



**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5605

# **Theoretische Untersuchung zum fernen Nachlauf über einem rotationssymmetri- schen beheizten Körper**

**V. Sarnes, P. Ehrhard, U. Müller**

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Juli 1995

---



**FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**  
Technik und Umwelt  
**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5605

**Theoretische Untersuchung zum fernen Nachlauf über einem  
rotationssymmetrischen beheizten Körper**

**V. Sarnes, P. Ehrhard, U. Müller**  
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1995

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

## Theoretische Untersuchung zum fernen Nachlauf über einem rotationssymmetrischen beheizten Körper

Ein rotationssymmetrischer beheizter Körper wird entgegen dem Schwerevektor von einem inkompressiblen wärmeleitenden Fluid angeströmt. Unter Verwendung der *Boussinesq*-Approximation werden die dimensionslosen Grundgleichungen für den Impuls- und Wärmetransport mit dem kleinen Parameter  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  entwickelt. Eine weitere Entwicklung dieser Grenzschichtgleichungen nach dem Parameter  $\varepsilon = 1/x$  liefert schließlich die asymptotische Lösung im laminaren fernen Nachlauf.

Die Lösung der ersten Ordnung liefert das bekannte Stromfeld des linearisierten fernen Nachlaufs. Das Temperaturfeld resultiert aus der Überlagerung von Wärmeleitung und konvektivem Transport der eingebrachten Wärme durch die ungestörte Anströmung. Die zweite Ordnung korrigiert die Nichtlinearitäten der konvektiven Terme. Das Temperaturfeld berücksichtigt somit den konvektiven Wärmetransport infolge des linearisierten Nachlaufprofils. Zusätzlich bedingt das Temperaturfeld in der Impulsgleichung schwache Auftriebskräfte.

Typische Merkmale des beheizten Nachlaufs, wie die Amplituden der Geschwindigkeit und der Temperatur, sowie die kinematische und die thermische Grenzschichtdicke, können so als Funktion der dimensionslosen Parameter diskutiert werden. Dies sind neben den Koordinaten die *Reynolds*-Zahl, die *Prandtl*-Zahl und die *Grashof*-Zahl.

### Asymptotic model for the far wake above a heated axisymmetric body

A heated axisymmetric body is placed in a uniform flow field, directed against gravitational acceleration. The liquid is incompressible and has constant heat conductivity. We apply the *Boussinesq*-approximation and expand the dimensionless equations of momentum and heat transport using the small parameter  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$ . A secondary expansion in terms of the small parameter  $\varepsilon = 1/x$  within the resulting boundary layer equations finally allows for an asymptotic solution, valid in the far laminar wake.

This solution to leading order agrees with the well-known flow field in the linearized far wake. The thermal field is determined by a conductive and convective transport of the introduced heat, due to the undisturbed outer flow field. In a second order the convective nonlinearities of both momentum and heat transport are corrected. The thermal field, thus, accounts for the convective transport of heat due to the linearized wake profile. Moreover, weak buoyancy forces are present in the momentum equation, resulting from the non-isothermal field.

We analyze the properties of the heated far wake, namely amplitudes of temperature and velocity, as well as thermal and kinematic boundary layer thickness, as function of dimensionless parameters. These are the spatial coordinates, the *Reynolds*-number, the *Prandtl*-number and the *Grashof*-number.

# Inhaltsverzeichnis

1	Problemstellung	1
2	Grundgleichung	2
3	Integrale Impuls- und Wärmebilanz	4
4	Asymptotische Entwicklungen	7
	4.1 Grenzschichtapproximation	7
	4.2 Asymptotische Entwicklung im Nachlauf	12
5	Ähnlichkeitstransformation	17
	5.1 Ähnlichkeitstransformation in Ordnung $O(\delta)$	17
	5.1 Ähnlichkeitstransformation in Ordnung $O(\delta^2)$	19
	5.1 Ähnlichkeitstransformation in Ordnung $O(\varepsilon)$	21
6	Ergebnisse	23
	6.1 Superposition der Lösungen	23
	6.2 Abhängigkeiten der Grenzschichtdicke	25
7	Kennzahlvariation	33
	7.1 Variation der REYNOLDS-Zahl	33
	7.2 Variation der GRASHOF-Zahl	35
	7.3 Variation der PRANDTL-Zahl	38
8	Numerische Integration	40
9	Diskussion	43
	Literatur	47

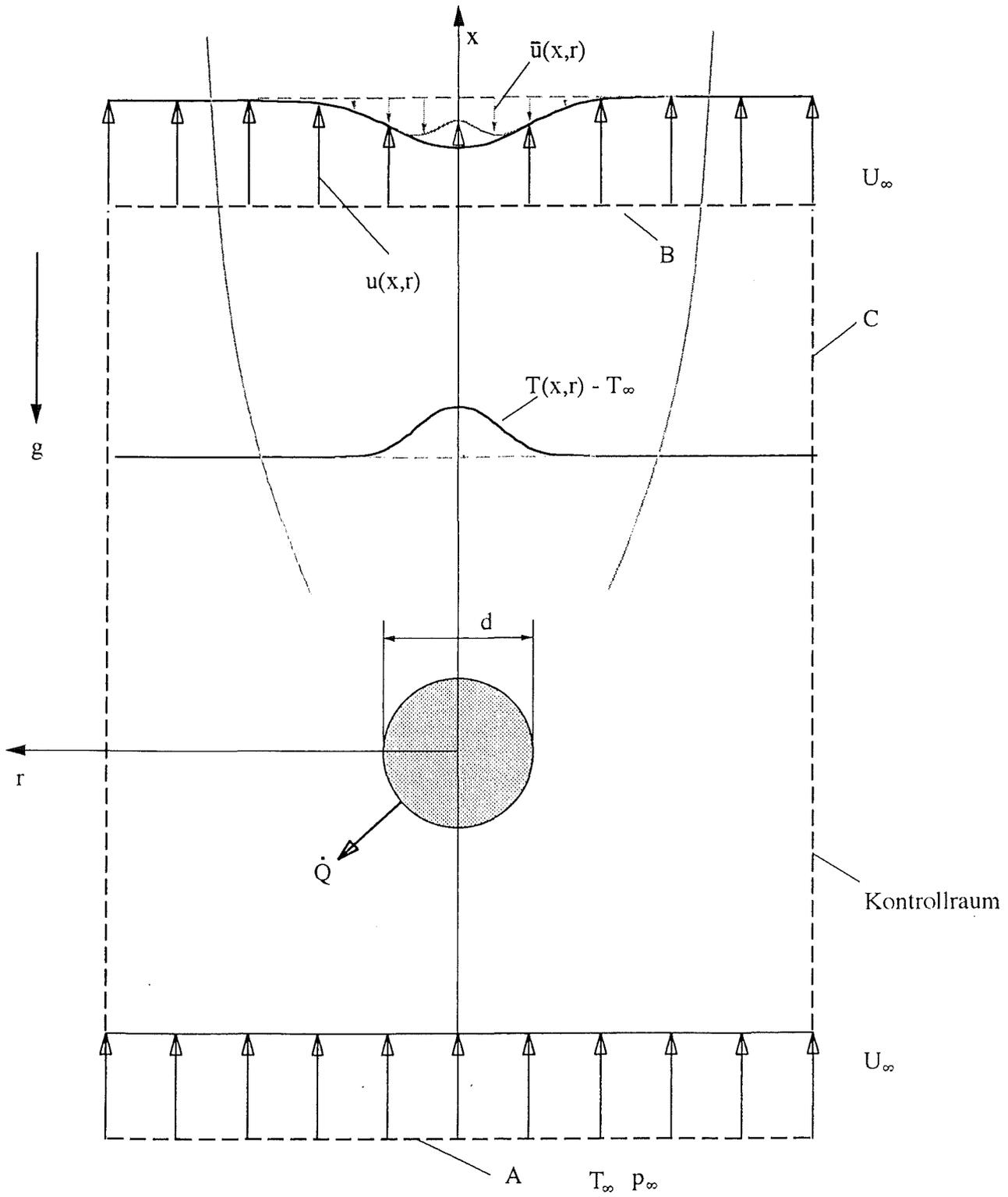


Bild 1.1: Nachlauf der beheizten Kugel

## 1 Problemstellung

Wir behandeln den laminaren Nachlauf eines beheizten Rotationskörpers. Die hier abgeleitete Theorie erweist sich als gültig für beliebige Körperform, sofern der integrale Impuls- und Wärmeeintrag durch den Körper bekannt ist. Wir werden im folgenden deshalb stets den Spezialfall der Kugel betrachten. Die Kugel befindet sich in einem unendlich ausgedehnten Raum und wird von einem zähen, wärmeleitenden Medium angeströmt. Bild 1.1 zeigt die parallel zur Zeichenebene angeströmte Kugel. Mit  $U_\infty$ ,  $T_\infty$  und  $p_\infty$  bezeichnen wir die Geschwindigkeit, die Temperatur und den Druck der ungestörten Anströmung. Der Schwerevektor  $g$  wirkt entgegen der Richtung der Anströmung. Das Zylinderkoordinatensystem hat seinen Ursprung im Mittelpunkt der Kugel. Die radiale Achse steht senkrecht zur Strömungsrichtung. Die Kugel hat den Durchmesser  $d$ . Die Kugel beheizt das Medium mit einem konstanten Wärmestrom  $\dot{Q}$ . Wir befinden uns im ausgebildeten Nachlauf in einiger Entfernung von der Kugel. Wir betrachten ein stationäres und wegen der Rotationssymmetrie zweidimensionales Problem.

Wir überlagern Zwangskonvektion durch die Anströmung und Naturkonvektion aufgrund der Beheizung zu Mischkonvektion. Wir haben eine allein durch den Widerstand der Kugel herrührende Nachlaufzelle. Der Auftriebsterm verursacht durch einen temperaturabhängigen Dichteunterschied ein lokales Geschwindigkeitsmaximum bei  $r = 0$ . Der Widerstand und die Beheizung der Kugel gehen in die integralen Bilanzen ein. Wir legen um die Kugel einen Kontrollraum, über dessen Grenzen ( in Bild 1.1 A, B, C ) wir die integralen Impuls- und Wärmeflüsse bilanzieren.

## 2 Grundgleichungen

Wir gehen aus von der NAVIER-STOKES-Gleichung

$$(\bar{w} \cdot \nabla) \bar{w} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \bar{f} + \nu \Delta \bar{w}, \quad (2.1)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \bar{w} = 0, \quad (2.2)$$

und der Energiegleichung für inkompressible Strömungen

$$\rho c_p (\bar{w} \cdot \nabla T) = \lambda \Delta T. \quad (2.3)$$

Somit liegen vier Differentialgleichungen für den Vektor der Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{w} = (u, v, w)$  und den Druck  $p$  vor. Dabei bedeutet  $\rho$  die Dichte,  $\nu$  die kinematische Zähigkeit,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $c_p$  die spezifische Wärme. Die Massenkräfte  $\bar{f}$ , die Dichte  $\rho$  und die kinematische Viskosität  $\nu$  werden als gegeben angesehen. Als eingeprägte Massenkraft wird bei Strömungen, bei denen Dichteunterschiede durch Temperaturdifferenzen hervorgerufen werden, die Gewichtskraft des strömenden Mediums eingesetzt. Die Dichte hängt dabei von der Temperatur ab. Die gegenüber der EULER-Gleichung höhere Ordnung ermöglicht es, die Haftbedingungen zu erfüllen. Dabei sind sowohl die NAVIER-STOKES-Gleichung als auch die EULERSchen Gleichungen wegen der konvektiven Gliedern nichtlinear.

Zur Vereinfachung wählen wir für den Druck das Bezugssystem

$$p(x, r) = p_{\text{sta}}(x) + p^*(x, r),$$

$$\text{mit } \frac{\partial p_{\text{sta}}}{\partial x} = -\rho_{\infty} g. \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet  $p^*$  den dynamischen Druckanteil. Für die Dichte, die spezifische Wärme, die Wärmeleitfähigkeit und die Viskosität führen wir die BOUSSINESQ-Approximation ein. Diese impliziert

1. ein zähes, wärmeleitendes Medium mit

- spezifischer Wärme  $c_p = \text{konst.},$
- Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = \text{konst.},$

– kinematischer Viskosität  $\nu = \text{konst.}$  .

2. Mit Ausnahme des Auftriebsterms in den Bewegungsgleichungen wird die Dichte als konstant angesehen. Dort wird eine lineare Dichte-Temperatur Beziehung, d.h.

$$\rho = \rho_{\infty}(1 - \alpha(T - T_{\infty})), \quad (2.5)$$

verwendet, wobei  $\alpha$  den Volumenausdehnungskoeffizienten bezeichnet<sup>1</sup> .

Werten wir die NAVIER-STOKES-Gleichung (2.1) sowie die Kontinuitätsgleichung (2.2) in Zylinderkoordinaten für ein achsensymmetrisches Problem aus, so erhalten wir für den stationären Fall

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (2.6)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \alpha(T - T_{\infty})g. \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet  $r$  die radiale und  $z$  die axiale Koordinate und  $v$  bzw.  $u$  die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung dieser Koordinaten.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich zu

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

Die zeitliche Änderung der Enthalpie wird bei inkompressiblem Medium durch die Wärmeleitung und den konvektiven Wärmestrom bestimmt. Die durch innere Reibung entstehende Dissipationswärme und Wärmeübertragung durch Strahlung werden vernachlässigt. Wir erhalten bei stationärer Strömung die Energiebilanzgleichung

$$v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right). \quad (2.9)$$

Hierbei stellt  $\kappa = \lambda / \rho_0 c_p$  die Temperaturleitfähigkeit dar. Entsprechend der Ordnung der Differentialgleichungen können wir die folgenden Randbedingungen angeben

$$x > 0, \quad r = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \quad u = U_\infty, \quad p^* = p_\infty, \quad T = T_\infty. \quad (2.10)$$

$$\sqrt{r^2 + x^2} = \frac{d}{2}: \quad u, v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \text{const.} (T - T_{\text{Kug}}).$$

### 3 Integrale Impuls- und Wärmebilanz

Für den Fall der angeströmten beheizten Kugel betrachten wir den Nachlauf und können daher wegen Rotationssymmetrie nur für die Ableitung der axialen Geschwindigkeit in radialer Richtung  $\partial u(x, r=0)/\partial r = 0$  eine Aussage machen. Der Wert  $u(x, r=0)$  hingegen ist bisher nicht festgelegt. Das Gleichungssystem hätte daher als triviale Lösung:

$$u = U_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad p^* = p_\infty.$$

Daher geben wir als zusätzliche Bedingung die integrale Impuls- und Wärmebilanz an, da darin sowohl der Widerstand der umströmten Kugel als auch die von ihr zugeführte Wärme auftreten. Hierzu benutzen wir einen Kontrollraum A, B, C (vgl. Bild 1.1) um die Kugel und die Grenzschichten und integrieren die einströmenden Impuls- und Wärmeströme über seine Flächen.

Wir betrachten den Impulssatz<sup>2</sup>

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_{ji} + \sum \bar{F}_a = 0, \quad (3.1)$$

nur für die x-Komponenten der Kräfte, da die resultierende Impulskraft und die Summe aus den äußeren Kräften in radialer Richtung verschwinden. An der Kontrollraumgrenzfläche A wirkt aufgrund der Einströmung eine Impulskraft und eine Druckkraft, resultierend aus dem Druck in der Anströmung, d.h.

$$\bar{F}_{j,1} = 2\pi \rho_\infty \int_0^\infty r U_\infty^2 dr, \quad (3.2)$$

$$\bar{F}_{D,1} = 2\pi \int_0^\infty r p_\infty dr. \quad (3.3)$$

An der oberen Kontrollraumgrenzfläche B wirkt wegen der Ausströmung eine Impulskraft

$$\bar{F}_{j,2} = -2\pi \rho_{\infty} \int_0^{\infty} r u^2 dr, \quad (3.4)$$

und eine Druckkraft aufgrund der dort herrschenden Druckverteilung

$$\bar{F}_{D,2} = -2\pi \int_0^{\infty} r p^* dr. \quad (3.5)$$

Über die Mantelfläche C fließt ein Massenstrom

$$\dot{m} = 2\pi \rho_{\infty} \int_0^{\infty} (U_{\infty} - u) r dr.$$

Mit der axialen Geschwindigkeit  $U_{\infty}$  resultiert hieraus die x-Komponente der Impulskraft zu

$$\bar{F}_{j,3} = -2\pi \rho_{\infty} \int_0^{\infty} U_{\infty} (U_{\infty} - u) r dr. \quad (3.6)$$

Im Inneren des Kontrollraumes wirkt durch die Beheizung der Kugel eine Auftriebskraft aufgrund der Dichtedifferenz, welche wir über den Kontrollraum integrieren, d.h.

$$\bar{F}_A = 2\pi g \int_0^x \int_0^r (\rho_{\infty} - \rho) r dx dr. \quad (3.7)$$

Schließlich berücksichtigen wir mit der Widerstandskraft der Kugel

$$\bar{F}_k = \frac{\rho_{\infty}}{2} U_{\infty}^2 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 c_w(Re), \quad (3.8)$$

deren Form und Einfluß auf die Strömung.

Bei der Kugel ist der Widerstandskoeffizient  $c_w$  abhängig von der REYNOLDS-Zahl

$$Re = \frac{U_{\infty} d}{\nu}, \quad (3.9)$$

Mit den angegebenen Kräfteanteilen (Gl.(3.2)-Gl.(3.8)) lautet der Impulssatz Gl.(3.1)

$$0 = 2\pi \rho_\infty \int_0^\infty u r (U_\infty - u) dr + 2\pi \int_0^\infty r (p_\infty - p^*) dr + \\ + 2\pi \alpha \rho_\infty g \int_0^\infty \int_0^x r (T - T_\infty) dx dr - \frac{\rho_\infty}{8} U_\infty^2 \pi d^2 c_w (Re). \quad (3.10)$$

In der integralen Wärmebilanz werden konvektive und konduktive Anteile sowie der zugeführte Wärmestrom berücksichtigt. Der konvektive Wärmestrom über die Eintrittsgrenze A, die Austrittsgrenze B und die Mantelfläche C berechnet sich zu

$$\dot{Q}_{K,A} = 2\pi c_p \rho_\infty \int_0^\infty r U_\infty T_\infty dr, \quad (3.11)$$

$$\dot{Q}_{K,B} = -2\pi c_p \rho_\infty \int_0^\infty r u T dr, \quad (3.12)$$

$$Q_{K,C} = -2\pi c_p \rho_\infty \int_0^\infty T_\infty (U_\infty - u) r dr. \quad (3.13)$$

Nach FOURIER ist der konduktive Wärmestrom durch eine Fläche proportional dem Temperaturgradienten normal zur Fläche. Wir erhalten somit die konduktiven Wärmeströme über A, B und C zu:

$$\dot{Q}_{L,B} = -2\pi \lambda \int_0^\infty r \frac{\partial T}{\partial x} dr, \quad (3.14)$$

$$\dot{Q}_{L,A} = 0, \quad (3.15)$$

$$\dot{Q}_{L,C} = 0. \quad (3.16)$$

Mit der konstanten Heizleistung  $\dot{Q}$  der Kugel ergibt sich die Wärmebilanz aus der Summe von Gl.(3.11)-Gl.(3.16):

$$\dot{Q} = 2\pi c_p \rho_\infty \int_0^\infty r u (T - T_\infty) dr + 2\pi \lambda \int_0^\infty r \frac{\partial T}{\partial x} dr. \quad (3.17)$$

## 4 Asymptotische Entwicklungen

### 4.1 Grenzschichtapproximation

Als Grenzfall betrachten wir große REYNOLDS-Zahlen. Dabei vollzieht sich der Anstieg der Geschwindigkeit auf Anströmgeschwindigkeit innerhalb einer sehr dünnen Schicht, der Grenzschicht. Wir können somit die Nachlaufströmung in zwei Gebiete unterteilen<sup>3</sup> :

1. Eine dünne Grenzschicht, in der der Geschwindigkeitsgradient groß ist und damit die Reibungskräfte von gleicher Größenordnung sind wie die Trägheitskräfte. Für diese Lösung setzen wir eine 'innere Entwicklung' an.

2. Die Außenströmung, in der der Geschwindigkeitsgradient und die Reibung vernachlässigt werden können, so daß die EULERSchen Gleichungen für reibungsfreie Strömung angewandt werden können. Für dieses Gebiet können wir eine "äußere Entwicklung" ansetzen.

Mit geeigneten Bezugsgrößen lassen sich die NAVIER-STOKES-Gleichung, die Energiegleichung und die zugehörigen Randbedingungen sowie die integralen Bilanzen skalieren. Für die Temperatur wählen wir mit der Temperatur im Außenfeld  $T_\infty$  zusätzlich einen neuen Bezugspunkt

$$\Theta = T - T_\infty.$$

Wir verwenden folgende Skalierungen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{d}, \quad \bar{r} = \frac{r}{d}, \\ u' &= \frac{u}{U_\infty}, \quad v' = \frac{v}{U_\infty}, \quad \Theta' = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \\ p' &= \frac{p^*}{\rho_\infty U_\infty^2}, \quad t' = \frac{t}{t^*}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit

$U_\infty$  : Anströmgeschwindigkeit,

$d$  : Durchmesser der Kugel,

$$t^* = \frac{d}{U_\infty} \quad : \quad \text{charakteristische Zeit,}$$

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}_k}{v \rho_\infty c_p d} \quad : \quad \text{charakteristische Temperaturdifferenz}$$

Am Beispiel der dimensionslosen Version von Gleichung (2.7)

$$v' \frac{\partial u'}{\partial \bar{r}'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial \bar{r}'^2} + \frac{1}{\bar{r}'} \frac{\partial u'}{\partial \bar{r}'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \right) \quad (4.2)$$

führen wir wir eine Größenabschätzung für große REYNOLDS-Zahlen durch. Das Ergebnis der Abschätzung zeigt, daß die Reibungskräfte nur in der Nähe der x-Achse von gleicher Größenordnung sind wie die Trägheitskräfte. Wir strecken die radiale Länge derart, daß die neue Koordinate (innere Koordinate) in der Grenzschicht nicht mehr klein ist, d.h.

$$r' = \bar{r} \sqrt{Re}.$$

Wir sehen in den dimensionslosen Impulsgleichungen den Einfluß der REYNOLDS-Zahl auf die viskosen Anteile. Die Streckung der Koordinate wird daher von  $Re$  abhängen<sup>4</sup>.

Für die Wärmetransportgleichung kann die gleiche Annahme gemacht werden, d.h. wir müssen die Querkoordinate wieder mit einer von  $Re$  abhängigen Funktion dehnen<sup>5</sup>, wobei die Ordnung  $O(Re)$  der Streckung der Querkoordinate in der Impulsgleichung von gleicher Ordnung ist wie die Streckung der Querkoordinate in der Wärmetransportgleichung.

Mit der separaten Skalierung für  $x$  und  $r$  folgt aus der Kontinuitätsgleichung, daß  $v$  eine Größenordnung kleiner als  $u$  sein muß. Für die Lösung der abhängigen Variablen werden daher mit  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  als Störparameter, folgende asymptotischen Entwicklungen angesetzt

$$u'(x', r', \varepsilon) = u_0(x', r') + \varepsilon u_1(x', r') + O(\varepsilon^2), \quad (4.3)$$

$$v'(x', r', \varepsilon) = \varepsilon v_0(x', r') + \varepsilon^2 v_1(x', r') + O(\varepsilon^3), \quad (4.4)$$

$$\Theta'(x', r', \varepsilon) = \Theta_0(x', r') + \varepsilon \Theta_1(x', r') + O(\varepsilon^2), \quad (4.5)$$

$$p'(x', r', \varepsilon) = p_0(x', r') + \varepsilon p_1(x', r') + O(\varepsilon^2). \quad (4.6)$$

Die Entwicklungen werden in die skalierten Impulsgleichungen, die Wärmetransportgleichung und die integralen Bilanzen eingesetzt. Geordnet nach Potenzen von  $\varepsilon$  lauten die Gleichungen:

Grenzschicht der Ordnung  $O(\varepsilon^0)$ :

$$r: \quad 0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r'}, \quad (4.7)$$

$$x: \quad v_0 \frac{\partial u_0}{\partial r'} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x'} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u_0}{\partial r'}, \quad (4.8)$$

mit der Kontinuitätsgleichung von  $O(\varepsilon^0)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x'}(r' u_0) + \frac{\partial}{\partial r'}(r' v_0), \quad (4.9)$$

und der integralen Impulsbilanz

$$\frac{1}{16} c_w (\text{Re}) \text{Re} = \int_0^\infty r' (u_0 - u_0^2) dr'. \quad (4.10)$$

Die Energiebilanzgleichung der Ordnung  $O(\varepsilon^0)$  lautet

$$v_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r'} + u_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x'} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r'} \right), \quad (4.11)$$

mit der integralen Wärmebilanz

$$1 = 2\pi \int_0^\infty r' u_0 \Theta_0 dr'. \quad (4.12)$$

Die Randbedingungen transformieren sich zu

$$x' > 0, \quad r' = 0 \quad : \quad \frac{\partial u_0}{\partial r'} = 0, \quad v_0 = 0, \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial r'} = 0,$$

$$r' \rightarrow \infty \quad : \quad u_0 = 1, \quad \Theta_0 = 0, \quad \frac{\partial (r' v_0)}{\partial r'} = 0. \quad (4.13)$$

Das entspricht der PRANDTLschen Grenzschichtgleichung, in der die Bewegungsgleichung erster Ordnung in radialer Richtung entfällt und der Druckterm eine von der Außenströmung aufgeprägte Größe ist<sup>5</sup>.

In der Ordnung  $O(\varepsilon^1)$  lassen sich die Gleichungen wie folgt schreiben:

Die Bewegungsgleichung in Längsrichtung für  $O(\varepsilon)$ :

$$v_1 \frac{\partial u_0}{\partial r'} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial r'} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x'} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x'} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u_1}{\partial r'} + \frac{Gr}{Re^2} \Theta_0, \quad (4.14)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x'}(r' u_1) + \frac{\partial}{\partial r'}(r' v_1) = 0. \quad (4.15)$$

Die Energiegleichung formuliert sich zu

$$v_1 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r'} + v_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial r'} + u_1 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x'} + u_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial x'} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r'} \right), \quad (4.16)$$

mit den Randbedingungen

$$x' > 0, \quad r' = 0 \quad : \quad \frac{\partial u_1}{\partial r'} = 0, \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial r'} = 0,$$

$$r' \rightarrow \infty \quad : \quad u_1 = 0, \quad \Theta_1 = 0, \quad \frac{\partial(r' v_1)}{\partial r'} = 0, \quad (4.17)$$

und integralen Bilanzen

$$\text{für den Impuls} \quad \int_0^{\infty} r' (2u_0 u_1 - u_1) dr' = \frac{Gr}{Re^2} \int_0^x \int_0^x \Theta_0 r' dr' dx', \quad (4.18)$$

$$\text{und die Wärme} \quad 0 = 2\pi \int_0^{\infty} r' (u_0 \Theta_1 + u_1 \Theta_0) dr'. \quad (4.19)$$

Für große REYNOLDS-Zahlen vernachlässigen wir, mit dem oben eingeführten Parameter  $\varepsilon$ , die Terme der Ordnung  $O(\varepsilon^2)$ . Aus Gl.(4.8) und Gl.(4.14) folgt, daß der dritte Reibungsterm aus Gl.(2.7) gegenüber dem ersten und zweiten Term um die Ordnung  $O(\varepsilon^2)$  tiefer ist. Aus den Gleichungen der Ordnung  $O(1)$  und  $O(\varepsilon)$  folgt zusätzlich, daß der Druckgradient quer zur Grenzschicht ebenfalls von  $O(\varepsilon^2)$  ist. Der Druck bleibt also in Querrichtung praktisch konstant. Da im Außenfeld  $\partial u(x, r) / \partial x = 0$ , folgt  $p^*(r \rightarrow \infty) = \text{konst.}$  Damit ist der Druck von der Außenströmung auf die Grenzschicht aufgeprägt. Für die Druckterme in Gl.(2.6) und Gl.(2.7) gelten daher:

$$\begin{aligned}
 O(\varepsilon^2) &= -\frac{\partial p'}{\partial r'}, \\
 O(\varepsilon^2) &= -\frac{\partial p'}{\partial x'}.
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

In den Grenzschichtgleichungen treten zusätzlich zwei Kennzahlen auf. Die GRASHOF-Zahl

$$Gr = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu^2},
 \tag{4.21}$$

beschreibt das Verhältnis der Leistung der Auftriebskräfte zur Leistung der Reibungskräfte. Sie quantifiziert damit die Stärke der Auftriebsströmung<sup>6</sup>.

Die PRANDTL-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa},
 \tag{4.22}$$

stellt das Verhältnis von kinematischer Viskosität  $\nu$  zu Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  dar. Sie charakterisiert die Transporteigenschaften der Flüssigkeit in Bezug auf Impuls und Temperatur und erlaubt somit Aussagen zur relativen Dicke der Grenzschichten von Impuls und Temperatur<sup>1</sup>.

Der Auftriebsterm in der Impulsgleichung hat den Vorfaktor<sup>6</sup>:

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Trägheitskräfte}}.$$

Für ausreichend kleine Temperaturdifferenzen oder bei kleinem Wärmestrom von der Kugel zur Flüssigkeit sind die Auftriebskräfte klein gegenüber den Trägheitskräften. Um den Auftriebsterm erst in höherer Ordnung zu berücksichtigen, beschränken wir uns auf eine sogenannte schwache Beheizung, d.h. wir setzen

$$\frac{Gr}{Re^2} = O(\varepsilon).
 \tag{4.23}$$

Wir formulieren also die GRASHOF-Zahl, und damit die Beheizung, als Funktion der REYNOLDS-Zahl. Eine ähnliche Abschätzung wollen wir auch für die integrale Wärmebilanz machen, in der das Konduktionsglied

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty r' \frac{\partial \Theta_0}{\partial x'} dr' = O(\varepsilon^2),
 \tag{4.24}$$

auftritt. Die PRANDTL-Zahl ist für Gase von der Größenordnung  $O(1)$  und für Flüssigkeiten von  $O(10)$ - $O(1000)^5$ ; der Term wird hierfür für große REYNOLDS-Zahlen sehr klein. Für sehr kleine PRANDTL-Zahlen ( $Pr \rightarrow 0$ ), für die das Konduktionsglied Gl.(4.24) groß wird, müssten wir zusätzlich nach der PRANDTL-Zahl entwickeln. Die Rechnungen werden daher auf 'große' PRANDTL-Zahlen beschränkt.

In den nachfolgenden Rechnungen lassen wir die Striche zur Kennzeichnung der dimensionslosen Größen wieder weg.

## 4.2 Asymptotische Entwicklung im Nachlauf

Wir führen eine dimensionslose Nachlaufgeschwindigkeit ein

$$\bar{u}(x, r) = 1 - u(x, r), \quad (4.25)$$

mit 
$$\bar{u}(x, r) = \bar{u}_0(x, r) + \bar{u}_1(x, r) + \bar{u}_2(x, r) + \dots \quad (4.26)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\bar{v} = v. \quad (4.27)$$

Die einzelnen Summanden ergeben sich aus der Potenzreihenentwicklung nach  $\varepsilon$  zu

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(x, r) &= 1 - u_0(x, r), \\ \bar{u}_1(x, r) &= -\varepsilon u_1(x, r), \\ \bar{u}_2(x, r) &= -\varepsilon^2 u_2(x, r), \text{ usw.} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Vergleichbar der Wahl der neuen Bezugssysteme für den Druck und die Temperatur, kann man die Anströmgeschwindigkeit als neuen Bezugspunkt für die Geschwindigkeit betrachten und die Nachlaufgeschwindigkeit als abhängige Variable auffassen. Hiermit erhalten wir die modifizierten Grenzschichtgleichungen für den Impuls in  $O(\varepsilon^0)$

$$\bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} - \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}, \quad (4.29)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}(r \bar{u}_0) + \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{v}_0) = 0, \quad (4.30)$$

und die Wärmetransportgleichung

$$\bar{v}_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} - \bar{u}_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} \right). \quad (4.31)$$

Die integralen Bilanzen lauten

$$\frac{1}{16} c_w (\text{Re}) \text{Re} = \int_0^\infty r \bar{u}_0 (1 - \bar{u}_0) dr, \quad (4.32)$$

$$1 = 2\pi \int_0^\infty r (1 - \bar{u}_0) \Theta_0 dr. \quad (4.33)$$

In zweiter Ordnung  $O(\epsilon)$  formulieren sich die obigen Gleichungen wie folgt:

Impuls- und Wärmetransportgleichung

$$\bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} - \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} - \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} - \frac{Gr}{\text{Re}^2} \Theta_0, \quad (4.34)$$

$$\bar{v}_1 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \bar{v}_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \bar{u}_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \bar{u}_1 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right), \quad (4.35)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x} (r \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}_1) = 0$$

und den integralen Bilanzen

$$\int_0^\infty r (\bar{u}_1 - 2\bar{u}_1 \bar{u}_0) dr = \int_0^\infty \int_0^x \Theta_0 r dx dr, \quad (4.36)$$

$$0 = 2\pi \int_0^\infty r (\Theta_1 - \bar{u}_0 \Theta_1 - \bar{u}_1 \Theta_0) dr. \quad (4.37)$$

Die Randbedingungen für Geschwindigkeiten und Temperatur transformieren sich für die erste und zweite Ordnung ( $i = 0, 1$ )

$$x > 0, \quad r = 0 \quad : \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial r} = 0, \quad \bar{v}_i = 0, \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial r} = 0, \quad (4.38)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \bar{u}_i = 0, \quad \Theta_i = 0, \quad \frac{\partial(r\bar{v}_i)}{\partial r} = 0. \quad (4.39)$$

Für große Entfernungen  $x \gg 1$  soll eine asymptotische Entwicklung der Nachlaufgeschwindigkeiten und der Temperatur durchgeführt werden. Wir machen folgende Ansätze

$$\bar{u}_0 = \hat{\varepsilon} u_0^{(0)} + \hat{\varepsilon}^2 u_1^{(0)} + \dots \text{ und } \bar{u}_1 = u_0^{(1)} + \hat{\varepsilon} u_1^{(1)} + \dots, \quad (4.40)-(4.41)$$

$$\bar{v}_0 = \hat{\varepsilon} v_0^{(0)} + \hat{\varepsilon}^2 v_1^{(0)} + \dots \text{ und } \bar{v}_1 = v_0^{(1)} + \hat{\varepsilon} v_1^{(1)} + \dots, \quad (4.42)-(4.43)$$

$$\Theta_0 = \hat{\varepsilon} \Theta_0^{(0)} + \hat{\varepsilon}^2 \Theta_1^{(0)} + \dots \text{ und } \Theta_1 = \Theta_0^{(1)} + \hat{\varepsilon} \Theta_1^{(1)} + \dots \quad (4.44)-(4.45)$$

Die Nachlaufgeschwindigkeit  $\bar{u}_1$  in Gl.(4.28) definiert als Ordnung  $O(\varepsilon^1)$  entwickeln wir in Gl.(4.41) bezüglich  $\hat{\varepsilon}$  eine Ordnung tiefer als  $\bar{u}_0$ . Für asymptotische Entwicklungen gilt die Voraussetzung, daß die Nachlaufgeschwindigkeiten und Temperaturen für kleine Entwicklungsparameter ( $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\hat{\varepsilon} \rightarrow 0$ ) ebenfalls klein werden müssen. Dies ist für alle Geschwindigkeit  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  und Temperaturen  $\Theta_i$  erfüllt, da  $\bar{u}_1$  und  $\Theta_1$  von der Ordnung  $O(\varepsilon^1)$  sind. Wir betrachten mit diesen Ansätzen nachfolgend keine gemischten Ordnungen. Einsetzen in das Gleichungssystem ( Gl.(4.29) bis Gl.(4.39) ) und Ordnen nach Potenzen von  $\hat{\varepsilon}$  führt auf folgende Gleichungssysteme für die Impuls- und Wärmetransportgleichung in der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$

$$\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial r}, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \Theta_0^{(0)}}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta_0^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0^{(0)}}{\partial r} \right), \quad (4.47)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x} (u_0^{(0)} r) + \frac{\partial}{\partial r} (v_0^{(0)} r) = 0, \quad (4.48)$$

und den integralen Bilanzen

$$\frac{1}{16} c_w (\text{Re}) \text{Re} = \hat{\varepsilon} \int_0^\infty r u_0^{(0)} dr, \quad (4.49)$$

$$\frac{1}{2\pi} = \hat{\varepsilon} \int_0^\infty r \Theta_0^{(0)} dr. \quad (4.50)$$

Für die Ordnung  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  ergeben sich die Impulsgleichung

$$\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial r} - \frac{Gr}{Re^2} \Theta_0^{(0)}, \quad (4.51)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}(r u_0^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial r}(r v_0^{(1)}) = 0, \quad (4.52)$$

und die integrale Impulsbilanz

$$\int_0^\infty r u_0^{(1)} dr = -\frac{Gr}{Re^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta_0^{(0)} r dx dr. \quad (4.53)$$

Die Wärmetransportgleichung und die integrale Wärmebilanz treten ab den Ordnungen  $O(\varepsilon)$  nur noch als gemischte Ordnungen auf und existieren daher in Ordnung  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  nicht. Die Gleichungen für die Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  lauten für die Impuls- und Wärmetransportgleichung

$$v_0^{(0)} \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x} - u_0^{(0)} \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial r}, \quad (4.54)$$

$$v_0^{(0)} \frac{\partial \Theta_0^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial x} - u_0^{(0)} \frac{\partial \Theta_0^{(0)}}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \Theta_1^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} \right), \quad (4.55)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}(r u_1^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial r}(r v_1^{(0)}) = 0 \quad (4.56)$$

und den integralen Bilanzen für

Impuls 
$$\int_0^\infty r u_1^{(0)} dr = \int_0^\infty r u_0^{(0)2} dr, \quad (4.57)$$

und Wärme 
$$\int_0^\infty r \Theta_1^{(0)} dr = \int_0^\infty r u_0^{(0)} \Theta_0^{(0)} dr. \quad (4.58)$$

Die Randbedingungen für die Ordnungen  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$ ,  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  und  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  lauten ( $i = 0, 1$  und  $j = 0, 1$ )

$$\begin{aligned} x > 0, r = 0 : \quad & \frac{\partial u_i^{(j)}}{\partial r} = 0, v_i^{(j)} = 0, \frac{\partial \Theta_i^{(j)}}{\partial r} = 0, \\ r \rightarrow \infty : \quad & u_i^{(j)} = 0, \Theta_i^{(j)} = 0, \frac{\partial (rv_i^{(j)})}{\partial r} = 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

## 5 Ähnlichkeitstransformation

### 5.1 Ähnlichkeitstransformation in Ordnung $O(\hat{\varepsilon}^1)$

Wir wollen die partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungen auf lineare, gewöhnliche reduzieren<sup>5</sup>. Wir nehmen daher an, daß in großem Abstand von der Kugel, d.h für  $x \gg 1$ , ähnliche Lösungen existieren. Wir verstehen darunter Geschwindigkeiten und Temperaturen, die sich an verschiedenen Stellen nur durch Maßstabsfaktoren unterscheiden. Es muß also folgende Gleichung erfüllt sein<sup>3</sup>:

$$\frac{u\{x_1, [r g(x_1)]\}}{h(x_1)} = \frac{u\{x_2, [r g(x_2)]\}}{h(x_2)}.$$

Der Maßstabsfaktor für  $u$  ist hier  $h(x)$  und der Maßstabsfaktor für  $r$  die dimensionslose Länge  $g(x)$ . Wir setzen für die Ähnlichkeitstransformation an:

$$\eta = r g(x), \quad (5.1)$$

$$u_0^{(0)}(x, r) = F_0(\eta) h_0(x), \quad (5.2)$$

$$v_0^{(0)}(x, r) = G_0(\eta) m_0(x), \quad (5.3)$$

$$\Theta_0^{(0)}(x, r) = H_0(\eta) k_0(x). \quad (5.4)$$

Unter der Bedingung, daß sich bei ähnlichen Lösungen die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen transformieren lassen, werden die Maßstabsfaktoren festgelegt. Wir erhalten folgende, ausschließlich von  $x$  abhängige Funktionen:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad h_0(x) = \frac{c_w(\text{Re})\text{Re}}{16 x \hat{\varepsilon}}, \quad (5.5)-(5.6)$$

$$k_0 = \frac{1}{2 \pi x \hat{\varepsilon}}, \quad m_0(x) = \frac{c_w(\text{Re})\text{Re}}{16 x \sqrt{x} \hat{\varepsilon}}. \quad (5.7)-(5.8)$$

Dabei ist, wie wir später zeigen werden,  $g(x)$  eine zur Grenzschichtdicke proportionale Funktion. Wir bezeichnen die Ableitungen  $\partial / \partial \eta$  mit einem Strich. In dieser Notation lauten die Differentialgleichungen

$$F_0'' + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right) F_0' + F_0 = 0, \quad (5.9)$$

$$H_0'' + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{\eta \text{Pr}}{2} \right) H_0' + \text{Pr} H_0 = 0. \quad (5.10)$$

und die Kontinuität

$$\frac{1}{2} \eta^2 F_0' + \eta F_0 = -\eta G_0' - G_0. \quad (5.11)$$

Die transformierten Randbedingungen für die neue Variable  $\eta$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : & F_0' = 0, \quad G_0 = 0, \quad H_0' = 0, \\ \eta \rightarrow \infty & : & F_0 = 0, \quad H_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die integrale Impuls- und die integrale Wärmebilanz vereinfachen sich zu

$$\int_0^{\infty} \eta F_0 d\eta = 1, \quad (5.13)$$

$$\int_0^{\infty} \eta H_0 d\eta = 1. \quad (5.14)$$

Die linearen, homogenen Differentialgleichungen Gl.(5.9) und Gl.(5.10) können wir analytisch integrieren. Bei der ersten Integration berücksichtigen wir die Randbedingung bei  $\eta = 0$ , bei der zweiten Integration die integralen Bilanzen. Da die Randbedingung für  $\eta \rightarrow \infty$  stets erfüllt wird, reduzieren sich die für die Integration relevanten Bedingungen um eine Bedingung. Wir erhalten damit die Formfunktionen der Geschwindigkeit  $u_0^{(0)}$  und der Temperatur  $\Theta_0^{(0)}$  zu

$$F_0 = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right), \quad (5.15)$$

$$H_0 = \frac{\text{Pr}}{2} \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2\right). \quad (5.16)$$

und über die Kontinuitätsgleichung Gl.(5.11) die Formfunktion der Radialgeschwindigkeit  $v_0^{(0)}$ :

$$G_0 = -F_0', \quad (5.17)$$

$$G_0 = \frac{1}{4} \eta \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right). \quad (5.18)$$

Dabei sind auch die Randbedingungen für  $G_0$  automatisch erfüllt.

Mit den Maßstabsfaktoren aus Gl.(5.5) bis Gl.(5.8) ergeben sich die Lösungen für die Geschwindigkeiten und die Temperatur zu:

$$u_0^{(0)}(x, r) = \frac{c_w(\text{Re})\text{Re}}{32 x \hat{\epsilon}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{r^2}{x}\right), \quad (5.19)$$

$$v_0^{(0)}(x, r) = -\frac{c_w(\text{Re})\text{Re}r}{64 x^2 \hat{\epsilon}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{r^2}{x}\right), \quad (5.20)$$

$$\Theta_0^{(0)}(x, r) = \frac{\text{Pr}}{4 \pi x \hat{\epsilon}} \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Pr} \frac{r^2}{x}\right). \quad (5.21)$$

## 5.2 Ähnlichkeitstransformation in Ordnung $O(\hat{\epsilon}^2)$

Wir wollen die Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $O(\epsilon^0 \hat{\epsilon}^2)$ , wie in Kapitel 5.1 beschrieben, in inhomogene, gewöhnliche Differentialgleichungen überführen. Hierfür setzen wir die Lösungen aus Gl.(5.19) bis Gl.(5.21) zunächst in die Differentialgleichung (4.54) ein. Hieraus resultiert die Inhomogenität. Wir erhalten die Impulsgleichung

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial r} = -\frac{c_w^2(\text{Re})\text{Re}^2}{1024 x^3 \hat{\epsilon}^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{x}\right), \quad (5.22)$$

und die Wärmetransportgleichung

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = -\frac{c_w(\text{Re})\text{Re}\text{Pr}}{128 \pi x^3 \hat{\epsilon}^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{r^2}{x} (1 + \text{Pr})\right). \quad (5.23)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$-\frac{\partial}{\partial x} (u_1^{(0)} r) + \frac{\partial}{\partial r} (v_1^{(0)} r) = 0, \quad (5.24)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen

$$\begin{aligned} x > 0, r = 0: \quad & \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial r} = 0, \quad v_1^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_1^{(0)}}{\partial r} = 0, \\ r \rightarrow \infty: \quad & u_1^{(0)} = 0, \quad \Theta_1^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial (r v_1^{(0)})}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

und den integralen Bilanzen

$$\int_0^{\infty} r u_1^{(0)} dr = \frac{c_w^2(\text{Re}) \text{Re}^2}{1024 x^2 \hat{\varepsilon}^2}, \quad (5.26)$$

$$\int_0^{\infty} r \Theta_1^{(0)} dr = \frac{c_w(\text{Re}) \text{Re} \text{Pr}}{64 \pi x (\text{Pr} + 1) \hat{\varepsilon}}. \quad (5.27)$$

Wir setzen nun für die Korrekturen der Geschwindigkeit und der Temperatur wiederum eine Ähnlichkeitstransformation der Form

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{x}}, \quad (5.28)$$

$$u_1^{(0)}(x, r) = F_1(\eta) h_1(x), \quad (5.29)$$

$$v_1^{(0)}(x, r) = G_1(\eta) m_1(x), \quad (5.30)$$

$$\Theta_1^{(0)}(x, r) = H_1(\eta) k_1(x), \quad (5.31)$$

an. Für den Maßstabsfaktor der radialen Länge  $r$  wird damit die gleiche Funktion wie in der Ordnung  $O(\hat{\varepsilon})$  verwendet. Die Maßstabsfaktoren berechnen sich gemäß

$$h_1(x) = \frac{c_w^2(\text{Re}) \text{Re}^2}{1024 x^2 \hat{\varepsilon}^2}, \quad m_1(x) = \frac{c_w^2(\text{Re}) \text{Re}^2}{1024 x^{5/2} \hat{\varepsilon}^2}, \quad (5.32)-(5.33)$$

$$k_1(x) = \frac{c_w(\text{Re}) \text{Re} \text{Pr}}{64 \pi x^2 (\text{Pr} + 1) \hat{\varepsilon}^2}. \quad (5.34)$$

Damit ergeben sich die inhomogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Formfunktionen  $F_1$  der Axialgeschwindigkeit  $u_1^{(0)}$  ( Gl.(5.22) ),  $G_1$  der Radialgeschwindigkeit  $v_1^{(0)}$  und  $H_1$  der Temperatur  $\Theta_1^{(0)}$  ( Gl.(5.23) ):

$$F_1'' + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right) F_1' + 2F_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right), \quad (5.35)$$

$$H_1'' + \left( \frac{1}{\eta} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \right) H_1' + 2\text{Pr}H_1 = \frac{\text{Pr}(\text{Pr}+1)}{2} \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2(1+\text{Pr})\right), \quad (5.36)$$

$$\frac{\eta^2}{2} F_1' + 2\eta F_1 = -G_1 - \eta G_1', \quad (5.37)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : & F_1' = 0, \quad G_1 = 0, \quad H_1' = 0, \\ \eta \rightarrow \infty & : & F_1 = 0, \quad H_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

der integralen Impulsbilanz

$$\int_0^{\infty} \eta F_1 d\eta = 1, \quad (5.39)$$

und der integralen Wärmebilanz

$$\int_0^{\infty} \eta H_1 d\eta = 1. \quad (5.40)$$

### 5.3 Ähnlichkeitstransformation in Ordnung $O(\varepsilon^1)$

In der Ordnung  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  berechnen wir für geringe Erwärmung des strömenden Fluids die Geschwindigkeit der Auftriebsströmung. Hierzu setzen wir zunächst die Lösung der Temperatur Gl.(5.21) in die Differentialgleichung (4.51) ein und erhalten

$$\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial r} = \frac{\text{Gr Pr}}{4 \text{Re}^2 \pi x \hat{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Pr} \frac{r^2}{x}\right). \quad (5.41)$$

Mit dem Ähnlichkeitsansatz

$$u_0^{(1)}(x, r) = K_1(\eta) f_1(x), \quad (5.42)$$

$$v_0^{(1)}(x, r) = I_1(\eta) q_1(x), \quad (5.43)$$

und geeigneter Wahl der Maßstabsfaktoren

$$f_1(x) = \frac{\text{Gr Pr}}{\text{Re}^2 4\pi}, \quad q_1(x) = \frac{\text{Gr Pr}}{4\pi \text{Re}^2 \sqrt{x}}, \quad (5.44)-(5.45)$$

transformieren wir Gl.(5.41) in eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$K_1'' + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right) K_1' = \exp\left( -\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2 \right). \quad (5.46)$$

Die Kontinuitätsgleichung transformiert sich in

$$-\frac{\eta^2}{2} K_1' = I_1 + \eta I_1'. \quad (5.47)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : & K_1' = 0, \quad I_1 = 0, \\ \eta \rightarrow \infty & : & K_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

und der integralen Impulsbilanz

$$\int_0^{\infty} \eta K_1 d\eta = -\frac{2}{\text{Pr}}. \quad (5.49)$$

## 6 Ergebnisse

### 6.1 Superposition der Lösungen

Die analytisch gewonnenen Geschwindigkeiten  $u_0^{(0)}$  und  $v_0^{(0)}$  und die numerisch berechneten Geschwindigkeiten  $u_0^{(1)}$ ,  $v_0^{(1)}$ ,  $u_1^{(0)}$  und  $v_1^{(0)}$  lassen sich nun in die Potenzreihen

$$u(x, r, \varepsilon, \hat{\varepsilon}) = 1 - \hat{\varepsilon} u_0^{(0)} + \hat{\varepsilon}^2 u_1^{(0)} + u_0^{(1)} + O(\varepsilon^2) + O(\hat{\varepsilon}^3) + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}), \quad (6.1)$$

$$v(x, r, \varepsilon, \hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon} v_0^{(0)} + \hat{\varepsilon}^2 v_1^{(0)} + v_0^{(1)} + O(\varepsilon^2) + O(\hat{\varepsilon}^3) + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}), \quad (6.2)$$

einsetzen. Wir erhalten dann die Längsgeschwindigkeit im Nachlauf der Kugel (vgl. Bild 6.1)

$$u(x, r) = 1 - \overbrace{\frac{c_w(\text{Re}) \text{Re}}{32} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{r^2}{x}\right)}^{\hat{\varepsilon} u_0^{(0)}(x, r)} - \underbrace{\frac{c_w^2(\text{Re}) \text{Re}^2}{1024} \frac{1}{x^2} F_1(\eta)}_{\hat{\varepsilon}^2 u_1^{(0)}(x, r)} - \underbrace{\frac{\text{Gr Pr}}{4 \text{Re}^2 \pi} K_1(\eta)}_{\varepsilon u_0^{(1)}(x, r)}, \quad (6.3)$$

und die Quergeschwindigkeit

$$v(x, r) = - \overbrace{\frac{c_w(\text{Re}) \text{Re}}{64} \frac{r}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{r^2}{x}\right)}^{\hat{\varepsilon} v_0^{(0)}(x, r)} + \underbrace{\frac{c_w^2(\text{Re}) \text{Re}^2}{1024} \frac{1}{x^{5/2}} G_1(\eta)}_{\hat{\varepsilon}^2 v_1^{(0)}(x, r)} + \underbrace{\frac{\text{Gr Pr}}{\text{Re}^2 4 \pi \sqrt{x}} I_1(\eta)}_{\varepsilon v_0^{(1)}(x, r)}. \quad (6.4)$$

Die Anteile aus der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$  und  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  in die Potenzreihe

$$\Theta(x, r, \varepsilon, \hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon} \Theta_0^{(0)} + \hat{\varepsilon}^2 \Theta_1^{(0)} + O(\varepsilon^2) + O(\hat{\varepsilon}^3) + O(\varepsilon \hat{\varepsilon})$$

eingesetzt, ergibt die Temperatur

$$\Theta(x,r) = \underbrace{\frac{\text{Pr} - 1}{4\pi x} \exp\left(-\frac{1}{4}\text{Pr} \frac{r^2}{x}\right)}_{\hat{\varepsilon} \Theta_0^{(0)}(x,r)} + \underbrace{\frac{c_w(\text{Re}) \text{Re} \text{Pr} - 1}{64\pi(\text{Pr} + 1) x^2} H_1(\eta)}_{\hat{\varepsilon}^2 \Theta_1^{(0)}(x,r)}. \quad (6.5)$$

im Nachlauf. Mit den Indizes  ${}_0^{(0)}$  und  ${}_1^{(0)}$  bezeichnen wir die linearen und nichtlinearen Anteile und mit  ${}_0^{(1)}$  die vom Auftrieb erzeugten Glieder.

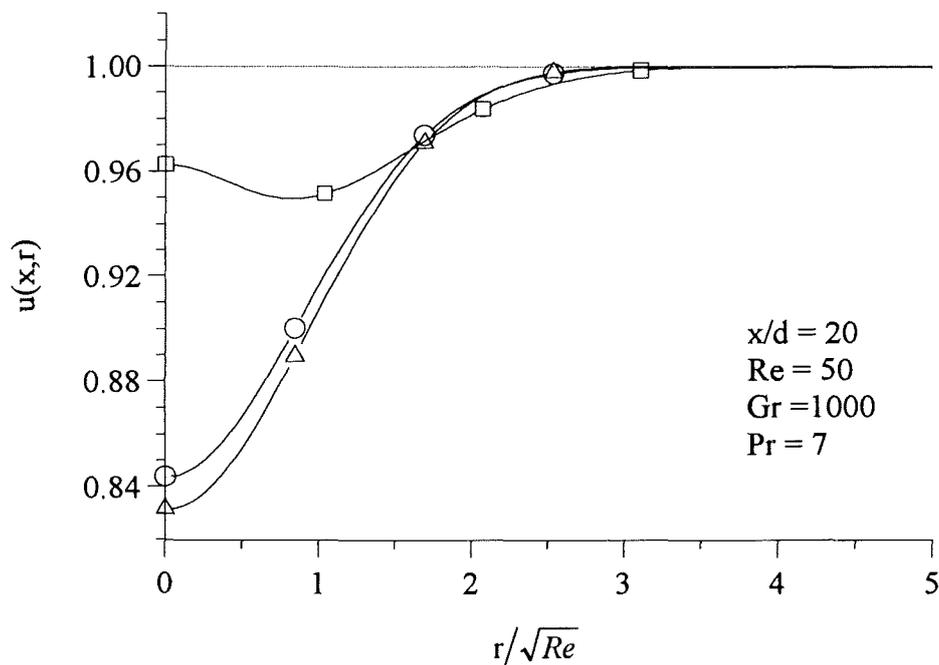


Bild 6.1: Superposition der Längsgeschwindigkeiten für  $u_0^{(1)}$  der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$ ,  $u_1^{(0)}$  von  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  und  $u_0^{(1)}$  von  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  bei gleichem Kugelabstand  $x/d$  bezüglich der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  ( $\Delta = -\hat{\varepsilon} u_0^{(0)} - \hat{\varepsilon}^2 u_1^{(0)}$ ;  $\circ = -\hat{\varepsilon} u_0^{(0)}$ ;  $\square = -\hat{\varepsilon} u_0^{(0)} - \hat{\varepsilon}^2 u_1^{(0)} - u_0^{(1)}$  aus Gl.(6.3)).

## 6.2 Abhängigkeiten der Grenzschichtdicke

Die Nachlaufgeschwindigkeit in der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$  und  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  bilden eine Nachlaufdelle mit einem Maximum bei  $r=0$ . Im Falle schwacher Beheizung überlagert sich dieser Nachlaufdelle ein in  $x$  konstanter Auftriebsterm in der Ordnung  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$ . Der Wert auf der Symmetrieachse ist

$$u(x, 0) = 1 - \underbrace{\frac{c_w(\text{Re})\text{Re}}{32x}}_{u_0^{(0)}(x,0)} - \underbrace{\frac{c_w^2(\text{Re})\text{Re}^2}{2048x^2}}_{u_1^{(0)}(x,0)} + \underbrace{\frac{0.3 \text{ Gr Pr}}{4\text{Re}^2 \pi}}_{u_0^{(1)}(x,0)}, \quad (6.6)$$

(vgl. Bild 6.2). Für große Entfernungen von der Kugel  $x \gg 1$  geht der Wert für  $Gr = 0$  gegen 1, d.h. die dimensionslose Anströmgeschwindigkeit. Für  $Gr > 0$  strebt die Geschwindigkeit dagegen gegen den Grenzwert

$$u(x \rightarrow \infty, r = 0) = 1 + \frac{0.3 \text{ Gr Pr}}{4\text{Re}^2 \pi},$$

der die Geschwindigkeit des Freistrahls über einer punktförmigen Wärmequelle beschreibt (vgl. Bild 6.4). Hierzu muß Flüssigkeit aus der Außenströmung zufließen, die Quergeschwindigkeit ist daher stets

$$v(x, r) < 0 \text{ für } x > 0 \text{ und } r \geq 0,$$

(vgl. Bild 6.5). Als Mittengeschwindigkeit bezeichnen wir die Glieder der Nachlaufgeschwindigkeit für  $r = 0$ , d.h.

$$\bar{u}(x, 0) = 1 - u(x, 0)$$

In Bild 6.2 sind die  $x$ -abhängigen Glieder der Mittengeschwindigkeit aufgetragen. Man erkennt hier den asymptotischen Verlauf gegen die Grenzwerte für  $Gr = 0$  und  $Gr > 0$ . Für große  $x$ -Werte dominiert der Geschwindigkeitsterm aus 1. Ordnung  $O(\hat{\varepsilon})$  den Abfall der Mittengeschwindigkeit. Definieren wir die Grenzschichtdicke für die analytische Lösung der Ordnung  $O(\hat{\varepsilon})$  Gl. (5.19) an der Stelle, an der die Nachlaufgeschwindigkeit  $O(\hat{\varepsilon})$  1% von der maximalen Mittengeschwindigkeit Gl.(6.6) hat,

$$u_0^{(0)}(x, \delta(x)) = 1\% \cdot \underbrace{\frac{c_w(\text{Re})\text{Re}}{32x}}_{=u_0^{(0)}(x,0)}, \quad (6.7)$$

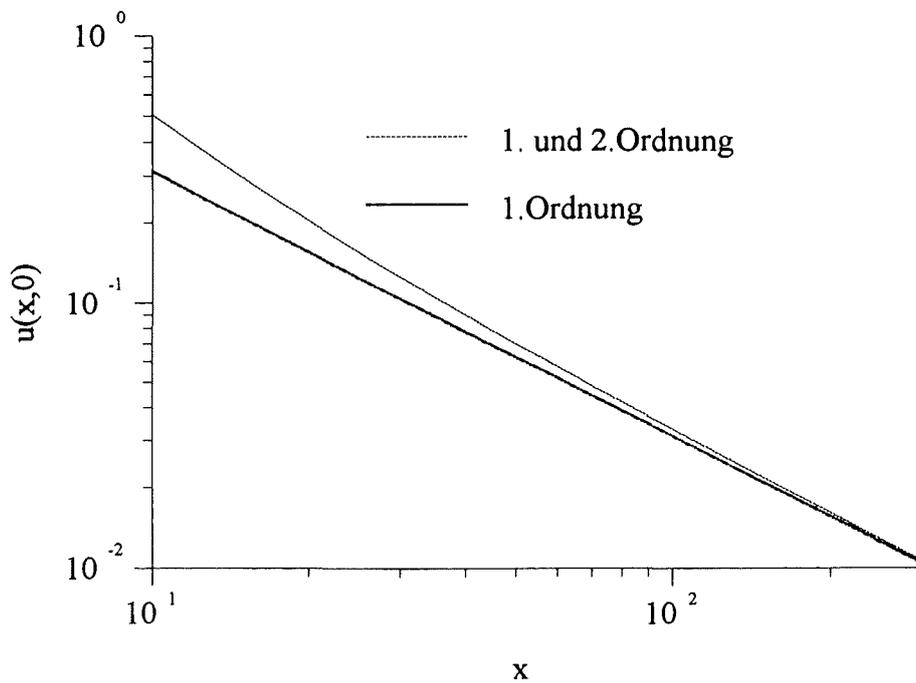


Bild 6.2: Nachlaufgeschwindigkeit

 $u_0^{(0)}(x, r=0) + u_1^{(0)}(x, r=0)$  bei  $Re = 50$  vgl. Gl. (6.6)

so sehen wir direkt aus dem Ansatz der Ähnlichkeitstransformation Gl. (5.1), bei der die Variable

$$\eta = r \frac{1}{\sqrt{x}},$$

eingeführt wurde, daß auch die Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit in der Ordnung  $O(\hat{\varepsilon})$

$$\delta^{(0)}(x) \propto \sqrt{x}, \quad (6.8)$$

sich mit dem Maßstabsfaktor  $g(x)$  der Variablen  $\eta$  ausbreitet. Dies bedeutet, daß sich die Grenzschicht gemäß Gl. (6.8) ins Außenfeld ausbreitet, während gleichzeitig die Amplitude der Geschwindigkeitsstörung nach Gl. (6.6) abnimmt. Mit der Streckung der Querkoordinate für große REYNOLDS-Zahlen erreichen wir, daß die Differentialgleichungen unabhängig von der REYNOLDS-Zahl werden. Daraus folgt, daß auch die Lösungen dieses Systems unabhängig von der REYNOLDS-Zahl sind. Die Grenzschicht erfährt daher bei einer Änderung der REYNOLDS-Zahl eine affine Verzerrung der radialen Koordinate von der Abhängigkeit

$$\delta^{(0)}(x, Re) \propto \sqrt{\frac{x}{Re}}. \quad (6.9)$$

Für die thermische Grenzschicht verwenden wir die gleiche Streckung der radialen Achse wie für die kinematische Grenzschicht. Die thermische Grenzschicht hat daher in Ordnung  $O(\hat{\epsilon})$  die gleiche Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl und der Längsvariablen  $x$ . Durch eine weitere Skalierung der Radialachse läßt sich Gl. (4.11) so umformen, daß auch die Abhängigkeit von der PRANDTL-Zahl herausfällt. Wir schreiben

$$r' = r \cdot \sqrt{\text{Pr}},$$

und überführen Gl. (4.11) in

$$\frac{\partial \Theta_0^{(0)}}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 \Theta_0^{(0)}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \Theta_0^{(0)}}{\partial r'} \right).$$

Wir definieren die thermische Grenzschicht mit der Mittentemperatur

$$\Theta(x, 0) = \frac{\text{Pr}}{\underbrace{4\pi \cdot x}_{\Theta_0^{(0)}(x,0)}} + \frac{c_w(\text{Re})\text{RePr}}{\underbrace{256 \pi x^2}_{\Theta_1^{(0)}(x,0)}}, \quad (6.10)$$

zu

$$\Theta_0^{(0)}(x, \delta_{th}(x)) = 10\% \Theta_0^{(0)}(x, 0),$$

und finden somit folgenden Zusammenhang für die thermische Grenzschichtdicke 1. Ordnung

$$\delta_{th}^{(0)}(x, \text{Pr}, \text{Re}) \propto \sqrt{\frac{x}{\text{PrRe}}} \quad (6.11)$$

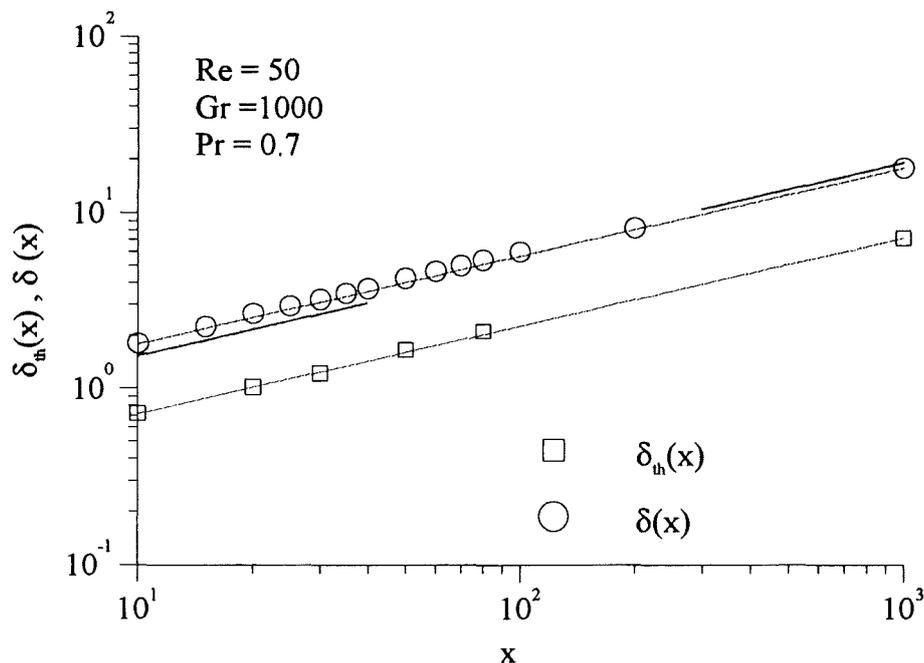


Bild 6.3: Thermische Grenzschichtdicke  $\delta_{th}(x)$  und kinematische Grenzschichtdicke  $\delta(x)$  (---  $\sim \sqrt{x}$ )

Wir wollen nun die Grenzschichtdicken  $\delta^{(1)}$  und  $\delta_{th}^{(1)}$  nächst tieferer Ordnung betrachten. Da wir die unbekannt Funktionen  $F_1(\eta)$  und  $K_1(\eta)$  für die Längsgeschwindigkeit und  $H_1(\eta)$  für die Temperatur numerisch lösen, können wir die Formfunktionen aus den verschiedenen Ordnungen nicht analytisch miteinander vergleichen. Über den Maßstabsfaktor  $g(x)$  erreichen wir, daß sich die Geschwindigkeiten und die Temperatur in allen Ordnungen in eine von  $x$  unabhängige Formfunktion und einen von  $x$  abhängigen Maßstabsfaktor zerlegen lassen (siehe Kap. Ähnlichkeitstransformationen). Wir erhalten daher eine Abhängigkeit für die Ausbreitung der kinematischen und thermischen Störung von

$$\delta^{(1)}(x, Re) = A \delta^{(0)}, \quad (6.12)$$

$$\delta_{th}^{(1)}(x, Re, Pr) = B \delta_{th}^{(0)}.$$

Dabei sind  $A$  und  $B$  bezüglich  $x$  unbekannte Konstanten und nur von der Definition der Grenzschichtdicke Gl. (6.7) abhängig, d.h. definiert man die Grenzschichtdicke an verschiedenen Stellen der Längsgeschwindigkeit relativ zur Mittengeschwindigkeit ändern sich auch  $A$  und  $B$ . Der Beweis soll für die kinematische Grenzschichtdicke indirekt durchgeführt werden: Aus den Lösungen für die Längsgeschwindigkeiten Ordnung  $O(\hat{\epsilon})$  und  $O(\hat{\epsilon}^2)$  Gl. (6.3) ist zunächst ersichtlich, daß  $A$  von  $x$  unabhängig sein muß. Wäre nun

$$\frac{u_0^{(0)}(x_1, 0)}{u_1^{(0)}(x_1, 0)} = \frac{u_0^{(0)}(x_1, r_1)}{u_1^{(0)}(x_1, r_2)},$$

mit  $\frac{r_2}{r_1} = A$  und  $A = \text{konst.}$ ,

so hätte man mit der Geschwindigkeit aus der Ordnung  $O(\hat{\varepsilon})$  auch die Geschwindigkeit der Ordnung  $O(\hat{\varepsilon}^2)$  gefunden

$$u_0^{(0)}(x_1, r_1) = u_1^{(0)}(x_1, A \cdot r_1).$$

Diese Annahme auf die Formfunktion  $F_1$  der Geschwindigkeit  $u_1^{(0)}$  Gl.(5.15) angewandt

$$F_1 = \exp\left(-\frac{A}{4}\eta^2\right)$$

und anschließend in Differentialgleichung (5.35) eingesetzt löst die Differentialgleichung jedoch nicht. Es kann so gezeigt werden, daß die Definition der Grenzschichtdicke Gl.(6.7) auf die  $x$ -Abhängigkeit der Grenzschichtdicke des vollen Systems eine Rolle spielt. Für  $x \gg$  wird  $F_0$ , für  $x \ll$  hingegen  $F_1$  den Verlauf der Grenzschicht bestimmen. In Bild 6.3 sind zusätzlich die Asymptoten für große und kleine  $x$ -Werte der Impulsgrenzschichtdicke eingezeichnet. Hat die Längsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit der Außenströmung erreicht, fällt die Quergeschwindigkeit asymptotisch ab

$$v(x, r) = \frac{A(x)}{r}. \quad (6.13)$$

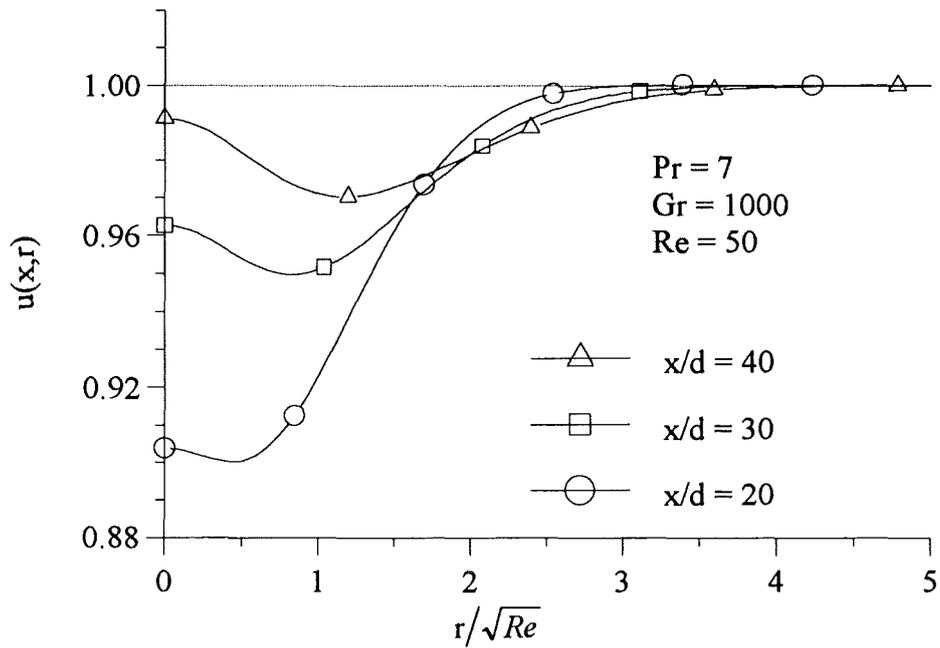


Bild 6.4: Längsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Lauflänge  $x$  (Gl.(6.3)).

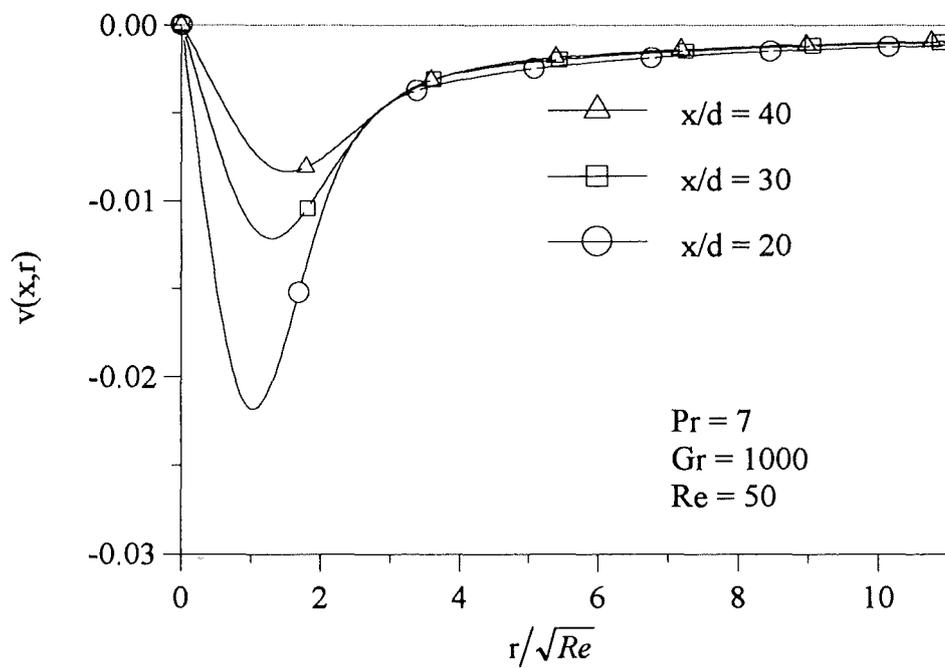


Bild 6.5: Quergeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Lauflänge  $x$  (Gl. (6.4)).

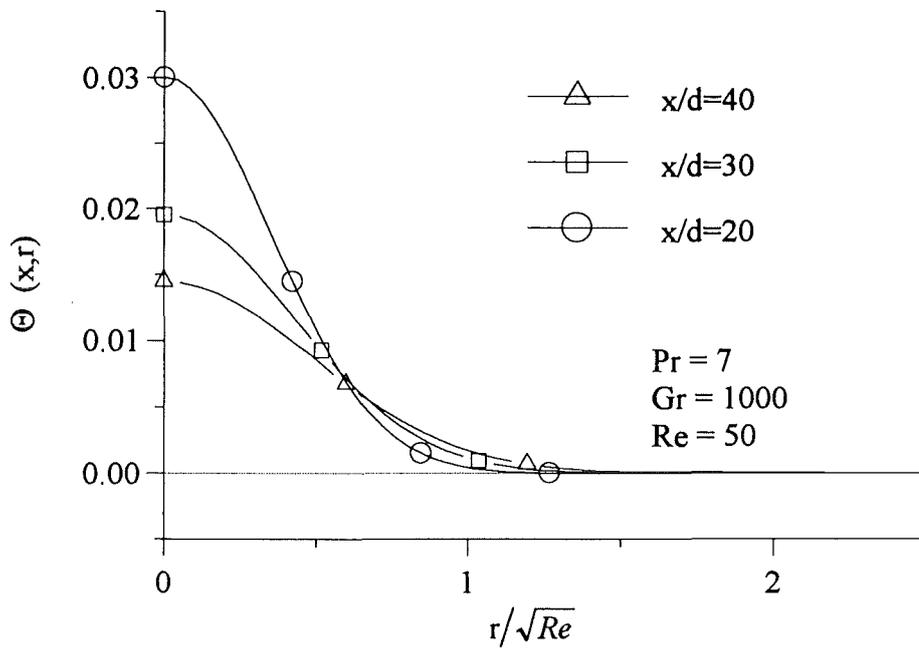


Bild 6.6: Temperatur  $\Theta(x,r)$  in Abhängigkeit von der Lauflänge  $x$  (Gl. (6.5)).

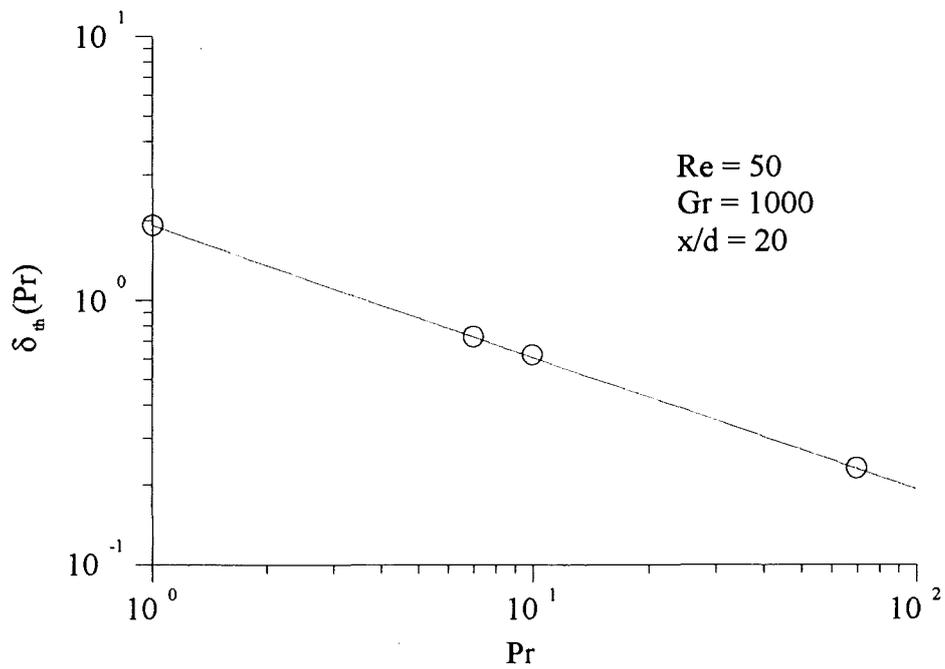


Bild 6.7: Abhängigkeit der thermischen Grenzschichtdicke von der PRANDTL-Zahl (---  $\sim Pr^{-1/2}$ )

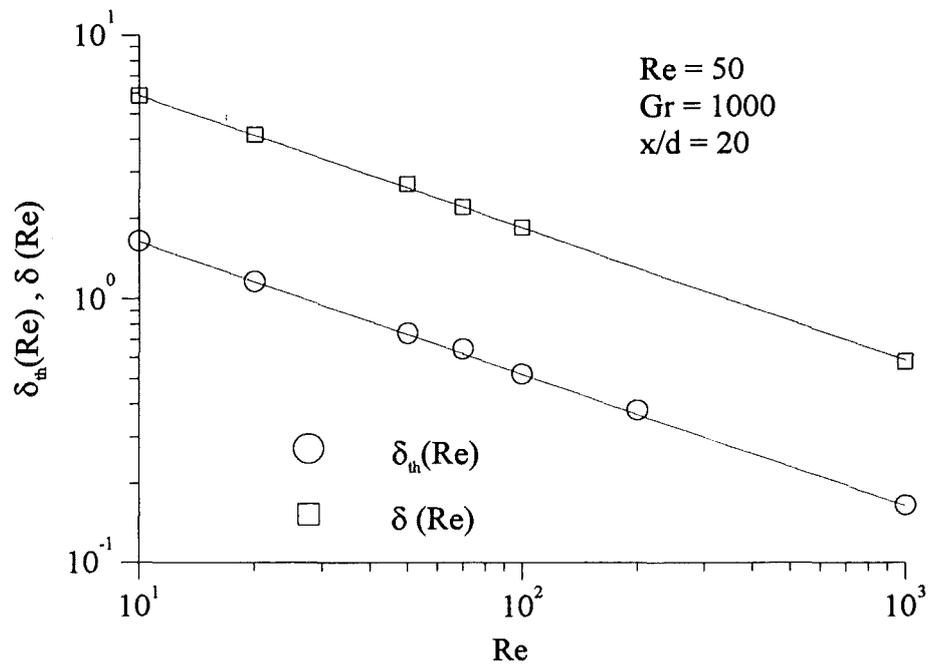


Bild 6.8: Thermische und kinematische Grenzschichtdicke als Funktion der REYNOLDS-Zahl ( ---  $\sim Re^{-1/2}$ )

## 7 Kennzahlvariation

### 7.1 Variation der REYNOLDS-Zahl

Die REYNOLDS-Zahl, wie in Gl. (3.9) definiert, läßt sich über die Anströmgeschwindigkeit, die Viskosität oder den Kugeldurchmesser variieren. Da die Anströmgeschwindigkeit nur in der REYNOLDS-Zahl auftritt, müssen wir bei einer Änderung der Anströmung die anderen Kennzahlen nicht anpassen. Bei erhöhter Anströmgeschwindigkeit verlieren die Auftriebskräfte an Einfluß. Der reine Nachlauf wird durch den Widerstand der Kugel induziert. Mit wachsender Lauflänge  $x$  verbreitert er sich und seine Amplitude nimmt ab. Der Auftriebseffekt macht sich daher verstärkt bei größeren Entfernungen bemerkbar. Für große REYNOLDS-Zahlen wird die Amplitude der Längsgeschwindigkeit größer (vgl. Bild 7.1). Aus der Kontinuität folgt, daß sich auch der Zufluß von Flüssigkeit aus der Außenströmung vergrößern muß. In Bild 7.2 ist der Einfluß der REYNOLDS-Zahl auf das Profil der Quergeschwindigkeit zu sehen, damit zeigt auch Bild 7.2 eine schlankere Grenzschicht für großen REYNOLDS-Zahlen. Eine veränderte REYNOLDS-Zahl hat keinen Einfluß auf die Amplitude der Temperatur von der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$ . Erst in der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  wächst die Temperatur durch den konvektiven Wärmetransport schwach an. Wir können diesen Zusammenhang in Bild 7.3 im schwachen Anstieg der Mittentemperatur sehen. Im Temperaturverlauf zeigt sich die Wirkung der Verjüngung der kinematischen Grenzschicht bei anwachsender REYNOLDS-Zahl auf den konvektiven Wärmetransport.

Für große REYNOLDS-Zahlen rückt das Außenfeld näher zusammen, der Einfluß der viskosen Kräfte beschränkt sich auf eine dünnere Grenzschicht, die Störung des Außenfeldes nimmt nach Gl.(6.9) ab. Die thermische Grenzschicht hängt wegen der konvektiven Anteile in der Energiegleichung wie die Impulsgrenzschicht von der REYNOLDS-Zahl ab. Verringern der kinematischen Viskosität vergrößert die REYNOLDS- und verkleinert gleichzeitig die PRANDTL-Zahl, so daß die thermische Grenzschichtdicke konstant bleibt.

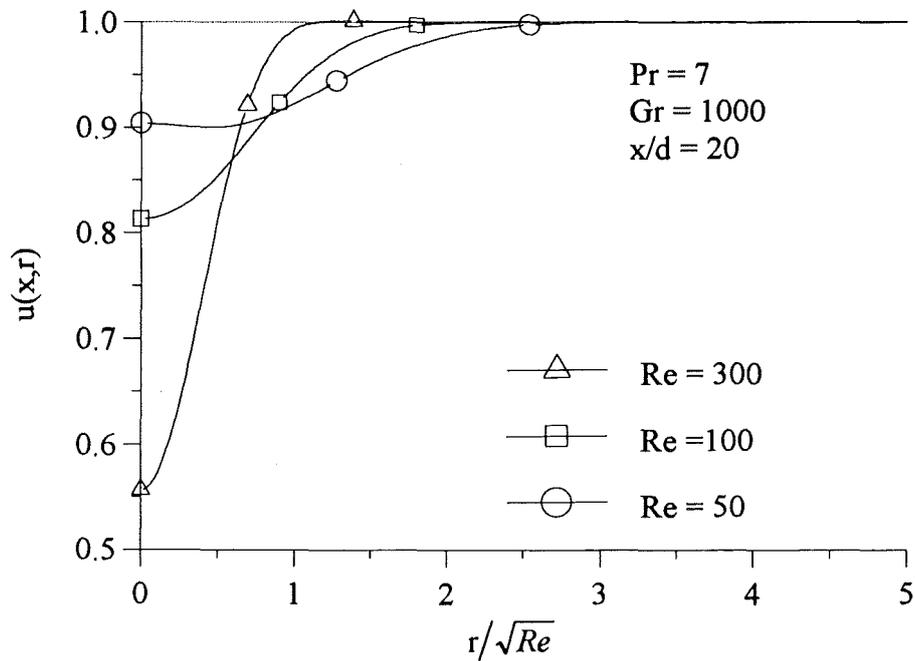


Bild 7.1: Einfluß der REYNOLDS-Zahl auf die Längsgeschwindigkeit  $u(x,r)$ .

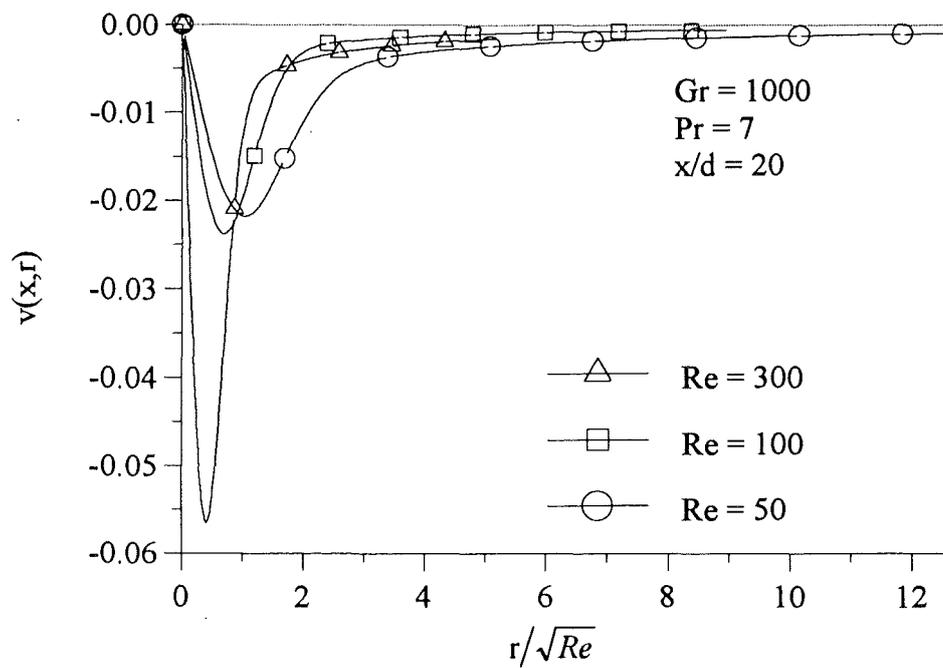
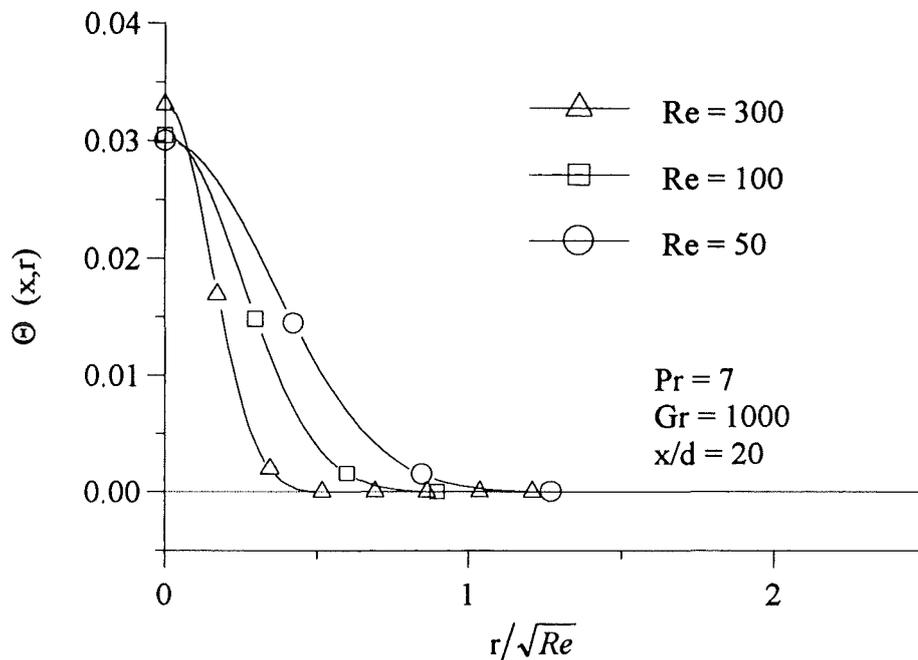


Bild 7.2: Quergeschwindigkeit  $v(x,r)$  bei Variation der REYNOLDS-Zahl.

Bild 7.3: Temperatur  $\Theta(x,r)$  bei Variation der REYNOLDS-Zahl

## 7.2 Variation der GRASHOF-Zahl

Die GRASHOF-Zahl Gl. (4.21) läßt sich durch einen veränderten Ausdehnungskoeffizienten oder durch veränderte Wärmezufuhr von der Kugel zur Flüssigkeit regeln.

Eine veränderte GRASHOF-Zahl wirkt sich im Auftriebsterm der Längsgeschwindigkeit aus (vgl. Bild 7.4). Es wird hier eine schwache Beheizung unterstellt, d.h.  $Gr/Re^2$  im Auftriebsterm ist klein. Der Längs- und Quergeschwindigkeit überlagert sich resultierend aus dem Auftriebsterm nur eine Geschwindigkeit der Ordnung  $O(\epsilon)$  (vgl. Gl. (6.3) und Gl. (6.4)). Der Auftriebsterm der Geschwindigkeit aus Ordnung  $O(\epsilon)$  hängt nicht von der Lauflänge  $x$  ab. Die Temperatur der Ordnung  $O(\hat{\epsilon})$ , die die Auftriebsströmung bestimmt, fällt bei der Kugel mit der Lauflänge  $x$  schneller ab ( $\sim 1/x$ ) als beim Zylinder ( $\sim 1/\sqrt{x}$ ), da die Wärme beim Zylinder nur in zwei  $y$ -Richtungen transportiert werden kann. Die Temperatur  $\Theta$  bleibt in der hier verwendeten Näherung ebenfalls unabhängig von der GRASHOF-Zahl. Erst die Temperatur der Ordnung  $O(\epsilon^0 \hat{\epsilon}^3)$  würde sich durch die nichtlinearen Terme, die den korrigierten konvektiven Wärmetransport berücksichtigen, mit der GRASHOF-Zahl ändern.

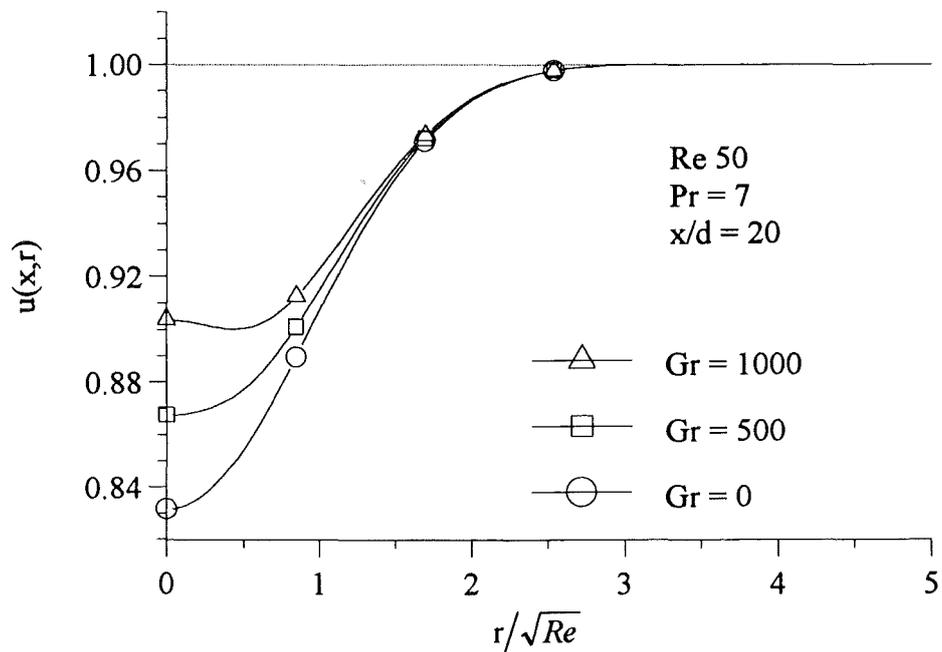


Bild 7.4: Längsgeschwindigkeit  $u(x,r)$  bei Variation der GRASHOF-Zahl.

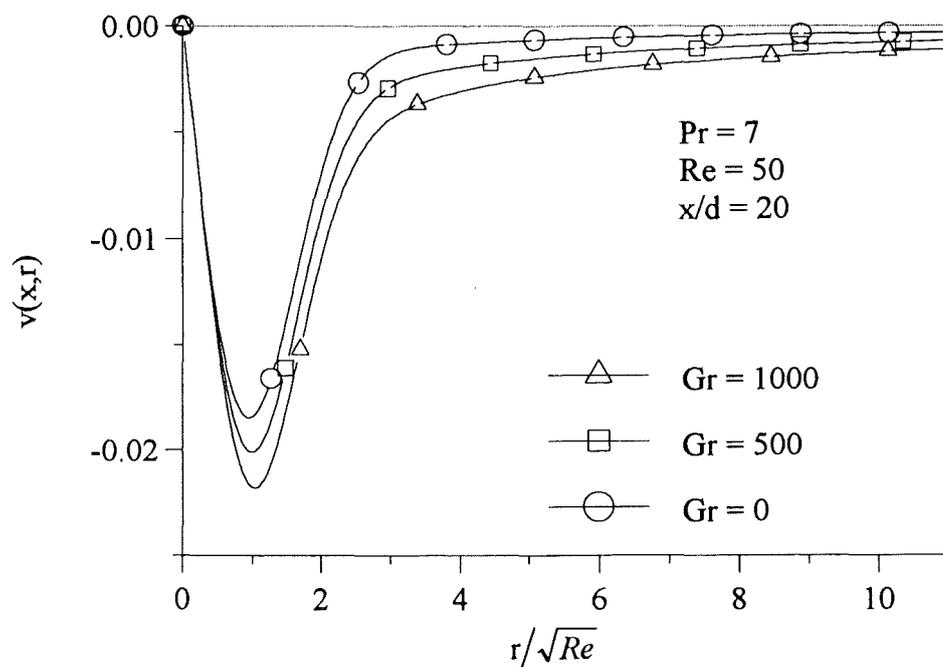


Bild 7.5: Quergeschwindigkeit  $v(x,r)$  bei Variation der GRASHOF-Zahl

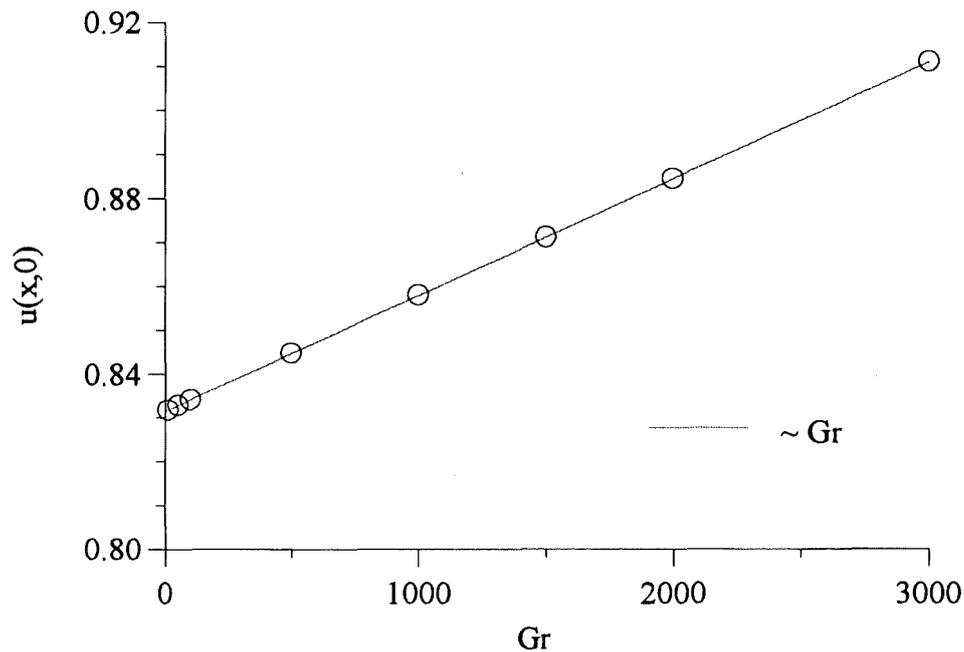


Bild 7.6: Mittengeschwindigkeit  $u(20,0)$  in Abhängigkeit von der GRASHOF-Zahl ( $Pr = 0.7$ ,  $Re = 50$ ).

Die Mittengeschwindigkeit ändert sich, wegen des Auftriebstermes, linear mit der GRASHOF-Zahl (vgl. Bild 7.6). Wir definieren die Grenzschichtdicke als 'Verdrängungsdicke'

$$\delta^* = 2\pi \int_0^{\infty} r \bar{u} \, dr, \quad (7.1)$$

die uns die Strecke angibt, um die die äußere Potentialströmung nach außen gedrängt wird. Da die Nachlaufgeschwindigkeiten  $u_0^{(0)}$  und  $u_1^{(0)}$  keine Funktion von der GRASHOF-Zahl sind, finden wir folgende Abhängigkeit:

$$2\pi \int_0^{\infty} r u_0^{(0)} \, dr + 2\pi \int_0^{\infty} r u_1^{(0)} \, dr = \text{konst.}(Gr) \Rightarrow \delta^* = f(u_0^{(0)}),$$

$$\delta^* = \frac{Gr Pr}{4 Re^2 \pi} \int_0^{\infty} K_1(\eta) \, d\eta.$$

Mit Gl. (5.49) folgt:

$$\delta^* \sim Gr. \quad (7.2)$$

### 7.3 Variation der PRANDTL-Zahl

Die PRANDTL-Zahl, definiert nach Gl. (4.22), läßt sich nur über das Strömungsfluid beeinflussen. Dabei muß sich das Verhältnis von kinematischer Viskosität zur Temperaturleitfähigkeit ändern. Eine Erhöhung der PRANDTL-Zahl bei konstanter kinematischer Viskosität hat eine Abnahme der Temperaturleitfähigkeit zur Folge. Damit folgt eine Verschlechterung des diffusiven Wärmetransport gegenüber dem diffusiven Impulstransport. Würden wir mit dem Austausch des Fluids die dynamische Viskosität variieren, würde nicht nur die kinematische sondern auch die thermische Grenzschicht mit der Beziehung aus Gl. (6.12) und Gl. (6.11) verändert. Das Verhältnis der Grenzschichtdicken ist demnach nur von der PRANDTL-Zahl abhängig

$$\frac{\delta}{\delta_{th}} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}. \quad (7.3)$$

Ein Verändern der PRANDTL-Zahl führt aufgrund Gl. (7.3) zunächst zu einer Veränderung der thermischen Grenzschichtdicke. Das bedeutet, daß die Wärme im Falle großer PRANDTL-Zahlen in einer dünnen thermischen Grenzschicht eine große Temperaturerhöhung bewirkt. Umgekehrt führen kleine PRANDTL-Zahlen zu breiten thermischen Grenzschichten bei geringer Temperaturerhöhung. Dies kann aus den Temperaturprofilen in Bild 7.7 ersehen werden. Die Folgen für das Geschwindigkeitsfeld werden anhand Bild 7.7 deutlich. Je nach PRANDTL-Zahl sind die Auftriebseffekte auf eine dünne Schicht begrenzt (vgl.  $Pr = 70$ ), oder aber sie erstrecken sich über die ganze kinematische Grenzschicht (vgl.  $Pr = 0,7$ ). Die Mittentemperatur  $\Theta(x,0)$  ändert sich linear mit der PRANDTL-Zahl (vgl. Bild 7.7 und Gl. (6.10)).

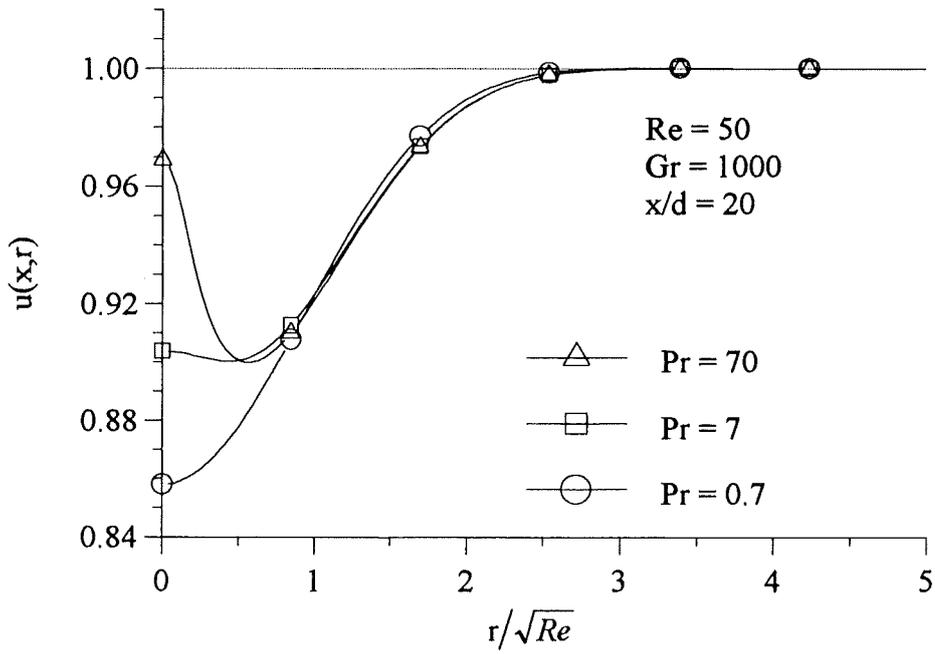


Bild 7.7: Längsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der PRANDTL-Zahl.

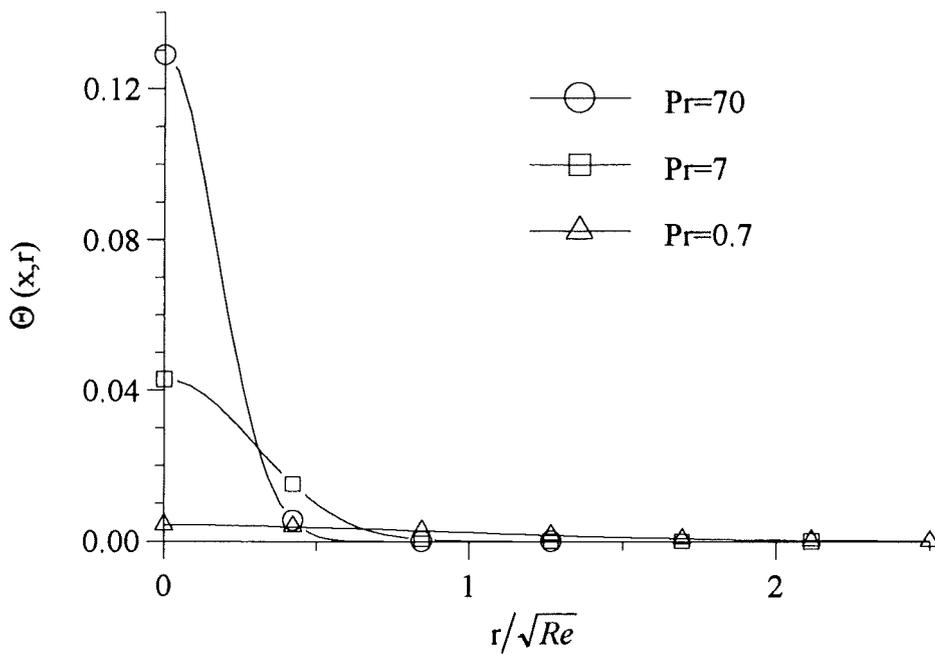


Bild 7.8: Temperatur  $\Theta(x,r)$  bei Variation der PRANDTL-Zahl

## 8 Numerische Integration

Für die Differentialgleichungen aus Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  und  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  ist es nicht möglich einfache analytische Lösung für die Funktionen  $F_1(\eta)$ ,  $K_1(\eta)$ ,  $I_1(\eta)$ ,  $G_1(\eta)$  und  $H_1(\eta)$  anzugeben. Wir integrieren die Gleichungen daher numerisch. Dafür benützen wir aus der Programmbibliothek HARWELL das Programm DA02AD, welches ein Integrationsverfahren 5 ter Ordnung nach dem RUNGE-KUTTA Verfahren beinhaltet. Die Differentialgleichungen aus Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  und  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  können wir in 2 verschiedene Typen unterscheiden:

$$1. \text{ Typ : } F_1''(\eta) = f(\eta, F_1(\eta), F_1'(\eta)) \text{ und } H_1''(\eta) = f(\eta, H_1(\eta), H_1'(\eta));$$

Differentialgleichungen von Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  (Gl.(5.35) und Gl.(5.36)).

$$2. \text{ Typ : } K_1''(\eta) = f(\eta, K_1(\eta));$$

Differentialgleichung von Ordnung  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  (Gl.(5.46)).

Wir wollen exemplarisch das numerische Integrationsverfahren für den 1. Typ an Hand von Gl.(5.35) darstellen.

Die integrale Impulsbilanz erfüllen wir bereits in Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$ . Hiermit ist der Widerstand der Kugel bereits in das Gleichungssystem einbezogen. Die vom Auftrieb erzeugte Impulskraft ziehen wir, nur 'kleine' Wärmezufuhren zulassend, in Gleichungen der Ordnung  $O(\varepsilon^1 \hat{\varepsilon}^0)$  hinein (Gl.(4.53)). Wir folgern daraus, daß die integrale Impulsbilanz Gl.(4.57) stets erfüllt ist. Gleiches gilt für die integrale Wärmebilanz Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^2)$  in Gl.(4.59).

Die Randbedingungen sind für  $\eta = 0$  und  $\eta \rightarrow \infty$  definiert. Die Lösung der Differentialgleichung Gl.(5.15) strebt für  $\eta \rightarrow \infty$  stets gegen Null. Bereits für die Integration der Differentialgleichung Gl.(5.9) aus der Ordnung  $O(\varepsilon^0 \hat{\varepsilon}^1)$  ist  $\eta \rightarrow \infty$  keine einschränkende Bedingung. Als zusätzliche Bedingung erfüllt die Lösung die integrale Impulsbilanz. Für Gl.(5.35) reduzieren sich damit die Randbedingungen auf eine Randbedingung.

Wegen der Symmetrie des Problems können wir jedoch die zusätzlichen Bedingungen

$$F_1'(\eta) = F_1'''(\eta) = F_1^{(2n+1)}(\eta) = 0. \quad (8.1)$$

ableiten. Differenzieren wir Gl.(5.35) nach  $\eta$ , so erhalten wir

$$F_1'''(\eta) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\eta^2} + 2 \right) F_1'' + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right) F_1' = -\eta \exp\left( -\frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad (8.2)$$

und gewinnen mit Gl.(8.1) eine zusätzliche Randbedingung

$$F_1''(\eta) = 0. \quad (8.3)$$

In Gl.(5.35) eingesetzt, gewinnen wir die Amplitude der Ähnlichkeitsfunktion für  $\eta = 0$

$$F_1(0) = \frac{1}{2}. \quad (8.4)$$

Die Differentialgleichungen werden zur Lösung zunächst in ein System von gekoppelten Differentialgleichungen 1.Ordnung umgewandelt. Wir substituieren:

$$Y(1) = \int \eta F_1 d\eta \Rightarrow Y'(1) = \eta Y(2),$$

$$Y(2) = F_1 \Rightarrow Y'(2) = \frac{Y(3)}{\eta},$$

$$Y(3) = \eta F_1' \Rightarrow Y'(3) = \eta \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right) - \frac{\eta}{2}Y(3) - 2\eta Y(2).$$

Mit den Randbedingungen für  $\eta = 0$

$$\underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

integrieren wir Gleichung (5.35) für wachsende  $\eta$ . Das Programm verfügt hierbei über eine automatische Schrittweitenkorrektur, welche in Abhängigkeit vom vorgegebenen maximalen Integrationsfehler die Schrittweite anpaßt.

Das numerische Integrationsverfahren für die Differentialgleichung vom 2.Typ Gl.(5.46) löst sich wie für Typ 1 bereits beschrieben. Wir substituieren:

$$Y(1) = \int \eta K_1 d\eta,$$

$$Y(2) = K_1,$$

$$Y(3) = \eta K_1'$$

Als Anfangsvektor erhalten wir

$$\underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

mit dem unbekanntem Anfangswert für  $Y_2(0)$ . Da die Differentialgleichung Gl.(5.46) nur von den Ableitungen der Funktion  $K_1$  abhängt, ist die Lösung der Integration bei verschiedenen Anfangswerten für  $K_1(0)$  eine Parallelverschiebung der Funktion. Wir integrieren die Differentialgleichung Gl.(5.46) zunächst mit dem Anfangswert  $A$  und erhalten

$$Y_2(\eta \rightarrow \infty) = B.$$

Somit ist die homogene Randbedingung  $Y_2(\eta \rightarrow 0)$  nicht erfüllt. Verschieben des Anfangsvektor Gl.(8.6) um  $B$

$$\underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ A - B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

erfüllt dann die Randbedingung im Außenfeld.

## 9 Diskussion

Wir untersuchen den laminaren Nachlauf über einer beheizten Kugel. Die Anströmung erfolgt entgegen dem Schwerevektor. Wir entwickeln Näherungslösungen für kleine Werte der Störparameter  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  und  $\hat{\varepsilon} = 1/x$  sowie für stationäre Verhältnisse und erwarten folglich, daß der Gültigkeitsbereich für 'kleine' REYNOLDS-Zahlen und 'kleine' Längsentfernungen  $x$  eingeschränkt ist. Desweiteren werden von der Annahme 'schwache' Beheizung gebraucht gemacht, d.h.  $Gr/Re^2 = O(\varepsilon)$ . Der Gültigkeitsbereich ist somit auf 'schwache' Auftriebskräfte beschränkt. Als letzte Einschränkung wollen wir den Bereich 'kleiner' PRANDTL-Zahlen ausschließen, um die Bedingung  $1/Pr Re = O(\varepsilon^2)$  zu erfüllen.

Wir haben in der Arbeit Resultate für das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld abgeleitet und deren typische Abhängigkeiten von den Parametern  $Re$ ,  $Gr$ ,  $Pr$  diskutiert. Die für den rotationssymmetrischen Fall ( $\hat{=}$  Kugel) gefundenen Ergebnisse wollen wir mit den analogen Resultaten des ebenen Nachlaufs ( $\hat{=}$  Zylinder, vgl. [7]) und Ergebnissen aus der Literatur vergleichen. Hierzu betrachten wir den rotationssymmetrischen, fernen Körperrnachlauf (vgl. [5]) sowie den Auftriebsstrahl über einer Punktwärmequelle (vgl. [8]). Ergebnisse zur Mischkonvektion im Nachlauf beheizter Körper sind unseres Wissens in der Literatur nicht vorhanden. Bei geeigneter Betrachtung bieten die in der Literatur bekannten Arbeiten jedoch die Möglichkeit, Teilaspekte und Grenzfälle unserer Ergebnisse für Mischkonvektionen im beheizten Körperrnachlauf zu überprüfen. So müssen die Lösungen für den Grenzfall  $Gr \rightarrow 0$  mit den Ergebnissen des reinen Körperrnachlaufs übereinstimmen. Weiterhin resultiert aus großen PRANDTL-Zahlen (zusammen mit großen  $Re$ ) eine dünne thermische Grenzschicht. Als Konsequenz finden wir die Auftriebseffekte konzentriert auf einen dünnen Bereich in der Mitte des Nachlaufs, während der Außenbereich gänzlich unbeeinflusst von Auftriebseffekten bleibt. Solche und ähnliche Überlegungen erlauben somit eine Bewertung der vorliegenden Resultate.

Zunächst wollen wir auf die reinen Nachlaufeffekte eingehen. Aus SCHLICHTING, siehe [5], können wir entnehmen, daß für diesen Fall die Gesetzmäßigkeiten für die kinematischen Grenzschichtdicken  $\delta$  und Amplituden der Geschwindigkeit  $u(x,0)$  völlig mit den führenden Gliedern unserer Lösung Gl. (6.3) übereinstimmen und finden die deckungsgleichen Abhängigkeiten der Nachlaufamplitude gemäß

$$\bar{u}(x,0) \sim x^{-1} c_w(Re) Re^1.$$

Dieses Ergebnis signalisiert bezüglich der Koordinate  $x$  ein schnelleres Abfallen im rotationssymmetrischen Nachlauf im Vergleich zum ebenen Problem (vgl. Tabelle 1,

GRIESBAUM, SCHLICHTING ). Physikalisch läßt sich dies wie folgt interpretieren. Das Auffüllen der Nachlaufdüse geschieht im rotationssymmetrischen Fall aus allen Raumrichtungen deutlich effektiver, als im ebenen Fall. Das Anwachsen der kinematischen Grenzschichtdicken gemäß

$$\delta \sim x^{1/2} Re^{-1/2}$$

findet sich hingegen sowohl für den ebenen als auch für den rotationssymmetrischen Nachlauf übereinstimmend bei allen Autoren ( vgl. Tabelle 1 ).

Für die Amplitude der Temperatur finden wir die Abhängigkeit

$$\Theta(x,0) \sim x^{-1} Pr^1 Re^0,$$

die, wenn wir die Temperaturskalierung Gl. (4.2) berücksichtigen, vollständig mit den Ergebnissen von FUJII, siehe [8], zur Deckung kommt. Das Abklingen der Temperaturamplitude in Strömungsrichtung ist im Vergleich zum ebenen Fall wiederum schneller ( vgl. Tabelle 1, GRIESBAUM ). Dies ist wie beim Impuls auf einen effektiveren Wärmetransport über den ganzen Umfang des rotationsymmetrischen Profils zurückzuführen. Gleichfalls findet sich im ebenen Fall eine andere Abhängigkeit von der PRANDTL-Zahl, welche übereinstimmend bei GRIESBAUM und FUJII als  $Pr^{-1/2}$  berechnet wird. Somit ist auch dieser Wechsel in der Abhängigkeit von der PRANDTL-Zahl durch die analogen Ergebnisse von FUJII für beide Fälle abgesichert. Als letzter Unterschied bleibt eine Abhängigkeit der Temperaturamplitude von  $Re^{-1/2}$  im ebenen Fall ( vgl. [7] ), die beim rotationssymmetrischen Problem nicht auftritt.

Betrachten wir die Abhängigkeiten der thermischen Grenzschichtdicke

$$\delta_{th} \sim x^{1/2} Pr^{-1/2} Re^{-1/2},$$

so stimmen die Ergebnisse aller Autoren miteinander überein. Für den ebenen Fall erhalten wir die gleichen Abhängigkeiten ( vgl. [7] ).

Die Auswirkungen der Temperaturerhöhung im Nachlauf finden wir in Form einer Beschleunigung des Fluids hauptsächlich innerhalb der thermischen Grenzschicht. Somit unterscheiden wir zwei Grenzfälle: Für  $Pr \ll 1$ , wird die thermische Grenzschicht breiter als die kinematische Grenzschicht. Somit wird der gesamte Nachlauf durch Auftriebskräfte beschleunigt. Ist hingegen  $Pr \gg 1$ , so findet sich eine dünne thermische Grenzschicht gemessen an der Ausdehnung der kinematischen Grenzschicht. Die Folge ist eine Beschleunigung der Strömung lediglich im Zentrum des Nachlaufs. Für die oben angegebenen Zusammenhänge gilt die Relation

$$\frac{\delta_{th}}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}.$$

Wir diskutieren nun die Geschwindigkeitsanteile, welche durch die Auftriebseffekte verursacht werden. Diese sind als  $\bar{u}_A(x,0)$  aus den asymptotischen Modellen für den ebenen und für den rotationssymmetrischen Fall in Tabelle 1 eingetragen. Im rotationssymmetrischen Fall ergibt sich

$$\bar{u}_A \sim x^0 \text{Pr}^1 \text{Gr}^1 \text{Re}^{-2}$$

Naturgemäß müssen sich die Abhängigkeiten aus der Temperaturamplitude  $\Theta(x,0)$  in die Geschwindigkeitsamplitude  $\bar{u}_A(x,0)$  fortpflanzen. So ist das Auftreten der Abhängigkeit  $\bar{u}_A(x,0) \sim \text{Pr}$  konsistent mit der gefundenen Abhängigkeit  $\Theta(x,0) \sim \text{Pr}$  der Temperaturamplitude. Analog finden wir für den ebenen Fall die gleiche Abhängigkeit der Temperatur- und Geschwindigkeitsamplitude von der Prandtl-Zahl (vgl. [7]). Der Unterschied im Verhalten der Geschwindigkeitsamplitude  $\bar{u}_A(x,0)$  zwischen dem ebenen und dem rotationssymmetrischen Fall rührt vom unterschiedlichen Abklingverhalten der Temperaturamplitude her. So klingt im rotationssymmetrischen Fall die Temperaturamplitude  $\Theta(x,0)$  mit  $\sim x^{-1}$  und im ebenen Fall mit  $\sim x^{-1/2}$  ab. Zusammen mit der Formfunktion der Temperatur (vgl. Gl. 5.16) ergibt sich deshalb im ebenen Fall

$$\bar{u}_A(x,0) \sim \frac{x}{x^{1/2}} = x^{1/2},$$

und für den rotationssymmetrischen Fall

$$\bar{u}_A(x,0) \sim \frac{x}{x} = x^0.$$

Die Abhängigkeit  $\bar{u}_A(x,0) \sim \text{Gr} \cdot \text{Re}^{-2}$  resultiert aus dem Vorfaktor in den Auftriebskräften (vgl. Gl. 4.14). Eine Abhängigkeit der Temperaturamplitude von der REYNOLDS-Zahl fehlt, und somit skaliert die Amplitude der Auftriebsgeschwindigkeit mit diesem Faktor. Die unterschiedliche Abhängigkeit in Bezug auf die REYNOLDS-Zahl im Vergleich zum ebenen Fall (vgl. Tabelle 1, GRIESBAUM) rührt von der Tatsache her, daß dort auch die Temperaturamplitude eine Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl aufweist, die multiplikativ zu überlagern ist. Sämtliche Abhängigkeiten in  $\bar{u}_A(x,0)$ , sowohl im ebenen als auch im rotationssymmetrischen Fall, sind somit völlig konsistent mit den zugehörigen Temperaturfeldern.

	Ebenes Problem ( Zylinder )		Rotationssymmetrisches Problem ( Kugel )	
ferner Körperrnachlauf vgl. SCHLICHTING [5]	$\bar{u}(x,0) \sim x^{-1/2} \cdot c_w^1(Re) \cdot Re^{1/2}$	$\delta \sim x^{1/2} \cdot Re^{-1/2}$	$\bar{u}(x,0) \sim x^{-1} \cdot c_w^1(Re) Re^1$	$\delta \sim x^{1/2} \cdot Re^{-1/2}$
reiner Auftriebsstrahl vgl. FUJII [8]	$u(x,0) \sim x^{1/5} \cdot \dot{Q}^{2/5}$ $(T - T_\infty)(x,0) \sim x^{-3/5} \cdot \dot{Q}^{4/5} \cdot Pr^{1/2}$	$\delta \sim x^{2/5} \cdot \dot{Q}^{-1/5}$ $\delta_{th} \sim Pr^{-1/2}$	$u(x,0) \sim x^0 \cdot \dot{Q}^{1/2}$ $(T - T_\infty)(x,0) \sim x^{-1} \cdot \dot{Q}^1 \cdot Pr^1$	$\delta \sim x^{1/2} \cdot \dot{Q}^{-1/4}$ $\delta_{th} \sim Pr^{-1/2}$
schwach beheizter Nachlauf über einem Körper	vgl. GRIESBAUM [7] $\bar{u}(x,0) \sim x^{-1/2} \cdot c_w^1(Re) \cdot Re^1$ $\bar{u}_A(x,0) \sim x^{1/2} \cdot Pr^{1/2} \cdot Gr^1 \cdot Re^{-5/2}$ $\Theta(x,0) \sim x^{-1/2} \cdot Pr^{1/2} \cdot Re^{-1/2}$	vgl. GRIESBAUM [7] $\delta \sim x^{1/2} \cdot Re^{-1/2}$ $\delta_{th} \sim x^{1/2} \cdot Re^{-1/2} \cdot Pr^{-1/2}$	$\bar{u}(x,0) \sim x^{-1} \cdot c_w^1(Re) Re^1$ $\bar{u}_A(x,0) \sim x^0 \cdot Pr^1 \cdot Gr^1 \cdot Re^{-2}$ $\Theta(x,0) \sim x^{-1} \cdot Pr^1 \cdot Re^0$	$\delta \sim x^{1/2} \cdot Re^{-1/2}$ $\delta_{th} \sim x^{1/2} \cdot Pr^{-1/2} \cdot Re^{-1/2}$

Tabelle 1: Zusammenstellung der Ergebnisse für die laminare, freie Konvektionsströmung ( vgl. FUJII [8] ) und die laminare Mischkonvektion ( vgl. GRIESBAUM [7] ) über linien- und punktförmigen Wärmequellen sowie für den fernen Nachlauf des ebenen und rotationssymmetrischen Körpers ( vgl. SCHLICHTING [5] )

## Literatur

- [1] Müller, U.: Freie Konvektion und Wärmeübertragung. Skriptum einer an der Universität Karlsruhe gehaltenen Vorlesung, WS 1993 / 94
- [2] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie.-8. Auflage.- Verlag G. Baun, Karlsruhe, 1982
- [3] Schneider, W.: Mathematische Methoden der Strömungsmechanik.-1. Auflage.- Vieweg, Braunschweig, 1978
- [4] Leukel, W.: Wärme- und Stoffübertragung. Skriptum der Vorlesung an der Universität Karlsruhe, WS 90/ 91
- [5] Prandtl, W.: Strömungslehre.-6. Auflage.-Vieweg, Braunschweig, 1965
- [6] Zierep, J.: Grundzüge der Strömungslehre.-3. Auflage.-Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1987.
- [7] Griesbaum, R.: Theoretische Untersuchung zur Nachlaufströmung hinter einem beheizten Zylinder.-Diplomarbeit am Institut für angewandte Thermo- und Fluidodynamik, KfK, 1993
- [8] Fujii, T.: Int. J. Heat Transfer.-Vol. 6, pp.597-606, 1963