



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5598

**Torsion eines
Kreiszyinders bei
großen Deformationen
und inkompressiblem
Materialverhalten**

O. Häusler, Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Juni 1995

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5598

**Torsion eines Kreiszyllinders bei
großen Deformationen und
inkompressiblem Materialverhalten**

O. Häusler
Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Im vorliegenden Bericht wurden mit Hilfe des Konzeptes der dualen Variablen einfache Materialgleichungen für hyperelastisches sowie für plastisches Materialverhalten von kleinen auf große Deformationen erweitert. Dabei wurden zwei Familien von zueinander dualen Spannungs- und Verzerrungstensoren betrachtet. Demzufolge existierten zwei Möglichkeiten zur Formulierung von plastischem Materialverhalten relativ zur aktuellen Konfiguration.

Für diese Materialmodelle wurden, unter der Voraussetzung von inkompressiblem Materialverhalten, die Spannungen mit numerischen Verfahren bestimmt, die bei einfacher Torsion und bei Torsion mit freiem Ende auftreten. Es zeigte sich, daß bei Hyperelastizität die Axialspannung in Abhängigkeit der Materialparameter unterschiedlich verläuft, während sich bei plastischem Materialverhalten durch die zwei Möglichkeiten der Formulierung des Materialverhaltens verschiedene Verläufe dieser Spannung ergeben.

Abstract

Torsion of a circular bar in the case of finite deformations and incompressible material behaviour

Constitutive relations concerning hyperelastic and plastic material behaviour are generalised from small to finite deformations using the concept of dual variables. Two families of dual strain and stress tensors are considered. Consequently, there exist two possibilities for formulating plastic constitutive models with respect to the actual configuration.

Using these constitutive models, the stress distribution is calculated for the case of simple torsion as well as for the case of torsion with free ends. It turns out that for hyperelasticity the investigated second-order effects depend decisively on the material parameters, and not on the chosen variables. For plasticity laws, on the other hand, the second-order effects investigated depend decisively on the chosen dual variables, and less on the material parameters.

Vorwort

Es ist wohl bekannt, daß die Verallgemeinerung von Materialgleichungen von kleinen auf große Deformationen nicht eindeutig ist. Auch die Zuordnung von Spannungen zu Verzerrungen sowie die Bestimmung von zugehörigen Zeitableitungen, unabhängig von speziellen Stoffeigenschaften, ist nicht eindeutig.

Eine Möglichkeit dieser Zuordnung besteht in der Methode der konjugierten Variablen, eine andere im Konzept der dualen Variablen, das in dieser Arbeit zugrunde gelegt wird.

Insbesondere wird auf die Frage eingegangen, wie bestimmte Materialgleichungen in möglichst einfacher Form mittels dualer Variablen von kleinen auf große Deformationen verallgemeinert werden können, und wie sich die so verallgemeinerten Materialgleichungen in speziellen Deformationsprozessen verhalten. Dabei konzentrieren sich die Berechnungsbeispiele auf die einfache Torsion sowie die Torsion mit freiem Ende. Während der gesamten Arbeit wird inkompressibles Materialverhalten vorausgesetzt.

Die Verfasser dieses Berichts hoffen, daß diese Arbeit einen Beitrag dazu leisten kann, Effekte höherer Ordnung in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik besser zu verstehen.

Karlsruhe, April 1995

O. Häusler, Ch. Tsakmakis

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	iii
1. Einleitung	1
2. Materialtheorie	3
2.1. Grundlagen der Kontinuumsmechanik	3
2.2. Materialmodelle bei kleinen Deformationen	8
2.2.1. Hyperelastizität	8
2.2.2. Plastizität mit kinematischer Verfestigung	9
2.3. Verallgemeinerung auf große Deformationen.....	11
2.3.1. Duale Variablen	11
2.3.2. Hyperelastizität	15
2.3.3. Plastizität mit kinematischer Verfestigung	16
3. Numerische Verfahren	18
3.1. Numerische Integration mit der Trapezregel	18
3.2. Modifizierte Mittelpunkregel zur Lösung von Anfangswertproblemen.....	20
3.3. Extrapolationsverfahren.....	25
3.3.1. Anwendung des Extrapolationsverfahrens auf die Trapezregel.....	30
3.3.2. Anwendung des Extrapolationsverfahrens auf die modifizierte Mittelpunkregel	32
3.3.3. Schrittweitensteuerung und Anpassung der Ordnung.....	33
4. Torsion eines Kreiszyinders	39
4.1. Grundlegende Beziehungen	40
4.1.1. Koordinatensysteme.....	40
4.1.2. Geometrische Größen	41
4.1.3. Spannungstensor	44
4.2. Hyperelastizität	47
4.2.1. Einfache Torsion.....	47
4.2.2. Torsion bei freiem Ende	50

4.3. Plastizität mit kinematischer Verfestigung.....	55
4.3.1. Einfache Torsion.....	56
4.3.2. Torsion bei freiem Ende	64
5. Couette-Strömung	75
6. Zusammenfassung	81
Literaturverzeichnis	83
Anhang A	85
Anhang B	87
B.1 Hyperelastizität und einfache Torsion	87
B.2 Hyperelastizität und Torsion mit freiem Ende	90
B.3 Plastizität und einfache Torsion	94
B.4 Plastizität und Torsion mit freiem Ende	100

Nomenklatur

\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektoren in der Bezugs- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
\mathbf{B}, \mathbf{C}	linker bzw. rechter Cauchy-Green Verzerrungstensor
\mathbf{A}, \mathbf{E}	Almansi bzw. Green'scher Verzerrungstensor
$\tilde{\mathbf{E}}$	linearisierter Green'scher Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}$	Finger'scher bzw. Piola'scher Verzerrungstensor
\mathbf{L}	Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{D}	Deformationsgeschwindigkeit
\mathbf{W}	Wirbeltensor
\mathbf{T}, \mathbf{S}	Cauchy'scher bzw. gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
\mathbf{W}	Spannungsleistung
\mathbf{F}	Fließfunktion
s	plastische Bogenlänge

ξ	Tensor der kinematischen Verfestigung
k	Fließgrenze
b, c	Materialparameter der kinematischen Verfestigung
h	Diskretisierungsparameter
T	Näherung durch die Trapezregel
$y(x)$	exakte Lösung eines Anfangswertproblems
$\eta(x, h)$	Näherungslösung eines Anfangswertproblems
$A_{k,j}$	Näherungen des Extrapolationsverfahrens
$\varepsilon_{k,j}$	Diskretisierungsfehler
eps	Genauigkeit
F_k	Anzahl der Funktionsaufrufe zur Berechnung einer Näherungslösung
W_k	Arbeit pro Grundschnittweite
R, r	Ausgangs- bzw. momentaner Radius
L, l	Ausgangs- bzw. momentane Länge
v	Verlängerungsfunktion
ψ	Verdrehung
\mathfrak{S}	Drillung
Γ	äußere Scherung
ζ	dimensionsloser Radius

Kapitel 1

Einleitung

Werden in einem Festkörper Spannungen berechnet, wurde bislang zumeist von kleinen Deformationen ausgegangen. Hierbei werden Ausdrücke mit höheren Potenzen der Deformation vernachlässigt. Dies ist bei größeren Deformationen nicht mehr erlaubt, da durch diese Vereinfachung teilweise Effekte zweiter Ordnung, das sind Spannungen, die nicht in Belastungsrichtung wirken, nicht bestimmt werden können. Zum Beispiel ergeben sich für einfache Scherung bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung nur Schubspannungen in Belastungsrichtung, während ohne diese Vereinfachung auch eine Normalspannung senkrecht dazu auftritt [1].

Um diese Spannungen bei großen Verformungen zu bestimmen, werden die Materialmodelle für kleine Deformationen mit Hilfe des von HAUPT und TSAKMAKIS entwickelten Konzeptes der dualen Variablen [16] auf große Deformationen erweitert. Da zwei Familien von zueinander dualen Spannungs- und Verfestigungstensoren sowie zugeordneten Geschwindigkeiten existieren, bestehen zwei Möglichkeiten zur Formulierung von Materialgleichungen, die Stoffverhalten bei großen Deformationen beschreiben.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Spannungen für hyperelastisches Materialverhalten und für beide Familien bei starrplastischem Materialverhalten mit rein kinematischer Verfestigung am Beispiel der Torsion eines Kreiszyinders qualitativ bestimmt und in Abhängigkeit der Materialparameter dargestellt werden. Insbesondere werden möglichst einfache Stoffgleichungen betrachtet, die als erste Näherung zur Beschreibung von Materialverhalten angesehen werden können. Die hierbei auftretenden Integrale und Differentialgleichungssysteme werden mit Hilfe numerischer Verfahren auf Grundlage des Extrapolationsverfahrens bestimmt.

Da es bei der Couette-Strömung aus der Strömungslehre analog zur Plastizität ebenfalls zwei Möglichkeiten zur Beschreibung der Spannungsverteilung im Fluid gibt [17], werden diese hier ebenfalls kurz vorgestellt.

Kapitel 2

Materialtheorie

Zur Bestimmung der Spannungen bei großen Deformationen, werden in diesem Kapitel zunächst Materialgleichungen für hyperelastisches und starrplastisches Materialverhalten bei kleinen Deformationen kurz vorgestellt. Diese werden anschließend auf große Verformungen erweitert.

2.1. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Ist R_0 der Raumbereich den der materielle Körper in der Bezugskonfiguration einnimmt, wird ein materieller Punkt durch einen Ortsvektor

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \quad (2.1)$$

bezüglich eines raumfesten, kartesischen Koordinatensystems beschrieben. Analog dazu wird im Raumbereich R_t der Momentankonfiguration, die der materielle Körper zu einem Zeitpunkt t einnimmt, derselbe materielle Punkt durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \quad (2.2)$$

bestimmt.

Die Bewegung des materiellen Körpers kann durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

dargestellt werden. Daraus wird der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.4)$$

gewonnen.

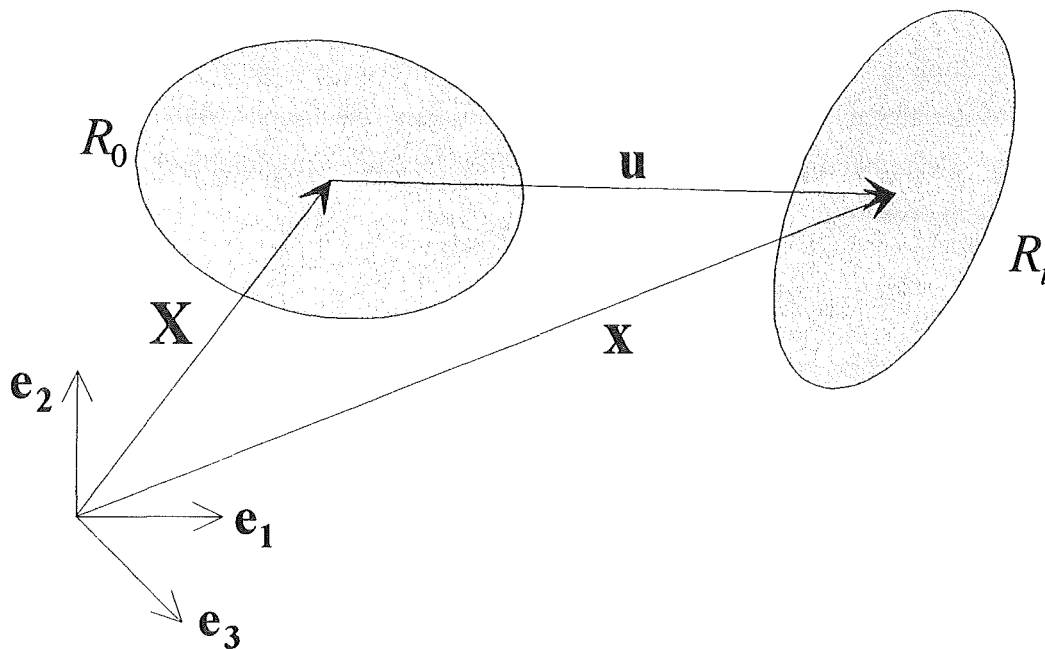


Abbildung 2.1: Materieller Körper in Momentan- und Bezugsconfiguration mit den Ortsvektoren \mathbf{x} , \mathbf{X} zu einem Punkt des Körpers und dem dazugehörigen Verschiebungsvektor \mathbf{u} .

Ein materielles Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentanconfiguration kann durch die lineare Abbildung

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

aus einem Linienelement $d\mathbf{X}$ der Bezugskonfiguration bestimmt werden. Der Tensor zweiter Stufe \mathbf{F} mit der Eigenschaft

$$\det \mathbf{F} > 0, \quad (2.6)$$

heißt Deformationsgradient. Die positive Determinante bedeutet physikalisch, daß sich der materielle Körper mit endlichem Volumen nicht selbst durchdringen kann und er nicht zu einem Punkt mit Volumen 0 komprimiert werden kann [2, S.3].

Genauso kann aus dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} ein Verschiebungsgradient \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.7)$$

definiert werden.

Mit (2.4) folgt daraus

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1}. \quad (2.8)$$

$\mathbf{1}$ bedeutet hierbei der Einheitstensor.

Da der Deformationsgradient \mathbf{F} niemals singular wird (2.6), existiert nach [2, S.11] die eindeutige Zerlegung in

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (2.9)$$

wobei \mathbf{U} und \mathbf{V} positiv-definite, symmetrische Tensoren und \mathbf{R} ein orthogonaler Tensor sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T &= \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{U}^T \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}^T. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Weiterhin wird der rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor durch

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (2.11)$$

und der linke Cauchy-Green Verzerrungstensor durch

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.12)$$

definiert.

Mit

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{d}\mathbf{x} \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\mathbf{X} \mathbf{d}\mathbf{X}) \quad (2.13)$$

$$= \mathbf{d}\mathbf{X} \cdot \left[\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \right] \mathbf{d}\mathbf{X} \quad (2.14)$$

$$= \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \left[\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \right] \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (2.15)$$

als einem Maß für die Verformung, läßt sich der Green'sche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.16)$$

bzw. der Almansi Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.17)$$

angeben. Wird der Green'sche Verzerrungstensor umgeformt, so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \frac{1}{2}\mathbf{H}^T \mathbf{H} \\ &= \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}\mathbf{H}^T \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit dem linearisierten Green'schen Verzerrungstensor $\tilde{\mathbf{E}}$.

Zur vollständigen Beschreibung der Kinematik des materiellen Körpers fehlen noch Größen, die die zeitliche Änderung der Verformung beschreiben. Dies geschieht über die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.19)$$

an jedem Punkt des Körpers. Daraus läßt sich ein Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} bestimmen:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \quad (2.20)$$

Dieser Geschwindigkeitsgradient kann in einen symmetrischen Anteil \mathbf{D} , die Deformationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad (2.21)$$

und einen unsymmetrischen Anteil \mathbf{W} , den Wirbeltensor

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad (2.22)$$

zerlegt werden [2, S.45].

Wirkt auf den materiellen Körper während der Bewegung ein Kraftsystem ein, existiert nach CAUCHY ein tensorielles Feld \mathbf{T} , der Cauchy'sche Spannungstensor, mit den Eigenschaften [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{T} \mathbf{n}, \quad |\mathbf{n}| = 1 \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^T. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Hierbei ist \mathbf{t} der Kraftvektor, der auf eine Schnittfläche wirkt.

Durch Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen bei vernachlässigbaren Volumenkraften, ergibt sich damit folgende Bedingung, der der Spannungstensor \mathbf{T} genügen muß:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Daneben existiert noch der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{S} , der über

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F})\mathbf{T} \quad (2.25)$$

aus dem Cauchy'schen Spannungstensor und dem Deformationsgradienten bestimmt wird.

2.2. Materialmodelle bei kleinen Deformationen

Im folgenden wird für kleine Deformationen ein Materialmodell zur Beschreibung von hyperelastischem Materialverhalten, und eines zur Beschreibung von starrplastischem Materialverhalten mit Verfestigung nach ARMSTRONG-FREDERICK kurz beschrieben [1]. Dabei wird von inkompressiblem, isotropem Material ausgegangen.

Aufgrund der Inkompressibilität wird

$$\det \mathbf{F} = 1 \quad (2.26)$$

und

$$\text{Sp} \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \approx \text{Sp} \mathbf{D} = 0. \quad (2.27)$$

Der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor und der Cauchy'sche Spannungstensor sind somit identisch.

2.2.1. Hyperelastizität

Für kleine Deformationen wird durch das Skalarprodukt

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}(t) \quad (2.28)$$

eine Spannungsleistung definiert. Durch Integrieren der Spannungsleistung über die Zeit kann die Verzerrungsenergie $h(t)$, die zu einem Zeitpunkt t im materiellen Körper gespeichert ist, bestimmt werden:

$$h(t) = \int_0^t \mathbf{W}(\tau) d\tau.$$

Ist diese Funktion für die Verzerrungsenergie bekannt, kann daraus durch

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \quad (2.29)$$

der Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{T} abgeleitet werden. Im Fall der Inkompressibilität gilt (p : hydrostatischer Druck)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}}. \quad (2.30)$$

2.2.2. Plastizität mit kinematischer Verfestigung

Für einen starrplastischen Körper ist die gesamte Dehnung gleich der plastischen Dehnung:

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \tilde{\mathbf{E}}_p. \quad (2.31)$$

Aufgrund der Inkompressibilität folgt außerdem

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \tilde{\mathbf{E}}^D, \quad (2.32)$$

wobei D für „Deviator“ steht, und folgendermaßen definiert ist:

$$\tilde{\mathbf{E}}^D = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{3}(\text{Sp } \tilde{\mathbf{E}})\mathbf{1}. \quad (2.33)$$

Nach [4, S. 17] kann durch die Fließfunktion

$$F(t) = \bar{F}(\mathbf{T}(t), \xi(t), k(t)) = \bar{f}(\mathbf{T}, \xi) - k, \quad (2.34)$$

$$\bar{f}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{T} - \xi)^D \cdot (\mathbf{T} - \xi)^D}, \quad (2.35)$$

eine Bedingung für plastische Belastung angegeben werden:

$$F = 0 \ \& \ B \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Entlastung} \\ \text{neutrale Belastung} \\ \text{Belastung} \end{cases}. \quad (2.36)$$

B steht hierbei für Belastungskriterium und ist durch

$$B = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \right)_{p=\text{konst}} = \left(\frac{3}{2k} (\mathbf{T} - \xi)^D \cdot \dot{\mathbf{T}} \right)_{p=\text{konst}}, \quad (2.37)$$

mit ξ als Tensor der kinematischen Verfestigung und k als Variable der isotropen Verfestigung, definiert. Da in dieser Arbeit von rein kinematischer Verfestigung ausgegangen wird, ist die Fließgrenze k eine Materialkonstante.

Wird eine plastische Bogenlänge

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}} d\tau = \int_0^t \|\dot{\mathbf{E}}\|_D d\tau$$

$$\Rightarrow \dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}}, \quad (2.38)$$

mit der deviatorischen Norm $\|\cdot\|_D$, eingeführt, so erhält man die Fließregel

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{cases} \dot{s} \mathbf{R}_p & \text{für Belastung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.39)$$

mit

$$\mathbf{R}_p = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{3}{2k} (\mathbf{T} - \xi)^D \quad (2.40)$$

als Richtung der plastischen Verformungsänderung. Wegen $\xi = \xi^D$ folgt daraus für den Cauchy'schen Spannungstensor

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + \xi + \frac{2k}{3} \frac{\dot{\mathbf{E}}}{\dot{s}}, \quad (2.41)$$

wobei p eine unbekannter Skalar ist, der aus einer zusätzlichen Bedingung gewonnen werden muß.

Die plastische innere Variable ξ kann bei kinematischer Verfestigung nach ARMSTRONG-FREDERICK aus der Evolutionsgleichung

$$\dot{\xi} = c \dot{\mathbf{E}} - b \dot{s} \xi \quad (2.42)$$

bestimmt werden. c und b sind dabei Materialkonstanten, wobei $b = 0$ den Fall der linearen kinematische Verfestigung ergibt.

2.3. Verallgemeinerung auf große Deformationen

Bei großen Deformationen können die im vorigen Abschnitt vorgestellten Gleichungen nicht verwendet werden. Es ist insbesondere nicht mehr erlaubt, den linearisierten Green'schen Verzerrungstensor zu benutzen, der nur für kleine Deformationen ein zulässiges Maß für die Verzerrung ist. Da der Cauchy'sche Spannungstensor in der Momentankonfiguration definiert ist, wird statt dessen die zeitliche Ableitung des linearisierten Green'schen Verzerrungstensor $\dot{\mathbf{E}}$ durch eine Ableitung des Almansi-Verzerrungstensors, der ebenfalls in der Momentankonfiguration definiert ist, ersetzt.

Aufgrund der zeitlichen Änderung der Momentankonfiguration, muß bei Größen, die in der Momentankonfiguration definiert sind, eine neue Zeitableitung eingeführt werden. Diese zeitliche Ableitung des Spannungstensors, die objektive Spannungsgeschwindigkeit, kann mit Hilfe des von HAUPT und TSAKMAKIS entwickelten Konzeptes der dualen Variablen gewonnen werden.

2.3.1. Duale Variablen

Auf Grundlage von materiellen Linienelementen (Familie 1)

Nach (2.5) wird ein materielles Linienelement der Bezugskonfiguration durch

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.43)$$

in ein materielles Linienelement der Momentankonfiguration transformiert. Somit kann nach (2.16) und (2.17) der Verzerrungstensor der Momentankonfiguration (Almansi-Verzerrungstensor \mathbf{A}) durch die lineare Transformation

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.44)$$

aus dem Green'schen Verzerrungstensor gewonnen werden. Außerdem existiert in der Bezugskonfiguration ein zum Green'schen Verzerrungstensor dualer Spannungstensor, der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$.

Das Konzept der dualen Variablen verlangt nun die Invarianz des inneren Produktes der zueinander dualen Verzerrungs- und Spannungstensoren, d.h.

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} = \Sigma \cdot \mathbf{A}, \quad (2.45)$$

mit dem zum Almansi-Verzerrungstensor dualen Spannungstensor Σ . Daraus folgt sofort der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor [5, S.183]

$$\Sigma \equiv \mathbf{S} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T}. \quad (2.46)$$

Die duale zeitliche Ableitung des Verzerrungstensors ergibt sich aus der Invarianz der Spannungsleistung

$$\dot{W} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{A}}, \quad (2.47)$$

mit $\overset{\Delta}{\mathbf{A}}$ als dualer zeitlicher Ableitung des Almansi-Verzerrungstensors. Hieraus folgt

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \mathbf{F}^{T-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^T. \quad (2.48)$$

Man erkennt, daß der Verzerrungstensor der Momentankonfiguration und dessen Ableitung durch die gleiche Transformation aus dem Verzerrungstensor der Bezugs-konfiguration und dessen Ableitung gewonnen wird.

Umrechnen von (2.48) ergibt

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L} = \mathbf{D}. \quad (2.49)$$

Analog läßt sich aus der Invarianz der komplementären Spannungsleistung

$$\overline{\dot{W}} = \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \overset{\vee}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\vee}{\mathbf{A}} \quad (2.50)$$

die ebenfalls forminvariante duale zeitliche Ableitung des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensors herleiten:

$$\overset{\vee}{\mathbf{S}} = \mathbf{F} \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{T}}} \mathbf{F}^T = \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L} \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{L}^T. \quad (2.51)$$

Auf Grundlage von Normalen an materiellen Flächen (Familie 2)

Eine in der Bezugskonfiguration durch

$$\Phi(\mathbf{X}) = c \quad (2.52)$$

definierte materielle Oberfläche besitzt in der Momentankonfiguration die zeitabhängige Darstellung

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = c. \quad (2.53)$$

Durch $\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}$ und $\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}}$ werden zwei Normalenvektoren zu diesen Flächen in der Bezugs- und Momentankonfiguration definiert. Zwischen beiden besteht folgende Beziehung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}^{T-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.54)$$

Mit dieser Beziehung läßt sich, analog zu (2.13), ein Maß für die Verzerrung definieren:

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (2.55)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{T-1} - \mathbf{1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.56)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F} \mathbf{F}^T) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.57)$$

Aus (2.56) folgt der in der Bezugskonfiguration definierte Piola'sche Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{T-1} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{1}), \quad (2.58)$$

und aus (2.57) der in der Momentankonfiguration definierte Finger'sche Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F} \mathbf{F}^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}). \quad (2.59)$$

Außerdem ergibt sich, daß der Finger'sche Verzerrungstensor durch die lineare Transformation

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F}^T \quad (2.60)$$

aus dem Piola'schen Verzerrungstensor gewonnen werden kann, und somit das Konzept der dualen Variablen auf diese Verzerrungstensoren anwendbar ist.

Ist $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ der duale Spannungstensor zum Piola'schen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, folgt aus der Invarianz des inneren Produktes von Spannungs- und Verzerrungstensor für den zum Finger'schen Verzerrungstensor dualen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}^{T-1} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.61)$$

Damit ergeben sich die forminvarianten dualen zeitlichen Ableitungen

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{F} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{F}^T = \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{L}^T = -\mathbf{D} \quad (2.62)$$

und

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{T-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}. \quad (2.63)$$

Zusätzlich ergibt sich aus der Invarianz der Spannungsleistung

$$\dot{W} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.64)$$

mit (2.62) für den zum Finger'schen Verzerrungstensor dualen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{S}. \quad (2.65)$$

2.3.2. Hyperelastizität

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, kann die Spannungsleistung bei großen Deformationen durch

$$W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \quad (2.66)$$

bestimmt werden. Da die Theorie der Hyperelastizität nur von der Spannungsleistung ausgeht, spielt es aufgrund der Invarianz der Spannungsleistung (2.66) keine Rolle, ob sie aus Größen der Familie 1 oder der Familie 2 bestimmt wird.

Ist h bekannt, läßt sich nach [2, S.71] bei inkompressiblem Materialverhalten ($\det \mathbf{F} = 1$) die Spannung

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{S} = -p\mathbf{1} + 2\left(\frac{\partial h}{\partial I_1}\right)\mathbf{B} - 2\left(\frac{\partial h}{\partial I_2}\right)\mathbf{B}^{-1} \quad (2.67)$$

bestimmen. Die Größe p muß dabei aus einer zusätzlichen Randbedingung gewonnen werden.

Von MOONEY wurde für h die Funktion

$$h = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (2.68)$$

vorgeschlagen. Diese Funktion stellt den einfachsten Ansatz dar, der beide Variablen I_1 und I_2 berücksichtigt. Dies ergibt zur Bestimmung des Spannungstensors die Gleichung

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} \quad (2.69)$$

für das sogenannte MOONEY-RIVLIN Material. Dabei sind C_1 und C_2 Materialparameter.

2.3.3. Plastizität mit kinematischer Verfestigung

Im Gegensatz zur Hyperelastizität spielt es bei der Plastizität mit kinematischer Verfestigung eine Rolle, ob Größen der ersten oder zweiten Familie verwendet werden, da dieses Modell inkrementell formulierte Materialgleichungen enthält. Die einfachste Form einer Materialgleichung für die kinematische Verfestigung ist der lineare Ansatz. Dies ist als Sonderfall ($b = 0$) im ARMSTRONG-FREDERICK-Ansatz enthalten. Aus Gründen der praktischen Bedeutung werden wir später bei den numerischen Untersuchungen neben diesem Sonderfall auch Fälle mit $b > 0$ diskutieren.

Familie 1

In den Gleichungen (2.41), (2.38) und (2.42) wird die zeitliche Ableitung des linearisierten Green'schen Verzerrungstensors $\dot{\hat{\mathbf{E}}}$ durch die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} und die zeitliche Ableitung des Spannungstensors $\dot{\xi}$ durch die duale zeitliche Ableitung $\overset{\nabla}{\xi}$ aus (2.51) ersetzt.

Somit ergeben sich bei Inkompressibilität die drei Gleichungen

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \xi + \frac{2k}{3} \frac{\mathbf{D}}{\dot{s}}, \quad (2.70)$$

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}, \quad (2.71)$$

$$\overset{\nabla}{\xi} = \dot{\xi} - \mathbf{L}\xi - \xi \mathbf{L}^T = c\mathbf{D} - b\dot{s}\xi \quad (2.72)$$

zur Bestimmung der Spannungen, wobei hier erneut die Größe p aus einer zusätzlichen Randbedingung gewonnen werden muß.

Familie 2

Hierbei wird in den Gleichungen (2.41), (2.38) und (2.42) die zeitliche Ableitung des linearisierten Green'schen Verzerrungstensors $\dot{\hat{\mathbf{E}}}$ durch die duale Zeitableitung des Finger'schen Verzerrungstensors $\overset{\Delta}{\alpha}$ und die zeitliche Ableitung des Spannungstensors $\dot{\xi}$ durch die zugehörige duale zeitliche Ableitung $\overset{\nabla}{\zeta}$ ersetzt.

Dies ergibt bei Inkompressibilität

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\zeta} + \frac{2k}{3} \frac{\Delta}{\dot{s}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.73)$$

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.74)$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta} \mathbf{L} = c \frac{\Delta}{\dot{s}} \boldsymbol{\alpha} - b \dot{s} \boldsymbol{\zeta}. \quad (2.75)$$

Werden die Gleichungen (2.63) und (2.65) berücksichtigt, erhält man schließlich für die zweite Familie zur Bestimmung der Spannung:

$$\mathbf{T} = -\hat{p}\mathbf{1} + \boldsymbol{\xi} + \frac{2k}{3} \frac{\mathbf{D}}{\dot{s}}, \quad (2.76)$$

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}, \quad (2.77)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \mathbf{L} = c \mathbf{D} - b \dot{s} \boldsymbol{\xi}, \quad (2.78)$$

mit der zusätzlichen unbekanntem Größe \hat{p} .

Kapitel 3

Numerische Verfahren

Bei Verwendung der in Kapitel 2 vorgestellten Materialmodelle ergeben sich Gleichungen, die nicht immer analytisch gelöst und geschlossen dargestellt werden können. Diese Lösungen müssen numerisch bestimmt werden.

Für die in Kapitel 4 auftretenden Gleichungssysteme werden Verfahren zur numerischen Integration und zur Lösung eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erster Ordnung benötigt, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

3.1. Numerische Integration mit der Trapezregel

Gesucht ist eine Näherungslösung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx, \quad a, b = \text{konst.} \quad (3.1)$$

Hierzu wird das Integrationsintervall $[a, b]$ in N gleich große Bereiche unterteilt und die Funktion $f(x)$ stückweise durch Geraden ersetzt. Dabei genügt es, wenn die Funktionswerte an den Bereichsgrenzen bekannt sind.

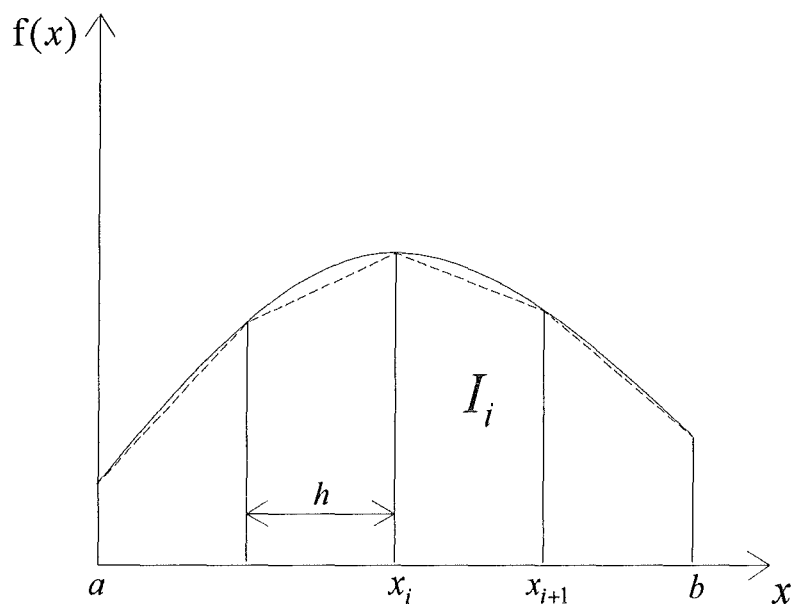


Abbildung 3.1: Prinzip der Trapezregel (durchgezogen: Funktion $f(x)$, gestrichelt: Näherung durch Trapeze)

Somit gelten folgende Zusammenhänge:

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad (3.2)$$

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N. \quad (3.3)$$

Der Wert des Integrals entspricht dem Flächeninhalt unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Diesen kann man durch die Flächeninhalte I_i der Trapeze annähern, woraus die Näherungslösung

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) = \sum_{i=0}^{N-1} I_i, \quad (3.4)$$

$$\text{mit } I_i = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})], \quad (3.5)$$

und daraus

$$\begin{aligned}
 T(h) &= \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\
 &= h \cdot \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

folgt. Nach [6, S.220ff] existiert für die Näherungslösung folgende Entwicklung nach dem Diskretisierungsparameter (Euler-Maclaurinsche Summationsformel):

$$T(h) = \int_a^b f(x) dx + c_2 h^2 + c_4 h^4 + \dots + c_{2r} h^{2r} + O(h^{2r+2}) . \tag{3.7}$$

Es handelt sich somit um ein Verfahren der Ordnung zwei, d.h. der Fehler geht bei Intervallverkleinerung mit h^2 gegen Null, und für $h=0$ ergibt sich die exakte Lösung.

3.2. Modifizierte Mittelpunkregel zur Lösung von Anfangswertproblemen

Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.8a}$$

Besteht das Problem aus einem System von S Differentialgleichungen sind y und f als Vektoren zu verstehen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}'(x) &= \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \\
 \text{mit } \mathbf{y} &= (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(S)})^T, \\
 \mathbf{f} &= (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(S)})^T.
 \end{aligned} \tag{3.7b}$$

Die folgenden Überlegungen werden nur für den Fall einer Differentialgleichung durchgeführt; sie gelten analog für den Fall eines Differentialgleichungssystems.

Ersetzt man die Ableitung von y durch den symmetrischen Differenzenquotienten

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x-h) - y(x+h)}{2h}, \quad (3.8)$$

so ergibt sich die Rekursionsformel

$$\eta_{n+1} = \eta_{n-1} + 2hf(x_n, \eta_n) \quad (3.9)$$

für die Mittelpunkregel, mit der Schrittweite h , der Näherungslösung $\eta(x, h)$ und

$$\begin{aligned} \eta_n &= \eta(x_n, h), \\ x_i &= x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Hierzu ist ein zweiter Anfangswerte y_1 erforderlich. Wird dieser mit dem Euler'schen Polygonzugverfahren ermittelt, ergibt sich zur Bestimmung einer Näherungslösung $S_h(x)$ an der Stelle $x = x_0 + 2nh$ der Algorithmus der modifizierten Mittelpunkregel (siehe Abb. 3.2)

$$\begin{aligned} \eta_0 &= y_0 \\ \eta_1 &= \eta_0 + h \cdot f(x_0, \eta_0) \\ \eta_{i+1} &= \eta_{i-1} + 2h \cdot f(x_i, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2n \\ S_h(x) &= \frac{1}{4}(\eta_{2n-1} + 2\eta_{2n} + \eta_{2n+1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durch den Glättungsschritt $S_h(x)$ wird die schwache Instabilität der Mittelpunkregel beseitigt [6, S.250].

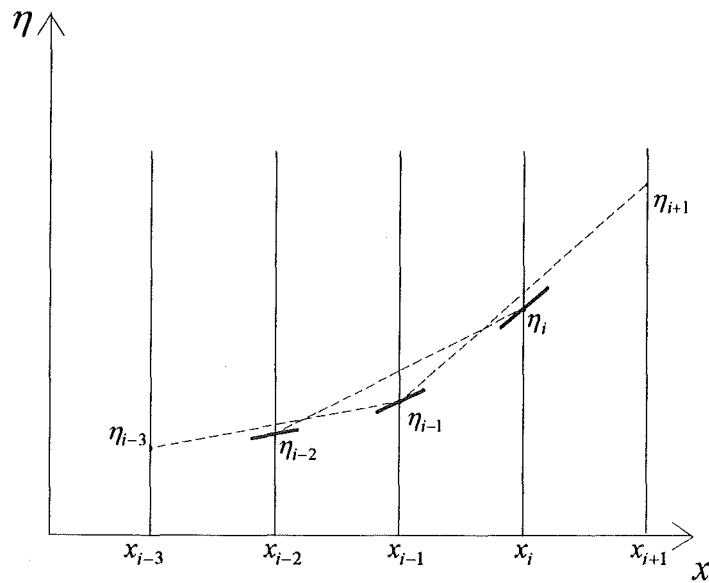


Abbildung 3.2: Grafische Darstellung der Mittelpunkregel

Die dadurch erhaltene Lösung $S_h(x)$ besitzt eine Entwicklung nach der Schrittweite h der Form

$$S_h(x) = y(x) + s_2(x)h^2 + s_4(x)h^4 + \dots \quad (3.11)$$

Zum Nachweis dieser Entwicklung wird das Zwei-Schritt-Verfahren in ein Ein-Schritt-Verfahren umgewandelt, für das nach [7] die Entwicklung der Lösung bekannt ist. Dazu wird der Algorithmus der modifizierten Mittelpunkregel (3.10) in Terme mit Geraden und Ungeraden Indizes umgeschrieben. Werden folgende neuen Größen eingeführt [8, S.228]

$$\bar{h} = 2h, \quad (3.12)$$

$$\bar{x}_k = x_0 + k\bar{h} = x_0 + 2kh, \quad (3.13)$$

$$u_k = \eta_{2k}, \quad (3.14)$$

$$v_k = \frac{1}{2} \cdot (\eta_{2k-1} + \eta_{2k+1}), \quad (3.15)$$

$$\text{mit } u_0 = v_0 = y_0, \quad (3.16)$$

kann das Verfahren der modifizierten Mittelpunkregel (3.10) auch durch

$$u_{k+1} = u_k + \bar{h} \cdot f\left(\bar{x}_k + \frac{\bar{h}}{2}, v_k + \frac{\bar{h}}{2} \cdot f(\bar{x}_k, u_k)\right) \quad (3.17)$$

$$v_{k+1} = v_k + \frac{\bar{h}}{2} \cdot (f(\bar{x}_{k+1}, u_{k+1}) + f(\bar{x}_k, u_k)) \quad (3.18)$$

dargestellt werden (siehe Abb. 3.3) [8, S.271].

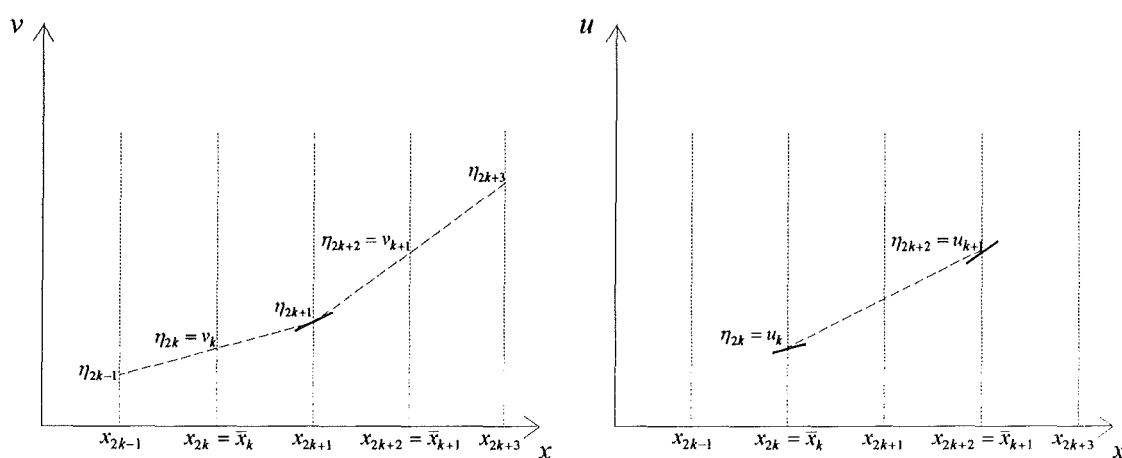


Abbildung 3.3: Darstellung der modifizierten Mittelpunkregel getrennt nach Geraden und Ungeraden Indizes.

Für $\bar{h} \rightarrow 0$ ergeben sich daraus zwei Differentialgleichungen

$$u' = f(x, v), \quad (3.19a)$$

$$v' = f(x, u), \quad (3.19b)$$

$$u(0) = v(0) = y_0, \quad (3.19c)$$

mit der exakten Lösung

$$u(x) = v(x) = y(x). \quad (3.20)$$

Werden die zwei Lösungen u und v zu einem Vektor

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

zusammengefaßt, können (3.17) und (3.18) durch ein Ein-Schritt-Verfahren

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \bar{h} \cdot \mathbf{g}(\bar{x}_{k+1}, \bar{x}_k, \mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{z}_k, \bar{h}) \quad (3.22)$$

dargestellt werden, wobei auch die Funktion \mathbf{g} als Vektor zu verstehen ist.

Da die Funktion \mathbf{g} der Bedingung

$$\mathbf{g}(\bar{x}_{k+1}, \bar{x}_k, \mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{z}_k, \bar{h}) = \mathbf{g}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{k+1}, -\bar{h}) \quad (3.23)$$

genügt, ist das Verfahren symmetrisch [7], und die Funktionen u und v besitzen eine Entwicklung nach der Schrittweite \bar{h} der Form

$$u_{\bar{h}}(x) = y(x) + a_2(x) \cdot \bar{h}^2 + a_4(x) \cdot \bar{h}^4 + \dots + a_{2n}(x) \cdot \bar{h}^{2n} + O(\bar{h}^{2n+2}) \quad (3.24)$$

$$v_{\bar{h}}(x) = y(x) + b_2(x) \cdot \bar{h}^2 + b_4(x) \cdot \bar{h}^4 + \dots + b_{2n}(x) \cdot \bar{h}^{2n} + O(\bar{h}^{2n+2}) \quad (3.25)$$

Aus (3.14), (3.24) und (3.25) ergibt sich somit, unter der Voraussetzung einer geraden Schrittzahl (d.h. $x = x_0 + 2nh$), eine Entwicklung von $\eta(x, h)$ nach geraden Potenzen der Schrittweite h .

Für $S_h(x)$ aus (3.10) kann ebenfalls gezeigt werden, daß eine Entwicklung nur nach geraden Potenzen von h existiert:

Nach Gleichung (3.15) gilt

$$v_k = \frac{1}{2} \cdot (\eta_{2k+1} + \eta_{2k-1}), \quad (3.26)$$

und es ergibt sich

$$S_h(x) = \frac{1}{2} \cdot (u_n + v_n), \quad (3.27)$$

womit auch die Entwicklung nach h^2 sofort angegeben werden kann:

$$\begin{aligned} S_h(x) &= y(x) + \frac{1}{2}(a_2(x) + b_2(x)) \cdot h^2 + \frac{1}{2}(a_4(x) + b_4(x)) \cdot h^4 + \dots \\ &= y(x) + s_2(x) \cdot h^2 + s_4(x) \cdot h^4 + \dots + s_{2n}(x) \cdot \bar{h}^{2n} + O(\bar{h}^{2n+2}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3. Extrapolationsverfahren

Das Extrapolationsverfahren ermöglicht es, die Genauigkeit einer Näherungslösung zu verbessern, falls für diese Näherung eine Entwicklung nach dem Diskretisierungsparameter h existiert und das exakte Ergebnis für $h \rightarrow 0$ erhalten wird.

Die beiden zuvor vorgestellten Verfahren zur numerischen Integration und Lösung eines Anfangswertproblems besitzen, wie gezeigt, eine Entwicklung der Form

$$A(h) = a_0 + a_2 \cdot h^2 + a_4 \cdot h^4 + \dots + a_{2n} \cdot h^{2n} + O(h^{2n+2}) \quad (3.29)$$

mit der exakten Lösung a_0 , und erfüllen damit die Voraussetzungen des Extrapolationsverfahrens.

Wird für K verschiedene Schrittweiten $h_1, h_2, h_3, \dots, h_K$, mit

$$h_1 > h_2 > \dots > h_K > 0,$$

jeweils eine Näherungslösung $A(h_k)$ bestimmt, läßt sich aus den Wertepaaren $(h_k^2, A(h_k))$ ein Polynom vom Grad $(K-1)$ approximieren und daraus ein $A(h=0)$ als neue Näherung extrapolieren (Abb. 3.4).

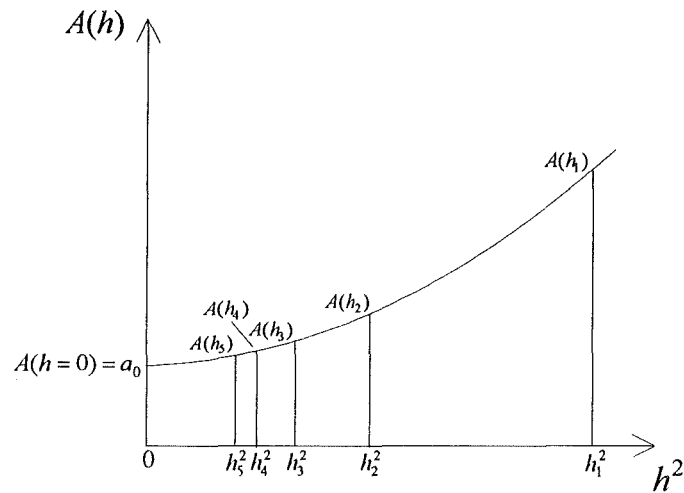


Abbildung 3.4: Darstellung des Extrapolationsverfahrens für $K = 5$ und $h_k = \frac{h_1}{k}$

Die Bestimmung dieser Polynome gelingt durch das iterative Verfahren nach AITKEN und NEVILLE [9, S. 187ff].

Für jede Schrittweite h_k wird eine Näherungslösung $A(h_k)$ bestimmt und $A_{k,1}$ zugeordnet

$$A_{k,1} = A(h_k). \quad (3.30)$$

Danach werden die Punkte $(h_1^2, A(h_1))$ und $(h_2^2, A(h_2))$ in der $h^2 - A(h)$ -Ebene durch ein Polynom $I_{12}(h^2)$ ersten Grades in h^2 interpoliert:

$$I_{12}(h^2) = \frac{1}{h_2^2 - h_1^2} \cdot \begin{vmatrix} A_{1,1} & h_1^2 - h^2 \\ A_{2,1} & h_2^2 - h^2 \end{vmatrix}. \quad (3.31)$$

Für $h = 0$ ergibt sich daraus eine neue Näherung

$$A_{2,2} = I_{12}(0) = \frac{A_{1,1} \cdot h_2^2 - A_{2,1} \cdot h_1^2}{h_2^2 - h_1^2}.$$

Analog kann für die Punkte $(h_2^2, A(h_2))$ und $(h_3^2, A(h_3))$ ein interpolierendes Polynom $I_{23}(h^2)$

$$I_{23}(h^2) = \frac{1}{h_3^2 - h_2^2} \begin{vmatrix} A_{2,1} & h_2^2 - h^2 \\ A_{3,1} & h_3^2 - h^2 \end{vmatrix} \quad (3.32)$$

angegeben werden. Durch die drei Wertepaare $(h_1^2, A(h_1))$, $(h_2^2, A(h_2))$ und $(h_3^2, A(h_3))$ läßt sich aber auch ein Polynom $I_{123}(h^2)$

$$I_{123}(h^2) = \frac{1}{h_3^2 - h_1^2} \begin{vmatrix} I_{12}(h^2) & h_1^2 - h^2 \\ I_{23}(h^2) & h_3^2 - h^2 \end{vmatrix} \quad (3.33)$$

zweiten Grades in h^2 eindeutig angeben, woraus eine Näherung $A_{3,3} = I_{123}(0)$ bestimmt werden kann.

Das Verfahren läßt sich nach diesem Schema für höhere Ordnungen fortsetzen. Es kann durch folgendes Tableau zusammengefaßt werden:

$$\begin{array}{cccccc} A_{1,1} & & & & & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & & & & \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & & & \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

wobei die einzelnen Näherungen durch

$$\left. \begin{array}{l} A_{k,1} = A(h_k) \\ A_{k,j+1} = \frac{1}{h_k^2 - h_{k-j}^2} \begin{vmatrix} A_{k-1,j} & h_{k-j}^2 \\ A_{k,j} & h_k^2 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K \\ j = 1, 2, \dots, k-1 \end{array} \quad (3.34a)$$

bestimmt werden. Ergeben sich die Schrittweiten h_k durch Division einer Grundschrittweite H durch positive, ganzzahlige n_k mit $n_1 < n_2 < \dots < n_K$ (d.h. $h_k = \frac{H}{n_k}$), kann (3.34a) in eine leichter zu programmierende Form gebracht werden:

$$\left. \begin{aligned} A_{k,1} &= A(h_k) \\ A_{k,j+1} &= A_{k,j} + \frac{A_{k,j} - A_{k-1,j}}{\left(\frac{n_k}{n_{k-j}}\right)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 1, 2, \dots, K \\ j &= 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (3.34b)$$

Zur Wahl der n_k existieren verschiedene Vorschläge. Es werden jedoch hauptsächlich drei davon verwendet:

$$\text{Romberg-Reihe:} \quad \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\} \quad (3.35a)$$

$$\text{Bulirsch-Reihe} \quad \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, \dots\} \quad (3.35b)$$

$$\text{Harmonische Reihe} \quad \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}. \quad (3.35c)$$

Für eine Näherung $A_{k,j}$ aus (3.34b) existiert eine Entwicklung der Form (siehe Anhang A)

$$A_{k,j} = a_0 + b_j \cdot \frac{H^{2j}}{\left(\prod_{p=k-j+1}^k n_p\right)^2} + O(H^{2j+2}). \quad (3.36)$$

Durch

$$e_{k,j} = A_{k,j} - a_0 \quad (3.37)$$

wird einem Näherungswert $A_{k,j}$ ein Diskretisierungsfehler zugeordnet. Für eine skalare Norm

$$\varepsilon_{k,j} = \|e_{k,j}\| \quad (3.38)$$

dieses Fehlers existiert somit nach (3.36) die Abschätzung

$$\varepsilon_{k,j} = \gamma_{k,j} \tau_k H^{2j}, \quad (3.39)$$

$$\text{mit } \gamma_{k,j} = \left(\prod_{p=k-j+1}^k n_p \right)^{-2}. \quad (3.40)$$

Aus (3.39) folgt der Zusammenhang

$$\varepsilon_{k+1,j} = \left(\frac{n_{k-j+1}}{n_{k+1}} \right)^2 \cdot \varepsilon_{k,j}, \quad (3.41)$$

und es wird deutlich, daß der Diskretisierungsfehler in einer Spalte ($j = \text{const}$) des Extrapolationsschemas mit zunehmender Zeilenzahl k abnimmt.

In einer Zeile ($k = \text{const}$) des Extrapolationsschemas nimmt der Diskretisierungsfehler wegen (3.36) mit zunehmender Spaltenzahl ebenfalls ab

$$\varepsilon_{k,j+1} < \varepsilon_{k,j}. \quad (3.42)$$

In Zeile k besitzt somit $T_{k,k}$ den kleinsten Diskretisierungsfehler.

Da die exakte Lösung im allgemeinen nicht bekannt ist, kann auch der Diskretisierungsfehler nur abgeschätzt werden. Dazu wird in (3.37) die exakte Lösung a_0 durch die Näherung mit dem kleinsten Fehler (d.h. $A_{k,k}$ bei k berechneten Zeilen) ersetzt. Der Diskretisierungsfehler einer Näherung $A_{k,j}$ wird somit durch

$$\varepsilon_{k,j} = \|A_{k,j} - A_{k,k}\|. \quad (3.43)$$

abgeschätzt.

3.3.1. Anwendung des Extrapolationsverfahrens auf die Trapezregel

Für die Trapezregel existiert nach (3.7) eine Entwicklung nach geraden Potenzen von h . Somit ist das Extrapolationsverfahren anwendbar. Diese Integrationsmethode ist auch als „Romberg-Integration“ bekannt.

Bezeichne a die untere und b die obere Grenze des Integrals, ergibt sich eine mögliche Grundschriftweite zu

$$H = b - a, \quad (3.44)$$

und daraus

$$h_j = \frac{H}{n_j} = \frac{b-a}{n_j}. \quad (3.45)$$

Für die n_k verwendet man gewöhnlich die Romberg-Reihe (3.35a) $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$. Diese Reihe liefert zwei Vorteile bei der Berechnung der Näherungslösung des Integrals:

1. Zur Berechnung der Näherungslösung $T(h_j)$ kann auf $T(h_{j-1})$ zurückgegriffen werden. Wegen

$$\begin{aligned} n_j &= 2 \cdot n_{j-1}, \\ \text{bzw. } h_j &= \frac{h_{j-1}}{2}, \end{aligned}$$

gilt

$$T(h_j) = T\left(\frac{h_{j-1}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot T(h_{j-1}) + h_j \cdot [f(a+h_j) + f(a+3h_j) + \dots + f(b-h_j)]. \quad (3.46)$$

2. Liegen die Funktionswerte $f(x)$ nur an N Stellen vor, und gilt $N = \max(n_j)$, muß die Reihe n_j zusätzlich die Bedingung

$$\frac{N}{n_j} \in \mathbb{Z}_+^* \quad (3.47)$$

erfüllen, da andernfalls zur Berechnung einer Näherungslösung auf einen Funktionswert zugegriffen wird, der nicht vorliegt. Diese Eigenschaft wird durch die Romberg-Reihe erfüllt.

Das Extrapolationsverfahren wird beendet, wenn entweder zwei aufeinanderfolgende Fehler $\varepsilon_{k,k-1}$ und $\varepsilon_{k+1,k}$ kleiner einer vorgegebenen Fehlergrenze eps sind, oder die Schrittweite nicht mehr weiter verkleinert werden kann, weil keine weiteren Funktionswerte vorliegen. Die größte Ordnung k_{max} des Extrapolationsschemas wird somit durch

$$k_{max} = \log_2 N + 1 \quad (3.48)$$

festgelegt.

Beispiel:

Gesucht ist die Näherungslösung des Integrals

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{\pi} = 0.318309886$$

mit $H = 1$ und der Romberg-Reihe für n_k .

Das Rombergverfahren liefert die folgenden Näherungsergebnisse:

i	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$	$T_{i,4}$
1	0.000000000			
2	0.250000000	0.333333333		
3	0.301776695	0.319035594	0.318082411	
4	0.314208718	0.318352726	0.318307201	0.318310769

Obwohl der Fehler für $T_{4,1}$ noch 1.29% beträgt, sinkt er durch das Extrapolationsverfahren auf 0.0003%, ohne daß zusätzliche Funktionswerte benötigt werden.

3.3.2. Anwendung des Extrapolationsverfahrens auf die modifizierte Mittelpunkregel

Wie für die Trapezregel existiert nach (3.28) auch für die Näherungslösung der modifizierten Mittelpunkregel eine Entwicklung nach geraden Potenzen von h . Somit kann eine genauere Näherungslösung eines Anfangswertproblems der Form (3.7) mit dem Algorithmus des Extrapolationsverfahrens (3.34) erhalten werden (GBS-Algorithmus von GRAGG, BULIRSCH und STOER).

Das Vorgehen unterscheidet sich hierbei jedoch von dem Vorgehen bei der Romberg-Integration. Im Gegensatz zur Berechnung eines Integrals, bei der eine Lösung gesucht ist, werden bei einem Anfangswertproblem Funktionen gesucht, deren Funktionswerte, ausgehend von der Anfangsbedingung, schrittweise bestimmt werden.

Aus der Anfangsbedingung y_0 läßt sich mit Hilfe der modifizierten Mittelpunkregel eine Näherung $y_h(x)$ an der Stelle $x^{(1)} = x_0 + n_k h_k$ für ganzzahlige n bestimmen. Sei H_x die Grundschriftweite in x -Richtung, ergeben sich die Schrittweiten h_k zu

$$h_k = \frac{H_x}{n_k},$$

und daraus

$$A_{k,1} = S_{h_k}(x_0 + H_x). \quad (3.49)$$

Hierbei sind für n_j nur gerade Zahlen zugelassen.

Als günstigste Reihe erwies sich die harmonische Reihe (nur mit geraden Zahlen) $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$, da bei Verwendung der Romberg- oder Bulirsch-Reihe der Rechenaufwand für höhere Ordnungen stark ansteigt.

Die größte Ordnung k_{max} des Extrapolationsverfahrens ist hierbei nicht durch die Anzahl von Funktionswerten beschränkt, sondern wird durch den verfügbaren Speicherplatz begrenzt, der insbesondere bei Differentialgleichungssystemen sehr schnell erschöpft ist.

Ist somit an der Stelle $x^{(1)} = x_0 + H_x^{(1)}$ eine Näherung bekannt, kann auf die gleiche Weise die Lösung an der Stelle $x^{(2)} = x^{(1)} + H_x^{(2)}$ berechnet werden, indem $y(x^{(1)})$ als neuer Startwert des GBS-Verfahrens verwendet wird. Hierbei ist die neue Grundschriftweite $H_x^{(2)}$ im allgemeinen nicht gleich der vorigen Schrittweite $H_x^{(1)}$.

3.3.3. Schrittweitensteuerung und Anpassung der Ordnung

Bei der Wahl der Grundschriftweite H_x treten Schwierigkeiten auf. Ist sie zu klein, wird viel Rechenzeit benötigt, um Ergebnisse für $x \gg H_x$ zu bestimmen. Andererseits ist bei großer Schrittweite H_x die Genauigkeit des Ergebnisses wegen (3.38) häufig nicht ausreichend.

Eine optimale Schrittweite H_x sollte somit möglichst groß sein, aber klein genug, um den Fehler kleiner einer Grenze eps zu halten. Diese optimale Schrittweite hängt vom Differentialgleichungssystem ab und kann während der Lösung des Anfangswertproblems für jeden Lösungsschritt neu bestimmt werden.

Wurden K Zeilen des Extrapolationsschemas berechnet, ergibt sich nach (3.39) der Diskretisierungsfehler zu

$$err_k = \|A_{K,K-1} - A_{K,K}\|.$$

Soll bei einem Differentialgleichungssystem jeder Fehler unterhalb einer Schranke eps liegen, wird die Maximumnorm verwendet:

$$\|A_{K,K-1} - A_{K,K}\| = \max_{s=1,\dots,S} \left| \frac{A_{K,K-1}^{(s)} - A_{K,K}^{(s)}}{eps^{(s)}} \right|. \quad (3.50)$$

Somit wird $err_k \leq 1$ falls $\varepsilon_{K,K-1} \leq eps$.

Die Fehlerschranke eps wird dabei wie folgt definiert:

$$eps^{(s)} = Atol + |\eta_0^{(s)}| \cdot Rtol. \quad (3.51)$$

Dadurch wird vermieden, daß einerseits bei sehr großen Zahlen die Genauigkeit des Ergebnisses zu groß wird ($Rtol$), und andererseits bei kleinen Zahlen die Fehlerschranke die Rechengenauigkeit unterschreitet ($Atol$).

Aus (3.39) folgt für den Fehler err_k zusätzlich die Abschätzung

$$\varepsilon_{K,K-1} = err_k \cdot eps = \gamma_{K,K-1} \cdot \tau_{K-1} \cdot H^{2K-2}, \quad (3.52)$$

mit der aktuellen Schrittweite H . Gesucht ist die optimale Schrittweite H_K , für die, bei gleicher Ordnung K , der Diskretisierungsfehler gleich der Fehlergrenze eps ist:

$$eps = \gamma_{K,K-1} \cdot \tau_{K-1} \cdot H_K^{2K-2}. \quad (3.53)$$

Aus (3.52) und (3.53) folgt damit für die Grundschriftweite in Abhängigkeit von der Ordnung K

$$H_K = H \cdot \left(\frac{eps}{\epsilon_{K,K-1}} \right)^{\frac{1}{2K-2}} = H \cdot \left(\frac{1}{err_K} \right)^{\frac{1}{2K-2}}. \quad (3.54)$$

Neben der Grundschriftweite kann beim GBS-Verfahren auch die Ordnung, d.h. die Spalten- und Zeilenzahl des Extrapolationsschemas, von Schritt zu Schritt variiert werden. Es ist damit möglich, die Ordnung K so zu wählen, daß die zur Bestimmung der Näherungslösung notwendige Arbeit pro Berechnungsschritt minimal wird.

Dazu wird ein Maß für die Arbeit eingeführt. Um $A_{K,K}$ zu bestimmen, sind F_K Funktionsaufrufe nötig, wobei F_k rekursiv berechnet wird:

$$\begin{aligned} F_1 &= n_1 + 1, \\ F_{k+1} &= F_k + n_{k+1} + 1. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die Arbeit pro Basisschritt W_K kann dann bestimmt werden, indem F_K durch die optimale Grundschriftweite H_K geteilt wird:

$$W_K = \frac{F_K}{H_K}. \quad (3.56)$$

Die Ordnung K soll nun so gewählt werden, daß die Arbeit pro Schrittweite möglichst gering wird.

Zusammengefaßt ergibt sich somit folgender Ablaufplan für die Schrittweitensteuerung und Anpassung der Ordnung [8, S.234f]:

Gegeben ist eine Grundschriftweite H und eine Ordnung k mit $k_{max} - 1 \geq k \geq 3$, so daß alle Punkte der Schrittweitensteuerung durchlaufen werden können. Zunächst werden $k - 1$ Zeilen des Extrapolationsschemas und dazu die Werte von H_{k-2} , W_{k-2} , err_{k-1} , H_{k-1} und W_{k-1} bestimmt.

1. Für $err_{k-1} \leq 1$ wird die Lösung $A_{k-1,k-1}$ akzeptiert und das Verfahren fortgesetzt. Dabei wird die Ordnung k beibehalten, falls W_{k-1} kleiner als $0.9W_{k-2}$, ansonsten wird die Ordnung um eins verringert. Durch den Faktor 0.9 wird verhindert, daß schon bei minimalen Differenzen zwischen W_{k-1} und W_{k-2} eine Reduktion der Ordnung stattfindet. Als neue Schrittweite wird die zur neuen Ordnung gehörende optimale Schrittweite verwendet. Da err_k und somit auch H_k nicht berechnet wurden, erfolgt eine Abschätzung für H_k unter der Voraussetzung von $W_{k-1} \approx W_k$ mit (3.56)

$$\frac{F_k}{H_k} = \frac{F_{k-1}}{H_{k-1}}, \quad (3.57)$$

und somit folgende Schrittweite und Ordnung für den nächsten Rechenschritt:

$$k_{neu} = \begin{cases} k & \text{für } W_{k-1} < 0.9W_{k-2} \\ k-1 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.58)$$

$$H_{neu} = \begin{cases} H_{k-1} \cdot \frac{F_k}{F_{k-1}} & \text{für } k_{neu} = k \\ H_{k-1} & \text{für } k_{neu} = k-1 \end{cases}. \quad (3.59)$$

2. Als nächstes erfolgt eine Abschätzung des Fehlers err_{k+1} um zu überprüfen, ob überhaupt ein Ergebnis zu erwarten ist, welches den Genauigkeitsanforderungen genügt. Mit (3.41) und der Annahme

$$err_k = \|A_{k,k-1} - A_{k,k}\| \approx \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \|A_{k,k-2} - A_{k,k-1}\|, \quad (3.60)$$

folgt für err_{k+1} die Abschätzung

$$err_{k+1} \approx \left(\frac{n_1 n_1}{n_{k+1} n_k}\right)^2 \cdot err_{k-1}. \quad (3.61)$$

Ist err_{k+1} größer 1, wird dieser Rechenschritt abgebrochen und mit neuen Werten für H und k neu gestartet:

$$k_{neu} = k - 1, \quad (3.62)$$

$$H_{neu} = H_{k-1}. \quad (3.63)$$

Für $err_{k+1} \leq 1$ wird das Verfahren fortgesetzt und $A_{k,k}$, err_k , H_k und W_k berechnet.

3. $A_{k,k}$ wird als Lösung akzeptiert falls $err_k \leq 1$. Der nächste Rechenschritt wird dann mit

$$k_{neu} = \begin{cases} k-1 & \text{für } W_{k-1} < 0.9W_k \\ k+1 & \text{für } W_k < 0.9W_{k-1} , \\ k & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.64)$$

$$H_{neu} = \begin{cases} H_{k_{neu}} & \text{für } k_{neu} \leq k \\ H_k \cdot \frac{F_{k+1}}{F_k} & \text{für } k_{neu} = k+1 \end{cases} \quad (3.65)$$

durchgeführt.

4. Falls $err_k > eps$ wird wie in Schritt 2 der Fehler in Zeile $k+1$ abgeschätzt:

$$err_{k+1} \approx err_k \cdot \left(\frac{n_1}{n_{k+1}} \right)^2. \quad (3.66)$$

Für $err_{k+1} \leq 1$ wird das Verfahren fortgesetzt, ansonsten wird dieser Rechenschritt abgebrochen und mit

$$k_{neu} = k \quad (3.67)$$

$$H_{neu} = H_k \quad (3.68)$$

neu gestartet.

5. Als letzter Schritt wird $A_{k+1,k+1}$, err_{k+1} , H_{k+1} und W_{k+1} berechnet. $A_{k+1,k+1}$ wird als Lösung akzeptiert, falls $err_{k+1} \leq 1$. Der nächste Schritt wird mit

$$\begin{aligned} k_{neu} &= k , \\ k_{neu} &= k-1 \text{ für } W_{k-1} < 0.9W_k , \\ k_{neu} &= k+1 \text{ für } W_{k+1} < 0.9W_{k_{neu}} , \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$H_{neu} = H_{k_{neu}} \quad (3.70)$$

begonnen.

Ist der Fehler $err_{k+1} > 1$, wird der gesamte Rechenschritt mit

$$k_{neu} = k, \quad (3.71)$$

$$H_{neu} = H_k \quad (3.72)$$

wiederholt.

Durch die Schrittweitensteuerung wird auch ein schlechter Startwert für die Grundschrittweite korrigiert. Trotzdem kann dadurch einige Rechenzeit vergeudet werden. Dies läßt sich durch einen Algorithmus zur Bestimmung der Anfangsschrittweite vermeiden [8, S.169], der hier nur kurz skizziert wird:

Der Algorithmus beruht auf einer Hypothese von GLADWELL, SHAMPINE und BRANKIN:

$$\text{lokaler Fehler} \approx C \cdot h^{k+1} \cdot y^{(k+1)}(x_0). \quad (3.73)$$

Die $(k+1)$. Ableitung von y ist nicht bekannt und wird deshalb durch Näherungen der ersten und zweiten Ableitung ersetzt. Somit ergibt sich folgender Algorithmus:

1. Bestimmung von

$$d_0 = \|y_0\|, \quad (3.74)$$

$$d_1 = \|f(x_0, y_0)\| \quad (3.75)$$

mit

$$\|X\| = \sqrt{\frac{1}{S} \cdot \sum_{s=1}^S \left(\frac{X^{(s)}}{eps^{(s)}} \right)^2} \quad (3.76)$$

und $eps^{(s)}$ aus (3.51).

2. Daraus folgt ein erster Vorschlag für die Anfangsschrittweite:

$$h_0 = 0.01 \frac{d_0}{d_1}. \quad (3.77)$$

3. Bestimmung von $f(x_0 + h_0, y_1)$ mit $y_1 = y_0 + h_0 f(x_0, y_0)$.

4. Die zweite Ableitung der Lösung wird näherungsweise aus

$$d_2 = \frac{\|f(x_0 + h_0, y_1) - f(x_0, y_0)\|}{h_0} \quad (3.78)$$

bestimmt.

5. Daraus ist eine zweite Schrittweite berechenbar:

$$h_1 = \left(\frac{0.01}{\max(d_1, d_2)} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (3.79)$$

6. Schließlich ergibt sich als Anfangsschrittweite

$$H = \min(100h_0, h_1). \quad (3.80)$$

Kapitel 4

Torsion eines Kreiszyinders

Mit Hilfe der in Kapitel 2 vorgestellten Materialmodelle werden hier am Beispiel der Torsion eines Kreiszyinders die Spannungen bei großen Deformationen bestimmt. Dabei werden zwei verschiedene Arten der Torsion unterschieden:

- Torsion, bei der der Kreiszyinder an seinem oberen und unteren Ende fest eingespannt ist, und seine Länge somit konstant bleibt. Es wird vorausgesetzt, daß Radien gerade bleiben. Dieser Fall wird im folgenden einfache Torsion genannt.
- Torsion, bei der der Zylinder nicht eingespannt ist und er sich in axialer Richtung frei ausdehnen kann. Es wird allerdings vorausgesetzt, daß ebene Querschnitte eben und Radien gerade bleiben. Im folgenden wird dieser Fall mit Torsion bei freiem Ende bezeichnet.

Für jedes Beispiel werden in diesem Kapitel die Axialspannungen $T^{<zz>}$ dargestellt. Die anderen Spannungen, sowie bei Torsion mit freiem Ende die Verlängerungsfunktion v , sind im Anhang B beigefügt.

4.1. Grundlegende Beziehungen

Die im folgenden gemachten Überlegungen gelten unabhängig von Materialmodellen. Sie dienen nur zur Beschreibung der konkreten Geometrie.

4.1.1. Koordinatensysteme

Zur einfacheren Beschreibung des Problems der Torsion eines Kreiszyinders wird ein Zylinderkoordinatensystem eingeführt. Zwischen den Zylinderkoordinaten (r, φ, z) und den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \varphi , \\x_2 &= r \sin \varphi , \\x_3 &= z .\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ableitungen nach einer kartesischen Koordinate werden durch folgende Ableitungen nach Zylinderkoordinaten ersetzt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin \varphi , \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi , \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial z} .\end{aligned}\tag{4.2}$$

Vektoren in kartesischen Koordinaten können durch Multiplikation mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{4.3}$$

in Vektoren in Zylinderkoordinaten transformiert werden. Analog wird ein Tensor \mathbf{T} durch

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} \quad (4.4)$$

auf Zylinderkoordinaten transformiert.

4.1.2. Geometrische Größen

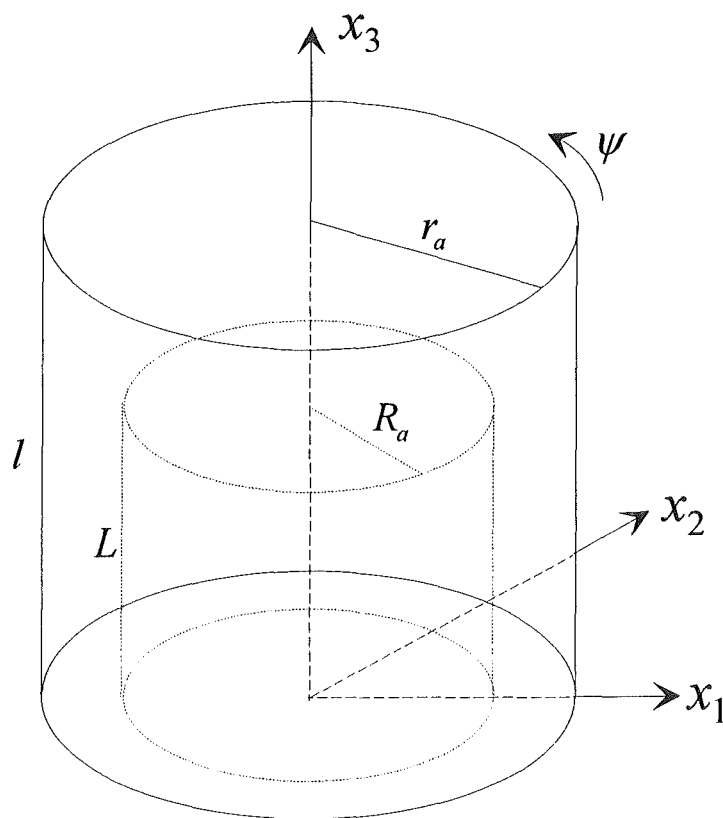


Abbildung 4.1: Kreiszyylinder im unverformten (gepunktet) und verformten (durchgezogen) Zustand. Der Zylinder wurde an seinem oberen Ende um den Winkel ψ tordiert.

Im Ausgangszustand besitzt ein materieller Punkt die Koordinaten

$$\mathbf{P} = (R, \Phi, Z), \quad (4.5)$$

während er im verformten Zustand die Koordinaten

$$\mathbf{p} = (r, \varphi, z) \quad (4.6)$$

besitzt.

Zwischen den Koordinaten der Bezugs- und Momentankonfiguration bestehen die Beziehungen

$$r = k(t) \cdot R, \quad (4.7)$$

$$\varphi = \Phi + \frac{z}{l} \cdot \psi(t), \quad (4.8)$$

$$z = v(t) \cdot Z \quad (4.9)$$

mit den zeitabhängigen Funktionen k für die Änderung des Radius und v für die Änderung der Länge. Aus (4.9) folgt der Zusammenhang

$$l = v \cdot L \quad (4.10)$$

zwischen Ausgangslänge L und momentaner Länge l . Aufgrund der Inkompressibilität bleibt das Volumen konstant

$$\pi \cdot R^2 \cdot Z = \pi \cdot r^2 \cdot z = \pi \cdot (k \cdot R)^2 \cdot (v \cdot Z). \quad (4.11)$$

Wird die Drillung \mathcal{G} als Drehwinkel pro Längeneinheit

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\psi(t)}{L} \quad (4.12)$$

eingeführt, ergibt sich aus den Gleichungen (4.7), (4.8) und (4.9)

$$r = \frac{R}{\sqrt{v(t)}}, \quad (4.13)$$

$$\varphi = \Phi + Z \cdot \mathcal{G}(t), \quad (4.14)$$

$$z = v(t) \cdot Z \quad (4.15)$$

Damit läßt sich der Deformationsgradient \mathbf{F} , der in Zylinderkoordinaten allgemein folgende Form besitzt

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial r}{\partial \Phi} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} & \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} & r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial z}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

und der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} angeben:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} & r \cdot \vartheta \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & -\frac{\dot{\vartheta}}{v} \cdot z & 0 \\ \frac{\dot{\vartheta}}{v} \cdot z & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & \frac{\dot{\vartheta}}{v} \cdot r \\ 0 & 0 & \frac{\dot{v}}{v} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Hieraus folgt sofort der linke Cauchy-Green Verzerrungstensor

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} + (r\vartheta)^2 & r\vartheta v \\ 0 & r\vartheta v & v^2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

und der Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\dot{\vartheta}}{v} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\dot{\vartheta}}{v} & \frac{\dot{v}}{v} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Die bisher gemachten grundsätzlichen geometrischen Überlegungen gelten sowohl für den Fall der einfachen Torsion, als auch für den Fall der Torsion mit freien Enden. Bei Torsion mit konstanter Länge muß lediglich

$$v(t) \equiv 1 \Rightarrow \dot{v}(t) \equiv 0 \quad (4.21)$$

gesetzt werden.

4.1.3. Spannungstensor

Der Cauchy'sche Spannungstensor, der im Fall von Inkompressibilität identisch mit dem gewichteten Cauchy'schen Spannungstensor ist, besitzt in Zylinderkoordinaten allgemein die folgende Darstellung:

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{S} = \begin{pmatrix} T^{<rr>}(r, \varphi, z, t) & T^{<r\varphi>}(r, \varphi, z, t) & T^{<rz>}(r, \varphi, z, t) \\ T^{<r\varphi>}(r, \varphi, z, t) & T^{<\varphi\varphi>}(r, \varphi, z, t) & T^{<\varphi z>}(r, \varphi, z, t) \\ T^{<rz>}(r, \varphi, z, t) & T^{<\varphi z>}(r, \varphi, z, t) & T^{<zz>}(r, \varphi, z, t) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Bei den in Kapitel 3 vorgestellten Materialmodellen läßt sich der Spannungstensor in einen Kugelanteil und eine Extraspannung zerlegen:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}_E. \quad (4.23)$$

Bei Hyperelastizität gilt nach (2.69) für die Extraspannung

$$\mathbf{T}_E = 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1}, \quad (4.24)$$

und da der linke Cauchy-Green Verzerrungstensor \mathbf{B} nach (4.19) nur von der Koordinate r und der Zeit t abhängt, ist auch die Extraspannung nur eine Funktion des Radius und der Zeit.

Bei Plastizität gilt für die Extraspannung nach (2.70) bzw. (2.76)

$$\mathbf{T}_E = \xi + \frac{2k}{3} \frac{\mathbf{D}}{\dot{s}} \quad (4.25)$$

mit (2.71) und (2.72) bzw. (2.77) und (2.78)

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}} , \quad (4.26)$$

$$\dot{\xi} - \mathbf{L} \xi - \xi \mathbf{L}^T = c \mathbf{D} - b \dot{s} \xi , \quad (4.27a)$$

$$\text{bzw. } \dot{\xi} + \mathbf{L}^T \xi + \xi \mathbf{L} = c \mathbf{D} - b \dot{s} \xi . \quad (4.27b)$$

Auch hier ist die Extraspannung folglich nur eine Funktion des Radius und der Zeit, da die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} und der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} nur von r und t abhängen.

Wegen

$$T^{<ij>} = T_E^{<ij>} , \quad i \neq j \quad (4.28)$$

und der Eigenschaft

$$T^{<r\varphi>}(r) = T^{<rz>}(r) = 0 , \quad (4.29)$$

die aus den Matrixdarstellungen der kinematischen Größen sowie den Stoffgesetzen folgt, reduziert sich der Cauchy'sche Spannungstensor zu

$$\mathbf{T} = -p(r, \varphi, z, t) \mathbf{1} + \begin{pmatrix} T_E^{<rr>}(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & T_E^{<\varphi\varphi>}(r, t) & T_E^{<\varphi z>}(r, t) \\ 0 & T_E^{<\varphi z>}(r, t) & T_E^{<zz>}(r, t) \end{pmatrix} . \quad (4.30)$$

Dieser Spannungstensor muß zu jedem Zeitpunkt t die Gleichgewichtsbedingung

$$\text{div } \mathbf{T} = 0, \quad (4.31)$$

bzw. in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T^{<rr>}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T^{<r\varphi>}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T^{<rz>}}{\partial z} + \frac{T^{<rr>} - T^{<\varphi\varphi>}}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial T^{<r\varphi>}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T^{<\varphi\varphi>}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T^{<\varphi z>}}{\partial z} + \frac{2 \cdot T^{<r\varphi>}}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial T^{<rz>}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T^{<\varphi z>}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T^{<zz>}}{\partial z} + \frac{T^{<rz>}}{r} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

erfüllen.

Dies führt auf die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{\partial T^{<rr>}}{\partial r} + \frac{T^{<rr>} - T^{<\varphi\varphi>}}{r} = 0, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{4.35}$$

Daraus folgt außerdem, daß die Unbekannte p , und somit der Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{T} , nur Funktionen des Radius r und der Zeit t sind: $\mathbf{T} = \mathbf{T}(r, t)$.

Wird ein Spannungstensor dieser Form nach der Zeit abgeleitet, muß berücksichtigt werden, daß sich das Zylinderkoordinatensystem in dem der Spannungstensor definiert ist ebenfalls mit der Zeit ändert. Somit ergibt sich die folgende zeitliche Ableitung [11]

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \dot{T}^{<rr>} & \frac{\dot{g}}{v} z (T^{<rr>} - T^{<\varphi\varphi>}) & -\frac{\dot{g}}{v} z T^{<z\varphi>} \\ \frac{\dot{g}}{v} z (T^{<rr>} - T^{<\varphi\varphi>}) & \dot{T}^{<\varphi\varphi>} & \dot{T}^{<z\varphi>} \\ -\frac{\dot{g}}{v} z T^{<z\varphi>} & \dot{T}^{<z\varphi>} & \dot{T}^{<zz>} \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

4.2. Hyperelastizität

Im Fall der Hyperelastizität werden nach (2.69) die Spannungen aus der Gleichung

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} \quad (4.37)$$

bestimmt.

4.2.1. Einfache Torsion

Für den Fall der einfachen Torsion ergibt sich der linke Cauchy-Green Verzerrungstensor mit (4.21) zu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+(r\vartheta)^2 & r\vartheta \\ 0 & r\vartheta & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Damit ergeben sich die folgenden vier Gleichungen

$$T^{<rr>} = -p + 2C_1 - 2C_2, \quad (4.39)$$

$$T^{<\varphi\varphi>} = -p + 2(1+(r\vartheta)^2)C_1 - 2C_2, \quad (4.40)$$

$$T^{<zz>} = -p + 2C_1 - 2(1+(r\vartheta)^2)C_2, \quad (4.41)$$

$$T^{<z\varphi>} = 2r\vartheta(C_1 + C_2). \quad (4.42)$$

Die zum Bestimmen der fünf Unbekannten noch benötigte Gleichung folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (4.33)

$$\frac{\partial T^{<rr>}}{\partial r} - 2r\vartheta^2 C_1 = 0. \quad (4.43)$$

Somit ergeben sich, mit der Randbedingung an der freien Oberfläche

$$T^{<rr>}(r = r_a) = 0 \quad (4.44)$$

und mit Einführung der Größen

$$\Gamma = \vartheta \cdot R_a \quad (4.45)$$

als Scherung am Aussenradius und des auf den Außenradius bezogenen Radius

$$\zeta = \frac{r}{r_a}, \quad (4.46)$$

die Spannungen als Funktion des Scherwinkels Γ und des dimensionslosen Radius ζ zu

$$\frac{T^{<rr>}}{C_1} = (\zeta^2 - 1) \cdot \Gamma^2, \quad (4.47)$$

$$\frac{T^{<\varphi\varphi>}}{C_1} = (3\zeta^2 - 1) \cdot \Gamma^2, \quad (4.48)$$

$$\frac{T^{<zz>}}{C_1} = \left(\zeta^2 \cdot \left(1 - 2 \frac{C_2}{C_1} \right) - 1 \right) \cdot \Gamma^2, \quad (4.49)$$

$$\frac{T^{<z\varphi>}}{C_1} = 2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \cdot \zeta \cdot \Gamma. \quad (4.50)$$

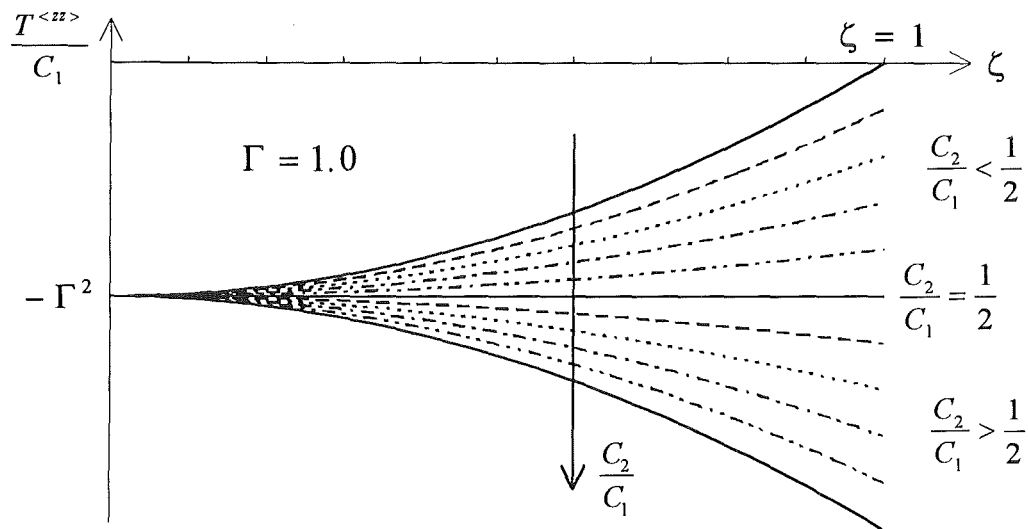


Abbildung 4.2 a: Axialspannung über dimensionslosen Radius bei Hyperelastizität und einfacher Torsion in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialparameter $\frac{C_2}{C_1}$ für den Scherwinkel $\Gamma = 1.0$.

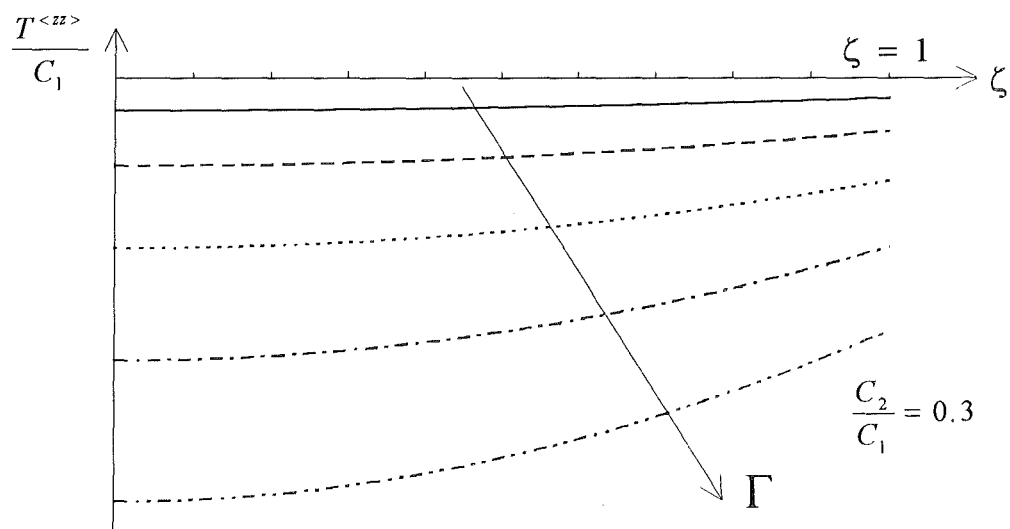


Abbildung 4.2 b: Axialspannung über dimensionslosen Radius bei Hyperelastizität und einfacher Torsion in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels für das Verhältnis der Materialparameter von $\frac{C_2}{C_1} = 0.3$.

Der Verlauf der Axialspannung hängt vom Verhältnis der Materialparameter $\frac{C_2}{C_1}$ ab. Ist dieses Verhältnis kleiner $\frac{1}{2}$, ergibt sich ein konkaver Verlauf der Spannung über den dimensionslosen Radius, für Werte größer $\frac{1}{2}$ ist der Verlauf konvex. Bei Variation des Scherwinkels Γ ändert sich dagegen am Verlauf der Spannung nichts, er hat nur Einfluß auf die Größe der Spannung.

4.2.2. Torsion bei freiem Ende

Bei Torsion mit freiem Ende findet eine Verlängerung des Kreiszyinders statt. Aus (2.69) folgen somit die vier Gleichungen

$$T^{<rr>} = -p + 2\frac{C_1}{v} - 2C_2 v, \quad (4.51)$$

$$T^{<\varphi\varphi>} = -p + 2\frac{C_1}{v} + 2C_1(r\vartheta)^2 - 2C_2 v, \quad (4.52)$$

$$T^{<zz>} = -p + 2C_1 v^2 - 2\frac{C_2}{v^2} - 2\frac{C_1(r\vartheta)^2}{v}, \quad (4.53)$$

$$T^{<z\varphi>} = 2C_1 r\vartheta + 2C_2 r\vartheta. \quad (4.54)$$

Damit kann wie zuvor aus der Gleichgewichtsbedingung (4.33) die Radialspannung bestimmt werden. Zur Bestimmung der sechs Unbekannten fehlt noch eine weitere Gleichung. Diese folgt aus der zu jedem Zeitpunkt t verschwindenden Axialkraft bei freier Torsion

$$F_{x_3} = 2\pi \int_0^{r_a} \bar{r} \cdot T^{<zz>}(\bar{r}, t) d\bar{r} = 0, \quad (4.55)$$

woraus sich eine Beziehung zwischen der Verlängerungsfunktion v und der äußeren Scherung Γ

$$v^4 + \frac{C_2}{C_1} \cdot v^3 - \left(1 + \frac{1}{4}\Gamma^2\right) \cdot v - \left(1 + \frac{1}{2}\Gamma^2\right) \frac{C_2}{C_1} = 0 \quad (4.56)$$

herleiten lässt. Die Verlängerungsfunktion ist hierbei ein Funktion des äußeren Scherwinkels, der wie in (4.45) definiert ist. Durch Ableiten von v nach dem Scherwinkel, kann (4.56) in eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dv(\Gamma)}{d\Gamma} = \frac{\left(\frac{1}{2}v + \frac{C_2}{C_1}\right) \cdot \Gamma}{4v^3 + 3\frac{C_2}{C_1}v^2 - 1 - \frac{1}{4}\Gamma^2}, \quad (4.57)$$

mit der Anfangsbedingung

$$v(\Gamma = 0) = 1, \quad (4.58)$$

umgeformt und mit dem in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren numerisch gelöst werden.

Ist die Verlängerungsfunktion bekannt, lassen sich aus den Gleichungen

$$\frac{T^{<rr>}}{C_1} = (\zeta^2 - 1) \frac{\Gamma^2}{v}, \quad (4.59)$$

$$\frac{T^{<\varphi\varphi>}}{C_1} = (3\zeta^2 - 1) \frac{\Gamma^2}{v}, \quad (4.60)$$

$$\frac{T^{<zz>}}{C_1} = \left[\left(1 - \frac{2}{v} \cdot \frac{C_2}{C_1} \right) \cdot \zeta^2 - 1 \right] \cdot \frac{\Gamma^2}{v} + 2 \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{C_2}{C_1} + 1 \right) \frac{v^3 - 1}{v}, \quad (4.61)$$

$$\frac{T^{<z\varphi>}}{C_1} = 2\sqrt{v} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \cdot \zeta \Gamma \quad (4.62)$$

die Spannungen bestimmen. Hierbei ist ζ der dimensionslose Radius

$$\zeta = \frac{r(t)}{r_a(t)} = \frac{R}{R_a}, \quad (4.63)$$

der nicht von der Zeit abhängt.

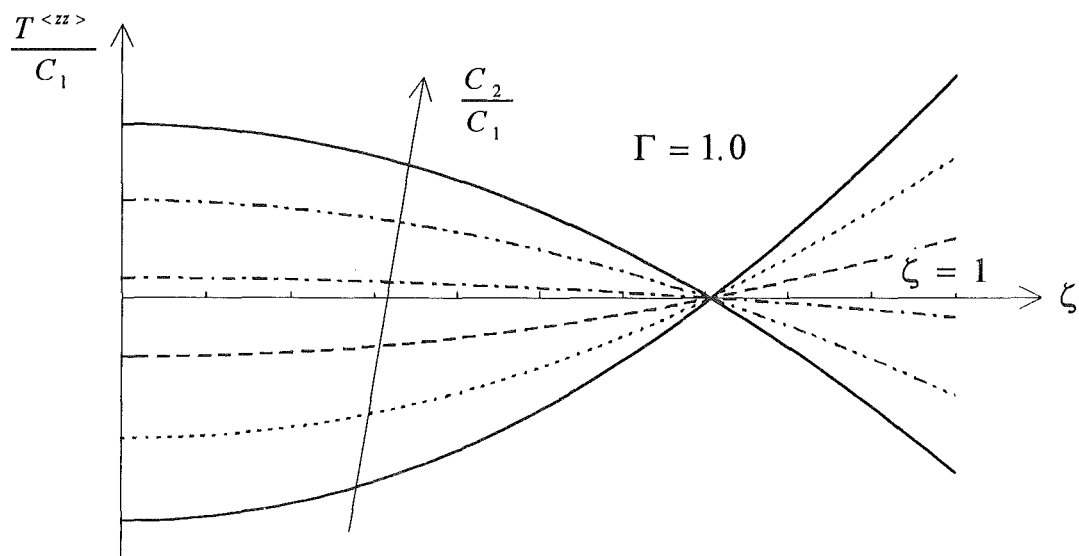


Abbildung 4.3 a: Axialspannung über dimensionslosen Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ bei einer Scherung von $\Gamma = 1.0$

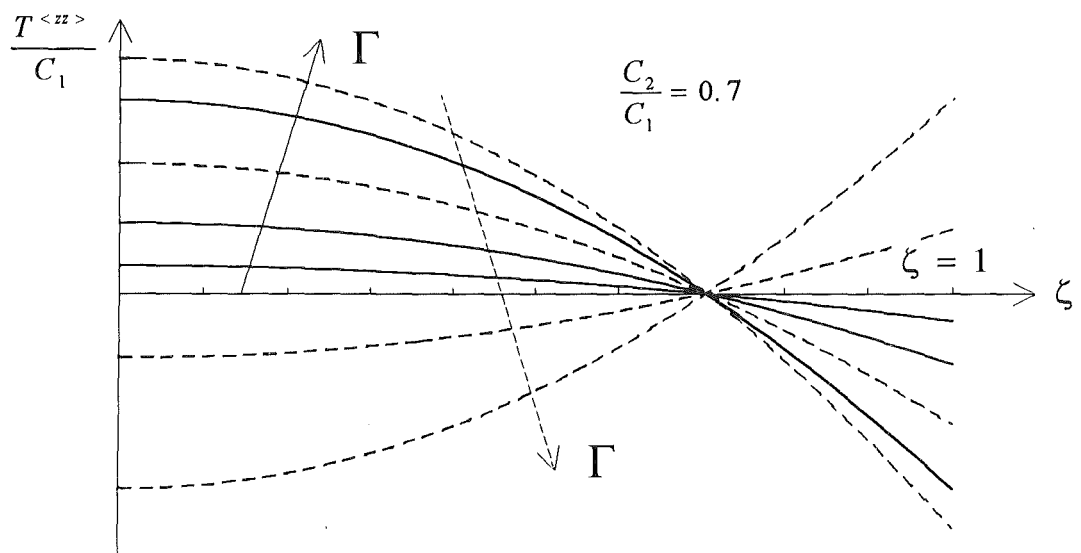
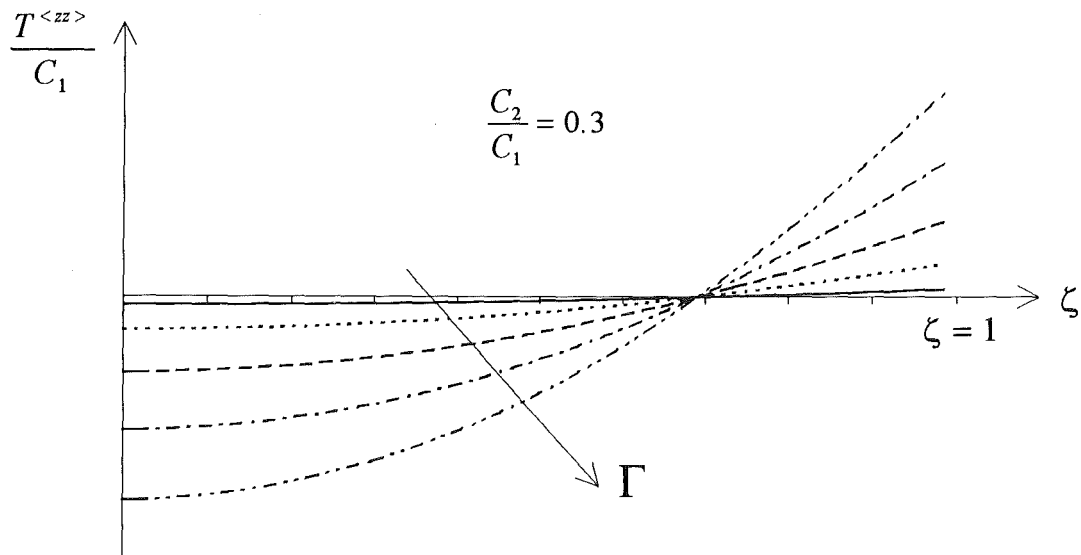


Abbildung 4.3 b,c: Axialspannung über dimensionslosem Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten für zwei verschiedene Verhältnisse der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ in Abhängigkeit der äußeren Scherung Γ . In Abb. c) nehmen die Spannungen bei zunehmender Scherung zunächst zu (durchgezogener Verlauf), und ab einem bestimmten Materialparameterverhältnis ab (gestrichelter Verlauf).

Bei Torsion mit freiem Ende stellt sich, ebenso wie bei der einfachen Torsion, für Parameterverhältnisse $\frac{C_2}{C_1}$ größer einer bestimmten Grenze ein konkaver und für Verhältnisse kleiner dieser Grenze ein konvexer Spannungsverlauf ein (Abb. 4.3 a). Dieser Grenzwert für das Materialparameterverhältnis hängt nun jedoch vom Scherwinkel Γ ab. Er ist erreicht, wenn in Gleichung (4.61) der Faktor bei ζ^2 verschwindet:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{v(\Gamma)}{2}. \quad (4.64)$$

Ebenso läßt sich der Spannungsverlauf in Abb. 4.3 c) erklären. Ab einem bestimmten Wert der Verlängerungsfunktion v nimmt die Axialspannung im Inneren des Zylinders, z.B. für $\frac{C_2}{C_1} = 0.7$, nicht mehr zu, sondern sie fällt bis in den negativen Bereich ab (siehe Abb. 4.3 d).

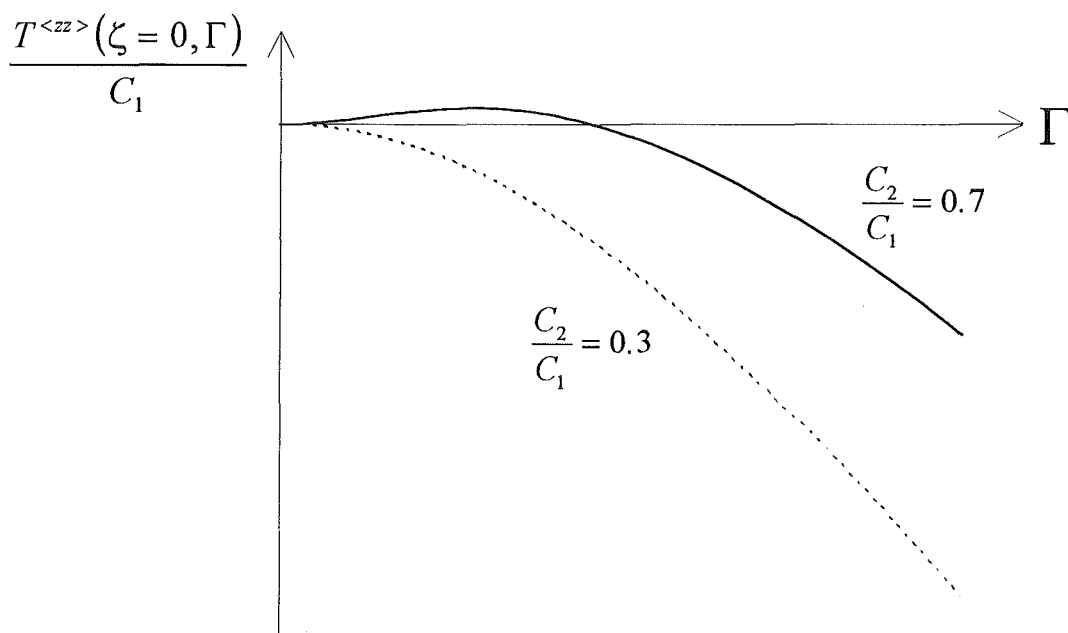


Abbildung 4.3 d : Verlauf der Axialspannung in der Mitte des Kreiszyinders ($\zeta = 0$) bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten über dem äußeren Scherwinkel Γ für zwei verschiedene Verhältnisse der Materialparameter.

4.3. Plastizität mit kinematischer Verfestigung

Bei der Herleitung der Gleichungen zur Spannungsbestimmung wird von starrplastischem Materialverhalten ausgegangen. Da darüber hinaus Radien gerade bleiben, ist der gesamte Querschnitt plastisch verformt.

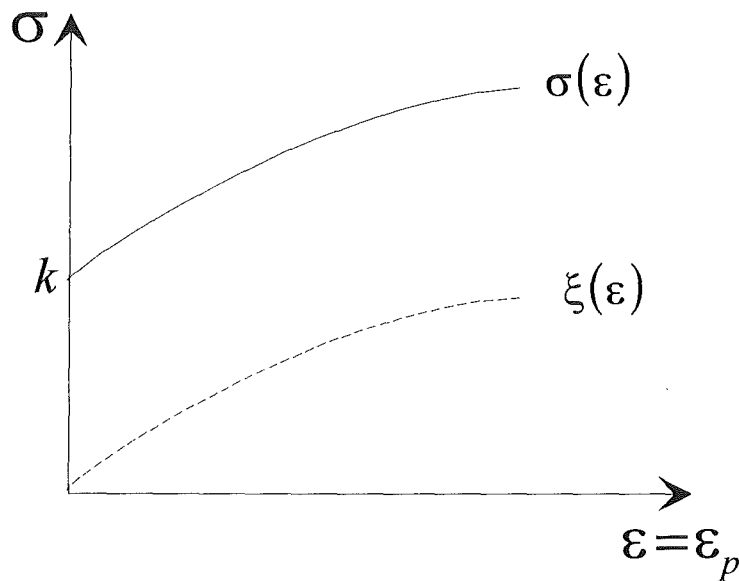


Abbildung 4.4: Starrplastisches Materialverhalten mit kinematischer Verfestigung im Fall einer eindimensionalen Belastung. Die gesamte Dehnung ist gleich der plastischen Dehnung. Aufgetragen ist die Spannung σ und die innere Variable der kinematischen Verfestigung ξ .

Plastizität mit kinematischer Verfestigung (siehe Abb. 4.4) wird im dreidimensionalen durch die Gleichungen (2.70)-(2.72) bzw. (2.76)-(2.78) beschrieben:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \xi + \frac{2k}{3} \frac{\mathbf{D}}{\dot{s}}, \quad (4.65)$$

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}, \quad (4.66)$$

$$\dot{\xi} - \mathbf{L}^{\nabla} \xi - \xi \mathbf{L}^T = c\mathbf{D} - b\dot{s}\xi, \quad (4.67a)$$

$$\text{bzw. } \dot{\xi} + \mathbf{L}^T \xi + \xi \mathbf{L} = c\mathbf{D} - b\dot{s}\xi. \quad (4.67b)$$

Bei den später durchgeführten Berechnungen wurden die Konstanten mit

$$c = 3 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$k = 200 \text{ MPa}$$

angenommen. Der Parameter b wurde im Bereich von $b = 0$ (dies entspricht linearer kinematischer Verfestigung) bis $b = 100$ variiert.

4.3.1. Einfache Torsion

Im Falle der Torsion bei konstanter Länge ergibt sich die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} , unter Berücksichtigung von (4.21), aus (4.20) zu

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} r \dot{\vartheta} \\ 0 & \frac{1}{2} r \dot{\vartheta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Damit folgt aus (4.66) für die akkumulierte plastische Bogenlänge

$$\dot{s}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{3} \text{Sp}(\mathbf{D}\mathbf{D})} = \frac{r \dot{\vartheta}(t)}{\sqrt{3}}. \quad (4.69)$$

Da zur Bestimmung des Verfestigungstensors ξ die duale Ableitung nach der Zeit benötigt wird, muß zwischen den zwei Familien unterschieden werden.

Familie 1

Bei der ersten Familie ist die duale Ableitung durch

$$\dot{\xi} - \mathbf{L} \xi - \xi \mathbf{L}^T \quad (4.70)$$

gegeben.

Mit dem Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -z\dot{\vartheta} & 0 \\ z\dot{\vartheta} & 0 & r\dot{\vartheta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

aus (4.18) ergeben sich daraus mit (4.36) vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Komponenten des Verfestigungstensors:

$$\dot{\xi}^{<rr>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<rr>} , \quad (4.72)$$

$$\dot{\xi}^{<\varphi\varphi>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<\varphi\varphi>} + 2r\dot{\vartheta} \xi^{<z\varphi>} , \quad (4.73)$$

$$\dot{\xi}^{<zz>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<zz>} , \quad (4.74)$$

$$\dot{\xi}^{<z\varphi>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<z\varphi>} + r\dot{\vartheta} \xi^{<zz>} + \frac{1}{2} cr\dot{\vartheta} . \quad (4.75)$$

Aufgrund der trivialen Anfangsbedingungen

$$\xi^{<ij>}(r, t = 0) = 0 \quad (4.76)$$

lassen sich die Komponenten des Verfestigungstensors aus

$$\xi^{<rr>} \equiv 0 , \quad (4.77)$$

$$\xi^{<\varphi\varphi>} = \frac{3c}{b^2} - \left(\frac{3c}{b^2} + \frac{\sqrt{3}c}{b} r\dot{\vartheta} \right) \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}r\dot{\vartheta}} , \quad (4.78)$$

$$\xi^{<zz>} \equiv 0 , \quad (4.79)$$

$$\xi^{<z\varphi>} = \frac{\sqrt{3}c}{2b} \left(1 - e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}r\dot{\vartheta}} \right) \quad (4.80)$$

bestimmen.

Diese Ergebnisse eingesetzt in (4.65) liefern

$$T^{<rr>} = -p, \quad (4.81)$$

$$T^{<\varphi\varphi>} = -p + \frac{3c}{b^2} - \left(\frac{3c}{b^2} + \frac{\sqrt{3}c}{b} r\vartheta \right) \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}r\vartheta}, \quad (4.82)$$

$$T^{<zz>} = -p, \quad (4.83)$$

$$T^{<2\varphi>} = \frac{\sqrt{3}c}{2b} \left(1 - e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}r\vartheta} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}}. \quad (4.84)$$

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung (4.33) läßt sich für die Spannung $T^{<rr>}(\Gamma, \zeta)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung angeben

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{T^{<rr>}}{c} \right) = \frac{3}{b^2\zeta} - \left(\frac{3}{b^2\zeta} + \frac{\sqrt{3}}{b} \cdot \Gamma \right) \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}\zeta\Gamma}, \quad (4.85)$$

die mit der Randbedingung $T^{<rr>}(\Gamma, \zeta = 1) = 0$ numerisch gelöst werden kann. Der dimensionslose Radius ζ und die äußere Scherung Γ sind hierbei wie in (4.46) bzw. (4.45) definiert. Mit der nunmehr bekannten Radialspannung $T^{<rr>}(\Gamma, \zeta)$ lassen sich auch die anderen Spannungen angeben:

$$\frac{T^{<\varphi\varphi>}}{c} = \frac{T^{<rr>}}{c} + \frac{3c}{b^2} - \left(\frac{3c}{b^2} + \frac{\sqrt{3}c}{b} \zeta\Gamma \right) \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}\zeta\Gamma}, \quad (4.86)$$

$$\frac{T^{<zz>}}{c} = \frac{T^{<rr>}}{c}, \quad (4.87)$$

$$\frac{T^{<2\varphi>}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2b} \left(1 - e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}\zeta\Gamma} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}c}. \quad (4.88)$$

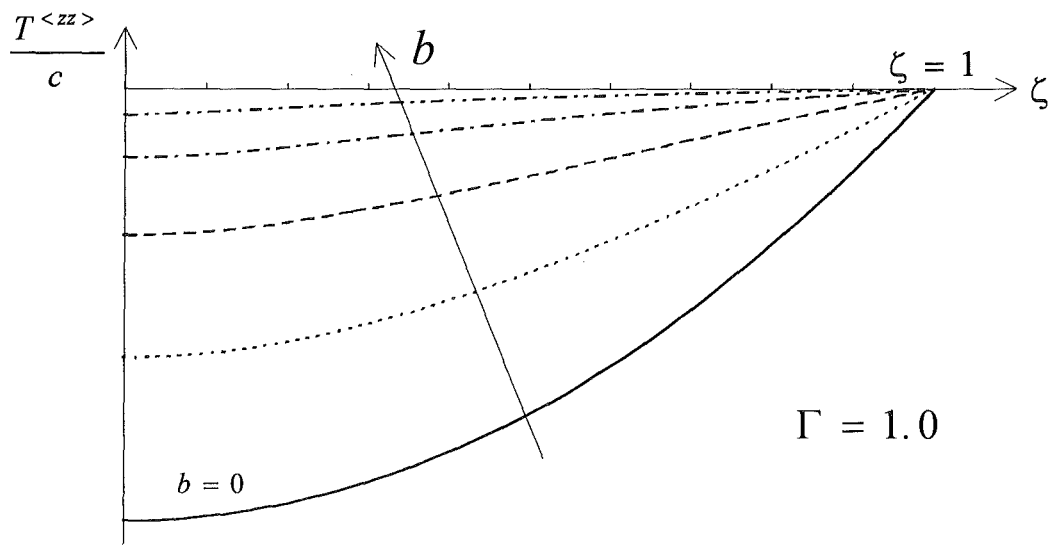


Abbildung 4.5 a: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Einfache Torsion).

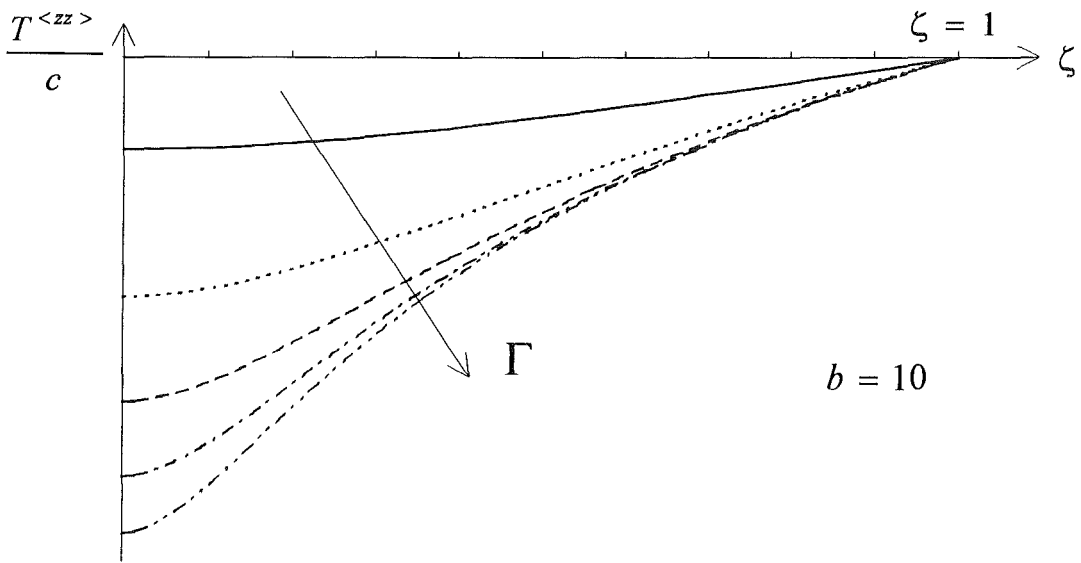
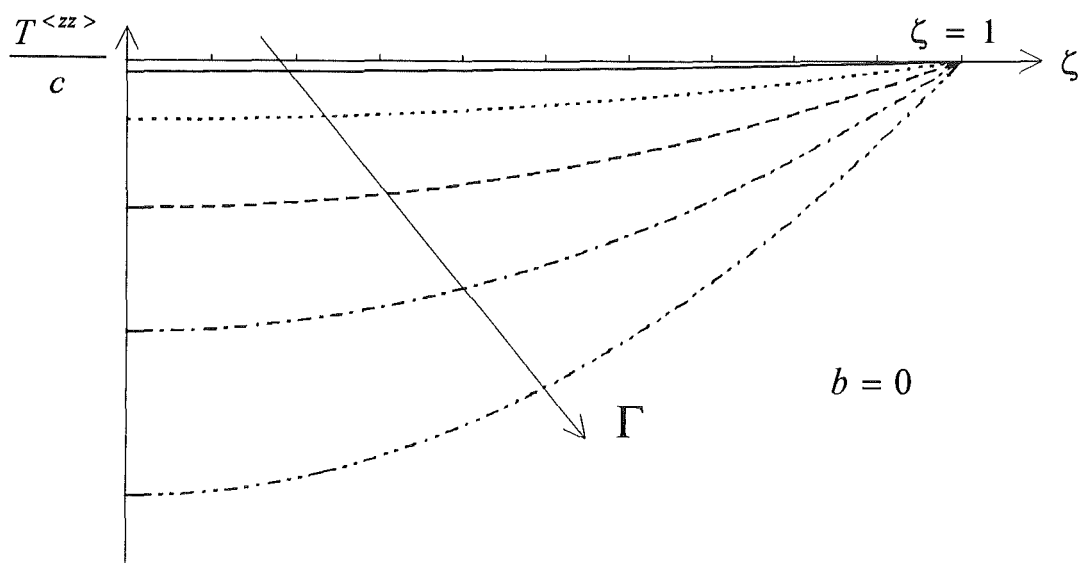


Abbildung 4.5 b,c: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Einfache Torsion).

Familie 2

Mit der dualen zeitlichen Ableitung der zweiten Familie

$$\dot{\xi} + \mathbf{L}^T \xi + \xi \mathbf{L} \quad (4.89)$$

lassen sich, analog zur ersten Familie, aus

$$\dot{\xi}^{<rr>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<rr>}, \quad (4.90)$$

$$\dot{\xi}^{<\varphi\varphi>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<\varphi\varphi>}, \quad (4.91)$$

$$\dot{\xi}^{<zz>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<zz>} - 2r\dot{\vartheta} \xi^{<z\varphi>}, \quad (4.92)$$

$$\dot{\xi}^{<z\varphi>} = -b \frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{3}} \xi^{<z\varphi>} - r\dot{\vartheta} \xi^{<\varphi\varphi>} + \frac{1}{2} cr\dot{\vartheta} \quad (4.93)$$

die Komponenten des Verfestigungstensors mit trivialen Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\xi^{<rr>} \equiv 0, \quad (4.94)$$

$$\xi^{<\varphi\varphi>} \equiv 0, \quad (4.95)$$

$$\xi^{<zz>} = \left(\frac{3c}{b^2} + \frac{\sqrt{3}c}{b} r\dot{\vartheta} \right) \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}r\dot{\vartheta}} - \frac{3c}{b^2}, \quad (4.96)$$

$$\xi^{<z\varphi>} = \frac{\sqrt{3}c}{2b} \left(1 - e^{-\frac{b}{\sqrt{3}}r\dot{\vartheta}} \right). \quad (4.97)$$

Hieraus, und aus der Gleichgewichtsbedingung (4.33) mit dem Anfangswert $T^{<rr>}(\Gamma, \zeta = 1) = 0$, ergeben sich die Spannungskomponenten zu

$$\frac{T^{<rr>}}{c} \equiv 0, \quad (4.98)$$

$$\frac{T^{<\varphi\varphi>}}{c} \equiv 0, \quad (4.99)$$

$$\frac{T^{<zz>}}{c} = \left(\frac{3}{b^2} + \frac{\sqrt{3}}{b} \zeta \Gamma \right) \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{3}} \zeta \Gamma} - \frac{3}{b^2}, \quad (4.100)$$

$$\frac{T^{<z\varphi>}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2b} \left(1 - e^{-\frac{b}{\sqrt{3}} \zeta \Gamma} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}c}. \quad (4.101)$$

Die Schubspannung $T^{<z\varphi>}$ ist also bei einfacher Torsion unabhängig von der gewählten Familie.

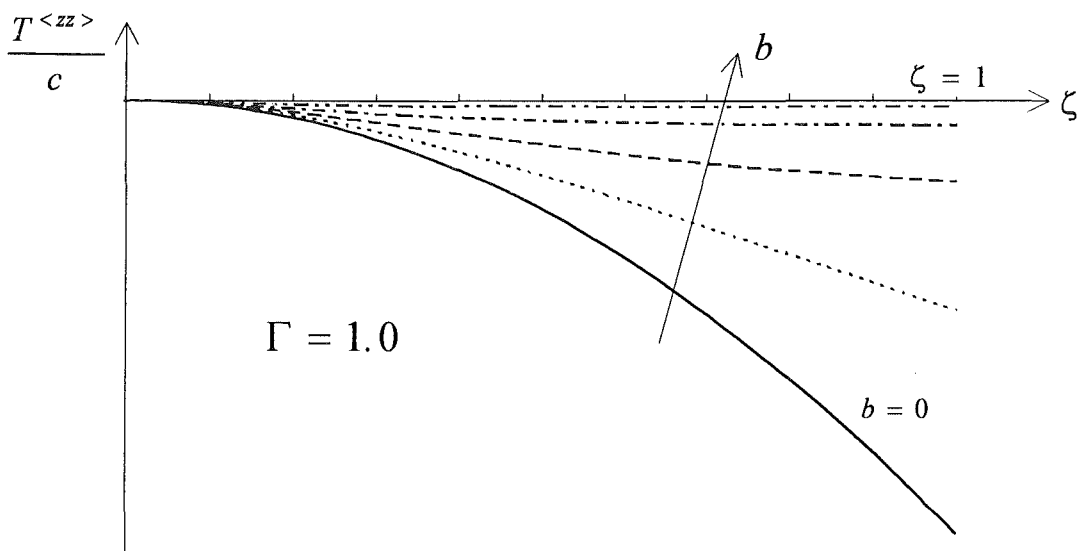


Abbildung 4.6 a: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die zweite Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Einfache Torsion).

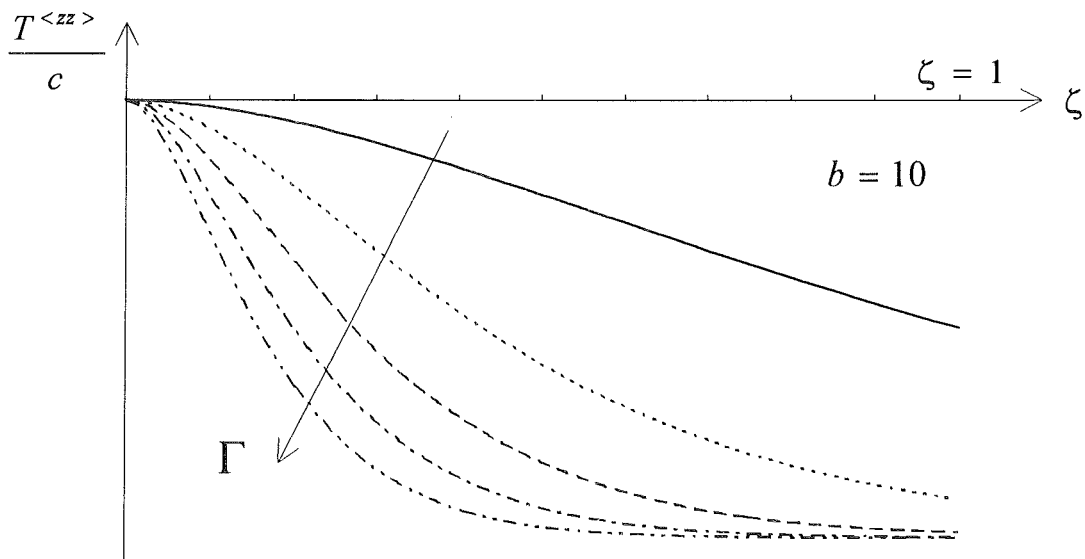
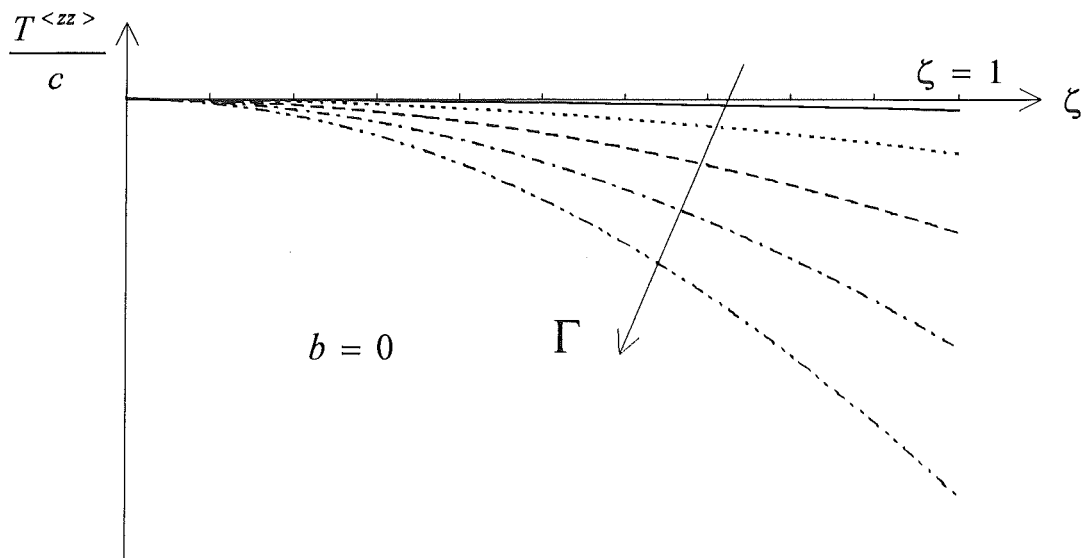


Abbildung 4.6 b,c: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die zweite Familie (Einfache Torsion).

Bei einfacher Torsion wird festgestellt, daß sich die Axialspannung, unabhängig von der Familie, immer im Druckbereich befindet.

Der Verlauf unterscheidet sich jedoch völlig voneinander. Bei der ersten Familie nimmt die Axialspannung von innen nach außen monoton zu und besitzt am Außenradius eine Nullstelle, wohingegen sich bei der zweiten Familie die Nullstelle der Axialspannung im Mittelpunkt des Kreiszyinders befindet, und die Spannung von innen nach außen monoton abnimmt.

Eine Zunahme der äußeren Scherung hat für beide Familien eine Zunahme des Betrags der Axialspannung zur Folge, während eine Zunahme des Parameters b eine Abnahme des Betrags und eine Änderung der Krümmung des Axialspannungsverlaufs über dem dimensionslosen Radius bewirkt.

4.3.2. Torsion bei freiem Ende

Mit der Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} aus (4.20)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\dot{\vartheta}}{v} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\dot{\vartheta}}{v} & \frac{\dot{v}}{v} \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die plastische Bogenlänge bei Torsion mit freiem Ende die Differentialgleichung

$$\dot{s}(r(t), t) = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r(t) \dot{\vartheta}(r(t), t)}{v(t)}\right)^2} \quad (4.102)$$

Familie 1

Aus (4.67a) entstehen mit dem Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} aus (4.18)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & -\frac{\dot{g}}{v} \cdot z & 0 \\ \frac{\dot{g}}{v} \cdot z & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{v}}{v} & \frac{\dot{g}}{v} \cdot r \\ 0 & 0 & \frac{\dot{v}}{v} \end{pmatrix}$$

vier Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\xi}^{\langle rr \rangle}(r(t), t) = -\left(\frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s}\right) \xi^{\langle rr \rangle} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.103)$$

$$\dot{\xi}^{\langle \varphi\varphi \rangle}(r(t), t) = -\left(\frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s}\right) \xi^{\langle \varphi\varphi \rangle} + 2r \frac{\dot{g}}{v} \xi^{\langle z\varphi \rangle} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.104)$$

$$\dot{\xi}^{\langle zz \rangle}(r(t), t) = \left(2 \frac{\dot{v}}{v} - b \dot{s}\right) \xi^{\langle zz \rangle} + c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.105)$$

$$\dot{\xi}^{\langle z\varphi \rangle}(r(t), t) = \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{v}}{v} - b \dot{s}\right) \xi^{\langle z\varphi \rangle} + r \frac{\dot{g}}{v} \xi^{\langle zz \rangle} + \frac{1}{2} cr \frac{\dot{g}}{v} \quad (4.106)$$

zur Bestimmung der Komponenten des Verfestigungstensors. Zum Lösen dieses Differentialgleichungssystems fehlt noch eine Gleichung. Diese folgt aus der Kräftebilanz in axialer Richtung

$$F_{x_3}(t) = \int_0^{r_a(t)} 2\pi \bar{r}(t) T^{\langle zz \rangle}(\bar{r}(t), t) d\bar{r}(t) = 0, \quad (4.107)$$

die zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein muß. Wird die Axialspannung durch

$$T^{\langle zz \rangle} = \xi^{\langle zz \rangle} - \xi^{\langle rr \rangle} + \frac{2k}{3\dot{s}} (D^{\langle zz \rangle} - D^{\langle rr \rangle}) + T^{\langle rr \rangle} \quad (4.108)$$

ersetzt, (4.107) partiell integriert und die Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} eingesetzt, ergibt sich

$$\int_0^{r_a} \bar{r} \left(\xi^{\langle zz \rangle} - \xi^{\langle rr \rangle} + \frac{\dot{v} k}{v \dot{s}} \right) \cdot d\bar{r} + \left[\frac{\bar{r}^2}{2} T^{\langle rr \rangle} \right]_0^{r_a} - \int_0^{r_a} \frac{\bar{r}^2}{2} \frac{\partial T^{\langle rr \rangle}}{\partial \bar{r}} \cdot d\bar{r} = 0, \quad (4.109)$$

wobei der mittlere Term verschwindet. Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$\int_0^1 \zeta \left(\xi^{<zz>} - \frac{1}{2} \xi^{<rr>} - \frac{1}{2} \xi^{<\varphi\varphi>} \right) d\zeta + 3k \frac{v\dot{v}}{\Gamma^2} \left(\sqrt{\dot{v}^2 + \frac{\Gamma^2}{3v}} - \dot{v} \right). \quad (4.110)$$

Hierbei ist die äußere Scherung Γ wie in (4.45) und der dimensionslose Radius ζ wie in (4.46) definiert. Wird nun die Ableitung nach der Zeit durch die Ableitung nach der äußeren Scherung, die eine monoton steigende Funktion der Zeit ist, ersetzt, können die Komponenten des Verfestigungstensors ξ aus dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{v}(\Gamma) = \sqrt{\frac{A(\Gamma)^2}{3k v (k + 2A(\Gamma))}}, \quad (4.111)$$

$$\text{mit } A(\Gamma) = \int_0^1 \zeta \left(\xi^{<zz>} - \frac{1}{2} (\xi^{<\varphi\varphi>} + \xi^{<rr>}) \right) d\zeta, \quad (4.112)$$

$$\dot{s}(\zeta, \Gamma) = \frac{1}{v} \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{\zeta^2}{3v}}, \quad (4.113)$$

$$\dot{\xi}^{<rr>}(\zeta, \Gamma) = - \left(\frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<rr>} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.114)$$

$$\dot{\xi}^{<\varphi\varphi>}(\zeta, \Gamma) = - \left(\frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<\varphi\varphi>} + 2 \frac{\zeta}{v^{\frac{1}{2}}} \xi^{<z\varphi>} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.115)$$

$$\dot{\xi}^{<zz>}(\zeta, \Gamma) = \left(2 \frac{\dot{v}}{v} - b \dot{s} \right) \xi^{<zz>} + c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.116)$$

$$\dot{\xi}^{<z\varphi>}(\zeta, \Gamma) = \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{v}}{v} - b \dot{s} \right) \xi^{<z\varphi>} + \frac{\zeta}{v^{\frac{1}{2}}} \xi^{<zz>} + \frac{1}{2} c \frac{\zeta}{v^{\frac{1}{2}}} \quad (4.117)$$

bestimmt werden, wobei $(\dot{}) = \frac{d()}{dt}$. Da der dimensionslose Radius ζ keine Funktion der Zeit t bzw. des äußeren Scherwinkels Γ ist, handelt es sich für beliebige, aber festgehaltene Werte von ζ , um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung und kann mit dem in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\zeta^{<ij>}(\zeta, \Gamma = 0) &= 0, \\ s(\zeta, \Gamma = 0) &= 0, \\ v(\Gamma = 0) &= 1\end{aligned}\tag{4.118}$$

numerisch gelöst werden.

Mit den Komponenten des Verfestigungstensors kann aus der Gleichgewichtsbedingung (4.33)

$$\frac{\partial T^{<rr>}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\zeta} (\xi^{<rr>} - \xi^{<\varphi\varphi>}),\tag{4.119}$$

und der Randbedingung

$$T^{<rr>}(\zeta = 1, \Gamma) = 0\tag{4.120}$$

an der freien Oberfläche, die Radialspannung numerisch bestimmt werden. Die anderen Spannungen lassen sich dann über die Gleichungen

$$T^{<\varphi\varphi>} = T^{<rr>} - \xi^{<rr>} + \xi^{<\varphi\varphi>},\tag{4.121}$$

$$T^{<zz>} = T^{<rr>} - \xi^{<rr>} + \xi^{<zz>} + \frac{k \dot{v}}{\sqrt{v^2 + \frac{\zeta^2}{3}}},\tag{4.122}$$

$$T^{<z\varphi>} = \xi^{<z\varphi>} + \frac{k}{3} \frac{\zeta}{\sqrt{v^2 + \frac{\zeta^2}{3}}},\tag{4.123}$$

berechnen.

In (4.122) und (4.123) muß beachtet werden, daß die Nenner nicht Null werden. Da bei Torsion immer Verlängerung stattfindet, d.h. $\dot{v} \geq 0$ und somit $v \geq 1$, kann dies nur für den Fall $\dot{v} = 0 \wedge \zeta = 0$ eintreten. Für diesen Fall ergibt sich aus (4.121) - (4.123) mit den Anfangsbedingungen (4.118)

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} T^{<zz>}(\zeta = 0, \Gamma) = k, \quad (4.124)$$

bzw.

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} T^{<z\phi>}(\zeta = 0, \Gamma) = 0. \quad (4.125)$$

Zu Beginn der Verformung besitzt also die Axialspannung im Mittelpunkt des Kreiszylinders eine Unstetigkeitsstelle.

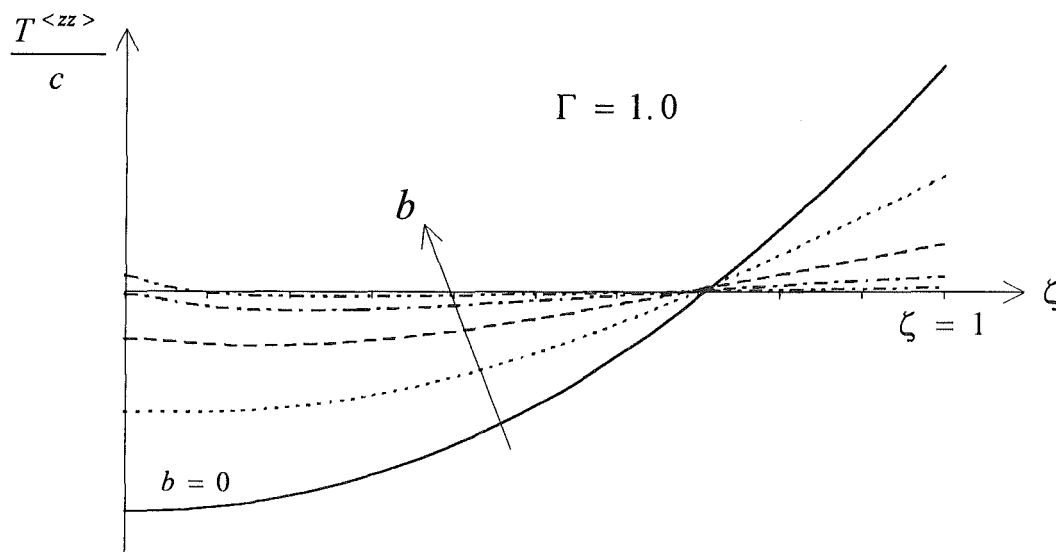


Abbildung 4.7 a: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Torsion bei freiem Ende).

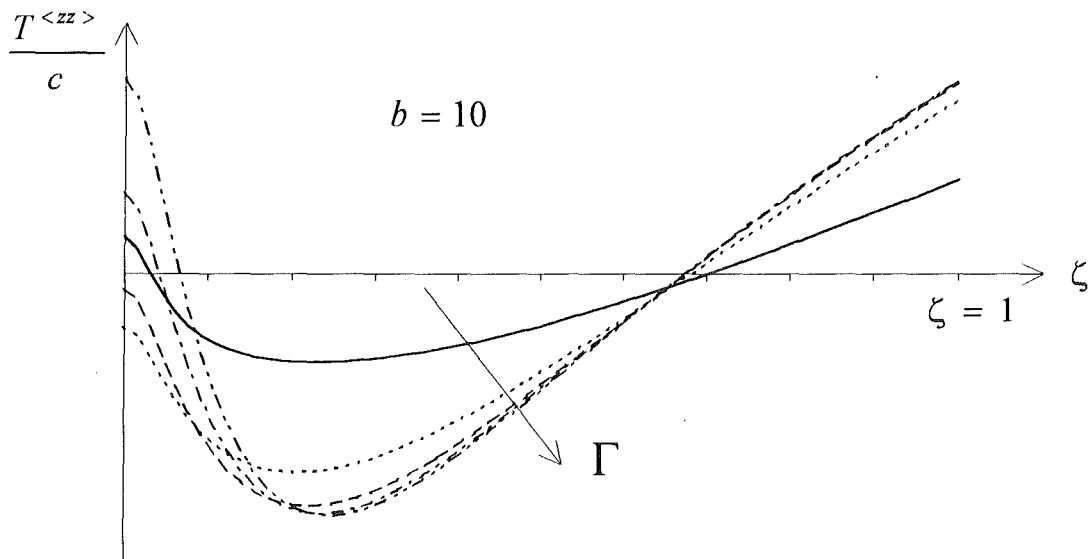
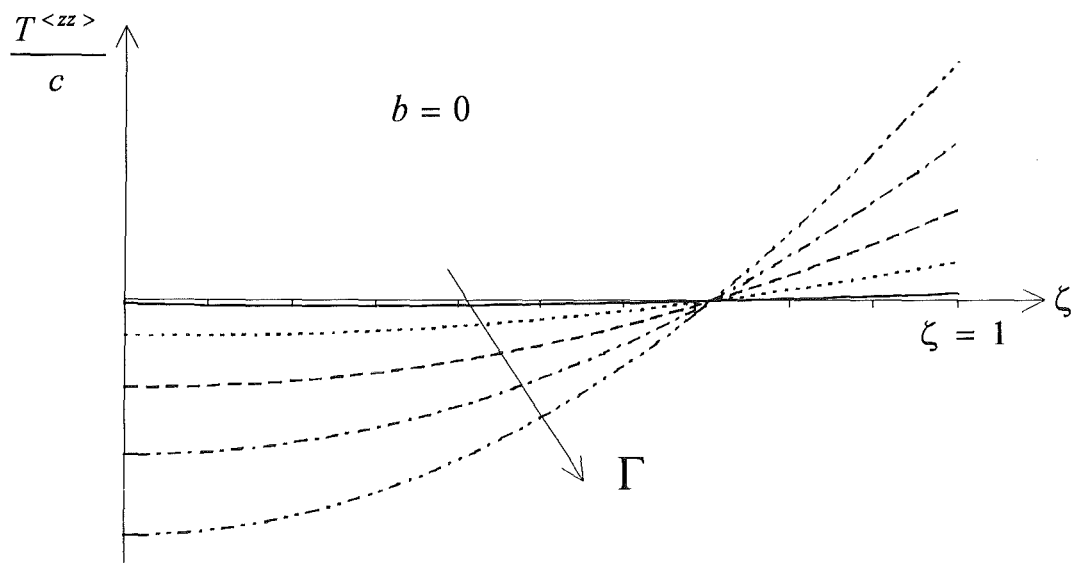


Abbildung 4.7 b,c: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Torsion bei freiem Ende).

Familie 2

Für die zweite Familie entstehen, bei Verwendung der zugehörigen dualen zeitlichen Ableitung (4.67b), die Differentialgleichungen

$$\dot{\xi}^{<rr>}(r(t), t) = \left(\frac{\dot{v}}{v} - b \dot{s} \right) \xi^{<rr>} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.126)$$

$$\dot{\xi}^{<r\varphi\varphi>}(r(t), t) = \left(\frac{\dot{v}}{v} - b \dot{s} \right) \xi^{<r\varphi\varphi>} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.127)$$

$$\dot{\xi}^{<zz>}(r(t), t) = - \left(2 \frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<zz>} - 2r \frac{\dot{g}}{v} \xi^{<z\varphi>} + c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.128)$$

$$\dot{\xi}^{<z\varphi>}(r(t), t) = - \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<z\varphi>} - r \frac{\dot{g}}{v} \xi^{<\varphi\varphi>} + \frac{1}{2} cr \frac{\dot{g}}{v} \quad (4.129)$$

zur Bestimmung der Komponenten des Verfestigungstensors. Analog zur ersten Familie ergibt dies ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{v}(\Gamma) = \sqrt{\frac{A(\Gamma)^2}{3k v(k + 2A(\Gamma))}}, \quad (4.130)$$

$$\text{mit } A(\Gamma) = \int_0^1 \zeta \left(\xi^{<zz>} - \frac{1}{2} (\xi^{<\varphi\varphi>} + \xi^{<rr>}) \right) d\zeta, \quad (4.131)$$

$$\dot{s}(\zeta, \Gamma) = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{v^2}{3} + \frac{\zeta^2}{3v}}, \quad (4.132)$$

$$\dot{\xi}^{<rr>}(\zeta, \Gamma) = \left(\frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<rr>} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.133)$$

$$\dot{\xi}^{<\varphi\varphi>}(\zeta, \Gamma) = \left(\frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<\varphi\varphi>} - \frac{1}{2} c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.134)$$

$$\dot{\xi}^{<zz>}(\zeta, \Gamma) = - \left(2 \frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<\varphi\varphi>} - 2 \frac{\zeta}{v^{\frac{1}{2}}} \xi^{<z\varphi>} + c \frac{\dot{v}}{v}, \quad (4.135)$$

$$\dot{\xi}^{<z\varphi>}(\zeta, \Gamma) = - \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{v}}{v} + b \dot{s} \right) \xi^{<z\varphi>} - \frac{\zeta}{v^{\frac{1}{2}}} \xi^{<\varphi\varphi>} + \frac{1}{2} c \frac{\zeta}{v^{\frac{1}{2}}} \quad (4.136)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\zeta^{<ij>}(\zeta, \Gamma = 0) &= 0, \\ s(\zeta, \Gamma = 0) &= 0, \\ v(\Gamma = 0) &= 1,\end{aligned}\tag{4.137}$$

woraus die Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensors \mathbf{T} bestimmt werden können.

Zusätzlich lassen sich bei der zweiten Familie die Radial- und Tangentialspannung angeben:

Aus den Gleichungen (4.133) und (4.134) folgt aufgrund identischer Anfangsbedingungen

$$\xi^{<rr>} = \xi^{<\varphi\varphi>},\tag{4.138}$$

womit nach (4.119) und (4.121) die Radial- und Tangentialspannungen bestimmt werden können:

$$T^{<rr>} \equiv 0,\tag{4.139}$$

$$T^{<\varphi\varphi>} \equiv 0.\tag{4.140}$$

Analog zur ersten Familie ergeben sich im Mittelpunkt des Kreiszyinders die Grenzwerte

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} T^{<zz>}(\zeta = 0, \Gamma) = k,\tag{4.141}$$

bzw.

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} T^{<z\varphi>}(\zeta = 0, \Gamma) = 0.\tag{4.142}$$

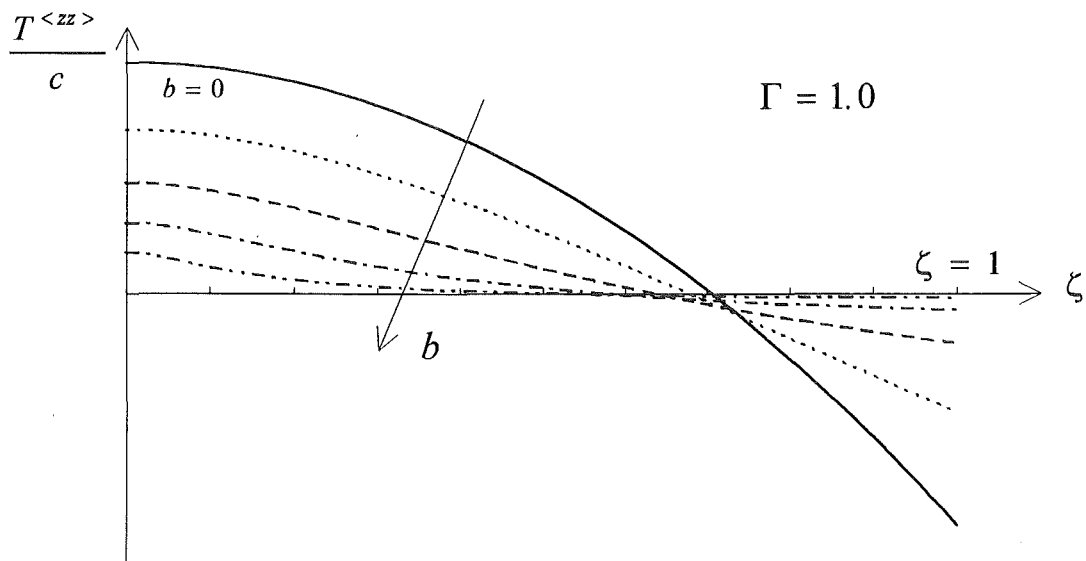


Abbildung 4.8a: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die zweite Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Torsion bei freiem Ende).

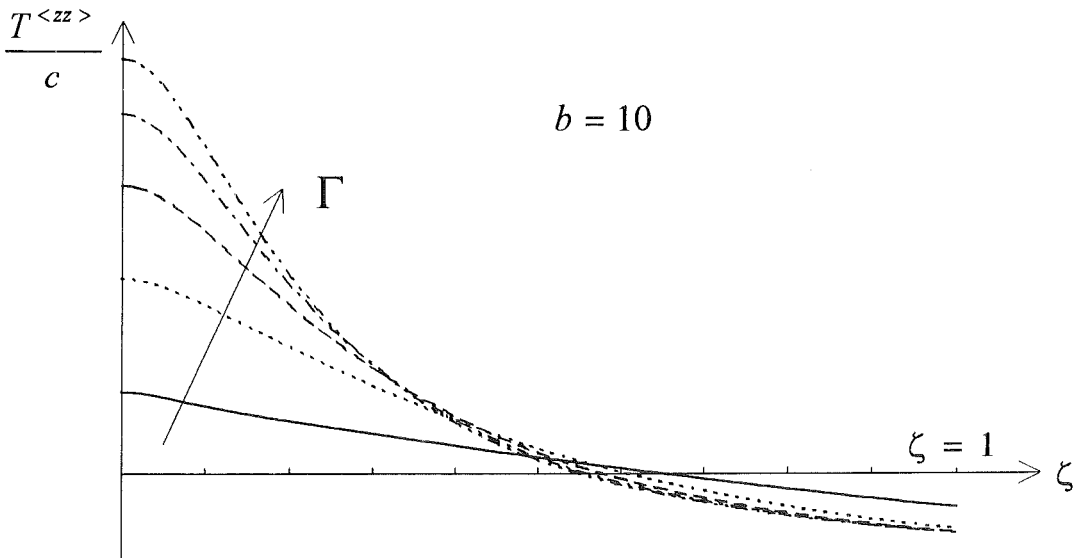
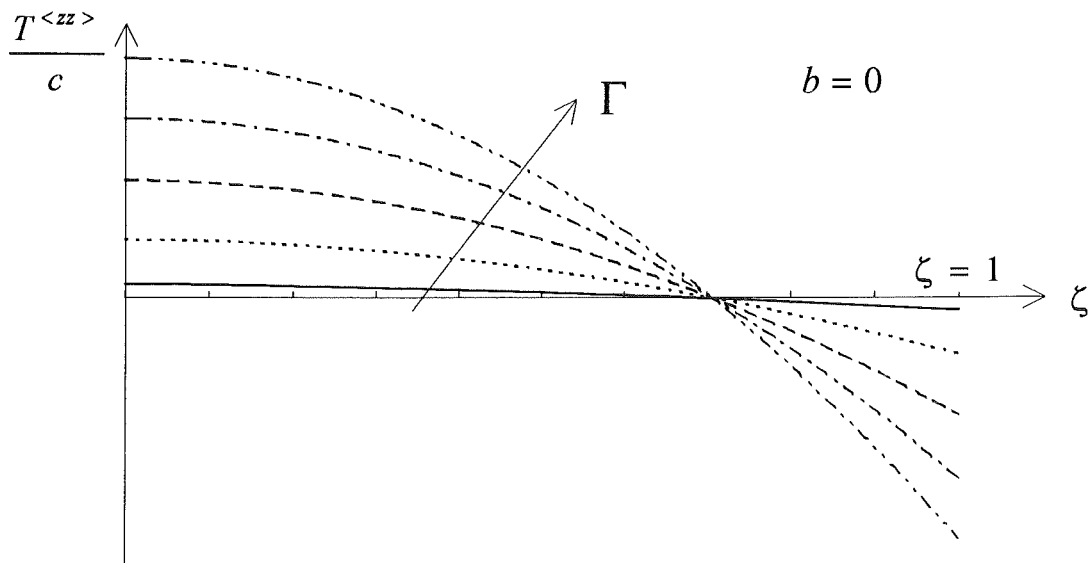


Abbildung 4.8 b,c: Axialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die zweite Familie (Torsion bei freiem Ende).

Bei Torsion mit freiem Ende ergeben sich für beide Familien aufgrund der verschwindenden Axialkraft, im Gegensatz zur einfachen Torsion, Bereiche, in denen Zug-, und Bereiche, in denen Druckspannungen in Axialrichtung auftreten.

Der Verlauf unterscheidet sich jedoch völlig voneinander. Bei der ersten Familie nimmt die Axialspannung bei linearer kinematischer Verfestigung von innen nach außen monoton zu, während sie bei der zweiten Familie monoton abnimmt. Bei beiden Familien besitzt die Spannung die von der äußeren Scherung Γ unabhängige identische Nullstelle.

Es sei noch erwähnt, daß die Axialspannung im Inneren des Zylinders für beide Familien bei kinematischer Verfestigung nach ARMSTRONG-FREDERICK mit steigender äußerer Scherung zunimmt. Dies führt dazu, daß bei der ersten Familie kein monoton zunehmender Spannungsverlauf mehr auftritt, während bei der zweiten Familie weiterhin ein monoton abnehmender Verlauf existiert. Außerdem tritt keine gemeinsame Nullstelle der Axialspannungen mehr auf.

Eine Zunahme des Parameters b hat bei beiden Familien eine Abnahme des Betrags der Spannung und eine Änderung der Krümmung des Axialspannungsverlaufs über dem Radius zur Folge.

Kapitel 5

Couette-Strömung

In der Strömungslehre gibt es einen der Torsion vergleichbaren Fall: Die stationäre, ebene Couette-Strömung, die sich in einem Spalt zwischen zwei rotierenden Zylindern einstellt, wenn kein Fließen in axialer Richtung erlaubt wird (Abb. 5.1). Dieser Fall wurde von OLDROYD in [12] berechnet und soll hier kurz für die zwei von ihm eingeführten Fluide A und B vorgestellt werden.

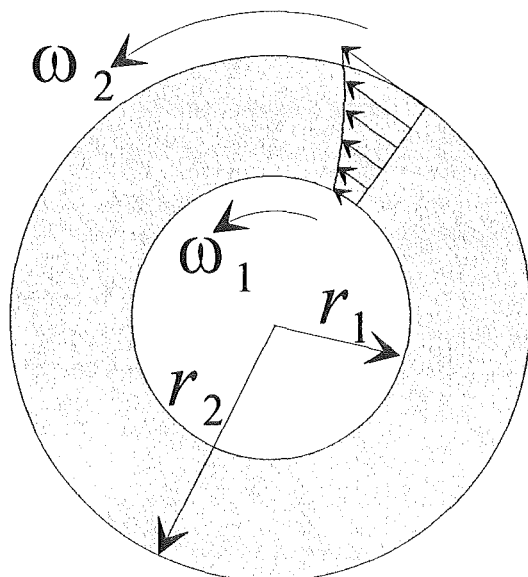


Abbildung 5.1: Couette-Strömung zwischen zwei Zylindern mit den Radien r_1 und r_2 die mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 rotieren.

In Zylinderkoordinaten läßt sich für Couette-Strömungen ein Geschwindigkeitsvektor der Form

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cdot \omega(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(r)$ angeben. Daraus folgt nach [11] der Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega + \frac{d\omega}{dr}r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

und die Deformationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r}{2} \frac{d\omega}{dr} & 0 \\ \frac{r}{2} \frac{d\omega}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Fluid A

Für eine von Oldroyd mit Fluid A bezeichnete viskoelastische Flüssigkeit können die Spannungen aus

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}_E \quad (5.4)$$

und

$$\mathbf{T}_E + \lambda(\dot{\mathbf{T}}_E + \mathbf{L}^T \mathbf{T}_E + \mathbf{T}_E \mathbf{L}) = 2\mu \mathbf{D} + 2\mu\tau(\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{L}^T \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{L}) \quad (5.5)$$

mit den Materialkonstanten ρ , λ , μ und τ bestimmt werden. Wird in (5.18) die Extraspansung \mathbf{T}_E durch $-\boldsymbol{\sigma}_E$ ersetzt, kann die Gleichung zu

$$\boldsymbol{\sigma}_E + \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_E = 2\mu \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} + 2\mu\tau \left(\overset{\Delta\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} + 4 \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} \right) \quad (5.6)$$

umgeformt werden. Somit ist Fluid A eine innerhalb Familie 2 formulierte rheologische Gleichung.

Aus der Rotationssymmetrie und Gleichung (5.18) folgt, daß die Extraspannung \mathbf{T}_E nur eine Funktion des Radius r ist. Mit den Randbedingungen an der Oberfläche des Fluids ergibt sich die Extraspannung somit zu

$$\mathbf{T}_E(r) = \begin{pmatrix} T_E^{<rr>}(r) & T_E^{<r\varphi>}(r) & 0 \\ T_E^{<r\varphi>}(r) & T_E^{<\varphi\varphi>}(r) & 0 \\ 0 & 0 & T_E^{<zz>}(r) \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Die Impulsbilanz

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \rho r \omega^2 = \frac{\partial T_E^{<rr>}}{\partial r} + \frac{1}{r} T_E^{<rr>} \quad (5.8)$$

$$0 = \frac{\partial T_E^{<r\varphi>}}{\partial r} + \frac{2}{r} T_E^{<r\varphi>} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \bar{g} \quad (5.10)$$

liefert drei weitere Gleichungen zur Bestimmung der Spannungen. Durch Auswerten dieser Beziehungen ergeben sich für die Spannungen die Gleichungen

$$T^{<rr>} = -\rho \left(\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) - \frac{b^2}{2} \frac{1}{r^2} + \bar{g}z \right) - 2\mu b^2 (\lambda - \tau) \frac{1}{r^4} + K \quad (5.11)$$

$$T^{<\varphi\varphi>} = -\rho \left(\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) - \frac{b^2}{2} \frac{1}{r^2} + \bar{g}z \right) + 6\mu b^2 (\lambda - \tau) \frac{1}{r^4} + K \quad (5.12)$$

$$T^{<zz>} = -\rho \left(\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) - \frac{b^2}{2} \frac{1}{r^2} + \bar{g}z \right) + 6\mu b^2 (\lambda - \tau) \frac{1}{r^4} + K \quad (5.13)$$

$$T^{<r\varphi>} = \frac{2\mu b}{r^2} \quad (5.14)$$

mit der Konstanten K und

$$a = \omega_1 + \frac{b}{r_1^2} = \omega_2 + \frac{b}{r_2^2} \quad (5.15)$$

$$b = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (\omega_2 - \omega_1). \quad (5.16)$$

In Abbildung 5.2 ist die Axialspannung $T^{<zz>}$ an der Oberfläche ($z = 0$) des Fluids über den Radius r für verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ω_2 des äußeren Zylinders bei festem inneren Zylinder ($\omega_1 = 0 \text{ s}^{-1}$) dargestellt. Dabei wurden für die Konstanten die Zahlenwerte

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\mu = 1000 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\lambda - \tau = 1 \text{ s}$$

$$r_1 = 0.1 \text{ m}$$

$$r_2 = 0.5 \text{ m}$$

verwendet.

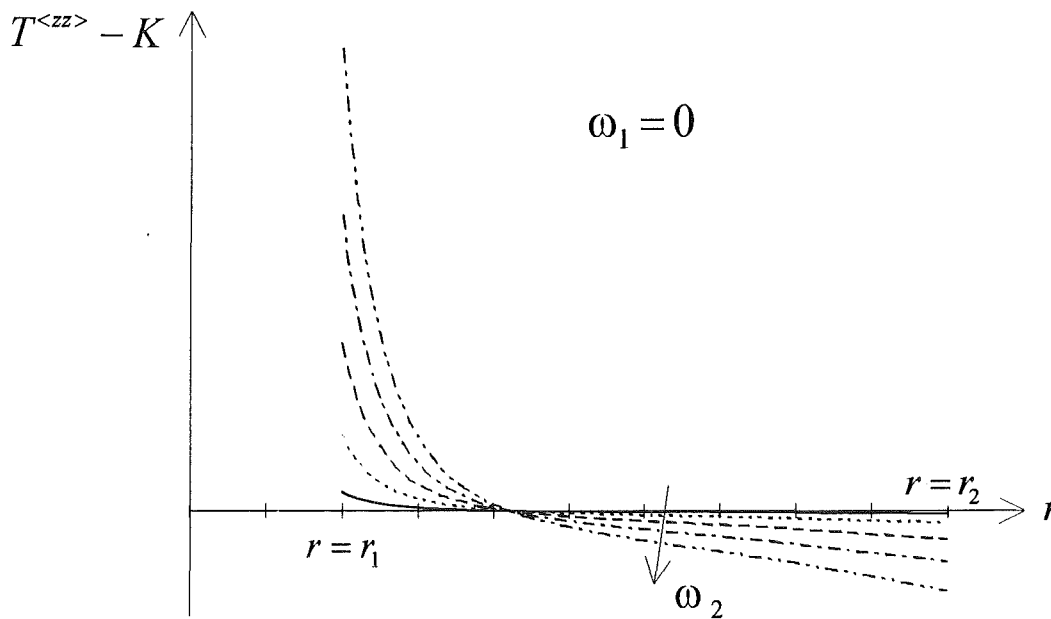


Abbildung 5.2: Axialspannung $T^{<zz>} - K$ über Radius für ein Oldroyd-Fluid A bei festgehaltenem Innenzylinder in Abhängigkeit von verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ω_2 des Außenzylinders.

Dabei ist erwartungsgemäß am inneren Bereich eine axiale Zug- und am äußeren Bereich eine Druckspannung zu erkennen. Dies läßt sich durch die Fliehkraft, die auf das Fluid wirkt und am äußeren Bereich höhere Kräfte als im Inneren bewirkt, erklären. Da nach Voraussetzung die Couette-Strömung eben bleiben soll, stellt sich die beobachtete Spannungsverteilung, der Negative Weissenberg-Effekt, ein.

Fluid B

Für ein Oldroyd-Fluid B werden die Spannungen aus

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}_E \quad (5.17)$$

und

$$\mathbf{T}_E + \lambda(\dot{\mathbf{T}}_E - \mathbf{L}\mathbf{T}_E - \mathbf{T}_E\mathbf{L}^T) = 2\mu\mathbf{D} + 2\mu\tau(\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{L}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{L}^T) \quad (5.18)$$

bzw.

$$\mathbf{T}_E + \overset{\nabla}{\mathbf{T}}_E = 2\mu \overset{\Delta}{\mathbf{A}} + 2\mu\tau \left(\overset{\Delta\Delta}{\mathbf{A}} + 4 \overset{\Delta}{\mathbf{A}} \overset{\Delta}{\mathbf{A}} \right) \quad (5.19)$$

gewonnen. (5.19) verdeutlicht, daß die rheologische Gleichung dieses Fluids innerhalb der ersten Familie definiert wurde. Mit den Gleichungen der Impulsbilanz (5.8) bis (5.10) ergibt sich damit für die Spannungen

$$T^{<rr>} = -\rho \left(\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab \ln(r) - \frac{b^2}{2} \frac{1}{r^2} + \bar{g}z \right) - 2\mu b^2 (\lambda - \tau) \frac{1}{r^4} + K \quad (5.20)$$

$$T^{<\phi\phi>} = -\rho \left(\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab \ln(r) - \frac{b^2}{2} \frac{1}{r^2} + \bar{g}z \right) + 6\mu b^2 (\lambda - \tau) \frac{1}{r^4} + K \quad (5.21)$$

$$T^{<zz>} = -\rho \left(\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab \ln(r) - \frac{b^2}{2} \frac{1}{r^2} + \bar{g}z \right) - 2\mu b^2 (\lambda - \tau) \frac{1}{r^4} + K \quad (5.22)$$

$$T^{<r\phi>} = \frac{2\mu b}{r^2}, \quad (5.23)$$

wobei a und b wie für das Fluid A definiert sind.

Für den Fall des festen inneren Zylinders ($\omega_1 = 0 \text{ s}^{-1}$) sind in Abbildung 5.3 die Axialspannungen für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten ω_2 des äußeren Zylinders über den Radius aufgetragen. Für die Konstanten wurden die gleichen Zahlenwerte wie bei Fluid A verwendet.

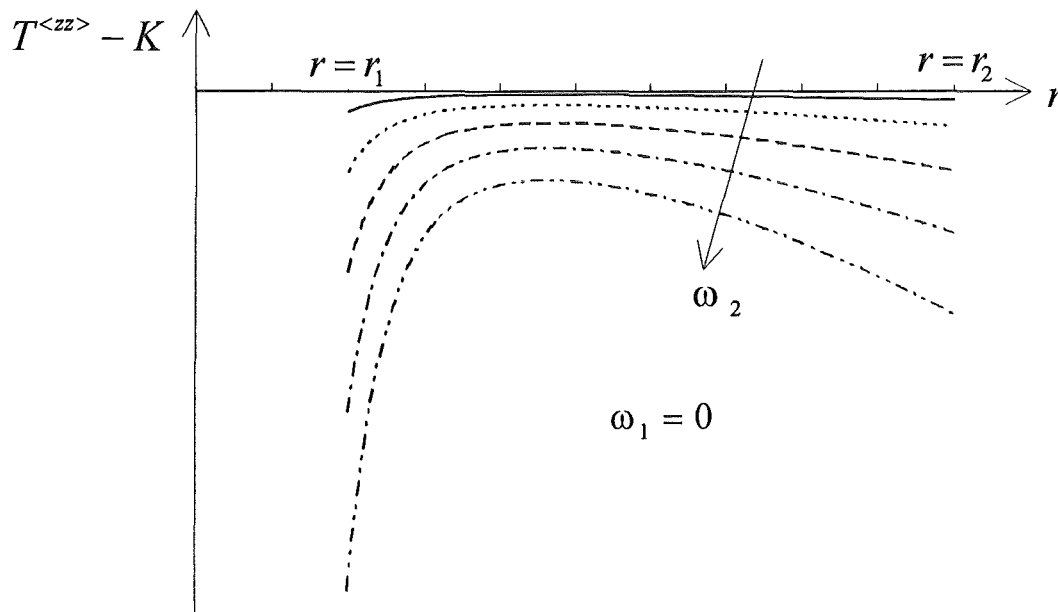


Abbildung 5.3: Axialspannung $T^{<zz>} - K$ über Radius für ein Oldroyd-Fluid B bei festgehaltenem Innenzylinder in Abhängigkeit von verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ω_2 des Außenzylinders.

Für das Oldroyd-Fluid B ist ein interessantes Ergebnis zu erkennen. Obwohl aufgrund der Fliehkraft das Fluid Kräfte nach außen erfährt und somit wegen der Voraussetzung einer ebenen Couette-Strömung am äußeren Bereich des Fluids eine Druckspannung in Axialrichtung zu erwarten wäre, tritt diese Druckspannung am inneren Bereich auf. Dieses Phänomen ist als Positiver Weissenberg-Effekt bekannt. Dürfte das Fluid in axialer Richtung fließen, würde es am inneren Zylinder stärker ansteigen als am äußeren.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die Spannungen bei großen Deformationen für möglichst einfache Formen hyperelastischen und starrplastischen Materialverhaltens in Abhängigkeit der Materialparameter darzustellen. Für das starrplastische Materialmodell mit rein kinematischer Verfestigung wurden zusätzlich zwei Familien unterschieden, die sich aus den verschiedenen objektiven Ableitungen nach der Zeit ergeben. Im folgenden werden die Ergebnisse für die Axialspannung bei der Torsion eines Kreiszylinders mit konstanter Länge und bei Torsion mit freiem Ende zusammengefaßt.

Bei hyperelastischem Mooney-Rivlin-Material stellten sich in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialparameter $\frac{c_2}{c_1}$ verschiedene Axialspannungsverläufe dar:

- Bei einfacher Torsion steigt die Axialspannung für eine konstante äußere Scherung Γ für $\frac{c_2}{c_1} < \frac{1}{2}$ von innen nach außen stetig an und fällt für $\frac{c_2}{c_1} > \frac{1}{2}$ stetig ab. Für $\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{2}$ stellt sich ein vom Radius ζ unabhängiger Spannungsverlauf ein.
- Bei der Torsion mit freiem Ende gibt es ein von der äußeren Scherung abhängendes Verhältnis der Materialparameter $\frac{c_2}{c_1}$, ab dem die Axialspannung von innen nach außen von monoton zunehmend zu monoton abnehmend wechselt.

Bei festem Verhältnis $\frac{c_2}{c_1} > \frac{1}{2}$ steigt die Axialspannung in der Mitte des Zylinders zunächst an und nimmt erst ab einer bestimmten Scherung monoton ab. Für $\frac{c_2}{c_1} < \frac{1}{2}$ fällt die Spannung sofort ab. Dabei sind die Spannungsverläufe über dem Radius für $T^{<zz>}(\zeta = 0, \Gamma) > 0$ monoton abnehmend und für $T^{<zz>}(\zeta = 0, \Gamma) < 0$ monoton zunehmend.

Bei starrplastischem Materialverhalten stellen sich aufgrund der zwei Familien unterschiedliche Spannungsverläufe in Abhängigkeit des Materialparameters b ein:

- Bei einfacher Torsion nimmt die Axialspannung bei der ersten Familie von innen nach außen zu und ist am Außenradius Null, während sie bei der zweiten Familie in der Mitte des Zylinders verschwindet und nach außen hin abnimmt. Für beide Familien befindet sich die Spannung über dem gesamten Radius im Druckbereich. Im Falle einer kinematischen Verfestigung vom Armstrong-Frederick-Typ hat der Parameter b in beiden Fällen nur Einfluß auf die Krümmung des Spannungsverlaufs.
- Für Torsion bei freiem Ende hat die Axialspannung bei linearer kinematischer Verfestigung den Verlauf einer nach oben geöffneten Parabel für Familie 1 und den einer nach unten geöffneten Parabel für Familie 2. Bei Verfestigung nach Armstrong-Frederick steigen in beiden Fällen die Axialspannungen im Inneren des Zylinders mit wachsender Scherung an, während im äußeren Bereich die Spannung bei der ersten Familie ebenfalls ansteigt, bei der zweiten aber abnimmt. Folglich nimmt die Spannung über den Radius für die zweite Familie monoton ab, während für die erste Familie kein monotoner Spannungsverlauf erhalten wird.

Bei allen in dieser Arbeit behandelten Fällen besitzt der Spannungsverlauf über dem Radius in der Mitte des Zylinders eine waagerechte Tangente.

Es muß nun durch Experimente überprüft werden, welches Material durch welche Familie des plastischen Materialmodells beschrieben werden kann. Dabei ist es durchaus vorstellbar, daß ein Material durch die erste und ein anderes durch die zweite Familie beschrieben wird.

In der Strömungslehre fanden diese Versuche schon statt. Dabei wurde der positive Weissenberg-Effekt, d.h. das Steigen des Fluids am inneren Zylinder entgegen der Fliehkraft, nachgewiesen. Der negative Weissenberg-Effekt dagegen überlagert sich mit den Fliehkräften und konnte noch nicht nachgewiesen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Ch. Tsakmakis : Einführung in die Materialtheorie
Vorlesung TH Karlsruhe, WS 1994/95

- [2] R. J. Aitken and N. Fox : An introduction to the theory of Elasticity
Longman Mathematicak Texts, 1980

- [3] Ch. Tsakmakis : Zur Formulierung von Materialgleichungen bei großen Deformationen
Vortrag TH Karlsruhe, 19.1.1995

- [4] Ch. Tsakmakis : Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen
Habilitationsschrift, Universität Kassel, Institut für Mechanik, 1994

- [5] P. Haupt und Ch. Tsakmakis : On the application of dual variables in continuum mechanics
Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 1, 165-196, 1989

- [6] Å. Björck und G. Dahlquist : Numerische Methoden
R. Oldenbourg Verlag, 1972

- [7] H. J. Stetter : Symmetric Two-step Algorithms for Ordinary Differential Eqations
Compting, Vol. 5, 267-280, 1970

- [8] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner : Solving Ordinary Differential Equations I
Springer-Verlag, 1987, 1993

- [9] J. D. Lambert : Computational Methods in Ordinary Differential Equations
John Wiley & Sons, 1973

- [10] P. Deuffhard : Order and Step-size Control in Extrapolation Methods
Numerische Mathematik, Vol. 41, 399-422, 1983
- [11] Ch. Tsakmakis : Persönliche Mitteilungen
Forschungszentrum Karlsruhe, IMF II, 1994/95
- [12] J. G. Oldroyd : On the formulation of rheological equations of state
Proc. of the Roy. Soc. of London, 200A, 523-541, 1950

Anhang A

In diesem Abschnitt soll die Entwicklung der Näherungslösung nach (3.36) bewiesen werden. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Als Voraussetzung wird die Entwicklung einer Näherungslösung nach (3.29)

$$A(h) = a_0 + a_2 \cdot h^2 + a_4 \cdot h^4 + \dots + a_{2n} \cdot h^{2n} + \dots \quad (\text{A.1})$$

angenommen. Durch die Substitution

$$g = h^2 \quad (\text{A.2})$$

folgt daraus

$$A(h) = b_0 + b_1 \cdot g + b_2 \cdot g^2 + \dots + b_n \cdot g^n + \dots \quad (\text{A.3})$$

Behauptet wird, daß eine Näherungslösung $A_{k,j}$, die aus dem Algorithmus (3.34a)

$$\left. \begin{array}{l} A_{k,j} = A(g_k) \\ A_{k,j+1} = \frac{1}{g_k - g_{k-j}} \cdot \begin{vmatrix} A_{k-1,j} & g_{k-j} \\ A_{k,j} & g_k \end{vmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K \\ j = 1, 2, \dots, k-1 \end{array} \quad (\text{A.4})$$

gewonnen wird, eine Entwicklung der Form

$$\begin{aligned}
A_{k,j} = & b_0 + (-1)^{j-1} b_j \prod_{p=k-j+1}^k g_p + (-1)^{j-1} b_{j+1} \prod_{p=k-j+1}^k g_p \cdot \sum_{n=k-j+1}^k g_n + \\
& + (-1)^{j-1} b_{j+2} \prod_{p=k-j+1}^k g_p \cdot \sum_{n_1=k-j+1}^k \sum_{n_2=k-j+1}^{n_1} g_{n_1} g_{n_2} + \dots
\end{aligned} \tag{A.5}$$

besitzt. Für $j = 1$ kann leicht überprüft werden, daß diese Behauptung stimmt. Es muß nun gezeigt werden kann, daß aus (A.4) für $A_{k,j+1}$ eine Entwicklung folgt, die der Form (A.5) entspricht.

Aus (A.4) folgt für $A_{k,j+1}$

$$\begin{aligned}
A_{k,j+1} = & b_0 + (-1)^{j-1} b_{j+1} \prod_{p=k-j}^k g_p \cdot \frac{\sum_{n=k-j}^{k-1} g_n - \sum_{n=k-j+1}^k g_n}{g_k - g_{k-j}} + \\
& (-1)^{j-1} b_{j+2} \prod_{p=k-j}^k g_p \cdot \frac{\sum_{n_1=k-j}^{k-1} \sum_{n_2=k-j}^{n_1} g_{n_1} g_{n_2} - \sum_{n_1=k-j+1}^k \sum_{n_2=k-j+1}^{n_1} g_{n_1} g_{n_2}}{g_k - g_{k-j}} + \dots
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Diese Gleichung kann umgeformt werden, und es ergibt sich, wie gefordert, die Entwicklung

$$\begin{aligned}
A_{k,j+1} = & b_0 + (-1)^j b_{j+1} \prod_{p=k-j}^k g_p + (-1)^j b_j \prod_{p=k-j}^k g_p \cdot \sum_{n=k-j}^k g_n + \\
& + (-1)^j b_{j+3} \prod_{p=k-j}^k g_p \cdot \sum_{n_1=k-j}^k \sum_{n_2=k-j}^{n_1} g_{n_1} g_{n_2} + \dots
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Da die Behauptung für $j = 1$ stimmt und aus $A_{k,j}$ die Entwicklung für $A_{k,j+1}$ erhalten wird, stimmt die Behauptung für alle k .

Anhang B

B.1 Hyperelastizität und einfache Torsion

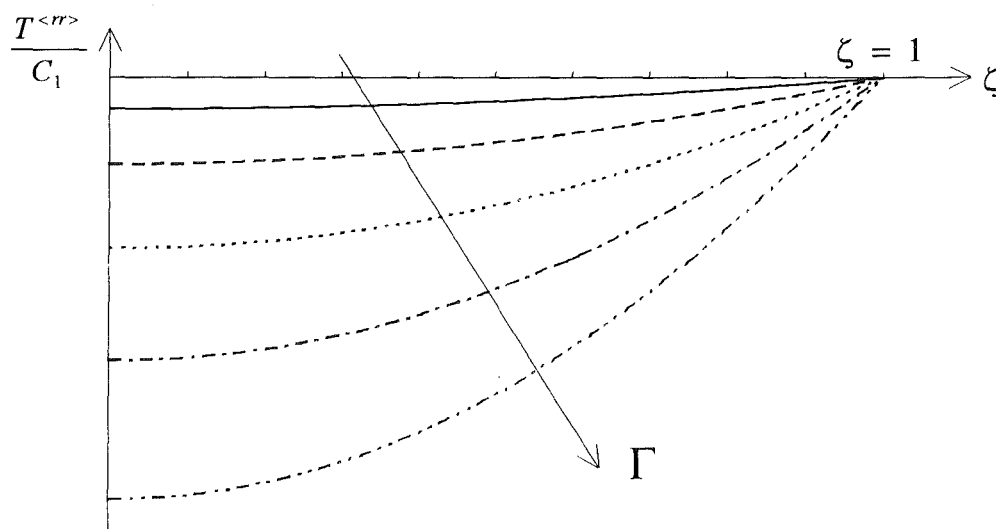


Abbildung B.1.1: Radialspannung über dimensionslosen Radius bei Hyperelastizität und einfacher Torsion in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels. Der Spannungsverlauf ist unabhängig vom Materialparameterverhältnis $\frac{C_2}{C_1}$.

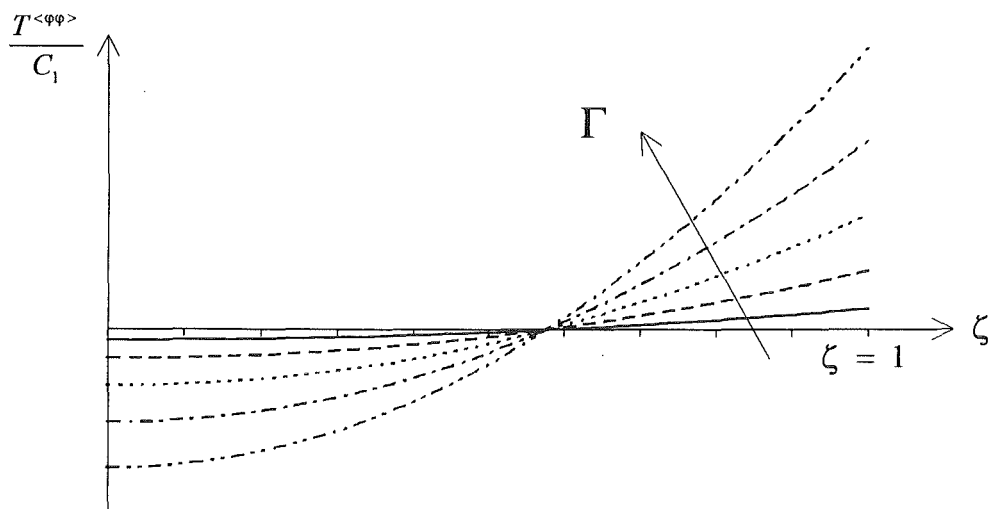


Abbildung B.1.2: Tangentialspannung über dimensionslosen Radius bei Hyperelastizität und einfacher Torsion in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels. Der Spannungsverlauf ist unabhängig vom Materialparameterverhältnis $\frac{C_2}{C_1}$.

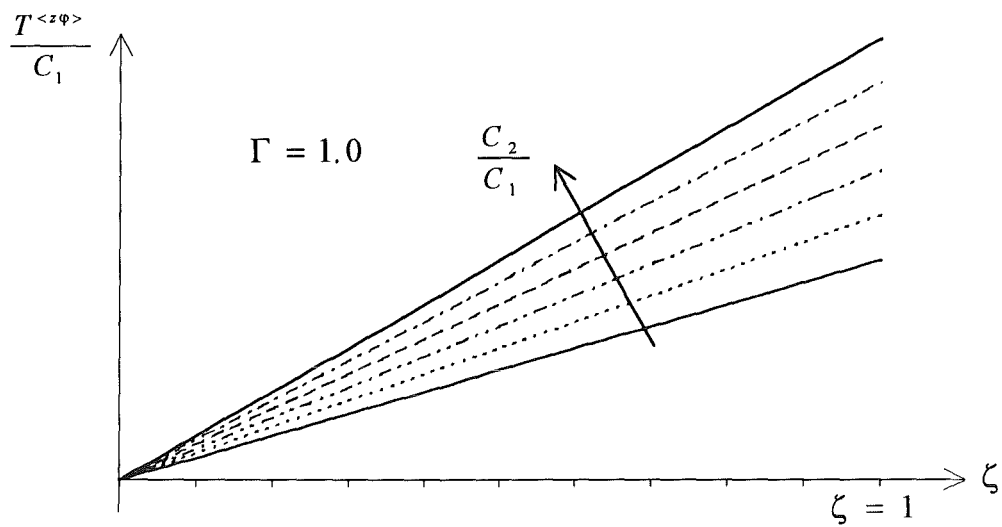


Abbildung B.1.3 a: Schubspannung über dimensionslosen Radius bei Hyperelastizität und einfacher Torsion in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialparameter $\frac{C_2}{C_1}$ für den Scherwinkel $\Gamma = 1.0$.

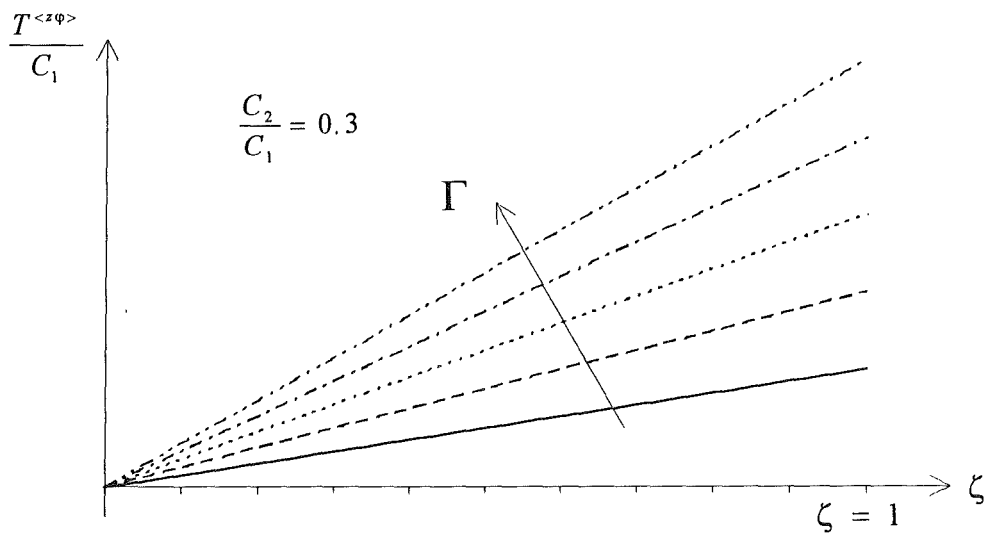


Abbildung B.1.3 b: Schubspannung über dimensionslosen Radius bei Hyperelastizität und einfacher Torsion in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels für das Verhältnis der Materialparameter von $\frac{C_2}{C_1} = 0.3$.

B.2 Hyperelastizität und Torsion mit freiem Ende

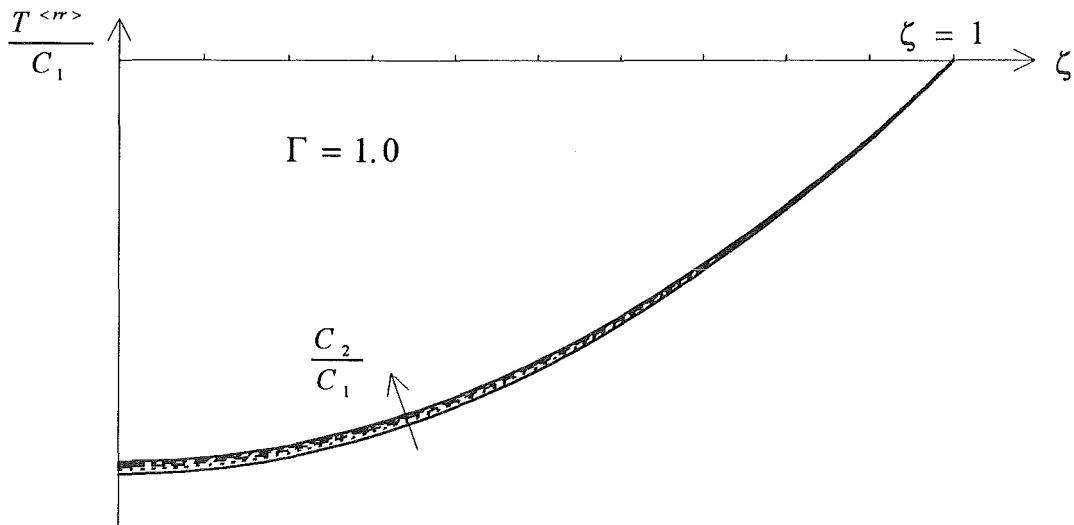


Abbildung B.2.1 a: Radialspannung über dimensionslosen Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ bei einer Scherung von $\Gamma = 1.0$

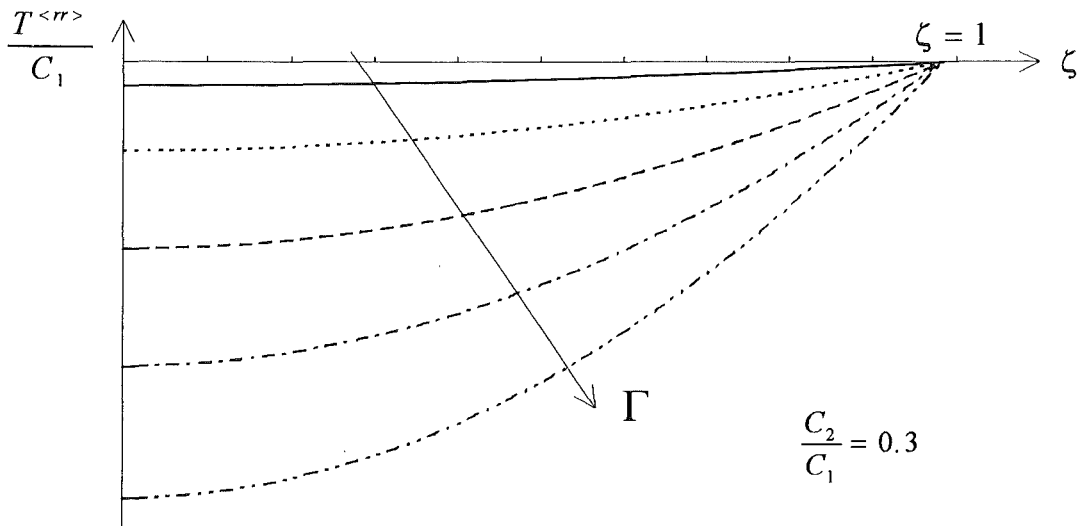


Abbildung B.2.1 b: Radialspannung über dimensionslosem Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten für zwei verschiedene Verhältnisse der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ in Abhängigkeit der äußeren Scherung Γ .

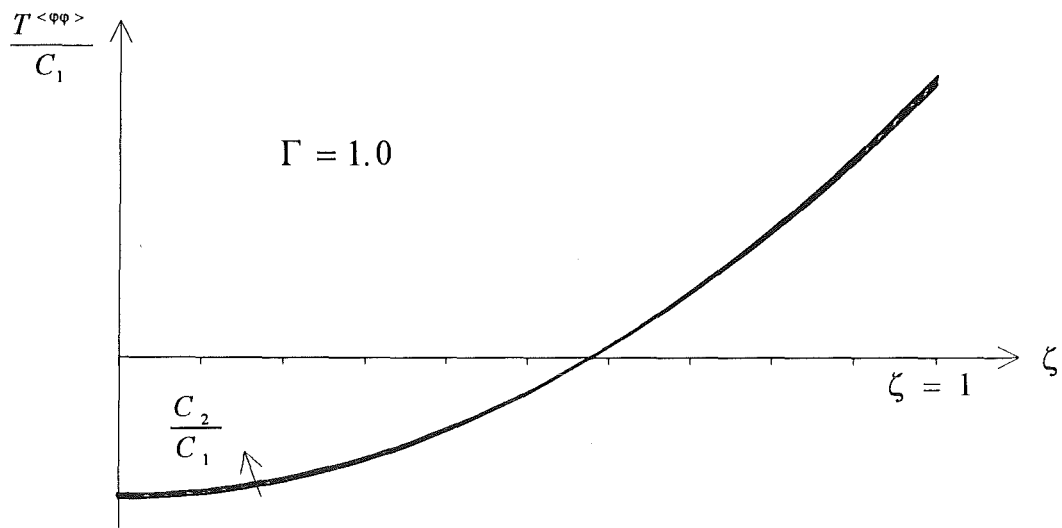


Abbildung B.2.2 a: Tangentialspannung über dimensionslosen Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ bei einer Scherung von $\Gamma = 1.0$

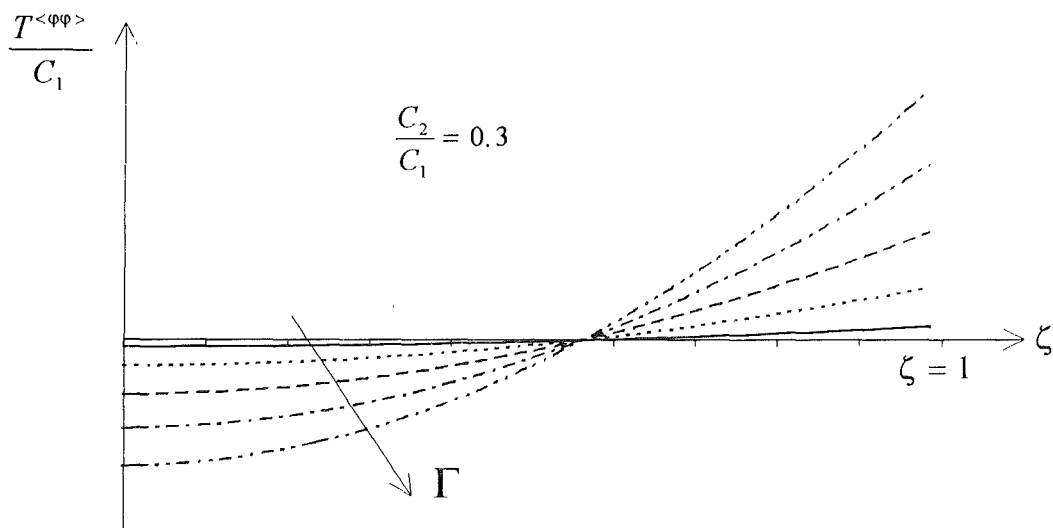


Abbildung B.2.2 b: Tangentialspannung über dimensionslosem Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten für zwei verschiedene Verhältnisse der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ in Abhängigkeit der äußeren Scherung Γ .

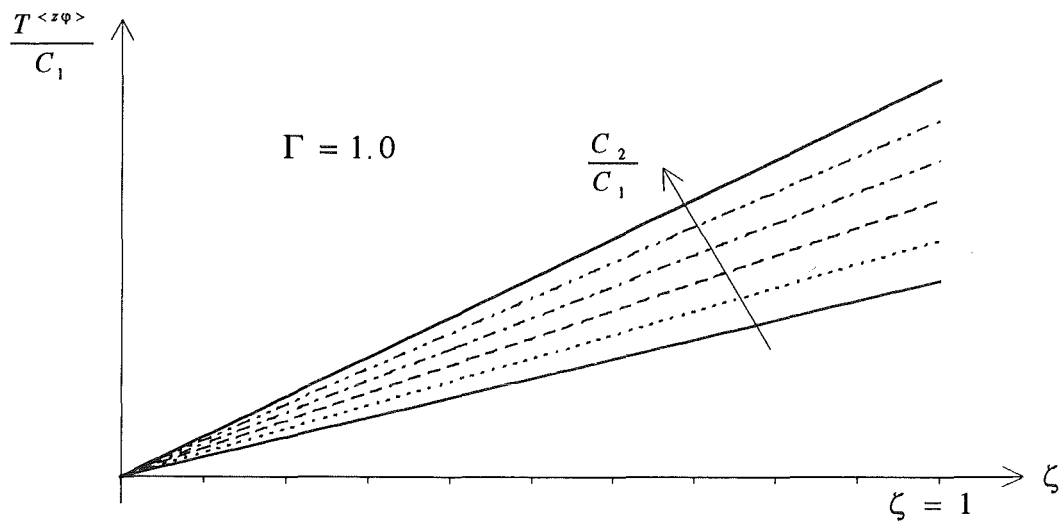


Abbildung B.2.3 a: Schubspannung über dimensionslosen Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ bei einer Scherung von $\Gamma = 1.0$

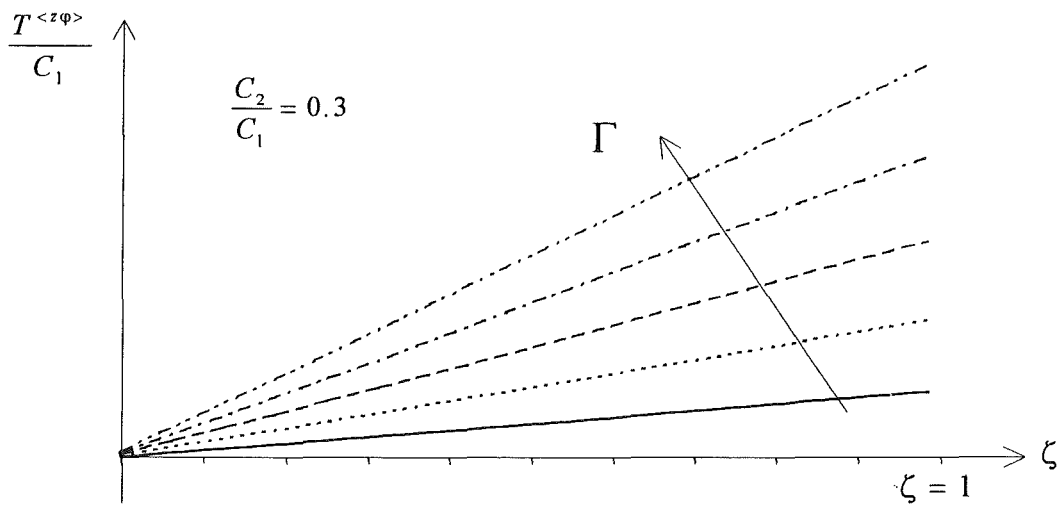


Abbildung B.2.3 b: Schubspannung über dimensionslosem Radius bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten für zwei verschiedene Verhältnisse der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$ in Abhängigkeit der äußeren Scherung Γ .

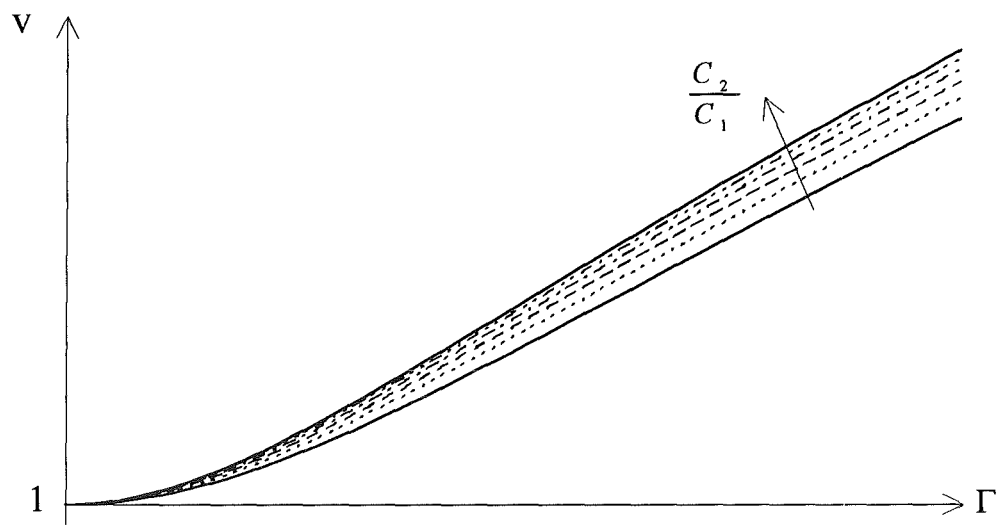


Abbildung B.2.4: Verlängerungsfunktion über äußerer Scherung bei Torsion mit freiem Ende und hyperelastischem Materialverhalten in Abhängigkeit des Verhältnisses der Materialkonstanten $\frac{C_2}{C_1}$.

B.3 Plastizität und einfache Torsion

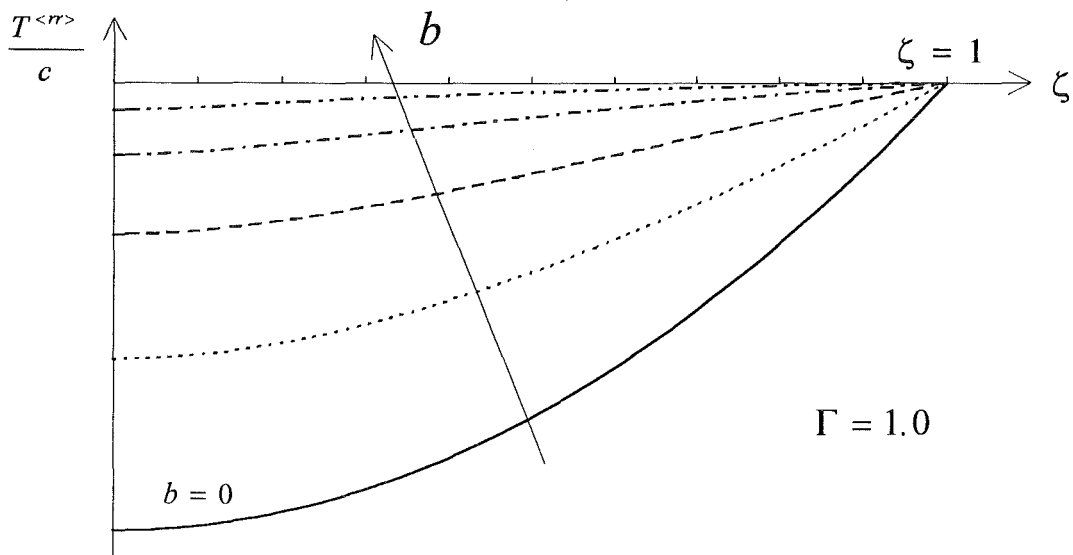


Abbildung B.3.1 a: Radialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Einfache Torsion).

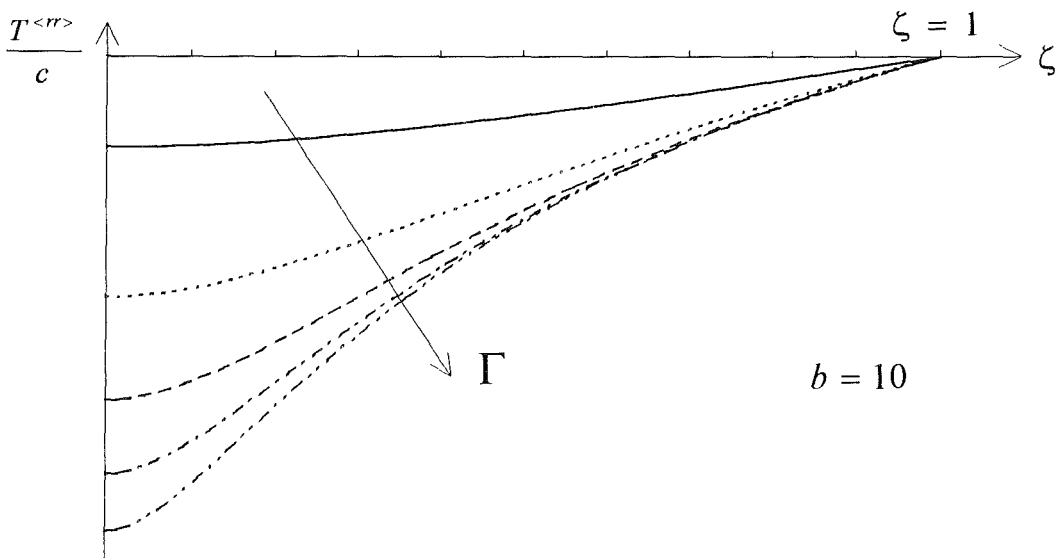
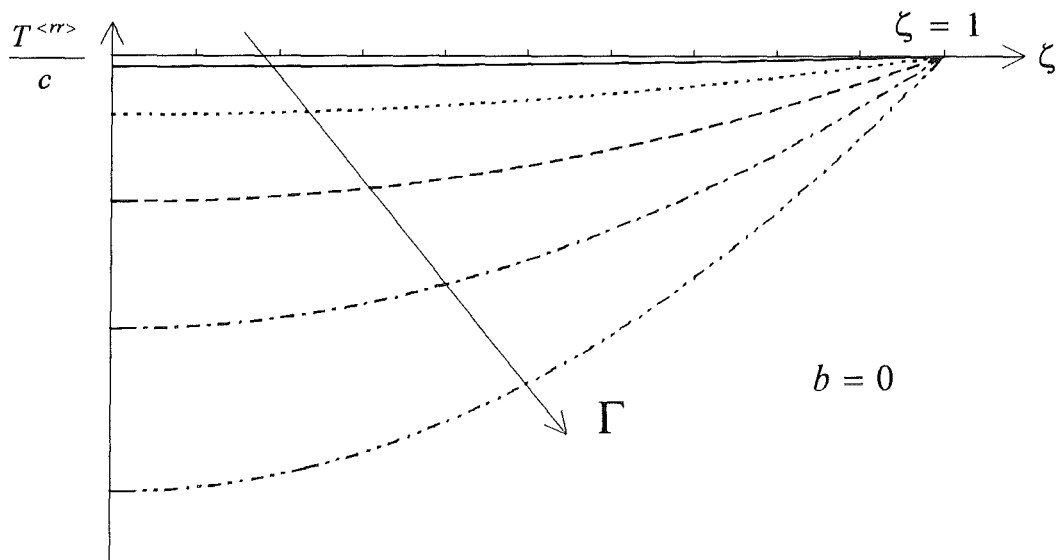


Abbildung B.3.1 b,c: Radialspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Einfache Torsion).

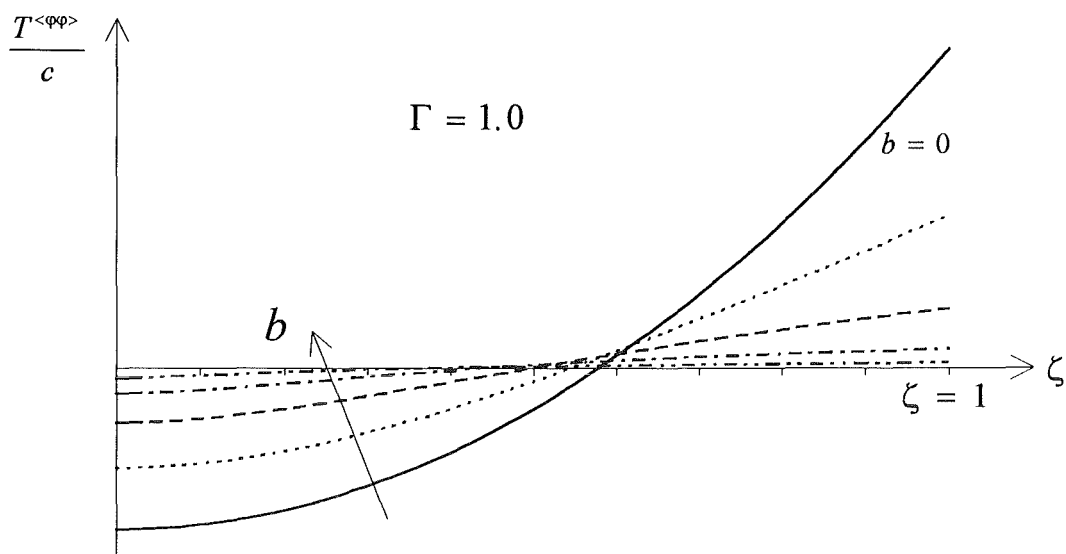


Abbildung B.3.2 a: Tangentialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Einfache Torsion).

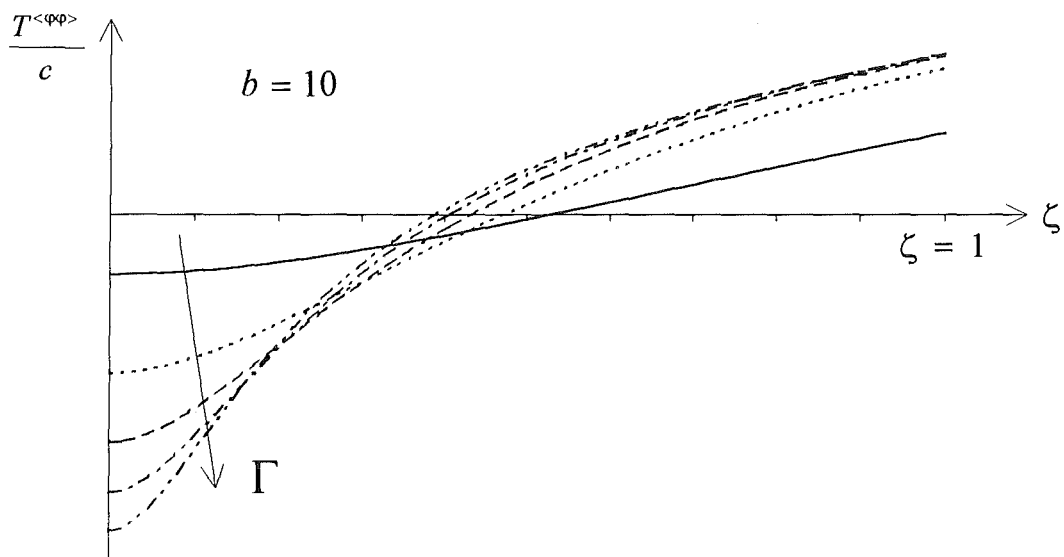
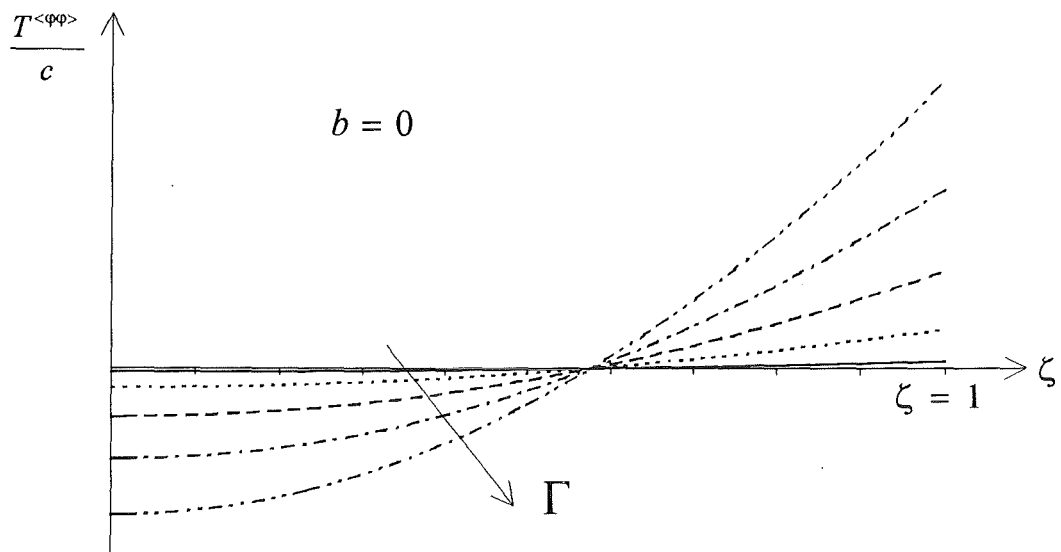


Abbildung B.3.2 b,c: Tangentialspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Einfache Torsion).

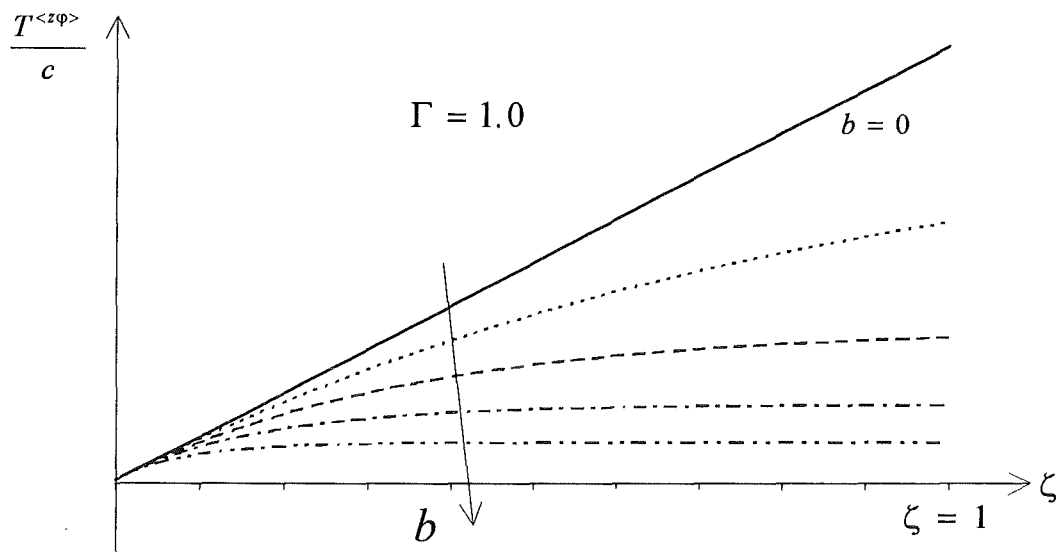


Abbildung B.3.3 a: Schubspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste **und** zweite Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Einfache Torsion).

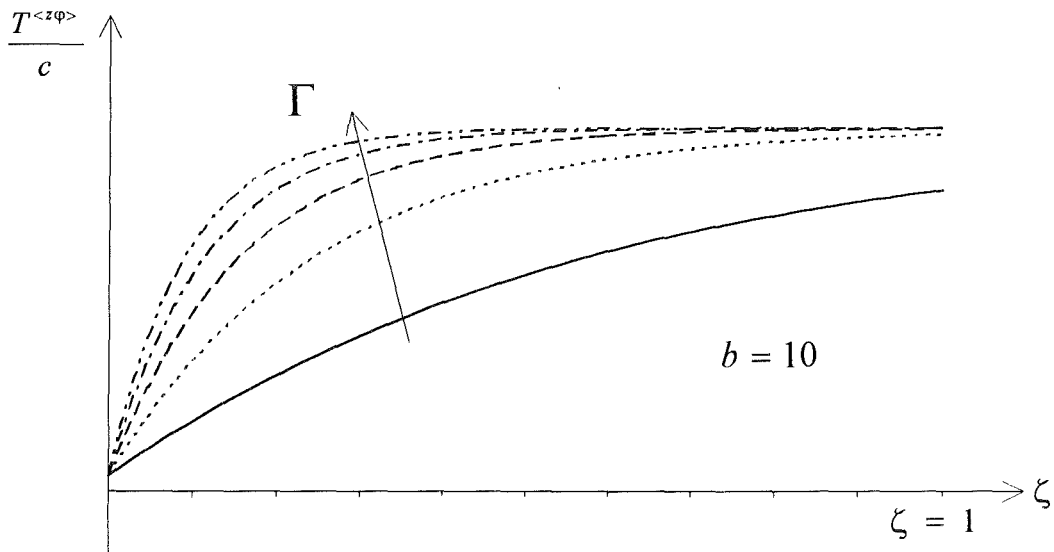
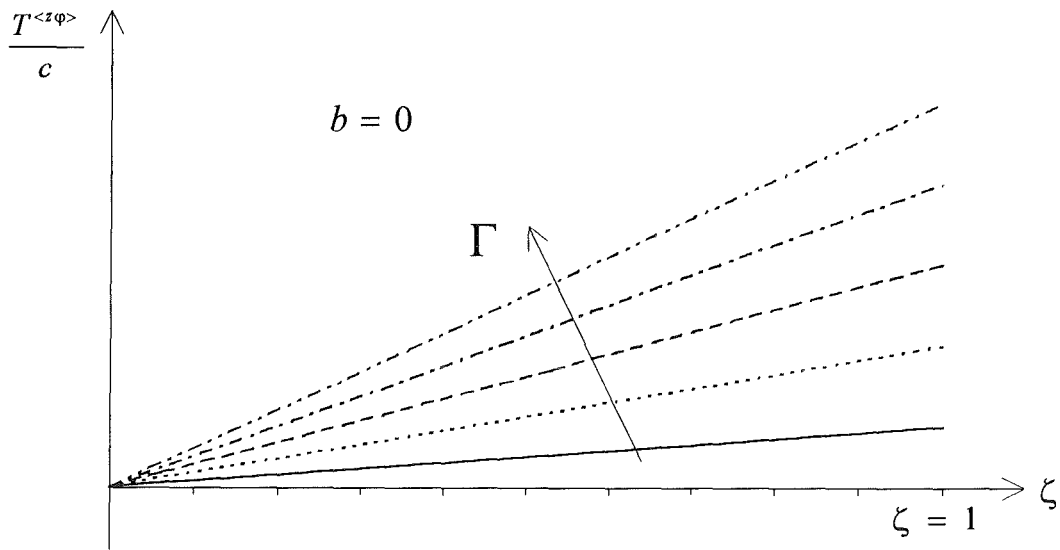


Abbildung B.3.3 b,c: Schubspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b=0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste **und** zweite Familie (Einfache Torsion).

B.4 Plastizität und Torsion mit freiem Ende

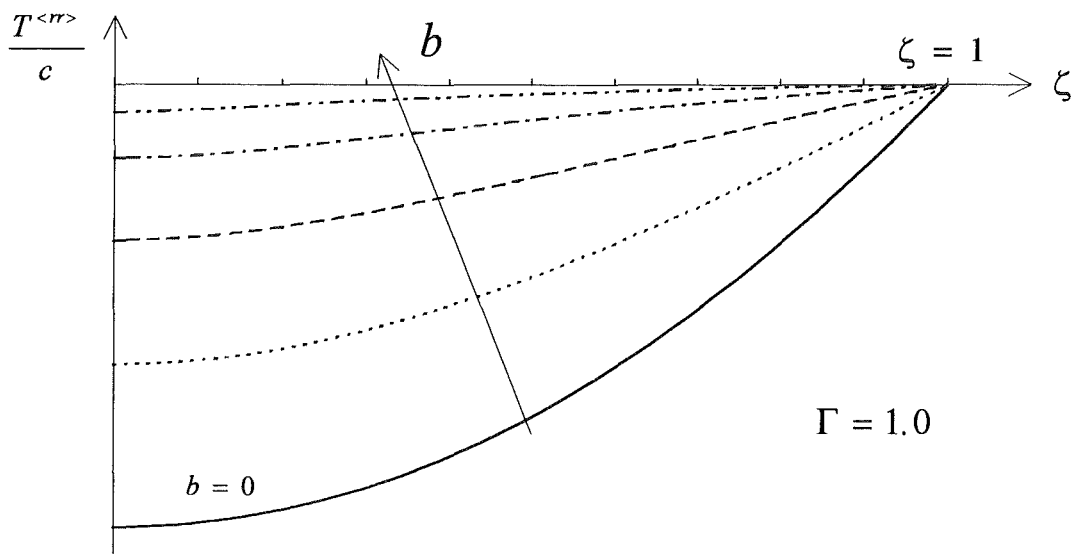


Abbildung B.4.1 a: Radialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Torsion mit freiem Ende).

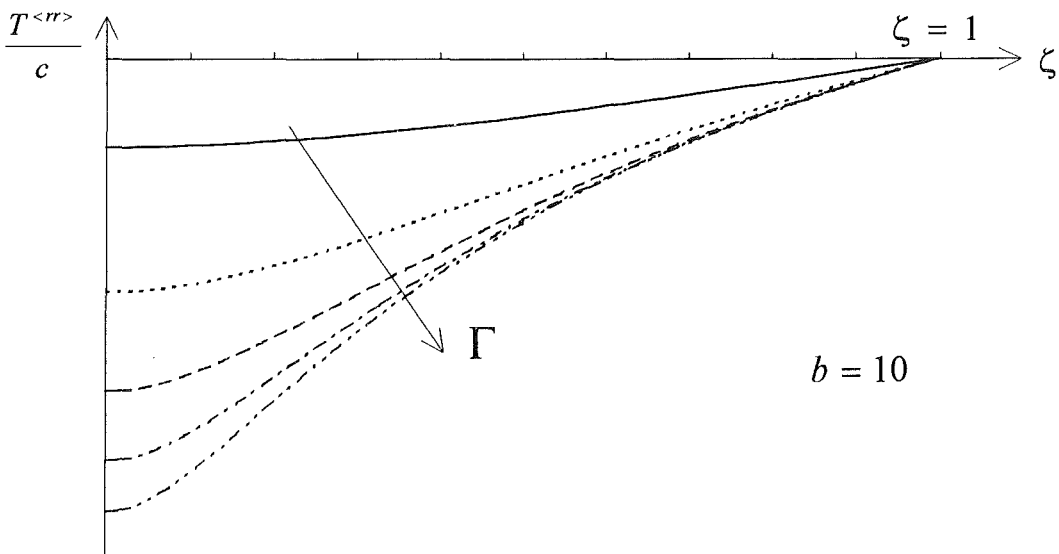
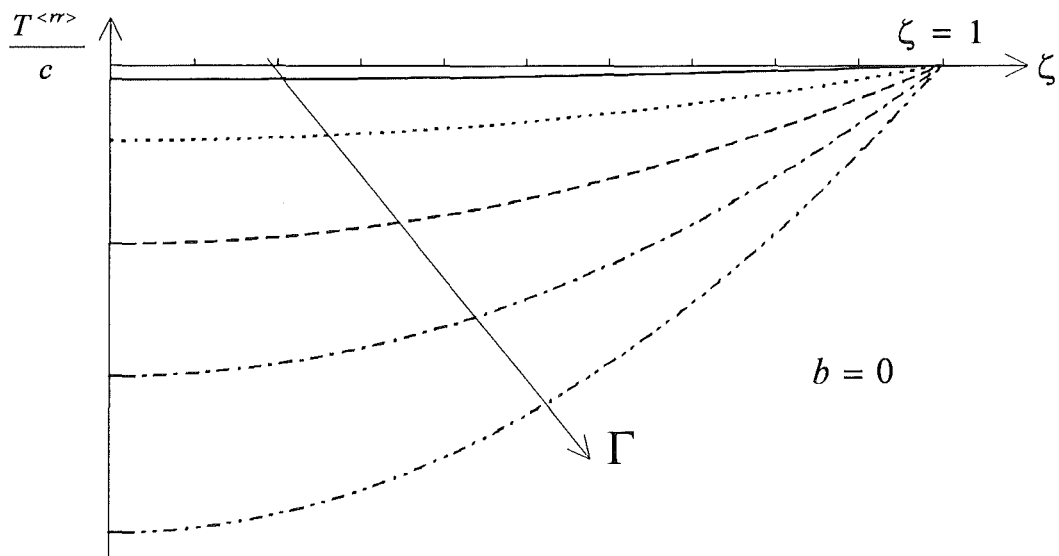


Abbildung B.4.1 b,c: Radialspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Torsion bei freiem Ende).

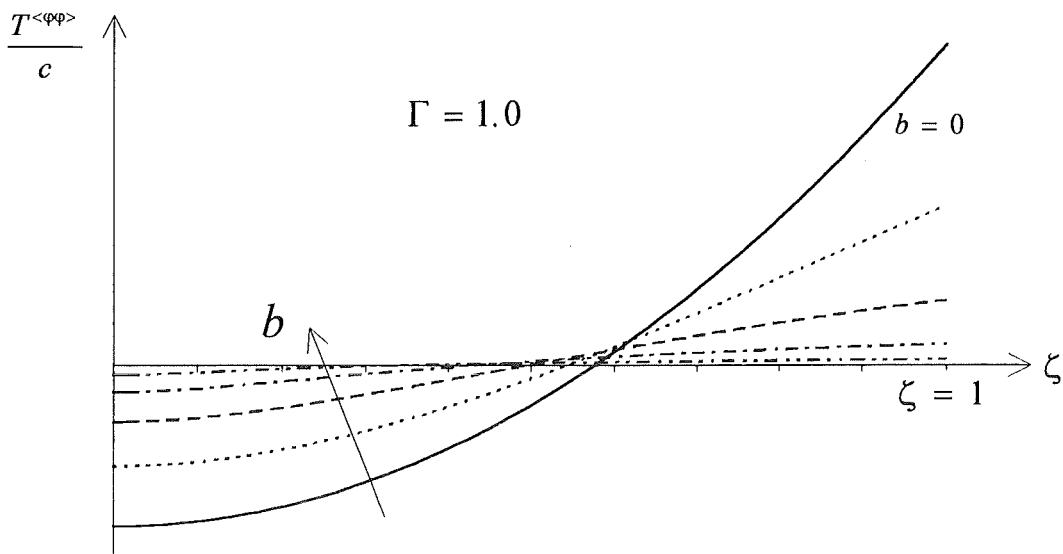


Abbildung B.4.2 a: Tangentialspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Torsion bei freiem Ende).

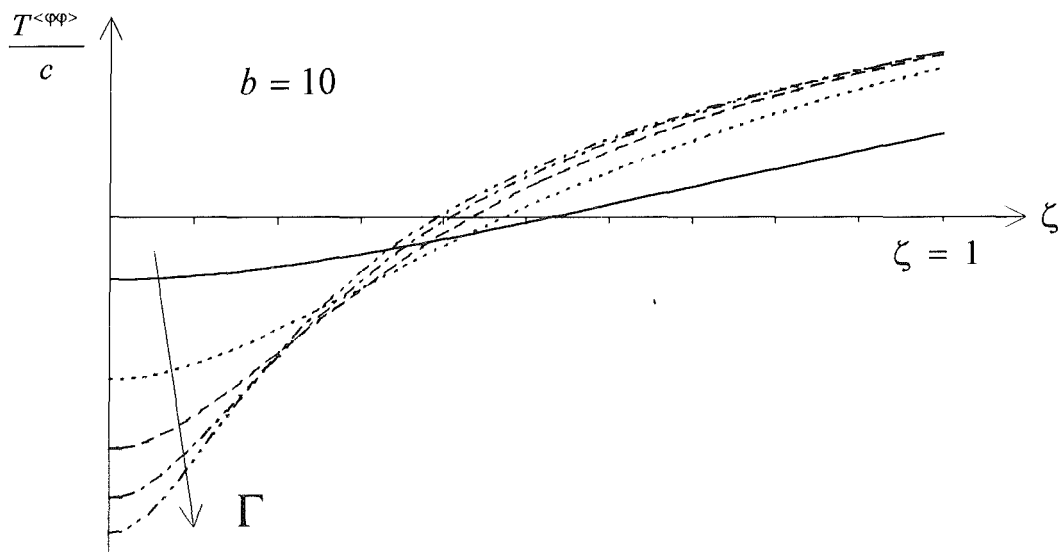
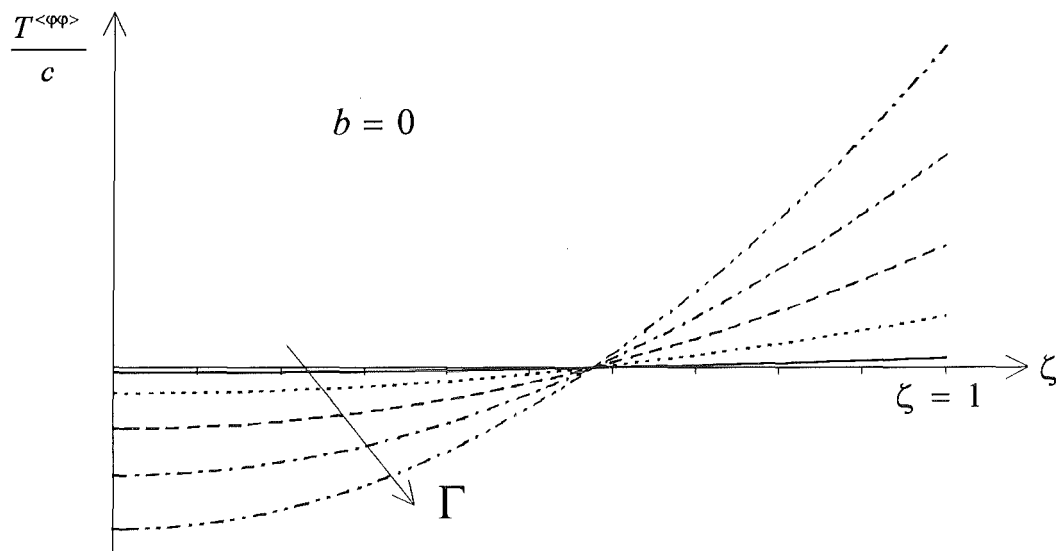


Abbildung B.4.2 b,c: Tangentialspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Torsion bei freiem Ende).

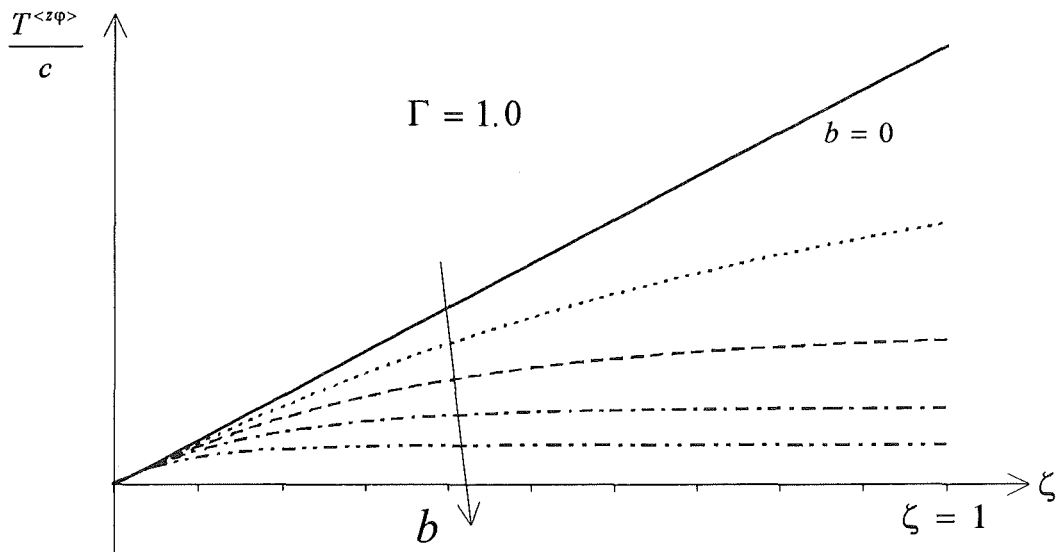


Abbildung B.4.3 a: Schubspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Torsion bei freiem Ende).

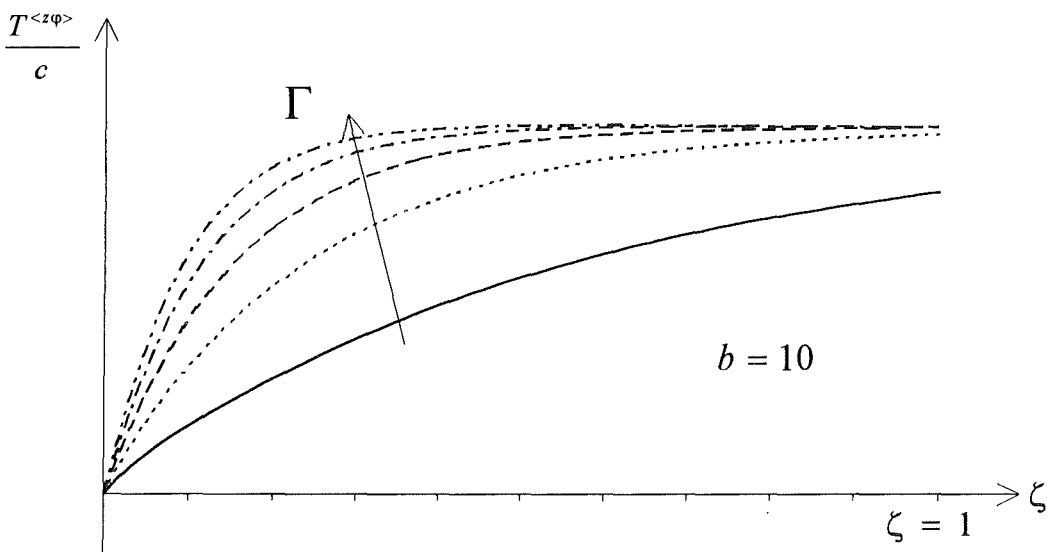
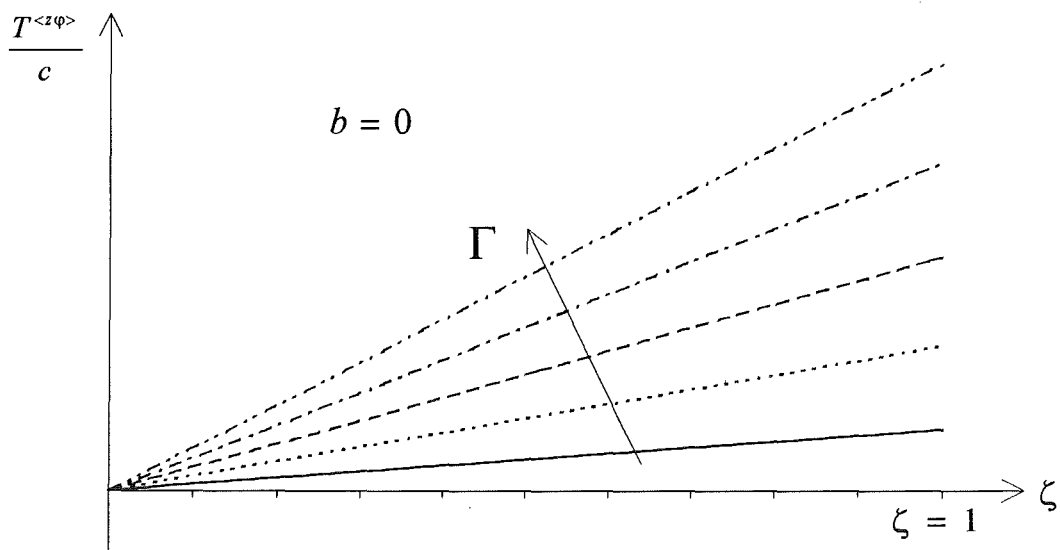


Abbildung B.4.3 b,c: Schubspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die erste Familie (Torsion bei freiem Ende).

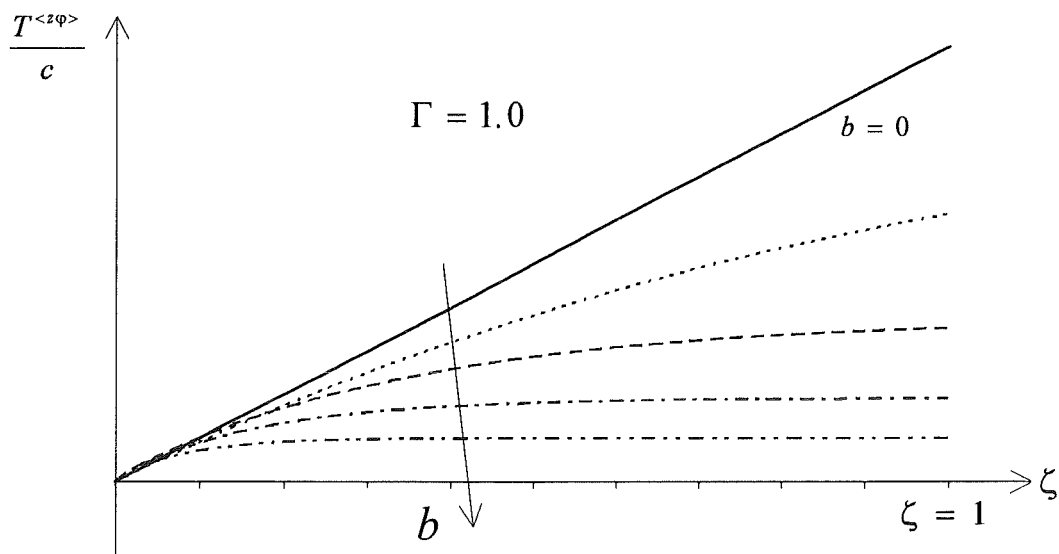


Abbildung B.4.4 a: Schubspannung über dimensionslosen Radius ζ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die zweite Familie bei einem äußeren Scherwinkel von $\Gamma = 1.0$ (Torsion bei freiem Ende).

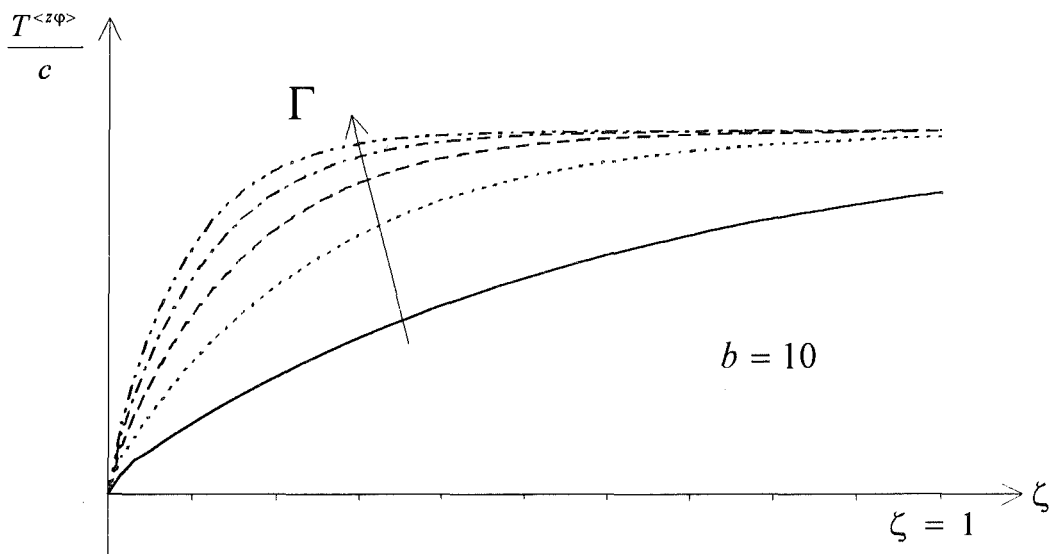
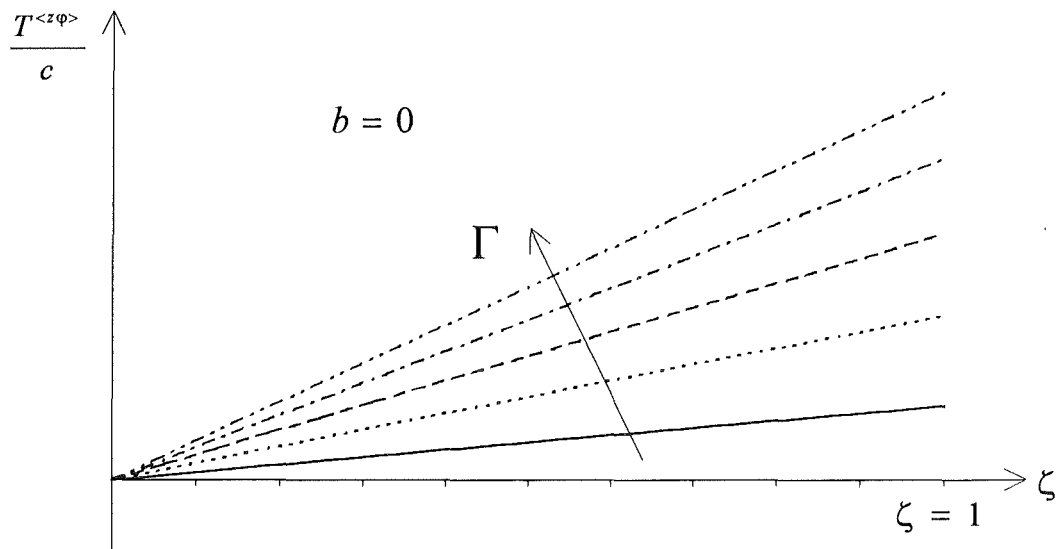


Abbildung B.4.4 b,c: Schubspannung über bezogenen Radius ζ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) in Abhängigkeit des äußeren Scherwinkels Γ für die zweite Familie (Torsion bei freiem Ende).

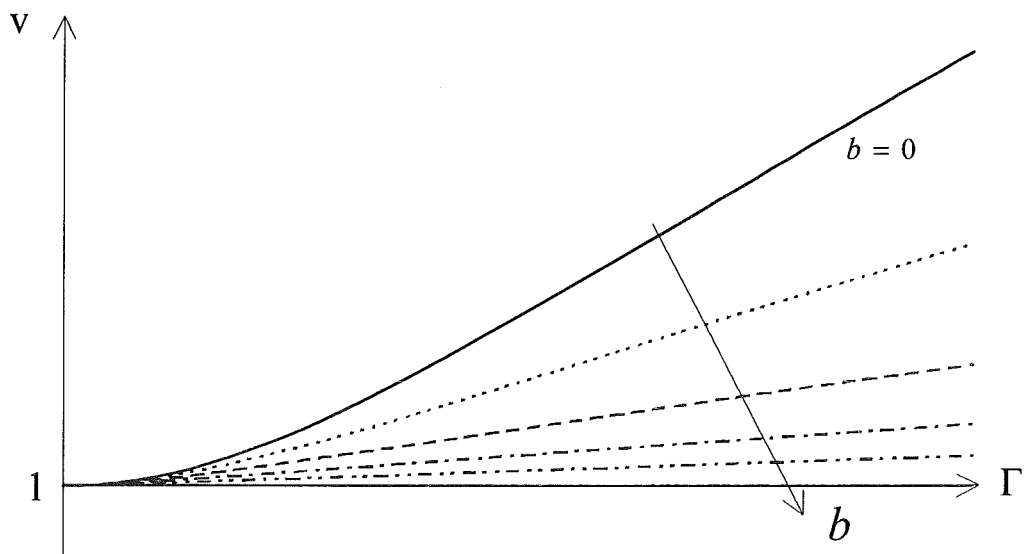


Abbildung B.4.5 a: Verlängerungsfunktion über äußerer Scherung Γ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die erste Familie.

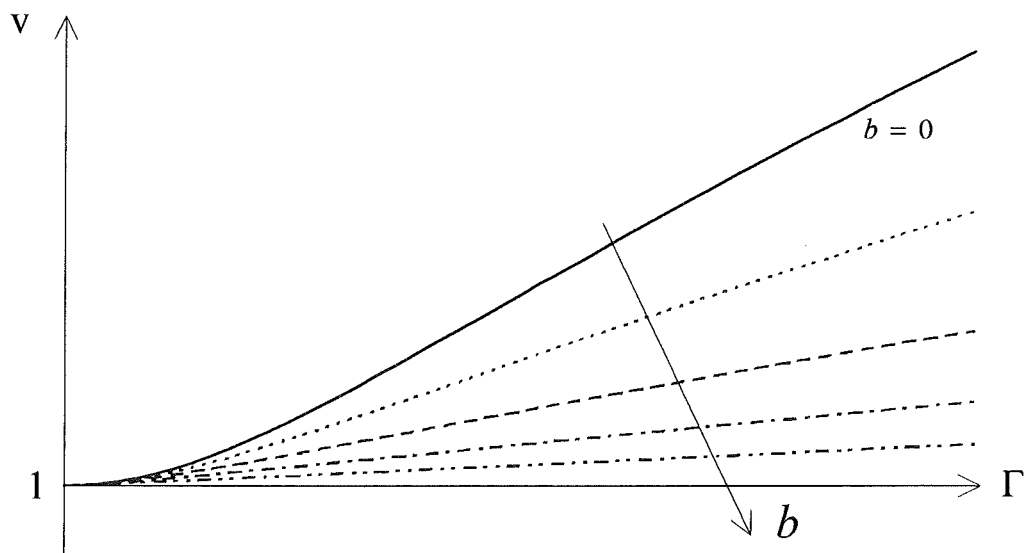


Abbildung B.4.5 b: Verlängerungsfunktion über äußerer Scherung Γ bei kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick in Abhängigkeit der Konstanten der kinematischen Verfestigung b für die zweite Familie.

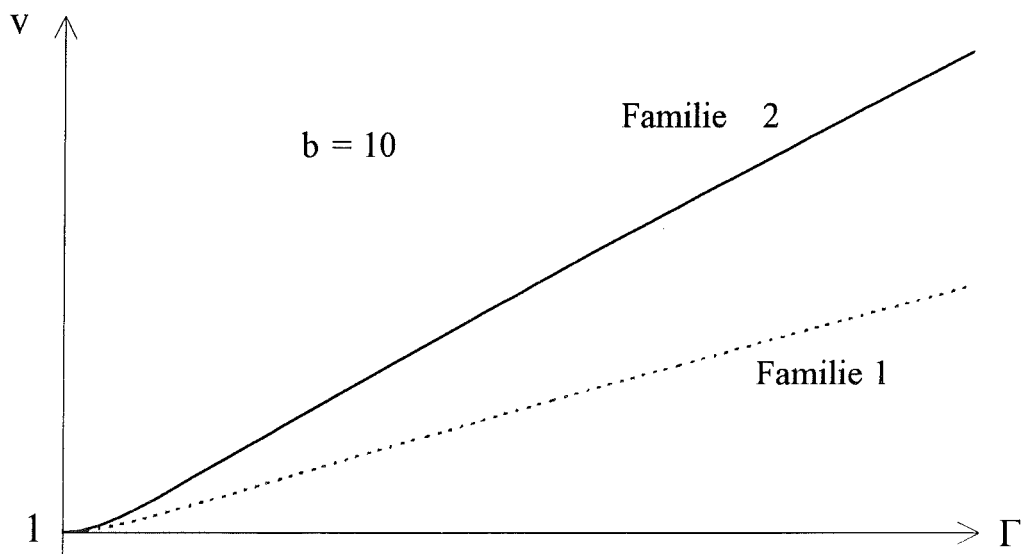
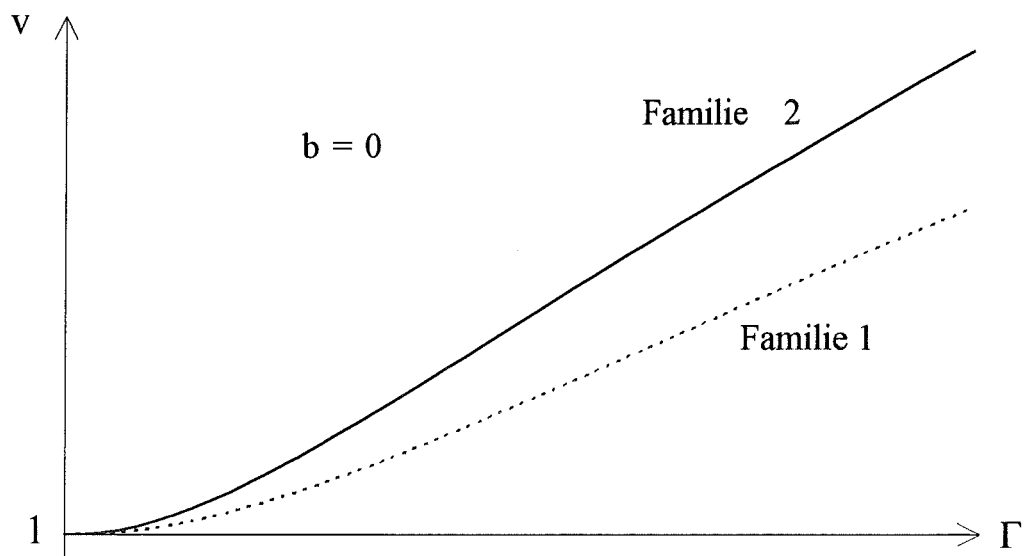


Abbildung B.4.5 c,d: Verlängerungsfunktion über äußerer Scherung Γ bei linearer kinematischer Verfestigung ($b = 0$) und kinematischer Verfestigung nach Armstrong-Frederick ($b \neq 0$) für beide Familien.