohne Störung

Ein Schnitt durch die Paulsche Ionenfalle ist in Bild 23 dargestellt.

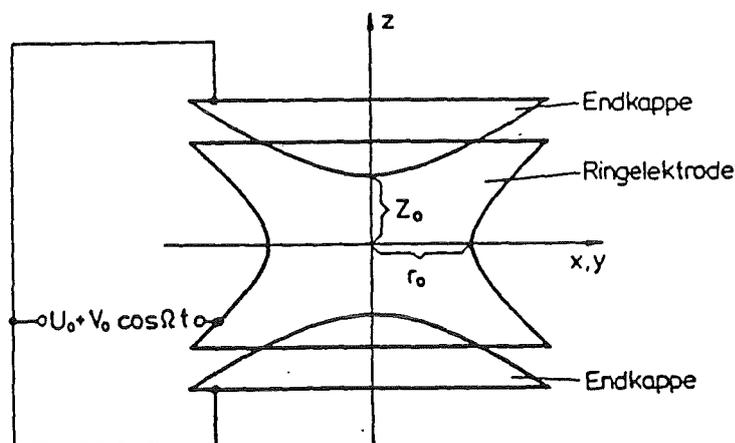


Bild 23: Zwischen Ringelektrode und Kalotten liegt zur Zeit $t=0$ eine positive Spannung an.

Legt man zwischen der Ringelektrode und den Endkappen eine Spannung $U(t)$ an, so bildet sich im Fallennern folgendes Potential aus:

$$\phi(t) = \frac{U(t)}{2r_0^2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)$$

r_0 ist der Radius der Ringelektrode mit $r_0 = \sqrt{2} z_0$. Hat $U(t)$ die Form

$$U(t) = U_0 + V_0 \cos(\Omega t)$$

so bekommen die Bewegungsgleichungen eines Ions:

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -e_0 \text{grad}_j \phi \quad j = 1, 2, 3 \quad (x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z)$$

die Gestalt Mathieuscher Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x_j(\xi)}{d\xi^2} + [a_j + 2q_j \cos(2\xi)] x_j(\xi) = 0, \quad \xi = \frac{\Omega t}{2}$$

mit folgenden Substitutionen:

$$a_3 = -\frac{8e_0 U_0}{m\Omega^2 r_0^2}, \quad a_1 = a_2 = -\frac{a_3}{2}$$

$$q_3 = \frac{4e_0 V_0}{m\Omega^2 r_0^2}, \quad q_1 = q_2 = -\frac{q_3}{2}$$

Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen dieser Differentialgleichungen („Floquetsche Lösungen“):

$$x_j(\xi) = e^{i\beta_j \xi} y_{1,j}(\xi) \quad \text{und} \quad x_j^*(\xi) = e^{-i\beta_j \xi} y_{2,j}(\xi)$$

wobei $y_{1,j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,j} e^{2in\xi}$ und $y_{2,j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,j}^* e^{-2in\xi}$ ist.

Die Bewegungsgleichungen und folglich auch die Lösungen sind entkoppelt. Je zwei Lösungen sind zueinander komplex konjugiert.

$c_{n,j}$ und β_j hängen nur von a_j und q_j ab. In ihnen sind die Betriebsparameter U_0, V_0 und Ω enthalten. Aus $a_3 \neq a_2 = a_1$ und $q_3 \neq q_2 = q_1$ folgt $c_{n,3} \neq c_{n,2} = c_{n,1}$ und $\beta_3 \neq \beta_2 = \beta_1$.

Die Lösungen in x- und y-Richtung sind gleich. Die Lösungen in z-Richtung sind von denen in x- und y-Richtung verschieden.

Eine Näherungslösung zur Berechnung von β_j aus a_j und q_j hat die Form [Fow57]:

(Gl. 4.1.1)

$$\beta_j = \left[a_j - \frac{(a_j - 1) q_j^2}{2(a_j - 1)^2 - q_j^2} - \frac{(5a_j + 7) q_j^4}{32(a_j - 1)^3 (a_j - 4)} - \frac{(9a_j^2 + 58a_j + 29) q_j^6}{64(a_j - 1)^5 (a_j - 4)(a_j - 9)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Die allgemeine Lösung $x(\xi) = Ax_j + Bx_j^*$ ergibt sich als Linearkombination der beiden zueinander komplex konjugierten Lösungen. Sie besitzt in Abhängigkeit vom Parameter $\mu_j = i\beta_j$, der auch als „Floquet-Exponent“ bezeichnet wird, verschiedene Stabilitätseigenschaften [Daw76]:

1. $\mu_j = i\beta_j$ ist reell und ungleich Null. Alle Lösungen sind instabil. Die Instabilität folgt aus dem unbeschränkten Wachstum einer der beiden Faktoren $e^{i\beta_j \xi}$ oder $e^{-i\beta_j \xi}$
2. $\mu_j = i\beta_j$ ist rein imaginär und β_j keine ganze Zahl. Alle Lösungen sind begrenzte Oszillationen.
3. $\mu_j = i\beta_j$ ist rein imaginär und β_j ist eine ganze Zahl. Es gibt für eine Anfangsbedingung eine periodische Lösung, alle anderen sind instabil. Die Grenzen der Stabilität werden durch $\beta_j = 2m$ und $\beta_j = 2m + 1$ ($m=0,1,2,\dots$) markiert. Die Periodizität der oszillierenden Lösung auf einer Stabilitätsgrenze $\beta_j = 2m$ ist π , auf einer Stabilitätsgrenze $\beta_j = 2m + 1$ hingegen 2π .

Der Verlauf der Stabilität in Abhängigkeit von a_j und q_j kann in einer Stabilitätskarte (Bild 24 und 25) dargestellt werden. Bild 25 ist ein Ausschnitt der ersten Stabilitätsbereiche für die x- und z-Komponente ($0 \leq \beta_{x,z} \leq 1$).

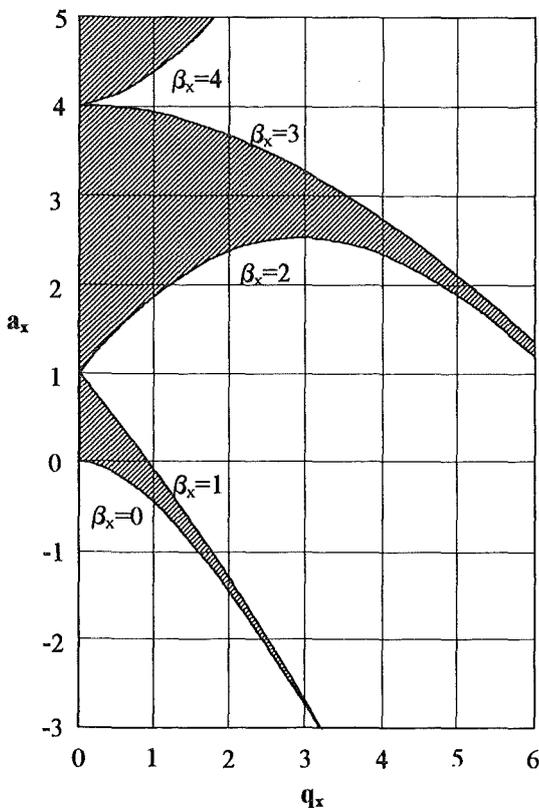


Bild 24: Stabilitätsbereiche für die x-Komponente.

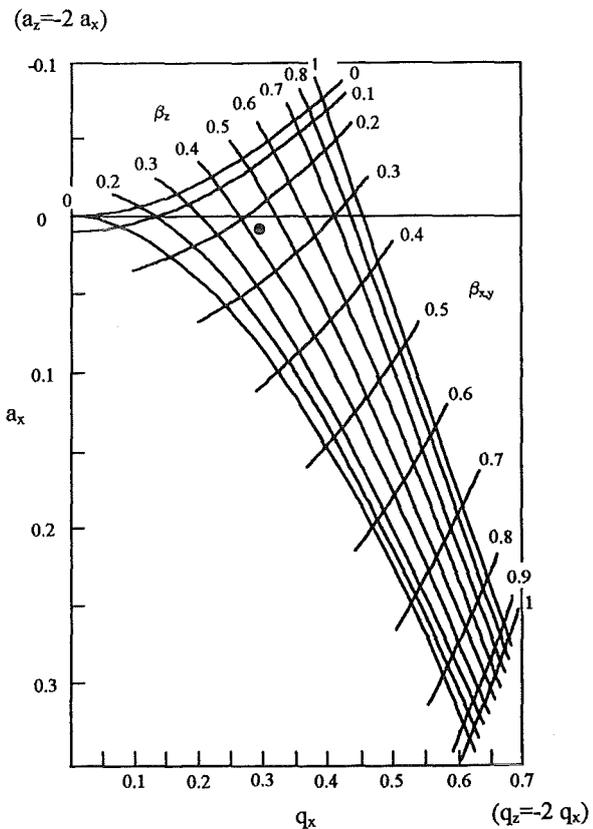


Bild 25: Ausschnitt für die x- und z-Komponente. Der schwarze Punkt markiert den Standardarbeitspunkt

Die allgemeine Lösung kann durch die Bedingung, daß für beschränkte Lösungen alle Parameter β_j reell sein müssen, umgeformt werden zu:

$$x_j(t) = A_j \sum_{n = \pm 0, \pm 1, \dots} c_{n,j} \cos \left(\left(n + \frac{\beta_j}{2} \right) (\Omega t) \right) + B_j \sum_{n = \pm 0, \pm 1, \dots} c_{n,j} \sin \left(\left(n + \frac{\beta_j}{2} \right) (\Omega t) \right)$$

A_j und B_j sind Integrationskonstanten und werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Berücksichtigt man nur die ersten drei Koeffizienten $c_{-1,j}$, $c_{0,j}$, c_1 ($n = -1, 0, 1$), gewinnt man nach weiteren Umformungen den Ausdruck:

$$x_j(t) \approx d_j \left\{ \underbrace{\cos \left(\frac{\beta_j}{2} \Omega t \right)}_{\text{Makro}} + \underbrace{\frac{\beta_j}{2} \cos(\Omega t) \cos \left(\frac{\beta_j}{2} \Omega t \right)}_{\text{Mikro}} \right\}$$

Der erste Bewegungsanteil wird Makro-, der zweite Mikrobewegung genannt. Die Differentialgleichung hat stabile Lösungen, wenn β_j zwischen Null und Eins liegt. Die Amplitude der Mikrobewegung ist dann um $\frac{\beta_j}{2} \cos \left(\frac{\beta_j}{2} \Omega \right)$ kleiner als die der Makrobewegung. Die Makrofrequenz ist um den Faktor $2/\beta_j$ kleiner gegenüber der Mikrofrequenz, was eine Amplitudenmodulation der Makrobewegung mit der Antriebsfrequenz Ω zur Folge hat.

Falls die Bahn sich schließt ($N_1 T_{\text{Mikro}} = N_2 T_{\text{Makro}}$) gilt $\beta_j = 2N_2/N_1$ und β_j ist eine rationale Zahl. Ist β_j eine irrationale Zahl, schließen sich die Bahnen nie. In Bild 26 ist der eindimensionale Bewegungsverlauf für $\beta_1 = \beta_x = 2/10$ über etwas mehr als eine Makroperiode aufgetragen.

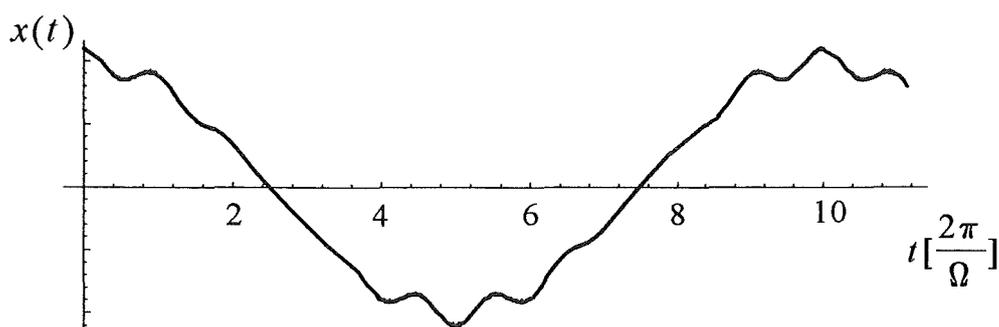


Bild 26: $x(t)$ über einige Mikroperioden. Die Makrobewegung wird mit der Frequenz der Mikrobewegung moduliert. Die Bahn schließt sich, wenn β_x rational ist (hier $\beta_x = 2/10$).

4.2 Störung der Ionenbewegung

Die Bahn des Ions kann auf verschiedene Weise gestört werden:

- Stöße mit den Puffergasmolekülen
- zeitliche oder räumliche Unvollkommenheiten des äußeren Wechselspannungsfeldes
- Wechselwirkung mit den übrigen Ionen.

Hier wird der letzte Punkt, die Wechselwirkung mit den übrigen Ionen, näher untersucht. Dies geschieht, indem die Gesamtheit aller restlichen Ionen zunächst als statisches Ionenensemble aufgefaßt wird, das ein zusätzliches nach außen weisendes elektrisches Feld verursacht (defokussierend). Es wird angenommen, daß die Dichte des Ensembles in allen drei Raumrichtungen eine gaußförmige Verteilung besitzt. Zunächst soll die Dichte in allen Raumrichtungen kugelsymmetrisch sein. Das Raumladungsfeld weist außer im Ursprung, wo sich durch die Symmetrie der Verteilung alle Feldvektoren gegenseitig aufheben, stets nach außen.

Die wichtigste Frage in diesem Zusammenhang ist die des Langzeitverhaltens der Bahn des Ions. Ist es möglich, daß das Ion permanent Energie aus dem Potential des Ensembles aufnimmt, bis es an eine Fallenbegrenzung stößt, oder gibt es die aufgenommene Energie wieder vollständig über das speichernde Wechselfeld oder über Stöße mit dem Puffergas ab?

Um die Wirkung der Abstoßung rechnerisch zu untersuchen, wird die nach außen weisende Kraft aus der Ionenverteilung berechnet und der Mathieuschen Differentialgleichung hinzugefügt. Stöße mit dem Puffergas bleiben unberücksichtigt. Die Differentialgleichungen, die nun nicht mehr wie in Kap.4.1 entkoppelt sind, werden numerisch untersucht.

Wie sich zeigen wird, ändert sich bei einer bestimmten Stärke der Abstoßung, also bei einer bestimmten Ionenzahl im Ensemble, die Topologie der Lösungen abrupt. Dieser Effekt könnte die Ursache für einander widersprechende Messungen sein, die unter vermeintlich gleichen Betriebsbedingungen durchgeführt wurden.

4.2.1 Störpotential eines statischen Ionenensembles

Um den zusätzlichen Störterm zu erhalten, muß zuerst das Potential Φ einer bestimmten Anzahl von gaußverteilten Ionen berechnet werden. Dazu wird die Poissongleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad \rho_0 = \frac{eQ}{\sqrt{(2\pi)^3 \sigma^3}}$$

gelöst. r kennzeichnet hierbei den radialen Abstand vom Mittelpunkt, σ entspricht einem Radius $r = \sigma$ bei dem die Dichte $\rho(r)$ auf das $e^{-\frac{1}{2}}$ -fache gesunken ist. Q ist die Gesamtladung der Ionenwolke. Unter der Annahme der Kugelsymmetrie läßt sich die Poissongleichung mit Kugelkoordinaten folgendermaßen schreiben:

$$r^2 \Phi''(r) + 2r \Phi'(r) = - \frac{\alpha}{\sigma^2} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad \alpha = \frac{\rho_0 \sigma^2}{\epsilon_0} [V]$$

Die Striche kennzeichnen die erste, bzw. zweite Ableitung nach r . Durch die Substitution $r = e^q$ wird eine neue Variable q eingeführt, so daß die letzte Gleichung folgendes Aussehen bekommt:

$$\ddot{\Phi}(q) + \dot{\Phi}(q) = - \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{2q - \frac{1}{2\sigma^2} e^{2q}},$$

wobei jetzt der Punkt die Differentiation nach q bezeichnet. Eine einmalige Integration über q liefert

$$\dot{\Phi}(q) + \Phi(q) = \alpha e^{-\mu e^{2q}} + c_1, \quad \mu = \frac{1}{2\sigma^2}$$

mit der Integrationskonstanten c_1 . Integriert man die Gleichung von $q=0$ bis $q=\infty$, so hat die Lösung folgende Form:

$$\Phi(q) = \frac{c_2}{e^q} + \frac{2c_1 \sqrt{\mu} e^q + \alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu} e^q]}{2\sqrt{\mu} e^q}$$

c_2 ist eine weitere Integrationskonstante. Jetzt erfolgt die Rücksubstitution $r = e^q$, so daß in der Variablen r gilt:

$$\Phi(r) = \frac{c_2}{r} + \frac{2c_1 \sqrt{\mu} r + \alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu} r]}{2\sqrt{\mu} r}$$

Die erste Integrationskonstante c_1 wird durch die Bedingung, daß im Unendlichen das Potential gleich Null sein soll, bestimmt. Aus $\Phi(r) = 0$ für $r \rightarrow \infty$ folgt $c_1 = 0$, so daß das Potential die Gestalt

$$\Phi(r) = \frac{c_2}{r} + \frac{\alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu} r]}{2\sqrt{\mu} r}$$

besitzt.

Die Integrationskonstante c_2 findet man durch die Bedingung, daß sich im Nullpunkt keine isolierte Punktladung befindet ($\Phi'(r) = 0$ für $r = 0$). Es folgt $c_2 = 0$ und

$$\Phi(r) = \frac{\alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu} r]}{2\sqrt{\mu} r}. \quad (\text{Gl. 4.2.1.1})$$

Dieses Potential ist nicht die Lösung der Poissongleichung mit der Randbedingung $U_0 = \text{konstant}$ auf den Elektrodenflächen. Die Störung des Elektrodenpotentials durch die La-

derung der Wolke kann jedoch vernachlässigt werden, weil die Elektroden hinreichend weit entfernt sind.

In Bild 27 ist der Verlauf des Potentials Φ_{Ens} eines Ionenensembles im Vergleich zum Potential Φ_{Punkt} einer Punktladung, die die gleiche Ladung wie die Ionenwolke besitzt, aufgetragen.

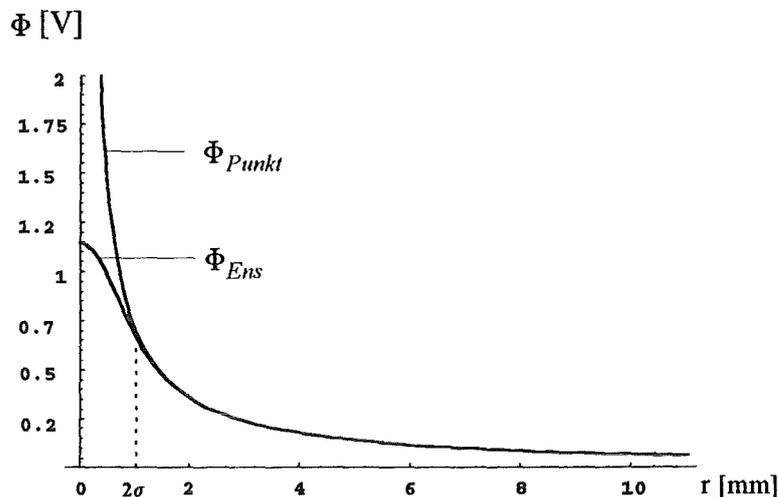


Bild 27: Der Potentialverlauf eines Ionenensembles ($5 \cdot 10^5$ Ionen). Es geht für $r > 2\sigma$ in das Potential der Punktladung über. Es wurden folgende Werte in (Gl. 4.2.1.1) eingesetzt: $\mu = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-2}$ (entspricht $\sigma = 0,5 \text{ mm}$) und $\alpha = 1,14934 \text{ V}$ (entspricht $5 \cdot 10^5$ Ionen).

4.3 Mathiesche Differentialgleichungen mit Störung in drei Raumrichtungen

Das Gesamtpotential Φ_{Ges} das sich im Falleninnern ausbildet, setzt sich aus dem Fallenpotential Φ_{Falle} und dem Potential des Ionenensembles (Φ_{Ens}) zusammen. Φ_{Falle} weist einen der Geometrie der Elektrodenform entsprechenden Verlauf auf, während Φ_{Ens} kugelsymmetrisch ist:

$$\Phi_{Ges} = \Phi_{Falle} + \Phi_{Ens}$$

$$= \frac{U_0 + V_0 \cos(\Omega t)}{2 r_0^2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) + \frac{\alpha \sqrt{\pi} \text{Erf} [\sqrt{\mu} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}]}{2 \sqrt{\mu} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

Mit den Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -e_0 \text{grad}_j \phi \quad j = 1, 2, 3$$

und den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi_{Ems}}{\partial x_j} = \frac{\alpha x_j}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) e^{\mu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} - \frac{\alpha \sqrt{\pi} x_j \operatorname{Erf} [\sqrt{\mu} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}]}{2 \sqrt{\mu} (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^3}$$

können die Differentialgleichungen für die drei Raumrichtungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{d^2 x_j(\xi)}{d\xi^2} + \left[a_j + 2 q_j \cos(2\xi) - \frac{p \alpha}{(x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi)) e^{\mu(x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi))}} + \frac{p \alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf} [\sqrt{\mu} \sqrt{x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi)}]}{2 \sqrt{\mu} (\sqrt{x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi)})^3} \right] x_j(\xi) = 0 \quad (\text{Gl. 4.3.1})$$

mit

$$p = -\frac{4 e_0}{m \Omega^2}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \mu = \frac{1}{2 \sigma^2}; \quad \alpha = \frac{\rho_0 \sigma^2}{\epsilon_0} [V];$$

$$\rho_0 = \frac{eQ}{\sqrt{(2\pi)^3} \sigma^3}$$

$$a_3 = -\frac{8 e_0 U_0}{m \Omega^2 r_0^2}, \quad a_1 = a_2 = -\frac{a_3}{2}$$

$$q_3 = \frac{4 e_0 V_0}{m \Omega^2 r_0^2}, \quad q_1 = q_2 = -\frac{q_3}{2}$$

Die drei gekoppelten Differentialgleichungen sind unabhängig von der Geschwindigkeit.

Zur Abkürzung wird

$$F_j^{Stör} = \left[-\frac{p \alpha}{(x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi)) e^{\mu(x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi))}} + \frac{p \alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf} [\sqrt{\mu} \sqrt{x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi)}]}{2 \sqrt{\mu} (\sqrt{x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + x_3^2(\xi)})^3} \right] x_j(\xi)$$

im Text kurz als Störterm oder Störung bezeichnet.

4.3.1 Lösungen der gekoppelten Gleichungen

Man kann eine Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung transformieren:

$$\begin{aligned}\frac{d\chi_1}{dt} &= F_1(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, t) \\ \frac{d\chi_2}{dt} &= F_2(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{d\chi_n}{dt} &= F_n(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, t).\end{aligned}$$

Die Systemvariablen $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ legen zu einer Zeit t_0 den Zustand des Systems vollständig fest. Die zeitliche Entwicklung der Systemvariablen wird durch die n gekoppelten Gleichungen beschrieben.

Mit $\chi_{n+1} = t$ und $F_{n+1} = 1$, sowie den Spaltenvektoren

$$\vec{\chi} = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \chi_{n+1}\} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}\}$$

kann man vereinfacht schreiben

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt} = \vec{F}.$$

$\vec{\chi}(t_0)$ repräsentiere den Zustand des Systems zu einer Zeit t_0 . Eine Lösung $\vec{\chi}(t)$ (häufig auch Trajektorie genannt) ist eine zeitliche Abfolge von Zuständen des Systems.

Im Phasenraum, der durch die Systemvariablen $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ aufgespannt wird, beschreibt $\vec{\chi}(t)$ eine Bahnkurve. In jedem Punkt $\vec{\chi}(t)$ gibt es einen Feldvektor \vec{F} , der die Tangente der Bahnkurve in diesem Punkt ist (die Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit (ihre Tangente) in jedem Punkt der Bahnkurve $\vec{\chi}(t)$ ist gleich \vec{F}). Durch \vec{F} wird somit die Geschwindigkeit in Richtung und Betrag festgelegt, mit dem sich ein Zustand des System verändert.

Die drei gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Gl. 4.3.1) können mit den Transformationen

$$\begin{aligned}\chi_1 &= x_1, & \chi_2 &= \dot{x}_1 \\ \chi_3 &= x_2, & \chi_4 &= \dot{x}_2 \\ \chi_5 &= x_3, & \chi_6 &= \dot{x}_3\end{aligned}$$

in ein System von 6 gewöhnlichen gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden:

$$\frac{d\chi_1}{d\xi} = \chi_2$$

$$\frac{d\chi_2}{d\xi} = - \left(a_1 + 2 q_1 \cos(2 \xi) \right) \chi_1 - F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5),$$

$$\frac{d\chi_3}{d\xi} = \chi_4$$

$$\frac{d\chi_4}{d\xi} = - \left(a_2 + 2 q_2 \cos(2 \xi) \right) \chi_3 - F_2^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5),$$

$$\frac{d\chi_5}{d\xi} = \chi_6$$

$$\frac{d\chi_6}{d\xi} = - \left(a_3 + 2 q_3 \cos(2 \xi) \right) \chi_5 - F_3^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)$$

Die Geschwindigkeiten $\chi_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$, $\chi_4 = \dot{x}_2 = \dot{y}$, $\chi_6 = \dot{x}_3 = \dot{z}$ für die drei Raumrichtungen treten hier als zusätzliche Systemvariablen χ_2, χ_4, χ_6 auf. Der Zustand des Systems wird vollständig durch die Orte und Geschwindigkeiten in den drei Raumrichtungen zu einer bestimmten Zeit festgelegt.

Dieses System hat zwei wichtige Eigenschaften, von denen an späterer Stelle Gebrauch gemacht wird:

1. Es ist ein Hamiltonsches System.
2. Die rechte Seite des Systems ist invariant gegenüber Verschiebungen in der normierten Zeit ξ um $\Delta\xi = \pi$ (dies entspricht $\Delta t = 2\pi/\Omega$).

Die sechs gekoppelten Gleichungen wurden mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens numerisch integriert.

Es gibt mehrere Möglichkeiten den Zeitverlauf einer Lösung zu untersuchen:

- der Ort des Ions wird im Raum zeitlich verfolgt: „Bahn“,
- die Gesamtenergie wird über der Zeit aufgetragen,
- die Gesamtenergie wird fortlaufend gemittelt,
- die Geschwindigkeit wird über dem Ort aufgetragen: „Phasenportrait“,
- die Geschwindigkeit wird zu bestimmten Zeiten stroboskopisch über dem Ort aufgetragen: „Poincaré-Karte“.

Die gängigste Methode zur Beurteilung des Systems ist das Zeichnen der Ortskurven der beteiligten Objekte (Bilder 28 und 29).

Anfangsbedingungen: $x(0) = y(0) = z(0) = 0,05 \text{ mm}$; $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \text{ mm / s}$

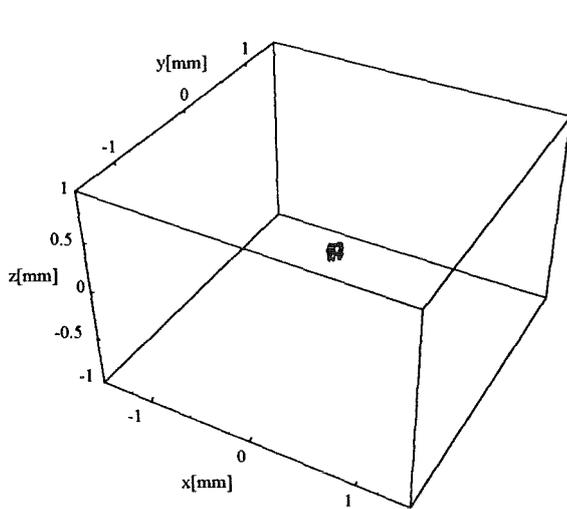


Bild 28: $\bar{x} = \bar{x}(\xi)$, ungestört

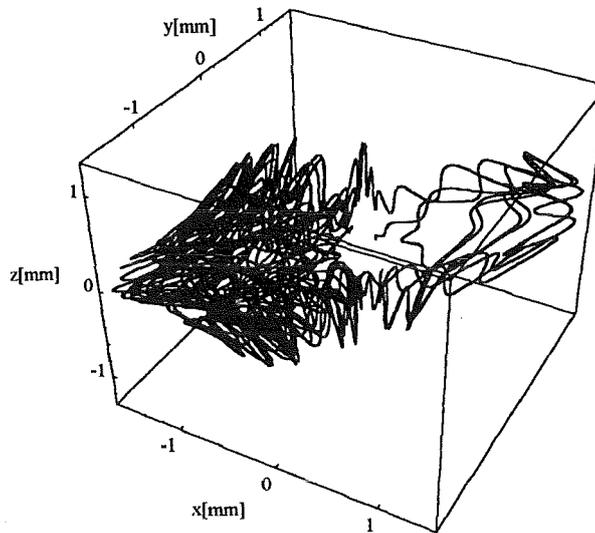


Bild 29: $\bar{x} = \bar{x}(\xi)$, gestört

Sie wurden für den Standardarbeitspunkt ($a=0,015$ und $q=0,29$) bei gleichen Anfangsbedingungen berechnet. Ohne Störung oszilliert das Ion mit einer kleinen Auslenkung. Mit Störung wird es zunächst nach außen gedrückt und oszilliert dann unregelmäßig mit großen Auslenkungen um die Fallenmitte. Auffällig ist, daß sich das Ion durch das Störpotential meistens auf einer Seite aufhält.

Eine andere Anfangsbedingung führt zu folgenden Bahnen:

Anfangsbedingungen: $x(0) = y(0) = z(0) = 0,4 \text{ mm}$; $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \text{ mm / s}$

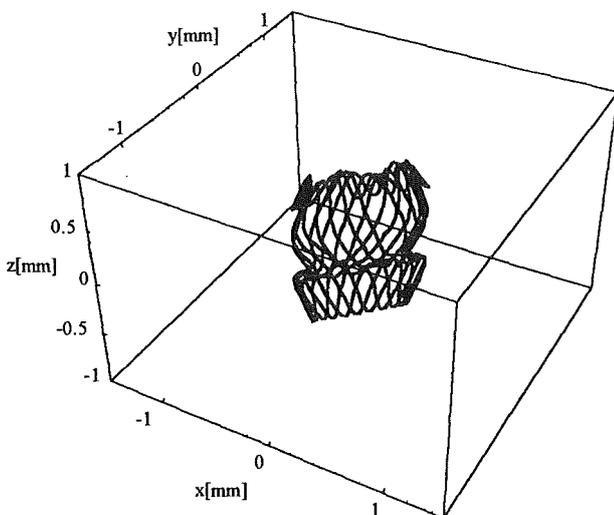


Bild 30 : $\bar{x} = \bar{x}(\xi)$, ungestört

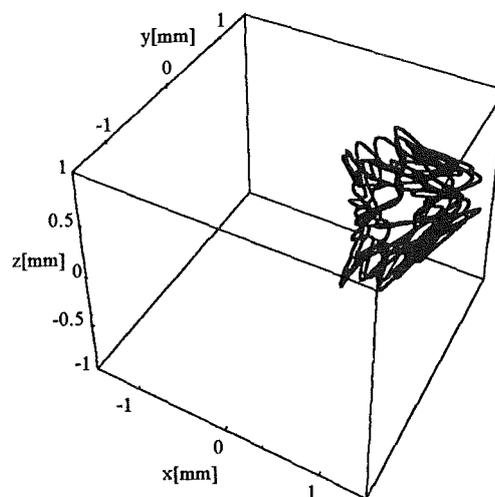


Bild 31: $\bar{x} = \bar{x}(\xi)$, gestört

Die Anfangsbedingungen sind ebenfalls für beide Bahnen gleich. Ohne Störung liegt wieder eine regelmäßige Oszillation in allen drei Raumrichtungen um den Ursprung herum vor. Die Maximalauslenkung skaliert mit der gewählten Anfangsbedingung.

Die abstoßende Kraft bewirkt dagegen, daß das Ion jetzt stets positive Werte für x und y annimmt, während es in z -Richtung um den Ursprung herum oszilliert (Bild 31). Bei dieser gewählten Anfangsbedingung kommt es nicht mehr in den gegenüberliegenden Halbraum. Die Maximalauslenkungen entsprechen ungefähr denen in Bild 29.

Ist das Ion weit vom Ursprung weg, ist die nach außen gerichtete Kraft sehr klein, so daß dort vor Allem das äußere Wechselfeld die Bewegung des Ions bestimmt. Die speichernde Wirkung der von außen angelegten Spannungen ist dort größer als die Abstoßung, die das Ion durch das Ensemble erfährt, so daß es zum Ursprung zurückgetrieben wird. Der Umkehrpunkt der Bewegung liegt im Vergleich zur ungestörten Bahn weiter außen. Bewegt sich das Ion vom Umkehrpunkt in Richtung der Fallenmitte, spürt es zunehmend den abstoßenden Potentialwall des Ionenensembles. Ob die zuvor aufgenommene kinetische Energie ausreicht, um über den Wall zu kommen, hängt offenbar von der gewählten Anfangsbedingung ab.

Eine weitere Möglichkeit, einen Unterschied in der zeitlichen Entwicklung zwischen dem gestörten und dem ungestörten System festzustellen, ist der Vergleich der Phasenportraits. Die zeichnerische Darstellung ist in diesem Fall jedoch auf zwei Dimensionen beschränkt (Ort und Geschwindigkeit in einer der drei Raumrichtungen). In den Bildern 32 bis 37 wurden die Orte und Geschwindigkeiten der gestörten und ungestörten Lösung, für jede Raumrichtung getrennt aufgetragen.

Anfangsbedingungen: $x(0) = y(0) = z(0) = 0,4 \text{ mm}$; $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \text{ mm / s}$

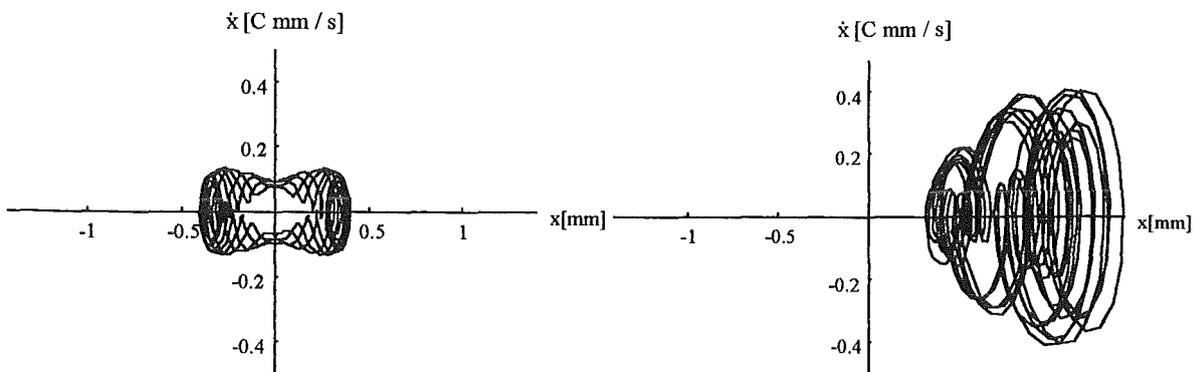


Bild 32: $\dot{x} = \dot{x}(x, y, z)$ ungestört

Bild 33: $\dot{x} = \dot{x}(x, y, z)$ gestört,

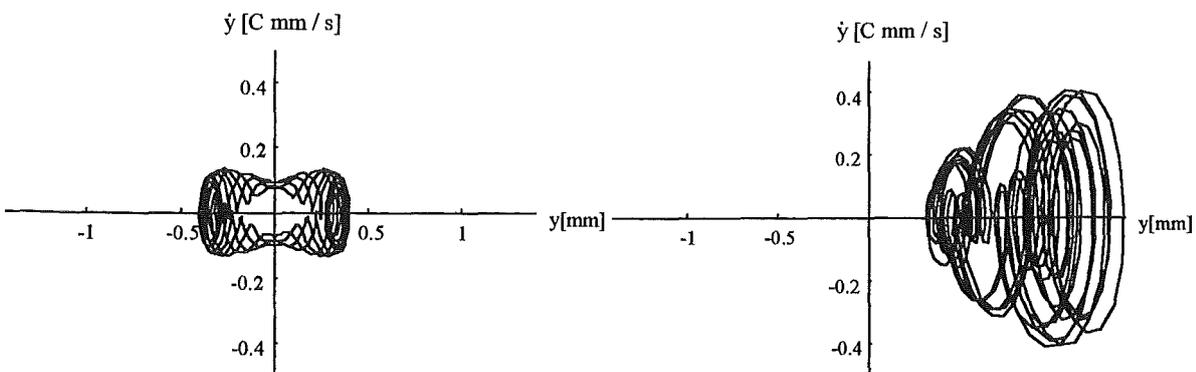


Bild 34: $\dot{y} = \dot{y}(x, y, z)$ ungestört

Bild 35: $\dot{y} = \dot{y}(x, y, z)$ gestört

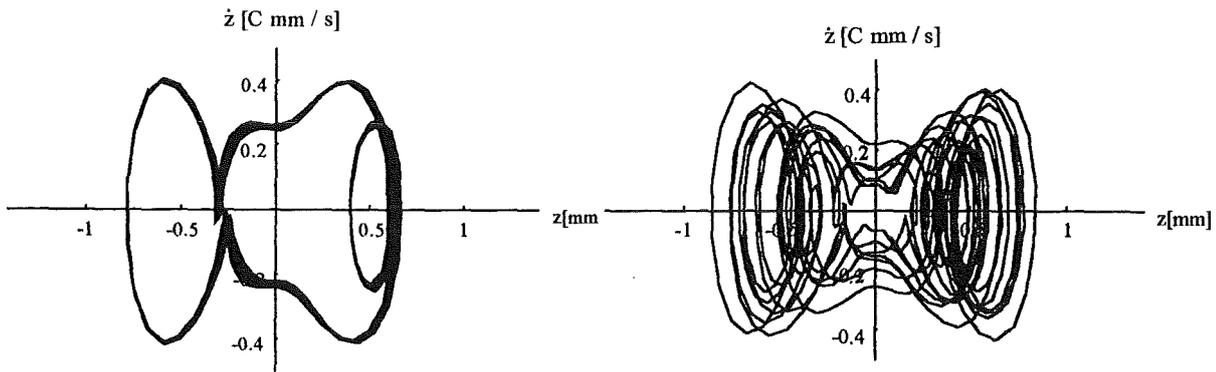


Bild 36: $\dot{z} = \dot{z}(x, y, z)$ ungestört

Bild 37: $\dot{z} = \dot{z}(x, y, z)$ gestört

Die Phasenportraits des ungestörten Ions erscheinen sehr viel regelmäßiger als die des gestörten. Unter dem Einfluß der Störung werden nur noch positive Orte in x - und y -Richtung durchwandert, wobei die Maximalgeschwindigkeit größer ist als im ungestörten Fall. Die abweisende Kraft verändert die Maximalauslenkung und Maximalgeschwindigkeit im Vergleich zum ungestörten Fall in x - y -Richtung stärker, als in z -Richtung.

Würde eine Anfangsbedingung gewählt, die vom Betrag gleich und nur im Vorzeichen verschieden ist ($x(0) = y(0) = z(0) = -0,4 \text{ mm}$; $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \text{ mm/s}$), würde das Ion stets negative Orte in x - und y -Richtung durchwandern. Diese Eigenschaft ist auch aus dem System der sechs gekoppelten Differentialgleichungen entnehmbar. Die rechte Seite des Systems ist eine ungerade Funktion in $\vec{\chi}$: $\vec{F}(-\vec{\chi}) = -\vec{F}(\vec{\chi})$, so daß das Phasenportrait einer Bahnkurve mit einer am Ursprung gespiegelten Anfangsbedingung ebenfalls am Ursprung punktgespiegelt ist.

Trägt man die Summe der Quadrate der drei Geschwindigkeiten über der Zeit auf (dies entspricht der kinetischen Energie des Ions), wird deutlich, daß das Ion auf seiner Bahn durch die Störung viel mehr kinetische Energie aufnimmt als im ungestörten Fall. Ein kontinuierlicher Anstieg der kinetischen Energie ist jedoch nicht zu erkennen, aber auch nicht definitiv auszuschließen (Bild 38 und 39).

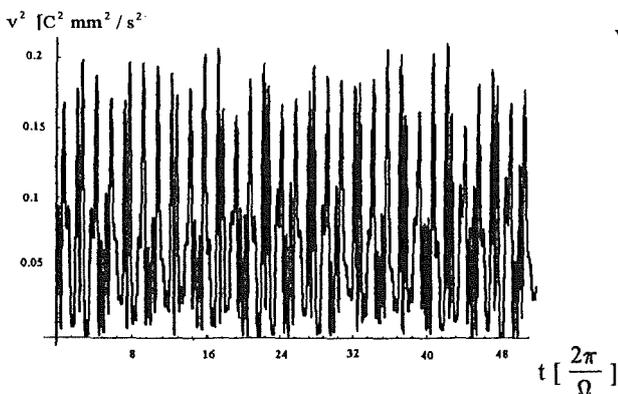


Bild 38: $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ ungestört,

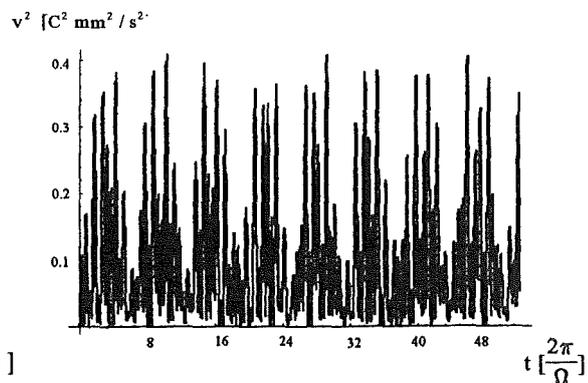


Bild 39: $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ gestört

Der Versuch, über die kinetische Energie des Ions über eine große Anzahl von Perioden zu mitteln, scheitert an der oft sehr großen Periodendauer der Bewegung. Das Verfahren ist schon im ungestörten Fall problematisch, wenn das Frequenzverhältnis von Makro- und Mikrobewegung irrational ist. Die Bahn schließt sich nie, so daß eine Mittelung über sehr große Intervalle nötig ist. Die Rechenkapazität wird erreicht, bevor zuverlässig interpretiert werden kann, ob die jeweils gefundenen Mittelwerte größer werden, oder ob sie gleich bleiben.

Eine fortlaufende Mittelung über die kinetische Energie des Ions könnte zuverlässige Aussagen über die Langzeitentwicklung der Bahnkurve bei einer gewählten Anfangsbedingung liefern. Um eine allgemeine Aussage über das System zu bekommen, die unabhängig von der speziell gewählten Anfangsbedingung ist, erscheint die Methode sehr schwerfällig, da sie für sehr viele Lösungen durchgeführt werden muß. Wird ein Systemparameter verändert, muß dieses Verfahren erneut durchgeführt werden. Diese Möglichkeit der Untersuchung wurde deshalb verworfen.

Hingegen kann durch das Anbringen eines „Poincaré-Schnittes“ durch Bahnkurven im Phasenraum, das Langzeitverhalten vieler Lösungen des Systems unter Variation von Systemparametern qualitativ untersucht werden. Ein Poincaré-Schnitt besteht darin, die zeitabhängigen Zustände des Systems nur zu Zeiten $t_n = t_0 + n \Delta t$ zu betrachten. Es ist eine stroboskopische Aufnahme von Zuständen des Systems.

In unserem gekoppelten System hat diese Betrachtungsweise eine besondere Bedeutung, weil sich die Entwicklung einer Bahnkurve aus einer Anfangsbedingung zur Zeit $\xi' = n \pi$ auf die gleiche Weise vollzieht, wie bei der Wahl der gleichen Anfangsbedingung zur Zeit $\xi = 0$.

Untersucht man die Veränderung der Zustände des Systems zwischen $\xi = 0$ und $\xi = \pi$ mit Hilfe von Poincaré-Schnitten, erhält man die Entwicklung des Systems für alle Zeiten. Die Abbildung, die den Übergang des Zustandes zur Zeit $\xi = 0$ zu einem Zustand zur Zeit $\xi = \pi$ vermittelt, wird Poincaré-Abbildung genannt.

Die zeichnerische Darstellung eines Poincaré-Schnittes ist jedoch auf zwei Dimensionen beschränkt. Deshalb wird das System der sechs gekoppelten Differentialgleichungen zunächst vereinfacht, indem die Kopplung der drei Raumrichtungen durch die Störung aufgehoben wird. Es wird ein gestörtes System von drei entkoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung konstruiert. Eine der drei Gleichungen wird dann in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt und mit Hilfe von Poincaré-Schnitten unter der Zunahme der Störung untersucht.

Die Poincaré-Abbildung kann sowohl im vereinfachten System der zwei als auch im physikalisch relevanten System der sechs gekoppelten Gleichungen numerisch berechnet werden. Mit Hilfe der numerisch ermittelten Poincaré-Abbildung kann das Stabilitätsverhalten des Systems unter dem Einfluß einer Störung untersucht werden.

Sowohl die zeichnerische Methode der Erstellung von Poincaré-Karten als auch die numerische Berechnung der Poincaré-Abbildung wurden im vereinfachten zweidimensionalen System durchgeführt.

Dadurch konnten folgende Fragen im Hinblick auf die Wirkung der Störung auf den Verlauf von Bahnkurven im Phasenraum beantwortet werden:

- Bleiben die Bahnkurven bei einer festen Störung im Lauf der Zeit innerhalb eines begrenzten Volumens des Phasenraumes, oder nimmt das Ion laufend Energie auf ?
- Wie verändert sich die Topologie der Lösungen im gesamten Phasenraum, wenn die Stärke der Störung verändert wird ?
- Gibt es chaotische Lösungen?
- Wie ist aus den Schnitten qualitativ zu erkennen, wie sich die Dopplergeschwindigkeit durch irreguläre Lösungen verbreitert?
- Inwieweit ist die Topologie der Lösungen im Phasenraum trotz Störung strukturstabil?
- Wie stark muß die Störung sein, damit die Stabilität gebrochen wird?
- Gibt es allgemeine Kriterien für das Stabilitätsverhalten des gestörten Systems?
- Wie hängen solche Kriterien mit der klassischen Stabilitätsbedingung des ungestörten Systems zusammen ?

Es wird sich zeigen, daß die gefundenen Kriterien zur Stabilität des vereinfachten zweidimensionalen Systems auf das sechsdimensionalen gestörten System übertragen werden können. Deshalb wird die Poincaré-Abbildung in sechs Dimensionen mit Kopplung berechnet.

Dadurch konnten zusätzlich folgende Fragen beantwortet werden:

- Wie groß muß die Störung sein, um die Strukturstabilität des Systems zu brechen?
- Wie hängt die Ionenzahl, die zum Verlust der Strukturstabilität nötig ist, von der Dichte im Ensemble ab ?
- Gibt es eine prinzipielle Änderung in den Systemeigenschaften, wenn die Dichte der Ionenwolke nicht zeitlich konstant gehalten wird, sondern von der Phase der äußeren Wechselspannung abhängt, wenn die Ionenwolke also pulsiert ?

4.3.1 Mathiesche Differentialgleichung mit Störung in einer Raumrichtung

Die Vereinfachung der sechs gekoppelten Differentialgleichungen auf zwei dient dazu, Poincaré-Karten zeichnerisch zu erstellen. Mit ihnen ist es möglich, die Struktur der Lösungen eines zeitabhängigen Systems überschaubar darzustellen. Insbesondere ist es möglich, auf einfache Weise chaotische Bahnkurven zu entdecken.

Die Reduktion der sechs gekoppelten Differentialgleichungen auf zwei geschieht, indem die y- und z-Komponente, also $\chi_3 = x_2 = y$ $\chi_5 = x_2 = z$ des Störterms (Gl. 4.3.1) jeweils Null gesetzt werden. Die Differentialgleichung für die x-Richtung hat dann die Form:

$$\frac{d^2 x(\xi)}{d\xi^2} + \left[a + 2q \cos(2\xi) - \frac{p\alpha}{x(\xi)^2 e^{\mu x(\xi)^2}} + \frac{p\alpha\sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu}\sqrt{x(\xi)^2}]}{2\sqrt{\mu}(\sqrt{x(\xi)^2})^3} \right] x(\xi) = 0$$

Der eindimensionale Störterm

$$F_{Stör} = \left[-\frac{p \alpha}{x(\xi)^2 e^{\mu x(\xi)^2}} + \frac{p \alpha \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu} \sqrt{x(\xi)^2}]}{2 \sqrt{\mu} (\sqrt{x(\xi)^2})^3} \right] x(\xi),$$

mit

$$\alpha = \frac{\rho_0 \sigma^2}{\varepsilon_0}, \quad p = -\frac{4 e_0}{m \Omega^2}, \quad \rho_0 = \frac{Q}{(2 \sigma^2 \pi)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = 5 \cdot 10^5 \cdot e_0,$$

$\sigma = 0,5 \text{ mm}$, $m = 178 u$ (u : atomare Masseneinheit), $\Omega = 2 \pi \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ Hz}$
hat den folgenden Verlauf:

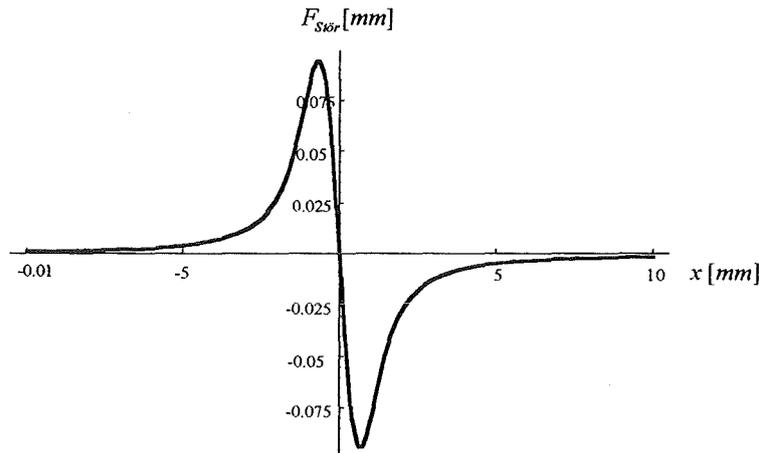


Bild 40: Die nach außen gerichtete Kraft hat in der Nähe des Ursprungs einen annähernd linearen Verlauf. Weiter außen dominieren nichtlineare Anteile. Ganz außen ist die Störung klein.

Die eindimensionale Differentialgleichung kann wieder durch eine Transformation

$$\chi_1 = x, \quad \chi_2 = \dot{x},$$

in ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden:

$$\frac{d\chi_1}{d\xi} = \chi_2$$

$$\frac{d\chi_2}{d\xi} = - (a_1 + 2 q_1 \cos(2\xi)) \chi_1 - F^{Stör}(\chi_1),$$

Mit $\chi_3 = \xi$, sowie den Spaltenvektoren

$$\vec{\chi} = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$$

kann man vereinfacht schreiben

$$\frac{d\vec{\chi}}{d\xi} = \vec{F}$$

mit $F_3 = 1$ ($d\xi / d\xi = 1$).

Das Vektorfeld \vec{F} ist so beschaffen, daß die dritte Komponente F_3 in jedem Punkt des Phasenraums stets eins ist. Da der Feldvektor \vec{F} in jedem Punkt die Tangente der Trajektorie ist, verändert sich der Zustand des Systems in Richtung der Zeit ξ mit der konstanten Geschwindigkeit $d\xi / d\xi = 1$.

Dieses System hat genauso wie das System der sechs gekoppelten Differentialgleichungen zwei wichtige Eigenschaften, die wegen ihrer großen Bedeutung noch einmal erwähnt werden:

1. Es ist ein Hamiltonsches System.
2. Die rechte Seite ist invariant gegenüber Zeitverschiebungen um eine Periode $\Delta\xi = \pi$ (entspricht $\Delta t = 2\pi/\Omega$).

4.3.2 Die Poincaré-Abbildung in zwei Dimensionen

Durch die Poincaré-Abbildung kann ein System periodischer Differentialgleichungen auf elegante Weise qualitativ untersucht werden. Die Eigenschaften einer Lösung, z. B. ihre Periodizität, werden auf einer Poincaré-Karte sofort deutlich.

4.3.2.1 Erstellung einer Poincaré-Karte

Der Phasenraum wird durch die Komponenten $\chi_1, \chi_2, \chi_3 = \xi$ (entspricht x, \dot{x}, t) aufgespannt. Zur Erstellung einer Poincaré-Karte wird zuerst eine Trajektorie im Phasenraum berechnet. Anschließend werden ebene Schnitte durch die Trajektorie im Abstand $\Delta\xi = \pi$ angebracht und auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zur ξ -Achse steht (Bild 41).

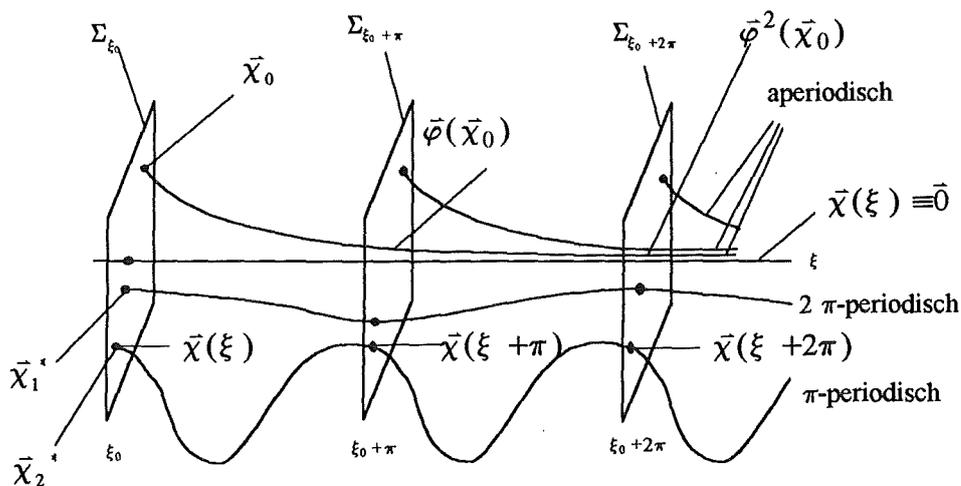


Bild 41: Schnittflächen werden in einem festen Abstand $\Delta\xi = \pi$ voneinander durch die Bahnkurven des Systems gelegt.

Lösungen (Trajektorien) des zweidimensionalen Systems werden mit $\bar{\chi}(\xi)$ bezeichnet. Die mit Σ gekennzeichneten Flächen sind Ebenen die durch die Variablen Ort und Geschwindigkeit aufgespannt und jeweils im Abstand $\Delta\xi=\pi$ voneinander aufgestellt werden:

$$\Sigma_{\xi_0 + m\pi} = \{ \chi_1, \chi_2 | \xi_0 + m\pi \}.$$

Die Bahnkurven schneiden die Flächen stets transversal, weil eine Komponente des Tangentenvektors $\vec{F}(\bar{\chi})$ an die Bahnkurve eins ist ($d\chi_3/d\xi = 1$).

Dadurch erzeugt eine Bahnkurve auf jeder aufgestellten Fläche genau einen Schnittpunkt. Die Lösungen des Systems haben dann folgende Eigenschaften:

- a) Eine Bahnkurve, deren Anfangsbedingungen zur Zeit ξ_0 gewählt werden, hat den gleichen Verlauf wie eine Bahnkurve, die die gleichen Anfangsbedingungen zur Zeit $\xi_0 + m\pi$ besitzt. Wenn $\bar{\chi}(\xi)$ eine Lösung ist, dann ist auch $\bar{\chi}(\xi + m\pi)$ eine Lösung.
- b) Ist die Bahnkurve $m\pi$ -periodisch, so ist der Schnittpunkt $\{ \chi_1 = x, \chi_2 = \dot{x} \}$ auf der Fläche $\Sigma_{\xi + m\pi}$ mit dem Schnittpunkt $\{ \chi_1 = x, \chi_2 = \dot{x} \}$ auf einer der Flächen $\Sigma_{\xi + n m\pi}$ ($n = \pm 1, 2, \dots$) identisch. Zwischen $\Sigma_{\xi + n m\pi}$ und $\Sigma_{\xi + (n+1) m\pi}$ werden $(m-1)$ Flächen in voneinander verschiedenen Punkten $\{ \chi_1 = x, \chi_2 = \dot{x} \}$ geschnitten. Eine $m\pi$ -periodische Bahnkurve erzeugt somit insgesamt m voneinander unterscheidbare Schnittpunkte $\{ \chi_1 = x, \chi_2 = \dot{x} \}$.
- c) Da der Verlauf jeder einzelnen Bahnkurve eindeutig bestimmt ist (verschiedene Bahnkurven schneiden oder tangieren sich nie), ist eine Abbildung definiert, die alle Schnittpunkte von Σ_{ξ} 1:1 auf Schnittpunkte von $\Sigma_{\xi + \pi}$ abbildet. Die gleiche Abbildung führt alle Punkte von $\Sigma_{\xi + \pi}$ in die Schnittpunkte von $\Sigma_{\xi + 2\pi}$ über. Sie wird in Bild 41 mit $\bar{\varphi}$ gekennzeichnet.
- d) Wird die Abbildung $\bar{\varphi}$ m -mal hintereinander ausgeführt, wird ein Schnittpunkt einer $m\pi$ -periodischen Lösung der Fläche $\Sigma_{\xi + n m\pi}$ auf den gleichen Schnittpunkt auf der Fläche $\Sigma_{\xi + (n+1) m\pi}$ abgebildet.

Weil die Abbildung $\bar{\varphi}$ periodisch ist, können die Bahnkurven in einem Zylinder dargestellt werden. Ihr Verlauf ist dann besonders gut zu überblicken. Die Zeit ξ wird als (periodische) Winkelkoordinate Θ eines zylindrischen Koordinatensystems aufgefaßt. Das Zeitintervall zwischen $\xi=0$ und $\xi=\pi$ wird auf die Winkelkoordinate Θ transformiert. Zur Zeit $\xi=\pi$ beginnt die Bahnkurve ihren zweiten Umlauf, der bei $\xi=2\pi$ endet und in den dritten übergeht. Die Zeit zwischen $\xi=m\pi$ und $\xi=(m+1)\pi$ entspricht dem m -ten Umlauf (Bild 42).

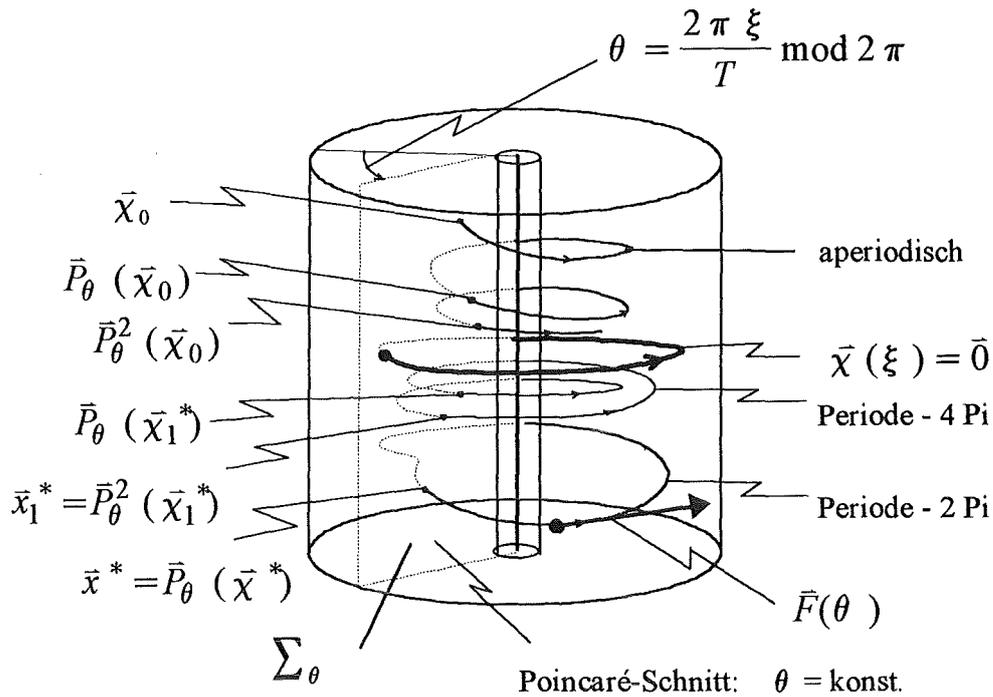


Bild 42: Eine Poincaré-Abbildung wird mit \bar{P}_θ bezeichnet. Fixpunkte der Poincaré-Abbildung sind mit einem Stern gekennzeichnet.

Die zylindrische Darstellungsweise führt zu folgenden Vereinfachungen:

1. Alle Bahnen, die durch eine Zeitverschiebung $\Delta\xi = \underline{m}\pi$ auseinander hervorgehen, liegen dann auf einer einzigen Bahnkurve.
2. Von allen Schnittpunkten einer $\underline{m}\pi$ -periodischen Lösung erscheinen nur die \underline{m} voneinander unterscheidbaren auf der Fläche Σ_θ .
3. Die in Eigenschaft c) formulierte Abbildung $\bar{\varphi}$ ist eine Abbildung \bar{P}_θ der Punktmenge Σ_θ in sich selbst.
4. In dieser Darstellung wird die Topologie des Systems von einem zeitlich unendlich ausgedehnten Raum in einen in der Zeit endlichen Raum eineindeutig abgebildet.

Eine Abbildung $\bar{\varphi}$ der Punktmenge Σ_ξ auf eine Punktmenge $\Sigma_{\xi + \pi}$, oder in der zylindrischen Darstellung die Abbildung \bar{P}_θ von Σ_θ auf sich selbst wird Poincaré-Abbildung genannt. Die \underline{m} Schnittpunkte einer $\underline{m}\pi$ -periodischen Lösung werden Fixpunkte der Poincaré-Abbildung genannt, weil jeder einzelne von ihnen auf sich selbst abgebildet wird, falls die Poincaré-Abbildung \underline{m} mal hintereinander ausgeführt wird.

P_θ soll die Abbildung sein, die aufeinanderfolgende Schnittpunkte \bar{x}^i einer Bahnkurve $\bar{x}(\xi)$ ineinander überführt. Dann gilt:

$$\bar{\chi}^{i+1} = \bar{P}_\theta (\bar{\chi}^i)$$

Fixpunkte werden durch die m -fache Hintereinanderausführung der Poincaré-Abbildung P_θ auf sich selbst abgebildet:

$$\bar{\chi}^i = \bar{P}_\theta^m (\bar{\chi}^i) .$$

Das Anbringen eines Poincaré-Schnitts hat unter anderem folgende Vorteile:

- Die Menge der dargestellten Information über den Verlauf der Bahnkurve ist klein. Dadurch ist eine zeichnerische Langzeituntersuchung möglich.
- Wichtige Eigenschaften der Lösung, z.B. ihre Periodizität sind deutlich sichtbar. Tauchen nur m Schnittpunkte in der Zeichnung auf, kann sofort auf die $m\pi$ -Periodizität der Lösung geschlossen werden. Eine *nicht*periodische Lösung erzeugt auf der Poincaré-Karte eine *unbegrenzte* Zahl von Schnittpunkten.
- Falls sich die Bahnkurven auf translationsinvarianten Integralflächen befinden (eine Integralfläche wird z. B. durch die Gesamtenergie des Hamiltonschen Systems definiert: $I(\bar{x}) = konst.$), dann liegen ihre Schnittpunkte auf einer glatten Kurve. Folglich ist die Feststellung, daß die Schnittpunkte nicht auf einer glatten Kurve liegen, ein Beweis dafür, daß die Lösung nicht auf einer Integralfläche verläuft. Aus der zylindersymmetrischen Darstellung (Bild 42) ist ersichtlich, daß eine Integralfläche die Topologie eines Torus besitzt, der sich um die z -Achse windet. Deshalb werden die Integralflächen im folgenden Tori genannt.

4.3.2.2 Numerische Berechnung einer Poincaré-Abbildung

Eine Methode zur Untersuchung des Langzeitverhaltens einer bestimmten Bahnkurve und deren Stabilität ist die numerische Berechnung der Poincaré-Abbildung sowie der Eigenwerte der zugehörigen Jakobi-Matrix in der Nähe eines Fixpunktes. Zunächst wird die Theorie zur Bestimmung der Abbildung dargestellt. Dazu wird vorzugsweise die Poincaré-Abbildung der Umgebung eines Fixpunktes betrachtet. Diese Betrachtungen gelten jedoch ohne Einschränkung der Allgemeinheit, können also auf die Umgebung eines jeden Punktes der Poincaré-Fläche angewandt werden.

Der Vektor der vom Ursprung zum Fixpunkt weist, bekommt die Bezeichnung $\bar{\chi}^S$, der Vektor der zu einem benachbarten Punkt die Bezeichnung $\bar{\chi}^i$. Dann gilt:

$$\bar{\chi}^i = \bar{\chi}^S + \bar{\eta}^i \quad \text{und} \quad \bar{\eta}^i \ll 1 .$$

Das Poincaré-Bild P von $\bar{\chi}^i$ ist $\bar{\chi}^{i+1}$ mit

$$\bar{\chi}^{i+1} = \bar{\chi}^S + \bar{\eta}^{i+1} .$$

Gesucht ist der Vektor von $\bar{\chi}^S$ zu $\bar{\chi}^{i+1}$, also $\bar{\eta}^{i+1}$ und die Poincaré-Abbildung \bar{P} , die $\bar{\eta}^i$ in $\bar{\eta}^{i+1}$ überführt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}^{i+1} &= \bar{\chi}^S + \bar{\eta}^{i+1} \\ &= \bar{P}(\bar{\chi}^S + \bar{\eta}^i)\end{aligned}$$

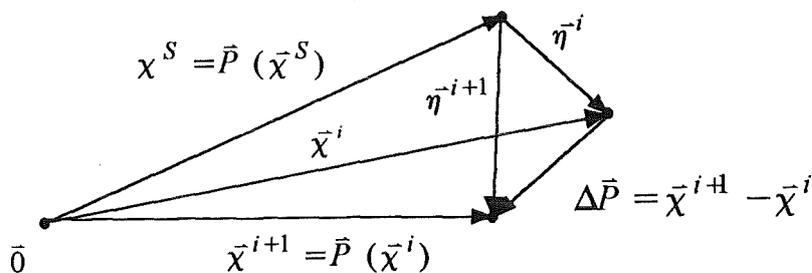


Bild 43: Vektorbild zur Herleitung der Jakobi-Matrix.

Entwickelt man \bar{P} in der Umgebung des Fixpunktes $\bar{\chi}^S$ in eine Taylorreihe, dann gilt unter Vernachlässigung der höheren Glieder:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}^S + \bar{\eta}^{i+1} &= \bar{P}(\bar{\chi}^S + \bar{\eta}^i) \\ &= \bar{P}(\bar{\chi}^S) + \left. \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\chi}^i} \right|_{\bar{\chi}^S} \bar{\eta}^i\end{aligned}$$

Es gibt eine lineare Abbildungsvorschrift von $\bar{\eta}^i$ zu $\bar{\eta}^{i+1}$:

$$\bar{\eta}^{i+1} = \left. \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\chi}^i} \right|_{\bar{\chi}^S} \bar{\eta}^i$$

Mit $\left. \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\chi}^i} \right|_{\bar{\chi}^S} = \frac{\partial (\bar{\chi}^{i+1} - \bar{\chi}^S)}{\partial \bar{\chi}^i} = \frac{\partial \bar{\chi}^{i+1}}{\partial \bar{\chi}^i}$ folgt:

$$\bar{\eta}^{i+1} = D \bar{\eta}^i \quad \text{mit der Jakobi-Matrix } D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1^{i+1}}{\partial \chi_1^i} & \frac{\partial \chi_1^{i+1}}{\partial \chi_2^i} \\ \frac{\partial \chi_2^{i+1}}{\partial \chi_1^i} & \frac{\partial \chi_2^{i+1}}{\partial \chi_2^i} \end{pmatrix}.$$

Die Jakobi-Matrix ist die lineare Näherung der Poincaré-Abbildung der Umgebung des Fixpunktes $\vec{\chi}^s$. Sie ist darüberhinaus die lineare Näherung der Poincaré-Abbildung der Umgebung eines beliebigen Punktes auf der Poincaré-Fläche.

Für die weiteren Betrachtungen genügt es, $\partial \vec{\chi}^{i+1}$ kurz mit $\partial \vec{\chi}$ und $\partial \vec{\chi}^i$ mit $\partial \vec{\chi}^0$ zu bezeichnen ($i=0$). Dann hat die Jakobi-Matrix folgendes Aussehen:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_2^0} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_2^0} \end{pmatrix}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Jakobi-Matrix der Poincaré-Abbildung in der Nähe eines Fixpunktes zu berechnen. Man kann einen Punkt in der Umgebung des Fixpunktes zur Zeit $\xi=0$ auswählen und die Bahnkurve numerisch bis zur Zeit $\xi=\pi$ integrieren. Der Schnittpunkt zur Zeit $\xi=\pi$ wird sich in guter linearer Näherung in der Umgebung des Fixpunktes befinden, wenn die Anfangsbedingung zur Zeit $\xi=0$ nahe genug am Fixpunkt gewählt wurde. Die Quotienten der Komponenten des Vektors $\vec{\eta}^{i+1}$ mit den Komponenten des Vektors $\vec{\eta}^i$ sind dann die Elemente der Jakobi-Matrix D .

Eine weitere Möglichkeit ist die numerische Integration der zeitabhängigen Komponenten der Jakobi-Matrix von $\xi=0$ bis $\xi=\pi$. Zur Zeit $\xi=\pi$ ist sie dann immer eine gute Näherung der Poincaré-Abbildung, unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingungen zur Zeit $\xi=0$. Diese Methode ist in der Berechnung der Poincaré-Abbildung in Räumen höherer Dimension vorteilhafter gegenüber der ersten, weil nicht darauf geachtet werden muß, ob die Wahl des Ausgangspunktes zu einer guten linearen Näherung führt. Deshalb wird das Verfahren der Integration der Jakobi-Matrix von $\xi=0$ bis $\xi=\pi$ im folgenden ausführlich dargestellt, weil es auch zur Berechnung der Poincaré-Abbildung in sechs Dimensionen an späterer Stelle benutzt wird.

Alle Elemente der Jakobi-Matrix sind zeitabhängig. Sie vermittelt zu einer bestimmten Zeit ξ näherungsweise die Poincaré-Abbildung der unmittelbaren Umgebung des Punktes $\vec{\chi}_0$ auf die Umgebung des Punktes $\vec{\chi}$.

Zur Bestimmung der Komponenten zur Zeit $\xi = \pi$, wird das System der gekoppelten Differentialgleichungen ($\chi_1 = x$, $\chi_2 = \dot{x}$)

$$\frac{d\chi_1}{d\xi} = \chi_2$$

$$\frac{d\chi_2}{d\xi} = - (a_1 + 2 q_1 \cos(2\xi)) \chi_1 - F^{Stör}(\chi_1),$$

nach χ_1^0 abgeleitet und die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht:

$$i) \quad \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d\xi} D_{11} = D_{21}$$

$$ii) \quad \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} = - (a_1 + 2 q_1 \cos(2\xi)) \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} - \frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0},$$

wobei für die partielle Ableitung nach der zweiten Komponente gilt: $\frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_2} = 0$,

weil $F^{Stör}(\chi_1)$ nur eine Funktion von χ_1 ist.

$$\text{Es folgt: } \frac{d}{d\xi} D_{21} = - (a_1 + 2 q_1 \cos(2\xi)) D_{11} - \frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_1} D_{11}$$

Durch $\frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_1^0} = \frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0}$ wird der Störterm $F^{Stör}(\chi_1)$ durch seine erstes Taylorglied an jedem Ort χ_1 der Bahnkurve $\vec{\chi}$ angenähert.

Der in Zeile *i)* und Zeile *ii)* dargestellte Zusammenhang zwischen den Komponenten der ersten Spalte von D besteht aus einem System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Anfangsbedingung zur Zeit $\xi = 0$, die zur Integration dieses Systems benötigt wird ist:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} = 0, \quad \text{da} \quad \frac{\partial \chi_1^0}{\partial \chi_1^0} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \chi_2^0}{\partial \chi_1^0} = 0 \quad \text{ist.}$$

Wird das System mit dieser Anfangsbedingung von $\xi=0$ bis $\xi = \pi$ integriert, ergibt sich die erste Spalte von D zur Zeit $\xi = \pi$. Zu beachten ist, daß $F^{Stör}(\chi_1)$ vom Ort χ_1 abhängt, so daß die numerische Integration der Ortskurve parallel erfolgen muß. Die so berechneten Punkte der Ortskurve $\vec{\chi}(\xi)$ müssen zum Zeitpunkt ξ der Integration des Systems in $\partial F^{Stör}(\chi_1) / \partial \chi_1$ eingesetzt werden.

Schreibt man die Zeile *i)* und *ii)* mit Differenzenquotienten, wird deutlich, daß die Komponenten der erste Spalte der Jakobi-Matrix Funktionen der normierten Zeit ξ sind:

$$i) \quad \frac{d}{d\xi} \frac{\chi_1(\xi, \chi_1^0 + \eta, \chi_2^0) - \chi_1(\xi, \chi_1^0, \chi_2^0)}{\eta} = \frac{\chi_2(\xi, \chi_1^0 + \eta, \chi_2^0) - \chi_2(\xi, \chi_1^0, \chi_2^0)}{\eta}$$

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\chi_2(\xi, \chi_1^0 + \eta, \chi_2^0) - \chi_2(\xi, \chi_1^0, \chi_2^0)}{\eta} =$$

$$ii) \quad - (a_1 + 2 q_1 \cos(2\xi)) \frac{\chi_1(\xi, \chi_1^0 + \eta, \chi_2^0) - \chi_1(\xi, \chi_1^0, \chi_2^0)}{\eta} \\ - \frac{F^{Stör}(\chi_1 + \eta) - F^{Stör}(\chi_1)}{\chi_1(\xi, \chi_1^0 + \eta, \chi_2^0) - \chi_1(\xi, \chi_1^0, \chi_2^0)} \frac{\chi_1(\xi, \chi_1^0 + \eta, \chi_2^0) - \chi_1(\xi, \chi_1^0, \chi_2^0)}{\eta}$$

Die zweite Spalte der Jakobimatrix gewinnt man auf ähnliche Weise wie die erste, wobei jetzt die Ableitung nach χ_2^0 erfolgt:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_2^0} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_2^0}$$

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_2^0} = - \left(a_1 + 2 q_1 \cos(2\xi) \right) \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_2^0} - \frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_2^0}, \text{ mit}$$

$$\frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_2^0} = \frac{\partial F^{Stör}(\chi_1)}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_2^0}$$

Jetzt gilt zur Zeit $\xi = 0$: $\frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_2^0} = 0$ und $\frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_2^0} = 1$.

Auch in dieses System muß die parallel berechnete Ortskurve in die Kraft $F^{Stör}(\chi_1)$ eingesetzt werden.

Für die gesamte Umgebung eines Schnittpunktes zur Zeit $\xi=0$ gibt es 4 Bewegungsgleichungen, von denen je zwei gekoppelt sind. Der Zustand der Umgebung des Punktes nach der Integration zur Zeit $\xi=\pi$ entspricht dem Poincaré-Bild des Zustandes seiner Umgebung zur Zeit $\xi=0$. Da der Schnittpunkt auf der Poincaré-Fläche beliebig gewählt werden kann, wird durch die Integration der Bewegungsgleichungen die gesamte Poincaré-Fläche durch die Poincaré-Abbildung auf sich selbst abgebildet.

Das Programm, das die Poincaré-Abbildung berechnet, ist in Anhang A abgedruckt. Es wurde im Zusammenhang mit dem Programm Mathematica 2.2 geschrieben. Zur Benennung im Text bekommt es den Namen „Zweidim“.

4.3.2.3 Eigenwerte der Jakobi-Matrix als Stabilitätskriterium

Von großer Bedeutung ist das Verhalten einer Bahnkurve, die die Poincaré-Fläche in der Nähe eines Fixpunktes schneidet. Falls ihre Schnittpunkte für alle Zeiten in der Nähe des Fixpunktes bleiben, ist er stabil. Wenn sie nicht für alle Zeiten in seiner Umgebung bleiben, ist er instabil. Mit Hilfe der Eigenwerte der am Fixpunkt berechneten Jakobi-Matrix kann die Stabilität des Fixpunktes untersucht werden. Die Stabilitäteeigenschaft eines Fixpunktes hat eine nicht nur auf seine Umgebung beschränkte Bedeutung. Sie hat eine entscheidende Bedeutung für den makroskopischen Verlauf von Bahnkurven. Deshalb wird im folgenden der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Jakobimatrix und der Stabilität eines Fixpunktes erläutert.

Die Poincaré-Abbildung Hamiltonscher Systeme ist flächentreu (Satz von Liouville,[Argy94]). Aus ihm folgt:

$$\det D = 1$$

Die Eigenwertgleichung der Jakobi-Matrix hat reelle Koeffizienten, so daß ihre Eigenwerte entweder komplex konjugiert oder reell sind.

Die zwei Eigenwerte der zweidimensionalen Poincaré-Abbildung bekommen die Bezeichnung λ_1 und λ_2 .

Es gilt: $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. [Arn91]

Für die zweidimensionale Poincaré-Abbildung kommen nur zwei Kombinationen der Eigenwerte in Betracht:

1. Fall: Es gibt zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, deren Betrag dann gleich eins sein muß:

$$|\lambda| e^{\pm i\varphi}, \quad |\lambda| = 1$$

2. Fall: Es gibt zwei reelle Eigenwerte:

$$\lambda \text{ und } \frac{1}{\lambda}, \quad |\lambda| \neq 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$$

Durch den Schnitt der Integralfläche einer Bahnkurve mit der Poincaré-Fläche entsteht im ersten Fall eine Ellipse, im zweiten Fall sind es Hyperbeln. Im Mittelpunkt der Ellipse befindet sich ein sogenannter elliptischer Fixpunkt. Die Bahnkurven in seiner Umgebung sind begrenzt (Bild 44 und 45).

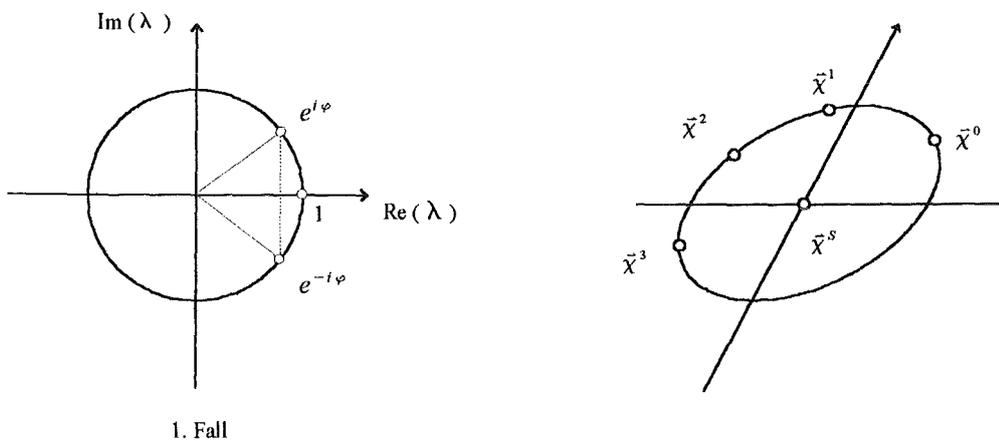
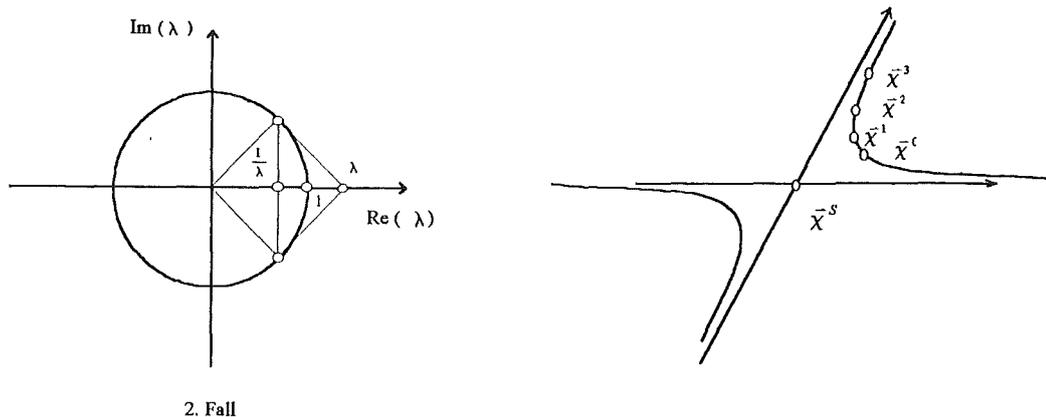


Bild 44 und 45: *Komplex konjugierte Eigenwerte entsprechen ellipsenförmigen Schnittkurven.*

Treten reelle Eigenwerte in der Jakobi-Matrix auf, liegen die Schnittpunkte auf Hyperbeln. Es gibt einen hyperbolischen Fixpunkt. Er ist instabil, weil sich die Bahnkurven in seiner Umgebung von ihm entfernen (Bild 46 und 47).



2. Fall

Bild 46 und 47: Reelle Eigenwerte entsprechen hyperbolischen Schnittpunkten.

Beim Übergang eines Fixpunktes von stabil zu instabil durch Variation eines Systemparameters wandern die komplex konjugierten Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene entlang des Einheitskreises zum doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ oder zum doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Anschließend wandert ein Eigenwert entlang der reellen Achse innerhalb des Einheitskreises zum Ursprung hin, während der andere sich außerhalb des Einheitskreises entlang der reellen Achse vom Ursprung entfernt.

Im Programm „Zweidim“ werden die Eigenwerte im Anschluß an die Berechnung der Poincaré-Abbildung bestimmt.

4.3.2.4 Chaotische Systeme

Für ein integrables Hamiltonsches System mit n Freiheitsgraden kann man ein System von n Flächen (Tori) angeben, auf denen die Bahnkurven verlaufen (Satz von Liouville). Eine Frage aus der Theorie der nichtlinearen Dynamik ist die Entwicklung dieser Flächen, wenn eine kleine Störung auftritt. Es zeigt sich, daß die Flächen unter bestimmten Bedingungen aufhören zu existieren. Dies ist im Poincaré-Schnitt in zwei Dimensionen in einer stochastischen Verteilung der Schnittpunkte sichtbar. Man spricht vom Zerfall des Torus. Die KAM-Theorie (KAM=Kolmogorov, Arnol'd, Moser) gibt eine Reihe von Bedingungen an, unter denen die Flächen auch unter dem Einfluß einer Störung erhalten bleiben [Lich92].

Diejenigen Tori zerfallen am ehesten, deren zugehörige Bahnkurve eine Frequenz besitzt, die in einem rationalen Frequenzverhältnis zur antreibenden Kraft steht. Beim Zerfall von Tori, die von mT -periodischen Bahnkurven geformt werden, bleiben nach dem Zerfall $2m$ subharmonische Lösungen der Periode m übrig. Sie erzeugen auf der Poincaré-Fläche m elliptische und m hyperbolische Fixpunkte. Die hyperbolischen Fixpunkte sind von chaotischen Bahnkurven umgeben. In der Umgebung der elliptischen Fixpunkte gibt es stabile Bahnkurven, die auf geschlossenen Tori verlaufen.

Ein Programm, das die Verteilung der Schnittpunkte auf einer Poincaré-Schnittfläche bestimmt, ist in Anhang B abgedruckt und wird mit „Map“ bezeichnet. Die Orte und Geschwindigkeiten wurden schrittweise mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens von $\xi = 0$ bis $\xi = 800 \pi$ mit einer Schrittweite von $\Delta\xi = \pi/50$ berechnet. Es wurden stets Orte und Geschwindigkeiten zur Zeit des Wechselspannungsmaximums $\xi = m \pi$ ($m=0,1,\dots,800$) herausgegriffen. Die 801 Schnittpunkte wurden in ein $\chi_1 - \chi_2$ -Diagramm eingetragen. Diese Methode wurde für

mehrere Anfangsbedingungen, die zu verschiedenen Bahnkurven gehören, durchgeführt. Die verschiedenen Diagramme wurden dann zu einem einzigen zusammengefaßt.

4.3.3 Poincaré-Abbildung im ungestörten System

4.3.3.1 Stabile Lösungen

Um die Programme „Zweidim“ und „Map“ zu testen, wurden sie zunächst auf das ungestörte zweidimensionale System (ungestörte Mathieusche Differentialgleichungen Kap. 4.1)

$$\chi_1 = x, \quad \chi_2 = \dot{x}$$

$$\frac{d\chi_1}{d\xi} = \chi_2(\xi)$$

$$\frac{d\chi_2}{d\xi} = - \left(a_1 + 2 q_1 \cos(2 \xi) \right) \chi_1(\xi)$$

angewandt.

Wenn eine gewählte Kombination der Parameter a_1 und q_1 einen Arbeitspunkt markiert, der innerhalb der Stabilitätsgrenzen auf der Stabilitätskarte liegt, ist zu erwarten, daß in der Umgebung der (trivialen) Fixpunktlösung ($\chi_1 = \chi_2 = 0$) alle Durchstoßpunkte der Bahnkurven durch die Poincaré-Fläche auf Ellipsen liegen. Der Ursprung ist dann ein elliptischer Fixpunkt.

Ein Poincaré-Schnitt (Bild 48) wurde mit „Map“ für $a = 0,015$ und $q = 0,29$ erstellt.

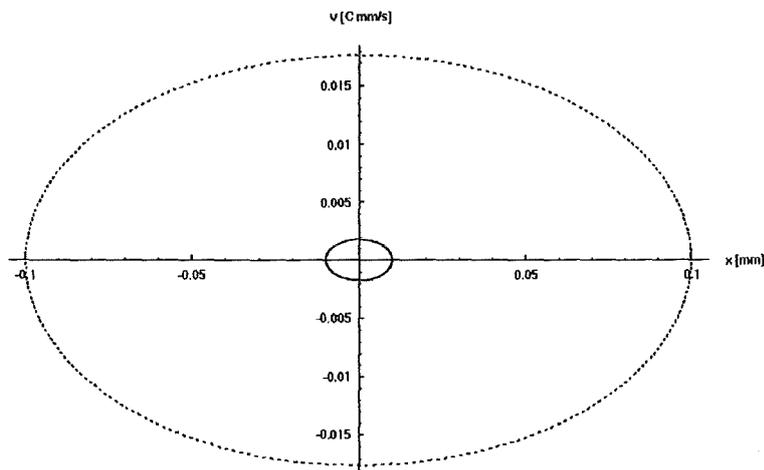


Bild 48: Poincaré-Bild einer stabilen Lösung am Standardarbeitspunkt ($a = 0,015$ und $q = 0,29$) Die Schnittpunkte einer Bahnkurve liegen auf einer ellipsenförmigen Kurve. Nach jedem Umlauf wird von einer Bahnkurve ein neuer Schnittpunkt erzeugt. Die Bahnkurven gehören zu Lösungen mit irrationalem β (Kap. 4.1), weil die Kurve in unendlicher Zeit beliebig dicht mit Schnittpunkten gefüllt wird. Zu beachten ist, daß die in der zylindersymmetrischen Darstellung (Bild 42) nicht mit der Geschwindigkeitsachse der Poincaré'-Bilder identisch ist.

Wählt man den Arbeitspunkt $\{a = -0,09231, q = 0,5\}$ ($\beta = 1/2$), sind alle Lösungen periodisch, weil $\beta_j = 2N_2/N_1$ ($N_1 T_{\text{Mikro}} = N_2 T_{\text{Makro}}$) ist. Die gerechnete Bahnkurve (Bild 49) ist 4π -periodisch ($4 \cdot N_1$). Es sind 4 Fixpunkte zu sehen, weil die Schnitte stets im Abstand $\Delta\xi = \pi$ (nach einer Mikroperiode) angebracht werden.

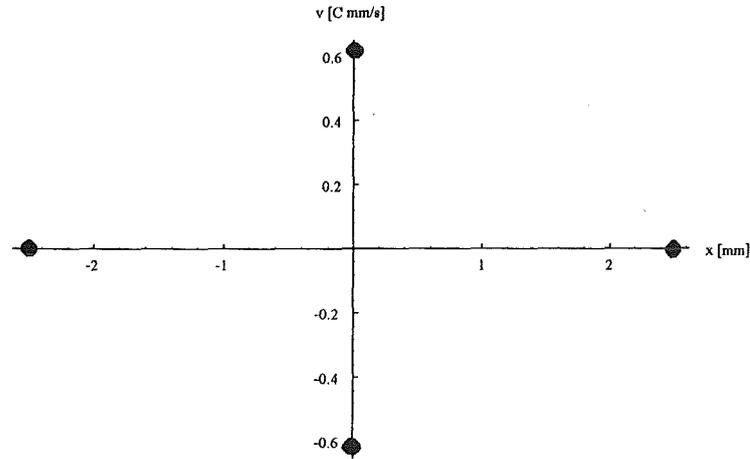


Bild 49: Poincaré-Schnitt einer 4π -periodischen Lösung. Die Schnittpunkte sind fett gezeichnet, um sie von den Koordinatenachsen abzuheben.

4.3.3.2 Instabile Lösungen

Außerhalb des Stabilitätsbereiches sind alle Lösungen instabil. Die triviale Lösung $\{\chi_1, \chi_2\} = \{0, 0\}$ ist dann ein hyperbolischer Fixpunkt. Die Schnittpunkte um den Ursprung herum müssen auf Hyperbeln liegen.

Es wurde der instabile Arbeitspunkt $a = 0,7$ und $q = 0,29$ gewählt (Bild 50).

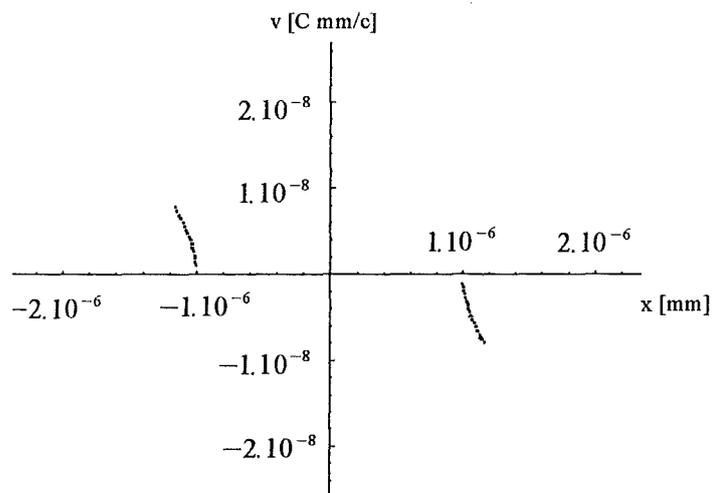


Bild 50: Poincaré-Bild einer instabilen Lösung. Die Schnittpunkte liegen auf Hyperbel-ästen.

4.3.3.3 Die Eigenwerte der Jakobi-Matrix im ungestörten Fall

Die Eigenwerte der Jakobi-Matrix der Poincaré-Abbildung in der Nähe des trivialen Fixpunktes müssen im Fall stabiler Lösungen komplex konjugiert sein. Für die Wahl eines instabilen Arbeitspunktes müssen sie reell sein. Der Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell kann jedoch auf zwei verschiedene Weisen geschehen (Kap. 4.3.2.3). Der Realteil beider komplex konjugierten Eigenwerte ist entweder positiv oder negativ. Im ersten Fall gilt für den Realteil beim Übergang vom stabilen in den instabilen Bereich der Stabilitätskarte:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\lambda_{1,2}) = 0.$$

Ist der Realteil der komplex konjugierten Eigenwerte negativ, gilt für beide Realteile beim Übergang von einem stabilen in einen instabilen Bereich:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\lambda_{1,2}) = 0.$$

In Tab. 1 wird das Überschreiten der Stabilitätsgrenze $\beta = 0$ anhand der mit „Zweidim“ berechneten Eigenwerte in Abhängigkeit der Parameter a und q des Stabilitätsdiagramms aufgezeigt. q wurde fest gewählt ($q=0,29$) und a variiert.

Tab. 1: Der Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Stabilitätsgrenze $\beta=0$. Auf der Grenze ist $\lambda_{1,2} = 1$

| Stabilität | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------|----------|
| $q = 0,29 ; a$ | -0,04 | -0,041 | -0,0415 | -0,042 | -0,0425 |
| λ_1 | $0,991 + 0,130*i$ | $0,996 + 0,082*i$ | $0,999 + 0,041*i$ | 1,059 | 1,096 |
| λ_2 | $0,991 - 0,130*i$ | $0,996 - 0,082*i$ | $0,999 - 0,041*i$ | 0,943 | 0,911 |

Der Arbeitspunkt ($q = 0,29$ und $a = 0,042$) für den die Eigenwerte reell werden, liegt sehr dicht an der Stabilitätsgrenze $\beta = 0$.

Die Stabilitätsgrenze $\beta = 1$ wird nach den Angaben der Stabilitätskarte in der Nähe des Arbeitspunktes $q=0,29$ und $a=0,7$ überschritten. Die mit „Zweidim“ berechneten Eigenwerte werden zwischen $a=0,699$ und $a=0,7$ reell (Tab. 2).

Tab. 2: Der Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Stabilitätsgrenze $\beta=1$. Auf der Grenze ist $\lambda_{1,2} = -1$.

| Stabilität | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|----------|
| $q = 0,29 ; a$ | 0,696 | 0,698 | 0,699 | 0,7 | 0,701 |
| λ_1 | $-0,996 + 0,080*i$ | $-0,998 + 0,055*i$ | $-0,999 + 0,037*i$ | -1,015 | -1,044 |
| λ_2 | $-0,996 - 0,080*i$ | $-0,998 - 0,055*i$ | $-0,999 - 0,037*i$ | -0,985 | -0,957 |

Der Zusammenhang zwischen einem Eigenwert der Poincaré-Abbildung und β ist aus der Floquet-Theorie bekannt [Argy94]. Es ist: $\lambda = e^{\mu T}$ mit $T = \Delta\xi = \pi$ und $\mu = i\beta$.

Durch Einsetzen von $\beta = 0$ und $\beta = 1$ in diese Formel ergeben sich übereinstimmend die mit „Zweidim“ bestimmten Eigenwerte an den jeweiligen Stabilitätsgrenzen:

$$\beta = 0: \quad \lambda = 1$$

$$\beta = 1: \quad \lambda = -1$$

4.3.4 Poincaré-Abbildung mit abstoßender Störung

Die nachfolgenden Bilder sind Poincaré-Schnitte durch Bahnkurven des gestörten Systems:

$$\chi_1 = x, \quad \chi_2 = \dot{x}$$

$$\frac{d\chi_1}{d\xi} = \chi_2(\xi)$$

$$\frac{d\chi_2}{d\xi} = - \left(a_1 + 2 q_1 \cos(2 \xi) \right) \chi_1(\xi) - \kappa F_{Stör}, \quad (\text{Gl. 4.3.4.1})$$

wobei der Systemparameter κ eingeführt wird, mit dem die Stärke der nach außen wirkenden Kraft variiert wird. Die Parameter a und q bleiben stets fest ($a = 0,015$ und $q = 0,29$). Es wird die topologische Veränderung der Lösungen im Phasenraum in Abhängigkeit von κ anhand der Poincaré-Schnitte untersucht.

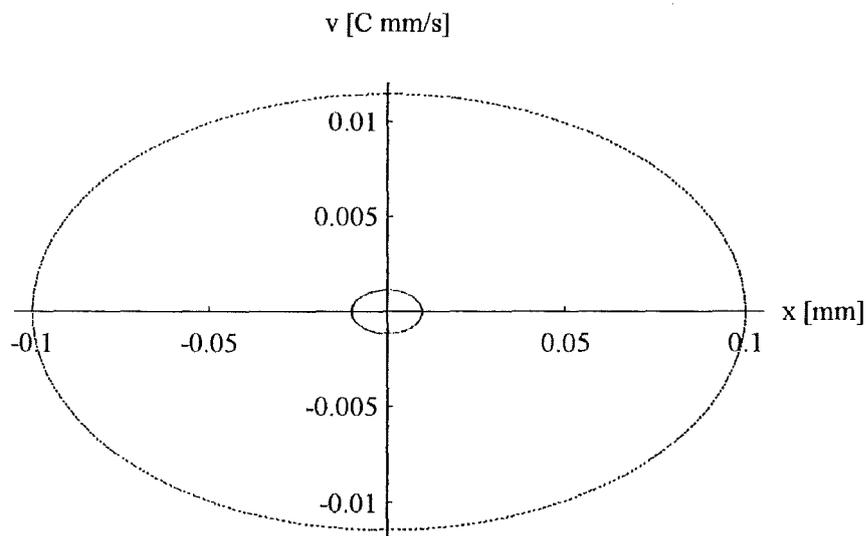


Bild 51: $\kappa = 1/7$; Die Anfangsbedingungen beider Bahnkurven sind die gleichen wie in Bild 48 ($x(0) = 0,1$ mm und $x(0) = 0,01$ mm). Die Bahnkurven tendieren hier zu etwas kleineren Geschwindigkeiten, weil das Ion in der Umgebung des Ursprungs stärker abgebremst wird.

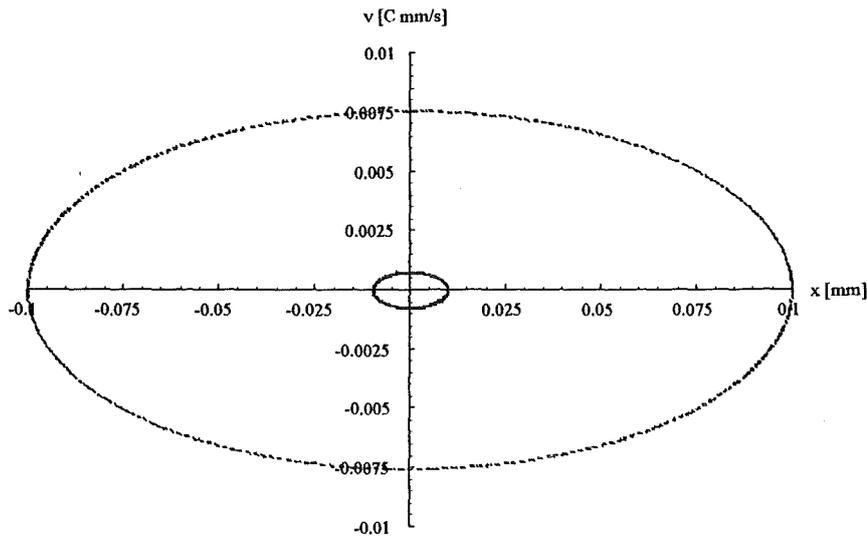


Bild 52: $\kappa = 1/5$; Die Bahnkurven weisen im Vergleich zum vorigen Bild noch kleinere Geschwindigkeiten auf.

Wird die Abstoßung größer, werden die Ionen in der Umgebung des Ursprungs stärker abgebremst. Bei einer bestimmten Stärke der Abstoßung gelangen einige nicht mehr über den Potentialwall (Bild 53)

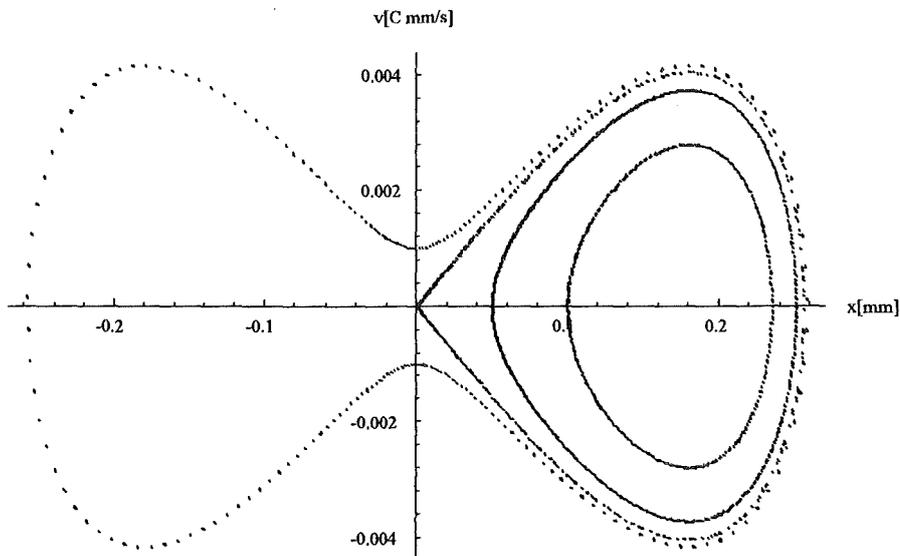


Bild 53: $\kappa = 1/4$; Der bei $\kappa = 1/5$ im Ursprung vorhandene elliptische Fixpunkt ist hyperbolisch geworden. Es entstehen zusätzlich zwei neue elliptische Fixpunkte auf der rechten und linken Seite. Ihre Trajektorien haben die Periode $\Delta\xi = \pi$.

Die Struktur der Lösungen des Phasenraum verändert sich plötzlich. Die Schnittpunkte einer Bahnkurve in der Nähe des Ursprungs bleiben nicht mehr nur in der Umgebung des Ursprungs, sondern liegen auch weit von ihm entfernt. Der Fixpunkt im Ursprung ist nicht mehr elliptisch, sondern hyperbolisch. Die makroskopische Entwicklung der Bahnkurve verändert sich drastisch. Dieser Übergang wird an späterer Stelle noch genauer untersucht.

Die Zunahme der Abstoßung bewirkt, daß sich die Bahnkurven vom Ursprung aus noch weiter entfernen (Bild 54).

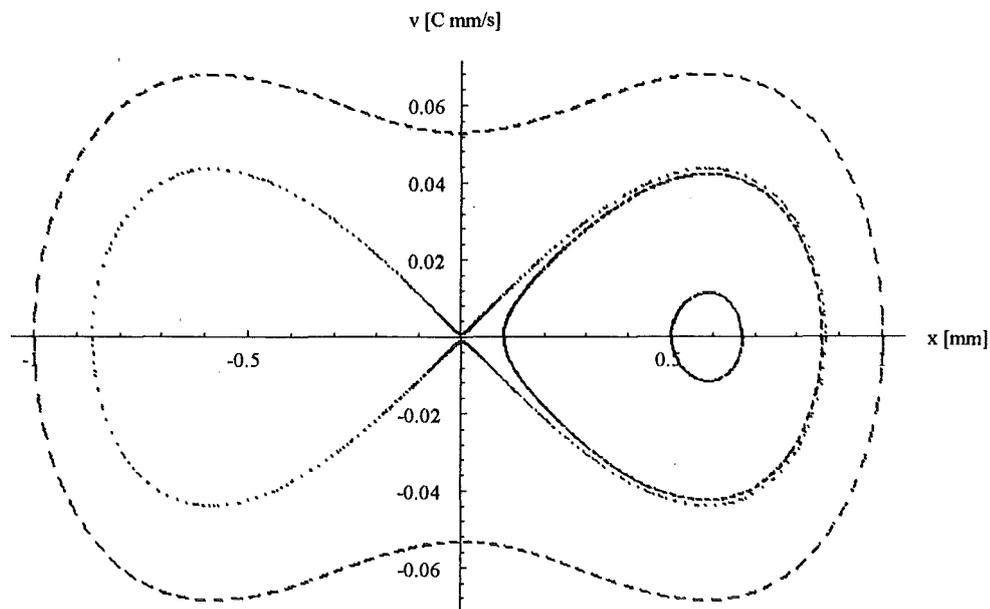


Bild 54: $\kappa = 1/3$; Die zwei elliptischen Fixpunkte wandern nach außen. Die Umkehrpunkte der Makrobewegung liegen weiter vom Ursprung entfernt im Vergleich zu Bild 53.

Bei einer weiteren Verstärkung der Störung ist eine stochastische Verteilung der Schnittpunkte um den Ursprung zu sehen (Bild 55).

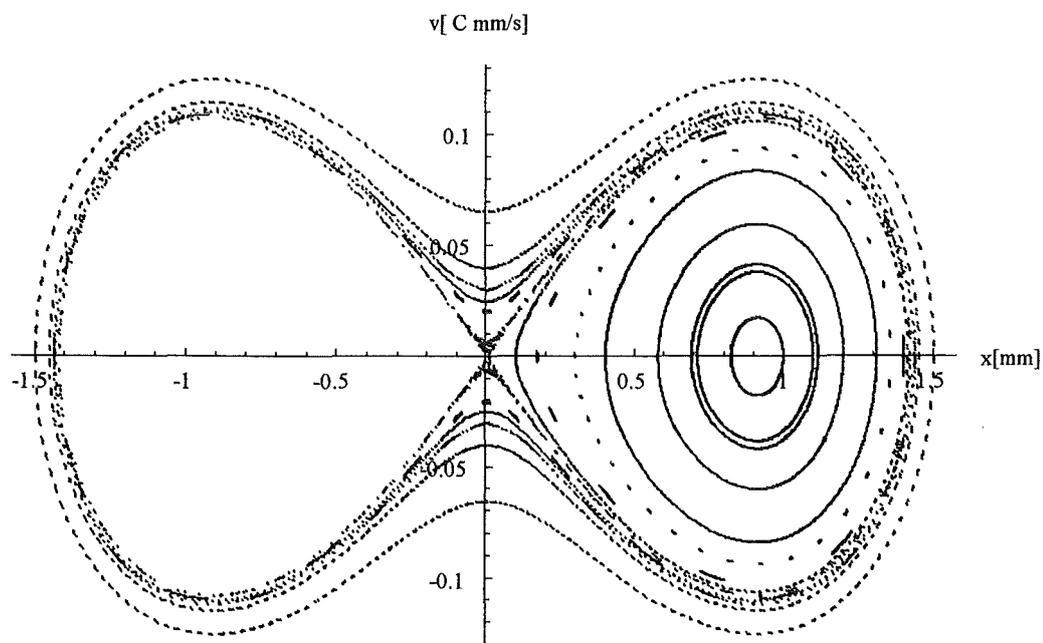


Bild 55: $\kappa = 1/2$; Die Schnittpunkte von Bahnkurven, die in der Nähe des Ursprungs vorbeilaufen, verteilen sich nicht mehr auf geschlossenen Kurven. Sie verteilen sich stochastisch um den Ursprung herum. Dies ist ein deutliches Merkmal von chaotischem Verhalten dieser Bahnkurven.

Durch eine weitere Verstärkung der Störung erscheinen Inselketten. Ein weiteres Merkmal deterministisch-chaotischer Eigenschaften des Systems (Bild 56 bis 60).

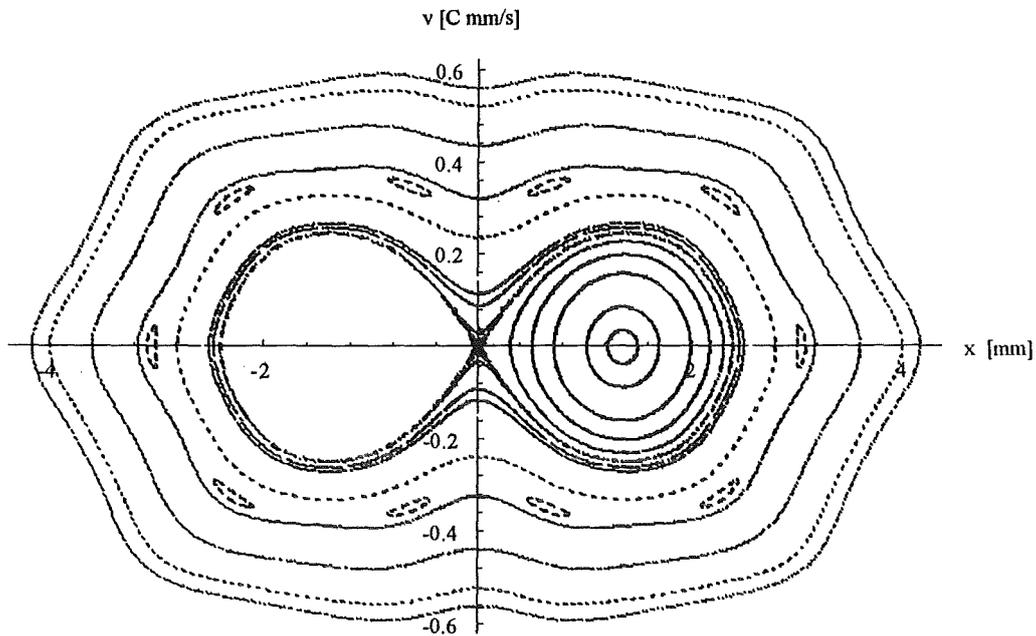


Bild 56: $\kappa=1$; Die chaotische Region wird größer. Der elliptische Fixpunkt wandert weiter nach außen. Eine zehnfach-periodische Inselkette ist zu erkennen. Im Zentrum einer Insel ist jeweils ein elliptischer Fixpunkt. Diese Fixpunktlösung hat die Periodizität $\Delta\xi=10\pi$. Weit außen sind Schnittkurven von Tori nichtperiodischer Lösungen zu sehen. Sie werden im Lauf der Zeit beliebig dicht mit Schnittpunkten gefüllt.

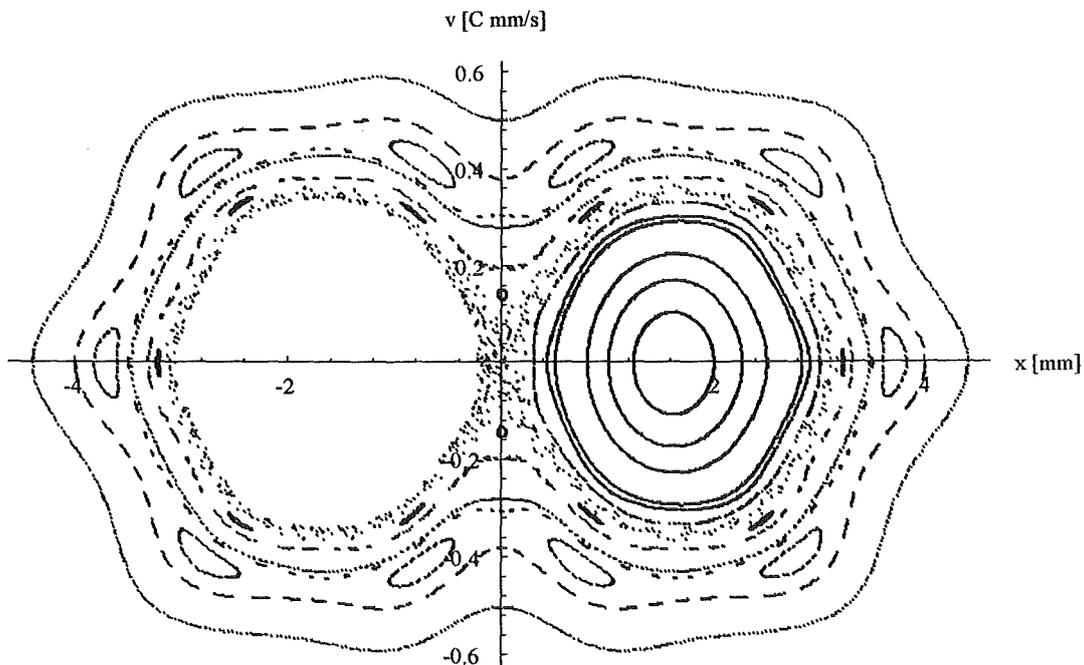


Bild 57: $\kappa=1,5$; Ausweitung des Chaos. Es sind weitere Inselketten mit voneinander verändernder Periodizität entstanden.

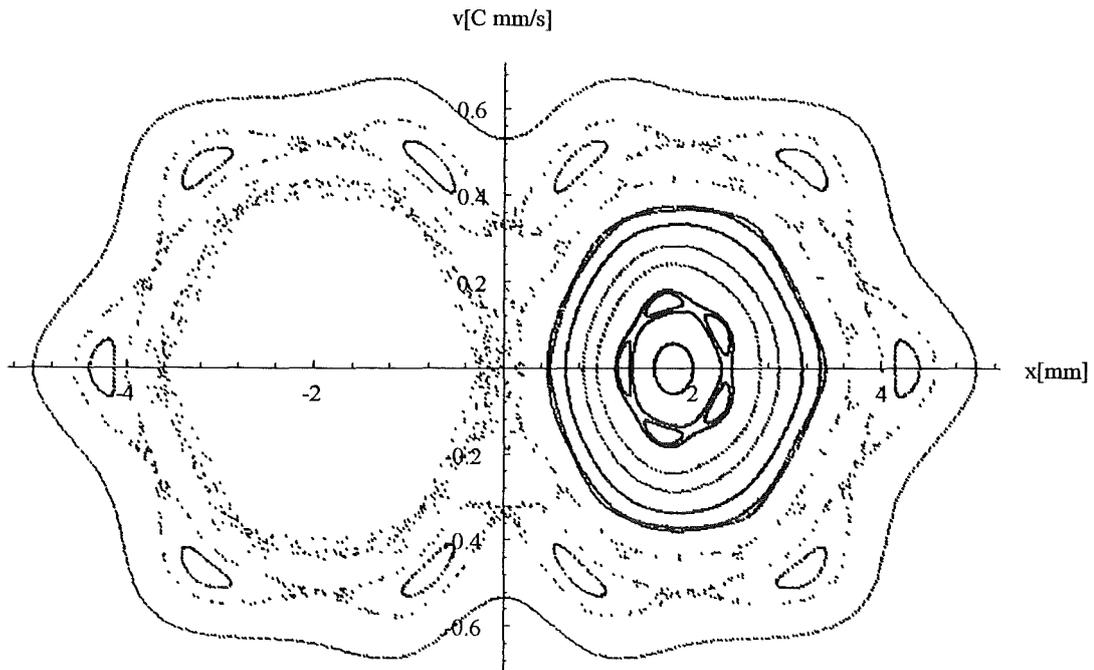


Bild 58: $\kappa=2$; Sehr deutlich sind hyperbolische Fixpunkte zwischen den zehn Inseln zu sehen. In der Umgebung des elliptischen Fixpunktes ist eine Inselkette mit fünf Fixpunkten entstanden.

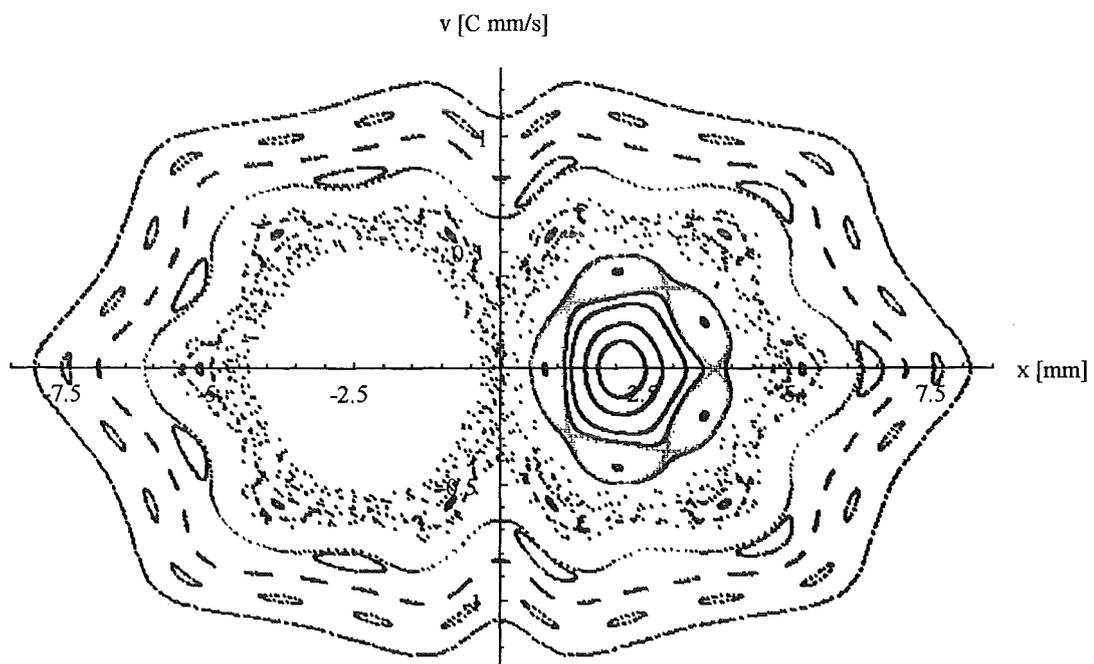


Bild 59: $\kappa=3$; Die zehnfach periodische Inselkette versinkt im Chaos. Zwischen den fünf Inseln bewirken hyperbolische Fixpunkte das chaotische Verhalten von Bahnkurven. Tori regulärer Bahnkurven umschließen ganz außen den Bereich des Phasenraums, in dem die Entwicklung der Lösungen stochastisch ist.

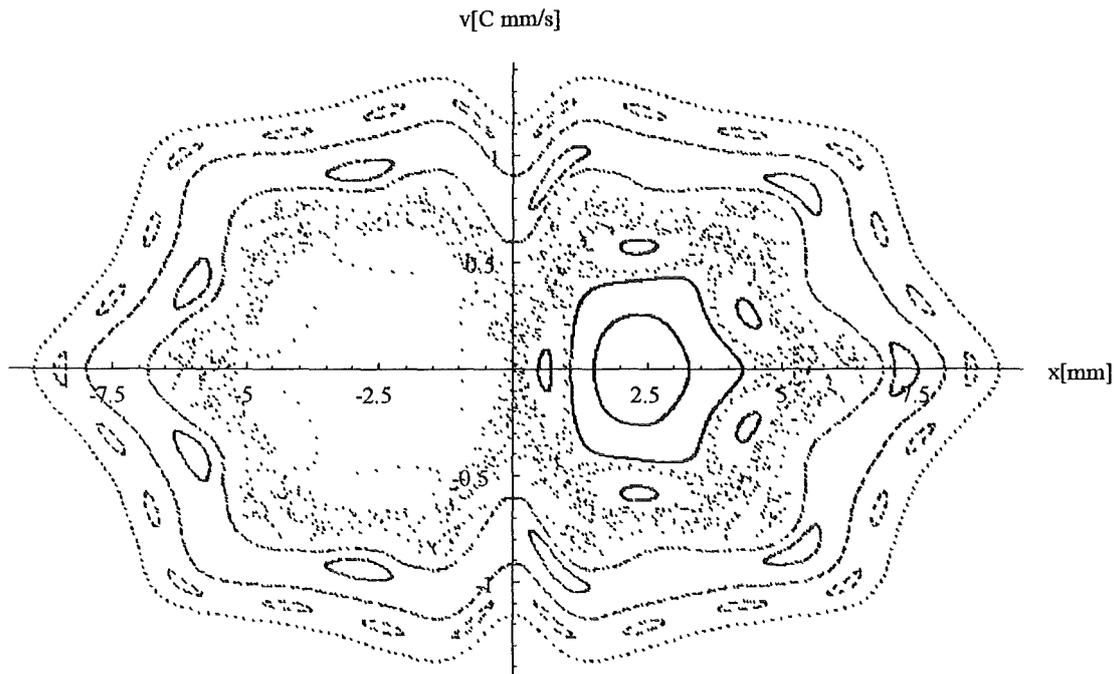


Bild 60: $\kappa = 4$; Auch die Inselkette mit den fünf Fixpunkten zerfällt nach und nach unter der Zunahme der Störung.

Nach dem Fixpunktwechsel zwischen Bild 52 und 53 findet ein kontinuierlicher Zerfall von Tori unter der Zunahme der Störung statt. Die zunehmend stochastische Entwicklung der Lösungen des Phasenraums nach dem Übergang sind ein eindeutiges Indiz für den deterministisch-chaotischen Charakter des Systems. Vor dem Übergang scheinen alle Bahnkurven auch unter dem Einfluß der Störung regulär zu sein.

4.3.4.1 Verlust der Strukturstabilität des Systems

Zwischen $\kappa=1/5$ (Bild 52) und $\kappa=1/4$ (Bild 53) gibt es einen qualitativen „Sprung“ der Topologie der Lösungen. Um die Stärke der Störung zu bestimmen, ab der die Lösungen in der Umgebung des Ursprungs einen völlig anderen Verlauf nehmen, wurden Poincaré-Schnitte einer einzigen Bahnkurve die zur Anfangsbedingung ($\chi_1 = x = 0,5 \text{ mm}$, $\chi_2 = \dot{x} = 0 \text{ mm/s}$) gehört, in Abhängigkeit von κ untersucht (Bild 61).

Wenn die nach außen gerichtete Kraft die Stärke $\kappa F^{Stör} = 1/4,125 F^{Stör}$ hat, bleiben sämtliche Schnittpunkte der mit der Anfangsbedingung $\chi_1 = x = 0,5 \text{ mm}$, $\chi_2 = \dot{x} = 0 \text{ mm/s}$ verknüpften Bahn im positiven Halbraum. Physikalisch reicht die Energie, die das Teilchen bei dieser Anfangsbedingung aus dem antreibenden Wechselfeld bekommt, nicht mehr aus, um über den Potentialberg zu kommen, der durch κ sukzessive vergrößert wurde. Diese Eigenschaft ist bereits aus den Bildern der Bahn des Ions im Ortsraum (Kap. 4.3.1) bekannt. Aus der so sehr genau bestimmten Grenze der Kraft ($\kappa=1/4,125$) kann sofort die Zahl der Ionen des Ensembles bestimmt werden, die nötig ist, um dieses Verhalten zu bewirken. Es gilt $N_{Ionen}^{Grenze} = \kappa \cdot 5 \cdot 10^5$, so daß die Bahn bei einer Ionenzahl, die größer als $N_{Ionen}^{Grenze} = 1,21 \cdot 10^5$ ist, im positiven Halbraum bleibt.

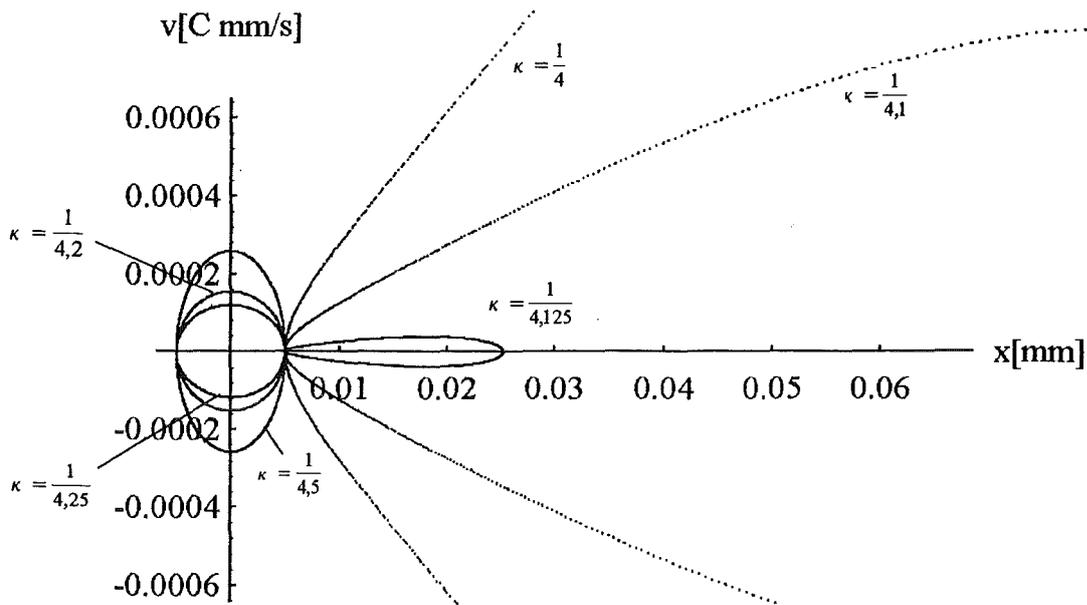


Bild 61: Die Topologie der Lösungen ändert sich sehr schnell bei $\kappa=1/4,125$. Die abgeschnittenen Kurven schließen sich weiter außen.

Der Wechsel des Fixpunktcharakters im Ursprung muß mit einem Übergang der Eigenwerte von komplex-konjugiert zu reell einhergehen. In Tab. 3 sind die Eigenwerte der Poincaré-Abbildung in der Nähe des Ursprungs in Abhängigkeit von κ aufgeführt.

Tab.3: Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Grenze $\beta_x=0$ durch die Störung für den Standardarbeitspunkt ($q_{Arbeits} = 0,29$ und $a_{Arbeits} = 0,015$).

| Stabilität | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| κ | $\frac{1}{4,18}$ | $\frac{1}{4,16}$ | $\frac{1}{4,14}$ | $\frac{1}{4,125}$ | $\frac{1}{4,10}$ |
| λ_1 | $0,996 + 0,086*i$ | $0,997 + 0,068*i$ | $0,999 + 0,439*i$ | 1,030 | 1,063 |
| λ_2 | $0,996 - 0,086*i$ | $0,997 - 0,068*i$ | $0,999 - 0,439*i$ | 0,970 | 0,940 |

Die komplex konjugierten Eigenwerte werden zwischen $\kappa = 1/4,14$ und $\kappa = 1/4,125$ reell. Für $\kappa = 1/4,125$ hat a_{lin} in der Nähe des Ursprungs ($\chi_1 = x = 10^{-4} mm$, $\chi_2 = \dot{x} = 0 mm/s$) den Wert: $a_{lin} = -0,0567$. Dieser Wert führt zu einem effektiven Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ mit:

$$a_{eff} = a_{Arbeits} + a_{lin} \quad (a_{eff} = -0,0417; q_{Arbeits} = 0,29 \text{ und } a_{Arbeits} = 0,015),$$

der lokal (in der Nähe des Ursprungs) zum Überschreiten der Stabilitätsgrenze führt (siehe Tab. 1).

Man kann sagen, daß der Arbeitspunkt für Lösungen in der Umgebung des Ursprungs durch den zusätzlichen Beitrag a_{lin} in die Instabilität verschoben wird. Eine Ionenzahl von $N_{Ionen}^{Grenze} = 1,21 * 10^5$ reicht aus, um die Instabilität von Trajektorien zu bewirken.

Durch den raschen Wechsel des Fixpunktcharakters mit der Vergrößerung der Ionenzahl, verändern Bahnkurven in der Umgebung des Ursprungs ihr prinzipielles Verhalten. Das gestörte System ist vor dem Fixpunktwechsel strukturstabil. Diese Stabilität verliert es mit der lokalen Verschiebung des Arbeitspunktes in die Instabilität.

Der Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Stabilitätsgrenze $\beta_x = 0$ für die x-Richtung wurde für einen anderen Arbeitspunkt $\alpha_{Arbeit} = -1,3$ und $q_{Arbeit} = 1,838$, der sehr dicht an der Stabilitätsgrenze $\beta_x=0$ liegt, durch eine sehr geringe Ionenzahl (κ klein) bewirkt. Der kleine, aus der Störung berechnete Beitrag α_{lin} , reicht aus, um den Wechsel des zuerst elliptischen Fixpunktes im Ursprung zu hyperbolisch zu bewirken (Tab. 4). Die Ionenzahl, die den Fixpunktwechsel auslöst, beträgt hier $N_{Ionen}^{Grenze} = 4,065 * 10^4$.

Tab. 4: Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Grenze $\beta_x=0$ durch eine schwache Störung für einen Arbeitspunkt kurz vor der Stabilitätsgrenze ($\alpha_{Arbeit} = -1,3$ und $q_{Arbeit} = 1,838$).

| Stabilität | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| κ | $\frac{1}{13}$ | $\frac{1}{12,5}$ | $\frac{1}{12,4}$ | $\frac{1}{12,3}$ | $\frac{1}{12,2}$ |
| λ_1 | $0,986 + 0,166*i$ | $0,997 + 0,076*i$ | $0,999 + 0,035*i$ | 1,060 | 1,094 |
| λ_2 | $0,986 - 0,166*i$ | $0,997 - 0,076*i$ | $0,999 - 0,035*i$ | 0,943 | 0,913 |
| α_{lin} | 0,01798 | 0,0187 | 0,01885 | 0,01901 | 0,01916 |
| α_{eff} | -1,28202 | -1,2813 | -1,2812 | -1,28099 | -1,2808 |

Mit dem zusätzlichen linearen Störanteil von $\alpha_{lin} = 0,019$, der bei $\kappa = 1/12,4$ berücksichtigt werden muß, hat ist $\alpha_{eff} = -1,281$. Der Arbeitspunkt $\{\alpha_{eff}, q\}$ liegt wieder im instabilen Bereich jenseits der Grenze $\beta_x = 0$.

4.3.5 Linearisierung der Störung im Ursprung

Der Störterm wurde in der Nähe des Nullpunktes in eine Taylor-Reihe entwickelt. Dort hat die störende Kraft einen annähernd linearen Verlauf (Bild 40). Er kann hier durch sein erstes Taylor-Glied in guter Näherung ersetzt werden:

$$F_{Stör} \approx F'_{Stör}(0) x$$

Dazu muß die erste Ableitung von $F_{Stör}$ berechnet werden. Sie hat die Form:

$$F'_{Stör} = \left[\frac{2 \alpha \mu p}{e^{\mu x^2} x} + \frac{3 \alpha p}{e^{\mu x^2} x^3} - \frac{3 \alpha p \sqrt{\pi} x \operatorname{Erf}[\sqrt{\mu} x^2]}{2 \sqrt{\mu} x^5} \right]$$

Es gilt dann in der Umgebung des Ursprungs in guter Näherung:

$$F_{Stör} \approx -0.23357 x \quad (\sigma=0,5 \text{ mm}; N^{Ionen} = 5 \cdot 10^5)$$

Die Parameter a_1 und q_1 in Gl. 4.3.4.1 markieren im Stabilitätsdiagramm den Arbeitspunkt $\{a_{Arbeit} = a_x, q_{Arbeit} = q_x\}$ für die x-Richtung. Durch die Linearisierung in der Umgebung des Ursprungs kann $F'_{Stör}$ als zusätzlicher Beitrag zum linearen Teil $a_x \chi_1$ der Differentialgleichung aufgefaßt werden. Er wird deshalb mit $a_{lin} = \kappa F'_{Stör} = -0,2335 \kappa$ berechnet, so daß die Gleichungen, die das System in guter Näherung in der Umgebung des Ursprungs beschreiben, folgendes Aussehen bekommen:

$$\chi_1 = x, \quad \chi_2 = \dot{x}$$

$$\frac{d\chi_1}{d\xi} = \chi_2(\xi)$$

$$\frac{d\chi_2}{d\xi} = - \left[(a_{Arbeit} \underbrace{-\kappa \cdot 0.2335}_{a_{lin}}) + 2 q_{Arbeit} \cos(2\xi) \right] \chi_1(\xi)$$

Die Lösungen dieses Systems in der Umgebung des Ursprungs sind Lösungen einer ungestörten Mathieschen Differentialgleichung. Befindet sich der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ innerhalb eines Stabilitätsbereiches, dann sind die Lösungen in der Umgebung des Ursprungs stabil. Befindet sich der Arbeitspunkt hingegen lokal in einem instabilen Bereich, sind die Lösungen lokal instabil (Kap. 4.3.3). Wichtig ist die Feststellung, daß die lokale Stabilität des Fixpunktes im Ursprung die makroskopische Entwicklung von Lösungen in entscheidender Weise prägt (Bild 61).

4.3.6 Chaotische Eigenschaften im Fall eines starken anziehenden Störpotentials

Die folgenden Betrachtungen sind unrealistisch und dienen einem grundsätzlichen Verständnis der topologischen Eigenschaften der Mathieschen Differentialgleichung mit Störung. Um prinzipielle Eigenschaften zu finden, wurde das Vorzeichen der Störung umgedreht. a_{lin} wird dann positiv und verschiebt den Arbeitspunkt lokal in Richtung der Stabilitätsgrenze $\beta_x = 1$. Denn falls die Topologie der Lösungen durch eine abweisende Störung mit dem Überschreiten der Stabilitätsgrenze $\beta_x = 0$ eine rasche Änderung erfährt, sollte dies auch für das Überschreiten einer anderen Grenze, insbesondere der Stabilitätsgrenze $\beta_x = 1$ durch eine anziehende Störung geschehen.

Es wurden wieder Poincaré-Schnitte des gestörten Systems (Gl.4.3.4.1) mit negativ gewähltem κ erstellt.

Als Ausgangspunkt wurde der Standardarbeitspunkt ($q_{Arbeit} = 0,29$ und $a_{Arbeit} = 0,015$) gewählt. Bild 62 ist ein Poincaré-Schnitt für eine starke anziehende Störung ($\kappa = -2,9$).

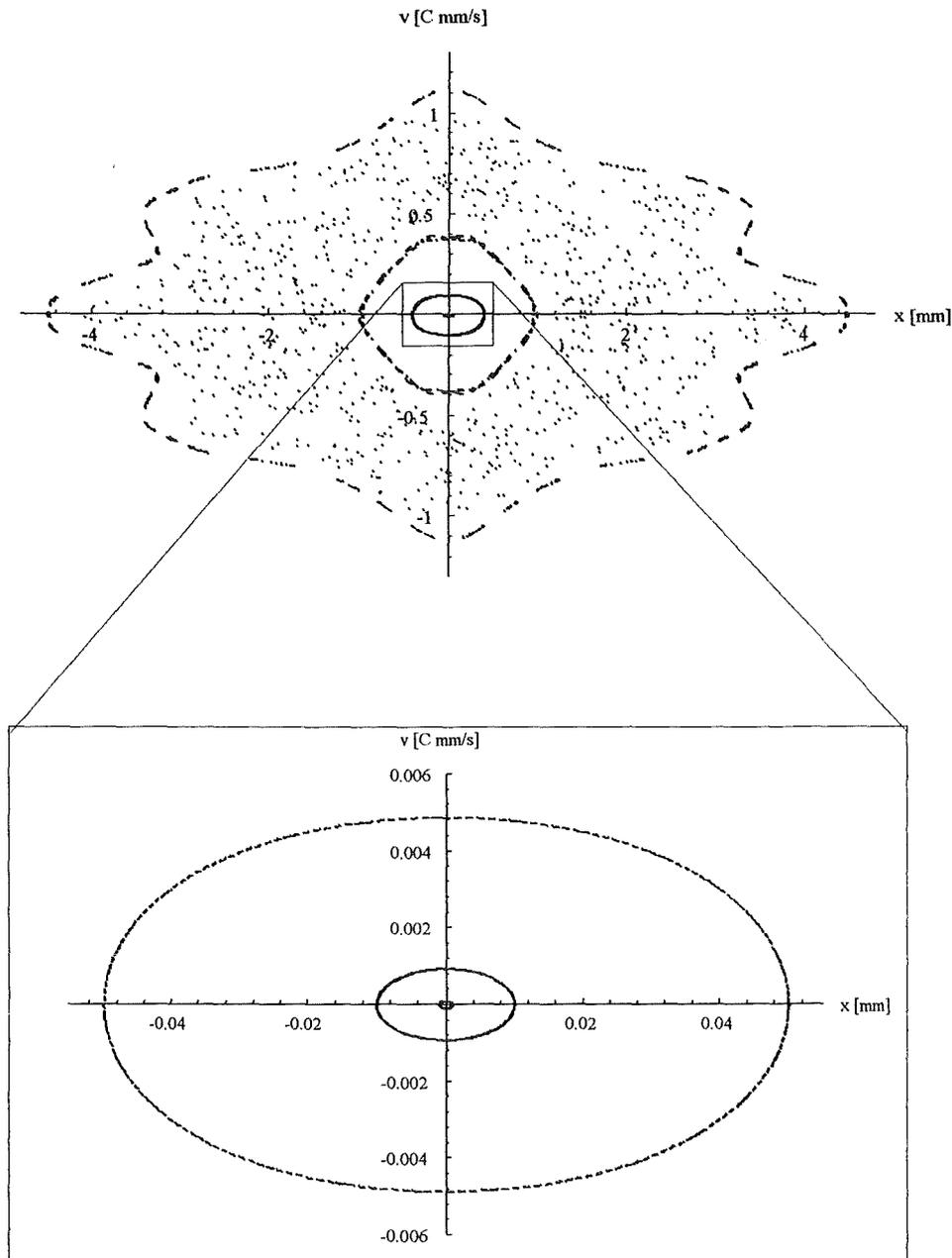


Bild 62: $\kappa = -2,9$ (lokal stabil) ; Gesamtbild und Ausschnitt der Umgebung des Ursprungs. In der Umgebung gibt es ausschließlich stabile Lösungen.

Die Steigung der Kraft führt zu $\alpha_{lin} = 0,678$ (siehe Tab. 1), so daß zusammen mit $\alpha_{Arbeit} = 0,015$ der effektive Arbeitspunkt die Werte $\{\alpha_{eff} = 0,693, q = 0,29\}$ hat. Dieser Punkt liegt auf der stabilen Seite an der Grenze $\beta = 1$ der Stabilitätskarte.

Die Kurven in Bild 62 um den Ursprung herum sind nahezu ellipsenförmig, genauso wie es bei schwacher Störung der Fall ist. Weiter außen befinden sich chaotische Bahnkurven. Sie sind bereits durch die anziehende Störung entstanden, obwohl der Fixpunkt im Ursprung nicht instabil ist. Für eine etwas stärkere Anziehung wird der Fixpunkt instabil (Bild 63).

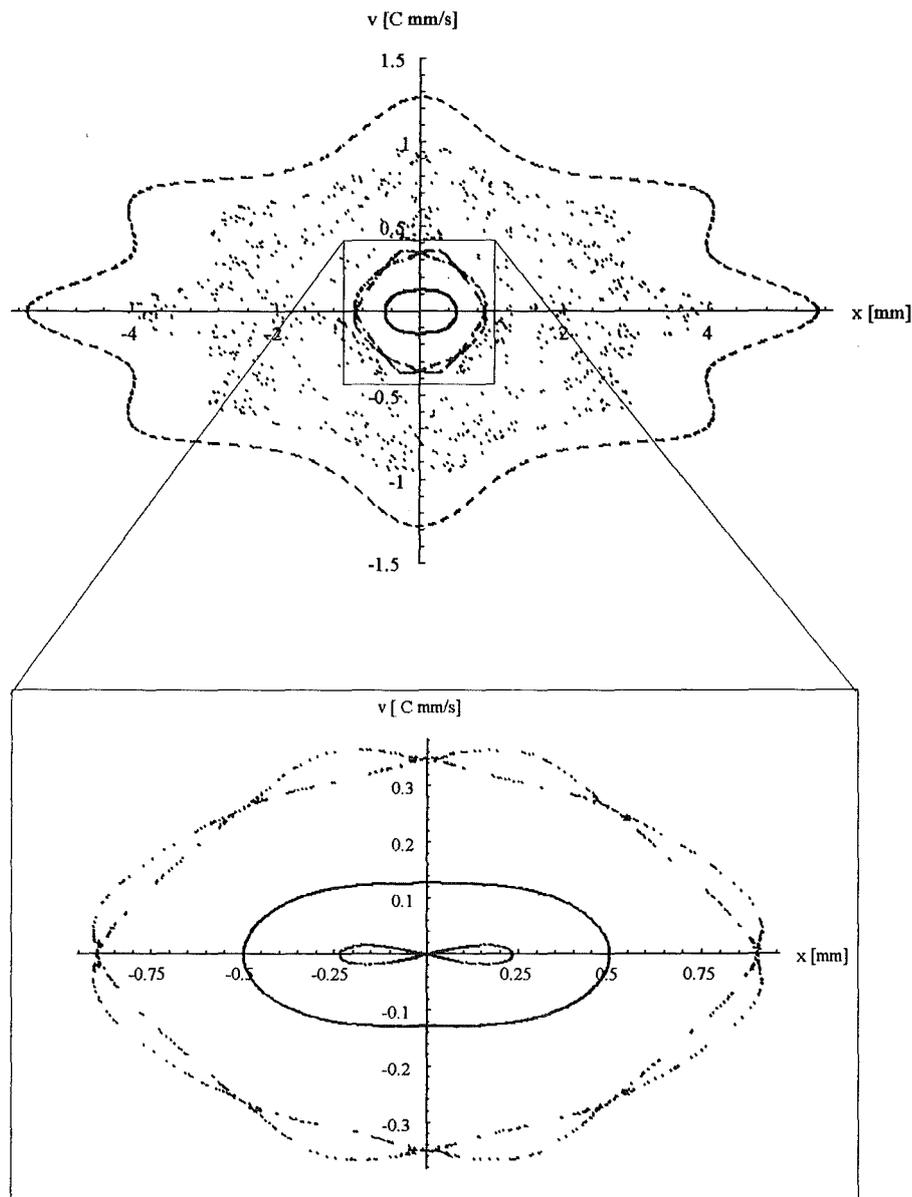


Bild 63 $\kappa = -3$ (lokal instabil); Im Gegensatz zu Bild 62 gibt es in der Umgebung des Ursprungs instabile Lösungen. Die Bahnkurven weit außen verhalten sich ähnlich wie in Bild 62.

Für $\kappa = -3$ ergibt sich aus dem linearen Term der Taylorreihe des Störterms $a_{lin} = 0,7013$, was zu $a_{eff} = 0,7163$ führt. a_{lin} wird in der untersten Zeile der Tabelle 5 angegeben. Die Grenze wird bereits zwischen $\kappa = -2,925$ und $\kappa = -2,93$ überschritten. Die lokale Eigenschaft der quasi ungestörten Mathieuschen Differentialgleichung scheint die Struktur der Lösungen in der Umgebung des Ursprungs festzulegen. Die Lage des effektiven Arbeitspunktes $\{a_{eff}, q\}$ legt fest, ob der Fixpunkt im Ursprung elliptisch oder hyperbolisch ist. Im stabilen Bereich ist der Fixpunkt stets elliptisch, im instabilen Bereich dagegen hyperbolisch.

Tab. 5: Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Grenze $\beta_x=1$.

| Stabilität | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|----------|
| κ | -2,9 | -2,92 | -2,925 | -2,93 | -2,94 |
| λ_1 | $-0,994 + 0,106*i$ | $-0,998 + 0,058*i$ | $-0,999 + 0,038*i$ | -1,022 | -1,068 |
| λ_2 | $-0,994 - 0,106*i$ | $-0,998 - 0,058*i$ | $-0,999 - 0,038*i$ | -0,978 | -0,936 |
| a_{lin} | 0,678 | 0,682 | 0,683 | 0,685 | 0,687 |
| a_{eff} | 0,693 | 0,697 | 0,698 | 0,7 | 0,702 |

Ein Poincaré-Schnitt für $\kappa = -4$ und $\{a_{Arbeit} = 0,015; q_{Arbeit} = 0,29\}$ zeigt die weitere Entwicklung der Bahnkurven bei zunehmend anziehender Störung (Bild 64).

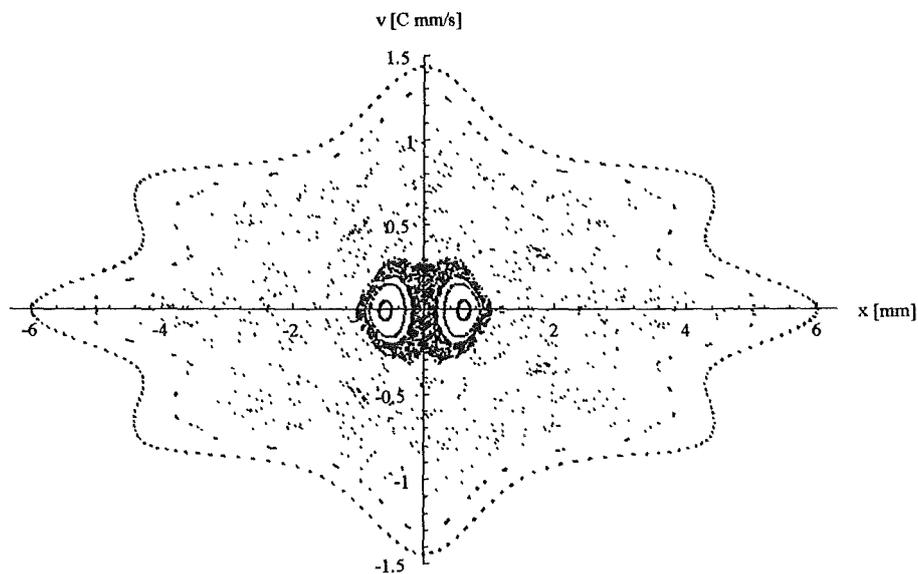


Bild 64: $\kappa = -4$ (lokal instabil); Die fett gedruckten Schnittpunkte werden von einer einzigen Bahnkurve erzeugt. Bemerkenswert ist, daß im Gegensatz zum Übergang an der Grenze $\beta_x=0$, wo zwei elliptische Fixpunkte der Periode π entstehen, nun zwei elliptische Fixpunkte der Periode 2π zu sehen sind. Die zwei elliptischen Fixpunktlösungen winden sich hier zweimal um die Zylinderachse, während sie sich nach dem Übergang an der Grenze $\beta_x = 0$ nur einmal um die Achse windet.

Man kann das Störpotential so weit vergrößern, bis a_{eff} in den nächsten Stabilitätsbereich oberhalb der Grenze $\beta_x=2$ (Bild 24, S. 21) eintritt. Dann ist zu erwarten, daß der hyperbolische Fixpunkt im Ursprung wieder elliptisch wird. In seiner Umgebung müssen die Bahnkurven stabil sein.

Zwischen $\kappa = -5,4$ und $\kappa = -5,45$ findet der Übergang an der Grenze $\beta_x=2$ statt. In den Poincaré-Schnitten für $\kappa = -5,4$ (Bild 65) und $\kappa = -5,5$ (Bild 66) ist dieser Übergang deutlich zu sehen:

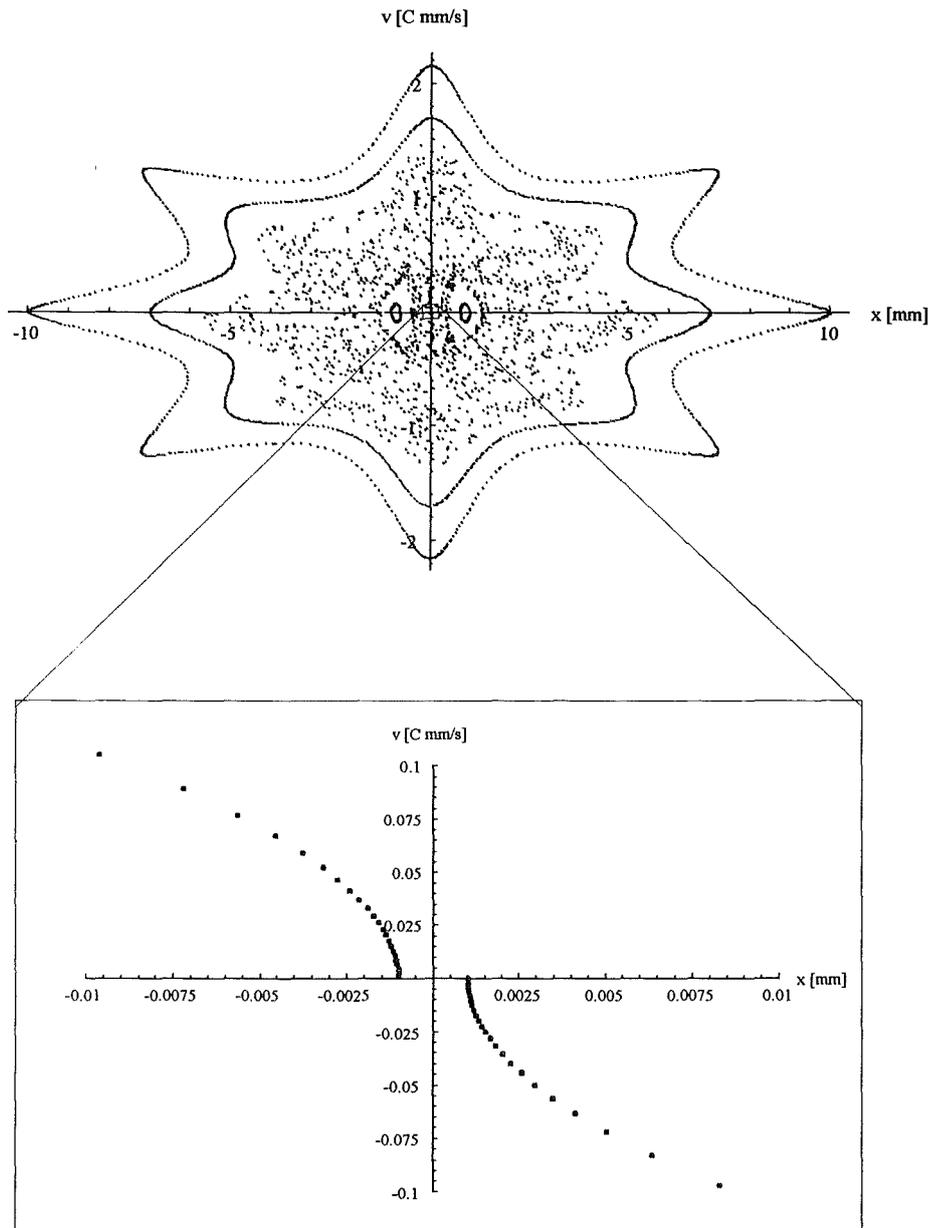


Bild 65: $\kappa = -5,4$ (lokal instabil); Die Bahnkurve in der Umgebung des Ursprungs weist einen instabilen Veerlauf auf. Es sieht so aus, als würden alle Schnittpunkte auf Hyperbeln liegen, so wie es im ungestört instabilen Beispiel (Bild 50, S. 46) der Fall ist.

Die Schnittpunkte der instabilen Bahnkurve (Bild 65) in der Umgebung des Ursprungs scheinen auf hyperbelähnlichen Kurven zu liegen. Dies würde bedeuten, daß die Bahnkurve auf einer Integralfläche verläuft, die noch nicht zerfallen ist (Kap. 4.3.2.4, S. 44). Möglicherweise gibt es auch im instabilen Bereich eine Koexistenz von noch nicht zerfallenen Integralflächen und bereits zerstörten. Diese Koexistenz ist im Allgemeinen sehr schwer zu sehen, weil beide Strukturen im chaotischen Bereich völlig durchmischt sind.

Wird die Anziehung noch ein bißchen vergrößert, sind die Lösungen in der Umgebung des Ursprungs wie erwartet wieder lokal begrenzt (Bild 66).

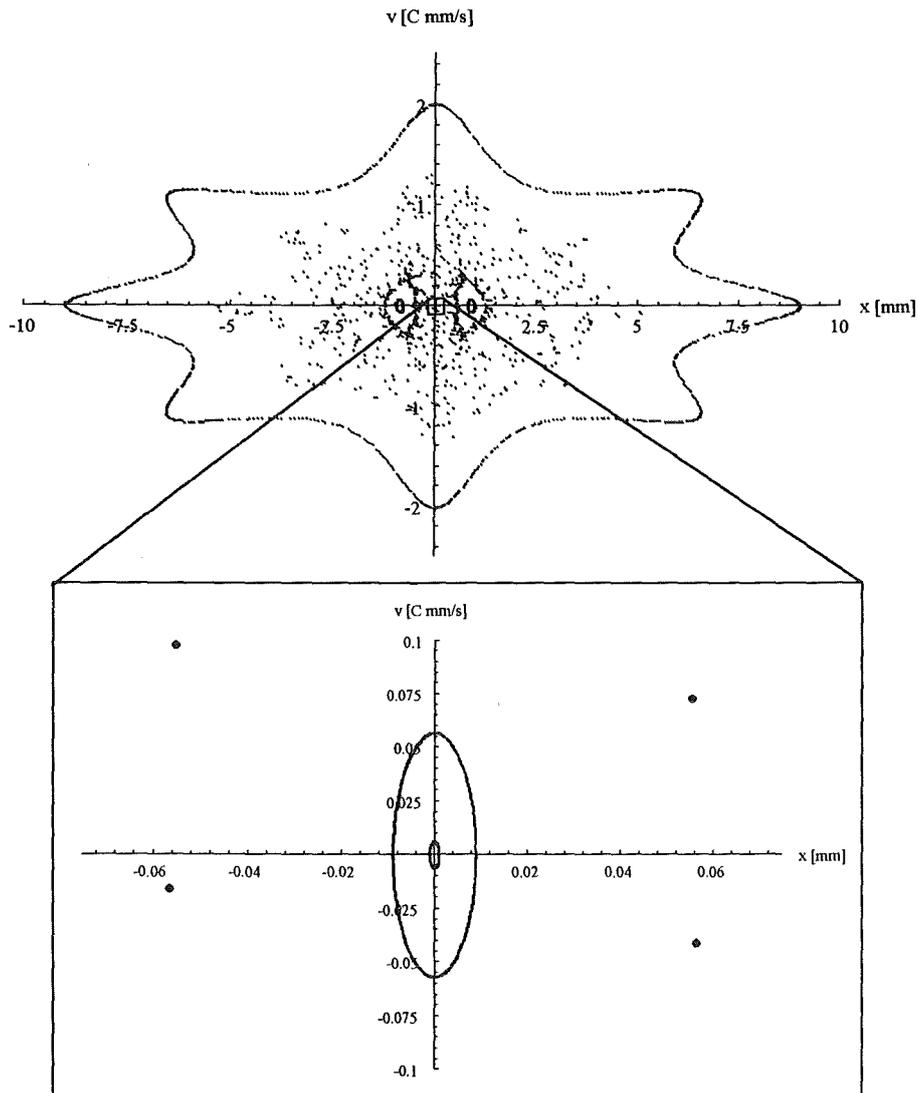


Bild 66: $\kappa = -5,5$ (lokal stabil); Die Bahnkurven in der Umgebung des Ursprungs sind wieder begrenzt.

Der chaotische Bereiche des Phasenraums, der den stabilen Bereich in der Umgebung des elliptischen Fixpunktes umschließt, ist seinerseits wieder von regulären Bahnkurven umgeben. Die grobe Struktur der Lösungen verändert sich weiter außen nicht mehr drastisch. Die Eigenwerte der Jakobi-Matrix (Tab. 6) werden nach dem lokalen Übergang an der Grenze $\beta_x=2$ komplex konjugiert. Es liegt im Ursprung wieder ein elliptischer Fixpunkt vor.

Tab. 6: Der Übergang der Eigenwerte von reell zu komplex konjugiert an der Stabilitätsgrenze $\beta_x=2$.

| Stabilität | instabil | instabil | stabil | stabil | stabil |
|-------------|----------|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| κ | -5,3 | -5,4 | -5,45 | -5,5 | -6 |
| λ_1 | -1,188 | -1,042 | $-0,993 + 0,113*i$ | $-0,985 + 0,167*i$ | $-0,900 + 0,435*i$ |
| λ_2 | -0,841 | -0,959 | $-0,993 - 0,113*i$ | $-0,985 - 0,167*i$ | $-0,900 - 0,435*i$ |
| a_{lin} | 1,239 | 1,262 | 1,274 | 1,286 | 1,403 |
| a_{eff} | 1,254 | 1,277 | 1,289 | 1,301 | 1,418 |

Um zu sehen, ob an der Grenze $\beta_x=3$ wieder ein hyperbolischer Fixpunkt entsteht, wurde die Anziehung noch einmal verstärkt. Die berechneten Eigenwerte (Tab. 7) prognostizieren den Wechsel des Fixpunktcharakters von elliptisch zu hyperbolisch zwischen $\kappa = -17,0$ und $\kappa=-17,02$ ($a_{eff} = 3,992$).

Tab. 7: Der Übergang der Eigenwerte von komplex konjugiert zu reell an der Stabilitätsgrenze $\beta_x=3$.

| Stabilität | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|----------|
| κ | -16,95 | -17 | -17,01 | -17,02 | -17,05 |
| λ_1 | $0,999 + 0,0224*i$ | $0,999 + 0,0086*i$ | $0,999 + 0,0031*i$ | 1,0069 | 1,0136 |
| λ_2 | $0,999 - 0,0224*i$ | $0,999 - 0,0086*i$ | $0,999 - 0,0031*i$ | 0,9930 | 0,9865 |
| a_{lin} | 3,963 | 3,975 | 3,977 | 3,979 | 3,986 |
| a_{eff} | 3,978 | 3,99 | 3,992 | 3,994 | 4,001 |

Bild 67 und Bild 68 sind Poincaré-Karten für $\kappa = -17,0$ und $\kappa = -17,1$

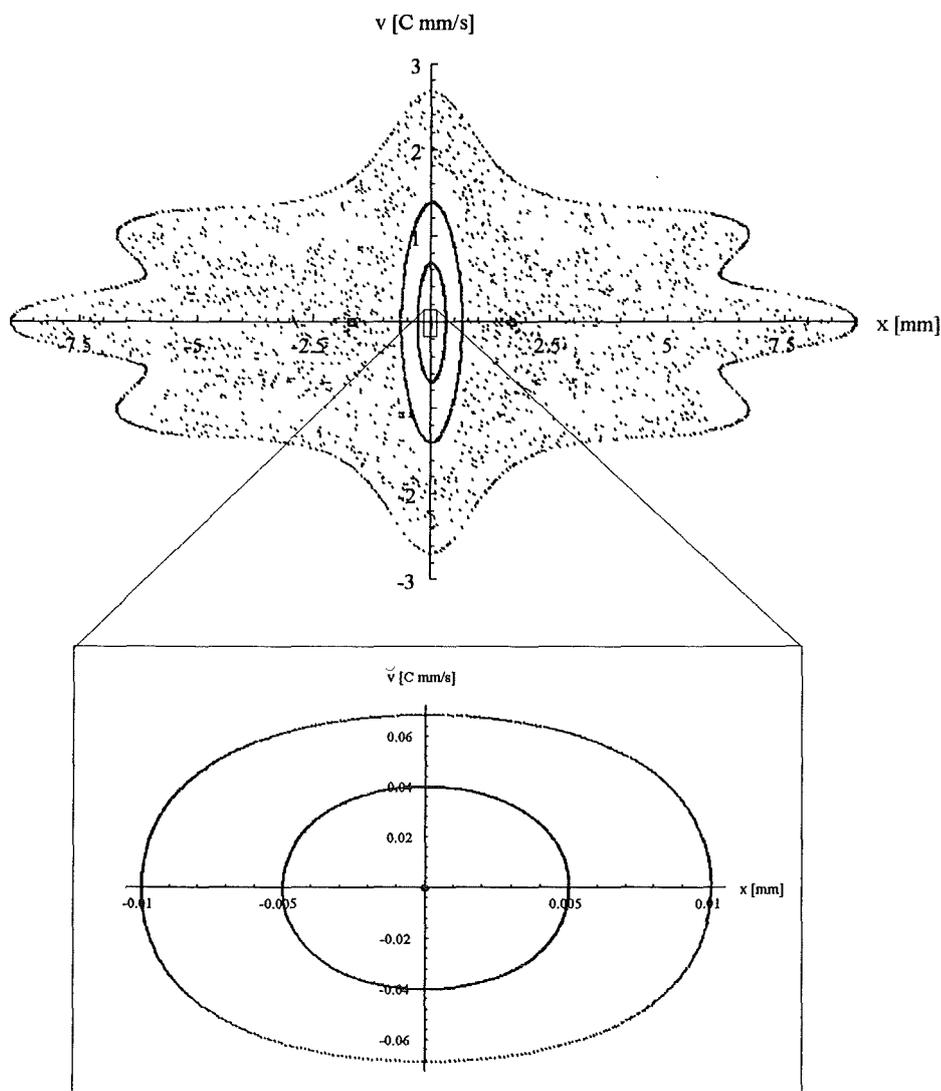


Bild 67 : $\kappa = -17,0$ (lokal stabil); Gesamtbild und Ausschnitt der Umgebung des Ursprungs für eine sehr starke Anziehung. Der Fixpunkt im Ursprung ist noch elliptisch.

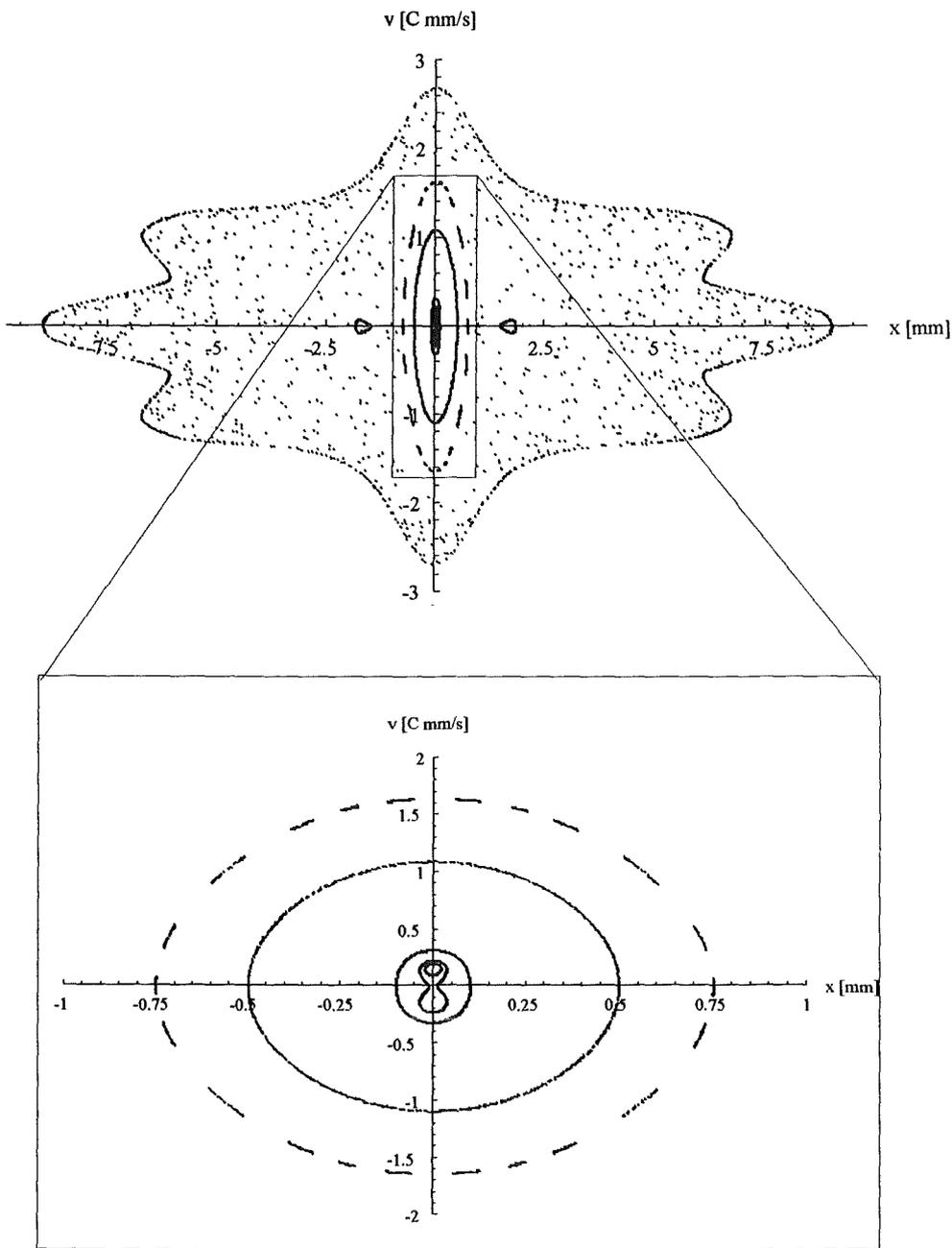


Bild 68: $\kappa = -17,1$ (lokal instabil); Gesamtbild und Ausschnitt: Das systematische Verhalten der Bahnkurven in der Umgebung des Ursprungs an einer Stabilitätsgrenze setzt sich fort. Es sind wieder zwei elliptische Fixpunkte der Periode π entstanden. Die Bahnkurven entfernen sich wie erwartet vom Ursprung. Bemerkenswert ist, daß die elliptischen Fixpunktlösungen hier die Geschwindigkeitsachse schneiden, während sie bisher stets die Ortsachse geschnitten haben.

Offenbar alterniert die Periodizität der zwei in den instabilen Bereichen entstehenden elliptischen Fixpunktlösungen zwischen π und 2π (Bild 69).

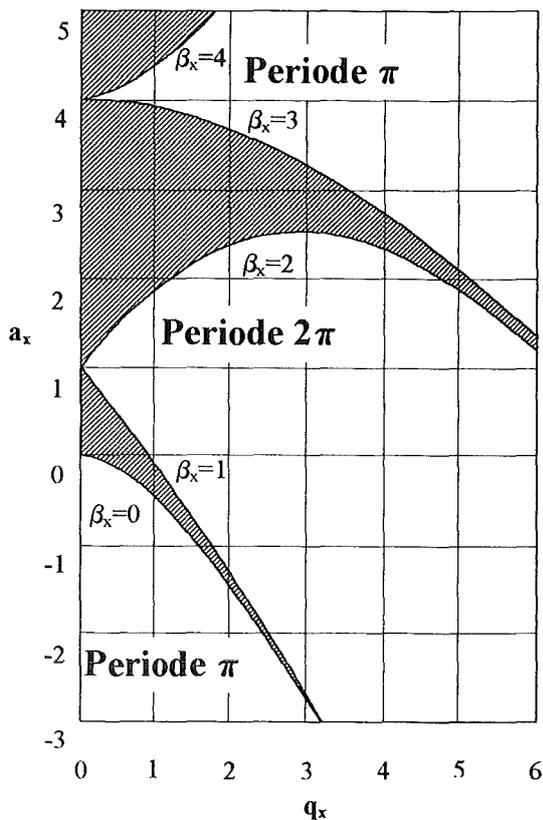


Bild 69: Periodizität der zwei elliptischen Fixpunktlösungen, wenn der Arbeitspunkt $\{a_{\text{eff}}, q\}$ im instabilen Bereich liegt.

Die Existenz von zwei π -periodischen Lösungen im instabilen Bereich unterhalb der Grenze $\beta_x=0$ mit Störung (Bild 53) entspricht der Tatsache, daß es ohne Störung auf der Grenze $\beta_x=0$ eine einzige π -periodische Lösung gibt (Kap.4.1, S.21).

Analog entspricht die Existenz einer 2π -periodischen Lösung im ungestörten Fall auf der Grenze $\beta_x=1$ der Existenz zweier zueinander gespiegelten Lösungen der Periode 2π für einen Arbeitspunkt $\{a_{\text{eff}}, q\}$ oberhalb der Grenze $\beta_x=1$ (Bild 64).

Die zwei Fälle sind analog zu bekannten Bifurkationen bei der Untersuchung von Abbildungen [Argy94]. Der Übergang an der Grenze $\beta_x=1$ ähnelt einer Flip-Bifurkation und der an der Grenze $\beta_x=0$ einer Sattelknotenverzweigung. Die Analogie ist jedoch begrenzt, weil die beiden genannten Bifurkationen mit einem isolierten Durchgang eines Eigenwertes λ_1 oder λ_2 der Jakobi-Matrix durch 1 ($\beta_x(x=0, \kappa)=0$) oder -1 ($\beta_x(x=0, \kappa)=1$) verbunden sind. Bei uns sind dagegen beide Eigenwerte entweder 1 oder -1 (Tab. 5, S. 59 und Tab. 3, S. 54).

4.3.6.1 Einfluß der Wahl des Arbeitspunktes auf das Ausmaß des Chaos

Es ist anzunehmen, daß die Entstehung der chaotischen Bahnkurven, die in Bild 62 ($\kappa=-2,9$) bereits vor dem Fixpunktwechsel an der Stabilitätsgrenze $\beta_x=1$ zu sehen sind, mit der Wahl des Arbeitspunktes ($a_{\text{Arbeits}} = 0,015$ $q_{\text{Arbeits}} = 0,29$) zusammenhängt. Deshalb wurde der Arbeitspunkt kurz vor die Grenze $\beta_x=1$ verlagert ($a_{\text{Arbeits}} = 0,69$; $q_{\text{Arbeits}} = 0,29$). Dadurch wird wie erwartet ein qualitativer Sprung der Struktur der Lösungen ausschließlich durch den Wechsel des Fixpunktcharakters im Ursprung bewirkt (Bild 70 und 71).

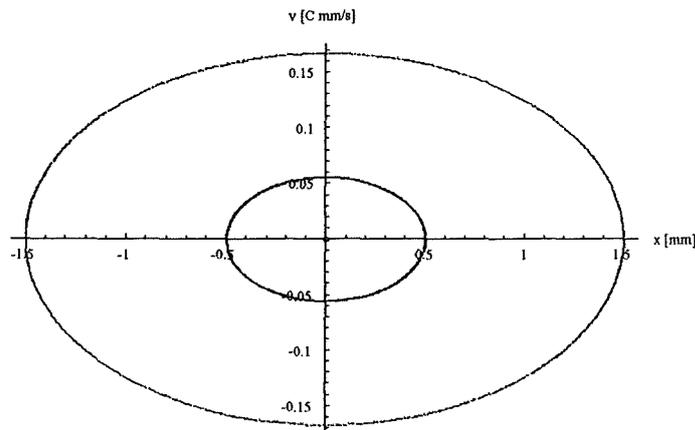


Bild 70: Schnitt durch ungestörte Lösungen ($\kappa = 0$). Der Arbeitspunkt befindet sich kurz vor der Stabilitätsgrenze $\beta_x=1$ ($a_{Arbeits} = 0,69$ und $q = 0,29$).

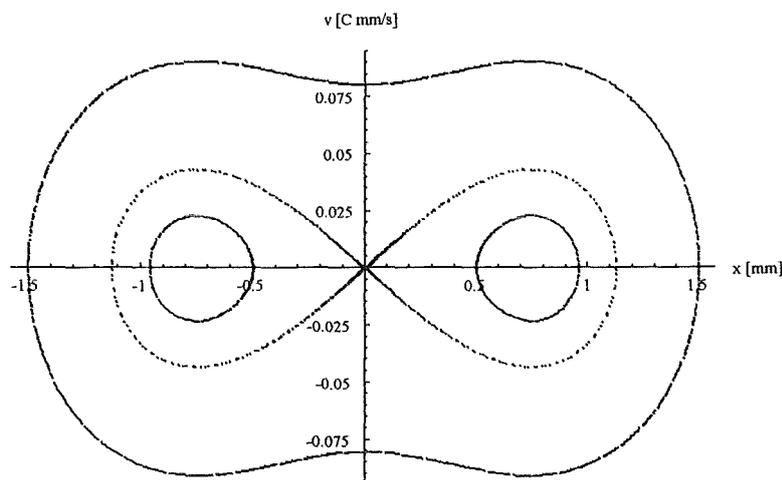


Bild 71: Schnitt durch leicht gestörte Bahnkurven ($\kappa = 1/15$) bei der Wahl des gleichen Arbeitspunkt ($a_{Arbeits} = 0,69$ und $q_{Arbeits} = 0,29$) Lösungen um den Ursprung herum ändern unter dem Einfluß der sehr kleinen Störung ihre Struktur. Die zwei elliptischen Fixpunktlösungen im Zentrum der Inseln auf der rechten und linken Seite des Bildes haben wie erwartet die Periodizität $\Delta\xi=2\pi$.

Eine sehr kleine anziehende Störung ($\kappa = 1/15$) bewirkt eine rasche Änderung im qualitativen Verhalten der Lösungen. Sie werden beim Übergang in diesen instabilen Bereich auf ähnliche Weise instabil, wie beim Übergang an der Grenze $\beta_x=0$. Ein Unterschied ist die Periodizität der entstehenden elliptischen Fixpunkte nach dem Übergang. An der Grenze $\beta_x=0$ sind sie π -periodisch und an der Grenze $\beta_x=1$ wie erwartet 2π -periodisch.

4.3.6.2 Einfluß einer kleinen anziehenden Störung auf die Lösungen

Es wurden weitere Untersuchungen angestellt, die feststellen sollten, bei welcher Stärke der anziehenden Störung und auf welche Weise die ersten chaotischen Bahnkurven zwischen $\kappa = 0$ und $\kappa = -2,9$ am Standardarbeitspunkt entstehen. Bild 72 ist eine Poincaré-Karte einer Bahnkurve unter dem Einfluß einer kleinen Störung anziehenden Störung ($\kappa = -0,6$). Die Anfangsbedingung dieser Bahnkurve ist $\{\chi_1 = x = 1,4\text{mm}$ und $\chi_2 = \dot{x} = 0\text{ mm/s}\}$.

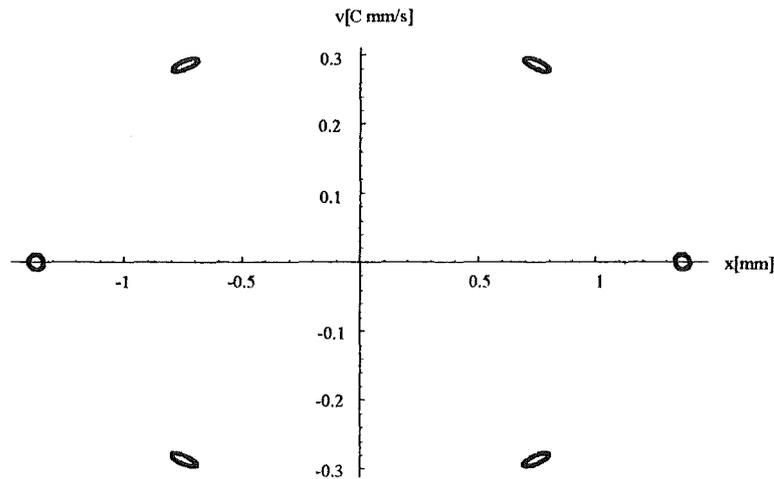


Bild 72: $\kappa = -0,6$; Die Fixpunktkette existiert bereits bei schwacher Störung.

Es gibt 6π periodische Lösungen, die die Poincaré-Fläche in allen Fixpunkten im Zentrum der Inseln schneiden. Die Fixpunkte liegen auf einer ellipsenförmigen Kurve. Die Lösungen scheinen die Reste eines zerfallenen Torus darzustellen, auf dem vor dem Zerfall 6π -periodische Lösungen verliefen.

Um diesen ursprünglichen Torus zu finden, wurde der Betrag der Störung sukzessive verkleinert mit dem Ziel, die Fixpunktkette bis zu ihrer Entstehung zu verfolgen. Es wird jedoch zunehmend schwieriger, die Inselkette zu finden, je kleiner die Störung ist.

Um ein „Herumstochern“ im Phasenraum zu vermeiden, wurde in das Programm „Zweidim“ ein Verfahren zur Fixpunktbestimmung nach der Methode von Newton-Kantorovitch [Kant82] eingerichtet, mit dem die Lage eines Fixpunktes auf der Poincaré-Fläche iterativ bestimmt werden kann, wenn die Periodizität des Fixpunktes bekannt ist und der Startwert in der Nähe dieses Fixpunktes liegt. Es ist möglich, mit diesem Verfahren sowohl elliptische als auch hyperbolische Fixpunkte sehr genau auf der Schnittfläche zu bestimmen.

In Tab. 8 sind die Startwerte und die nach jedem Schritt iterierten Werte $\chi_1 = x$ und $\chi_2 = \dot{x}$ aufgeführt. Die Werte verbessern sich bereits nach zwei Iterationen nicht mehr wesentlich. Die Periodizität der Fixpunkte und der Startwert wurden den Poincaré-Bildern entnommen.

Tab. 8 : Beispiele zur Fixpunktbestimmung nach der Methode von Newton-Kantorovitch.

| | | |
|--|--------------------------------|---------------------|
| κ | 0 (ohne Störung) | |
| Fixpunktcharakter | elliptisch | |
| Startwerte $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 1 | 0 |
| 1. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | $-9,324 * 10^{-15}$ | $-2,937 * 10^{-16}$ |
| 2. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | $8,782 * 10^{-29}$ | $3,755 * 10^{-30}$ |
| 3. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | $-8,867 * 10^{-43}$ | $-4,652 * 10^{-44}$ |
| κ | $\frac{1}{4}$ (kleine Störung) | |
| Fixpunktcharakter | elliptisch | |
| Periode mT | π | |
| Startwerte $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 0, 2 | 0 |
| 1. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 0, 1827 | $-1,035 * 10^{-6}$ |
| 2. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 0, 1803 | $-1,091 * 10^{-7}$ |
| 3. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 0, 1802 | $-1,590 * 10^{-9}$ |
| κ | 3 (starke Störung) | |
| Fixpunktcharakter | hyperbolisch | |
| Periode mT | 5π | |
| Startwerte $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 3,8 | 0 |
| 1. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 3,7004 | $-1,953 * 10^{-3}$ |
| 2. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 3,6870 | $-8,594 * 10^{-5}$ |
| 3. Iteration $\{x[\text{mm}],v[\text{C mm/s}]\}$ | 3,6870 | $5,006 * 10^{-7}$ |

Die Grenze der Genauigkeit wird in den Berechnungen mit Störung bei Fixpunkten im Ursprung wegen der schnellen Konvergenz der Methode bereits nach zwei Iterationen erreicht.

Mit „Zweidim“ wurde der Fixpunkt auf der positiven x-Achse in Bild 72 ($x = 1,4 \text{ mm}$, $\dot{x} = 0 \text{ mm/s}$) sehr genau bestimmt. Anschließend wurde der Betrag der Störung ausgehend von $\kappa = -0,6$ schrittweise reduziert. Nach jedem Schritt wurde der wandernde Fixpunkt erneut genau bestimmt. Nach jedem wurde Schritt a_{eff} am Ort des Fixpunktes bestimmt.

Anschließend wurde β_x^{eff} mit a_{eff} und q_{Arbeit} mit Hilfe der Näherungsformel 4.1.1 (S. 20) berechnet. $\beta_x^{\text{eff}}(x, \kappa)$ wurde dann über dem Ort des Fixpunktes aufgetragen. Der Verlauf ist in Bild 73 kurz vor dem Verschwinden der Fixpunktkette dargestellt.

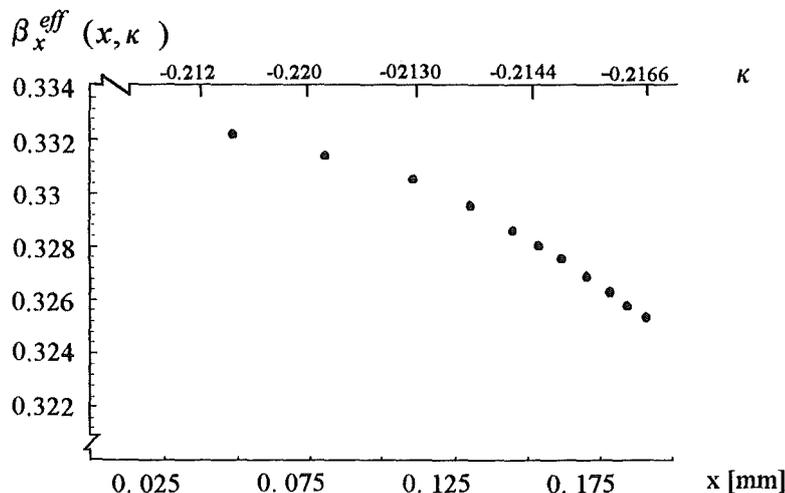


Bild 73: $\beta_x(x, \kappa)$ am Ort des Fixpunktes. Der Fixpunkt wandert zum Ursprung und nähert sich dem Wert $\beta_x(0, \kappa) = \beta_{\text{eff}} = 1/3$. Für $\beta_x = 1/3$ haben im ungestörten Fall alle Lösungen des Phasenraumes die Periodizität $\Delta\xi = 6\pi$ (Kap. 4.1, S. 22).

Es scheinen dann Fixpunktketten zu entstehen, wenn die anziehende Störung eine Stärke besitzt für die β_x^{eff} rational ist. Daraus kann gefolgert werden, daß bereits bei einer sehr kleinen anziehenden Störung Fixpunktketten existieren, falls β_x^{eff} rationale Werte annimmt. Sie sind in den Poincaré-Schnitten nur noch nicht zu sehen. Erst unter der Zunahme der Anziehung tauchen sie auf.

4.3.7 Chaotische Eigenschaften des Systems im Fall eines abstoßenden Störpotentials

Es liegt nun nahe, eine Inselkettenbildung auch bei kleinen abstoßenden Störungen zu vermuten. In den ersten Poincaré-Bildern die mit einer abstoßenden Kraft am Standardarbeitspunkt erstellt wurden (Bild 51 und 52), sind keine Inselketten zu sehen.

Möglicherweise gibt es Inselketten, die nur noch nicht aufgetaucht sind. Deshalb wurde der Arbeitspunkt ganz nahe an die Grenze $\beta_x=1$ verschoben ($a_{Arbeit} = 0,69$ und $q_{Arbeit} = 0,29$). Die Störung wurde so stark gemacht ($\kappa=3,1$), daß a_{eff} kurz vor der Stabilitätsgrenze $\beta_x=0$ liegt (Bild 74). Es sind überraschenderweise auch jetzt keine Inselketten zu sehen.

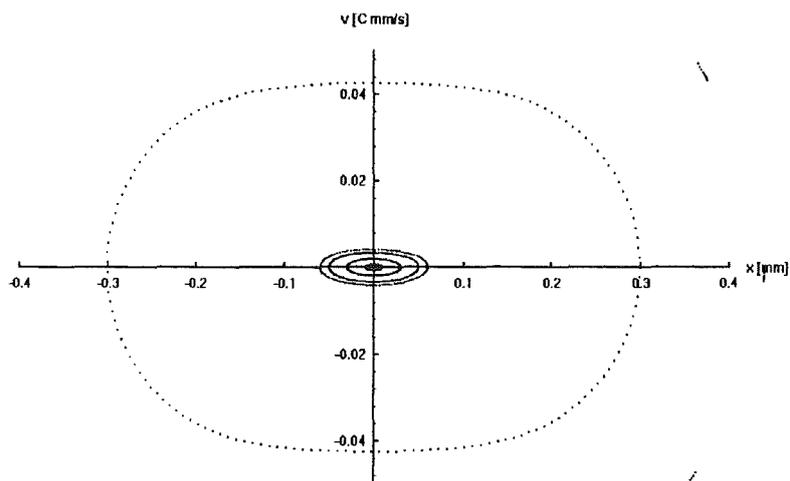


Bild 74: Poincaré-Schnitt für eine starke abstoßende Kraft ($\kappa=3,1$). Der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ liegt noch im stabilen Bereich kurz vor der Grenze $\beta_x=0$. Die abstoßende Störung führt jedoch nicht zur Inselkettenbildung.

Wichtig ist die Feststellung, daß sich hier trotz der starken Störung ($\kappa=3,1$; $a_{Arbeit}=0,69$ und $q_{Arbeit}=0,29$) die Trajektorien im Phasenraum hinsichtlich ihrer maximalen Geschwindigkeit ähnlich entwickeln, wie im Poincaré-Bild 52, das am Standardarbeitspunkt für $\kappa=1/5$ entstanden ist ($\{a_{eff}, q\}$ liegt auch dort dicht vor der Stabilitätsgrenze $\beta_x=0$).

Wird die Störung etwas stärker ($\kappa=3.5$), reagiert das System stark chaotisch (Bild 75).

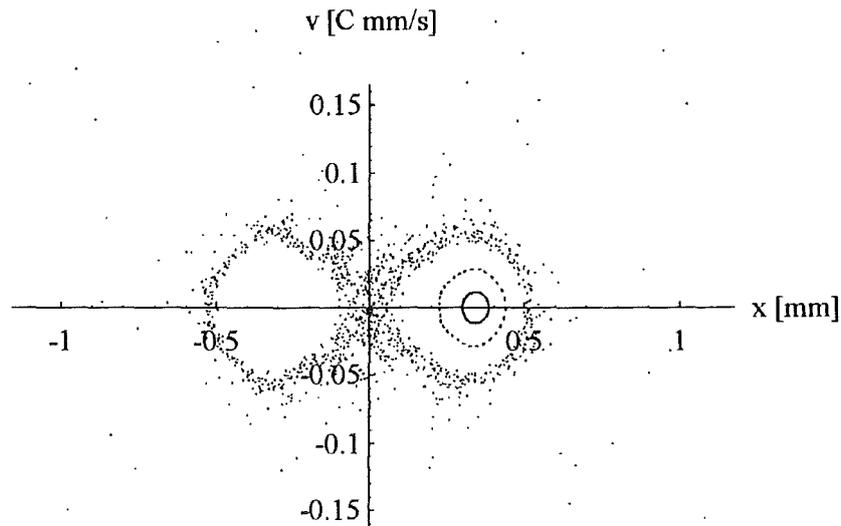


Bild 75: Poincaré-Schnitt für eine im Vergleich zu Bild 74 etwas stärkere abstoßende Kraft ($\kappa=3,5$). Der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ liegt im instabilen Bereich jenseits der Grenze $\beta x=0$. Das Chaos „bricht“ explosionsartig aus.

Offenbar gibt es auch durch eine starke Abstoßung keine Inselketten, solange der effektive Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ im stabilen Bereich liegt.

4.3.8 Gegenüberstellung der Eigenschaften der Lösungen im System anziehender und abstoßender Störung

Die Eigenschaften des Systems wurden mit der Wirkung der ersten Glieder der Taylor-Reihe des Störterms in Beziehung gesetzt. Weil $F^{Stör}$ eine ungerade Funktion ist, verschwinden die geraden Glieder der Taylor-Reihe. Es gilt näherungsweise:

$$F_{Stör} \approx F'_{Stör}(0) x + \frac{F'''_{Stör}(0)}{3!} x^3 + \frac{F^{(5)}_{Stör}(0)}{5!} x^5 + \dots$$

Für eine starke anziehende Kraft ($\kappa = -17,0$) hat das erste Glied $\kappa F'_{Stör}(0) x$ folgenden Verlauf:

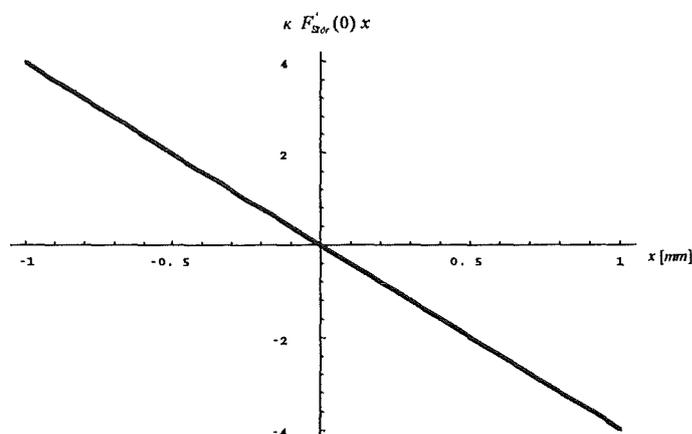


Bild 76: Das erste Glied der Taylor-Reihe von $F^{Stör}$ mit $F'_{Stör}(0) = -3.9707$ ($\kappa = -17,0$).

Das erste nichtlineare Glied trägt wie erwartet nichts zu einer Frequenzverschiebung von Lösungen im Ursprung bei (Bild 77)

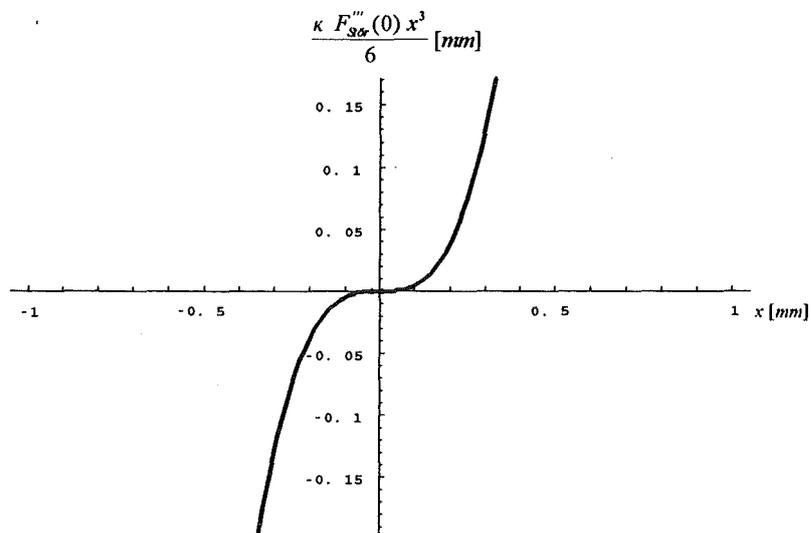


Bild 77: Der erste nichtlineare Term hat im Ursprung einen Wendepunkt. Die Steigung dort ist gleich Null $F_{Stör}'''(0) = -4.01 \cdot 10^{14}$ ($\kappa = -17$).

Auch der zweite höhere Term der ungeraden Störfunktion hat ebenfalls im Ursprung einen Wendepunkt (Bild 78).

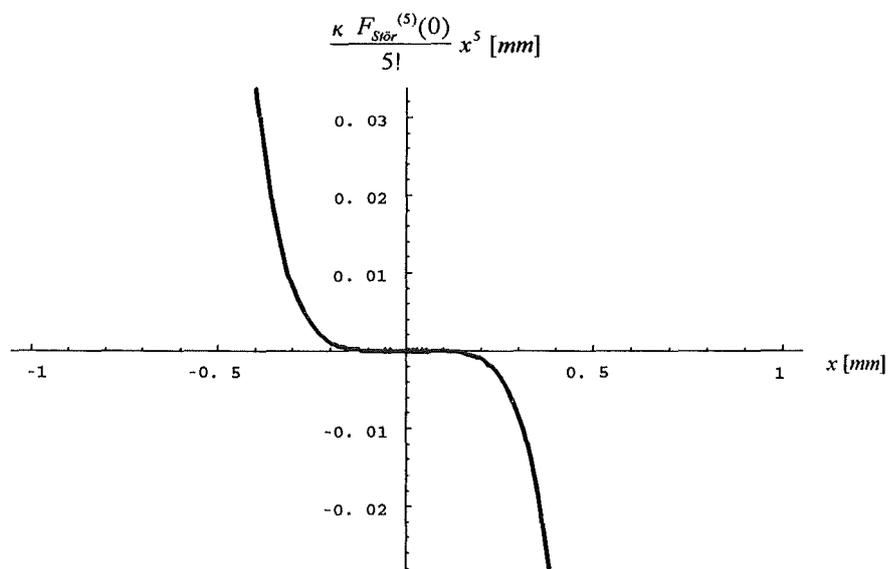


Bild 78: Auch das dritte Glied trägt nichts zur Frequenzverschiebung bei ($F_{Stör}^{(5)}(0) = 8.63 \cdot 10^{21}$, $\kappa = -17$).

Wie erwartet spielt in der Umgebung des Ursprungs nur der lineare Teil der Störung eine Rolle. Alle nichtlinearen Anteile verschwinden hier. Die Steigung der Störfunktion ist im Ursprung am größten. Dies gilt für abstoßende und anziehende Störungen, weil der Verlauf der Kurven an der x-Achse gespiegelt ist, wenn das Vorzeichen der Störung gewechselt wird.

Es gibt zwei Effekte, die gleichzeitig ablaufen, wenn die anziehende oder abstoßende Störung vergrößert wird:

1. In einer Umgebung des Ursprungs, in der die Störung durch den linearen Teil der Taylor-Reihe gut angenähert werden kann, verhalten sich die Bahnkurven wie ungestörte Lösungen. Der lineare Term bewirkt im Vergleich zum Fall ohne Störung nur eine Frequenzverschiebung der Trajektorien. Das Frequenzverhältnis von Mikro- zu Makrobewegung ist dann $2\beta_{eff}$ (Kap. 4.1, S. 22).
2. Durch die nichtlinearen Störanteile werden die Frequenzen aller Lösungen im Gegensatz zur ungestörten Mathieuschen Differentialgleichung amplitudenabhängig.

Im folgenden werden die in der Umgebung des Ursprungs gefundenen topologischen Lösungsstrukturen (kleine Amplituden) in vier verschiedene Klassen unterteilt:

- I Topologische Struktur mit einer anziehenden Störung, wenn der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ innerhalb eines Stabilitätsbereiches liegt (unrealistisch).

Es gibt bereits bei kleinsten Störungen Inselketten, die chaotisches Verhalten von Bahnkurven implizieren. Der lineare Anteil im Störterm führt zu einer Frequenzverschiebung aller Lösungen. Die nichtlinearen Anteile führen zum Zerfall von Integralflächen periodischer Lösungen mit rationalem β_{eff} und damit zum Chaos.

- II Topologische Struktur mit einer anziehenden Störung, wenn der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ außerhalb eines Stabilitätsbereiches liegt (wiederum unrealistisch).

Die lokale Instabilität der Lösungen in der Umgebung des Ursprungs wird durch den linearen Teil bewirkt. Der Einfluß der nichtlinearen Terme wurde nicht näher untersucht.

- III Topologische Struktur mit einer abstoßenden Störung, wenn der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ innerhalb eines Stabilitätsbereiches liegt (realistisch).

Es gibt keine chaotischen Bahnkurven. Die Frequenzen der Lösungen sind jedoch amplitudenabhängig. Die nichtlinearen Terme der Taylor-Reihe bewirken nicht chaotisches Verhalten von Bahnkurven. Eine Inselkettenbildung bleibt aus. Alle Trajektorien weisen einen regulären Verlauf auf. Die Integralflächen benachbarter Trajektorien sind stets benachbart. Am Standardarbeitspunkt trifft dieser Fall für kleine Raumladungen zu.

- IV Topologische Struktur mit einer abstoßenden Störung, wenn der Arbeitspunkt $\{a_{eff}, q\}$ außerhalb eines Stabilitätsbereiches liegt (ebenfalls realistisch).

Die lokale Instabilität führt gegenüber dem dritten Fall zu einem qualitativen Sprung in der Topologie der Lösungen. Benachbarte Lösungen können sich weit voneinander entfernen. Trajektorien sind jedoch nicht mehr an Integralflächen gebunden. Der Anteil chaotischer Bahnkurven wird mit der Zunahme der Störung größer. Die nichtlinearen

Anteile im Störterm können zur Inselkettenbildung führen. Die Störung wirkt sich am stärksten auf Lösungen mit mittlerer Amplitude aus.

Die Nichtlinearität ist offenbar eine notwendige, jedoch wegen des dritten Falles noch keine hinreichende Bedingung für die Existenz von Chaos.

Für große Amplituden ist die Wirkung der Störung stets verschwindend klein, so daß die Bahnkurven wie im ungestörten Fall regulär sind. Ihre Integralflächen umschließen in den Fällen I, II und IV die instabilen und chaotischen Bereiche des Phasenraums. Alle Bahnkurven bleiben begrenzt. Deshalb gibt es durch die gegenseitige *Abstoßung* der Ionen *keine permanente Aufheizung* (siehe auch Kap. 4.2 und Fragen S. 33).

4.4 Chaotische Eigenschaften des gekoppelten Systems in drei Raumrichtungen

Die bisherigen Untersuchungen beschränkten sich auf ein von den anderen Raumrichtungen entkoppeltes gestörtes System. Im folgenden wird die Kopplung wiederhergestellt und das in allen drei Richtungen gekoppelte gestörte System (Kap. 4.3.1, S.26) in seinem Stabilitätsverhalten unter der Zunahme der Störung untersucht. Von physikalischem Interesse ist hierbei die Frage, ob durch eine bestimmte Stärke der abstoßenden Kraft ein Verlust der Strukturstabilität des System eintritt. Aus diesem Grund wurde die numerische Berechnung der Poincaré-Abbildung auf das sechsdimensionale gestörte System erweitert. Es wird das Ziel verfolgt, mit Hilfe der Eigenwerte der in sechs Dimensionen berechneten Jakobi-Matrix, eine Stärke der Störung zu finden, mit der ein Sprung in der Topologie der Lösungen in den physikalisch relevanten drei Raumrichtungen einsetzt.

4.4.1 Poincaré-Abbildung in sechs Dimensionen

Die Eigenwerte der Poincaré-Abbildung in sechs Dimensionen können ebenfalls nur komplex-konjugiert oder reell sein, da das System hamiltonsch, und die Poincaré-Abbildung auch hier flächentreu ist. Die sechs Eigenwerte können stets zu Paaren geordnet werden, deren Produkt 1 ist [Argy94].

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4 = \lambda_5 \lambda_6 = 1$$

Die mit der Existenz eines reellen Eigenwertes verbundene Instabilität des Fixpunktes kann auch für eine sechsdimensionale Poincaré-Abbildung in einem Hamiltonschen System gefolgert werden. Da der Ursprung stets Fixpunktlösung ist, kann die Poincaré-Abbildung eines Schnittpunktes berechnet werden, der sich in seiner Umgebung befindet (Kap. 4.3.2.2). Dazu müssen die Elemente der 6×6 -Jakobi-Matrix nach dem gleichen Verfahren berechnet werden, wie es in in zwei Dimensionen durchgeführt wurde. Das Verfahren wird an der Berechnung der ersten Spalte vorgeführt:

Um die erste Komponente zur Zeit $\Delta\xi = \pi$ numerisch zu berechnen, wird das System der 6 gewöhnlichen gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung: ($\chi_1 = x_1, \chi_2 = \dot{x}_1; \chi_3 = x_2, \chi_4 = \dot{x}_2; \chi_5 = x_3, \chi_6 = \dot{x}_3$)

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_1}{d\xi} &= \chi_2, & \frac{d\chi_2}{d\xi} &= - (a_1 + 2q_1 \cos(2\xi)) \chi_1 - F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5), \\ \frac{d\chi_3}{d\xi} &= \chi_4, & \frac{d\chi_4}{d\xi} &= - (a_2 + 2q_2 \cos(2\xi)) \chi_3 - F_2^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5), \\ \frac{d\chi_5}{d\xi} &= \chi_6, & \frac{d\chi_6}{d\xi} &= - (a_3 + 2q_3 \cos(2\xi)) \chi_5 - F_3^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5) \end{aligned}$$

nach χ_1^0 abgeleitet und die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} &= \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} \\ \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} &= - (a_1 + 2q_1 \cos(2\xi)) \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} - \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0}, \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_1^0} &= \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} + \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_3} \frac{\partial \chi_3}{\partial \chi_1^0} \\ &+ \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_5} \frac{\partial \chi_5}{\partial \chi_1^0} \quad \text{ist, mit} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_3} \frac{\partial \chi_3}{\partial \chi_1^0} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_5} \frac{\partial \chi_5}{\partial \chi_1^0} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \chi_1 \rightarrow 0.$$

Die ersten zwei Elemente χ_1, χ_2 sind nur untereinander gekoppelt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_3}{\partial \chi_1^0} &= \frac{\partial \chi_4}{\partial \chi_1^0} \\ \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_4}{\partial \chi_1^0} &= - (a_1 + 2q_1 \cos(2\xi)) \frac{\partial \chi_3}{\partial \chi_1^0} - \frac{\partial F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_3} \frac{\partial \chi_3}{\partial \chi_1^0} \end{aligned}$$

Aus dem gleichen Grund wie bei den ersten beiden Elementen sind χ_3, χ_4 nur untereinander gekoppelt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_5}{\partial \chi_1^0} &= \frac{\partial \chi_6}{\partial \chi_1^0} \\ \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \chi_6}{\partial \chi_1^0} &= - (a_3 + 2q_3 \cos(2\xi)) \frac{\partial \chi_5}{\partial \chi_1^0} - \frac{\partial F_3^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)}{\partial \chi_5} \frac{\partial \chi_5}{\partial \chi_1^0} \end{aligned}$$

χ_5, χ_6 sind hier nur untereinander gekoppelt.

Es ergeben sich 3 Systeme von zwei miteinander gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Anfangsbedingungen zur Zeit $\xi = 0$ gilt für die erste Spalte:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \chi_1^0} = 1 \text{ und } \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi_1^0} = \frac{\partial \chi_3}{\partial \chi_1^0} = \frac{\partial \chi_4}{\partial \chi_1^0} = \frac{\partial \chi_5}{\partial \chi_1^0} = \frac{\partial \chi_6}{\partial \chi_1^0} = 0$$

Werden die drei Systeme mit diesen Anfangsbedingungen von $\xi=0$ bis $\xi = \pi$ integriert, ergibt sich die erste Spalte von D zur Zeit $\xi = \pi$. Auch diesmal muß die von allen drei Raumrichtungen abhängige Ortskurve $F_1^{Stör}(\chi_1, \chi_3, \chi_5)$ parallel erfolgen und zeitrichtig in die Differentialgleichungen eingesetzt werden. Die anderen fünf Spalten werden auf die gleiche Weise berechnet, wobei jeweils nach $\chi_2^0, \chi_3^0, \chi_4^0, \chi_5^0, \chi_6^0$ abgeleitet wird. Das Programm ist im Anhang C abgedruckt und heißt „Sechsdim“. Mit den Eigenwerten wurden auch die Eigenvektoren bestimmt, um die Richtung auszumachen, in der das System zuerst instabil wird. Es wurde der Standardarbeitspunkt gewählt und die Stärke der abstoßenden Störung in gewohnter Weise sukzessive vergrößert. In Tab. 9 sind die 6 Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Jakobi-Matrix in Abhängigkeit von K aufgeführt.

Tab. 9: Eigenwerte und Eigenvektoren der 6×6 - Jakobimatrix. Zwischen $a_{eff} = 0,0414$ und $a_{eff} = 0,0416$ werden die Eigenvektoren in x- und y-Richtung reell. Die Bahnkurven nahe am Ursprung bleiben in diesen Raumrichtungen nicht mehr für alle Zeiten in seiner Umgebung. Hingegen ist der Verlauf der Trajektorie in z-Richtung noch auf die Umgebung des Ursprungs beschränkt.

| {a _{eff} , q} | stabil | stabil | stabil | instabil | instabil |
|------------------------|--|--|--|---|---|
| K | $\frac{1}{4,18} \cong$ $a_{eff} = 0,0408$ | $\frac{1}{4,16} \cong$ $a_{eff} = 0,0411$ | $\frac{1}{4,14} \cong$ $a_{eff} = 0,0414$ | $\frac{1}{4,125} \cong$ $a_{eff} = 0,0416$ | $\frac{1}{4,10} \cong$ $a_{eff} = 0,042$ |
| λ_1 | 0,9962+0,0864*i | 0,9976+0,0686*i | 0,9990+0,0439*i | 1,0302 | 1,0630 |
| λ_2 | 0,9962- 0,0864*i | 0,9976- 0,0686*i | 0,9990- 0,0439*i | 1,0302 | 1,0630 |
| λ_3 | 0,9962- 0,0864*i | 0,9976- 0,0686*i | 0,9990- 0,0439*i | 0,5879+0,8088*i | 0,5893+0,8078*i |
| λ_4 | 0,9962+0,0864*i | 0,9976+0,0686*i | 0,9990+0,0439*i | 0,5879- 0,8088*i | 0,5893- 0,8078*i |
| λ_5 | 0,5837+0,8118*i | 0,5851+0,8109*i | 0,5865+0,8099*i | 0,9706 | 0,9406 |
| λ_6 | 0,5837- 0,8118*i | 0,5851- 0,8109*i | 0,5865- 0,8099*i | 0,9706 | 0,9406 |
| Eigenvektor 1 | {0; 0; 0,99970; 0,0203*i; 0; 0} | {0; 0; 0,9998; 0,0161*i; 0; 0} | {0; 0; 0,99994; 0,0103*i; 0; 0} | {0; 0; 0,9999; 0,0070; 0; 0} | {0; 0; 0,9998; 0,0143; 0; 0} |
| Eigenvektor 2 | {0; 0; 0,9997; -0,02031*i; 0; 0} | {0; 0; 0,9998; -0,0161*i; 0; 0} | {0; 0; 0,9999; -0,0103*i; 0; 0} | {0,9999; 0,0070; 0; 0; 0} | {0,9998; 0,0143; 0; 0; 0} |
| Eigenvektor 3 | {0; 0; 0; -0,0106*i; 0,9999; 0} | {0; 0; 0; -0,0084*i; 0,9999; 0} | {0; 0; 0; -0,0054*i; 0,9999 ; 0} | 0; 0; 0; 0; 0,8862; 0,4631*i} | {0;0;0;0; 0,8866; 0,4624*i} |
| Eigenvektor 4 | {0; 0; 0; 0,0106*i; 0,9999; 0} | {0; 0; 0; 0,0084*i; 0,9999; 0} | {0; 0; 0; 0,0054*i; 0,9999; 0} | {0; 0; 0; 0; 0,8862; - 0,4631*i} | {0; 0; 0; 0; 0,8866; - 0,4624*i} |
| Eigenvektor 5 | {0; 0; 0; 0,0106*i; 0; 0,9999} | {0; 0; 0; 0,0084*i; 0; 0,9999} | {0; 0; 0; 0,0054*i; 0; 0,9999} | {0; 0; -0,9999; 0,0070; 0; 0} | {0; 0; -0,9998; 0,0143; 0; 0} |
| Eigenvektor 6 | {0; 0; 0; - 0,01067*i; 0 ; 0,99994} | {0; 0; 0; -0,0084*i; 0 ; 0,9999} | {0; 0; 0; -0,0054*i; 0 ; 0,9999} | {-0,9999; 0,0070; 0; 0; 0; 0} | {-0,9998; 0,0143; 0; 0; 0; 0} |

Zwischen $\kappa = 1/4,14$ und $\kappa = 1/4,125$ wird die Stabilitätsgrenze gleichzeitig für die x- und y-Komponente überschritten, während in z-Richtung noch reguläres Verhalten vorherrscht.

Die verschiedenen Raumrichtungen sind in ihrem Stabilitätsverhalten in der Umgebung des Ursprungs voneinander entkoppelt. Deshalb kann man jede Raumrichtung hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens des Systems getrennt behandeln. Der Übergang zur Instabilität findet in x- und y-Richtung zugleich statt, weil die Lage des Arbeitspunktes für beide Richtungen gleich weit von der Stabilitätsgrenze $\beta_{x,y}=0$ entfernt ist.

Zur Instabilität in z-Richtung muß die Störung größer als $\kappa=1/1,78$ sein, weil der Arbeitspunkt $\{a^z_{\text{Arbeit}}, q^z\}$ hier von der Stabilitätsgrenze $\beta_z=0$ weiter weg liegt als der Arbeitspunkt in x- und y-Richtung von der Grenze $\beta_{x,y}=0$ (Bild 79 und 80).

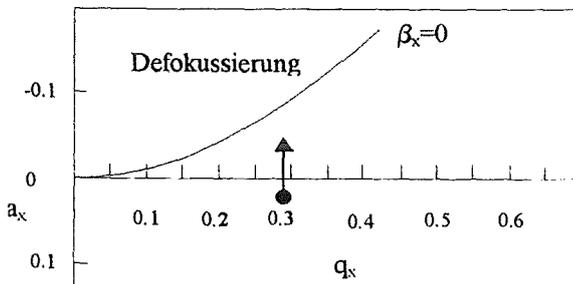


Bild 79: In x-y-Richtung wandert der Arbeitspunkt in Richtung der Grenze $\beta_x=0$. Dies entspricht einer defokussierenden Wirkung der Raumladung.

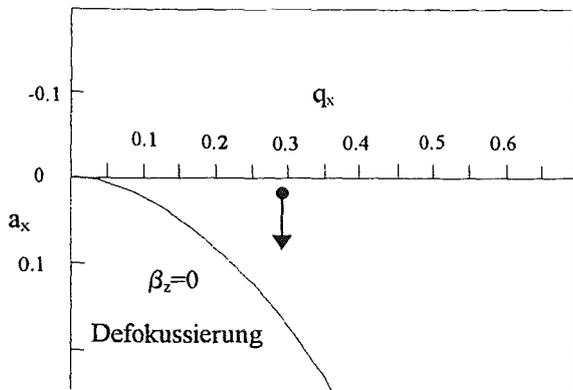


Bild 80: In z-Richtung wandert der Arbeitspunkt in Richtung der Grenze $\beta_z=0$. Auch in dieser Raumrichtung wirkt die Raumladung defokussierend.

Die defokussierende Wirkung einer Raumladung in den drei Raumrichtungen wurde in [Fisch59] als eine Verschiebung der Stabilitätsgrenzen interpretiert (Bild 81)

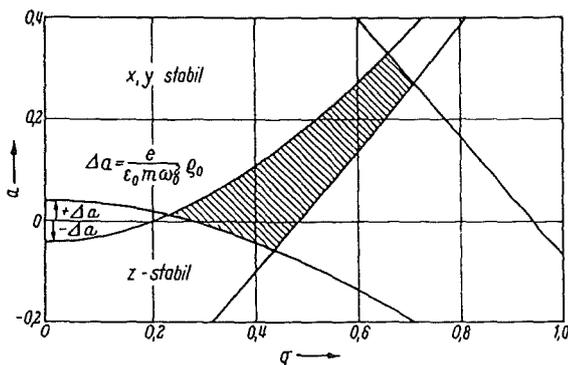


Bild 81: Verschiebung der Stabilitätsgrenzen durch eine Raumladung [Fisch59].

Im Raum ist κ ein Maß für die Dichte der gaußverteilten Ionen. Wenn man voraussetzt, daß $\sigma = 0,5 \text{ mm}$ ist, kann die Zahl der Ionen für $\kappa = 1/4,12$ nach dem Übergang in der x- und y-Richtung berechnet werden ($N_{\kappa}^Q = \kappa \cdot 5 \cdot 10^5$). Dies entspricht $N_{1/4,12}^Q \geq 1,21 \cdot 10^5$ Ionen. In z-Richtung werden Bahnkurven in der Umgebung des Ursprungs für Störungen instabil, die größer als $\kappa = 1/1,78$ sind. Dies entspricht $N_{1/1,78}^Q \geq 2,81 \cdot 10^5$ Ionen.

4.5 Anpassung der Ionendichte an die äußere Feldverteilung

Die bisherigen Annahme einer statischen Ionenwolke, die starr im Zentrum der Ionenfalle ist, stellt eine Vereinfachung der physikalischen Realität dar. Die Ionenwolke ist tatsächlich nicht statisch, sie paßt sich in ihrer Ausdehnung der äußeren Feldverteilung an.

Die Dichte der Ionen im Ensemble hängt von der Gesamtionenzahl und der Verteilung σ ab. Bei fester Ionenzahl Q ist σ eine Funktion der drei Raumrichtungen und der Zeit, weil das äußere Wechselfeld zeitlich variiert. Die Zahl der Ionen (N^{Ionen}), die zu chaotischem Verhalten des Systems führt, hängt von $\sigma(x,y,z,t)$ ab.

4.5.1 Abhängigkeit der „kritischen“ Ionenzahl von der statischen Dichteverteilung

Zunächst bleibt σ zeitlich konstant. Das Modell der starren Ionenwolke wird noch beibehalten. Die Zahl der Ionen $N_{\text{krit}}^{\text{Ionen}}$ in einem statischen Ensemble, die zur Instabilität in x- und y-Richtung

nötig ist, hängt für eine kugelsymmetrische Verteilung der Ionen von $\rho = \rho_0 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ ($\rho_0 = eQ / \sqrt{(2\pi)^3 \sigma^3}$) ab. Man kann nun die Ortsverteilung der Ionen in x-y-Richtung und z-Richtung voneinander verschieden wählen. Dann hat die Ionenwolke die Form eines Ellipsoids. Die Dichte, die zum Überschreiten der Stabilitätsgrenze ausreicht, wird „kritische“ Ionendichte genannt. Bei einer bestimmten Verteilung σ gibt es dann eine „kritische“ Ionenzahl, ab der Trajektorien in der Umgebung des Ursprungs instabil sind. Weil alle Raumrichtungen in ihrem Stabilitätsverhalten voneinander entkoppelt sind, hängt die kritische Ionenzahl in x-y-Richtung bei einer festen Gesamtionenzahl Q dann nur von der Ortsverteilung $\sigma_{x,y}$, die kritische Ionenzahl in z-Richtung dagegen von σ_z ab. Diese Abhängigkeit in Richtung x und y ist in Bild 82 dargestellt.

Die Zahl der Ionen $N_{\text{krit}}^{\text{Ionen}}$ ist proportional zu σ^3 . Auf der Grenzkurve gilt: $Q/\sigma^3 = \text{konstant}$. Das bedeutet $\rho_0 = \text{konstant}$. Das Maß der Verschiebung des Arbeitspunktes im Stabilitätsdiagramm durch die Raumladung wird durch ρ_0 (ρ_0 ist die Dichte des Ensembles im Ursprung $\rho(x=0)$) festgelegt. Die fett gedruckten Quadrate in Bild 82 sind das Ergebnis einer Monte-Carlo-Simulation [Schre94], die die Verteilung der Ionen in der Paulschen Falle in Abhängigkeit von der Temperatur, vom Druck des Puffergases und der Ionenzahl berechnet. Demnach scheint es so zu sein, daß sich bei gegebener Ionenzahl die Ladungsverteilung σ so einstellt, daß das System eine Dichte besitzt, die knapp unterhalb der kritischen Ionendichte liegt.

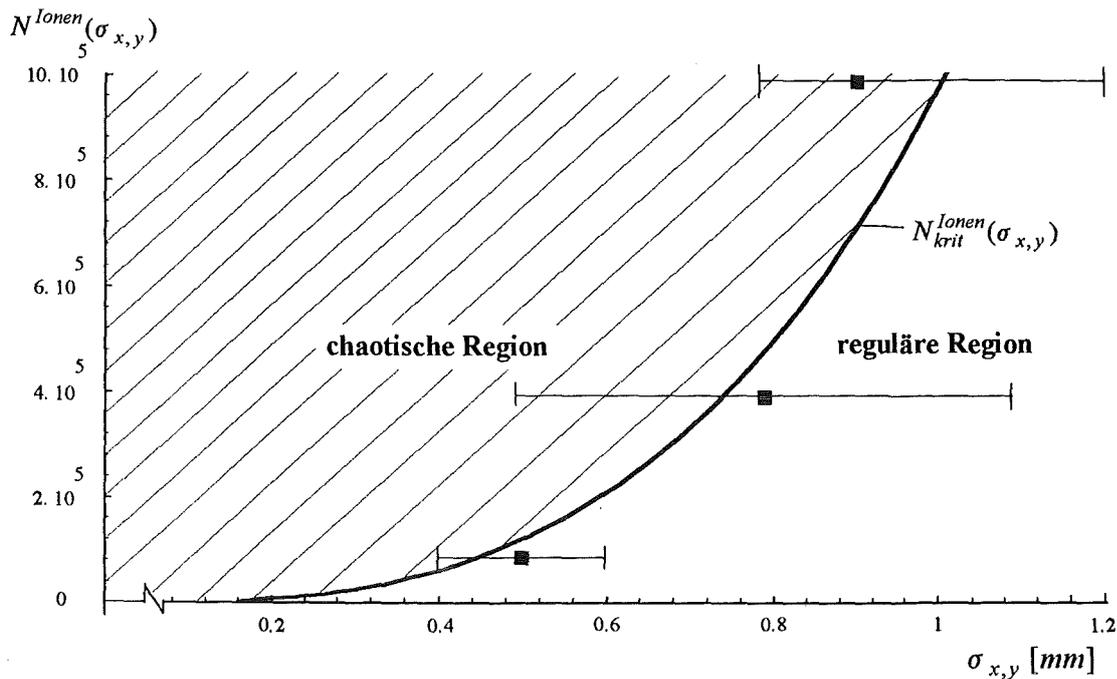


Bild 82: Die kritische Ionenzahl N_{krit}^{Ionen} in Abhängigkeit von $\sigma_{x,y}$. Sie ist proportional zu $\sigma_{x,y}^3$. Die ausgefüllten Quadrate wurden mit Hilfe einer Monte-Carlo-Rechnung unter Berücksichtigung der Raumladung und gaskinetischen Stößen mit den Puffergasmolekülen gewonnen [Schre94].

Der Zustand des System steht quasi stets auf der „Kippe“ der Strukturstabilität (Kap. 4.3.5, S. 55). Eine kleine Veränderung zusätzlicher Systemparameter, wie z.B. dem Druck des Puffergases, könnte zu einem topologischen Sprung der Lösungen und damit zu einer plötzlichen Veränderung der Orts- und Geschwindigkeitsverteilung der Ionen in der Falle führen. Möglicherweise ist dies die Ursache, warum das System in [Schre94] anscheinend keinen selbstkonsistenten Zustand annimmt.

Diese Eigenschaft des Systems würde auch die oft einander widersprechenden Messungen unter vermeintlich gleichen Betriebsbedingungen erklären.

Möglicherweise ist das Bestreben des Systems, einen Zustand an der Grenze der Stabilität anzunehmen auch der Grund für das endliche Fassungsvermögen der Ionenfalle. Hat das Ensemble eine Dichte, die oberhalb der „kritischen“ Dichte liegt, ist die Ionenwolke durch instabile Bahnen stark aufgebläht. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ion an eine Fallenbegrenzung zu stoßen ist groß und es kommt zu einem raschen Verlust von Ionen. Dieser Prozeß wird experimentell sehr deutlich kurz nach dem Glühvorgang beobachtet. Zunächst ist die Signalzählrate groß mit sehr breiten Absorbtionsspektren, dann wird die Signalzählrate kleiner mit schmalere Absorbtionsspektren. Sobald die Dichte der Ionen im Ensemble unter der kritischen Grenze liegt, hat sich das Ensemble offenbar stabilisiert. Die Zahl der Ionen und ihre mittlere Geschwindigkeit ist dann konstant. Die Wahrscheinlichkeit für den Verlust von Ionen ist kleiner.

In Bild 83 ist die Grenze der kritischen Ionendichte in z-Richtung im Vergleich zur Grenze in x-y-Richtung aufgetragen. Die fett gedruckten Schnittpunkte sind die Ergebnisse der Simulation in [Schre94] für die z-Richtung.

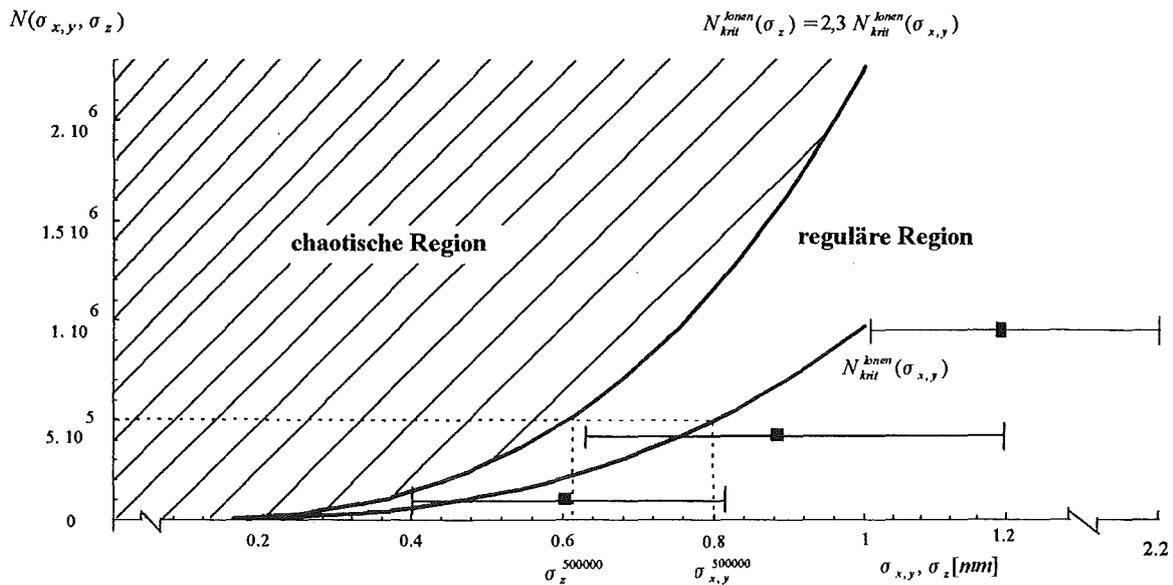


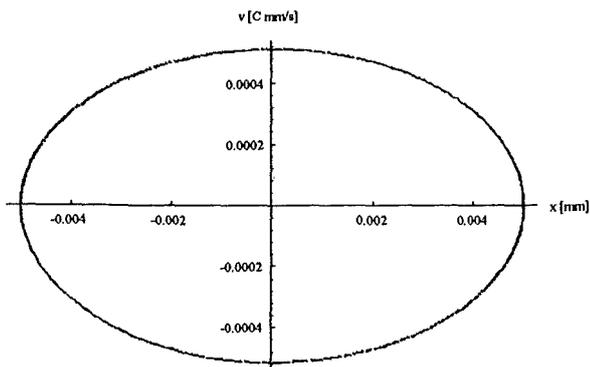
Bild 83: Kritische Ionenanzahlgrenze für die x-y-Richtung und für die z-Richtung. Auf den beiden Grenzen sind bei einer festen Gesamtionenanzahl die Ortsverteilungen $\sigma_{x,y}$ und σ_z voneinander verschiedenen (gestrichelte Linien). Die fett gedruckten Punkte sind die aus der Ionenanzahl simulierten Ortsverteilungen σ_z [Schre94].

Den Simulationsdaten zufolge scheint sich die Ionenwolke in Richtung z eher so einzurichten, daß sie eine Dichte besitzt, die zu einem regulären Verhalten der Trajektorien in Richtung z führt.

4.5.2 Zeitabhängige Ionendichte

Es ist bekannt, daß die Ionenwolke im Takt der von außen angelegten Wechselspannung pulsiert [Rink92]. Mit „Pulsieren“ ist gemeint, daß sowohl die Dichte, als auch die Ionenanzahl in einer Raumrichtung von der Phase der äußeren Wechselspannung abhängt. Die Ionen streben in der einen Halbphase aus der Ringebene zu den Kalotten, in der anderen Halbphase bewegen sie sich ausgehend von den Kalotten zur Ringelektrode. Deshalb wurde in einem weiteren Computereperiment sowohl die Ionenanzahl, als auch die Dichteverteilung der Ionen in x-Richtung an die Phase der äußeren Wechselspannung gekoppelt. Die resultierenden Differentialgleichungen haben nun zeitabhängige Dichten und Ionenzahlen im Störterm. Es wurden Lösungen verschiedener Kombinationen der Dichteverteilung und der Ionenanzahl gewählt. Anschließend wurden Poincaré-Schnitte erstellt (Bild 84).

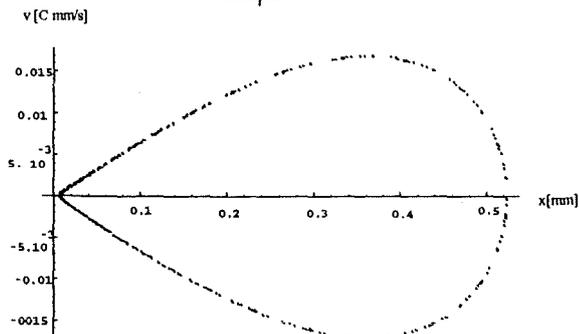
Die Bilder zeigen auf, daß eine pulsierende abstoßende Störung wie bei einer starren Ionenwolke lokal zu chaotischen Bahnkurven führen kann, wenn die Dichte des Ensembles einen kritischen Wert übertrifft. Die in den Beispielen gewählten zeitabhängigen Dichten, liegen in der Nähe der kritischen Grenze. Das System scheint deshalb auch unter Berücksichtigung einer zeitabhängigen Dichteverteilung in x-Richtung in einem „metastabilen“ Zustand zu sein.



$$N^{Ionen} = \kappa (300000 + 200000 \cos(2\xi))$$

$$\sigma = 0,5 \text{ mm}$$

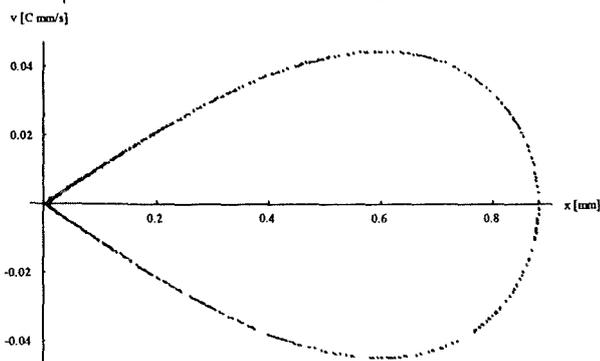
$$\kappa = 1/4$$



$$N^{Ionen} = \kappa (400000 + 100000 \cos(2\xi))$$

$$\sigma = 0,5 \text{ mm}$$

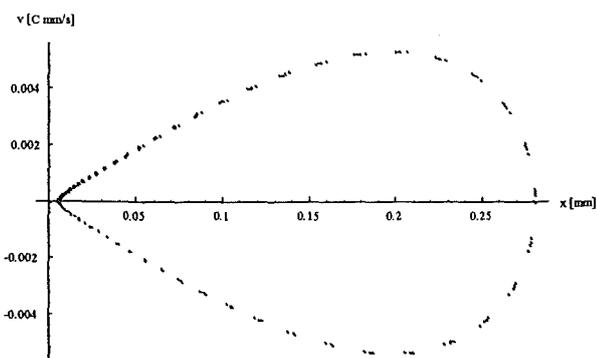
$$\kappa = 1/3$$



$$N^{Ionen} = \kappa (500000 + 100000 \cos(2\xi))$$

$$\sigma = 0,5 + 0,1 \cos(2\xi) \text{ mm}$$

$$\kappa = 1/3$$



$$N^{Ionen} = 500000 + 100000 \cos(2\xi)$$

$$\sigma = 0,5 + 0,2 \cos(2\xi) \text{ mm}$$

$$\kappa = 1/5$$

Bild 84: *Verschiedene Kombinationen von zeitabhängiger Ortsverteilung und zeitabhängiger Ionenzahl in x-Richtung. Die zeitabhängigen Dichten sind so gewählt worden, daß sie in der Nähe der kritischen Grenze liegen.*

5 Messungen zur Dynamik des Ionenensembles

Alle spektroskopischen Untersuchungen zur Ionenbewegung in der Paulschen Falle wurden an $^{178}\text{Hf}^+$ vorgenommen. Ein möglicher Übergang des Hafniums vom Grundzustand in einen angeregten Zustand zeigt Bild 85.

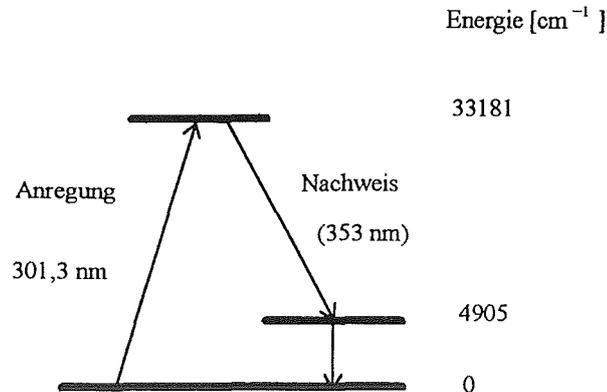


Bild 85: Vereinfachtes Termschema von ^{178}Hf .

Um vom Grundzustand ($5d6s^2(a,^2D_{3/2})$) in den energetisch höheren Zustand ($5d6s6p(z,^2D_{5/2})$) zu gelangen wird Licht der Wellenlänge $\lambda=301,3\text{ nm}$ eingestrahlt. Im Resonanzfall geben die Ionen durch spontane Emission Fluoreszenzlicht ab. Der optische Nachweis der emittierten Photonen erfolgt mit einem Photomultiplier und einem Interferenzfilter, dessen Transmissionsmaximum bei $\lambda=353\text{ nm}$ liegt. Mit ihm werden Lichtanteile unterdrückt, die nicht von der Fluoreszenz herrühren (Bild 86).

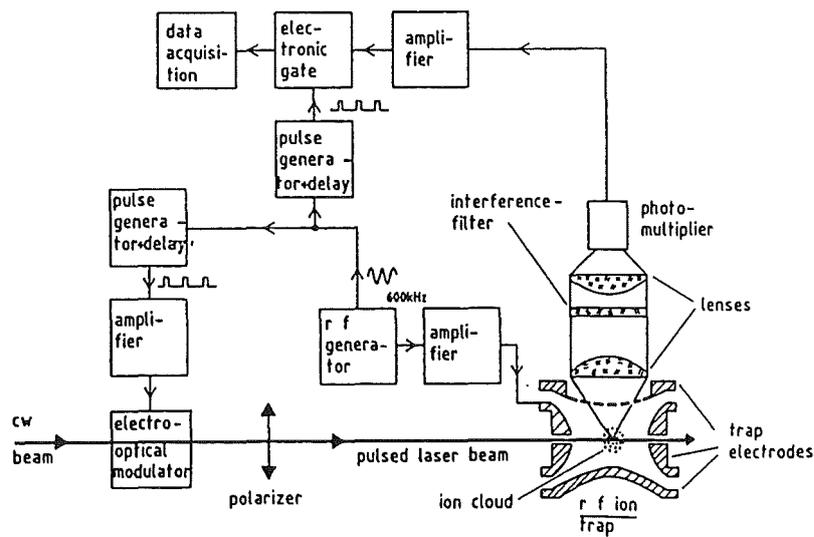


Bild 86: Aufbau des Nachweissystems

Die Lebensdauer im angeregten Zustand beträgt $\tau < 35$ ns [Rink92]. Die Häufigkeit der Verfügbarkeit eines Ions für eine erneute Anregung wird insbesondere durch die Lebensdauer im metastabilen Zustand limitiert. Mit Hilfe des Quenchgases kann diese auf einige Millisekunden verkürzt werden, da die Ionen ihre innere Energie über Stöße mit den leichten Wasserstoffmolekülen abgeben und schneller in den Grundzustand zurückkehren können.

Durch das speichernde Wechselfeld (600 kHz) bewegen sich die Ionen sehr schnell. Die Geschwindigkeitsanteile in Richtung des Lasers führen zu einer Dopplerverbreiterung der optischen Übergänge.

Das UV-Licht des Lasers wird über einige Gigahertz in 100 MHz-Schritten durchgestimmt. Die Breite des Absorptionsspektrums ist ein Maß für die Geschwindigkeitsverteilung der Ionen in Richtung des Laserstrahls. Durch die Frequenzverdopplung ist die Schrittweite und der Durchstimmbereich der UV-Laserfrequenz doppelt so groß im Vergleich zur Frequenz des Farbstofflasers.

5.1 Die kontinuierliche Einstrahlung des UV-Lichtes

Falls das UV-Licht ununterbrochen eingestrahlt wird, werden die Ionen auch dann angeregt, wenn sie hohe Geschwindigkeiten besitzen. Das Spektrum ist stark dopplerverbreitert.

Bild 87 ist ein Spektrum von ^{178}Hf am Standardarbeitspunkt, das mit der Methode der kontinuierlichen Einstrahlung aufgenommen wurde. Die Halbwertsbreite (FWHM_L) beträgt 1530 MHz.

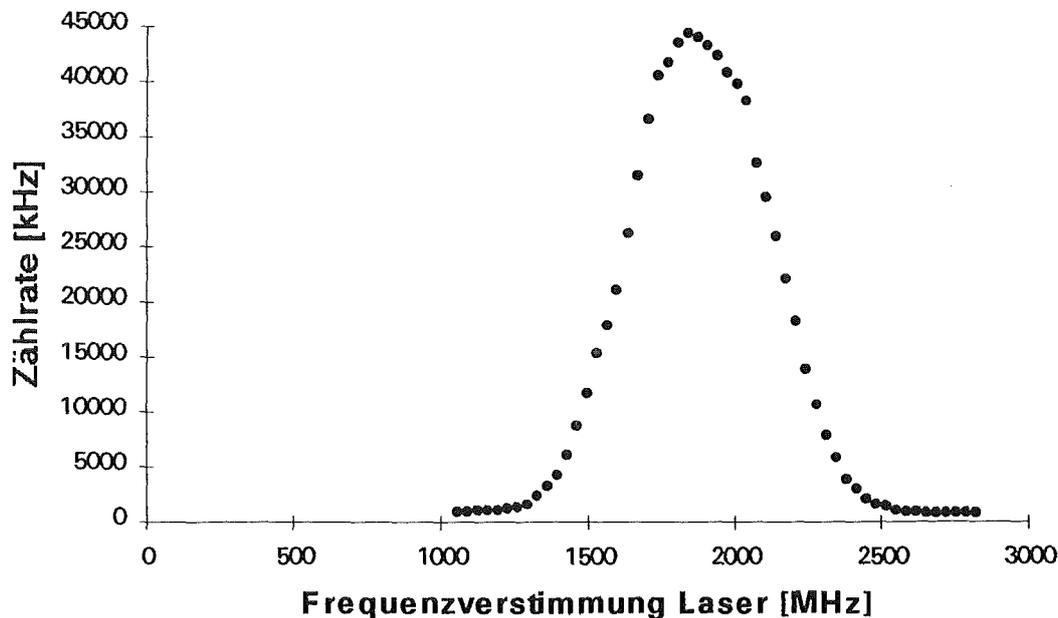


Bild 87: Ungepulstes Spektrum von ^{178}Hf . Die Halbwertsbreite des Spektrums beträgt 1530 MHz.

5.2 Die gepulste Anregung von ^{178}Hf

Strahlt man das Laserlicht in Pulsen von ca. 80 ns Dauer im Takt der Wechselspannung in die Falle ein, erhält man eine stroboskopische Aufnahme eines Bewegungszustandes der Ionenwolke.

Diese Vorgehensweise entspricht dem Anbringen eines Poincaré-Schnittes zu einer bestimmten Phasenlage.

Untersucht man die Veränderung der Zustände des Systems zwischen $\xi = 0$ und $\xi = \pi$ mit Hilfe von Poincaré-Schnitten, erhält man die Entwicklung des Systems für alle Zeiten. Zu jeder Zeit zwischen $\xi=0$ und $\xi=\pi$ repräsentiert der zugehörige Poincaré-Schnitt den Zustand des Systems. Falls alle Bahnkurven regulär sind, bestehen die Schnitte aus ellipsenähnlichen Kurven im Phasenraum. Verfolgt man die Veränderung der Schnittkurven zwischen $\xi=0$ und $\xi=\pi$, erhält man die Zustände des Systems zu allen Zeiten (Bild 89, S. 83).

Gelingt es, die Ionen nur dann anzuregen, wenn der Zustand des Systems innerhalb dieser Zeit ein Minimum der mittleren Geschwindigkeit besitzt, sollte auch die Halbwertsbreite der Absorptionsspektren kleiner werden.

In Bild 89 erkennt man, daß zur Zeit $\xi=0$ und $\xi=\pi/2$ die mittlere Geschwindigkeit des Systems klein ist. Im Minimum der Wechselspannung ($\xi=\pi/2$) ist sie etwas größer als im Maximum ($\xi=0$ und $\xi=\pi$). Die Schnittkurven tendieren im Nulldurchgang der äußeren Wechselspannung ($\xi=\pi/4$ und $\xi = 3\pi/4$) zu hohen Geschwindigkeiten.

Bild 88 ist ein Spektrum am Standardarbeitspunkt, das mit der gepulsten Meßmethode im Maximum der Wechselspannung aufgenommen wurde.

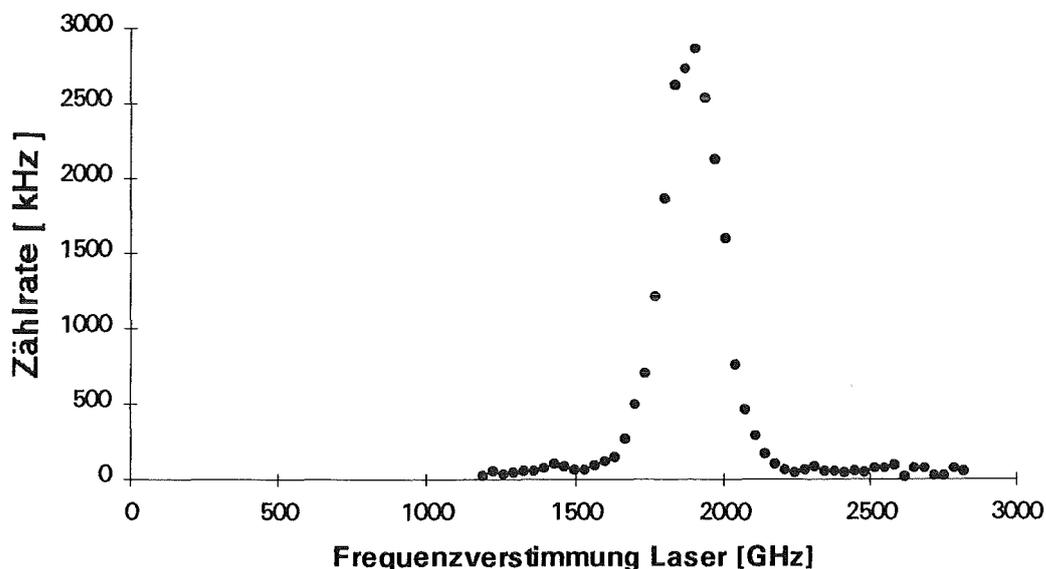


Bild 88: Gepulstes Spektrum von ^{178}Hf . Die Halbwertsbreite beträgt nur noch 660 MHz. Sie ist ca. 2,3 mal kleiner im Vergleich zum un gepulsten Spektrum (1530 MHz).

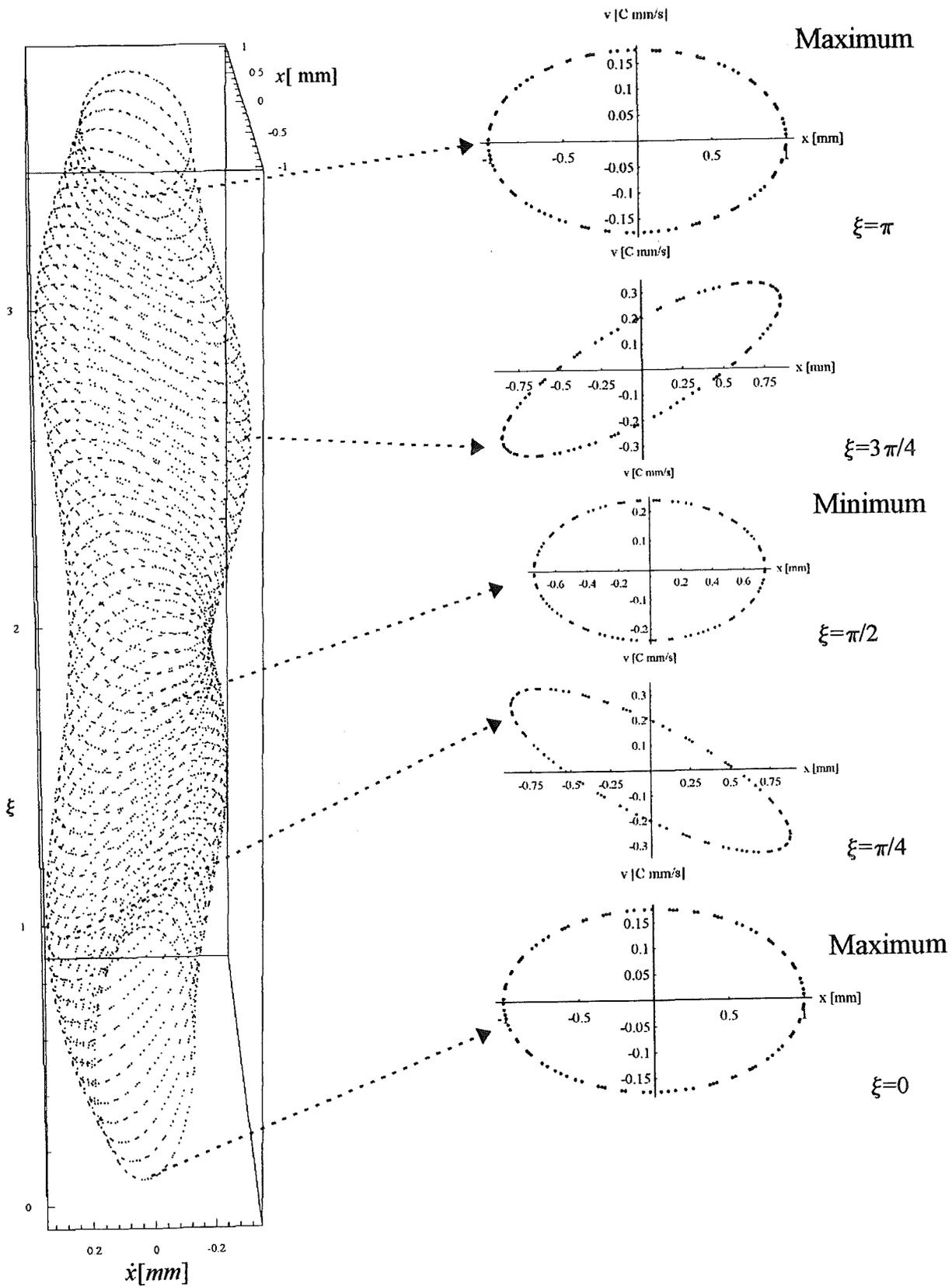


Bild 89: Die Zustände des Systems im Fall regulärer Bahnkurven zwischen $\xi=0$ und $\xi=\pi$. Auf der rechten Seite sind Ausschnitte ausgezeichneter Phasenlagen ($\xi=0, 3\pi/4, \pi/2, \pi, \pi/4, \pi$).

5.3 Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit von der Ionenzahl

In einer Meßreihe wurde an einer sehr langlebigen Ionenwolke (Speicherdauer 7 Stunden) eine Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit im Ensemble von der Signalzählrate beobachtet. Da die Zykluszeit (die Zeit bis zu einer weiteren Anregung eines Ions) unabhängig von der Ionenzahl ist, kann die Signalzählrate als relatives Maß für die Zahl der Ionen im Ensemble gewertet werden (Bild 90).

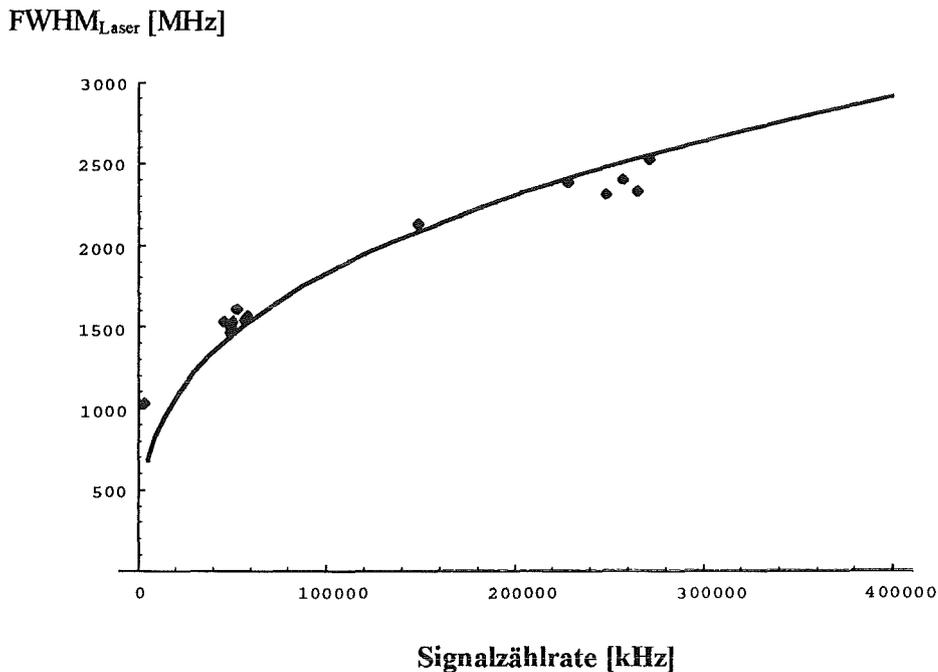


Bild 90: Die Halbwertsbreite der ungepulsten Spektren in Abhängigkeit von der Signalzählrate. Die Halbwertsbreite der Geschwindigkeitsverteilung ist proportional zu $\sqrt[3]{N^{Ionen}}$.

Dieser experimentelle Befund stimmt sehr gut mit den in [Schre94] simulierten Daten überein. Nimmt das System bei einer gegebenen Ionenzahl einen Zustand ein, der knapp unterhalb der „kritischen“ Ionendichte angesiedelt ist, folgt aus:

$$\sigma_v \propto \sqrt[3]{N^{Ionen}} \quad \text{und} \quad \sigma_x \propto \sqrt[3]{N^{Ionen}}, \text{ so daß } \sigma_v \propto \sigma_x \text{ ist.}$$

Die mittlere Geschwindigkeit im Ensemble wächst demnach proportional mit der Ausdehnung der Ionenwolke. Die Coulombabstoßung bewirkt einen Anstieg der mittleren Geschwindigkeit mit der Zahl der gespeicherten Ionen. Bleibt die Zahl der Ionen konstant, ist auch die mittlere Geschwindigkeit konstant. Es gibt keine permanente Aufheizung durch die Abstoßung.

5.4 Kühlung der Ionen über das Puffergas

Eine andere Methode zur Reduzierung der Halbwertsbreite ist die Kühlung des Puffergases. Über Stöße gleicht sich die thermische Bewegung der Ionen an die des Puffergases an und wird geringer, je stärker die Kühlung ist.

Während die Ionenfalle über ein Kältereservoir im Zeitraum von ca. 2 Stunden auf ca. 100K heruntergekühlt wurde, wurden mehrere Spektren am Standardarbeitspunkt aufgenommen. Bild 91 zeigt die Abnahme der Halbwertsbreite in Abhängigkeit von der Fallentemperatur.

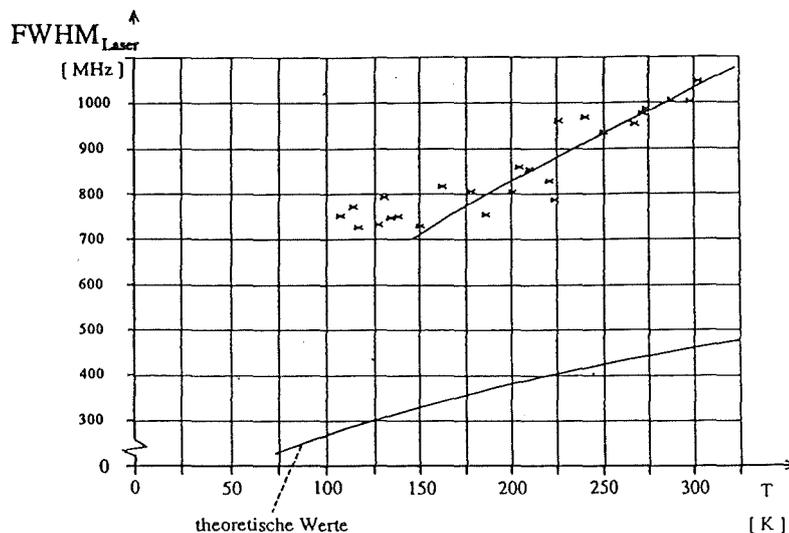


Bild 91: Abnahme der Halbwertsbreite der im Maximum der Fallenspannung gepulsten Spektren.

Die Abnahme entspricht jedoch nicht den theoretischen Erwartungen. Ein Grund dafür könnte die mit der Kühlung verbundene Zunahme der Ionendichte sein. Wenn die Dichte der Ionen zunimmt, wird die Ortsverteilung σ in allen drei Raumrichtungen kleiner. Die Dichte nähert sich zunehmend der kritischen Grenze (Bild 82). Der Anteil chaotischer Bahnkurven nimmt zu, je dichter das Ensemble ist. Diese elektrodynamische Aufheizung wirkt somit der Verminderung der thermischen Bewegung durch die Stöße mit dem kalten Quenchgas entgegen.

5.5 Oszillation der Ionenwolke im Takt der Wechselspannung

In früheren Untersuchungen [Rink92] wurde eine von der Phase der äußeren Wechselspannung abhängige Ausdehnung der Ionenwolke beobachtet. Dieses Verhalten der Ionenwolke kann durch den Vergleich der Poincaré-Schnitte ausgezeichneter Phasenlagen (Bild 89) verstanden werden. Jedem Zustand des Systems zwischen $\xi=0$ und $\xi=\pi$, entspricht ein Poincaré-Schnitt zwischen $\xi=0$ und $\xi=\pi$.

Im Minimum der Wechselspannung liegen die von der Bahnkurve eingenommenen Orte im Mittel näher am Ursprung, als im Maximum. Dagegen ist im Minimum die Geschwindigkeit im Mittel größer als im Maximum. Zwischen diesen beiden Zuständen nimmt das Ion hohe Geschwindigkeiten auf. Im Nulldurchgang nach dem Maximum besitzt es in positiver x-y-Richtung im Mittel eine hohe negative Geschwindigkeit, während sie in negativer x-y-Richtung positiv ist. Die Ionenwolke zieht sich in der x-y-Ebene zusammen.

Im Nulldurchgang nach dem Minimum geschieht das Umgekehrte. Wenn es sich in positiver x-y-Richtung befindet, weist es im Mittel eine hohe positive Geschwindigkeit auf, während es auf der negativen Seite eine hohe negative Geschwindigkeit hat. Die Ionenwolke dehnt sich aus. In z-Richtung geschieht dieser Prozeß um 180° phasenverschoben. Während sich die Ionenwolke in x-y-Richtung zusammenzieht, dehnt sie sich in z-Richtung aus und umgekehrt.

5.6 Unterschied der mittleren Geschwindigkeit im Minimum und Maximum der Wechselspannung

In den beiden Poincaré-Schnitten für das Minimum (Bild 89, $\xi=\pi/2$) und das Maximum der Wechselspannung (Bild 89, $\xi=0$ und $\xi=\pi$) sind die Ellipsen einmal groß und einmal klein. Es ist stets eine höhere mittlere Geschwindigkeit im Minimum gegenüber dem Maximum in x-y-Richtung, also in Richtung des Laserstrahls auszumachen. Dieser Unterschied ist auch experimentell in einer Meßreihe mit der außerordentlich langlebigen Ionenwolke beobachtet worden. Ausgehend vom Standardarbeitspunkt wurde die Gleichspannung U_0 schrittweise vergrößert. Nach drei Schritten wurde der Standardarbeitspunkt wieder aufgesucht, um Referenzmessungen hinsichtlich der Ionenzahl zu bekommen.

In den Bildern 92 und 93 ist die Halbwertsbreite in Abhängigkeit von der Gleichspannung U_0 , die von $U_0=10$ V bis $U_0=50$ V ($V_0=400$ V) verändert wurde, jeweils im Minimum und im Maximum dargestellt. Durch die Erhöhung der Gleichspannung wurde der Arbeitspunkt im Stabilitätsdiagramm (Bild 25, S. 21) in Richtung der Grenze $\beta_z=0$ verschoben. Die Halbwertsbreite ist im Minimum stets um ca. 210 MHz größer, als im Maximum.

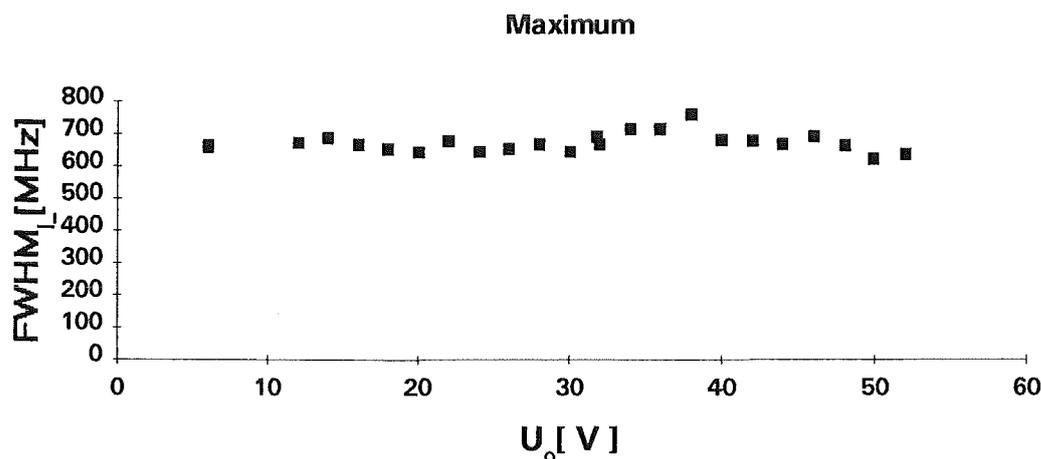


Bild 92: Halbwertsbreite in Abhängigkeit von der Gleichspannung. Die Halbwertsbreite beträgt ca. 690 MHz.

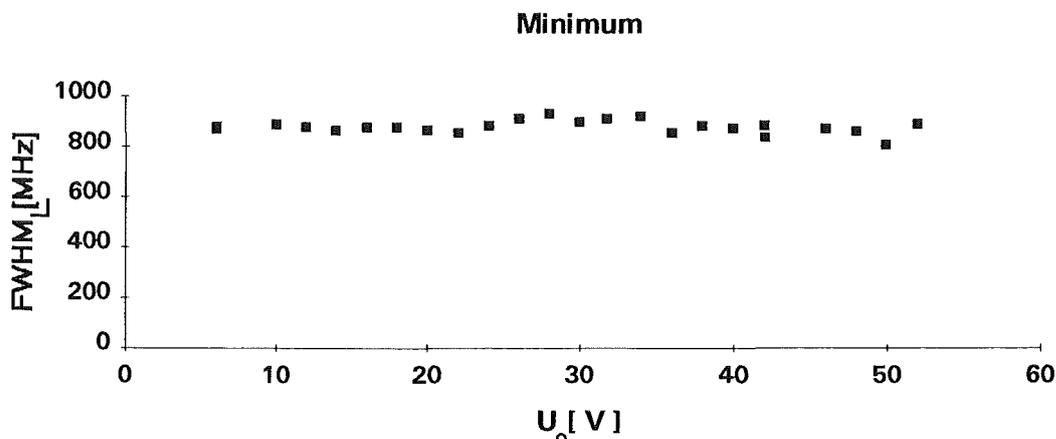


Bild 93: Halbwertsbreite in Abhängigkeit von der Gleichspannung. Die Halbwertsbreite beträgt stets 900 MHz. Sie ist um ca. 200 MHz größer im Vergleich zum Maximum.

Auch bei negativen Spannungen $U_0=0$ V bis $U_0=-20$ V ($V_0=400$ V) (der Arbeitspunkt wird in Richtung der Stabilitätsgrenze $\beta_x=0$ verschoben (Bild 25, S. 21)) ist ein Unterschied der Geschwindigkeitsverteilungen im Minimum und Maximum der Wechselspannung beobachtet worden (Bild 94 und 95). Alle Halbwertsbreiten sind größer als in den Messungen in Bild 92 und 93. Dies liegt an der größeren eingefangenen Ionenwolke, an der diese Messungen durchgeführt wurde.

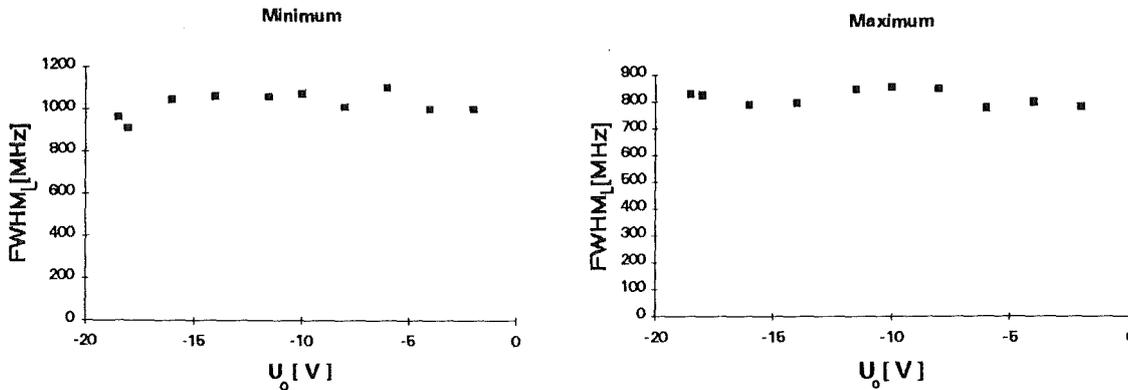


Bild 94 und 95: Halbwertsbreite in Abhängigkeit von der negativen Gleichspannung im Minimum und Maximum der Wechselspannung Die mittlere Geschwindigkeit bleibt unter der Zunahme der negativen Spannung jeweils konstant. Die Halbwertsbreite der Laserfrequenz im Minimum ist wie in den Bildern 92 und 93 ca. 200 MHz größer als im Maximum.

Die Feststellung, daß die mittlere Geschwindigkeit über einen weiten Bereich der angelegten Gleichspannung konstant ist, stimmt mit den Simulationsergebnissen in [Schre94] überein. Die Differenz der Halbwertsbreiten in den Extrema der Wechselspannung um 20-30% wird ebenfalls in [Schre94] simuliert.

Eigentlich würde man eine Verminderung der Geschwindigkeitsverteilung erwarten, wenn die positive Spannung erhöht wird. Denn durch eine größere Spannung zwischen Ring und Kalotten wird die Maximalauslenkung der Ionen in der x-y-Ebene kleiner. Eine kleinere Maximalauslenkung (Makrobewegung) sollte mit einer Verringerung der Geschwindigkeit der gepulsten Spektren verbunden sein (Im Fall regulärer Bahnkurven sind die Ellipsen in den Poincare'-Schnitten kleiner, so daß die Ionen auch kleinere Geschwindigkeiten besitzen). Eine Verminderung der Maximalauslenkung entspricht jedoch einer Verdichtung der Ionen in der x-y-Ebene. Möglicherweise nimmt der Anteil chaotischer Bahnkurven zu, je stärker die angelegte Gleichspannung ist. Eine Verringerung der Makrogeschwindigkeit durch die angelegte Gleichspannung wird durch eine gleichzeitige Verstärkung der chaotischen Bewegung kompensiert.

5.7 Abhängigkeit der Signalzählrate von der angelegten Gleichspannung

Während die Gleichspannung von $U_0=10$ V bis $U_0=50$ V verändert wurde ($V_0=400$ V) fiel auf, daß die Signalzählraten im Maximum der Wechselspannung zunächst klein, dann aber zunehmend größer wurden, obwohl die Gesamtzahl der Ionen zwischen $U_0=10$ V bis $U_0=40$ V konstant blieb, was durch die Signalzählrate der Referenzmessungen Standardarbeitspunkt kontrolliert wurde. Bild 96 zeigt die Zunahme der Signalzählrate mit der Variation der Gleichspannung. Darunter ist die Signalzählrate der Spektren im Minimum aufgeführt (Bild 97).

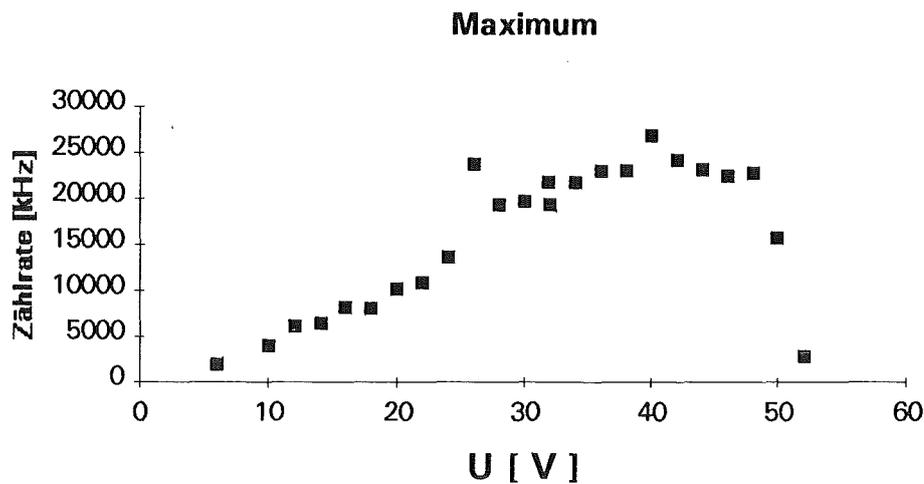


Bild 96: Signalzählrate in Abhängigkeit von der Gleichspannung im Maximum der Wechselspannung. Mit der Gleichspannung steigt die Signalzählrate an. Am Rand des Stabilitätsbereiches kommt es zum Verlust von Ionen.

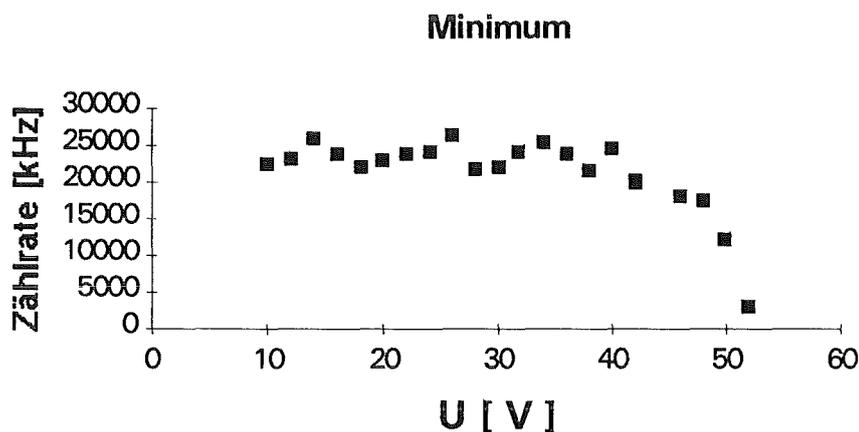


Bild 97: Signalzählrate in Abhängigkeit von der Gleichspannung im Minimum der Wechselspannung. Die Signalzählrate bleibt über einen weiten Bereich der angelegten Spannung ungefähr konstant. Am Rand des Stabilitätsbereiches kommt es zum Verlust von Ionen.

Die Signalzählrate ist im Maximum bei $U_0=40\text{V}$ ungefähr so groß wie die Signalzählrate im Minimum.

Eine Erklärung dieser Beobachtung könnte darin bestehen, daß sich im Gegensatz zum Maximum der Wechselspannung zur Zeit des Minimums sehr viele Ionen in der Fallenmitte befinden. Die Signalzählrate ist groß. Im Maximum dagegen befinden sich die Ionen vor Allem von der Fallenmitte entfernt am Ring in der x-y-Ebene. Durch eine Erhöhung der Gleichspannung wird die maximale Ausdehnung der Ionenwolke in der Ringebene kleiner. Die Ausdünnung der Ionen im Laserstrahl ist dann zur Zeit des Maximums im Vergleich zum Minimum kleiner, so daß die Signalzählrate steigt. Bei $U_0=40\text{V}$ sind gleich viele Ionen sowohl im Minimum als auch im Maximum im Laserstrahl. Dies spricht dafür, daß die Ionenwolke die Form einer Kugel hat. Unverständlich bleibt die sehr große Differenz (5:1) in den Zählraten im Minimum und Maximum bei kleinen angelegten Spannungen.

5.8 Ergebnis und Ausblick

Der Zustand der Ionenwolke (Orts- und Geschwindigkeitsverteilung) hängt neben den äußeren Fallenparametern in entscheidender Weise von der Gesamtzahl der gespeicherten Ionen ab. Die Dichte der Ionenwolke richtet sich durch die Coulombabstoßung möglicherweise bevorzugt an der Grenze der Strukturstabilität ein. Dies könnte die Ursache für einander widersprechende Messungen sein, da nur wenig voneinander abweichende Systemparameter zu ganz verschiedenen Zuständen des Systems führen können.

Durch die Kühlung wird die Dichte der Ionen größer, wodurch der Anteil der chaotischen Bewegung im System zunimmt. Dieser elektrodynamische Effekt wirkt der Verminderung der thermischen Bewegung durch die Stöße mit dem kalten Quenchgas entgegen.

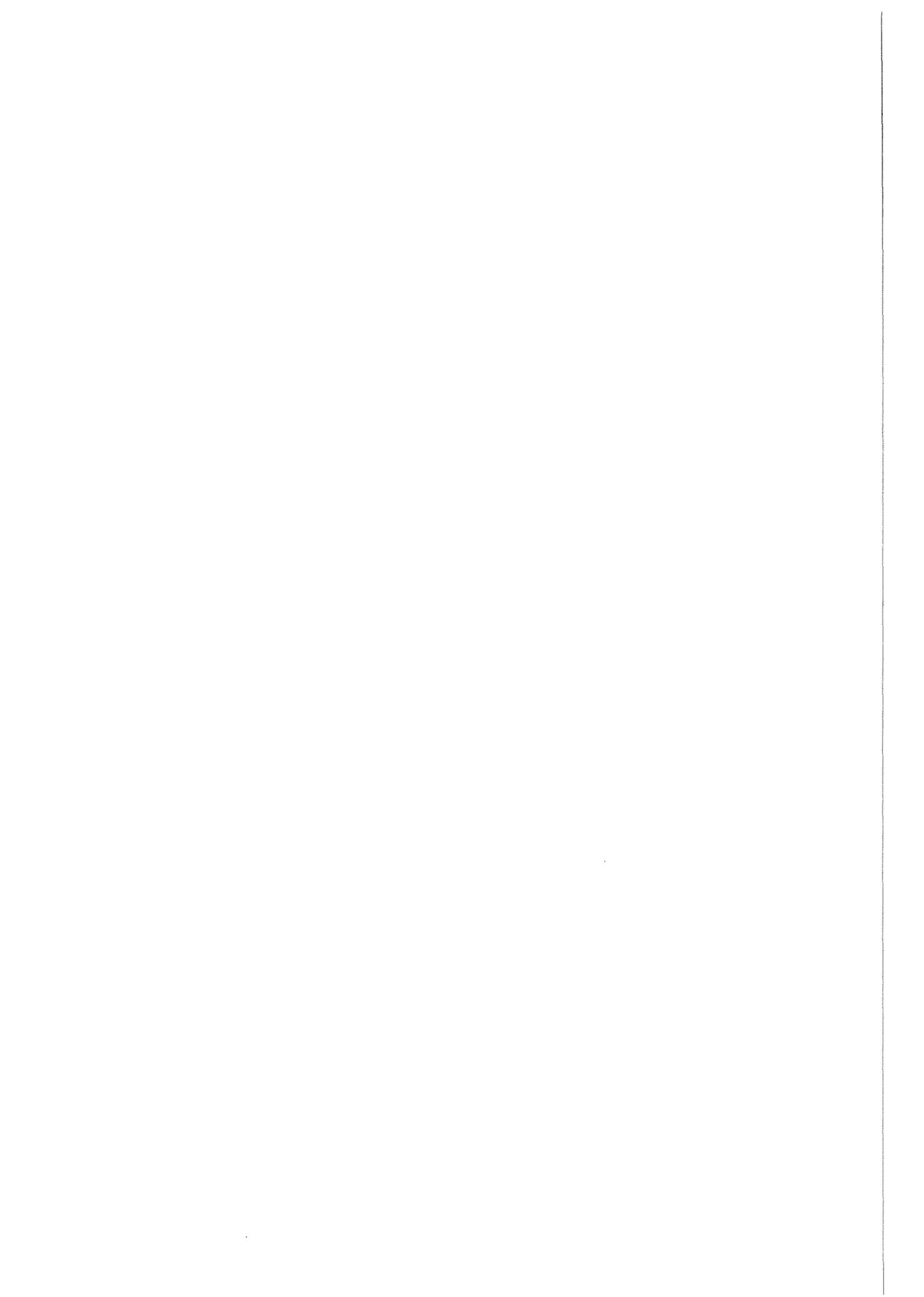
Um Experimente miteinander vergleichen zu können, wird vorgeschlagen, nach jeder Messung die Ionenzahl exakt zu bestimmen. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß die Ionenwolke auf ein Blech gelenkt und die Ladung des Bleches bestimmt wird. Nur Messungen mit gleicher Ionenzahl sind hinsichtlich ihrer Geschwindigkeitsverteilung miteinander vergleichbar. Es ist zusätzlich von großer Bedeutung, daß die Stelle, an der der Laserstrahl die Ionenwolke durchstrahlt, reproduziert werden kann, weil eine kleine Abweichung der Position ebenfalls zu voneinander abweichenden Messungen führt.

Die vorliegende Arbeit wurde in der Gruppe Laserspektroskopie am Institut für Kernphysik der Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH durchgeführt. Herrn Prof. Dr. G. Schatz danke ich für die Ermöglichung dieser Arbeit.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Rebel für seine wertvollen Hinweise und Herrn Priv. Doz. Dr. G. Miesel für seine Unterstützung.

Im besonderen danke ich Herrn Priv. Doz. Dr. S. Stefanescu für seine Hilfe und ständige Diskussionsbereitschaft.

Die meisten Experimente wurden zusammen mit Herrn cand. phys B. Schrempp durchgeführt.



Anhang A : Programm „Zweidim“

```

<<Programm`Rungekut`                                | Laden des Mathematika-Package Rungekutta
-----|-----
e=1.52592*10^-7                                       | Konstanten
      -7
      1.52592 10
f=1.14934
      1.14934
g=2*10^6
      2000000
w=e*f
      -7
      1.7538 10
q=w*Sqrt[Pi]/(2*Sqrt[g])
      -11      Pi
      8.769 10 Sqrt[ -- ]
      2

-----|-----
s1=0.000001                                           | Anfangsbedingungen
      -6
      1. 10
s2=0
      0

-----|-----
kop=1/4.146                                           | Festlegung der Stärke der Kopplung κ
      0.241196

-----|-----
int=1                                                 | Intervall, über das integriert wird in Vielfachen
      1                                                 | von Pi

-----|-----
sw=50                                                 | Zahl der Schritte zwischen 0 und Pi
      50

-----|-----
aaa=-0.015                                           | Festlegung des Arbeitspunktes im Stabilitäts-
      -0.015                                           | diagramm
qqq=-0.58
      -0.58
***** Hauptprogramm *****

RungeKutta[{x2[t],(aaa+qqq*Cos[2*t]                   | schrittweise Berechnung von Ort und
      -kop w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2]))^(2*10^6)) | Geschwindigkeit und Einfügen in Tabelle
      +kop q *Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
      /((x1[t]^2)^(3/2))*x1[t]},
      {x1[t],x2[t]}
      ,{s1,s2},{t,0,int Pi,Pi/sw}}];
kl=%;                                                 | Übergabe der Tabelle an die Variable kl

-----|-----
j=int*sw+1                                           | Berechnung der Schrittzahl (Zahl der
      51                                                 | Perioden mal Schrittweite +1)
Do[a[k-1]=Part[kl,k,1],{k,1,j}]                     | schrittweises Auslesen und indizieren
Do[b[k-1]=Part[kl,k,2],{k,1,j}]                     | aller Orte und Geschwindigkeiten

-----|-----
D[ (                                                  | Differentiation der Störung nach x
      -kop w/((a[k]^2)*(Exp[(a[k]^2]))^(2*10^6))
      +kop q *Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[a[k]^2]]
      /((a[k]^2)^(3/2))) *a[k],a[k]];

```

```
dec=%;
k=.
```

```
-----
c=1 | Anfangsbedingungen der ersten Spalte der
  1 | Poincaré-Abbildung
d=0
  0
fr[0]={{0,0},{c,d}}
      {{0, 0}, {1, 0}}
```

```
-----
Do[{c=Part[fr[k],2,1],d=Part[fr[k],2,2],fr[k+1]=RungeKutta[{x4[t], | Berechnung der ersten Spalte,
      (aaa+qqq*Cos[2*t]+dec)*x3[t] }, | wobei der in jedem Schritt
      {x3[t],x4[t] } | ausgerechnete Ort eingesetzt wird
      ,{c,d},{t,(k)Pi/sw,(k+1) Pi/sw, Pi/sw}]],{k,0,int*sw}]
```

```
-----
gg=Part[fr[int*sw],2,1] | Werte der ersten Spalte bei
  0.998615 | t = int * Pi
hh=Part[fr[int*sw],2,2]
  -0.000649986
```

```
-----
g=0 | Anfangsbedingungen der zweiten
  0 | Spalte
h=1
  1
fr[0]={{0,0},{g,h}}
      {{0, 0}, {0, 1}}
```

```
-----
Do[{g=Part[fr[k],2,1],h=Part[fr[k],2,2],fr[k+1]=RungeKutta[{x6[t], | Berechnung der zweiten Spalte
      (aaa+qqq*Cos[2*t]+dec)*x5[t] }, | der Poincaré-Abbildung
      {x5[t],x6[t] }
      ,{g,h},{t,(k)Pi/sw,(k+1) Pi/sw, Pi/sw}]],{k,0,int*sw}]
```

```
-----
g=Part[fr[int*sw],2,1] | Werte der zweiten Spalte bei
  4.25712 | t = int * Pi
h=Part[fr[int*sw],2,2]
  0.998616
```

```
-----
dp={{gg,g},{hh,h}} | Jakobi-Matrix der Poincaré-
  {{0.998615, 4.25712}, {-0.000649986, 0.998616}} | Abbildung
```

```
-----
{s11,s21}= dp . {s1,s2}; | Berechnung des Bildvektors
```

```
-----
Det[dp] | Determinante der Jakobi-
  1. | Matrix
```

```
-----
Eigenvalues[dp] | Eigenwerte der Jakobi-Matrix
  {0.998615 + 0.0526029 I, 0.998615 - 0.0526029 I}
```

```
-----
{x eins, y p eins}={s1,s2}-Inverse[{{1,0},{0,1}}-dp] . {s1-a[int*sw],s2-b[int*sw]} | erste Iteration nach der
  -10 -15 | Methode von
  {4.01721 10 , -1.51497 10 } | Newton-Kantorowitsch
```

```
-----
N[Limit[dec,a[k]->0.0000001]] | Berechnung der Steigung der Störung
  0.0564014 | in der Nähe des Ursprungs
```

s1=xeins
s2=ypseins

| Anfangswerte der zweiten
| Iteration. Das Haupt-
| programm wird mit
| den übergebenen Werten
| erneut gestartet.

Anhang B: Programm „Map“

<<Programm`Rungekut`

| Laden des Mathematika-Package `Rungekut`

e=1.52592*10^-7

| Konstanten

1.52592 10

f=1.14934

1.14934

g=2*10^6

2000000

w=e*f

-7

1.7538 10

q=w*sqrt[Pi]/(2*sqrt[g])

-11 Pi

8.769 10 sqrt[--]

2

kop=-2.9

-2.9

| Systemparameter κ

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t]
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6))
+kop*q*Erf[1000*sqrt[2]*sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2)))*x1[t]},
{x1[t],x2[t]}
,{0.000001,0},{t,0,100Pi,Pi/50}];

| Berechnung der Orte und
| Geschwindigkeiten

| Anfangsbedingungen zur Zeit t=0; Intervall; Schrittweite

kl=%;

| Übergabe der Tabelle an die Variable kl

kl>>kop291.txt;

| Abspeichern unter Filename kop291.txt

j=5001

5001

| Schrittzahl

a=Part[kl,j,1]

| Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a

-7

-3.35806 10

b=Part[kl,j,2]

| Übergabe der zuletzt berechneten Geschwindigkeit an b

-8

-8.7058 10

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t]
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6))
+kop*q*Erf[1000*sqrt[2]*sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2)))*x1[t]},
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}];

| Berechnung der Orte und
| Geschwindigkeiten

| Anfangsbedingungen zur Zeit t=100 Pi

kl=%;

| Übergabe der Tabelle an die Variable kl

kl>>kop292.txt;

| Abspeichern unter Filename kop292.txt

a=Part[kl,j,1]

| Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a

-7

-7.74457 10

b=Part[kl,j, 2] | **Übergabe der zuletzt berechneten Geschwindigkeit an b**
 -8
 5.84709 10

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t] | **Berechnung der Orte und**
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6)) | **Geschwindigkeiten**
+kop*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2))*x1[t]],
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}]; | **Anfangsbedingungen zur Zeit t=200 Pi**
kl=%; | **Übergabe der Tabelle an die Variable kl**
kl>>kop293.txt; | **Abspeichern unter Filename kop293.txt**

a=Part[kl,j,1] | **Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a**
 -7
 8.55948 10

b=Part[kl,j, 2] | **Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an b**
 -8
 4.77892 10

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t] | **Berechnung der Orte und**
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6)) | **Geschwindigkeiten**
+kop*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2))*x1[t]],
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}]; | **Anfangsbedingungen zur Zeit t=300 Pi**
kl=%; | **Übergabe der Tabelle an die Variable kl**
kl>>kop294.txt; | **Abspeichern unter Filename kop293.txt**

a=Part[kl,j,1] | **Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a**
 -7
 1.99582 10

b=Part[kl,j, 2] | **Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an b**
 -8
 -9.05649 10

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t] | **Berechnung der Orte und**
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6)) | **Geschwindigkeiten**
+kop*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2))*x1[t]],
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}]; | **Anfangsbedingungen zur Zeit t=400 Pi**
kl=%; | **Übergabe der Tabelle an die Variable kl**
kl>>kop295.txt; | **Abspeichern unter Filename kop295.txt**

a=Part[kl,j,1] | **Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a**
 -7
 -9.89991 10

b=Part[kl,j, 2] | **Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an b**

-8

1.30376 10

```

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t]
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6))
+kop*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2)))*x1[t]},
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}];
kl=%;
kl>>kop296.txt;

```

| Berechnung der Orte und
| Geschwindigkeiten

| Anfangsbedingungen zur Zeit t=500 Pi
| Übergabe der Tabelle an die Variable kl
| Abspeichern unter Filename kop296.txt

```

a=Part[kl,j,1]
4.65309 10

```

| Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a

```

b=Part[kl,j, 2]
8.18089 10

```

| Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an b

```

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t]
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6))
+kop*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2)))*x1[t]},
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}];
kl=%;
kl>>kop297.txt;

```

| Berechnung der Orte und
| Geschwindigkeiten

| Anfangsbedingungen zur Zeit t=600 Pi
| Übergabe der Tabelle an die Variable kl
| Abspeichern unter Filename kop297.txt

```

a=Part[kl,j,1]
6.77469 10

```

| Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an a

```

b=Part[kl,j, 2]
-6.79822 10

```

| Übergabe des zuletzt berechneten Ortes an b

```

RungeKutta[{x2[t],(-0.015-0.58*Cos[2*t]
-kop*w/((x1[t]^2)*(Exp[(x1[t]^2))]^(2*10^6))
+kop*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[x1[t]^2]]
/((x1[t]^2)^(3/2)))*x1[t]},
{x1[t],x2[t]}
,{a,b},{t,0,100Pi,Pi/50}];
kl=%;
kl>>kop298.txt;

```

| Berechnung der Orte und
| Geschwindigkeiten

| Anfangsbedingungen zur Zeit t=700 Pi
| Übergabe der Tabelle an die Variable kl
| Abspeichern unter Filename kop297.txt

```

j=100
100

```

| Anzahl der Schnittpunkte pro File

```

kl<<kop291.txt;
Do[olli1[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo1[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];

```

| Übergabe der ersten Tabelle an kl
| Herauslesen der Orte $i \cdot \text{Pi}/2$ von $i=0$ bis $i=j$
| Herauslesen der Geschwindigkeiten $i \cdot \text{Pi}/2$ von $i=0$ bis $i=j$

```

kl<<kop292.txt;
Do[olli2[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo2[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];

```

| wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 2

```
kl=<<kop293.txt; | wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 3
Do[olli3[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo3[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];
```

```
kl=<<kop294.txt; | wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 4
Do[olli4[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo4[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];
```

```
kl=<<kop295.txt; | wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 5
Do[olli5[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo5[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];
```

```
kl=<<kop296.txt; | wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 6
Do[olli6[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo6[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];
```

```
kl=<<kop297.txt; | wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 7
Do[olli7[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo7[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];
```

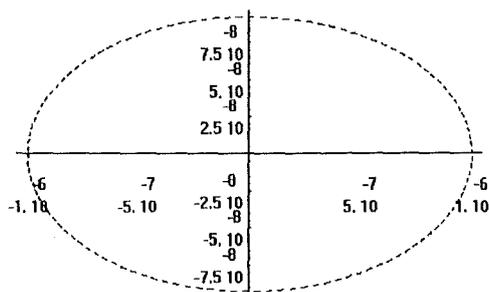
```
kl=<<kop298.txt; | wie Tabelle 1, jetzt Tabelle 8
Do[olli8[i]=Part[kl,50*i+1,1],{i,0,j}];
Do[illo8[i]=Part[kl,50*i+1,2],{i,0,j}];
```

```
ort=Table[{olli1[i],olli2[i],olli3[i],olli4[i],
           olli5[i],olli6[i],olli7[i],olli8[i]},{i,0,j}]; | Erstellen einer Tabelle aller berechneten Orten
Flatten[ort];
ort=%;
```

```
geschw=Table[{illo1[i],illo2[i],illo3[i],illo4[i],
             illo5[i],illo6[i],illo7[i],illo8[i]},{i,0,j}]; | Erstellen einer Tabelle aller berechneten
                                                         | Geschwindigkeiten
Flatten[geschw];
geschw=%;
```

```
Do[olli[i]=Part[ort,i],{i,1,808}]; | Erstellen einer Tabelle aller berechneten Schnitt-
Do[illo[i]=Part[geschw,i],{i,1,808}]; | punkte
punkte=Table[Point[Table[{olli[i],illo[i]}]],{i,1,808}];
punkte>> kop129.txt; | Abspeichern der Tabelle unter kop129.txt
```

```
Show[Graphics[{CMYKColor[0,0.5,0,0],PointSize [0.003] | Darstellung aller Schnittpunkte einer
,punkte},Axes->True]] | Trajektorie in einer Poincaré-Karte
```



-Graphics-

Anhang C: Programm „Sechsdim“

<<Programm`Rungekut`

| Laden des Mahtematika- Package Rungekutta

e=1.52592*10^-7

| Konstantendeklaration

1.52592 10^-7

f=1.14934

1.14934

g=2*10^6

2000000

w=e*f

1.7538 10^-7

q=w*sqrt[Pi]/(2*sqrt[g])

8.769 10^-11 sqrt[Pi]
2

kop1=1/4.12 ;

| Festlegung der Stärke der Störung in den drei Raum-
| richtungen

kop2=1/4.12 ;

kop3=1/4.12 ;

kl={{1*10^-6,1*10^-6,1*10^-6,1*10^-6,1*10^-6,1*10^-6}}

| Die Lösung ist in jedem
| Schritt Null; Da die
| Berechnung der Stör-
| funktion für Orte < 10^-10
| problematisch ist, wurden
| „sichere“ Werte gewählt.

j=51

Do[a1[k-1]=Part[kl,1,1],{k,1,j}]

| alle Orte und Geschwindigkeiten

Do[b1[k-1]=Part[kl,1,2],{k,1,j}]

| bekommen in jedem Schritt zwischen

Do[a2[k-1]=Part[kl,1,3],{k,1,j}]

| 0 und π den Wert $1*10^{-6}$

Do[b2[k-1]=Part[kl,1,4],{k,1,j}]

Do[a3[k-1]=Part[kl,1,5],{k,1,j}]

Do[b3[k-1]=Part[kl,1,6],{k,1,j}]

D[(-kop1*w/((a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)
*(Exp[(a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2))^(2*10^6)]
+kop1*q*Erf[1000*sqrt[2]*sqrt[a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2]]
/((a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)^(3/2))))*a1[k],a1[k]];

| Differentiation der
| x-Komponente der
| Störung nach x

dec1=%;

D[(-kop2*w/((a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)
*(Exp[(a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2))^(2*10^6)]
+kop2*q*Erf[1000*sqrt[2]*sqrt[a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2]]
/((a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)^(3/2))))*a2[k],a2[k]];

| Differentiation der
| y-Komponente der
| Störung nach y

dec2=%;

```

D[(-kop3*w/((a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)
*(Exp[(a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)]^(2*10^6))
+kop3*q*Erf[1000*Sqrt[2]*Sqrt[a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2]]
/((a1[k]^2+a2[k]^2+a3[k]^2)^(3/2))))*a3[k],a3[k]];

```

| Differentiation der
z-Komponente der
Störung nach z

```
dec3=%;
```

```
k=.
```

Die gemischten Ableitungen der Störung, z.B die Ableitung der x-Komponente nach y, sind um die Lösung $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ gleich Null und werden deshalb nicht berücksichtigt.

```
c11=1
```

```
1
```

```
c12=0
```

```
0
```

```
c13=0
```

```
0
```

```
c14=0
```

```
0
```

```
c15=0
```

```
0
```

```
c16=0
```

```
0
```

```
fr[0]={{0,0},{c11,c12,c13,c14,c15,c16}}
```

```
{{0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
k=.
```

| Anfangsbedingungen der
ersten Spalte der 6 X 6 -
Jakobimatrix (t =0)

```
Do[{c11=Part[fr[k],2,1],c13=Part[fr[k],2,3],c15=Part[fr[k],2,5],c12=Part[fr[k],2,2],
```

```
,c14=Part[fr[k],2,4],c16=Part[fr[k],2,6],
```

```
fr[k+1]=RungeKutta[{x12[t]
```

```
,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x11[t]+dec1*x11[t]+dec2*x13[t]+dec3*x15[t],
```

```
x14[t]
```

```
,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x13[t]+dec1*x11[t]+dec2*x13[t]+dec3*x15[t],
```

```
x16[t]
```

```
,(0.03+1.16*Cos[2*t])*x15[t]+dec1*x11[t]+dec2*x13[t]+dec3*x15[t]
```

```
},
```

```
{x11[t],x12[t],x13[t],x14[t],x15[t],x16[t]}
```


| Berechnung der
ersten Spalte, wobei
der zu jeder Zeit
gültige Ort
eingesetzt wird

```
gg11=Part[fr[50],2,1];
```

```
gg12=Part[fr[50],2,2];
```

```
gg13=Part[fr[50],2,3];
```

```
gg14=Part[fr[50],2,4];
```

```
gg15=Part[fr[50],2,5];
```

```
gg16=Part[fr[50],2,6];
```

| Wert der ersten
Spalte bei t = Pi

```
c21=0
```

```
0
```

```
c22=1
```

```
1
```

```
c23=0
```

| Anfangsbedingungen der
zweiten Spalte (t = 0)

```

0
c24=0
0
c25=0
0
c26=0
0
fr[0]={{0,0},{c21,c22,c23,c24,c25,c26}}
      {{0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}}
k=.

```

```

Do[{c21=Part[fr[k],2,1],c23=Part[fr[k],2,3],c25=Part[fr[k],2,5],c22=Part[fr[k],2,2]
,c24=Part[fr[k],2,4],c26=Part[fr[k],2,6],
fr[k+1]=RungeKutta[{x22[t]
,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x21[t]+dec1*x21[t]+dec2*x23[t]+dec3*x25[t],
x24[t]
,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x23[t]+dec1*x21[t]+dec2*x23[t]+dec3*x25[t],
x26[t]
,(0.03+1.16*Cos[2*t])*x25[t]+dec1*x21[t]+dec2*x23[t]+dec3*x25[t]
}],
{x21[t],x22[t],x23[t],x24[t],x25[t],x26[t]}
,{c21,c22,c23,c24,c25,c26},{t,(k)Pi/50,(k+1) Pi/50, Pi/50}},{k,0,50}]

```

| Berechnung der
zweiten Spalte

```

gg21=Part[fr[50],2,1];
gg22=Part[fr[50],2,2];
gg23=Part[fr[50],2,3];
gg24=Part[fr[50],2,4];
gg25=Part[fr[50],2,5];
gg26=Part[fr[50],2,6];

```

| Wert der zweiten Spalte
bei t = Pi

```

c31=0
0
c32=0
0
c33=1
1
c34=0
0
c35=0
0
c36=0
0
fr[0]={{0,0},{c31,c32,c33,c34,c35,c36}}
      {{0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}}
k=.

```

| Anfangsbedingungen der
dritten Spalte (t = 0)

```

Do[{c31=Part[fr[k],2,1],c33=Part[fr[k],2,3],c35=Part[fr[k],2,5],c32=Part[fr[k],2,2]
,c34=Part[fr[k],2,4],c36=Part[fr[k],2,6],
fr[k+1]=RungeKutta[{x32[t]
,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x31[t]+dec1*x31[t]+dec2*x33[t]+dec3*x35[t],
x34[t]

```

| Berechnung der
dritten Spalte

```

,-(0.015-0.58*Cos[2*t])*x33[t]+dec1*x31[t]+dec2*x33[t]+dec3*x35[t],
      x36[t]
,(0.03+1.16*Cos[2*t])*x35[t]+dec1*x31[t]+dec2*x33[t]+dec3*x35[t]
      },
{x31[t],x32[t],x33[t],x34[t],x35[t],x36[t]}
,{c31,c32,c33,c34,c35,c36},{t,(k)Pi/50,(k+1) Pi/50, Pi/50}},{k,0,50}

```

gg31=Part[fr[50],2,1];

| Wert der dritten Spalte
bei t = Pi

gg32=Part[fr[50],2,2];

gg33=Part[fr[50],2,3];

gg34=Part[fr[50],2,4];

gg35=Part[fr[50],2,5];

gg36=Part[fr[50],2,6];

c41=0

0

c42=0

0

c43=0

0

c44=1

1

c45=0

0

c46=0

0

fr[0]={{0,0},{c41,c42,c43,c44,c45,c46}}

{{0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}}

k=.

| Anfangsbedingungen der
vierten Spalte (t = 0)

```

Do[{c41=Part[fr[k],2,1],c43=Part[fr[k],2,3],c45=Part[fr[k],2,5]
      ,c42=Part[fr[k],2,2],c44=Part[fr[k],2,4],c46=Part[fr[k],2,6],
fr[k+1]=RungeKutta[{x42[t]
      ,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x41[t]+dec1*x41[t]+dec2*x43[t]+dec3*x45[t],
      x44[t]
      ,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x43[t]+dec1*x41[t]+dec2*x43[t]+dec3*x45[t],
      x46[t]
      ,(0.03+1.16*Cos[2*t])*x45[t]+dec1*x41[t]+dec2*x43[t]+dec3*x45[t]
      },
      {x41[t],x42[t],x43[t],x44[t],x45[t],x46[t]}
,{c41,c42,c43,c44,c45,c46},{t,(k)Pi/50,(k+1) Pi/50, Pi/50}},{k,0,50}

```

| Berechnung der
vierten Spalte

gg41=Part[fr[50],2,1];

| Wert der vierten
Spalte bei t = Pi

gg42=Part[fr[50],2,2];

gg43=Part[fr[50],2,3];

gg44=Part[fr[50],2,4];

gg45=Part[fr[50],2,5];

gg46=Part[fr[50],2,6];

c51=0

0

c52=0

0

c53=0

0

c54=0

0

c55=1

1

c56=0

0

fr[0]={{0,0},{c51,c52,c53,c54,c55,c56}}

{{0,0},{0,0,0,0,1,0}}

k=.

| Anfangsbedingungen der
fünften Spalte (t = 0)

Do{c51=Part[fr[k],2,1],c53=Part[fr[k],2,3]

,c55=Part[fr[k],2,5],c52=Part[fr[k],2,2]

,c54=Part[fr[k],2,4],c56=Part[fr[k],2,6],

fr[k+1]=RungeKutta[{x52[t]

,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x51[t]+dec1*x51[t]+dec2*x53[t]+dec3*x55[t],
x54[t]

,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x53[t]+dec1*x51[t]+dec2*x53[t]+dec3*x55[t],
x56[t]

,(0.03+1.16*Cos[2*t])*x55[t]+dec1*x51[t]+dec2*x53[t]+dec3*x55[t]
},

{x51[t],x52[t],x53[t],x54[t],x55[t],x56[t]}

,{c51,c52,c53,c54,c55,c56},{t,(k)Pi/50,(k+1) Pi/50, Pi/50}},{k,0,50}]

| Berechnung der
fünften Spalte von
t = 0 bis t = Pi

gg51=Part[fr[50],2,1];

gg52=Part[fr[50],2,2];

gg53=Part[fr[50],2,3];

gg54=Part[fr[50],2,4];

gg55=Part[fr[50],2,5];

gg56=Part[fr[50],2,6];

| Wert der fünften
Spalte bei t = Pi

c61=0

0

c62=0

0

c63=0

0

c64=0

0

c65=0

0

c66=1

1

fr[0]={{0,0},{c61,c62,c63,c64,c65,c66}}

| Anfangsbedingungen der
sechsten Spalte (t = 0)

$\{\{0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}\}$
 $k=$

Do{c61=Part[fr[k],2,1],c63=Part[fr[k],2,3],c65=Part[fr[k],2,5],c62=Part[fr[k],2,2]
 ,c64=Part[fr[k],2,4],c66=Part[fr[k],2,6], | **Berechnung der**
fr[k+1]=RungeKutta[{x62[t] | **sechsten Spalte**
 ,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x61[t]+dec1*x61[t]+dec2*x63[t]+dec3*x65[t], | **von t = 0 bis**
 x64[t] | **t = Pi**
 ,(-0.015-0.58*Cos[2*t])*x63[t]+dec1*x61[t]+dec2*x63[t]+dec3*x65[t],
 x66[t]
 ,(0.03+1.16*Cos[2*t])*x65[t]+dec1*x61[t]+dec2*x63[t]+dec3*x65[t]
 },
 {x61[t],x62[t],x63[t],x64[t],x65[t],x66[t]}
 ,{c61,c62,c63,c64,c65,c66},{t,(k)Pi/50,(k+1) Pi/50, Pi/50}],{k,0,50}]

gg61=Part[fr[50],2,1]; | **Wert der sechsten**
 gg62=Part[fr[50],2,2]; | **Spalte bei t = Pi**
 gg63=Part[fr[50],2,3];
 gg64=Part[fr[50],2,4];
 gg65=Part[fr[50],2,5];
 gg66=Part[fr[50],2,6];

dp={{gg11,gg21,gg31,gg41,gg51,gg61}, | **Jakobi-Matrix der Poincare'-Abbildung**
 {gg12,gg22,gg32,gg42,gg52,gg62},
 {gg13,gg23,gg33,gg43,gg53,gg63},
 {gg14,gg24,gg34,gg44,gg54,gg64},
 {gg15,gg25,gg35,gg45,gg55,gg65},
 {gg16,gg26,gg36,gg46,gg56,gg66}}

{{1.00045, 4.25923, 0, 0, 0, 0}, {0.000209024, 1.00045, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 1.00045, 4.25923, 0, 0}, {0, 0, 0.000209024, 1.00045, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0.58796, 1.54775}, {0, 0, 0, 0, -0.422746, 0.58796}}

Det[dp]
 1. | **Die Determinante der Jakkobi-Matrix**
 | **hat in jedem Schritt den Wert eins.**

MatrixForm[Eigenvalues[dp]] | **Berechnung der Eigenwerte der 6 X 6 -**
 | **Jakobi-Matrix**

1.03028 | **Erster Eigenwert**

1.03028 | **Zweiter Eigenwert**

0.58796 + 0.80889 I | **Dritter Eigenwert**

0.58796 - 0.80889 I | **Vierter Eigenwert**

0.970607 | **Fünfter Eigenwert**

0.970607

| Sechster Eigenwert

MatrixForm[Eigenvalues[dp]]

| Berechnung der Eigenvektoren
| Jede Zeile ist der zu den
| obigen Eigenwerten gehörige
| Eigenvektor. Der erste Eigenvektor
| gehört zum ersten Eigenwert usw.

| | | | | | |
|-----------|------------|-----------|------------|----------|--------------|
| 0. | 0. | 0.999975 | 0.00700521 | 0. | 0. |
| 0.999975 | 0.00700521 | 0. | 0. | 0. | 0. |
| 0. | 0. | 0. | 0. | 0.886263 | 0.463183 I |
| 0. | 0. | 0. | 0. | 0.886263 | - 0.463183 I |
| 0. | 0. | -0.999975 | 0.00700521 | 0. | 0. |
| -0.999975 | 0.00700521 | 0. | 0. | 0. | 0. |

{wert,vekt}=Eigensystem[N[dp,100]];

| Die Eigenwerte werden den Eigenvektoren zugeordnet

dp . vekt[[1]]==wert[[1]] vekt[[1]]

| Test, ob die Eigenwertgleichung erfüllt ist.

True

Literaturverzeichnis

- [Argy94] Argyris. J.; Faust G. ; Haase M. : Die Erforschung des Chaos ,
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft (1994)
- [Arn91] Arnol'd V.I. : Ordinary Differential Equations, Springer Verlag (1991)
- [Arro90] Arrowsmith D.K. ; Place C.M. : An Introduction to Dynamical Systems,
Cambridge University Press (1990)
- [Balt92] Baltz, R. : Vorlesungsskript Theoretische Physik B,
Institut für Theorie der Kondensierten Materie, TU Karlsruhe (1992)
- [Daw76] Dawson , P. H. : Quadrupole Mass Spectrometry and its applications,
Elsevier Scientific Publishing Company (1976)
- [Dem82] Demtröder, W. : Laser Spectroscopy, Springer, Berlin (1982)
- [Fisch59] Fischer E. : Die dreidimensionale Stabilisierung von Ladungsträgern in einem
Vierpolfeld, Zeitschrift für Physik 156, 1-26 (1959)
- [Fow57] Fowler K.T. , Hugh-Jones P., Brit. Med. J. ,1 (1957) 1205
- [Hech89] Hecht, E.: Optik, Addison-Wesley Publishing Company (1989)
- [Iff77] Iffländer R., Werth G., Metrologia 13, 167 (1977)
- [Kant82] Kantorovitch L.V. , Akilov G.P.: Functional Analysis ; Pergamon Press (1982)
- [Kow91] Kowalewska, D. : Laserspectroscopic Investigations of Isotope Shifts and
Hyperfine Structur of Polonium Isotopes, Kernforschungszentrum Karlsruhe,
KfK 4802, (1991)
- [Lich92] Lichtenberg A.J. ; Liebermann M.A. : Regular and Chaotic Dynamics,
Springer Verlag (1992)
- [Maed91] Maeder, R. E. : Programming in Mathematica,
Addison-Wesley Publishing Company (1991)
- [Pau58] Paul W., Osberghaus O., Fischer E. : Forschungsberichte des Wirtschafts-und
Verkehrsministerium Nordrhein-Westfalen Nr. 415, Westdeutscher Verlag,
Köln (1958)
- [Rink92] Rink, J. : Dissertation Universität Heidelberg (1992)
- [Schu92] Schubert, M. E. : Diplomarbeit Universität Karlsruhe (1992)
- [Schre94] Schrempp, B. : Diplomarbeit Universität Karlsruhe (1994)

- [Sieg71] Siegmann, A. E. :An Introduction to Lasers and Masers,
Mc Graw-Hill Book Company (1971)
- [Wolf 92] Wolfram S. : Mathematica, Addison-Wesley Publishing Company (1992)