



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5617

Numerische Berechnung des Nachlaufs über einem beheizten Zylinder

A. Wintruff, P. Ehrhard

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

Juli 1995

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5617

Numerische Berechnung des Nachlaufs über einem beheizten Zylinder

A. Wintruff, P. Ehrhard

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Numerische Berechnung des Nachlaufs über einem beheizten Zylinder

Mittels eines Finite-Elemente-Verfahrens (FIDAP 6) wird der laminare Nachlauf eines beheizten Zylinders, der entgegen dem Schwerevektor von einem inkompressiblen, *Newton'schen* Fluid angeströmt wird, numerisch berechnet.

Unter Verwendung der *Boussinesq*-Approximation werden die Grundgleichungen für Impuls-, Wärme- und Massentransport skaliert und in dimensionsloser Form im numerischen Verfahren gelöst. Ein Gitter wird generiert und anhand einfacher Grenzfälle werden die numerischen Ergebnisse auf diesem Gitter verifiziert.

In den Rechnungen werden die maßgeblichen Parameter variiert. Typische Merkmale des beheizten Nachlaufs wie die Amplitude der Geschwindigkeit oder der Temperatur auf der Symmetrieachse sowie die kinematische und thermische Grenzschichtdicken können so als Funktion der dimensionslosen Parameter diskutiert werden. Dies sind die unabhängigen Variablen der Längs- und Querkoordinate sowie die *Reynolds*-, die *Prandtl*- und die *Grashof*-Zahl.

Die Ergebnisse der Rechnungen werden mit den Resultaten einer asymptotischen Näherungslösung nach *Griesbaum & Ehrhard* verglichen und in Beziehung gebracht. Die Gültigkeitsbereiche der asymptotischen Lösung werden überprüft und diskutiert.

Numerical simulation of the flow in the wake above a heated cylinder

Using a Finite Element code (FIDAP 6) we simulate the laminar flow in the wake of a heated cylinder. The cylinder is positioned horizontally in the gravitational field, the flow is from below, whereas the fluid is considered incompressible and newtonian.

We apply *Boussinesq's* approximation and use an appropriate scaling to formulate the conservation equations for mass, momentum and heat in a dimensionless form, prior to the numerical solution. The generated grid has been verified using results for simple limiting cases.

During the simulations we vary the influencing parameters. Thus, the typical properties of heated wakes such as amplitudes of velocity and temperature on the symmetric axis or the thickness of kinematic and thermal boundary layers, can be discussed as they depend on the dimensionless parameters. Those are the longitudinal and transversal coordinates as well as *Reynolds*-, *Prandtl*- and *Grashof*-numbers.

We compare our numerical results against an asymptotic solution of *Griesbaum & Ehrhard*. The range of validity of the asymptotic solution is discussed.

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenfassung	1
2 Problemstellung	3
3 Mathematische Formulierung	4
3.1 Grundgleichungen, Randbedingungen	4
3.2 Skalierung, dimensionslose Kennzahlen	6
4 Numerik	9
4.1 Finite Elemente Methode (FEM)	9
4.2 FIDAP	9
4.3 Gittergenerierung /-verfeinerung	11
4.4 Das Rechengebiet	13
5 Ergebnisse	15
5.1 Vergleich FEM/asymptotische Theorie	15
5.2 Zwangsströmung	17
5.3 Mischkonvektion	24
5.3.1 Variation x	25
5.3.2 Variation Gr	27
5.3.3 Variation Pr	32
6 Diskussion	38
7 Literatur	43

1 Zusammenfassung

Mittels eines Finite Element Verfahrens (FIDAP6) wird der laminare Nachlauf eines beheizten Zylinders, der entgegen dem Schwerevektor von einem inkompressiblen, wärmeleitenden Fluid angeströmt wird, numerisch berechnet.

Unter Verwendung der BOUSSINESQ-Approximation, werden die Grundgleichungen für den Impuls- und Wärmetransport skaliert und in dimensionslose Form gebracht. Ein Gitter wird generiert und anhand einfacher Grenzfälle geprüft.

Die maßgeblichen Parameter werden variiert. Typische Merkmale des beheizten Nachlaufs, wie die Amplitude der Geschwindigkeit oder der Temperatur auf der Symmetrieachse, sowie die kinematische und thermische Grenzschichtdicken, können so als Funktion dimensionsloser Parameter diskutiert werden. Dies sind die unabhängigen Variablen der Längs- und Querkoordinate, sowie die REYNOLDS-, PRANDTL- und GRASHOF-Zahl.

Die Ergebnisse der Rechnungen werden mit den Resultaten der asymptotischen Näherungslösung von Rainer Griesbaum et al.[4] verglichen und in Beziehung gebracht.

Der Gültigkeitsbereich der asymptotischen Lösung wird überprüft und diskutiert.

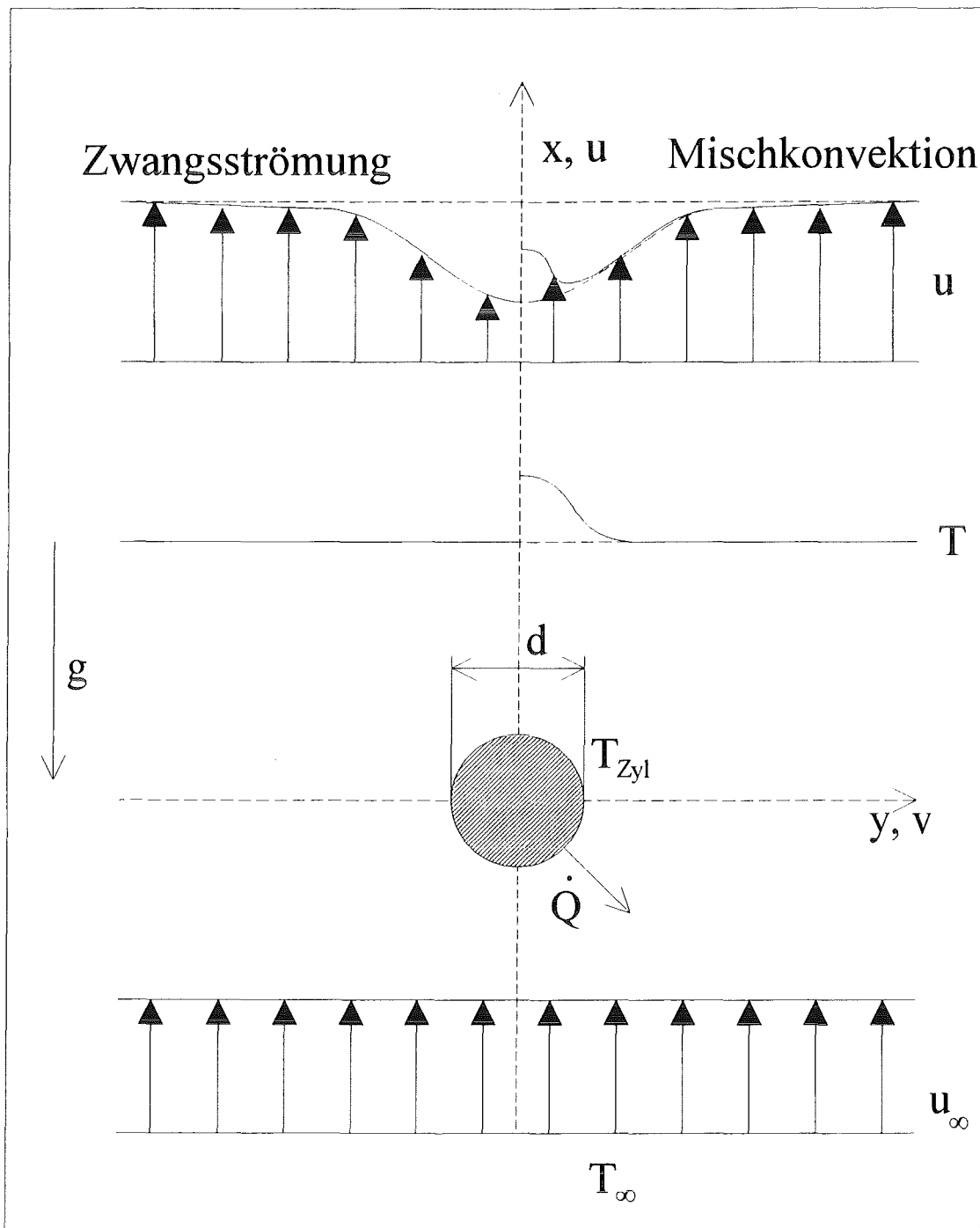


Abbildung 1.1: Skizze des Nachlaufs des beheizten Zylinders

2 Problemstellung

Es wird der laminare Nachlauf eines beheizten, unendlich langen Zylinders behandelt. Das Problem wird zweidimensional und stationär behandelt. Abbildung 1.1 stellt den Zylinder mit dem Durchmesser d betrachtet aus der Richtung der Achse des Zylinders dar. Mit u_∞ und T_∞ wird die Geschwindigkeit und die Temperatur der ungestörten Anströmung bezeichnet. Der Zylinder wird entgegen dem Schwerevektor g von einem zähen, wärmeleitenden NEWTONschen-Fluid angeströmt. Das Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Mittelpunkt des Zylinders. Die x -Achse hat die Richtung der Anströmung, die y -Achse steht senkrecht zu ihr.

In Abbildung 1.1 ist links die durch die reine Zwangsströmung ohne Beheizung des Zylinders hervorgerufene Geschwindigkeitsprofil $u(x,y)$ skizziert. Die Nachlaufdüse entsteht durch die Verdrängungswirkung des Zylinders, bzw. durch dessen Widerstand in der Strömung.

Hat der Zylinder eine konstante Oberflächentemperatur $T_{\text{Zyl}} \geq T_\infty$ kommt es zu einer Wärmeübertragung an das Fluid mit dem Wärmestrom $\dot{Q}(x,y)$. Die Temperaturverteilung $T(x,y)$ bewirkt Auftriebskräfte. Bei temperaturabhängiger Dichte, stellt sich dann unter dem Einfluß der Erdbeschleunigung eine Auftriebsströmung über dem Zylinder ein. Die Beschleunigung der Strömung führt zu dem rechts dargestellten Geschwindigkeitsprofil $u(x,y)$. Es kommt zu einem Auffüllen der Nachlaufdüse.

3 Mathematische Formulierung

3.1 Grundgleichungen, Randbedingungen

Es finden folgende physikalische Grundprinzipien Verwendung:

- Das NEWTONsche Grundgesetz der Dynamik, welches mit dem Kräftegleichgewicht an einem Kontrollraum zu den Impulsgleichungen führt. Für NEWTONsche Fluide heißt diese Gleichung NAVIER-STOKES-Gleichung. Sie lautet für inkompressible, stationäre Strömung[3].

$$(\bar{w} \cdot \nabla) \bar{w} + \frac{1}{\rho} \nabla p' = \bar{f} + \nu \Delta \bar{w}. \quad (3.1)$$

- Die Erhaltung der Masse führt zur Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \bar{w} = 0, \quad (3.2)$$

- Aus dem Grundgesetz der Thermodynamik, in Form des 1. Hauptsatzes für offene Systeme, wird die Energiebilanzgleichung für inkompressible Strömungen abgeleitet

$$\rho c_p (\bar{w} \cdot \nabla T) = \lambda \Delta T. \quad (3.3)$$

Hiermit liegen fünf Differentialgleichungen für den Vektor der Strömungsgeschwindigkeit $\bar{w} = (u', v', w')$, den Druck p' und der Temperatur T vor. Hierbei ist der LAPLACE-Operator durch $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$ und der NABLA-Operator durch $\nabla = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}$ gegeben.

Dabei bedeutet ρ die Dichte, ν die kinematische Zähigkeit, λ die Wärmeleitfähigkeit und c_p die spezifische Wärmekapazität. Eine von der Temperatur abhängige Dichte, führt infolge von Temperaturdifferenzen zu Dichtedifferenzen. Diese bewirken Auftriebskräfte, die als eingepreiste Massenkraft durch die Gewichtskraft des strömenden Mediums bedingt sind.

Für den Druck wird das Bezugssystem

$$p'(x, r) = p'_{\text{sta}}(x) + p'_{\text{dyn}}, \quad (3.4)$$

mit

$$\frac{\partial p'_{\text{sta}}}{\partial x'} = -\rho_{\infty} g \quad (3.5)$$

gewählt.

Es wird die BOUSSINESQ-Approximation eingeführt um die Impulsgleichungen zu vereinfachen. Sie legt folgendes fest:

1. Zähes, wärmeleitendes Medium mit konstanten Stoffeigenschaften.

μ	= const.	, dynamische Viskosität	[kg/ms]
λ	= const.	, Wärmeleitfähigkeit	[W/mK]
c_p	= const.	, spezifische Wärmekapazität	[Ws/kg K]
$\nu = \mu / \rho_{\infty}$	= const.	, kinematische Zähigkeit	[m ² /s]
$\kappa = \lambda / \rho_{\infty} c_p$	= const.	, Temperaturleitfähigkeit	[m ² /s]

2. Die Dichte ist konstant anzunehmen ($\rho = \rho_{\infty} = \text{const.}$). Eine Ausnahme bildet der Auftriebsterm, in dem die lineare Dichte-Temperatur-Beziehung

$$\rho = \rho_{\infty} (1 - \alpha(T - T_{\infty})) \quad (3.6)$$

verwendet wird. Hierbei ist α [1/K] der isobare thermische Ausdehnungskoeffizient.

Dieses Modell stellt in weiten Bereichen eine brauchbare Näherung dar. Seine Grenzen beginnen dort, wo z.B. die Dichte-Temperatur-Beziehung nicht linear wird oder die anderen Stoffgrößen maßgebliche Veränderungen durch die Temperatur erfahren.

Mit den obigen Voraussetzungen ergeben sich für die stationäre, laminare Strömung nach Auswertung der NAVIER-STOKES-Gleichung im zweidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten folgende Grundgleichungen:

• Impulsgleichungen:

$$\rho_{\infty} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) + \alpha(T - T_{\infty}) g \rho_{\infty}, \quad (3.7)$$

$$\rho_{\infty} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right); \quad (3.8)$$

• Massenbilanzgleichung:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad (3.9)$$

- Energiebilanzgleichung:

$$\rho_{\infty} c_p \left(u' \frac{\partial T}{\partial x'} + v' \frac{\partial T}{\partial y'} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right). \quad (3.10)$$

Die Randbedingungen für dieses Problem lauten:

$$\begin{aligned} y' = 0, x' : \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0, v' = 0, \frac{\partial T}{\partial y'} = 0 \\ y' \rightarrow \infty, x' : u' = u_{\infty}, \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, T = T_{\infty} \\ \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{d}{2} : u' = 0, v' = 0, T = T_{Zyl} \\ x' \rightarrow \infty, y' : u' \rightarrow u_{\infty}, v' \rightarrow 0, T \rightarrow T_{\infty} \\ x' \rightarrow -\infty, y' : u' = u_{\infty}, v' = 0, T = T_{\infty} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit x wird die Koordinate parallel zur Anströmung bezeichnet, welche im folgenden Verlauf axiale Richtung genannt wird. y ist demgemäß als Querrichtung aufzufassen. Die Änderung der Enthalpie wird bei inkompressiblen Medien durch die Wärmeleitung und den konvektiven Wärmestrom bestimmt. Die durch Dissipation, also innere Reibung entstehende Energie, so wie Wärmeaustausch durch Strahlung wird vernachlässigt.

3.2 Skalierung, dimensionslose Kennzahlen

Um das Problem dimensionslos zu behandeln, wird folgende Skalierung auf die Grundgleichungen angewendet.

$$x = \frac{x'}{d},$$

$$y = \frac{y'}{d},$$

$$u = \frac{u'}{u_{\infty}},$$

$$v = \frac{v'}{u_{\infty}},$$

$$p = \frac{p'}{p_0},$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \quad \text{mit} \quad \Delta T = T_{\text{Zyl}} - T_\infty = \text{const.} \quad (3.12)$$

Hierbei sind:

u_∞ : Anströmgeschwindigkeit,

d : Durchmesser des Zylinders,

$p_0 = \rho_\infty u_\infty^2$: doppelter Staudruck der Anströmung,

$\Delta T = T_{\text{Zyl}} - T_\infty$: Temperaturdifferenz zwischen Zylinderwand und Anströmung.

Mit der Einführung dreier Kennzahlen, wird nun die dimensionslose Form der skalierten Gleichungen aufgestellt. Diese drei Kennzahlen werden im weiteren Verlauf das Problem vollständig beschreiben.

Zum ersten ist dies die REYNOLDS-Zahl:

$$Re = \frac{u_\infty d}{\nu} \quad (3.13)$$

Sie kann physikalisch als das Verhältnis von Trägheitskräften und Reibungskräften interpretiert werden. Zum zweiten ist dies die GRASHOF-Zahl

$$Gr = \frac{\alpha \cdot g \cdot \Delta T \cdot d^3}{\nu^2} \quad (3.14)$$

die, das Verhältnis der Leistung der Auftriebskräfte und der Leistung der Reibungskräfte beschreibt. Sie gibt einen Aufschluß über die Intensität der Auftriebseffekte. Die Prandtl-Zahl schließlich

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\nu \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} \quad (3.15)$$

stellt das Verhältnis von kinematischer Viskosität, d.h. molekularem Impulstransport, zur Temperaturleitfähigkeit, d.h. molekularem Wärmetransport dar. Sie erlaubt Aussagen zur relativen Grenzschichtdicke von Impuls und Temperatur, da sie die Transporteigenschaften des Mediums in Bezug auf Temperatur und Impuls charakterisiert.

Unter Verwendung der dimensionslosen Größen (s.o.) erhalten wir die Gleichungen und Randbedingungen in dimensionsloser Form.

Impulserhaltungsgleichungen:

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \Theta, \quad (3.16)$$

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (3.17)$$

Massenerhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3.18)$$

Energieerhaltungsgleichung:

$$\left(u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right). \quad (3.19)$$

Die Randbedingungen in der skalierten Form lauten

$$y = 0, \quad x : \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad x : u = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \Theta = 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} : u = 0, \quad v = 0, \quad \Theta = 1$$

$$x \rightarrow \infty, \quad y : u \rightarrow 1, \quad v \rightarrow 0, \quad \Theta \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad y : u = 1, \quad v = 0, \quad \Theta = 0 \quad (3.20)$$

Somit haben die konvektiven Anteile der Gleichungen den Vorfaktor *eins*, der Auftriebsterm in der Impulsgleichung den Vorfaktor

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{Leistung der Auftriebskräfte}}{\text{Leistung der Trägheitskräfte}},$$

der diffusive Anteil der Impulsgleichungen den Vorfaktor Re^{-1} , und der diffusive Transport der Temperaturgleichung den Vorfaktor $Re^{-1} \cdot Pr^{-1} = Pe^{-1}$.

4 Numerik

4.1 Finite Elemente Methode (FEM)

Numerische Methoden benutzen, anstatt der exakten kontinuierlichen Lösung, Näherungslösungen an einer endlichen Anzahl diskreter Stellen des Lösungsgebietes. An Stelle eine Differentialgleichung zu lösen, wird ein System endlich vieler algebraischer Gleichungen gelöst. Jedoch ist dieser Lösungsweg nur dann sinnvoll, wenn die Differenz zwischen der exakten und der Näherungslösung gegen Null geht, d.h. wenn die Lösung konvergiert. Bei der Finite-Elemente-Approximation wird die Lösung durch eine unendliche Reihe von Basisfunktionen angenähert, die in der praktischen Anwendung zwangsläufig nur eine endliche Anzahl der Terme berücksichtigt und damit das Lösungsgebiet in endlich viele Untergebiete (Finite Elemente) der Größe Δx aufteilt. Für die Annahme $\Delta x \rightarrow 0$ ergibt sich gezwungenermaßen, daß die Anzahl der Basisfunktionen zunimmt und eine möglichst genaue Approximation entsteht.

4.2 FIDAP

Das Problem wird mit Hilfe des FEM-Programms FIDAP-6 behandelt. Das Programm besteht aus drei Teilen. Zum einen aus dem Pre-Prozessor, der sich untergliedert in FIPREP und FIMESH. In diesen beiden Modulen wird zunächst die Geometrie des Rechengebietes festgelegt. Ein Gitter wird in dem Rechengebiet generiert und auf dieses generierte Maschennetz werden die Randbedingungen des Problems aufgebracht. Dies sind beispielsweise die Stoffwerte, Geschwindigkeits- oder Temperaturprofile. Das so aufbereitete Problem wird dem zweiten Teil des Programms FISOLV zur Lösung übergeben. FISOLV transformiert die partiellen Differentialgleichungen in ein System algebraischer Gleichungen, welches dann iterativ gelöst wird. Im dritten Teil des Programms FIPOST können die Ergebnisse interaktiv graphisch dargestellt und ausgewertet werden.

Wir haben ein zweidimensionales, laminares, stationäres Problem, das dimensionslos behandelt werden soll. In FIDAP wird die Option *strongly coupled flow* gewählt, die von folgenden Grundgleichungen ausgeht:

Impulsbilanzgleichungen:

$$\underbrace{\rho_0}_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \underbrace{\rho_0 g}_1 \left[\underbrace{\beta_T}_{Gr/Re^2} (T - T_0) \right] + \underbrace{\mu}_{Re^{-1}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\underbrace{\rho_0}_1 \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\mu}_{Re^{-1}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Wärmetransportgleichung:

$$\underbrace{c_p \cdot \rho_0}_1 \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \underbrace{\kappa}_{Pr^{-1} Re^{-1}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.4)$$

Es steht κ für die Temperaturleitfähigkeit (diffusivity), sowie β_T für den Volumenausdehnungskoeffizienten (volume expansion coefficient). Die restlichen Größen sind schon aus den Gleichungen (3.7) bis (3.10) ersichtlich.

Wir setzen somit in FIDAP für die Stoffeigenschaften

$$\rho_0 = 1,$$

$$g = 1,$$

$$\mu = \frac{1}{Re},$$

$$\beta_T = \frac{Gr}{Re^2},$$

$$\kappa = \frac{1}{Pr \cdot Re},$$

$$c_p = 1, \quad (4.5)$$

und erreichen damit, daß die Zustandsgrößen u , v , p , T als dimensionslose Größen gemäß den Gleichungen (3.16) bis (3.19) im Programm aufgefaßt werden. Damit löst FIDAP das Problem in dimensionsloser Form, was den Vorteil hat, daß die einzelnen Größen und Koeffizienten in

ihrer Größenordnung zwischen 10^{-2} und 10^{+3} liegen. Diese Spanne vergrößert sich dramatisch, wenn das Problem dimensionsbehaftet behandelt wird. Die Folge sind numerische Fehler und Probleme bei der Verknüpfung von sehr kleinen mit sehr großen Zahlen.

4.3 Gittergenerierung- / verfeinerung

Als nächsten Schritt wird ein Gitter um den Zylinder generiert. Aus Symmetriegründen brauchen wir nur die Hälfte des Strömungsgebietes zu betrachten. Abbildung 4.1 zeigt das verwendete Gitter.

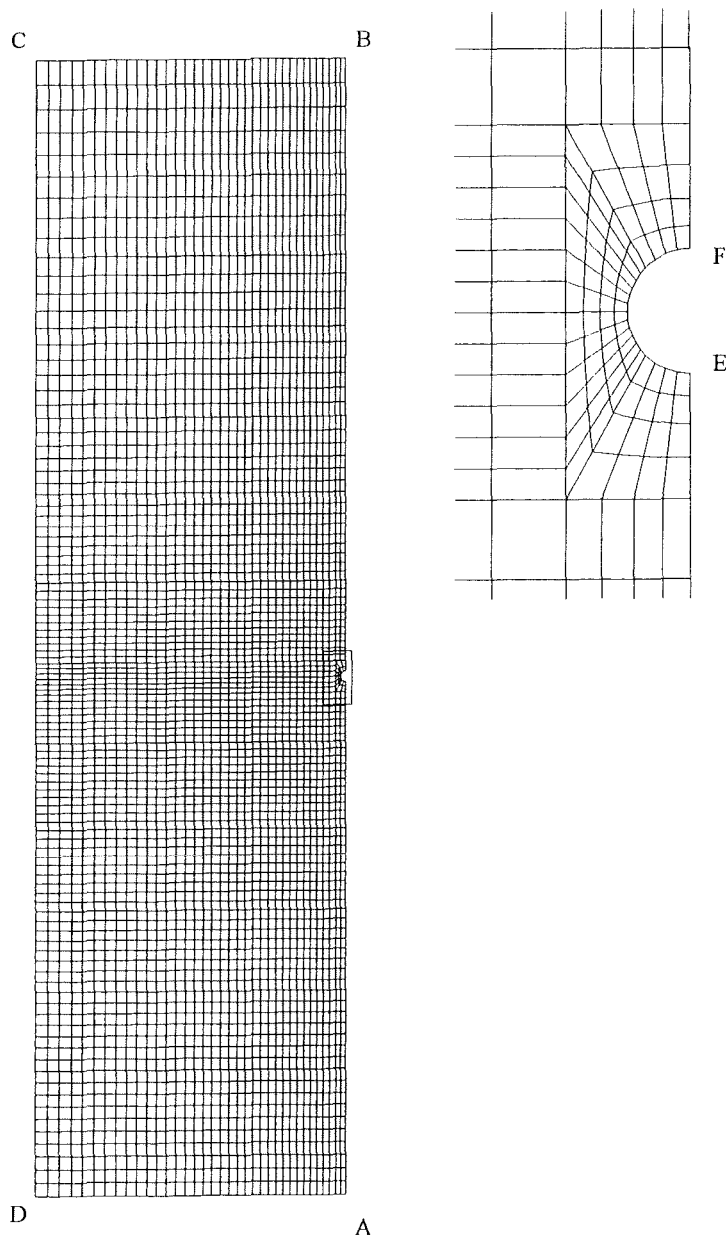


Abbildung 4.1: Das verwendete Rechengitter

Die Grenzen des Rechengebietes sind entsprechend der formulierten Randbedingungen zu wählen. Während die Symmetrielinien \overline{AE} und \overline{FB} sowie der Halbzylinder \overline{EF} entsprechend gewählt werden können, stellt sich für die übrigen Ränder das Problem, daß die mathematische Randbedingungen (3.11) für $x' \rightarrow \pm\infty$ bzw. für $y' \rightarrow \pm\infty$ formuliert sind. Hier muß eine endliche Abmessung in Kauf genommen werden., wobei stets sichergestellt werden muß, daß der Fehler klein bleibt.

In der folgenden Tabelle sind die tatsächlich in der Numerik verwendeten Randbedingungen für das Problem ersichtlich:

		Temperatur	Geschwindigkeit u	Geschwindigkeit v
Außenkante	D - C :	$\Theta = 0$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$
Auslauf	C - B :	$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$	$-p + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$
Einlauf	D - A :	$\Theta = 0$	$u = 1$	$v = 0$
Symmetrieachse	A - E :	$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$v = 0$
	F - B :	$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$v = 0$
Oberfläche des Zylinders	E - F :	$\Theta = 1$	$u = 0$	$v = 0$

Die auf das Gitter aufgebrachten Randbedingungen weichen zum Teil von den in der Theorie geforderten Randbedingungen (3.20) ab. Die mathematisch exakt formulierten Randbedingungen gelten für den unendlich ausgedehnten Raum. Numerisch kann aber nur auf einem begrenzten geometrischen Raum gerechnet werden.

Um festzustellen ob das Gitter fein genug ist, werden mehrere Rechnungen durchgeführt. Bei jeder weiteren Rechnung wird ein um Faktor zwei feineres Gitter angewandt. Diese Prozedur wird so oft wiederholt, bis sich die Ergebnisse nicht mehr merklich ändern. Durch diese Bestimmungsweise der Knotendichte wird ein optimales Verhältnis zwischen Rechenzeit und Genauigkeit gewählt. Die Methode führt auf das in Abbildung 4.1 dargestellte Gitter. Für Rechnungen mit großen PRANDTL- oder großen REYNOLDS-Zahlen wird eine dünne thermische, beziehungsweise kinematische Grenzschicht erwartet. In diesen Fällen wird ein verfeinertes Gitter, verfeinert insbesondere entlang der Symmetrielinie, angewandt.

4.4 Das Rechengebiet

Bei Vergrößerung des Rechengebietes sollte analog zu der Verfeinerung des Gitters keine Änderung des Ergebnisses eintreten. Um die Größe des Kontrollraumes abzuschätzen, werden die ersten Rechnungen mit $Re = 10$ durchgeführt. Mit dieser REYNOLDS-Zahl ist die untere Grenze der Gültigkeit des asymptotischen Modells von Griesbaum et al. erreicht. Für kleinere REYNOLDS-Zahlen verliert die Grenzschichtapproximation ihre Gültigkeit. Es wird zunächst reine Zwangsströmung zugrunde gelegt und bei $Re = 10$ demgemäß eine relativ breite kinematische Grenzschicht im Nachlauf erwartet. Die Ausdehnung des Rechengebiets in die Querrichtung y wird nun so festgelegt, daß an der Grenze die Randbedingungen in natürlicher Weise erfüllt werden. Es zeigt sich hierbei, daß die Grenze $y = 30$ ausreichend ist, um das Abklingen der Störung des Stromfeldes sanft zu ermöglichen.

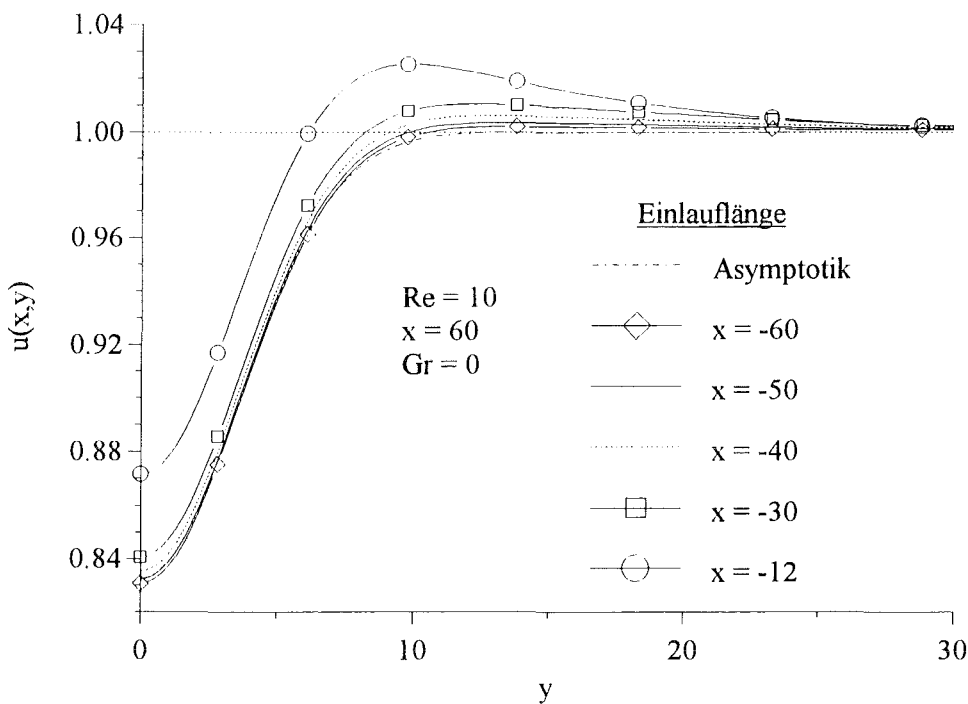


Abbildung 4.2: Profile der Längsgeschwindigkeit u bei veränderter Einlauflänge x

Die Einströmung auf der Linie \overline{AD} wollen wir parallel der Anströmung, ungestört vornehmen. Aus diesem Grund muß das Rechengebiet gleichfalls genügend stromauf ausgedehnt werden. Die Auswirkungen eines zu kleinen Rechengebiets stromauf kann der Abbildung 4.2 entnommen werden.

Diese Rechnungen durchgeführt bei $Re = 10$, $Gr = 0$, stellen die Veränderung der Axialgeschwindigkeit bei $x = 60$ für verschiedene Einlaufängen dar. Zum Vergleich ist das asymptotische Modell von Griesbaum et al. eingetragen. Man erkennt, daß bei einer Vergrößerung des Einlaufs von $x = -50$ auf $x = -60$ kaum noch eine Veränderung des Resultats der Rechnung auftritt. Bei kürzeren Einlaufängen liefern die Rechnungen deutlich unterschiedliche Profile. Unsere Untersuchungen zeigen diesbezüglich auf, daß eine Einlaufänge von $x = -50$ ausreichend ist, um den REYNOLDS-Zahlenbereich von $10 \leq Re \leq 100$ abzudecken.

Wir werden im weiteren Verlauf das Rechengebiet von $x = -50$ bis $x = 60$ in x -Richtung ausdehnen. Die Ausdehnung in y -Richtung ist $y = 30$. Diese Größe hat sich nach eingehender Überprüfung in vorausgegangenen Rechnungen bewährt und als ausreichend erwiesen.

5 Ergebnisse

5.1 Vergleich FEM/asymptotische Theorie

Wir wollen im folgenden unsere Resultate aus den FEM-Rechnungen den asymptotischen Resultaten nach Griesbaum et al. gegenüberstellen.

Die Unterschiede der beiden Modelle liegen zum einem in der Skalierung. Im asymptotischen Modell wird eine separate Skalierung angewandt, welche jedoch bei Kenntnis von Re leicht in unsere Skalierung umgerechnet werden kann. In beiden Modellen wird weiterhin eine GRASHOF-Zahl gemäß

$$Gr = \frac{\alpha \cdot g \cdot \Delta T \cdot d^3}{\nu^2}$$

verwendet. ΔT wird in beiden Modellen jedoch unterschiedlich gebildet. In den FEM-Rechnungen wird die Oberflächentemperatur des Zylinders T_{Zyl} fest vorgegeben, deshalb ergibt sich für die GRASHOF-Zahl

$$\Delta T = T_{Zyl} - T_{\infty} = \text{const.} \quad (5.1)$$

In der asymptotischen Theorie ist es hingegen nur möglich den integralen Wärmestrom in die Strömung \dot{Q} festzulegen. Somit bildet sich hier die GRASHOF-Zahl mit

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}}{\nu \rho_{\infty} c_p} \quad (5.2)$$

Um eine Vergleichsrechnung mit dem asymptotischen Modell durchführen zu können, muß vorher der Wärmestrom \dot{Q} bestimmt werden, welcher über die Zylinderwand mit konstanter Temperatur T_{Zyl} der Strömung zugeführt wird. Dies geschieht durch eine Gesamtbilanz über die Grenzen des Rechengebiets \overline{DC} und \overline{CB} , durch welche der Wärmestrom austritt. Aus der numerischen Lösung wird dieses Integral durch Summation über die lokalen Wärmeströme an den Knoten erreicht. Im übrigen zeigt sich, daß der weitaus überwiegende Teil konvektiv über die Grenze \overline{CB} ausgetragen wird. Der diffusive Anteil ist um einen Faktor 10^{-3} kleiner als der

konvektive Wärmestrom. Die Summe aus konvektivem und diffusivem Wärmestrom über \overline{DC} ist um den Faktor 10^{-12} kleiner als der über die Grenze \overline{CB} ausgetragene Wärmestrom.

Ist \dot{Q} bekannt, so kann $Gr_G = Gr \cdot Re \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot \Theta \cdot dy$ berechnet werden und eine asymptotische Vergleichsrechnung wird möglich.

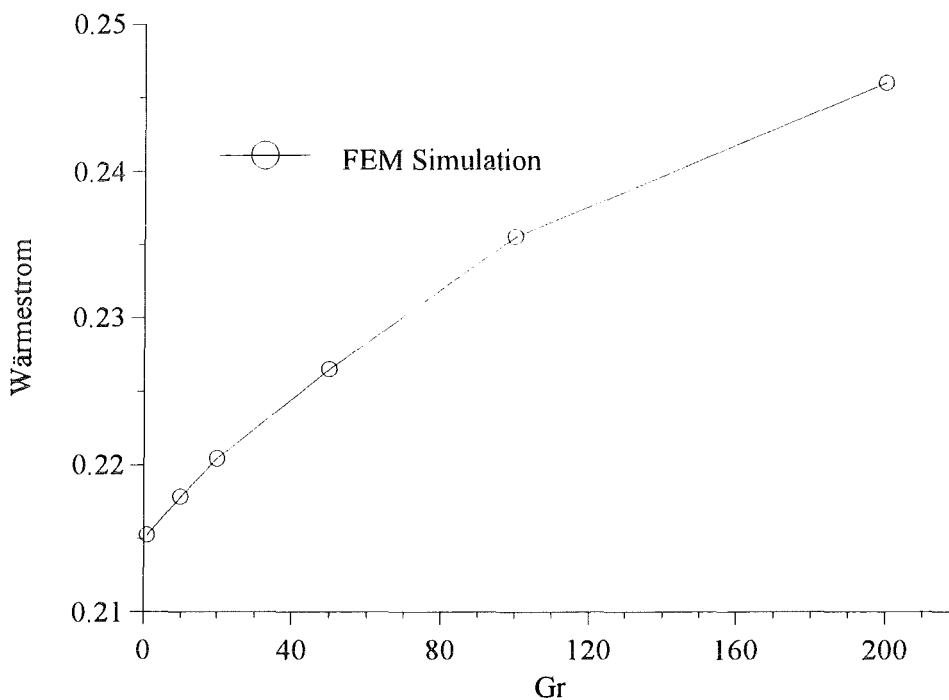


Abbildung 5.1: Wärmestrom \dot{Q} bei wachsender GRASHOF-Zahl

Führen wir diese Vergleichsrechnung für verschiedene GRASHOF-Zahlen aus, so erhalten wir den Wärmestrom \dot{Q} als Funktion von Gr wie es in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Durch die Analyse der Daten mittels Regression wird die Abhängigkeit

$$\dot{Q} \sim Gr^{1/3} \sim (T_{Zyl} - T_{\infty})^{1/3} \quad (5.3)$$

erkannt.

Im asymptotischen Modell von Griesbaum et al. ist aufgrund der Vorgabe des Wärmestroms eine analoge Abhängigkeit nicht abzuleiten. Vielmehr muß aufgrund der Bildung der GRASHOF-Zahl im asymptotischen Modell die Abhängigkeit $\dot{Q} \sim Gr_G$ folgen.

5.2 Zwangsströmung

Das Problem wird zunächst ohne Auftrieb diskutiert. Wir betrachten den mit konstanter Geschwindigkeit u_∞ angeströmten Zylinder, wobei auf dem Zylinder die Temperatur $T_{\text{Zyl}} = T_\infty$ vorgegeben ist. Die Rechnungen wird ausgeführt für $Re = 100$, $Gr = 0$.

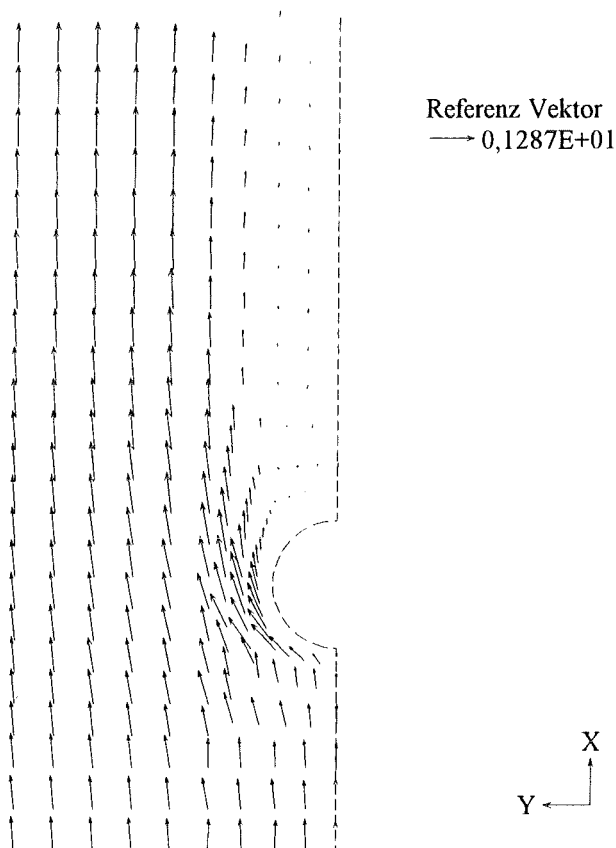


Abbildung 5.2: Vektor Plot der Geschwindigkeit $\tilde{u} = \sqrt{u^2 + v^2}$

Abbildung 5.2 zeigt das Vektorfeld der Geschwindigkeit $\tilde{u} = \sqrt{u^2 + v^2}$. Die Länge der Pfeile steht im Verhältnis zu der Größe der Geschwindigkeit weiterhin ist die Richtung der Geschwindigkeit ersichtlich. Es ist das Ansteigen der Geschwindigkeit beim Umströmen des Zylinders zu erkennen. Des weiteren erkennen wir die Ausbildung eines Rückströmgebietes unmittelbar hinter dem Zylinder. Auf der Symmetrieachse ist dort die Strömungsgeschwindigkeit entgegen der Anströmgeschwindigkeit gerichtet.

Abbildung 5.3 zeigt die Axialgeschwindigkeit $u(x,y)$ in verschiedenen Abständen x vom Zylinder. Zunächst ist aus den FEM Ergebnissen (durchgezogene Linien) zu erkennen, daß sich die Nachlaufdüse stromab verbreitert und zudem aufgefüllt wird. Aus den FEM- Rechnungen

erhalten wir stets Geschwindigkeiten, die im Außenfeld geringfügig größer als die Anströmgeschwindigkeit u_∞ sind und für $y \rightarrow \infty$ auf u_∞ abfallen. Dies ist eine Folge der Ausdehnung des Zylinders, welches ein Ausweichen der Strömung und eine Beschleunigung bedingt.

Nun sollen die numerischen Rechnungen mit den Ergebnissen des asymptotischen Modells von Griesbaum et al. verglichen werden. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen Werte mit dem asymptotischen Modell (vgl. gestrichelte Linien) zu erkennen. Die Profile aus beiden Methoden stimmen bereits für $x = 10$ recht gut überein und die Übereinstimmung wird mit wachsendem x deutlich besser. Im Gegensatz zum numerischen Modell, in dem es immer eine Überhöhung über die Anströmgeschwindigkeit gibt, nähert sich die Längsgeschwindigkeit des asymptotischen Modells stets von unten der Anströmgeschwindigkeit an. Diese Diskrepanz ist darauf zurückzuführen, daß im asymptotischen Modell die Ausdehnung des Körpers nicht vorhanden ist. Vielmehr erfolgt an einem fiktiven Punkt das Einbringen der Widerstandskraft ($\sim c_w$) und der Wärme (\dot{Q}). Dies ist letztlich die Ursache dafür, daß das Modell erst für große x gültig wird.

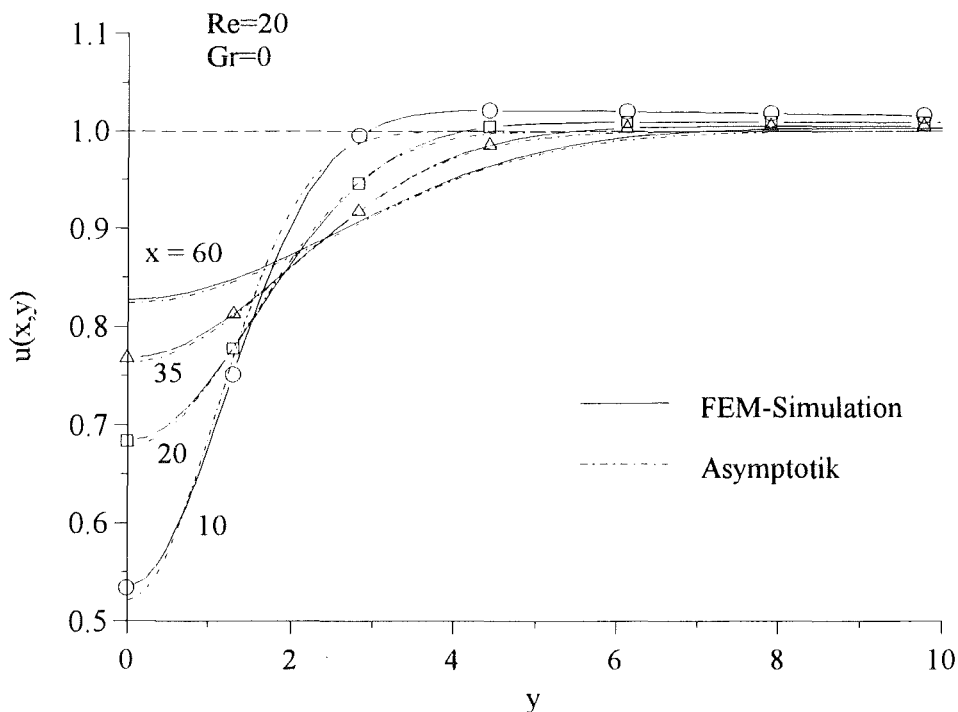


Abbildung 5.3: Profile der Längsgeschwindigkeit u in unterschiedlicher Entfernung x nach dem Zylinder

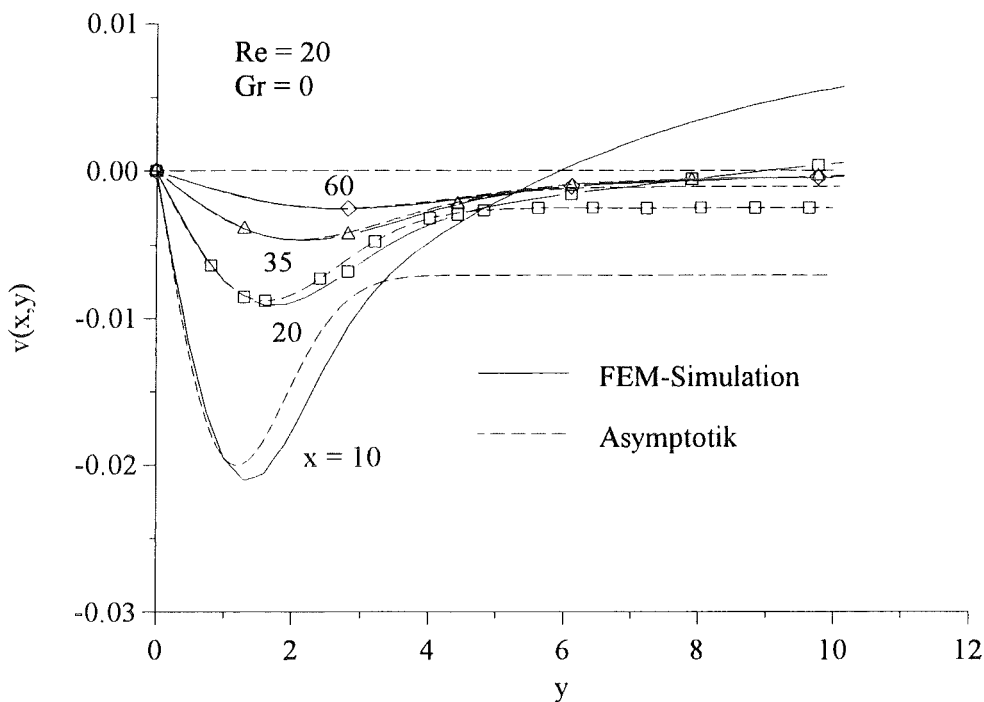


Abbildung 5.4: Quergeschwindigkeit v bei unterschiedlichen x

Betrachten wir die Profile der Quergeschwindigkeit v in Abbildung 5.4 für den gleichen Parametersatz, so erkennen wir auch hier die Verdrängungswirkung des Zylinders bei der FEM-Simulation. Für $x = 10$ erhalten wir aus der FEM-Simulation noch wesentlich nach außen gerichtete Strömungsanteile. Je weiter wir uns dann aber stromab bewegen, desto stärker klingen diese Anteile ab.

Der nach außen gerichtete Strömungsanteil bei $x = 10$ steht im Kontrast zu den Aussagen des asymptotischen Modells. Die unterschiedliche Richtung der Strömungsanteile, bei der numerischen Simulation nach außen, beim asymptotischen Modell nach innen, ist ausschließlich durch die Verdrängungswirkung des Zylinders zu erklären. Weiter stromab klingt diese Diskrepanz ab und es kommt zu einer deutlichen Übereinstimmung.

In Abbildung 5.5 ist die Tiefe der Nachlaufdelle, d.h. $\hat{u} = 1 - \frac{u(x,0)}{u_\infty}$, als Funktion von x aufgetragen. Mit wachsender REYNOLDS-Zahl ist aus der FEM-Simulationen ein größer werdendes Rückzirkulationsgebiet zu erkennen, in welchem $\hat{u} > 1$ ist. Für groß werdende x geht dann \hat{u} asymptotisch gegen null. Dies entspricht dem vollständigen Auffüllen der Nachlaufdelle.

Die Schwächen des asymptotischen Modells (gestrichelte Linie) zeigen sich in dieser Abbildung 5.5 am deutlichsten, wenn wir die Zustandsgrößen bei Annäherung an den Zylinder betrachten. Naturgemäß versagt das asymptotische Modell vollständig, wenn wir uns gegen den Zylinder bewegen. Das asymptotische Modell wird singular: die Tiefe der Nachlaufdelle geht gegen unendlich. Für große x stimmt der Verlauf für $Re = 20$ recht gut mit den FEM-Simulationen überein, während der Verlauf für $Re = 100$ zwar parallel, aber merklich versetzt verläuft. Letztere Abweichung ist auf den Konvergenzbereich des asymptotischen Modells zurückzuführen. Im einzelnen muß gelten, daß der Entwicklungsparameter

$$\varepsilon \sim \frac{c_w \sqrt{Re}}{\sqrt{x}} \ll 1 \quad (5.4)$$

ist.

Dies ist gegeben für kleine REYNOLDS-Zahlen. Für wachsende REYNOLDS-Zahlen bei konstantem x versagt das asymptotische Modell.

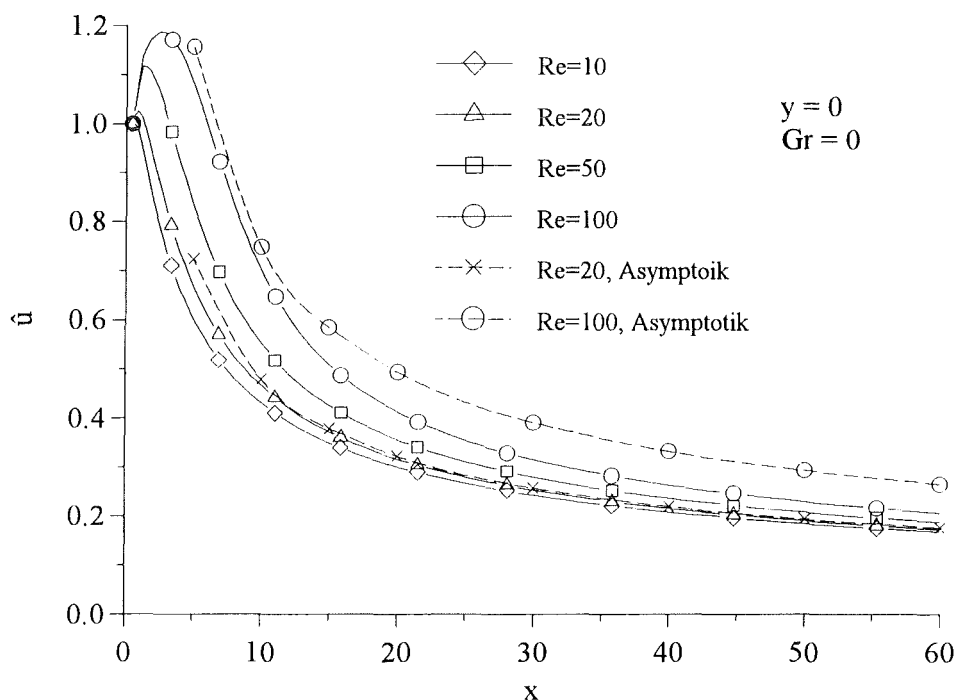


Abbildung 5.5: Profile der Geschwindigkeit \hat{u} bei unterschiedlichen REYNOLDS-Zahlen über x

Um den Aspekt großer REYNOLDS-Zahlen näher zu beleuchten, betrachten wir die Veränderung der Profile der Axialgeschwindigkeit bei variiertem REYNOLDS-Zahl.

Abbildung 5.6 zeigt die Profile bei $x = 60$. REYNOLDS-Zahlen können physikalisch interpretiert werden als Verhältnis von Trägheitskräften zu Reibungskräften. Ist die Viskosität groß, wird, bei konstanter Anströmgeschwindigkeit u_∞ und konstantem Zylinderdurchmesser d , die REYNOLDS-Zahl klein. Kleine Re bewirken somit eine breite Nachlaufdüse. Die Vergrößerung von Re führt demhingegen zu weniger breiten Nachlaufdüsen (vgl. Abb. 5.6)

Im Vergleich mit dem asymptotischen Modell von Griesbaum et al. (gestrichelte Linien) wird ersichtlich, daß die Übereinstimmung der Ergebnisse für kleine REYNOLDS-Zahlen nahezu perfekt ist. Für $Re = 50$ und verstärkt für $Re = 100$, treten dann jedoch Unterschiede auf. Diese sind, wie oben diskutiert, auf die schlechte Konvergenz der asymptotischen Reihe von Griesbaum et al. in diesem Bereich zurückzuführen. Des weiteren muß man berücksichtigen, das für $Re > 50$ die Zylinderumströmung zeitabhängig wird. Ab dieser REYNOLDS-Zahl bilden sich zunächst sehr regelmäßige Wirbelanordnungen, die man als KÄRMÄNSCHE-Wirbelstraße bezeichnet. Ab $Re > 250$ wird die Wirbelstraße instabil und erhält turbulente Züge. FEM-Simulation und asymptotisches Modell sind beide stationär berechnet und somit für größere REYNOLDS-Zahlen nicht mehr physikalisch sinnvoll.

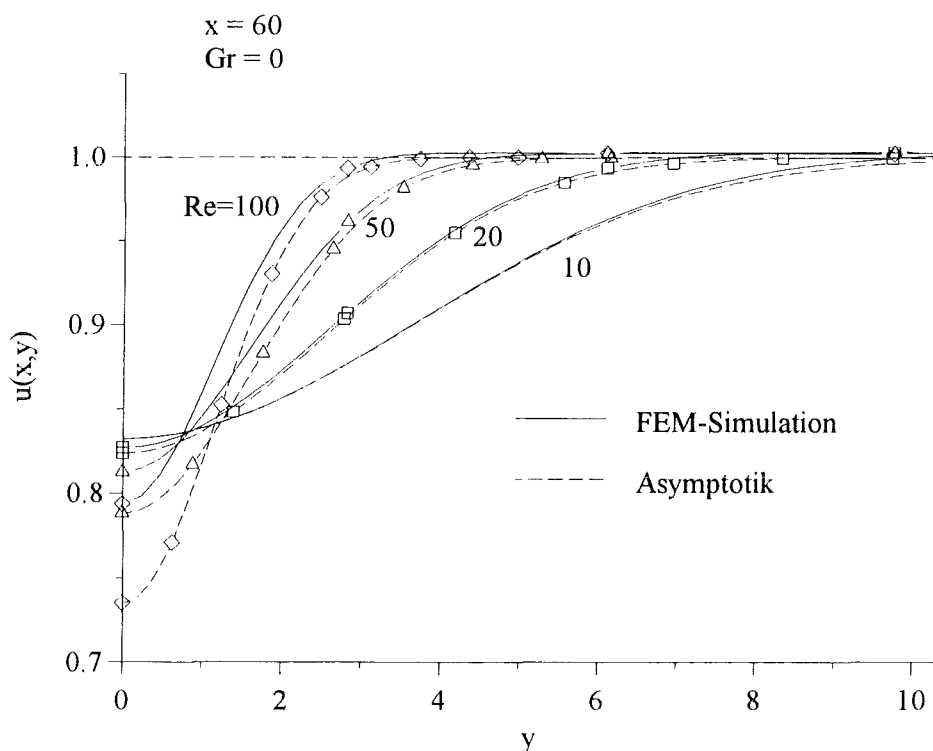


Abbildung 5.6: Längsgeschwindigkeit u über y bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen

An dieser Stelle soll die kinematische sowie die thermische Grenzschicht definiert werden. Als

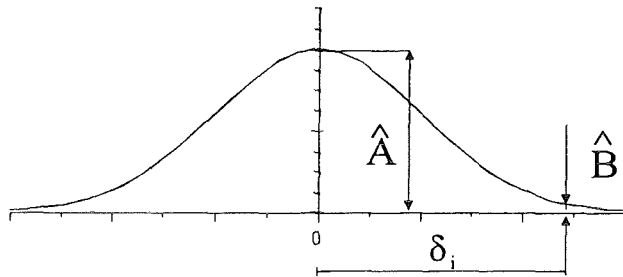


Abbildung 5.7: Definition der Grenzschicht

Als Rand der kinematischen bzw. der thermischen Grenzschicht definieren wir den Ort, an dem die Geschwindigkeit, bzw. die Temperatur \hat{B} , nur noch ein 1/100 der Mittenamplitude \hat{A} beträgt. Dies ist anhand der Abbildung 5.7 graphisch verdeutlicht.

Abbildung 5.8 zeigt die Dicke der so definierten kinematischen Grenzschicht δ als Funktion von x . Zu den numerischen Werte (Quadrate) sind Kurven der Abhängigkeit $\sim x^{1/2}$ (gestrichelte Linien) eingetragen. Für REYNOLDS-Zahlen im Bereich $10 \leq Re \leq 50$ ist die Abhängigkeit

$$\delta(x) \sim x^{1/2} \quad (5.5)$$

zu erkennen.

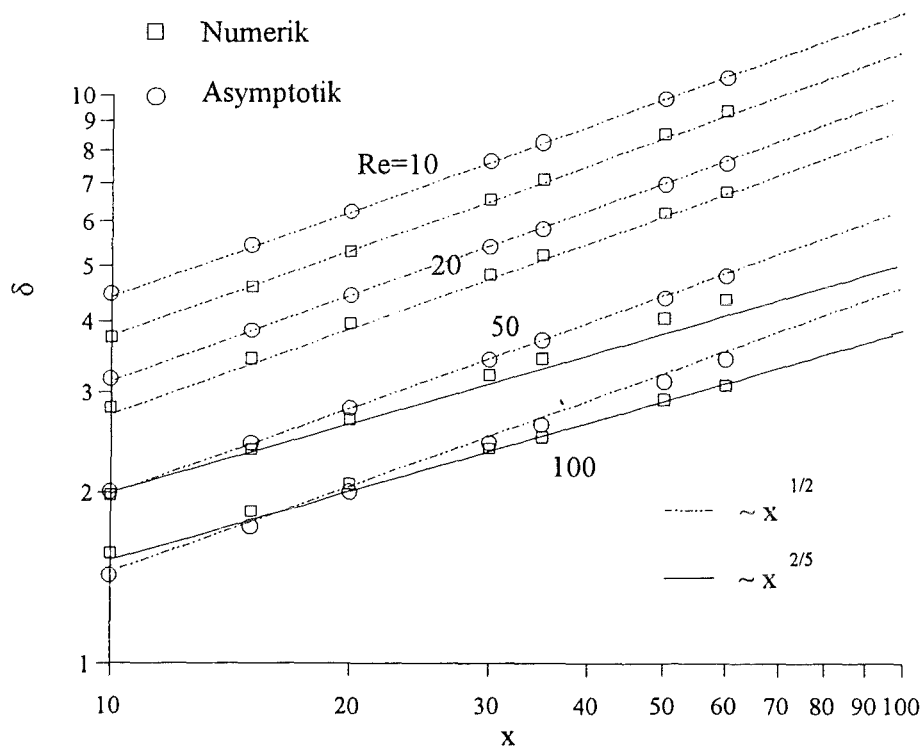


Abbildung 5.8: Kinematische Grenzschichtdicke δ über x bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen

Für größer werdende REYNOLDS-Zahlen liefert die FEM-Simulation flachere Verläufe, welche näherungsweise mit der Abhängigkeit

$$\delta \sim x^{2/5} \quad (5.6)$$

beschrieben werden können (durchgezogene Linien).

Die asymptotischen Werte (Kreise) zeigen über den gesamten Bereich der hier betrachteten REYNOLDS-Zahlen die Abhängigkeit $\delta(x) \sim x^{1/2}$. Die Ursachen der Diskrepanz zwischen FEM Simulation und asymptotischen Modell für große REYNOLDS-Zahlen wurden bereits diskutiert.

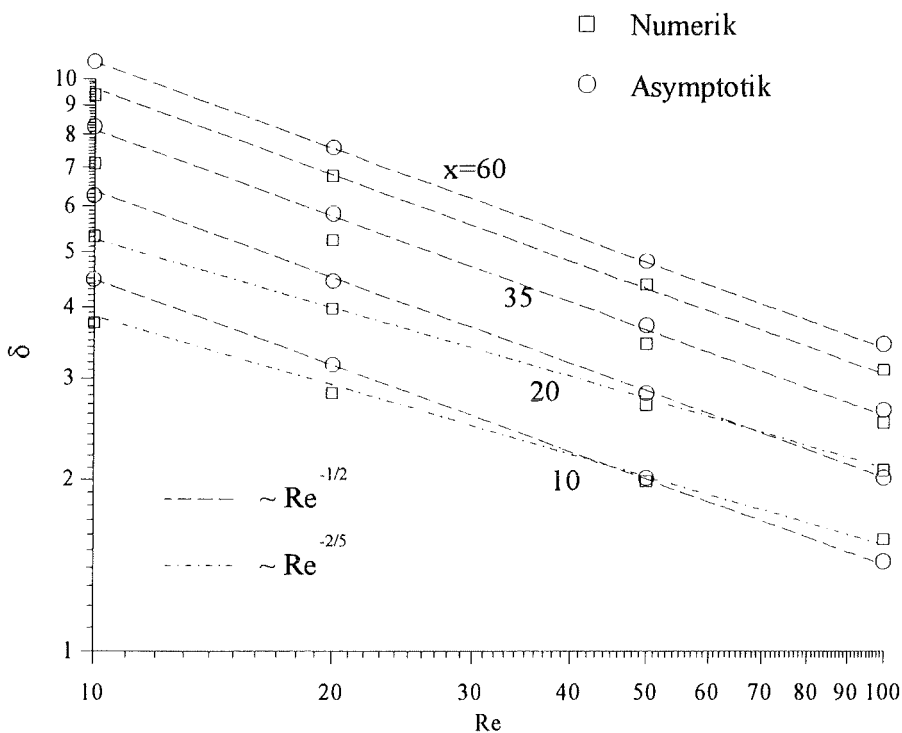


Abbildung 5.9: Kinematische Grenzschichtdicke δ über REYNOLDS-Zahl bei unterschiedlichen x

Ein weiterer Sachverhalt wird aus Abbildung 5.9 ersichtlich. Die kinematische Grenzschichtdicke δ wird mit steigender REYNOLDS-Zahl immer kleiner. Wird die Anströmung u_∞ und die Abmessung d des Zylinders konstant gehalten, so entsprechen große REYNOLDS-Zahlen kleinen Zähigkeiten. Die Abnahme der kinematischen Grenzschicht ist somit physikalisch gesehen beispielsweise auf eine niedrige Viskosität als Ursache rückführbar. Dies können wir auch systematischer betrachten. Abbildung 5.9 zeigt die Dicke der kinematischen

Grenzschicht als Funktion von Re . Für große x ist ersichtlich, daß asymptotisches Modell (Kreise) und FEM-Simulation (Quadrate) parallele Verläufe gemäß

$$\delta \sim Re^{-1/2} \quad (5.7)$$

liefern. Dem hingegen liefert die FEM-Simulation für kleine Werte von x einen deutlich flacheren Verlauf, was auf eine schwächere Abhängigkeit gemäß

$$\delta \sim Re^{-2/5} \quad (5.8)$$

schließen läßt. Die Ursache dieses Unterschiedes ist bereits an anderer Stelle, in Form der Konvergenz des asymptotischen Modells, identifiziert worden. Sie beruht hier auf der Forderung nach großen x .

5.3 Mischkonvektion

Nun tritt neben der Zwangsströmung noch die Wirkung der Auftriebskräfte in Folge der

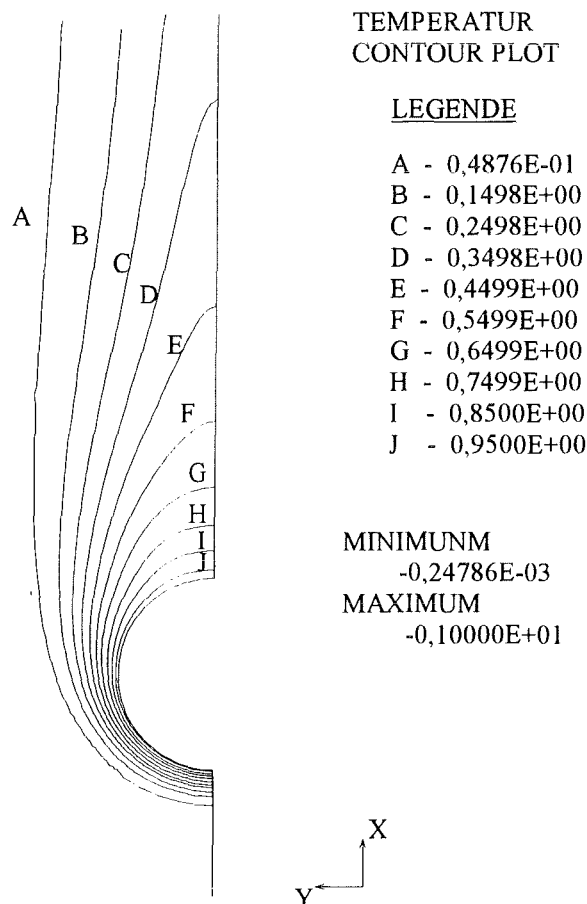


Abbildung 5.10: Kontur Plot der Temperatur für $Gr = 50$, $Pr = ,$ $Re = 20$

Beheizung des Zylinders hinzu. Somit kommen zwei neue dimensionslose Parameter ins Spiel, nämlich die GRASHOF-Zahl Gr und die PRANDTL-Zahl Pr . Die PRANDTL-Zahl bringt praktisch einen zweiten Längenmaßstab ins Problem, sie charakterisiert aufgrund der in ihr auftretenden Transportkoeffizienten von Wärme und Impuls, die Ausdehnung der thermischen Grenzschicht.

Abbildung 5.10 zeigt das Temperaturfeld über dem Zylinder. Am Zylinder ist die Temperatur $\Theta = 1$ vorgegeben. Je weiter wir uns von dem Zylinder entfernen, umso kleiner wird die Temperatur. Es ist sehr gut zu erkennen, daß es einen diffusiven Wärmetransport auch entgegen der Strömung gibt. Im Nachlauf ist der konvektive Wärmetransport maßgebend.

5.3.1 Variation x

Abbildung 5.11 zeigt die Profile der Längsgeschwindigkeit u in unterschiedlichen Entfernungen über dem Kreiszyylinder. Die Parameter sind $Pr = 20$, $Gr = 50$ und $Re = 20$. An den numerischen Resultaten (durchgezogene Linien) ist deutlich zu erkennen, daß sich der Auftriebseinfluß bemerkbar macht.

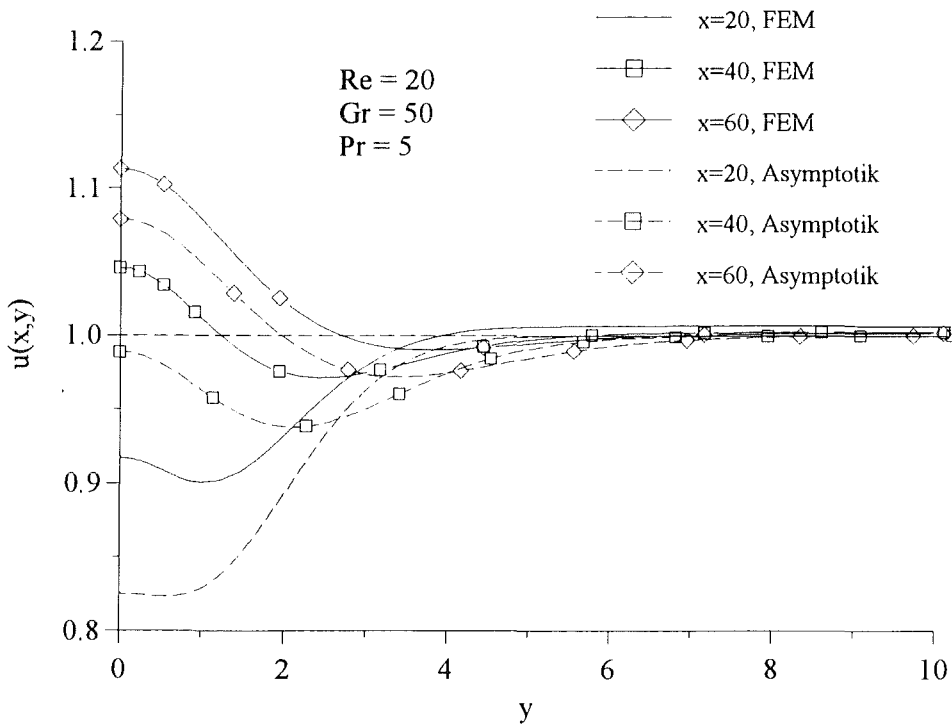


Abbildung 5.11: Profile der Längsgeschwindigkeit u über y bei unterschiedlichen Abständen x hinter dem Zylinder

Im Kern der Strömung erfolgt ein rasches Auffüllen der reinen Nachlaufdele durch eine Beschleunigung der Strömung infolge der Auftriebskräfte. Die Längsgeschwindigkeit wird für wachsende x somit größer als die Geschwindigkeit der Anströmung u_∞ .

Vergleichen wir die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile in Abbildung 5.11 und Abbildung 5.12, so wird weiterhin deutlich, daß die thermische Grenzschicht dünner ist als die kinematische Grenzschicht für alle x . Die geringe Ausdehnung der erwärmten Zone ist somit verantwortlich dafür, daß die Auftriebskräfte lediglich im Kern des Nachlaufs wirken und nur dort die Strömung beschleunigen. Das Verhältnis von kinematischer Grenzschichtdicke δ zu thermischer Grenzschichtdicke δ_{th} kann aus der PRANDTL-Zahl abgeschätzt werden zu

$$\frac{\delta}{\delta_{th}} \sim Pr^{1/2}. \quad (5.9)$$

Die numerischen Ergebnisse sind konsistent mit dieser Beziehung.

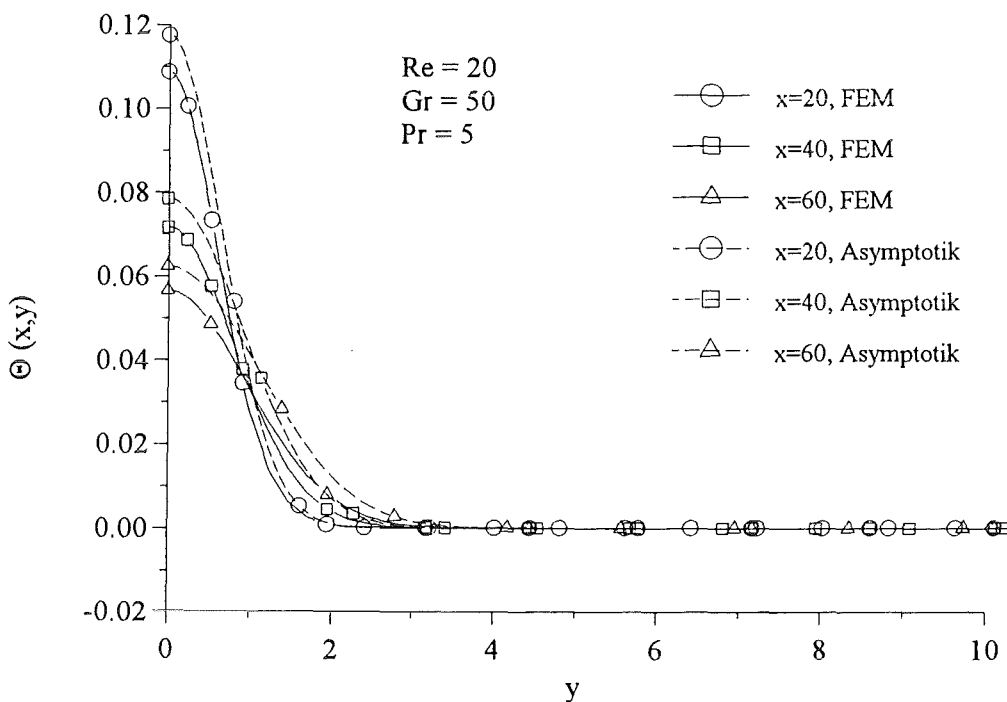


Abbildung 5.12: Profile der Temperatur über y bei unterschiedlichen Abständen x

Wir wollen nun einen Vergleich der numerischen Profile mit den Profilen aus dem asymptotischen Modell von Griesbaum et al. anstellen. Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile des asymptotischen Modells sind an den entsprechenden Stellen x sind in beiden Abbildungen in Form der gestrichelten Kurven eingetragen. Aufgrund der unterschiedlichen thermischen Randbedingungen auf dem Zylinder wird aus einer Integration

über der Enthalpie der Strömung beim Austritt aus dem numerischen Rechengbiet die tatsächlich zugeführte Wärme \dot{Q} bestimmt. Mit diesem Wärmestrom kann dann die von Griesbaum et al. verwendete GRASHOF-Zahl $Gr_G = 151$ errechnet werden, und die Vergleichsrechnungen können durchgeführt werden.

Die Vergleichsrechnungen sind nur dann sinnvoll, wenn das asymptotische Modell nach Griesbaum et al. nicht außerhalb seiner Konvergenzkriterien liegt. Die Konvergenzkriterien für das asymptotische Modell sind

$$\varepsilon_2 = \frac{Gr_G}{Re^2} \ll 1,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{c_w(Re) \cdot \sqrt{Re}}{\sqrt{x}} \ll 1.$$

Mit einer GRASHOF-Zahl $Gr_G = 151$ folgt der Entwicklungsparameter $\varepsilon_2 \cong 1,13$. Somit sind die Aussagen des asymptotischen Modells in diesem Bereich nicht als sinnvoll einzuschätzen.

5.3.2 Variation Grashof

An dieser Stelle soll diskutiert werden, wie sich unterschiedliche GRASHOF-Zahlen auf die Strömung auswirken. Die GRASHOF-Zahl stellt physikalisch das dimensionslose Maß der Auftriebskräfte dar. Sie kann beispielsweise durch die Erhöhung der Zylindertemperatur vergrößert werden.

In Abbildung 5.13 haben wir erneut die Profile der Längsgeschwindigkeit und in Abbildung 5.14 die Temperaturprofile bei $x = 60$ für variierte GRASHOF-Zahlen aufgetragen. Die übrigen Parameter sind $Re = 20$ und $Pr = 1$. Zunächst erkennen wir, daß die Erhöhung GRASHOF-Zahl den erwarteten Effekt hat (durchgezogene Linien). Die Auftriebseffekte werden immer stärker, während die Temperatur des Mediums über dem Zylinder leicht abfällt. Im vorliegenden Fall ist $Pr = 1$ gewählt, was bedeutet, daß die Ausdehnung der kinematischen und der thermischen Grenzschicht etwa gleich ist. Als Folge erkennen wir, daß der komplette Nachlauf eine Beschleunigung durch die Auftriebskräfte erfährt.

Es wird abermals ein Vergleich mit den asymptotischen Resultaten von Griesbaum et al. durchgeführt. In die Abbildungen 5.13 und 5.14 sind die entsprechenden Ergebnisse in Form gestrichelter Kurven eingetragen. Wir stellen fest, daß die Übereinstimmung der Profile der Längsgeschwindigkeit bis zu Werten $Gr = 50$ recht gut sind, während für $Gr = 100$ deutliche Abweichungen zu erkennen sind. An dieser Stelle müssen wir uns die Voraussetzungen des

asymptotischen Modells von Griesbaum et al. in Erinnerung rufen. Dieses Modell ist für *schwache Beheizung* des Zylinders, oder präzise für $\frac{Gr_G}{Re^2} \ll 1$ abgeleitet. Aus unseren numerischen Resultaten für $Gr = 100$ bestimmen wir nochmals den eingebrachten Wärmestrom \dot{Q} und erhalten hieraus $Gr_G \cong 942$. Dadurch wird unmittelbar ersichtlich, daß mit $\frac{Gr_G}{Re^2} \cong 2,35$ die Voraussetzung der schwachen Beheizung verletzt ist. In diesem Bereich kann folglich nicht mit sinnvollen Aussagen des asymptotischen Modells gerechnet werden. Die Temperaturprofile aus dem asymptotischen Modell und unseren numerischen Rechnungen zeigen die Überbewertung der Temperatur für die Fälle, in denen die schwache Beheizung nicht mehr zutrifft.

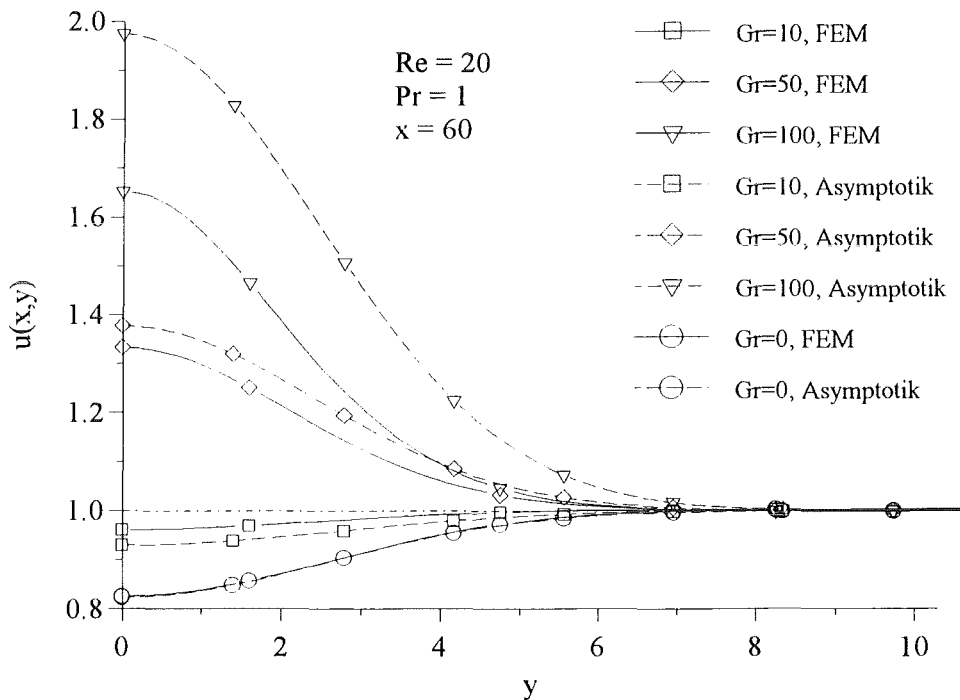


Abbildung 5.13: Profile der Längsgeschwindigkeit u über y bei unterschiedlichen GRASHOF-Zahlen

In Abbildung 5.14 läßt die Variation der Temperatur im numerischen Modell (durchgezogene Linie), ein Absinken der Amplitude und des $\int \Theta \cdot dy$ erkennen. Die Ursache für die Abnahme der Amplitude und des $\int \Theta \cdot dy$ können wir physikalisch verstehen. Durch die Beschleunigung der Strömung infolge der Auftriebskräfte wird der konvektive Wärmetransport verbessert. Für den diffusiven Wärmetransport bleibt weniger Zeit, wodurch sich die Ausbreitung der Temperatur in y -Richtung verschlechtert.

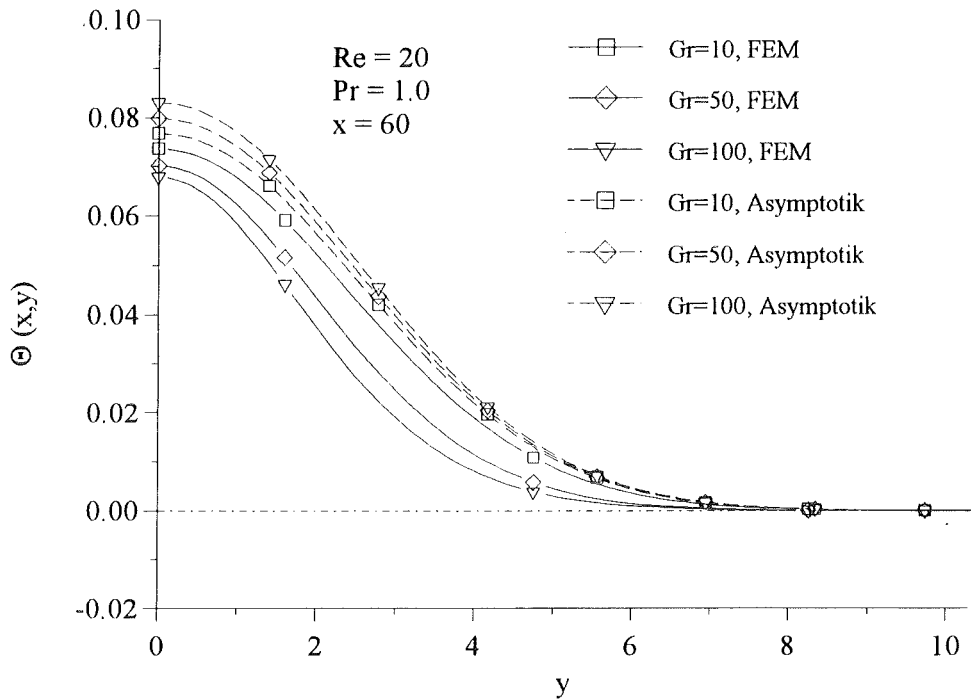


Abbildung 5.14: Profile der Temperatur Θ über y bei verschiedenen GRASHOF-Zahlen

Im asymptotischen Modell nach Griesbaum et al. kommt es, wie schon in Abbildung 5.1 gezeigt, zu einer Überbewertung der Temperatur. Da in der Asymptotik *schwache Beheizung* angenommen wird, ist die Rückkopplung des auftriebsbedingten Geschwindigkeitsfeldes in die Wärmetransportgleichung nicht vorhanden.

Die Definition einer kinematischen Grenzschicht erweist sich nun als schwieriger, wenn eine Nachlaufdecke und ein Auftriebsstrahl überlagert vorliegen. Es erscheint deshalb sinnvoll, die Profile der Längsgeschwindigkeit zunächst in diese zwei Anteile zu zerlegen, und dann die Betrachtungen bezüglich der Grenzschichtdicken für den Nachlaufanteil und den Auftriebsanteil separat auszuführen. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 5.15 verdeutlicht. Wir wollen die Grenzschichtdicke, die vom Nachlaufanteil herrührt, als δ_{NL} und entsprechend die auftriebsbedingte Grenzschichtdicke als δ_{AT} bezeichnen. Eine derartige Zerlegung im Falle der thermischen Grenzschicht δ_{th} ist nicht notwendig, da dort in allen Fällen glockenförmige Temperaturprofile vorliegen.

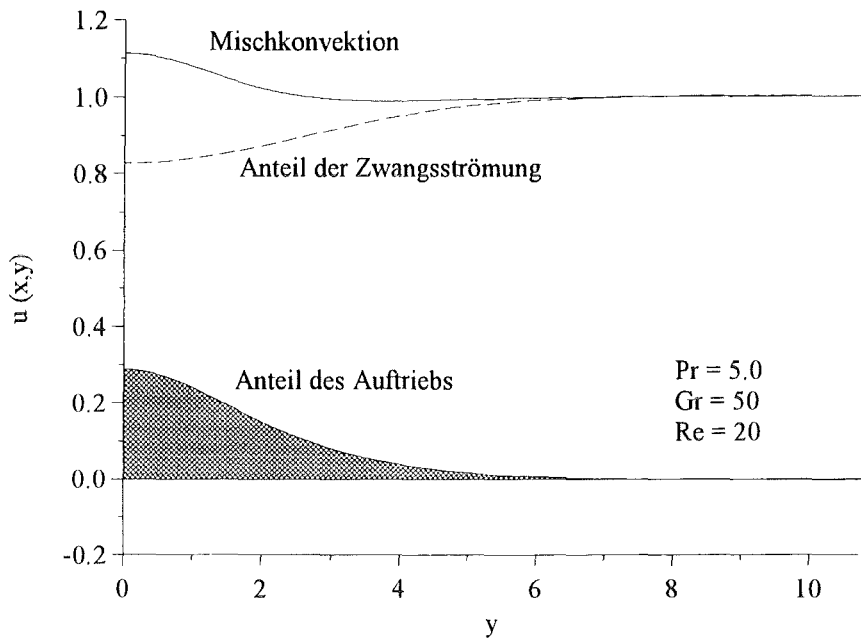


Abbildung 5.15: Aufteilung der kinematischen Grenzschicht

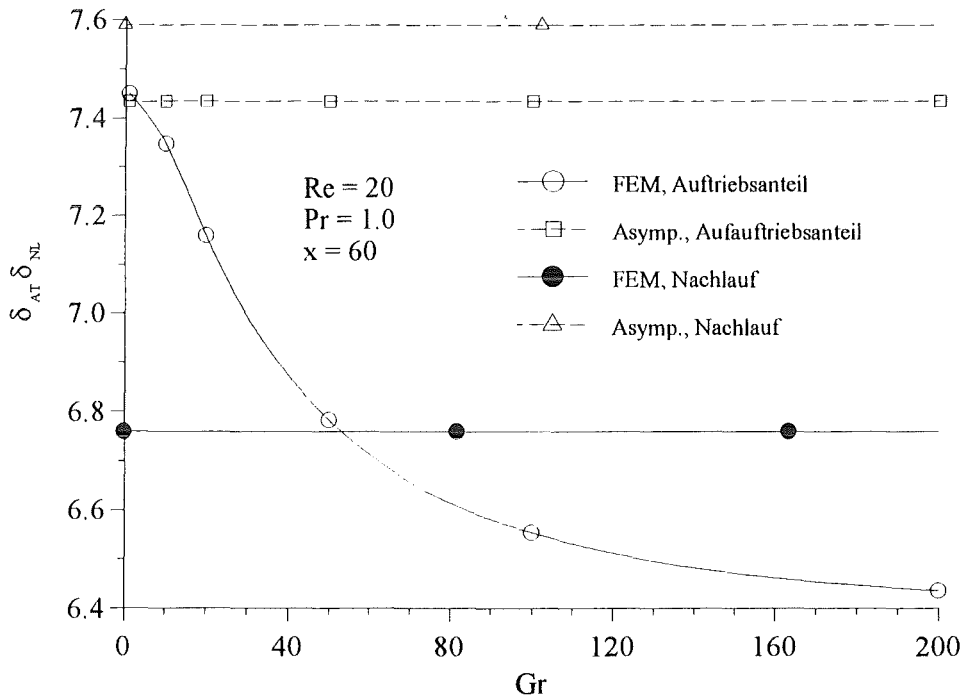


Abbildung 5.16: Anteile der kinematischen Grenzschicht als Funktion der GRASHOF-Zahl

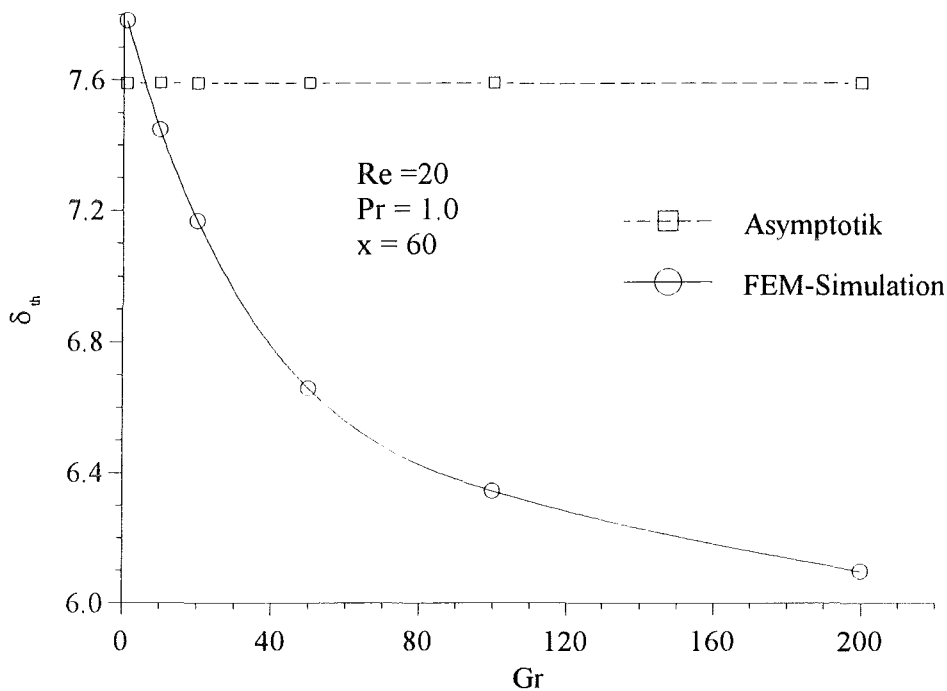


Abbildung 5.17: Thermische Grenzschicht als Funktion der GRASHOF-Zahl

Unsere Ergebnisse zu den so definierten kinematischen und thermischen Grenzschichtdicken sind in den Abbildungen 5.16 und 5.17 dargestellt. Wir erkennen zunächst, daß der nachlaufbedingte Anteil der kinematischen Grenzschicht konsistenterweise keine Abhängigkeit von der GRASHOF-Zahl aufweist (durchgezogene Linie, volle Kreise). Dagegen nimmt die kinematische Grenzschichtdicke des auftriebsbedingten Anteils bei wachsender GRASHOF-Zahl ab (Abbildung 5.16). Dies ist offensichtlich eine Folge der Abnahme der thermischen Grenzschichtdicke bei wachsender GRASHOF-Zahl, was wir anhand der durchgezogenen Linie in Abbildung 5.17 erkennen können. Die Ursache für die Abnahme der thermischen Grenzschichtdicke mit wachsender Intensität der Auftriebseffekte können wir physikalisch erklären. Aufgrund der Beschleunigung der Strömung infolge der Auftriebskräfte wird der konvektive Abtransport der Wärme verbessert. Dies hat zur Folge, daß dem Diffusionsprozeß weniger Zeit zur Verfügung steht, d.h. die Ausbreitung der Temperaturstörung quer zur Hauptströmung wird verschlechtert. Die Folge ist eine dünnere thermische Grenzschicht. Für große GRASHOF-Zahlen scheint im übrigen sowohl die auftriebsbedingte kinematische Grenzschicht δ_{AT} , als auch die thermische Grenzschicht δ_{th} , einer konstanten Dicke zuzustreben.

Wir wollen nun unsere numerischen Resultate zu den Grenzschichtdicken mit den Aussagen der asymptotischen Modells von Griesbaum et al. vergleichen. Zunächst erweist sich die

nachlaufbedingte kinematische Grenzschicht δ_{NL} als unabhängig von Gr . Dies ist zu erwarten und im übrigen konsistent mit den numerischen Ergebnissen. Entgegen den numerischen Ergebnissen erhält man aus dem asymptotischen Modell sowohl die thermische Grenzschichtdicke δ_{th} , als auch die auftriebsbedingte kinematische Grenzschichtdicke δ_{AT} , unabhängig von der GRASHOF-Zahl. Hier liegt eine klare Diskrepanz vor. Die Erklärung hierfür ist jedoch wiederum in der Annahme *schwache Beheizung* des asymptotischen Modells zu finden. Für *schwache Beheizung* ist die Rückkopplung des auftriebsbedingten Geschwindigkeitsfeldes in die Wärmetransportgleichung nicht vollständig, sondern vielmehr nach Potenzen der Entwicklungsparameters sortiert. Dies bedeutet im vorliegenden Fall, daß die Beschleunigung der Strömung in der Entwicklung noch keinen Einfluß auf den Wärmetransport nimmt, folglich Gr (wohl bemerkt kleine Gr) keinen Einfluß auf δ_{th} und δ_{AT} nehmen kann. Wir erkennen dementsprechend, daß in Abbildung 5.16 und 5.17 δ_{th} und δ_{AT} aus den asymptotischen und numerischen Rechnungen im Bereich $Gr < 40$ lediglich um 5% voneinander abweichen. Somit ist in diesem Bereich die Näherung des asymptotischen Modells durchaus sinnvoll. Eine Überprüfung der Konvergenzbedingungen ergibt für $Gr = 50$: $\frac{Gr_G}{Re^2} \cong 1,13$ und für $Gr = 20$: $\frac{Gr_G}{Re^2} \cong 0,44$. Das heißt in 'diesem Bereich liegt die Grenze des Konvergenzbereichs des asymptotischen Modells nach Griesbaum et al..

5.3.3 Variation Prandtl

Die PRANDTL-Zahl stellt als Verhältnis von kinematischer Viskosität und Temperaturleitfähigkeit eine reine Stoffkonstante dar. Große PRANDTL-Zahlen sind somit charakteristisch für zähe Öle und kleine Pr findet man bei flüssigen Metallen. Luft ($Pr \cong 7$) und Wasser ($Pr \cong 0,7$) befinden sich bezüglich der PRANDTL-Zahl in der Größenordnung eins. Wir wollen nun die Auswirkungen einer veränderten PRANDTL-Zahl auf unser Problem diskutieren.

Die PRANDTL-Zahl charakterisiert das diffusive Eindringen von Impuls und Wärme in das Medium. Damit wird in dem betrachteten Problem das Verhältnis von kinematischer und thermischer Grenzschichtdicke eine Funktion von Pr sein (vgl. Gleichung 5.9). In Abbildung 5.18 sind die Profile der Längsgeschwindigkeit bei $x = 60$, $Re = 20$, $Gr = 50$ für variierte Pr aufgetragen. Wir erkennen aus den numerischen Ergebnissen (durchgezogene Linien) zwei charakteristische Dinge:

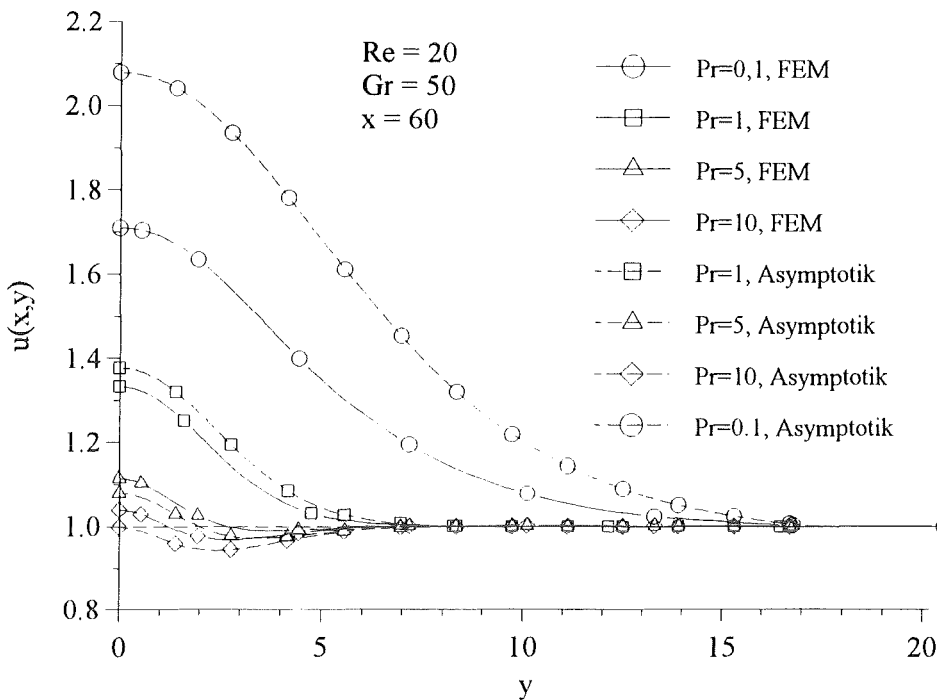


Abbildung 5.18: Profile der Längsgeschwindigkeit über y bei verschiedenen PRANDTL-Zahlen

Zum einen wird bei fallenden PRANDTL-Zahlen der Bereich, in welchen die Auftriebskräfte wirken immer größer. Dies ist auf eine Verbreiterung der thermischen Grenzschicht mit kleiner werdenden Pr zurückzuführen. Anschaulich bedeutet dies, daß für gut wärmeleitende Fluide (z.B. flüssige Metalle) eine relativ große Zone des Mediums erwärmt wird. Diese breite thermische Grenzschicht führt zu einer großen Auftriebszone. Entsprechend umgekehrtes gilt für große PRANDTL-Zahlen. Hier ist lediglich eine dünne Auftriebszone festzustellen.

Zum zweiten erkennen wir, daß für fallende Pr der Auftriebseffekt deutlich stärker wird. Dies hängt damit zusammen, daß bei vorgegebener Zylindertemperatur (und damit Gr) und kleinen PRANDTL-Zahlen, deutlich mehr Wärme durch Wärmeleitung in das Medium abgegeben wird, als dies bei großen PRANDTL-Zahlen der Fall ist. Dieser Effekt ist aus unseren numerischen Ergebnissen ersichtlich, wenn aus den Ausströmgrößen die tatsächlich zugeführte Wärme \dot{Q} bestimmt wird. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.19 dargestellt. Es ist der deutlich höhere Wärmestrom für kleine PRANDTL-Zahlen zu erkennen. Es ist die Abhängigkeit

$$\dot{Q} \sim Pr^{-7/10}$$

ersichtlich. Zum Vergleich ist eine Gerade $\sim Pr^{-7/10}$ (gestrichelte Linie) in das Diagramm eingetragen.

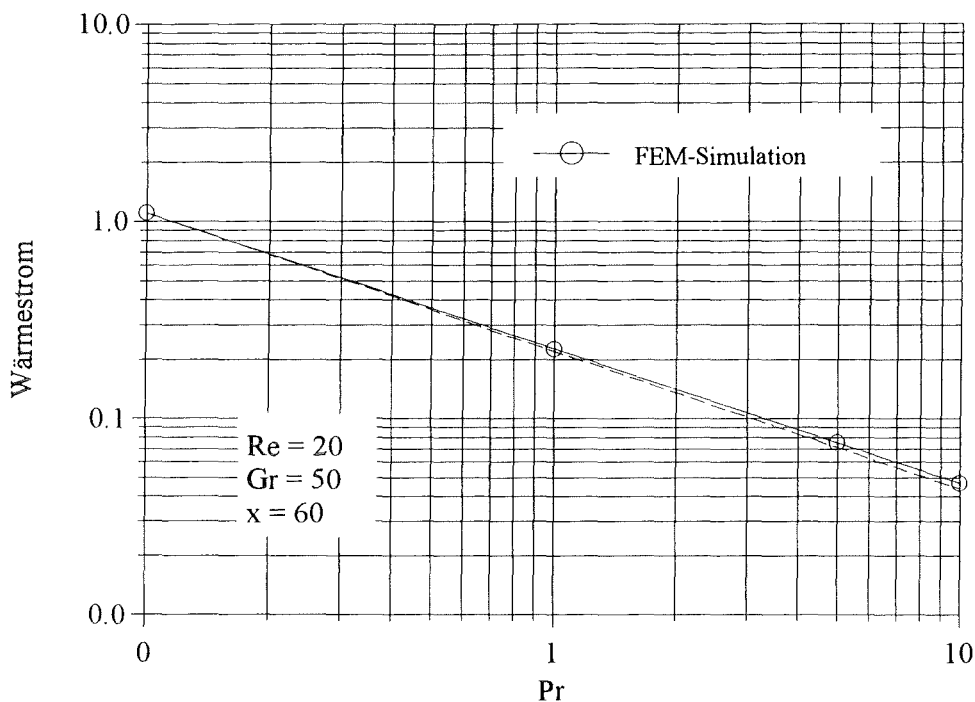


Abbildung 5.19: Wärmestrom \dot{Q} über der PRANDTL-Zahl

Als nächstes wollen wir die numerischen Resultate den Profilen aus der asymptotischen Theorie von Griesbaum et al. gegenüberstellen. Anhand des Vergleichs der durchgezogenen Linien (FEM-Simulation) mit den gestrichelten Linien (Asymptotik) in Abbildung 5.18 erkennen wir, daß sowohl für $Pr = 10$, als auch für $Pr = 5$ und $Pr = 1$ eine brauchbare Übereinstimmung resultiert, während für $Pr = 0,1$ die Amplituden der berechneten Geschwindigkeiten deutlich abweichen. Eine Überprüfung der Konvergenzbedingungen in der asymptotischen Theorie liefert $Gr_G \cong 2154 \Rightarrow \frac{Gr_G}{Re^2} \cong 5,39$.

Somit wird deutlich, daß die Konvergenzbedingungen nicht erfüllt sind. Die Abweichungen bei $Pr = 0,1$ dürfen insofern nicht verwundern. Trotz den Abweichungen bei den Amplituden fällt in Abbildung 5.18 jedoch auf, daß die Breiten der Profile (in y) aus beiden Rechnungen für alle Werte von Pr exzellent übereinstimmen.

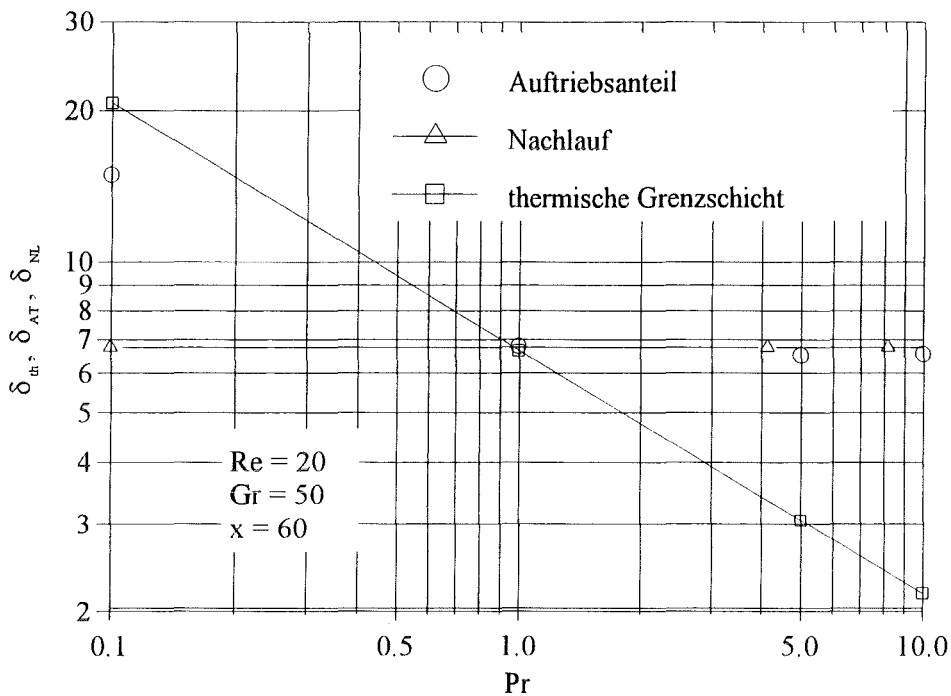


Abbildung 5.20: Thermische und aufgeteilte kinematische Grenzschicht als Funktion der PRANDTL-Zahl

Unsere Methode, die kinematischen Grenzschicht in einen nachlaufbedingten und einen auftriebsbedingten Anteil zu zerlegen, wie in Abbildung 5.15 gezeigt, soll nun dahingehend angewandt werden, die Abhängigkeit von der PRANDTL-Zahl zu diskutieren. In Abbildung 5.20 sind die Anteile δ_{AT} , δ_{NL} und δ_{th} als Funktion der PRANDTL-Zahl aufgetragen. Zunächst erkennen wir, daß der nachlaufbedingte Anteil der Grenzschicht δ_{NL} wie erwartet unabhängig von der PRANDTL-Zahl bleibt (Linie mit Dreiecken). Weiterhin erkennen wir, daß die Dicke der thermischen Grenzschicht δ_{th} (Linie mit Quadraten) mit wachsender PRANDTL-Zahl gemäß

$$\delta_{th} \sim Pr^{-1/2}$$

abfällt. Auch dieses Ergebnis kann erwartet werden und ist vergleichbar mit der oben gegebenen Beziehung. Betrachten wir nun den aus der thermischen Grenzschicht resultierenden, auftriebsbedingten kinematischen Anteil der Grenzschicht δ_{AT} , so wird deutlich, daß für kleine Werte der PRANDTL-Zahl ein Abfall parallel zur Verjüngung der thermischen Grenzschicht auftritt. Für große PRANDTL-Zahlen strebt δ_{AT} dann offensichtlich gegen einen festen Grenzwert. Dieser Effekt ist physikalisch leicht zu verstehen: Für breite thermische Grenzschichten folgt die Breite des Auftriebsstrahl im wesentlichen der Breite der thermischen Grenzschicht. Für sehr dünne thermische Grenzschichtdicke kann sich jedoch, aufgrund der endlichen Viskosität, kein beliebig dünner Auftriebsstrahl ergeben. Die

Zähigkeitseffekte sind somit verantwortlich dafür, daß ein charakteristische Breite des Auftriebsstrahls nicht unterschritten wird.

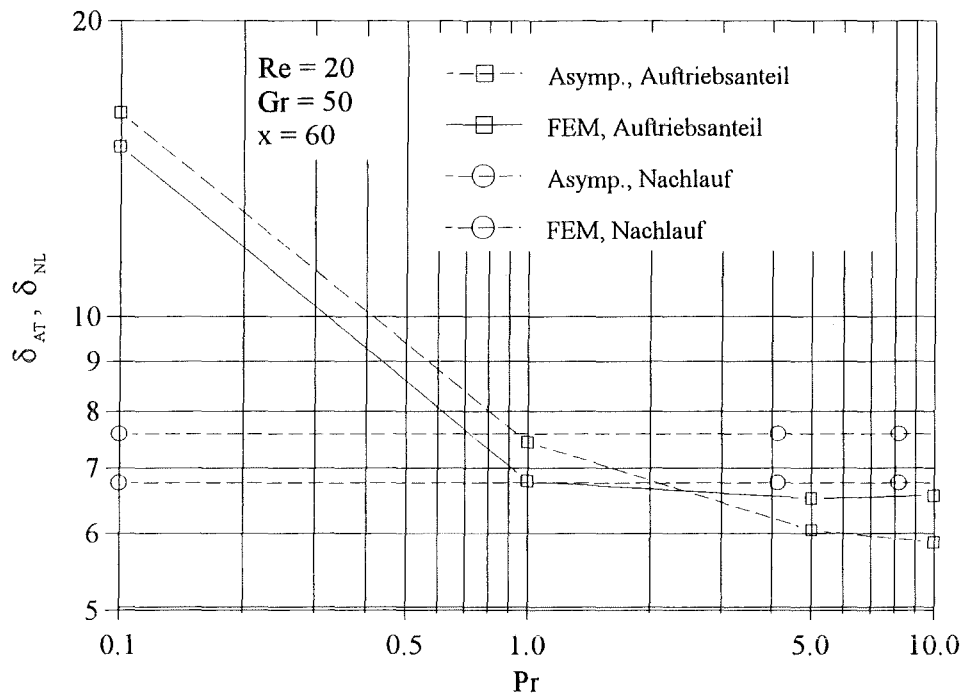


Abbildung 5.21: Aufgeteilte kinematische Grenzschicht als Funktion der PRANDTL-Zahl

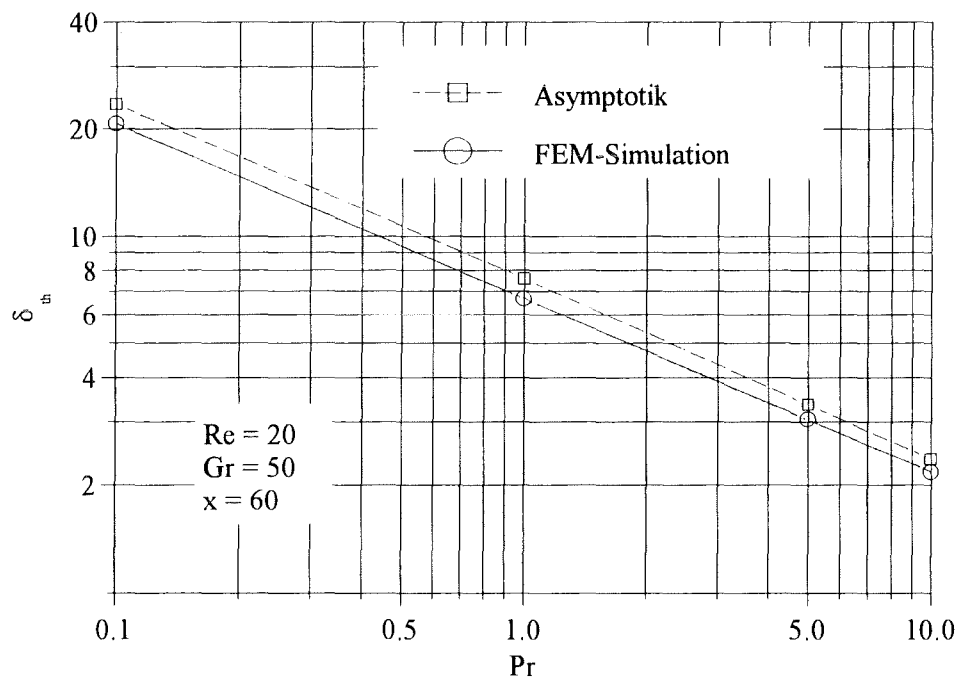


Abbildung 5.22: Thermische Grenzschichtdicke der FEM-Simulation und des asymptotischen Modells als Funktion der PRANDTL-Zahl

Wir wollen nun wiederum den Vergleich der berechneten Grenzschichtdicken aus unseren numerischen Rechnungen und dem asymptotischen Modell von Griesbaum et al. herstellen. Hierzu sind die entsprechenden Anteile δ_{AT} , δ_{NL} in Abbildung 5.21 und δ_{th} in Abbildung 5.22 als Funktion der PRANDTL-Zahl aufgetragen. Abbildung 5.22 zeigt übereinstimmend aus Numerik und asymptotischer Theorie den Abfall der thermischen Grenzschichtdicke gemäß $\delta_{th} \sim Pr^{-1/2}$. In Abbildung 5.21 erkennen wir, daß die nachlaufbedingten Anteile δ_{NL} aus beiden Methoden konstant berechnet werden, also unabhängig von Pr . Die Werte der berechneten nachlaufbedingten Grenzschichtdicke weichen mit $\delta_{NL,num.} \cong 6,8$ und $\delta_{NL,asym.} \cong 7,5$ allerdings leicht voneinander ab. Diese Abweichung hatten wir bereits für den reinen Nachlauf diskutiert - sie ist auf die Verdrängungswirkung des Zylinders und die damit verbundene Geschwindigkeitsüberhöhung in den numerischen Rechnungen zurückzuführen. Dieser Effekt fehlt in der asymptotischen Lösung vollständig. Als letztes bleibt der auftriebsbedingte Anteil δ_{AT} zu diskutieren. Sowohl in der Asymptotik als auch in der Numerik stellen wir fest, daß für kleine Pr eine Abhängigkeit gemäß $\delta_{th} \sim Pr^{-1/2}$ auftritt. Hier orientiert sich der Auftriebsstrahl folglich an der thermischen Grenzschicht. Für große Werte der PRANDTL-Zahl hingegen folgt aus beiden Rechnungen ein konstanter Wert von δ_{AT} . Somit wird die Breite des Auftriebsstrahls hier durch die Kinematik begrenzt.

6 Diskussion

Mit Hilfe eines FEM Programms haben wir die laminare Nachlaufströmung über einem beheizten Zylinder berechnet. Das Rechengebiet setzt Symmetrie der Strömung voraus und erstreckt sich über $50 \ll x/d \ll 60$, $0 \ll y/d \ll 30$. Sorgfältige Variation des Rechengebietes, der Gitterfeinheit sowie der Randbedingungen, insbesondere am Austritt, stellen sicher, daß die Ergebnisse von den Eigenschaften des Rechengebiets nicht abhängig sind. Wir vergleichen die hier gewonnenen relativ allgemeingültigen Resultate, mit dem asymptotischen Modell von Griesbaum et al., welches für schwache Beheizung des Zylinders gültig ist und Grenzschichtcharakter des Nachlaufes voraussetzt. Desweiteren sind Vergleiche unserer Resultate mit Ergebnissen von SCHLICHTING für den fernen Körpernachlauf, sowie mit Ergebnissen von FUJII für den reinen Auftriebsstrahl sinnvoll.

Im ersten Schritt soll der reine Nachlauf betrachtet werden. Hier finden SCHLICHTING und Griesbaum et al. übereinstimmend für die Grenzschichtdicke die Abhängigkeit

$$\delta \sim x^{1/2} \cdot Re^{-1/2},$$

bzw. für die Amplituden der Geschwindigkeit

$$\bar{u}(x, 0) \sim x^{-1/2} \cdot c_w \cdot Re^{1/2}.$$

Unsere FEM Resultate bestätigen diese Abhängigkeit innerhalb des Gültigkeitsbereichs des asymptotischen Modells. Der Gültigkeitsbereich ist durch die Forderung des Entwicklungsparameters

$$\varepsilon_1 \sim \frac{c_w \sqrt{Re}}{\sqrt{x}} \ll 1$$

bestimmt. Für große $\sqrt{Re} \cdot c_w$ bzw. für kleine \sqrt{x} finden wir konsistenterweise andere Abhängigkeiten. Es ergibt sich im Falle großer $\sqrt{Re} \cdot c_w$ eine schwächere Abhängigkeit von x , welche durch

$$\delta \sim x^{2/5}$$

angenähert werden kann. Ähnliches gilt auch für kleine \sqrt{x} , wo unsere FEM Resultate etwa durch die Abhängigkeit

$$\delta \sim Re^{-2/5}$$

assimiliert werden können.

Die Amplituden der Geschwindigkeit auf der Symmetrielinie sind gleichfalls mit den asymptotischen Modellen verglichen worden. Im Gültigkeitsbereich, d.h. für $\varepsilon_1 \ll 1$, zeigt sich hier ebenfalls gute Übereinstimmung mit unseren vollnumerischen FEM Lösungen. Bei Annäherung an den Zylinder, d.h. für $x \rightarrow 0$, sind die asymptotischen Lösungen erwartungsgemäß singulär, während die FEM Ergebnisse noch physikalisch sinnvolle Aussagen liefern. Hier finden wir insbesondere für große REYNOLDS-Zahlen einen Rezirkulationswirbel unmittelbar hinter dem Zylinder.

Im nächsten Schritt wollen wir die Ergebnisse für Mischkonvektion diskutieren. In der FEM Simulation wird hierzu die Temperatur des Zylinders als $T_{\text{Zyl}} > T_\infty$ vorgegeben. Auf diese Weise wird dem umströmenden Medium Wärme zugeführt und Auftriebskräfte werden wirksam. Um einen Vergleich zum asymptotischen Modell von Griesbaum et al. herzustellen ist es stets notwendig die integral zugeführte Wärme \dot{Q} zu ermitteln. Das asymptotische Modell von Griesbaum et al. erfaßt den Wärmeeintrag an einem singulären Punkt ($x = 0$). Desweiteren wird *schwache* Beheizung vorausgesetzt. Dies zeigt sich unter anderem in der Forderung an den zweiten Entwicklungsparameter

$$\varepsilon_2 = \frac{Gr_G}{Re^2} \ll 1 .$$

Zunächst finden wir im Gültigkeitsbereich des asymptotischen Modells, d.h. $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$, bezüglich des Temperaturfeldes und bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes exzellente Übereinstimmung zwischen unseren FEM Resultaten und den Ergebnissen des asymptotischen Modells. Abweichungen treten zutage, wenn einerseits $\varepsilon_1 \ll 1$ verletzt wird, was zu ähnlichen Effekten, wie oben für die Zwangskonvektion erläutert, führt. Insbesondere wird natürlich auch das Temperaturfeld für $x \rightarrow 0$ singulär.

Wird die Forderung $\varepsilon_2 \ll 1$ verletzt, so liefert das asymptotische Modell von Griesbaum et al. gleichfalls keine korrekten Ergebnisse mehr. Demhingegen sind unsere FEM Resultate für beliebige GRASHOF-Zahlen gültig. Im einzelnen wird die thermische Grenzschichtdicke δ_{th} noch korrekt wiedergegeben, die Temperatur wird aber generell im asymptotischen Modell überschätzt. Die Werte der Geschwindigkeit auf der Achse, bedingt durch die Auftriebskräfte, werden deshalb im asymptotischen Modell nicht richtig wiedergegeben. Allerdings wird die Breite der Auftriebszone δ_{AT} richtig reflektiert. Dieser Effekt der Überschätzung der Temperatur wird um so dramatischer je größer der Entwicklungsparameter ε_2 wird.

Auf einen weiteren wichtigen Punkt müssen wir hier noch hinweisen. Die PRANDTL-Zahl nimmt gleichfalls Einfluß auf die Gültigkeitsbereiche. Bei vorgegebener Wandtemperatur am Zylinder T_{Zyl} , hängt der übergehende Wärmestrom \dot{Q} erwartungsgemäß von Pr ab. Der Wärmestrom \dot{Q} wurde in unserer Arbeit definiert als

$$\dot{Q} = 2 \cdot \int_0^{30} u \cdot \Theta \cdot dy$$

Wir finden ein Ansteigen von \dot{Q} bei kleinen Pr . Aus den numerischen Werten kann die Abhängigkeit

$$\dot{Q} \sim Pr^{-7/10}$$

abgeschätzt werden. Damit wird $\dot{Q} = f(Pr)$ und der Entwicklungsparameter ε_2 ist gleichfalls von Pr abhängig. In der Tendenz bedeuten kleine Pr generell große ε_2 und damit schlechte Konvergenz des asymptotischen Modells.

Um die numerischen Werte mit empirischen Werten aus dem VDI- Wärmeatlas zu vergleichen, wird der Wärmestrom in dimensionsloser Form als NUSSELT-Zahl ausgedrückt. Die NUSSELT-Zahl ist im VDI-Wärmeatlas definiert als

$$Nu = \frac{h \cdot d}{\lambda} \sim \frac{\dot{Q}_{Total}}{\dot{Q}_{WL}},$$

hierin ist h der Wärmeübergangskoeffizient. Nach der Transformation der numerischen Werte erhalten wir für die so gebildete NUSSELT-Zahl

$$Nu = \frac{Pr \cdot Re}{2\pi} \cdot \dot{Q}$$

wobei \dot{Q} hier den in der Arbeit verwendeten dimensionslosen Wärmestrom darstellt.

Abbildung 6.1 zeigt den Vergleich zwischen unseren numerischen Werten und den empirischen Daten aus dem VDI-Wärmeatlas. Es ist zu erkennen, daß die empirischen und numerischen Werte mit einer annähernd gleichen Abhängigkeit ansteigen. In dem betrachteten Bereich konnte die Abhängigkeit aus den FEM Resultaten

$$Nu \sim Pr^{3/10}$$

erkannt werden.

Für laminare Strömung erwarten wir nach dem VDI-Wärmeatlas weiterhin für die reine Naturkonvektion über einem Zylinder

$$Nu \sim Gr^{1/4}$$

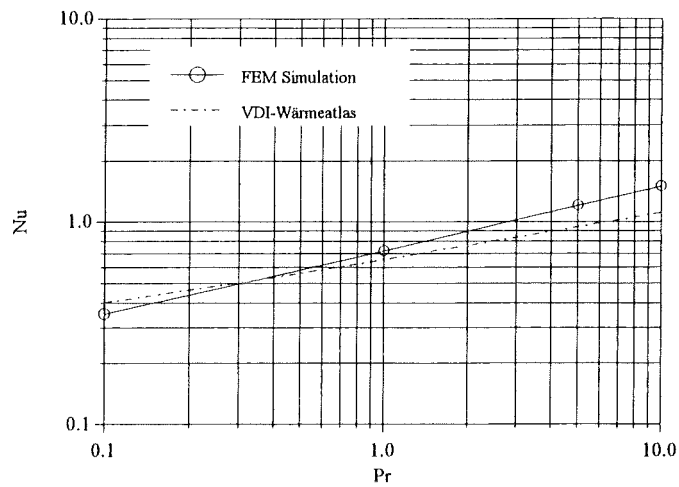


Abbildung 6.1: Vergleich VDI Wärmeatlas mit der FEM-Simulation

Um unserer Rechnungen vergleichbar zu machen wird der Wärmestrom erneut in dimensionsloser Form als Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{Pr \cdot Re}{2\pi} \cdot \dot{Q}$$

ausgedrückt. Aus Gleichung (5.3) erhielten wir mittels Regression die Abhängigkeit

$$\dot{Q} \sim Gr^{1/3}$$

in dem betrachteten Parameterbereich. Hieraus können wir die Abhängigkeit

$$Nu \sim Gr^{1/3}$$

für den Fall der Mischkonvektion ermittelt.

Literatur

- [1] Müller, U.: Freie Konvektion und Wärmeübertragung. Skriptum einer an der Universität Karlsruhe gehaltenen Vorlesung, WS 1993 / 94
- [2] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie.- 8. Auflage.- Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1982
- [3] Zierep, J.: Grundzüge der Strömungslehre.- 3. Auflage.- Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1987
- [4] Griesbaum, R.: Theoretische Untersuchung zur Nachlaufströmung hinter einem beheiztem Zylinder.- Diplomarbeit am Institut für angewandte Thermo- und Fluidodynamik,- KfK, 1993
- [5] Sarnes, V.: Theoretische Untersuchung zum fernen Nachlauf über einem rotationssymmetrischen beheizten Körper.- Diplomarbeit am Institut für angewandte Thermo- und Fluidodynamik,- KfK, 1994
- [6] Fujii, T.: Int. J. Heat Transfer.-Vol. 6, pp. 597 - 606, 1963
- [7] VDI Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang.-4. Auflage, pp. Fa 1 - Fa 7.-VDI-Verlag Verlag 1984
- [8] Zierep, J.: Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre.-3. Auflage.- Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1991