

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5748

**Dreidimensionale numerische
Simulation von Naturkonvek-
tionsströmungen unter dem
Einfluß von Magnetfeldern**

R. Mößner

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

April 1996

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5748

**Dreidimensionale numerische Simulation
von Naturkonvektionsströmungen
unter dem Einfluß von Magnetfeldern**

R. Mößner

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1996

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

In diesem Bericht wird der Einfluß von Magnetfeldern auf dreidimensionale Naturkonvektion untersucht. Hierzu werden die dimensionslosen Grundgleichungen in kartesischen Koordinaten hergeleitet und numerisch mit Hilfe eines Finiten-Differenzen-Verfahrens in Rechteckgeometrien ausgewertet.

Zuerst wird das Modellsystem eines elektrisch isolierten Quaders untersucht, der seitlich beheizt und gekühlt wird. Es können systematische Untersuchungen für Variationen der Richtung des Magnetfeldes und der thermischen Randbedingungen durchgeführt werden. Die wichtigsten Ergebnisse hierzu sind:

- Je größer die Komponente des Magnetfeldvektors senkrecht zur beheizten Wand wird, desto stärker wird die Strömung unterdrückt.
- Magnetfelder mit großen Komponenten parallel zur Gravitation oder senkrecht zur beheizten Wand führen zu starken Überhöhungen der Geschwindigkeit in den Eckbereichen. Die elektrischen Ströme schließen sich im Fluid.
- Dominiert die horizontale Magnetfeldkomponente parallel zur beheizten Wand, verschwinden die Geschwindigkeitsüberhöhungen. Die elektrischen Ströme schließen sich über die Hartmannschichten.
- Sind alle Wände, die weder beheizt noch gekühlt sind, perfekt wärmeleitend, verschlechtert sich der Wärmeübergang gegenüber dem Fall, wenn diese Wände alle adiabat sind.

Zusätzlich werden Rechnungen zu einem Experiment von Fumizawa durchgeführt. Dieser hatte in einer Anordnung mit den Seitenverhältnissen 12:6:1 bei einem horizontalen Temperaturgradienten für ein horizontales Magnetfeld senkrecht zum Gradienten Untersuchungen zum Verhalten des Wärmeübergangs durchgeführt. Für eine bestimmte Parameterkonstellation wird ein besonderes Verhalten der Temperatur und damit verbunden eine Förderung des Wärmeübergangs registriert. Diese Aussage wird durch die eigenen Rechnungen bestätigt und erstmals erklärt.

Schließlich wird die Magnetokonvektion in einem 6:3:1-Behälter untersucht, der von unten beheizt und von oben gekühlt wird. Die wichtigsten Ergebnisse für ein vertikales Magnetfeld lauten:

- Die Breite der einzelnen Konvektionsrollen hängt von Rayleigh- und Hartmann-Zahl ab. Steigende Rayleigh-Zahlen führen zu breiteren und steigende Hartmann-Zahlen zu schmalen Rollen.
- Sowohl für horizontale als auch für vertikale Geschwindigkeiten können Überhöhungen in den Eckbereichen gefunden werden. Der elektrische Strom schließt sich außerhalb der Hartmannschichten in zwei verschiedenen Ebenen.

Three-dimensional numerical simulation of natural convection under the influence of magnetic fields

Abstract

This report deals with the influence of strong magnetic fields on three-dimensional natural convection. First the dimensionless basic equations are derived in cartesian coordinates. These equations are solved numerically in rectangular domains with a Finite-Difference-Method.

The following calculations investigate the flow in an electrically insulated cube which is heated and cooled at side walls. It is possible to perform systematic computations for the variation of the direction of the magnetic field and thermal boundary conditions. The most important results are:

- The more the component of the magnetic field vector perpendicular to the heated wall is increased the stronger the natural convection is damped.
- For significant components of the magnetic field parallel to gravity or perpendicular to the heated wall velocity profiles with strong jets near the corners appear. Electric currents close within the fluid.
- With a dominating horizontal component of the magnetic field parallel to the heated wall the velocity jets vanish. Electric currents close through the Hartmann layers.
- In a case where all walls which are neither heated nor cooled are assumed to be perfectly heat conducting the heat transport is less effective compared to the case where these walls are all adiabatic.

Furthermore calculations are carried out to simulate an experiment of Moto Fumizawa. This scientist investigated the heat transport in a rectangular enclosure of the aspect ratios 12:6:1. The flow was driven by a horizontal temperature gradient and influenced by a horizontal magnetic field perpendicular to the gradient. For certain combinations of parameters he found a fluidodynamically strange temperature profile and an improvement of heat transport. The computations confirm his findings and explain this phenomenon.

Finally magnetoconvection in a 6:3:1 aspect ratio container heated from below is investigated. The most important results for a vertical magnetic field are:

- The width of the convective rolls depends on Rayleigh- and Hartmann number. Increasing Rayleigh numbers lead to wider rolls increasing Hartmann numbers reduce the width of the rolls.
- Both horizontal and vertical velocities show jets near the corners. Electric currents close outside the Hartmann layers in two different planes.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundgleichungen und Randbedingungen	4
2.1	Vereinfachungen	4
2.1.1	Das Magnetfeld	4
2.1.2	Das elektrische Feld	5
2.1.3	Elektrostatische Ladungen	6
2.1.4	Stoffeigenschaften	6
2.1.5	Ohmsches Gesetz	6
2.1.6	Dissipation	7
2.2	Dimensionslose Gleichungen	7
2.3	Randbedingungen	9
3	Numerische Grundlagen	12
3.1	Allgemeines	12
3.2	Zeitliche Diskretisierung	15
3.2.1	Euler-Vorwärts-Methode	15
3.2.2	Adams-Bashfort-Verfahren	17
3.3	Örtliche Diskretisierung	27
3.3.1	Zentrale Differenzen	27
3.3.2	Upwind-Verfahren	28
3.3.3	Hybride Verfahren	31
3.4	Fractional-Step-Verfahren	32
3.5	Lösung der Poissongleichungen	35
3.6	Lösungsalgorithmus des Programms	36

4	Physikalische Phänomene	38
4.1	Konvektion	38
4.2	Magnetohydrodynamische Strömungen	42
4.2.1	Geschichte der Magnetohydrodynamik	42
4.2.2	Charakteristische Grenzschichten	44
4.2.3	Der ideal leitende Kanal	47
4.2.4	Der endlich leitende Kanal	48
4.2.5	Der isolierte Kanal	50
4.2.6	Zusammenfassende Bemerkungen	51
4.3	Naturkonvektion unter Magnetfeldeinfluß	52
4.3.1	Bisheriger Kenntnisstand	52
4.3.2	Die Rayleigh-Bénard Instabilität mit Magnetfeldeinfluß	55
5	Validierung des Programms	58
5.1	Testrechnungen ohne Magnetfeldeinfluß	58
5.1.1	Zweidimensionale Testrechnungen	58
5.1.2	Dreidimensionale Testrechnungen	61
5.2	Testrechnungen mit Magnetfeldeinfluß	63
5.2.1	Berechnung kritischer Rayleigh-Zahlen	63
5.2.2	Vergleiche zu den Rechnungen von Ozoe und Okada . .	65
6	Numerische Ergebnisse	72
6.1	Magnetokonvektion im Kubus	72
6.1.1	Variation der Magnetfeldrichtung	72
6.1.2	Variation der thermischen Randbedingungen	79
6.2	Rechnungen zu einem Experiment von Fumizawa	83
6.3	Magnetokonvektion bei vertikalen Temperaturgradienten . . .	94
6.4	Schlußbemerkungen	104
	Bezeichnungen	106
	Maßstabsfaktoren	109
	Literaturverzeichnis	110

1 Einleitung

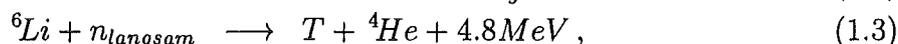
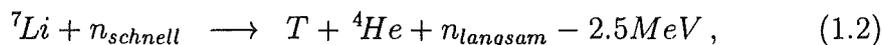
Der Fusionsreaktor erscheint als eine der Möglichkeiten, in Zukunft die wachsende Erdbevölkerung mit ausreichender Energie zu versorgen. Diese Problematik wird zusehends verschärft, da fossile Brennstoffe nicht unbegrenzt zur Verfügung stehen und auch ihre Verwendung unter dem Aspekt der Umweltverträglichkeit immer fragwürdiger wird. Da regenerative Energien nur einen begrenzten Beitrag zur künftigen Energieversorgung leisten können und die konventionelle Kernenergie politisch zumindest in einigen Ländern immer schwerer durchsetzbar wird, ist es dringend erforderlich, neue Alternativen der Energiegewinnung zu erforschen.

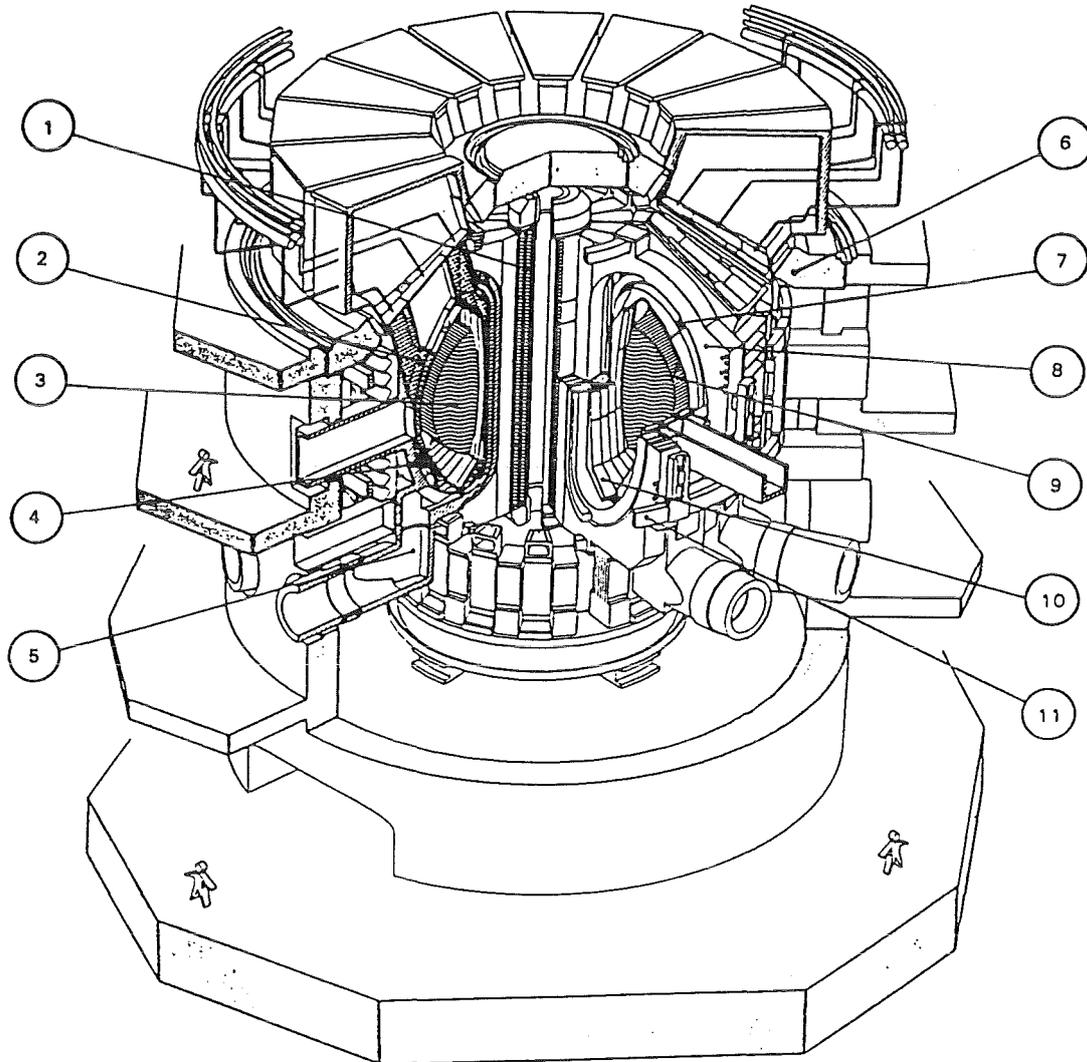
Für einen zukünftigen Fusionsreaktor erscheint die Verschmelzung von Deuterium und Tritium,



zur technischen Nutzung am aussichtsreichsten. Um diese Verschmelzung überhaupt zu ermöglichen, ist es erforderlich, die Abstoßungskraft der Kernladungen zu überwinden. Hierzu wird den Teilchen die notwendige Energie mittels einer Plasmaheizung in Form von kinetischer Energie zugeführt. Bei den damit verbundenen Temperaturen liegen Deuterium und Tritium als ionisiertes Plasma vor. Deshalb ist ihr kontrollierter Einschluß mit Hilfe starker Magnetfelder möglich. Im sogenannten TOKAMAK-Konzept, das bereits um 1950 von russischen Wissenschaftlern vorgeschlagen wurde, sollen hierzu toroidale Magnetfelder verwendet werden.

Da die Brennstoffkomponente Tritium in der Natur so gut wie nicht vorkommt, muß es über die Brutreaktion





1 Innere Poloidalfeldspule
 2 Blanket
 3 Plasma
 4 Vakuumgefäß und Abschirmung
 5 Abgaskanal
 6 Kryostat und biologische Abschirmung

7 Steuerspulen
 8 Hauptfeldspulen
 9 Erste Wand
 10 Divertor
 11 Äußere Poloidalfeldspulen

Abbildung 1.1: Ansicht eines Fusionsreaktors (aus Toschi et al. [88]).

ständig erzeugt werden. Hierbei ist vorausgesetzt, daß Lithium als Ausgangsstoff eingesetzt wird. In Abbildung 1.1 ist der prinzipielle Aufbau eines Fusionsreaktors dargestellt. Das Plasma befindet sich in einem torusförmigen Behälter, dessen Wände vom sogenannten Blanket gebildet werden. Dieses zwischen Plasma und supraleitenden Magnetfeldspulen angeordnete Blanket hat folgende wichtige Aufgaben zu erfüllen:

- Erbrüten des für die Fusion erforderlichen Tritiums,
- Umwandlung der kinetischen Energie der Neutronen in thermische Energie sowie Abfuhr dieser Energie und des erbrüteten Tritiums aus dem Reaktorbereich,
- Abschirmung der Magnetfeldspulen vor Strahlungsverlusten des Plasmas,
- thermischer Schutz der ersten Wand des Reaktors.

Schon seit Mitte des 20. Jahrhunderts versuchen Wissenschaftler, tragfähige Konzepte für ein Blanket zu entwickeln. Zur Zeit werden Anstrengungen unternommen, aus einer Vielzahl verschiedener Konzepte das für einen zukünftigen Fusionsreaktor erfolversprechendste auszuwählen. Eine Klasse dieser zur Auswahl stehenden Konzepte stellen Flüssigmetall-Blankets dar. Hierbei kann zwischen wasser- und selbstgekühlten Blankets unterschieden werden. Bei letzteren übernimmt der als Flüssigmetall vorliegende Brutstoff, z.B. Lithium, zugleich die Funktion des Kühlmediums. Das hat den Vorteil einer vergleichbar einfachen Konstruktion des Blankets. Nachteilig wirken sich die großen MHD-Druckverluste aus, die aus den hohen Strömungsgeschwindigkeiten resultieren. Diese hohen Geschwindigkeiten sind erforderlich, um die erste Wand des Reaktors effektiv zu kühlen. Detailliertere Informationen zum Thema Fusionsreaktor können bei Badger [4], Strandbridge [83] und Toschi et al. [88] gefunden werden.

In dieser Arbeit wird der Aspekt der Wärmeabfuhr durch Naturkonvektion aus dem Inneren eines selbstgekühlten Reaktors untersucht. Dieser Aspekt ist von großer Bedeutung, da die Struktur des Fusionsreaktors nicht unzulässig großen thermischen Belastungen ausgesetzt werden darf. Hierzu werden Grundlagenuntersuchungen zur Beeinflussung von Naturkonvektionsströmungen durch starke Magnetfelder gemacht. In einem ersten Schritt werden für diesen Fall die Grundgleichungen hergeleitet und dahingehend vereinfacht, daß den Bedingungen im Fusionsreaktor entsprochen wird. Da das entstehende System von nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen nicht geschlossen lösbar ist, werden die Gleichungen numerisch gelöst. Dabei werden Trägheit und Reibung im gesamten Lösungsgebiet berücksichtigt. Nach einer Validierung des numerischen Simulationsprogrammes werden Rechnungen zu einigen ausgewählten Problemstellungen in Rechteckgeometrien durchgeführt.

2 Grundgleichungen und Randbedingungen

Naturkonvektionsströmungen unter Magnetfeldeinfluß können durch die bekannten Grundgleichungen der Hydromechanik sowie der Elektrodynamik beschrieben werden. Dies sind im einzelnen die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie aus der Hydromechanik und die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik. Da die Rechnungen in Rechteckgeometrien erfolgen, werden die Gleichungen in kartesischen Koordinaten formuliert. Das in Abbildung 2.1 eingeführte Koordinatensystem wird im weiteren Verlauf der Arbeit für alle Rechnungen verwendet. Wenn wir uns auf die Bedingungen eines Fusionsreaktors beschränken, können zahlreiche Vereinfachungen eingeführt werden.

2.1 Vereinfachungen

2.1.1 Das Magnetfeld

Es ist bekannt, daß folgende Beziehung zwischen einem Magnetfeld \vec{B} und der elektrischen Stromdichte \vec{j} existiert:

$$\nabla \times \vec{B} = Re_m \vec{j}. \quad (2.1)$$

Hierbei wird Re_m als magnetische Reynolds-Zahl bezeichnet. Sie ist definiert als

$$Re_m = \mu \sigma v_0 a. \quad (2.2)$$

In dieser Kennzahl treten neben der magnetischen Permeabilität μ die elektrische Leitfähigkeit σ , die mittlere Geschwindigkeit v_0 des Fluids sowie eine

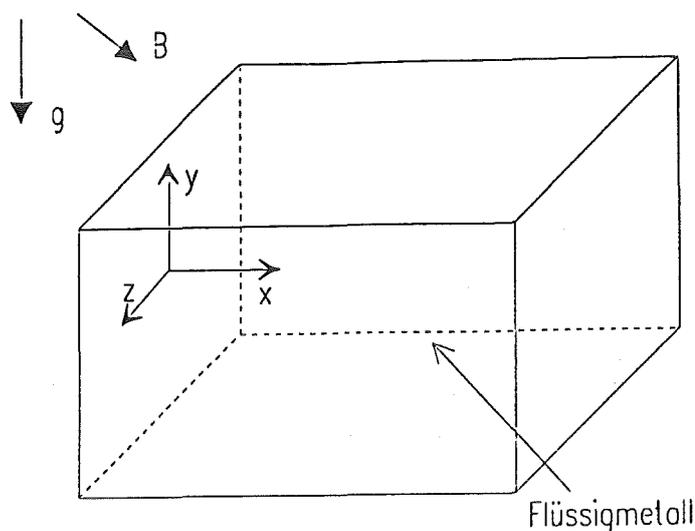


Abbildung 2.1: Geometrie und Koordinatensystem.

charakteristische Länge a der Aufgabenstellung auf. Physikalisch kann sie als Quotient aus dem durch die Stromdichte induzierten Magnetfeld und dem angelegten Magnetfeld interpretiert werden. Typische Werte der magnetischen Reynolds-Zahl liegen bei Fusionsanlagen in der Größenordnung von 10^{-2} . Deshalb ist es vertretbar, das induzierte Magnetfeld nicht zu berücksichtigen (Hunt und Holroyd [38]). Dies hat bei den Berechnungen zur Folge, daß das Magnetfeld zeitlich konstant ist und von einem vorgegebenen Wert nicht mehr abweicht. Es muß keine Gleichung zur Bestimmung des Magnetfelds ausgewertet werden.

2.1.2 Das elektrische Feld

Da nach dem Induktionsgesetz von Maxwell das elektrische Feld mit der magnetischen Induktion nach der Beziehung

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

verknüpft ist, verschwindet die Rotation des elektrischen Feldes aufgrund des zeitlich konstanten Magnetfeldes. Deshalb darf an dieser Stelle rein formal ein skalares elektrisches Potential Φ nach

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (2.4)$$

eingeführt werden.

2.1.3 Elektrostatische Ladungen

Elektrostatische Ladungen können sich aufgrund der hohen Leitfähigkeiten der im Fusionsblanket verwendeten Flüssigmetalle praktisch nicht bilden (Chang und Lundgren [11]). Deshalb bleibt der Term $\rho_{el}\vec{E}$ in den Impulsleichungen unberücksichtigt. Hierbei steht ρ_{el} für die elektrostatische Ladungsdichte. Der Fehler, der durch Weglassen dieses Termes entsteht, ist von der Größenordnung

$$\frac{|\vec{v}|^2}{c^2},$$

wobei $|\vec{v}|$ für den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit und c für die Lichtgeschwindigkeit steht (Chandrasekhar [10]). Dies ist bei nichtrelativistischer Strömung vertretbar.

2.1.4 Stoffeigenschaften

Alle Stoffdaten werden im Verlauf einer Rechnung als zeitlich und örtlich konstant angenommen. Eine Ausnahme macht hierbei nur die Dichte ρ im Auftriebsterm der Impulsleichungen. Man nimmt an, daß sie von der Temperatur linear abhängt. Diese Annahme ist als Boussinesq-Approximation bekannt.

2.1.5 Ohmsches Gesetz

Bei der Herleitung des Ohmschen Gesetztes werden folgende Ausdrücke nicht berücksichtigt:

- Der Strombeschleunigungsterm,
er beschreibt den Einfluß der Trägheit freier Ladungen,
- der Hall-Term,
er beschreibt den Stromfluß freier Ladungsträger aufgrund $\vec{j} \times \vec{B}$,
- der Druck-Term,
er beschreibt die Elektronendiffusion aufgrund eines Druckgradienten,
- und der Seebeck-Effekt,
er beschreibt die Elektronendiffusion aufgrund eines Temperaturgradienten.

All diese Effekte spielen in einem Fusionsreaktor keine Rolle. Für eine detaillierte Betrachtung kann eine Arbeit von Sterl [82] herangezogen werden.

2.1.6 Dissipation

In der Energiegleichung werden keinerlei Dissipationseffekte berücksichtigt, da diese normalerweise bei Naturkonvektionsströmungen keine bedeutende Rolle spielen (Gershuni und Zhukhovitskii [27]). Dies hat zur Folge, daß der Term

$$D = \eta \left[\text{rot}^2 \vec{v} - 2 \text{div}(\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}) + \Delta \vec{v}^2 \right], \quad (2.5)$$

der für den inkompressiblen Fall die Dissipation ausdrückt, in der Energiegleichung vernachlässigt wird. Dabei ist η die dynamische Viskosität und \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor.

2.2 Dimensionslose Gleichungen

Unter Einbeziehung obiger Vereinfachungen kann aus den Erhaltungsgleichungen der Hydrodynamik und den Maxwell-Gleichungen ein dimensionsloses Gleichungssystem zur Beschreibung von Naturkonvektionsströmungen unter Magnetfeldeinfluß hergeleitet werden. Dieses Gleichungssystem besteht aus neun skalaren, partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungen:

Der Kontinuitätsgleichung,

$$\nabla \vec{v} = 0, \quad (2.6)$$

den Impulsgleichungen,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla p + M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} (\vec{j} \times \vec{B}) + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta \vec{v} + T \vec{k}, \quad (2.7)$$

dem Ohmschen Gesetz,

$$\vec{j} = -\nabla \Phi + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.8)$$

der Ladungserhaltung,

$$\nabla \vec{j} = 0, \quad (2.9)$$

und der Energiegleichung,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T = \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta T + Ra_{iw} Ra^{-\frac{3}{2}} Pr^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

wobei der Term $Ra_{iw} Ra^{-\frac{3}{2}} Pr^{-\frac{1}{2}}$ die Wärmequellendichte und Ra_{iw} die mit inneren Wärmequellen gebildete Rayleigh-Zahl darstellt. Die Geschwindigkeit \vec{v} , der Druck p , die elektrische Stromdichte \vec{j} , das Magnetfeld \vec{B} , das elektrische Potential Φ und die Temperatur T sind bereits dimensionslos gemacht. Ihre Normierung kann dem Anhang entnommen werden. Der Normaleneinheitsvektor in Richtung der Gravitation wird durch \vec{k} gekennzeichnet.

Zur Beschreibung des physikalischen Problems sind vier nichtgeometrische, dimensionslose Kennzahlen ausreichend. Dies ist zuerst die Hartmann-Zahl M . Sie ist wie folgt definiert:

$$M = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \sqrt{\frac{\text{elektrodynamische Kraft}}{\text{Reibungskraft}}}. \quad (2.11)$$

Dabei ist a eine charakteristische Länge, B_0 das von außen angelegte Magnetfeld, σ die elektrische Leitfähigkeit und η die dynamische Viskosität. Physikalisch steht die Hartmann-Zahl für die Wurzel aus dem Quotienten aus elektrodynamischer Kraft und Reibungskraft. Sie kann als Maß für die Stärke des Magnetfeldes interpretiert werden.

Ein Maß für die Stärke der Naturkonvektion ist die Rayleigh-Zahl. Sie wird nach

$$Ra = \frac{\beta \Delta T g a^3}{\nu \kappa} \frac{\text{Leistung der Auftriebskraft}}{\text{Dissipationsleistung}} \quad (2.12)$$

gebildet. In diesem Zusammenhang steht β für den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten, ΔT für eine charakteristische Temperaturdifferenz, g für die Erdbeschleunigung, a für eine charakteristische Länge, ν für die kinematische Viskosität und κ für die Temperaturleitfähigkeit. Wird die Konvektionsströmung nicht durch einen äußeren Temperaturgradienten angetrieben, sondern durch innere Wärmequellen, ergibt sich die Definition einer weiteren Rayleigh-Zahl

$$Ra_{iw} = \frac{\beta q g a^5}{\nu^2 \lambda_{wl}} \frac{\text{Leistung der Auftriebskraft}}{\text{Dissipationsleistung}}. \quad (2.13)$$

Gegenüber der ersten Definition der Kennzahl tauchen nun mit q eine Wärmequellendichte und mit λ_{wl} die Wärmeleitfähigkeit auf. Beide Kennzahlen repräsentieren physikalisch den Quotienten aus den Leistungen der Auftriebskraft und der Dissipation. Als vierter Ähnlichkeitsparameter beschreibt die Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \frac{\text{diffusive Transportgeschw. des Impulses}}{\text{diffusive Transportgeschw. der Temperatur}} \quad (2.14)$$

die Eigenschaften des verwendeten Fluids. Genauer gesagt beschreibt sie das Verhältnis der diffusiven Transportgeschwindigkeiten von Impuls und Temperatur.

Anstelle Gleichung (2.9) kann auch die Gleichung

$$\Delta \Phi = \nabla(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.15)$$

verwendet werden. Man erhält sie, indem man auf das Ohmsche Gesetz die Divergenz anwendet und Gleichung (2.9) berücksichtigt. Im Lösungsalgorithmus des Simulationsprogramms wird mit Gleichung (2.15) gearbeitet, da Gleichung (2.9) ebenso wie Gleichung (2.6) eine unangenehme Bedingung darstellt.

Obiges Gleichungssystem enthält zahlreiche Kopplungen. Eine bedeutsame Kopplung besteht zwischen den Impulsgleichungen und der Energiegleichung. Die in der Energiegleichung bestimmten Temperaturen gehen in den Impulsgleichungen über den Auftriebsterm $T\vec{k}$ bei der Berechnung der Geschwindigkeiten ein. Andererseits werden diese Geschwindigkeiten im konvektiven Term der Energiegleichung benötigt, um die Temperatur bestimmen zu können.

Ebenso sind die Impulsgleichungen mit dem Ohmschen Gesetz über den Term $\vec{j} \times \vec{B}$ verknüpft. Zusätzlich gehen im Ohmschen Gesetz die in den Impulsgleichungen bestimmten Geschwindigkeiten ein. Gleichzeitig wird im Ohmschen Gesetz das elektrische Potential aus Gleichung (2.15) benötigt, das seinerseits wiederum mit Hilfe der in den Impulsgleichungen bestimmten Geschwindigkeiten berechnet wird.

Gegenüber der Hydrodynamik verliert in der Magnetohydrodynamik die Reibung an Bedeutung. Dies kann anhand der Gewichtung der einzelnen Terme in den Impulsgleichungen aufgezeigt werden. Der Betrag der Multiplikatoren vor dem Druck- bzw. elektrodynamischen Term und dem Reibungsterm unterscheidet sich um den Faktor M^2 . Dies bedeutet, daß schon bei einer Hartmann-Zahl von $M = 100$ der Reibungsterm um vier Größenordnungen niedriger gewichtet wird. Auch der Auftriebsterm ist gegenüber dem Reibungsterm wesentlich bedeutsamer, seine Größenordnung liegt unabhängig von den dimensionslosen Kennzahlen bei Eins. Bei für diese Arbeit typischen Parameterkonstellationen ($Pr \approx 10^{-2}$, $Ra \approx 10^5$), ergibt sich für den Multiplikator vor dem Reibungsterm ein Wert in der Größenordnung 10^{-4} .

Für die Energiegleichung können ähnliche Betrachtungen angestellt werden. Der Multiplikator vor dem diffusiven Term nimmt für typische Parameterwerte die Größenordnung 10^{-2} an. Die Größenordnung des konvektiven Terms ist stets Eins. Damit ist der diffusive gegenüber dem konvektiven Term deutlich schwächer gewichtet. Allerdings spielt der diffusive Term trotzdem eine Rolle bei den numerischen Rechnungen.

2.3 Randbedingungen

Um das physikalische Problem lösen zu können, ist neben dem Aufstellen eines Gleichungssystems die Vorgabe von Randbedingungen notwendig. Nach-

stehend werden die möglichen Randbedingungen für die einzelnen physikalischen Größen angegeben. Hierbei ist \vec{n} der Einheitsvektor normal zur Wand, \vec{t} der Einheitsvektor tangential zur Wand und τ_t die Schubspannung tangential zur Wand.

Randbedingungen für die Geschwindigkeit:

- Als Randbedingung für die Geschwindigkeit kann die bekannte Haftbedingung

$$\vec{v}_{Wand} = \vec{0} \quad (2.16)$$

vorgegeben werden.

- Als zweite Möglichkeit können schubspannungsfreie Oberflächen gemäß

$$\left. \frac{\partial \tau_t}{\partial n} \right|_{Grenzfläche} = 0 \Rightarrow v_n = 0, \quad \frac{\partial v_t}{\partial n} = 0 \quad (2.17)$$

realisiert werden. Hierbei steht v_n für die Geschwindigkeitskomponente normal zur Grenzfläche und v_t für die Geschwindigkeitskomponente tangential zur Grenzfläche.

Randbedingungen für die Temperatur:

- Im Falle einer beheizten oder gekühlten aber auch einer perfekt wärmeleitenden Wand bleibt die Wandtemperatur an einem festen Ort zeitlich konstant. Die Randbedingung ergibt sich in diesen Fällen einfach zu

$$T_{Wand} = const. \quad (2.18)$$

- Wenn ein konstanter Wärmestrom die Wand durchdringt, resultiert die Neumann-Randbedingung

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{Wand} = const. \quad (2.19)$$

Als Sonderfall sind hierbei adiabate Wände enthalten. Für sie ergibt sich die entsprechende homogene Neumann-Randbedingung $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$.

Randbedingung für den Druck:

- Aufgrund des Fractional-Step-Verfahrens ergibt sich eine Neumann-Randbedingung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{Wand} = 0. \quad (2.20)$$

Erläuterungen zur Herleitung dieser Randbedingung können bei Peyret und Taylor [74] entnommen werden.

Randbedingungen für das elektrische Potential:

- Im Falle elektrisch isolierender Wände ergibt sich für das Potential die homogene Neumann-Randbedingung

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{Wand} = 0, \quad (2.21)$$

da in diesem Fall kein elektrischer Strom in die Wand eintreten darf.

- Im Falle elektrisch perfekt leitender Wände gleichen sich alle Potentialunterschiede unverzüglich aus, und es stellt sich in der Wand ein konstanter Wert für das Potential ein. Dieser Wert kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf

$$\Phi_{Wand} = 0 \quad (2.22)$$

gesetzt werden, da Potentiale in den Bestimmungsgleichungen ausschließlich als Gradient auftreten.

Randbedingungen für die Stromdichte:

- Bei Vorliegen von elektrisch isolierenden Wänden tritt kein Strom in die Wand ein. Die Normalkomponente der Stromdichte verschwindet. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\vec{j} \cdot \vec{n} |_{Wand} = 0. \quad (2.23)$$

- Bei Vorliegen von elektrisch perfekt leitenden Wänden fließt der gesamte Strom in die Wand. Die Tangentialkomponente der Stromdichte verschwindet. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\vec{j} \cdot \vec{t} |_{Wand} = 0. \quad (2.24)$$

3 Numerische Grundlagen

3.1 Allgemeines

Die grundlegende Vorgehensweise, auf die viele numerische Näherungsverfahren bei der Lösung von Differentialgleichungssystemen zurückgreifen, besteht darin, daß diese Gleichungen nicht kontinuierlich im gesamten Gebiet gelöst werden, sondern ausschließlich an diskreten Stützstellen. Das gebräuchlichste Verfahren dieser Art ist die Finite-Differenzen-Methode (FDM). Es gibt jedoch auch Verfahren, bei denen dies nicht der Fall ist. In diesem Zusammenhang wären Finite-Element-Methoden (FEM) und Spektralverfahren zu nennen. Die Vorteile der FEM sind sicherlich die guten lokalen Auflösungsmöglichkeiten und die Flexibilität bei unregelmäßigen Geometrien. Auf der anderen Seite sind FEM sehr aufwendig und es sind noch keine schnellen Lösungsverfahren verfügbar. FDM sind dagegen recht einfach einsetzbar und verfügen über schnelle Gleichungslöser. Dafür sind sie zumeist auf rechteckige Lösungsgebiete angewiesen. Die Spektralverfahren besitzen gute Konvergenzeigenschaften und erzeugen keine numerische Diffusion, sind jedoch nur bei kohärenten Problemen und einfachen Geometrien verwendbar.

Für diese Arbeit wird ein numerisches Simulationsprogramm von Lenhart [54], das isotherme, magnetohydrodynamische Strömungen in Rechteckkanälen behandelt, um die Energiegleichung erweitert. Zusätzlich muß in den Impulsgleichungen und damit auch in der Druckgleichung der Auftrieb berücksichtigt werden. Um transiente Rechnungen zu ermöglichen, wird ein numerisches Verfahren eingeführt, das die Zeit mit höherer Genauigkeit als das zuvor verwendete Euler-Vorwärts-Verfahren auflöst. Hierzu wird das Adams-Bashfort-Verfahren ausgesucht. Da in der Literatur keine ausreichenden Angaben zu den Eigenschaften des Verfahrens verfügbar sind, wird eine Neumannsche Stabilitätsanalyse dieses Verfahrens durchgeführt.

Das vorliegende Programm mit dem Namen MAKON benutzt eine FDM als Näherungsverfahren. Hierbei werden die kontinuierlichen, nichtlinearen, gekoppelten Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen angenähert, die an äquidistanten, diskreten Stützstellen ausgewertet werden. In den jeweiligen Differentialgleichungen werden die Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, welche als abgebrochene Taylor-Reihen angesehen werden können. Derjenige vernachlässigte Term, der die Gitterweite in der kleinsten Potenz enthält, gibt die Fehlerordnung des Verfahrens an. So kann der Term $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ an einer festen Stützstelle i eines Rechengitters auf folgende Weise angenähert werden:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Dabei steht φ für eine beliebige physikalische Größe, und φ_{i+1} bzw. φ_{i-1} bezeichnen den Wert der Größe φ an einer diskreten Stützstelle, die um die Ortsschrittweite Δx von der Stützstelle i entfernt ist. Dies entspricht einer Näherung mit dem Zentralen-Differenzen-Verfahren 2. Ordnung.

Das verwendete Maschennetz ist geradlinig, orthogonal und äquidistant. Insbesondere wird ein versetztes Maschengitter benutzt, bei dem die Skalare wie Druck, Temperatur und elektrisches Potential im Zentrum des Kontrollvolumens positioniert sind. Die Vektorkomponenten dagegen, wie sie bei Geschwindigkeit, elektrischer Stromdichte und Magnetfeld auftreten, stehen senkrecht auf den Berandungen des Kontrollvolumens (siehe Abbildung 3.1). Skalare und Vektorkomponenten befinden sich also nicht wie beim regulären Gitter an gleicher Stelle. Diese Vorgehensweise ist mit einem stark erhöhten Aufwand verbunden und bringt bei der Formulierung der Randbedingungen Probleme, da einige Größen dort nicht definiert sind. Bei der Diskretisierung der Impulsgleichungen müssen zum Teil Geschwindigkeiten aus vier benachbarten Werten gemittelt werden, eine Eigenschaft, die die diskretisierten Gleichungen schnell unübersichtlich machen. Selbstverständlich sprechen auch gute Gründe dafür, ein versetztes Maschennetz zu verwenden. Bei der Diskretisierung auf einem regulären Gitter tritt bei inkompressiblen Problemen das Phänomen auf, daß für das Druckfeld eine Lösung generiert werden kann, die unphysikalische Oszillationen aufweist und trotzdem die Impulsgleichungen erfüllt. Dies kann deshalb geschehen, da in den Impulsgleichungen stets nur der Gradient des Druckes und nicht der Wert des Druckes selbst auftaucht. Bei Verwendung eines versetzten Maschengitters können diese Oszillationen nicht auftreten (Patankar [72]). Ein weiterer entscheidender Vorteil folgt aus der Tatsache, daß die Flußgrößen direkt an den Grenzen der Kontrollflächen vorliegen. Dadurch werden die diskretisierten Erhaltungssätze für elektrische Stromdichte und Masse exakt erfüllt, da die Vektorkomponenten genau da

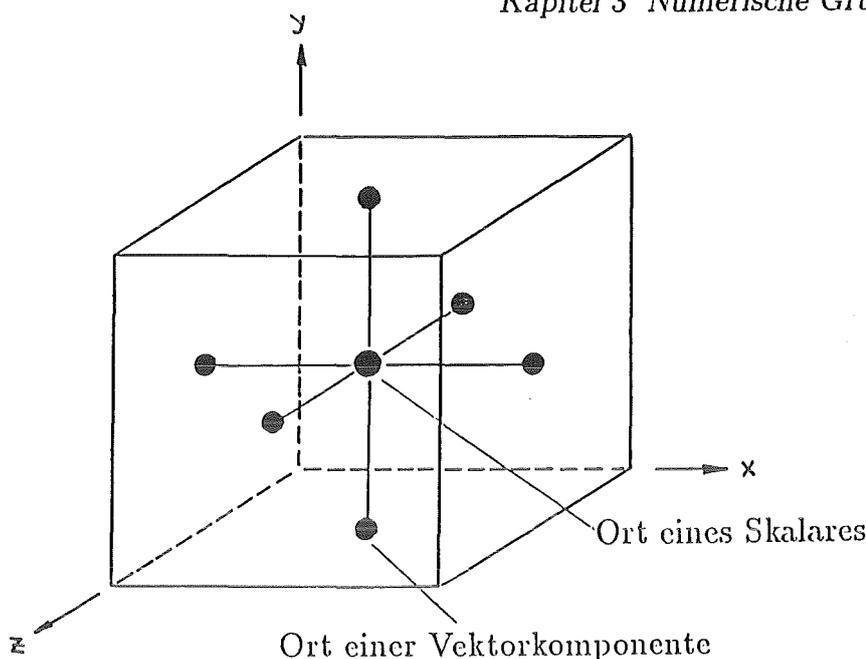


Abbildung 3.1: Das versetzte Maschengitter.

verfügbar sind, wo sie für die Bilanzierung benötigt werden. Fehler durch Mittelungen sind daher ausgeschlossen. Vor allem die strikte Einhaltung der Kontinuitätsgleichung ist für gute numerische Ergebnisse unerlässlich, so reagiert z.B. gerade die Energiegleichung sehr empfindlich auf eine Verletzung dieser Bedingung mit künstlichen inneren Wärmequellen und -senken.

Bei der Diskretisierung der konvektiven Terme wie z.B. $u \frac{\partial u}{\partial x}$ wird die sogenannte Erhaltungsform verwendet. Sie liefert gegenüber der Konvektionsform Ergebnisse mit höherer Genauigkeit (Günther [28]). Darüber hinaus wird sichergestellt, daß keine zusätzlichen Quell- oder Senkenterme für die Masse generiert werden. Dies ist bei Anwendung der Konvektionsform möglich und zwar auch dann, wenn numerische Schemata eingesetzt werden, die eigentlich die diskrete Kontinuitätsgleichung erfüllen. Betrachten wir den Term

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} ,$$

wie er in Impuls- und Energiegleichung vorkommt, wobei φ wiederum eine beliebige skalare Größe oder Vektorkomponente ist. Die Erhaltungsform dieses Ausdrucks lautet:

$$\frac{\partial(u\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial(w\varphi)}{\partial z} .$$

Diese Ausdrücke sind im allgemeinen nicht identisch, lassen sich jedoch ineinander überführen, wenn die inkompressible Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

erfüllt ist. Dies ist durch Umformen der Erhaltungsform mittels der Produktregel der Differentiation sofort einsichtig. Während die kontinuierlichen Terme identisch sind, trifft dies bei den diskreten Termen nicht zu. Hier ist es unmöglich, durch Umformen eines Ausdruckes den anderen zu erhalten.

3.2 Zeitliche Diskretisierung

Sowohl in den Impulsgleichungen als auch in der Energiegleichung ist die Zeitdiskretisierung explizit durchgeführt. Dabei kann zwischen zwei verschiedenen Verfahren ausgewählt werden. Dies ist zum einen die Euler-Vorwärts-Methode und zum anderen das Adams-Bashfort-Verfahren. Für Produktionsrechnungen wird das Adams-Bashfort-Verfahren verwendet, wenn transiente Vorgänge aufgelöst werden müssen. Ist man nur an stationären Endlösungen interessiert, wird die schnellere Euler-Vorwärts-Methode eingesetzt. Explizite Verfahren haben die Eigenschaft, daß zur Berechnung aller Werte zu einem neuen Zeitpunkt ausschließlich Werte zu schon bekannten alten Zeitpunkten herangezogen werden. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß nicht wie bei impliziten Verfahren große, nur teilweise vektorisierbare Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Darüber hinaus ist die Programmierung expliziter Verfahren aufgrund ihrer Übersichtlichkeit wesentlich einfacher und damit schneller vollziehbar. Nachteilig sind dagegen die bei diesen Verfahren vorhandenen Beschränkungen des Zeitschritts. Teilimplizite Verfahren wie z.B. das ADI-Verfahren erscheinen unvorteilhaft, da sie nur ein Zeitlimit, meist das diffusive, beseitigen können. Hilfreich wären nur vollimplizite Verfahren wie z.B. das Crank-Nicholsen-Verfahren, die unbedingt stabil sind. Dieses Verfahren müßte dann aber bei allen Zeitdiskretisierungen eingesetzt werden. Da aber Lenhart die Impulsgleichungen explizit behandelt, ist es nicht sinnvoll, beim Einbau der Energiegleichung ein aufwendiges vollimplizites Verfahren anzustreben, da die Zeitlimits der Impulsgleichungen bestehen bleiben.

3.2.1 Euler-Vorwärts-Methode

Betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - H(\varphi, x, y, z, t) = 0 \quad , \quad (3.1)$$

so wird bei der Euler-Vorwärts-Methode die zeitliche Diskretisierung wie folgt vorgenommen :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{i,j,k}^n = \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) = H_{i,j,k}^n . \quad (3.2)$$

Dies ist eine Näherung 1. Ordnung. Hierbei bezeichnen i, j und k diskrete Stützstellen in x, y und z -Richtung in einem Rechengitter. Das hochgestellte n bzw. $n+1$ steht für einen festen, diskreten Zeitpunkt. Für diese Methode existieren mehrere Beschränkungen im maximal einsetzbaren Zeitschritt. Zum ersten muß das nach Courant, Friedrichs und Levy benannte CFL-Kriterium erfüllt werden. Es bringt nachstehende Restriktion für Δt :

$$\Delta t_{konv} \leq \left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]^{-1} . \quad (3.3)$$

Physikalisch bedeutet diese Restriktion, daß die Entfernung, die eine Störung während eines Zeitintervalls Δt durch Konvektion zurücklegen kann, geringer sein muß als der kleinste Abstand zweier Gitterpunkte (Hirsch [36]). Dies bedeutet, daß der physikalische Einflußbereich in demjenigen der diskretisierten Gleichungen enthalten sein muß.

Auch für eine diffusiv transportierte Störung muß ein äquivalentes Zeitlimit gelten, wobei die Geschwindigkeiten u, v und w durch eine Diffusionsgeschwindigkeit $\frac{\kappa_D}{\Delta x}$ ersetzt werden müssen. Dabei ist κ_D eine allgemeine Diffusivität. Nun ist κ_D für Energie- und Impulsgleichungen verschieden. Es gilt:

$$\kappa_{D,energie} = \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \quad , \quad \kappa_{D,impuls} = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} .$$

Daraus ergibt sich sofort das diffusive Kriterium

$$\Delta t_{diff} \leq \frac{1}{2\kappa_D} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{-1} . \quad (3.4)$$

Diese beiden Beschränkungen müssen einzeln erfüllt sein, um numerisch stabile Verfahren zu erhalten . Zu diesen Beschränkungen tritt noch zusätzlich ein kombiniertes Kriterium

$$c^2 < 2d \quad , \quad (3.5)$$

wobei

$$c = \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right) \quad , \quad d = \kappa_D \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)$$

gilt (Roache [76]). Dieses Kriterium ist allerdings sehr schwach und spielt bei tatsächlichen Rechnungen eine geringe Rolle. Die beiden erstgenannten Kriterien können dagegen eine beträchtliche Einschränkung des Zeitschritts bedeuten. Der maximale Zeitschritt Δt_{konv} ist vor Beginn einer Rechnung schwer abschätzbar, da die lokalen Maximalgeschwindigkeiten vorher nicht bekannt sind. Das Limit Δt_{diff} kann vor einer Rechnung genau bestimmt werden, da es nur von Diskretisierungsgrößen und dimensionslosen Kennzahlen abhängt. Wie man unmittelbar erkennt, ist bei Flüssigmetallströmungen wegen $Pr < 1$ das Limit infolge der Diffusion bei der Energiegleichung schärfer als bei den Impulsgleichungen. Für anwendungsorientierte Rechnungen ist allerdings die Rayleigh-Zahl genügend groß, um eine nicht allzu strikte Beschränkung zu erhalten.

Abschließend muß ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß eine Analyse numerischer Verfahren niemals auf die zeitliche Diskretisierung beschränkt werden kann, sondern immer auch gleichzeitig die örtliche Diskretisierung betrachten muß. Obige Aussagen über die numerische Stabilität gelten streng genommen nur dann, wenn im Ort das Zentrale-Differenzen-Verfahren verwendet wird. Sie sind jedoch leicht auf andere Verfahren übertragbar, bei denen auch nur Nachbarpunkte den Wert einer bestimmten Stützstelle bestimmen. Bei den im vorliegenden Programm benützten Verfahren treffen die obigen Stabilitätsaussagen weitgehend zu. Für die Kombination Euler-Vorwärts und LECUSSO gelten modifizierte Stabilitätslimits. Das diffusive Limit bleibt unverändert, aber das konvektive Limit ergibt sich dann zu:

$$c_x \leq \frac{1}{4\lambda} \quad (3.6)$$

In dieser Beziehung taucht der LECUSSO-Faktor λ auf. Seine Definition wird in Kapitel 3.3.2 nachgeholt.

3.2.2 Adams-Bashfort-Verfahren

Wieder ausgehend von der Differentialgleichung (3.1), wird bei der Methode von Adams und Bashfort die zeitliche Diskretisierung wie folgt bewerkstelligt:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) = \frac{3}{2} H_{i,j,k}^n - \frac{1}{2} H_{i,j,k}^{n-1} \quad .$$

Hierbei handelt es sich um ein dreistufiges Verfahren 2. Ordnung. Für die Indizes i, j, k, n gilt das in Kapitel 3.2.1 gesagte. Mit $n + \frac{1}{2}$ ist ein Zeitpunkt bezeichnet, der $\frac{\Delta t}{2}$ nach dem Zeitpunkt n folgt. Die Idee für die Herleitung des Verfahrens ist, daß die Funktion H zur Zeit $n + \frac{1}{2}$ betrachtet wird, um mit dem Differenzenquotienten aus Beziehung (3.2) eine Näherung 2. Ordnung zu erreichen. Diese Funktion $H^{n+\frac{1}{2}}$ wird dann, um ein explizites Verfahren zu erhalten, aus den alten Werten H^n und H^{n-1} linear extrapoliert. Dieses Verfahren ist seit geraumer Zeit bekannt und wird oft angewendet. Trotzdem ist in der gängigen Literatur keine vollständige Analyse dieses Verfahrens zu finden. Nur Lilly [56] und Roache [76] machen 1965 bzw. 1972 einige Angaben zur Stabilität des Verfahrens. Doch auch diese Angaben sind auf die Advektionsgleichung beschränkt. Andere Autoren verzichten ganz auf Angaben zur numerischen Stabilität. Trotzdem wird hier der Versuch unternommen, die Stabilitätsgrenzen dieses Verfahrens für die transiente Konvektions-Diffusionsgleichung anzugeben. Alle Aussagen werden unter der Bedingung hergeleitet, daß für die örtliche Diskretisierung ein Zentrales-Differenzen-Verfahren 2. Ordnung verwendet wird.

Wie schon aus der Literatur bekannt, ist das Adams-Bashfort-Verfahren für die Advektionsgleichung schwach instabil (siehe Abbildung 3.2). Für diese Gleichung ergibt sich der Anfachungsfaktor der Neumannschen Stabilitätsanalyse zu $|G| = 1 + O(\Delta t^2)$ (vergleiche Roache [76]). Wendet man auf die diskretisierte Konvektions-Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} \varphi_i^{n+1} = & \varphi_i^n - \frac{3}{2}c_x \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2} + \frac{1}{2}c_x \frac{\varphi_{i+1}^{n-1} - \varphi_{i-1}^{n-1}}{2} \\ & + \frac{3}{2}d_x(\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n) - \frac{1}{2}d_x(\varphi_{i+1}^{n-1} + \varphi_{i-1}^{n-1} - 2\varphi_i^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

die Neumannsche Stabilitätsanalyse an und wertet den Anfachungsfaktor $G = \frac{A^{n+1}}{A^n}$ mit dem Ansatz $\varphi_i^n = A^n e^{I\Theta i}$ für kleine Werte von Θ aus, bestätigt sich die Aussage, daß das Adams-Bashfort-Verfahren ohne Diffusion instabil ist. Hierzu wird untersucht, ob G für kleine Θ innerhalb des Einheitskreises der komplexen G -Ebene liegt. Ist dies der Fall, ist numerische Stabilität gegeben. G genügt einer quadratischen Gleichung, welche zwei Wurzeln hat. Es steht zu erwarten, daß weniger Diffusion nötig ist als bei der Euler-Vorwärts-Methode, um Stabilität zu erreichen, da für die Advektionsgleichung der Verlauf von G schwächer instabil ist als derjenige der expliziten Euler-Vorwärts-Methode (siehe Abbildung 3.2). Für allgemeine Werte von Θ ergibt sich für die Anfachungsfaktoren mit $K = 1 - \cos\Theta$:

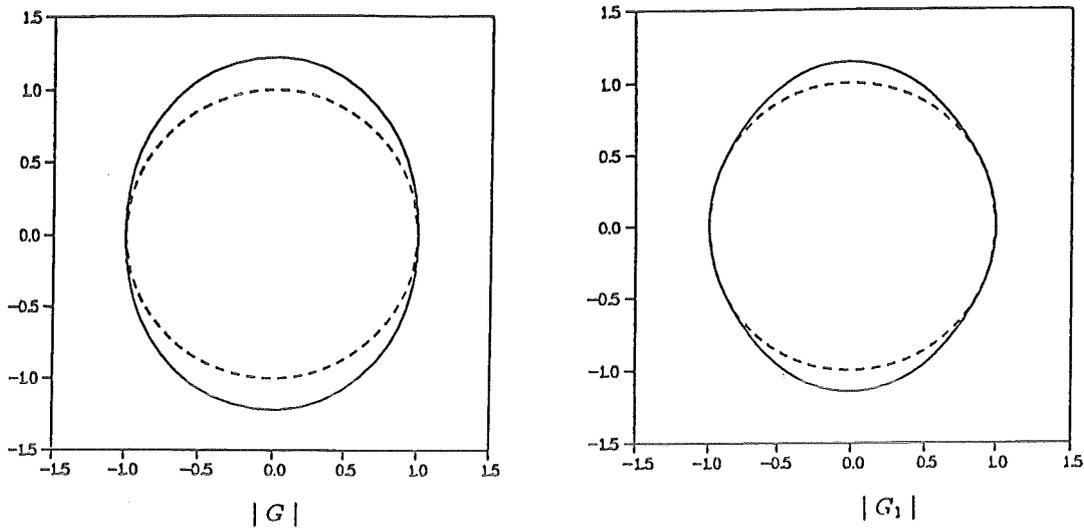


Abbildung 3.2: Polardiagramm des Anfachungsfaktors G für die Advektionsgleichung bei $c_x = 0.70$. Hierbei wird der Absolutbetrag von G über Θ aufgetragen. Links: Euler-Vorwärts-Methode. Rechts: Adams-Bashfort-Methode. Die örtliche Diskretisierung geschieht mit zentralen Differenzen.

$$G_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}Ic_x \sin\Theta - \frac{3}{2}Kd_x \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(Ic_x \sin\Theta + Kd_x)\right]^2 + \frac{1}{2}(Ic_x \sin\Theta + 2Kd_x)}. \quad (3.8)$$

Für kleine Werte von Θ gilt:

$$\sin\Theta \approx \Theta, \quad \cos\Theta \approx 1 - \frac{\Theta^2}{2}. \quad (3.9)$$

Verwendet man die Beziehung

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (3.10)$$

und setzt die Beziehungen (3.9) in die Gleichung (3.8) ein, folgt nach elementaren Umformungen:

$$G_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(Ic_x\Theta + d_x\Theta^2) \pm \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\left(d_x + \frac{9}{4}c_x^2\right) - Ic_x\Theta + \frac{1}{8}c_x^2\Theta^2\right). \quad (3.11)$$

Weitere Zusammenfassungen von Termen und eine Beschränkung auf das wertemäßig wesentlich größere G_1 (kleine d_x vorausgesetzt) bringen:

$$G_1 = 1 - I c_x \Theta - d_x \Theta^2 - \frac{c_x^2 \Theta^2}{2} . \quad (3.12)$$

Diesen Anfachungsfaktor kann man in der komplexen G-Ebene in Abhängigkeit von c_x und d_x darstellen. Damit für eine Wertekombination von c_x und d_x das Verfahren numerisch stabil ist, muß G_1 im Einheitskreis liegen. Der Einheitskreis genügt der Gleichung $|G_1| = 1$. Nach Einführung der Koordinaten $\hat{\zeta} = \text{Realteil von } G_1$ und $\hat{\eta} = \text{Imaginärteil von } G_1$ lautet die Gleichung:

$$\hat{\zeta}^2 + \hat{\eta}^2 = 1 .$$

Auf andere Weise formuliert und für kleine Θ entwickelt, gilt für den Einheitskreis auch:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{EK} &= \cos \Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2} + \dots , \\ \hat{\eta}_{EK} &= \sin \Theta = \Theta + \dots . \end{aligned}$$

Für das Adams-Bashfort-Verfahren ist sofort einsichtig, daß

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{AB} &= 1 - \left(d_x + \frac{c_x^2}{2} \right) \Theta^2 , \\ \hat{\eta}_{AB} &= -c_x \Theta \end{aligned}$$

und mit einer Transformation

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{AB} &= 1 - \left(d_x + \frac{c_x^2}{2} \right) \frac{\Theta^2}{c_x^2} , \\ \hat{\eta}_{AB} &= \Theta \end{aligned}$$

gilt. Die Bedingung $\hat{\zeta}_{AB} \leq \hat{\zeta}_{EK}$ muß erfüllt sein, um numerische Stabilität zu garantieren. Dann liegt G_1 immer innerhalb des Einheitskreises. Obige Bedingung ausgewertet ergibt:

$$\begin{aligned} 1 - \left(d_x + \frac{c_x^2}{2} \right) \frac{\Theta^2}{c_x^2} &\leq 1 - \frac{\Theta^2}{2} , \\ \implies \underline{d_x} &> 0 . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Als Ergebnis resultiert der einfache Zusammenhang, daß das Adams-Bashfort-Verfahren nur mit Diffusion stabil ist. Dies ist ein notwendige, aber

keine hinreichende Bedingung für numerische Stabilität, wie später noch gezeigt wird. In Abbildung 3.3 ist dieser Sachverhalt veranschaulicht. Für rein konvektive Vorgänge ist das Verfahren instabil, erhöht man jedoch schrittweise die Diffusion, so gelangt man in den stabilen Bereich. Es muß aber für jedes c_x ein bestimmtes $d_{x,krit}$ überschritten werden, um ein stabiles Verhalten zu gewährleisten.

Um eine obere Schranke für d_x zu erhalten, wendet man die Neumannsche Stabilitätsanalyse für die örtlich zentral und in der Zeit nach Adams-Bashfort diskretisierte eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + \frac{3}{2}d_x(\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n) - \frac{1}{2}d_x(\varphi_{i+1}^{n-1} + \varphi_{i-1}^{n-1} - 2\varphi_i^{n-1}) \quad (3.14)$$

an und erhält für den Anfachungsfaktor G mit dem Ansatz $\varphi_i^n = A^n e^{I\Theta i}$ folgende Bestimmungsgleichung:

$$G^2 + (1 - 3d_x(\cos\Theta - 1))G + d_x(\cos\Theta - 1) = 0.$$

Wie bei allen dreistufigen Verfahren enthält diese Gleichung zwei Lösungen für den Anfachungsfaktor G , wobei die zweite Lösung unphysikalisch ist und möglichst kleine Werte annehmen sollte. Als Bedingung für die Stabilität des Verfahrens muß wieder $|G_{1,2}| \leq 1$ gelten. Elementare Umformungen führen auf:

$$G_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 - 3d_x(1 - \cos\Theta) \pm \sqrt{9d_x^2(1 - \cos\Theta)^2 - 2d_x(1 - \cos\Theta) + 1} \right].$$

Wie man unmittelbar sieht, verhält sich G_1 unproblematisch. Die Bedingung $|G_2| \leq 1$ wird jedoch nicht immer erfüllt sein. Da $G_2 \leq 1$ immer eintreten wird, muß untersucht werden, wann $G_2 \geq -1$ gegeben ist. Im ungünstigsten Fall kann $\cos\Theta = -1$ eintreten, damit muß

$$G_2 = \frac{1}{2} \left[1 - 6d_x - \sqrt{36d_x^2 - 4d_x + 1} \right] \geq -1 \quad (3.15)$$

für alle d_x immer erfüllt sein. Kurze Umformungen führen auf das endgültige Stabilitätslimit:

$$d_x \leq \frac{1}{4}. \quad (3.16)$$

Erfahrungen mit dem Programm zeigen, daß dieses Kriterium auf drei Dimensionen erweitert werden kann. Daraus folgt eine dem diffusiven Kriterium beim Euler-Vorwärts Verfahren äquivalente Beschränkung:

$$\Delta t_{diff} \leq \frac{1}{4\kappa_D} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

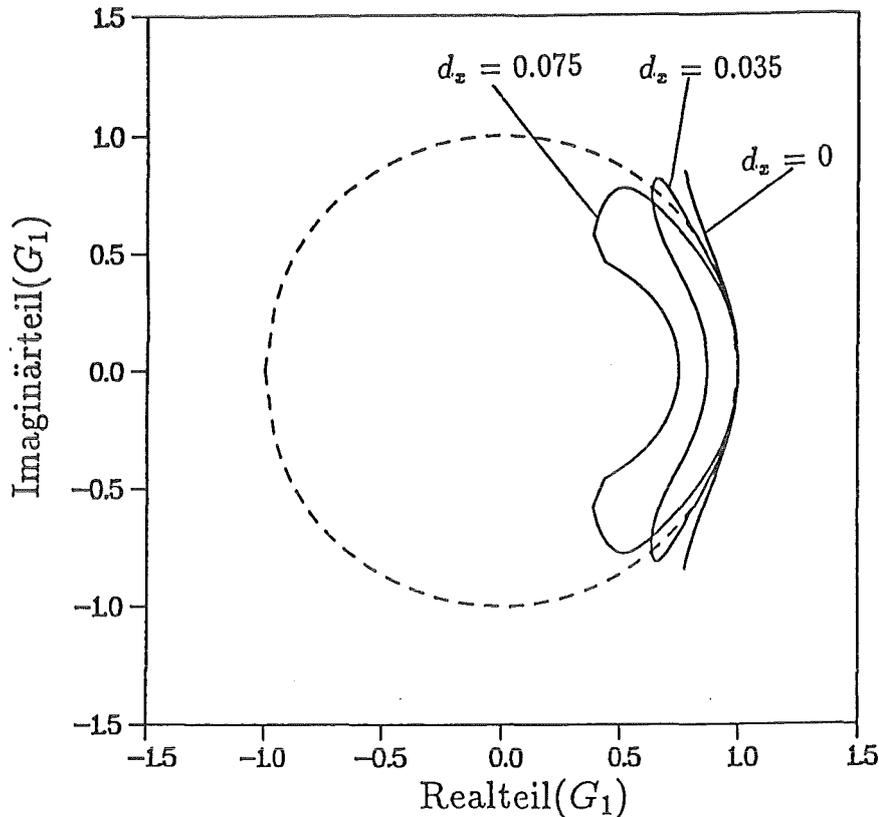


Abbildung 3.3: Polardiagramm des Anfachungsfaktors G_1 für konvektiv-diffusive Ereignisse, wobei für alle Kurven $c_x = 0.7$ gilt. Die örtliche Diskretisierung geschieht mit zentralen Differenzen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß für numerisch stabile Lösungen $0 < d_x \leq \frac{1}{4}$ sichergestellt sein muß.

Um vollständige Aussagen zur numerischen Stabilität machen zu können, ist es erforderlich, die konvektiven Limits zu kennen. Wendet man wieder die Neumannsche Stabilitätsanalyse auf die diskretisierte Konvektions-Diffusionsgleichung an und wertet sie für allgemeine Werte von Θ aus, erhält man eine Bedingung für c_x und eine kombinierte Bedingung für c_x und d_x . Da die allgemeine Bestimmungsgleichung für den Anfachungsfaktor G komplex ist, wird sie nicht analytisch, sondern empirisch ausgewertet. Man kann aus Tabelle 3.1 eine Bedingung für c_x herleiten, die für alle erlaubten d_x gültig ist:

$$c_x \leq \frac{3}{4} . \quad (3.18)$$

Tests mit dem dreidimensionalen Rechenprogramm zeigen, daß auch dieses

d_x	$c_{x,krit}$
0	0
0.00001	0.09
0.0001	0.16
0.001	0.28
0.0025	0.35
0.005	0.41
0.0075	0.46
0.01	0.49
0.025	0.60
0.05	0.69
0.1	0.75
0.2	0.75
0.25	0.75

Tabelle 3.1: Das kritische c_x , ab dem das Adams-Bashfort-Verfahren im Bereich $0 < d_x \leq 0.25$ instabil wird.

Kriterium auf drei Dimensionen erweitert werden kann. Es bringt folgende Beschränkung des Zeitschrittes:

$$\Delta t_{konv} \leq \frac{3}{4} \left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]^{-1}. \quad (3.19)$$

Genau wie bei der Euler-Vorwärts-Methode kann ein kombiniertes Kriterium gefunden werden. Dies geschieht, indem man die Werte aus Tabelle 3.1 auswertet und den Exponenten e des Ansatzes $c_{x,krit}^e \sim d_x$ sowie den zugehörigen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Eine entsprechende Analyse führt auf folgende Beziehung:

$$c_x^4 \leq 6 d_x. \quad (3.20)$$

Auch dieses Kriterium ist auf drei Dimensionen erweiterbar, stellt aber in praktischen Rechnungen keine nennenswerte Einschränkung dar.

Durch die obigen Bedingungen ist numerische Stabilität gesichert. Wie schon erwähnt, gibt es beim Adams-Bashfort-Verfahren zwei Anfachungsfaktoren, von denen der eine, G_2 , unphysikalisch ist. Jetzt ist aber gerade dieser Anfachungsfaktor für diejenigen Instabilitäten verantwortlich, die durch Überschreiten des diffusiven Limits zustande kommen. Um physikalisch relevante Ergebnisse berechnen zu können, sollte für alle Θ $|G_1| > |G_2|$ gelten. Diese Forderung kann in der Nähe der Stabilitätsgrenzen nicht für alle Θ

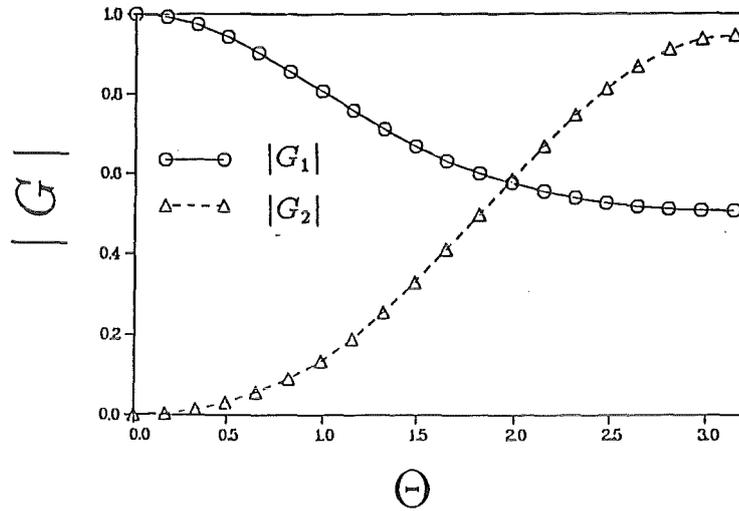


Abbildung 3.4: Das Verhalten von G_1 und G_2 nahe der diffusiven Stabilitätsgrenze bei $d_x = 0.24$, $c_x = 0.00$.

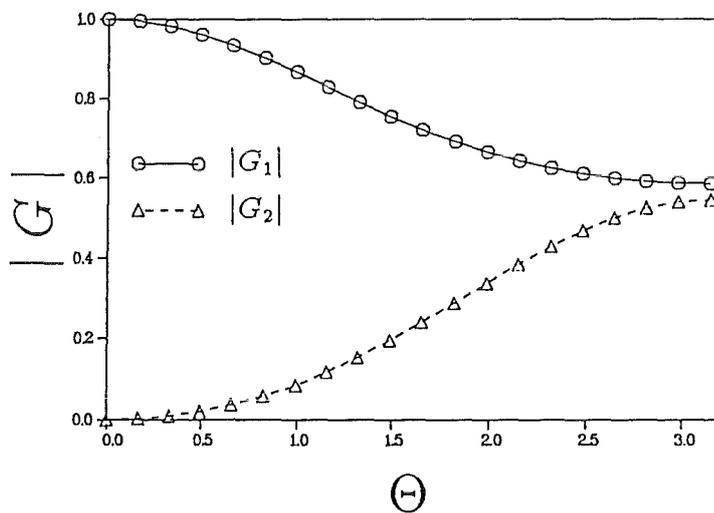


Abbildung 3.5: Das Verhalten von G_1 und G_2 , wenn Abstand zur diffusiven Stabilitätsgrenze eingehalten wird bei $d_x = 0.16$, $c_x = 0.00$.

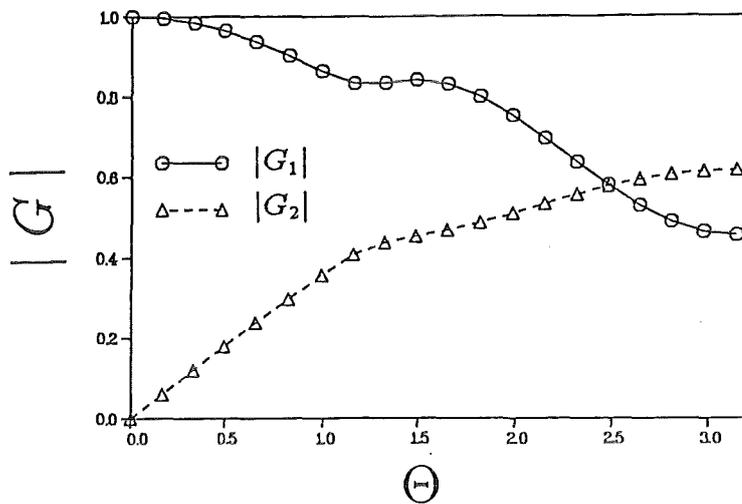


Abbildung 3.6: Das Verhalten von G_1 und G_2 nahe der konvektiven Stabilitätsgrenze bei $d_x = 0.14$, $c_x = 0.72$.

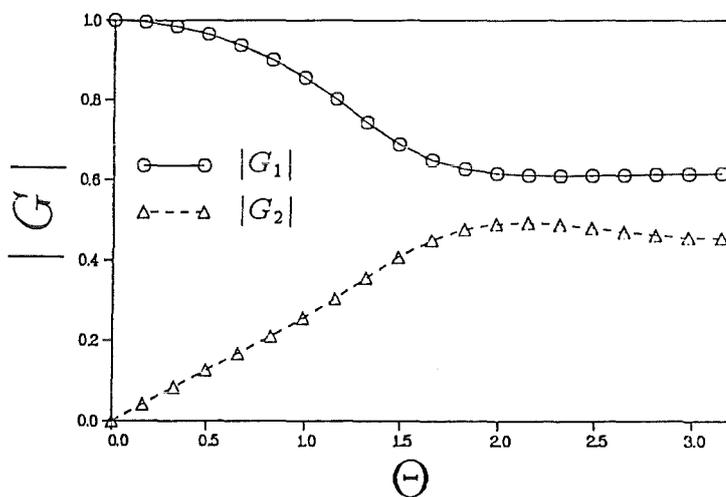


Abbildung 3.7: Das Verhalten von G_1 und G_2 , wenn zu beiden Stabilitätsgrenzen Abstand eingehalten wird bei $d_x = 0.14$, $c_x = 0.50$.

erfüllt werden (vergleiche die Abbildungen 3.4 und 3.6). Deshalb scheint es angebracht zu sein, tatsächliche Rechnungen deutlich unterhalb dieser Stabilitätsgrenzen durchzuführen. Für reine Diffusion darf d_x den Wert 0.14 nicht überschreiten. Andernfalls nimmt im Bereich großer Θ der unphysikalische Anfachungsfaktor betragsmäßig zu große Werte an. Rechnungen mit wenig Diffusion und verhältnismäßig viel Konvektion sind bezüglich des Größenverhältnisses von G_1 und G_2 unproblematisch, da in diesem Fall G_1 immer der dominierende Anfachungsfaktor ist. Wird die Diffusion jedoch auf $d_x > 0.14$ erhöht, ist bei zunehmendem c_x ein kritisches Verhalten feststellbar. Um ein akzeptables Verhalten zu erzielen, sollte deshalb auch c_x nicht bis an die Stabilitätsgrenze erhöht werden. Allgemein kann man mit einiger Sicherheit feststellen, daß im Bereich

$$0 < d_x < \frac{1}{8} \quad , \quad 0 < c_x < \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

numerisch stabile und physikalisch sinnvolle Ergebnisse erzielt werden (vergleiche Abbildungen 3.5 und 3.7). Werden die Beschränkungen verletzt, ist die Dämpfung im Bereich großer Θ unzureichend.

Der Phasenwinkel Φ_P des Anfachungsfaktors G eines numerischen Verfahrens kann durch die Beziehung

$$\Phi_P = \arctan \left[\frac{\text{Imaginärteil}(G)}{\text{Realteil}(G)} \right] \quad (3.22)$$

bestimmt werden. Führt man dies für die reine Advektionsgleichung in einer Dimension mit konstanter Geschwindigkeit durch, kann man diesen Winkel mit dem Phasenwinkel der exakten Lösung $\Phi_e = -c_x \Theta$ vergleichen. Der Quotient

$$\frac{\Phi_P}{\Phi_e}$$

stellt den relativen Phasenfehler dar. Für ein optimales Verfahren sollte dieser Quotient für alle Θ den Wert Eins annehmen. Ist der Wert des Quotienten kleiner als Eins, spricht man von einem nacheilenden Fehler, ist er größer als Eins, spricht man von einem vorseilenden Fehler. Untersucht man den relativen Phasenfehler des physikalischen Anfachungsfaktors G_1 des Adams-Bashfort-Verfahrens, so erkennt man, daß sich das Verfahren für kleine Θ sehr zufriedenstellend verhält. Wird Θ jedoch größer, nimmt der Wert des relativen Phasenfehlers immer mehr ab (siehe Abbildung 3.8). Dies bedeutet, daß das Adams-Bashfort-Verfahren für große Θ an einem nacheilenden Fehler leidet. In diesem Bereich werden Wellenpakete mit hoher Frequenz viel zu langsam transportiert. Dieses Verhalten ergibt sich gleichermaßen für alle Werte von c_x , die numerische Stabilität garantieren.

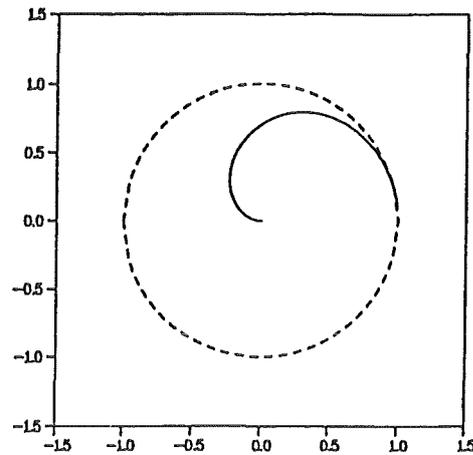


Abbildung 3.8: Der relative Phasenfehler von G_1 für $c_x = 0.5$ über Θ aufgetragen.

3.3 Örtliche Diskretisierung

3.3.1 Zentrale Differenzen

Ein geläufiges Verfahren für die örtliche Diskretisierung von Differentialgleichungen ist das Zentrale-Differenzen-Verfahren (CDS). Hier werden die Ableitungen folgendermaßen behandelt:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.24)$$

Dieses Verfahren ist von 2. Ordnung und sehr einfach einsetzbar. Leider besitzt es eine gravierende Einschränkung. Wenn die sogenannte Maschen-Reynolds-Zahl $Re_{\Delta x} = F_{id} u \Delta x$ die Bedingung

$$|Re_{\Delta x}| \leq 2 \quad (3.25)$$

verletzt, werden unphysikalische Ergebnisse berechnet, die durch starke lokale Oszillationen gekennzeichnet sind. Dabei steht F_{id} für das Inverse des Faktors, der in der diskretisierten Gleichung vor dem diffusiven Term steht. Dies ist in dimensionslosen Gleichungen oftmals die Reynolds-Zahl Re , deshalb hat sich der Sprachgebrauch Maschen-Reynolds-Zahl durchgesetzt. Manchmal ergeben sich jedoch davon abweichende Konstellationen. Vor allem in

dimensionslosen Energiegleichungen steht zuweilen die inverse Peclet-Zahl vor dem diffusiven Term. Daher ist auch der Begriff Maschen-Peclet-Zahl geläufig.

Wird sogar die Bedingung

$$| Re_{\Delta x} | \leq \frac{2}{c_x}$$

nicht eingehalten, wachsen die Amplituden der Oszillationen unbegrenzt an, und die berechnete Lösung ist numerisch instabil. Hierbei steht c_x wiederum für die eindimensionale Courant-Zahl. Physikalisch bedeutet Beziehung (3.24), daß nur soviel Information konvektiv in den Kontrollraum eingebracht werden darf, wie darin diffusiv verarbeitet werden kann. Eine exakte Herleitung von Beziehung (3.24) kann Roache [76] entnommen werden.

Im vorliegenden Gleichungssystem ist F_{id} in der Energiegleichung der Term \sqrt{RaPr} und in den Impulsgleichungen der Term $\frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{Pr}}$. Die Maschen-Reynolds-Zahlen der beiden diskretisierten Gleichungen unterscheiden sich daher um den Faktor Pr . Da für Prandtl-Zahlen bei Flüssigmetall $Pr \ll 1$ gilt, sind die Maschen-Reynolds-Zahlen der Impulsgleichungen deutlich höher als diejenigen der Energiegleichung. Die Maschen-Reynolds-Zahl kann in den Impulsgleichungen bei den in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen mit einer vertretbaren Diskretisierung Werte bis zu $Re_{\Delta x} = 300$ erreichen. Dies zeigt deutlich, daß das Zentrale-Differenzen-Verfahren für die vorliegende Aufgabenstellung nicht global einsetzbar ist. Die Möglichkeiten, die Maschen-Reynolds-Zahl zu verringern, bestehen darin, entweder die Gitterweiten sehr klein zu wählen oder die Rayleigh-Zahl klein zu halten. Die erste Vorgehensweise scheitert an Speicherproblemen und der bei vergrößerter Punktezahl verringerter Rechengeschwindigkeit. Zusätzlich reduziert sich aufgrund der Beziehungen (3.3) und (3.4) der maximal zulässige Zeitschritt ganz empfindlich, wenn die Gitterweiten stark verringert werden. Auch die zweite Methode ist nur bedingt einsetzbar, da die Rayleigh-Zahl nicht beliebig klein gehalten werden kann. Vor allem bei hohen Hartmann-Zahlen ist die elektromagnetische Dämpfung so stark, daß erst bei hohen Rayleigh-Zahlen konvektive Vorgänge beobachtet werden können.

3.3.2 Upwind-Verfahren

Einen Ausweg aus dem Dilemma des Zentralen-Differenzen-Verfahrens bieten die sogenannten Upwind-Verfahren. Als Upwind-Verfahren werden solche Verfahren bezeichnet, die für die jeweiligen konvektiven Terme einseitige Näherungen mit Punkten vorwiegend von stromauf benutzen. Dies macht

physikalisch Sinn, da Konvektion sicherlich ein unsymmetrischer Vorgang ist, bei dem mehr Information aus der Strömungsrichtung als von der gegenüber liegenden Seite ins Kontrollvolumen transportiert wird. Diese Verfahren haben entweder keine oder geringere Restriktionen bezüglich der Maschen-Reynolds-Zahl. Das einfache Upwind Verfahren 1. Ordnung (UDS), auch gelegentlich als Donor-Cell-Methode bekannt, nähert die Ableitungen wie folgt an:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i &= \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{für } Re_{\Delta x} > 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i &= \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{für } Re_{\Delta x} < 0.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Diese Näherung ist nur von 1. Ordnung, besitzt aber keine Beschränkung in der Maschen-Reynolds-Zahl (Roache [76]). Die Donor-Cell-Methode ist leicht programmierbar und es besteht die Möglichkeit, sie auch in Wandnähe einzusetzen, da sie immer nur einen Punkt stromauf benötigt. Schon hier allerdings sieht man, daß die Upwind Methoden einen bestimmten Mehraufwand gegenüber dem Zentralen-Differenzen-Verfahren erfordern. Dies liegt darin begründet, daß je nach Vorzeichen der Maschen-Reynolds-Zahl oder, physikalisch ausgedrückt, je nach Richtung der Strömung, unterschiedliche Ansätze zu verwenden sind. Die Donor-Cell-Methode leidet zusätzlich unter einer weiteren Einschränkung, sie produziert viel numerische Diffusion, die, besonders wenn die Strömung schräg zu Koordinatenachsen verläuft, das Verhalten der Lösung stark verfälschen kann. Vor allem starke Gradienten werden zu sehr abgeflacht, die Lösung kann völlig 'verschmieren' (Günther [28]). Diskretisiert man in der stationären Konvektions-Diffusions-Gleichung die konvektiven Terme einmal mit zentralen Differenzen und einmal mit der Donor-Cell Methode jeweils in der Konvektionsform

$$\begin{aligned}u_i \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} &= \kappa_D \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i}{\Delta x^2} \quad (CDS), \\ u_i \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta x} &= \kappa_D \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i}{\Delta x^2} \quad (UDS)\end{aligned}\quad (3.27)$$

und formt den Ausdruck, der mit UDS gebildet wird, in

$$u_i \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} = \kappa_D \left(1 + \frac{1}{2} Re_{\Delta x}\right) \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i}{\Delta x^2} \quad (3.28)$$

um, so ist deutlich zu erkennen, daß UDS gegenüber dem Zentralen-Differenzen-Verfahren eine Diffusion einbringt, die proportional zu Δx ist. Zusammenfassend muß festgestellt werden, daß UDS ein Verfahren ist, daß keine zufriedenstellenden Eigenschaften hat. Deshalb ist ein globaler Einsatz dieser Methode im Rechenprogramm nicht verwirklicht. Nur in Randgebieten, wo Upwind-Verfahren höherer Ordnung nicht einsetzbar sind, oder als Teil hybrider Verfahren, wird UDS verwendet.

Das in weiten Bereichen von Impuls- und Energiegleichung angewendete Upwind-Verfahren ist das von Günther entwickelte sogenannte LECUSSO-Upwindung. Der Name LECUSSO erklärt sich aus Locally Exact Consistent Upwind Scheme of Second Ordner. Da im Programm die Erhaltungsform und das versetzte Maschengitter verwendet wird, empfiehlt es sich hier die Näherung einer Ableitung an einer Zwischenstelle $i + \frac{1}{2}$ anzugeben:

$$\left. \frac{\partial(u\varphi)}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}\varphi_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}\varphi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \quad (3.29)$$

Dabei wird φ an den Zwischenstellen wie folgt gebildet:

$$\begin{aligned} \varphi_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} + \varphi_i) - \lambda_{i+\frac{1}{2}}(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i) \quad \text{für } Re_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} + \varphi_i) - \lambda_{i+\frac{1}{2}}(\varphi_{i+2} + \varphi_i - 2\varphi_{i+1}) \quad \text{für } Re_{\Delta x, i+\frac{1}{2}} < 0, \\ \varphi_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i-1}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}(\varphi_i + \varphi_{i-2} - 2\varphi_{i-1}) \quad \text{für } Re_{\Delta x, i-\frac{1}{2}} > 0, \\ \varphi_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i-1}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i) \quad \text{für } Re_{\Delta x, i-\frac{1}{2}} < 0. \end{aligned}$$

Der LECUSSO-Faktor λ wird aus

$$\lambda_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{r_{i\pm\frac{1}{2}}}{|Re_{\Delta x, i\pm\frac{1}{2}}|} \frac{0.5 |Re_{\Delta x, i\pm\frac{1}{2}}| (r_{i\pm\frac{1}{2}} + 1) - (r_{i\pm\frac{1}{2}} - 1)}{(r_{i\pm\frac{1}{2}} - 1)^2} \quad (3.30)$$

und

$$r_{i\pm\frac{1}{2}} = \exp(|Re_{\Delta x, i\pm\frac{1}{2}}|) \quad (3.31)$$

berechnet.

Das LECUSSO Verfahren ist von 2. Ordnung genau und unterliegt keiner Beschränkung durch die Maschen-Reynolds-Zahl. Es kann als Zentrales-Differenzen-Verfahren interpretiert werden, dem eine Diffusion höherer Ordnung zugeführt wird. Da in den herkömmlichen Gleichungen stets Diffusionsterme 2. Ordnung auftauchen, erscheint diese Tatsache vertretbar. Zusätzlich

ist es lokal exakt, d.h. es integriert die Funktion $\varphi = \exp(\operatorname{Re}(x_i))$ im Intervall $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ exakt, wenn $\operatorname{Re}(x)$ in diesem Intervall konstant ist und die Werte von φ_{i-1}, φ_i und φ_{i+1} bekannt sind. Wäre $\operatorname{Re}(x)$ im ganzen Intervall konstant, würde LECUSSO die exakte Lösung berechnen. Die Philosophie des Verfahrens besteht darin, an jedem Ort nur soviel numerische Diffusion zu erzeugen, um gerade noch oszillationsfreie Lösungen zu erhalten. Deshalb muß an jeder Stützstelle der LECUSSO-Faktor λ berechnet werden. Dieser Faktor hat nachstehende Eigenschaften:

$$\frac{1}{12} \leq \lambda(\operatorname{Re}_{\Delta x}) \leq \frac{1}{2}, \quad (3.32)$$

$$\lambda(\operatorname{Re}_{\Delta x}) = \lambda(-\operatorname{Re}_{\Delta x}). \quad (3.33)$$

Für einige feste λ erhält man aus der Literatur bekannten Upwind-Verfahren. Für $\lambda = \frac{1}{8}$ erhält man zum Beispiel das bekannte QUICK-Verfahren. Interessant ist auch, daß die Wahl von $\lambda = \frac{1}{6}$ das Verfahren mit 3. Ordnung konvergieren läßt. Leider ist dieser Wert für λ bei starken Strömungen zu klein. Für eine Herleitung diese Sachverhalts siehe Günther [29].

3.3.3 Hybride Verfahren

Um nicht die schlechten Eigenschaften einiger Upwind-Verfahren wie unzureichende Fehlerordnung und numerische Diffusion im gesamten Rechengebiet wirksam werden zu lassen, werden häufig hybride Verfahren eingesetzt. Das standardmäßig verwendete Hybridverfahren (HDS) ist eine Mischung aus Zentralem-Differenzen-Verfahren und Donor-Cell-Methode. CDS wird überall dort eingesetzt, wo dies die Maschen-Reynolds-Zahl erlaubt. Ist dies nicht der Fall, wird UDS verwendet. HDS kann sinnvoll dann benutzt werden, wenn nur vereinzelt höhere Maschen-Reynolds-Zahlen auftreten oder Randgebiete betrachtet werden. Der Übergang zwischen beiden Verfahren ist sehr abrupt, was zu Schwierigkeiten führen kann. Man kann das in HDS verwendete UDS als Sicherungsmaßnahme ansehen, daß bei lokaler Erhöhung der Maschen-Reynolds-Zahl die Lösung nicht zerstört wird. Aus diesem Grunde ist HDS als mögliche Variante in der Energiegleichung verwirklicht, da hier die Maschen-Reynolds-Zahl moderate Werte annimmt. Zusätzlich verbraucht HDS weniger Rechenzeit als aufwendige Upwind-Verfahren 2. Ordnung. Ein Problem aller hybriden Verfahren besteht darin, daß für jeden einzelnen Maschenpunkt mehrere Abfragen nötig sind, um entscheiden zu können, welche Differenzennäherung verwendet werden soll. So muß auch bei HDS sowohl das Vorzeichen als auch der Betrag der Maschen-Reynolds-Zahl abgefragt werden. Diese Abfragen stellen programmiertechnisch ein Problem dar, da

sie nur schlecht vektorisierbar sind. Es gibt zwar Ansätze, die ein sogenanntes 'straight-forward' Rechnen ermöglichen, aber diese Ansätze tragen nicht zur Übersichtlichkeit des Programms bei und verwenden langsame Standardfunktionen.

Ein zweites, in MAKON angewendetes, hybrides Verfahren schaltet mit der gleichen Bedingung wie bei HDS zwischen CDS und LECUSSO hin und her. Die Vorteile dieses Vorgehens liegen auf der Hand. Das Gesamtverfahren ist von 2. Ordnung und bringt nur da numerische Diffusion ein, wo nötig, und auch dort nur soviel, um Oszillationen zu verhindern. Hinzu kommt, daß im dreidimensionalen Fall die Rechenzeit bei Verwendung von LECUSSO deutlich größer ist als bei Verwendung von zentralen Differenzen. Das bedeutet, daß das hybride Verfahren weniger Rechenzeit benötigt. Der Übergang von LECUSSO auf CDS ist weniger abrupt als bei HDS. Setzt man beim LECUSSO-Verfahren $\lambda = 0$, erhält man das Zentrale-Differenzen-Verfahren. Bei $Re_{\Delta x} = 2$ ergibt sich ein λ von $\lambda = 0.18$ und bei $Re_{\Delta x} = 0$ ergibt sich $\lambda = 0.08$. Schaltet man also im Bereich $0 \leq \lambda \leq 2$ von CDS auf LECUSSO um, ist der Übergang nicht allzu problematisch.

3.4 Fractional-Step-Verfahren

In der numerischen Fluidodynamik werden oftmals die diskretisierten Gleichungssysteme nicht geschlossen gelöst. Statt dessen werden die Gleichungen in der Regel entkoppelt, so daß für jede zu berechnende physikalische Größe eine Bestimmungsgleichung existiert. Bei inkompressiblen Problemen tritt die Schwierigkeit auf, daß apriori keine Bestimmungsgleichung für den Druck zur Verfügung steht. Normalerweise leitet man sich eine Druckgleichung durch Anwendung des Divergenzoperators auf die Impulsgleichungen her. Diese Gleichung berücksichtigt die Kontinuitätsgleichung nicht und ist recht unhandlich (Günther [29]). Das Fractional-Step-Verfahren, auch Time-Splitting Verfahren genannt, ist eine elegantere Methode zur Bestimmung von Druck und Geschwindigkeit aus den Impulsgleichungen. Es geht auf Chorin und Teman zurück, die unabhängig voneinander 1968 bzw. 1969 diese Vorgehensweise vorschlugen. Es herrscht große Konfusion und ein regelrechter Expertenkrieg über die Eigenschaften des Verfahrens. So sind die Ordnung des Verfahrens und die zu wählenden Randbedingungen der Zwischengröße temporäre Geschwindigkeit sowie die Berücksichtigung des alten Druckfeldes strittig. Darauf wird später noch eingegangen. Folgende zweidimensionale Herleitung des Verfahrens kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angegeben werden. Betrachtet man die diskretisierten Impulsgleichungen, kann man nachstehende Ausdrücke herleiten:

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + Rest \right), \\
u_{i+1,j}^{n+1} &= u_{i+1,j}^n - \Delta t \left(\frac{p_{i+2,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x} + Rest \right), \\
v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + Rest \right), \\
v_{i,j+1}^{n+1} &= v_{i,j+1}^n - \Delta t \left(\frac{p_{i,j+2}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y} + Rest \right). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Setzt man die Gleichungen (3.34) in die diskretisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} = 0 \tag{3.35}$$

ein, erhält man eine Gleichung, in der p zum Zeitpunkt $n+1$ steht sowie bekannte Größen zum Zeitpunkt n . Diese Gleichung kann als Bestimmungsgleichung für den Druck interpretiert werden, die automatisch auch die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Dies ist eine sehr angenehme Eigenschaft des Fractional-Step-Verfahrens, da die Kontinuitätsgleichung numerisch eine sehr unangenehme Gleichung darstellt. Zum Schluß wird dann die Geschwindigkeit aus dem nun bekannten Druck p^{n+1} berechnet.

Formal wird im Rechenprogramm zuerst eine sogenannte temporäre Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^{n+1} + F_{Dr} \Delta t \nabla p^{n+1} \tag{3.36}$$

aus den Impulsgleichungen berechnet. Hierbei ist F_{Dr} der Faktor, der in den Impulsgleichungen vor dem Druckterm steht. Geschwindigkeit und Druck werden quasi zusammen integriert. Als Randbedingung gilt die Haftbedingung.

Wendet man den Divergenzoperator auf Gleichung (3.36) an, ergibt sich mit der Kontinuitätsgleichung eine Poissongleichung für den Druck:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{F_{Dr} \Delta t} \nabla \cdot \vec{v}_{temp} . \tag{3.37}$$

Die Randbedingung für den Druck resultiert zu

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{wand}^{n+1} = 0 . \tag{3.38}$$

Diese Randbedingung ist unphysikalisch. Trotzdem sind die Werte des Druckes im Innenbereich korrekt, da sie ohne Einfluß des Randes berechnet werden. Eine Herleitung dieses Sachverhaltes kann bei Lenhart [54], Perot [73] sowie Peyret und Taylor [74] studiert werden. In einem letzten Schritt wird nun die endgültige Geschwindigkeit aus der umgestellten Gleichung (3.36) gewonnen, wobei als Randbedingung die Haftbedingung gewählt wird:

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}_{temp} - F_{Dr} \Delta t \nabla p^n . \quad (3.39)$$

Die Ordnung des Verfahrens hängt unter anderem davon ab, welche Zeitdiskretisierung bei der Bestimmung von \vec{v}_{temp} gewählt wird. Nach Kim und Moin [46] ist das Verfahren von 1. Ordnung, wenn die Euler-Vorwärts-Methode verwendet wird und von 2. Ordnung, wenn das Adams-Bashfort- oder das Crank-Nicholsen-Verfahren zur Anwendung kommt. In jüngster Zeit tauchen vermehrt Zweifel an der Genauigkeit des Verfahrens auf. So wird behauptet, das Fractional-Step-Verfahren sei im günstigsten Fall von 1. Ordnung. Perot [73] zeigt auf, daß der Druck immer nur mit 1. Ordnung konvergieren kann. Damit ist auch das Gesamtverfahren grundsätzlich nicht von höherer Ordnung. Glücklicherweise ist jedoch die Berechnung der Geschwindigkeit von der Druckberechnung entkoppelt. Dadurch ist es möglich, die Geschwindigkeiten mit 2. Ordnung genau zu berechnen, obwohl das Gesamtverfahren nicht diese Genauigkeit besitzt. Die Angaben zur Ordnung des Gesamtverfahrens von Kim und Moin besitzen demnach nur für die Geschwindigkeiten Gültigkeit.

Eine schon seit geraumer Zeit diskutierte Streitfrage ist, ob bei der Berechnung von \vec{v}_{temp} das alte Druckfeld berücksichtigt werden soll oder nicht. Einige Autoren wie z.B. Maday et al. [59] behaupten, es wäre günstiger, eine Schätzgeschwindigkeit mit dem alten Druckfeld zu berechnen, um dann später eine Poissongleichung für die Druckänderung zu erhalten. Dieses Verfahren soll unbedingt stabil sein und mit höherer Ordnung konvergieren. Diese Behauptungen sind unbewiesen.

Auch die günstigste Wahl der Randbedingungen der temporären Geschwindigkeit und des Druckes ist umstritten. Kim und Moin [46] sowie Maday et al. [59] weisen darauf hin, daß die Ordnung des Gesamtverfahrens von der Wahl dieser Randbedingungen abhängt. Perot [73] widerlegt diese These zum größten Teil. Erfolgversprechend erscheinen für die Zukunft Ansätze, bei denen das Fractional-Step-Verfahrens ganz ohne diese Randbedingungen auskommt.

3.5 Lösung der Poissongleichungen

Um die numerische Simulation von Naturkonvektionsströmungen unter Magnetfeldeinfluß durchführen zu können, müssen pro Zeitschritt zwei Poissongleichungen gelöst werden. Dies ist zum einen eine Poissongleichung für den Druck und zum anderen eine Poissongleichung für das elektrische Potential. Diskretisiert man die allgemeine Poissongleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = A_{i,j,k} \quad (3.40)$$

auf einem Rechteckgebiet mit zentralen Differenzen

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \\ & + \frac{\varphi_{i,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = A_{i,j,k} \end{aligned} \quad (3.41)$$

so erfordert dies die gleichzeitige Lösung von $N = (I - 2) * (J - 2) * (K - 2)$ algebraischen Gleichungen. Dabei sind I,J,K die Anzahl der Punkte in der jeweiligen Koordinatenrichtung. Die klassischen Lösungsmethoden wie z.B. die Cramersche Regel oder die Gaußsche Elimination versagen hier, da sie eine Unzahl von Rechenoperationen verlangen. Die Cramersche Regel führt auf eine zu $(N+1)!$ proportionale Anzahl benötigter Operationen und bei der Gaußschen Methode ist die Anzahl der notwendigen Multiplikationen zu N^3 proportional. Dies ist in vertretbarer Rechenzeit nicht durchführbar. Einen Ausweg können hier iterative Verfahren wie z.B. das SOR-Verfahren ('Successive Over-Relaxation') oder sogenannte schnelle Poisson-Löser bieten. In der vorliegenden Arbeit wird die zweite Methode gewählt, es wird der schnelle Helmholtz-Gleichungslöser SHAF3 verwendet (vergleiche Flassak [19]). Dieser Gleichungslöser wurde von Flassak am Institut für Thermodynamik der Universität Karlsruhe 1989 entwickelt. Er basiert auf periodischen Fourier-Transformationen und führt eine zu N proportionale Anzahl von Operationen zur Lösung dieses Gleichungssystems durch. Als Randbedingungen sind alle Kombinationen von Dirichlet-, Neumann- und periodischen Randbedingungen zulässig.

3.6 Lösungsalgorithmus des Programms

Um die Wirkungsweise des Programms deutlich zu machen, wird nachstehend erläutert, wie und in welcher Reihenfolge die einzelnen Rechengrößen ermittelt werden. Dabei wird auf die Angabe der diskretisierten Gleichungen verzichtet, um die Übersichtlichkeit zu wahren.

A. Vorbereitung der eigentlichen Rechnung

1. Einlesen der Anfangs- und Randbedingungen und der Parameter
2. Erzeugung des Rechengitters

B. Ausrechnen der Strömungsgrößen zum Zeitpunkt $n+1$ ($n \rightarrow n+1$)

1. Lösen der Poissongleichung für das Potential

$$\Delta \Phi^{n+1} = \nabla(\vec{v}^n \times \vec{B})$$

2. Bestimmen der neuen Stromdichte

$$\vec{j}^{n+1} = -\nabla \Phi^{n+1} + \vec{v}^n \times \vec{B}$$

3. Lösen der Energiegleichung, um die Temperatur zu bestimmen

Variante I (Euler-Vorwärts-Methode):

$$T^{n+1} = T^n + \Delta t \left\{ -\vec{v}^n \nabla T^n + \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta T^n + Ra_{iW} Ra^{-\frac{3}{2}} Pr^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Variante II (Adams-Bashfort-Verfahren):

$$\begin{aligned} T^{n+1} = & T^n + \frac{3}{2} \Delta t \left\{ -\vec{v}^n \nabla T^n + \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta T^n + Ra_{iW} Ra^{-\frac{3}{2}} Pr^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \Delta t \left\{ -\vec{v}^{n-1} \nabla T^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta T^{n-1} + Ra_{iW} Ra^{-\frac{3}{2}} Pr^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

4. Berechnen des Druckes und der Geschwindigkeit aus den Impulsgleichungen (Fractional-Step-Verfahren mit LECUSSO-Upwinding)

- Errechnen der Hilfsgröße temporäre Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^{n+1} + \Delta t M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla p^{n+1}$$

Variante I (Euler-Vorwärts-Methode):

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^n - \Delta t \{ -(\vec{v}^n \nabla) \vec{v}^n + M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} (\vec{j}^{n+1} \times \vec{B}) + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta \vec{v}^n + T^n \vec{k} \}$$

Variante II (Adams-Bashfort-Verfahren):

$$\begin{aligned} \vec{v}_{temp} = & \vec{v}^n + \frac{3}{2} \Delta t \{ (\vec{v}^n \nabla) \vec{v}^n - M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} (\vec{j}^{n+1} \times \vec{B}) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta \vec{v}^n - T^n \vec{k} \} \\ & - \frac{1}{2} \Delta t \{ (\vec{v}^{n-1} \nabla) \vec{v}^{n-1} - M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} (\vec{j}^n \times \vec{B}) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta \vec{v}^{n-1} - T^{n-1} \vec{k} \} \end{aligned}$$

- Lösen einer Poissongleichung

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta t} \nabla \vec{v}_{temp}$$

- Bestimmen der Endgeschwindigkeit \vec{v}^{n+1}

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}_{temp} - M^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta t \nabla p^{n+1}$$

C. Auswertung

1. Konvergenztest anhand des Temperaturfeldes
2. Konvergenztest anhand des Geschwindigkeitsfeldes
3. Überprüfung, ob die maximale Anzahl der Zeitschritte erreicht ist
4. Überprüfung, ob genügend CPU-Zeit zum Weiterrechnen vorhanden ist
5. Entweder Rücksprung nach B oder Programmende mit Abspeichern der Daten für die graphische Auswertung und Fortsetzungsrechnungen

4 Physikalische Phänomene

4.1 Konvektion

Konvektion ist der umfassende Begriff für den Energietransport durch eine makroskopische Bewegung von Fluidpartikeln (Kirchartz [47]). Diese Fluidströmungen können durch von außen aufgeprägte Druckgradienten entstehen, man spricht dann von erzwungener Konvektion. Von Naturkonvektion oder auch freien Konvektion ist die Rede, wenn Dichteunterschiede im Schwerfeld der Erde die Ursache für die Bewegung der Fluidpartikel sind. Treten beide Effekte gemeinsam in vergleichbarer Größenordnung auf, ist der Begriff gemischte Konvektion geläufig. In dieser Arbeit werden ausschließlich Mechanismen untersucht, die auf Naturkonvektion zurückzuführen sind. Diese Vorgänge werden schon seit der Jahrhundertwende wissenschaftlich untersucht (z.B. durch Boussinesq, Benard und Lord Rayleigh) und spielen in vielen Disziplinen wie z.B. Meteorologie, Klimaforschung und Wärme- und Stoffübertragung eine bedeutende Rolle.

Wie bereits bekannt, sind Dichteunterschiede im Gravitationsfeld für die Entstehung von Auftriebskräften verantwortlich, die eine Naturkonvektionsströmung antreiben. Diese Dichteunterschiede wiederum werden durch Konzentrations- oder Temperaturgradienten hervorgerufen. Hierbei können zwei Spezialfälle unterschieden werden, der Fall eines horizontalen Gradienten und der Fall eines vertikalen Gradienten. Beide Konstellationen können als Spezialfälle eines ganzen Problemspektrums angesehen werden.

Konzentrieren wir uns zunächst auf den Fall eines horizontalen Gradienten und betrachten das in Abbildung 4.1 skizzierte Modellsystem. Die zweidimensionale Kavität wird seitlich beheizt und gekühlt, die restlichen Wände sind adiabatisch. Folglich wird diesem System ein horizontaler Temperaturgradient von außen aufgeprägt. Schon bei sehr kleinen Temperaturdifferenzen

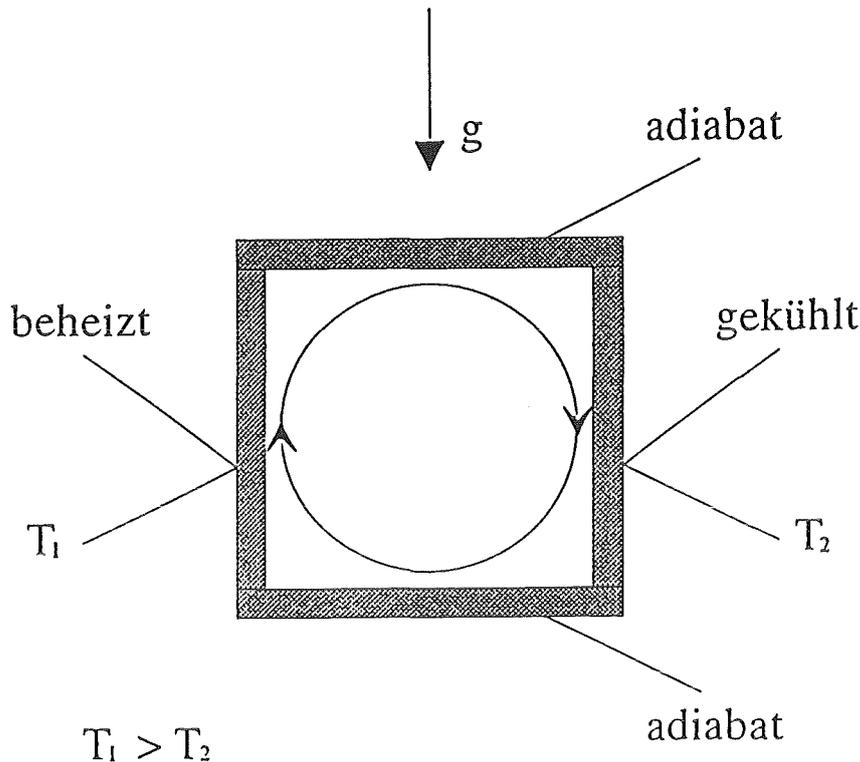


Abbildung 4.1: Modellsystem für einen horizontalen Temperaturgradienten.

wird das Fluid an der beheizten Wand auf- und an der gekühlten Wand absteigen. Dies ist unabhängig von der thermischen Randbedingung der Boden- und Deckwand, selbst bei offenen Systemen ist dieses Verhalten zu beobachten. Ursache dafür sind die Auftriebskräfte, die das System in einen neuen mechanischen Gleichgewichtszustand überführen.

Betrachtet man dagegen Modellsysteme mit vertikalen Temperaturgradienten, wie z.B. die in Abbildung 4.2 skizzierte, in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnte Fluidschicht, ist ein anderes Verhalten festzustellen. Erst wenn die Temperaturdifferenz einen bestimmten Wert überschreitet, setzt die Konvektionsströmung ein. Es liegt ein Stabilitätsproblem vor.

Unterhalb dieser kritischen Temperaturdifferenz wird Wärme ausschließlich durch reine Wärmeleitung von unten nach oben transportiert. Das Temperaturprofil ist linear und im Fluid herrscht Gleichgewicht zwischen Druck- und Gravitationskraft. Bewegt sich ein Fluidteilchen aus seiner Ruhelage infolge einer Störung heraus, wirkt an ihm aufgrund seiner von der Umgebung verschiedenen Dichte eine Auftriebskraft. Diese Kraftwirkung wird jedoch durch den Wärmeaustausch des Fluidteilchens mit der Umgebung reduziert.

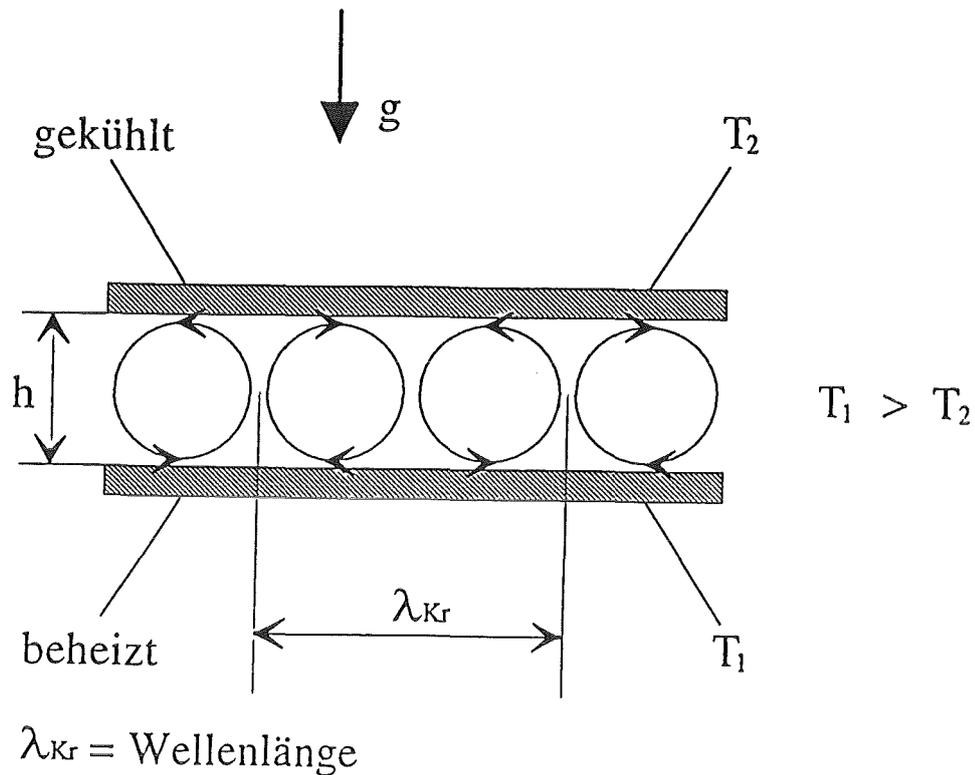


Abbildung 4.2: Die unendlich ausgedehnte, horizontale Fluidschicht als Modellsystem für einen vertikalen Temperaturgradienten.

Die Leistung der am Fluidteilchen wirkenden Reibungskraft ist größer als diejenige der resultierenden Auftriebskraft. Deshalb klingen von außen eingebrachte Störungen mit der Zeit wieder ab. Dieses Verhalten wird als stabil bezeichnet.

Wird die Temperaturdifferenz vergrößert, so wird irgendwann ein Punkt erreicht, an dem die Wirkung der Auftriebskraft nicht mehr durch Reibungskräfte kompensiert werden kann. In diesem Fall werden die Störungen weiter angefacht und die Konvektionsströmung setzt ein.

Anstelle einer dimensionsbehafteten Betrachtung werden in der Strömungslehre oftmals dimensionslose Kennzahlen eingeführt, um die Strömung einfacher beschreiben zu können. Die bereits aus Kapitel 2.2 bekannte dimensionslose Rayleigh-Zahl beinhaltet die Effekte des Auftriebs und der Reibung. Deshalb eignet sie sich ausgezeichnet, um das Einsetzen der Konvektion zu beschreiben. Dieses Einsetzen geschieht dann abhängig von der Art der Berandungen ab einer sogenannten kritischen Rayleigh-Zahl. Für die unendlich ausgedehnte Fluidschicht setzt die Konvektion ab einer Rayleigh-Zahl von $Ra_{krit} = 1708$ ein, wenn beide Berandungen fest sind. Ist eine der beiden

Berandungen frei, reduziert sich diese Grenze auf $Ra_{krit} = 1101$. Sind beide Berandungen frei, fällt diese weiter auf $Ra_{krit} = 658$.

Der Wärmeübergang kann durch das Einsetzen der Konvektion spürbar verbessert werden. Ein Maß für diesen Wärmeübergang stellt die dimensionslose Nusselt-Zahl Nu dar, die wie folgt definiert ist:

$$Nu = \frac{\text{insgesamt übertragene Wärme}}{\text{durch Wärmeleitung übertragene Wärme}} \quad (4.1)$$

Oberhalb der kritischen Temperaturdifferenz bzw. der kritischen Rayleigh-Zahl bilden sich zunächst wohlgeordnete Strömungsmuster aus. Im als Rayleigh-Bénard-Problem bekannten Falle einer unendlich ausgedehnten, horizontalen Fluidschicht (vergleiche Abbildung 4.2) bilden sich nach Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl stationäre, gegenläufige, zweidimensionale Walzen aus, die Konvektionsrollen genannt werden. Die Größe der Rollen beim Einsetzen der Konvektion hängt wiederum von der Art der Berandung ab. Bei festen Berandungen gilt für die Wellenlänge λ_{Kr} der Konvektionsrollen $\lambda_{Kr} = 2.02 h$. Hierbei sei h der Abstand der Berandungen. Die Wellenlänge λ_{Kr} stellt die Erstreckung zweier benachbarter Konvektionsrollen dar (vergleiche Abbildung 4.2). Zur Charakterisierung dieser Länge wird eine sogenannte Wellenzahl α eingeführt. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda_{Kr}} \quad (4.2)$$

Ist eine Berandung frei, werden die Konvektionsrollen etwas breiter und es gilt: $\lambda_{Kr} = 2.34 h$. Verstärkt wird dieser Effekt bei zwei freien Berandungen, folglich wird λ_{Kr} in diesem Fall auf $\lambda_{Kr} = 2.83 h$ vergrößert.

Bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl wird die Strömung zunehmend dreidimensional, aber sie bleibt zunächst noch stationär. Für noch größere Temperaturdifferenzen und damit Rayleigh-Zahlen ergeben sie zeitabhängige, quasiperiodische Strömungsformen und schließlich werden turbulente Strömungen beobachtet. Das genaue Erscheinungsbild der Strömung und die Dauer der jeweiligen Übergangsphasen zur Turbulenz hängen neben der Rayleigh-Zahl auch von der ebenfalls bereits aus Kapitel 2.2 bekannten Prandtl-Zahl ab (Krishnamurti [52]). Detailliertere Betrachtungen zum Thema dieses Abschnitts können Chandrasekhar [10], Gershuni und Zhukhovitskii [27], Müller [63] sowie Zierep und Oertel [98] entnommen werden.

4.2 Magneto hydrodynamische Strömungen

4.2.1 Geschichte der Magneto hydrodynamik

Die Magneto hydrodynamik (MHD) beschreibt Vorgänge in einem elektrisch leitenden Fluid, bei denen die Geschwindigkeit mit einem Magnetfeld gekoppelt ist (Moreau [62]). Im „klassischen“ Fall handelt es sich dabei um eine Zwangskonvektionsströmung, deshalb erfolgt in diesem Abschnitt eine Beschränkung auf diese Problemstellungen. Schon im vorigen Jahrhundert haben sich Forscher mit diesen Phänomenen befaßt. So soll z.B. Faraday bereits 1836 versucht haben, elektrische Potentialdifferenzen bei Strömungen im Erdmagnetfeld nachzuweisen. Trotzdem datieren die ersten theoretischen Lösungsansätze der magneto hydrodynamischen Grundgleichungen auf das Jahr 1937. Zu dieser Zeit veröffentlichte Hartmann, der Begründer der Magneto hydrodynamik in Flüssigmetallen, seine berühmte Arbeit mit dem Titel: " Hg-Dynamics I. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogenous magnetic field " [34] . Darin beschreibt er die voll eingelaufene, laminare, eindimensionale Strömung von Quecksilber im elektrisch isolierten Plattenkanal unter dem Einfluß eines Magnetfelds. Noch im selben Jahr kann Hartmann seine theoretischen Lösungsansätze zusammen mit Lazarus [35] experimentell bestätigen. Chang und Lundgren [11] erweitern diese theoretische Lösung 1961 auf eine eingelaufene MHD-Strömung in einem Kanal aus dünnen, elektrisch leitenden, parallelen Platten. Diese beiden Ergebnisse stellen die einzigen geschlossenen, analytischen Lösungen der Grundgleichungen der MHD dar.

Im Jahre 1953 erscheint eine Arbeit von Shercliff [81], die sich erstmals mit der zweidimensionalen Rohrströmung im isolierten Kanal beschäftigt. Roberts [77] bestätigt 1967 dieses Ergebnis mit Hilfe einer Laplace-Transformation und Branover und Gelfgat [24] weisen die Gültigkeit der Aussagen von Shercliff experimentell für große Hartmann-Zahlen nach. Kleine Hartmann-Zahlen werden 1971 von Kit et al. [49] experimentell untersucht.

Für die zweidimensionale Rohrströmung im ideal leitenden Kanal leiten Chang und Lundgren [11] sowie Uflyand [89] im Jahre 1961 eine analytische Näherungslösung mit Hilfe von Reihenentwicklungen her.

Der zweidimensionale endlich leitende Rechteckkanal wird 1981 von Walker [92] und etwas erweitert 1990 von Tillack [87] behandelt. Beide Autoren bestimmen asymptotische Näherungslösungen.

Auch bei Vorliegen einer Kombination von elektrisch isolierten und elektrisch leitenden Kanalwänden sind in der Literatur Lösungen bekannt. Im Jahre 1965 erscheint erstmals eine Arbeit von Hunt [37] zu diesem Themenkomplex.

Temperley und Todd [86] fassen 1971 in ihrer Arbeit den Kenntnisstand über zweidimensionale Kanalströmungen mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Kanalwände zusammen.

Dreidimensionale MHD-Effekte, die durch Variation des Kanalquerschnitts, des Magnetfelds oder der Wandleitfähigkeit entstehen, werden seit 1967 untersucht.

Für den Fall des veränderlichen Rohrquerschnitts liefern Hunt und Leibovich [39] in diesem Jahre erste Ergebnisse. Walker, Ludford und Hunt [93] sowie Walker [92] untersuchen 1971 bzw. 1981 diese Thematik für elektrisch leitende und elektrisch isolierende Wände. Gleichzeitig führen Kit und Gelfgat [24] 1971 experimentelle Untersuchungen durch und erhalten Ergebnisse, die mit den analytischen Betrachtungen in Einklang stehen.

Eine erste Näherungslösung für den Fall des variablen Magnetfelds wird 1977 von Hunt und Holroyd [40] angeboten. Wiederum ist es Walker [94], der sich 1984 weitergehend mit dieser Problemstellung auseinandersetzt.

Da sich allgemeine Vorgänge bei mehrdimensionalen MHD-Strömungen exakten, analytischen Lösungen vollends entziehen, wird ab Mitte der achtziger Jahre zunehmend versucht, das Gleichungssystem der MHD numerisch zu lösen. Einige Autoren (Madarama und Hagiwari [58], Mc Carthy [60], Lenhart und Mc Carthy [55], Bühler [9]) entschließen sich hierbei für halbnumerische Verfahren. Dabei wird zunächst in Magnetfeldrichtung integriert, um in einem nächsten Schritt nur das entstehende einfachere, zweidimensionale Problem numerisch zu lösen. Diese Verfahren leiden jedoch unter den gleichen Beschränkungen wie die analytischen Näherungsverfahren. Lösungen können mit dieser Methode nur für hohe Hartmann-Zahlen erzielt werden. Meist wird zusätzlich von kleinen magnetischen Reynolds-Zahlen und Wandleitparametern ausgegangen.

Um diesen Restriktionen zu entgehen, wird in jüngster Zeit vermehrt versucht, die allgemeinen, dreidimensionalen, nichtlinearen Differentialgleichungen vollnumerisch zu lösen. Da der Programmier- und Rechenaufwand hierzu jedoch in hohem Maße ansteigt, können oftmals noch nicht alle Beschränkungen mit dieser Vorgehensweise aufgeweicht werden. Vor allem kann zumeist die Hartmann-Zahl nur im Bereich $0 \leq M \leq 200$ variiert werden. Aitov [1] erzielt 1983 mit der vollen numerischen Simulation Ergebnisse bis $M = 30$. Ein paar Jahre später, 1989, können Kim [45] und Sterl [82] den Parameterbereich auf $0 \leq M \leq 100$ erhöhen, und Lenhart [54] berechnet 1994 numerische Lösungen bis zu einer Hartmann-Zahl von $M = 200$.

Auch der Interaktionsparameter N , ein Maß für den Quotienten aus elektrodynamischer Kraft und Trägheitskraft, kann bei der vollnumerischen Lösung oftmals nicht beliebig verändert werden. In der Regel werden ausschließlich für große Interaktionsparameter, oder physikalisch ausgedrückt, für Strömun-

gen ohne Trägheitseinflüsse, physikalisch relevante Ergebnisse berechnet. Erst Lenhart [54] kann 1994 mit Hilfe eines Upwind-Verfahrens 2. Ordnung (LE-CUSSO) diese numerischen Beschränkungen beseitigen und den Interaktionsparameter derart verkleinern, daß erstmals Rechnungen mit signifikantem Trägheitseinfluß durchgeführt werden können.

Schließlich sind die Simulationsprogramme, die vollnumerische Ansätze verfolgen, bis heute auf einfache Geometrien, d.h. rechteckige Kanalquerschnitte, beschränkt.

4.2.2 Charakteristische Grenzschichten

Ein wesentliches Charakteristikum magnetohydrodynamischer Strömungen ist das Auftreten äußerst dünner Grenzschichten. Diese Schichtstrukturen bilden sich dann aus, wenn das Magnetfeld so stark ist, daß die elektrodynamische Kraftwirkung über den Einfluß von Reibungs- und Trägheitskräften dominiert. Nur nahe an den Wänden kann die Wirkung von Reibungskräften nicht vernachlässigt werden. Darüber hinaus muß vorausgesetzt werden, daß das induzierte Magnetfeld gegenüber dem von außen angelegten verschwindend klein ist. Diese Annahme wird in dieser Arbeit getroffen (vergleiche Kapitel 2.1). Da hier nur Strömungen in Rechteckgeometrien betrachtet werden, wird ein Überblick über die in unendlich langen, rechteckigen Kanälen auftretenden Grenzschichten gegeben (siehe Abbildung 4.3). Im Innern eines solchen Kanals findet sich ein Kernbereich, in dem die Einflüsse der Wände keine bedeutende Rolle spielen (Bereich 1 in Abbildung 4.3). Hier stehen vornehmlich elektromagnetische und Druckkräfte im Gleichgewicht. Die Geschwindigkeit ist in diesem Bereich konstant, es bildet sich das für magnetohydrodynamische Strömungen typische abgeflachte Geschwindigkeitsprofil aus.

An Wänden, auf denen eine Komponente des Magnetfeldvektors senkrecht steht, man spricht dann von Hartmannwänden, bilden sich sehr dünne Grenzschichten, die sogenannten Hartmannschichten aus (Bereich 2 in Abbildung 4.3). Für die Dicke δ_H dieser Grenzschichten gilt:

$$\delta_H = O(M^{-1}). \quad (4.3)$$

Diese Schichten können bereits mit der analytischen Lösung für die eindimensionale Plattenkanalströmung nachgewiesen werden (Hartmann [34]). In ihnen fällt die Geschwindigkeit aufgrund der Haftbedingung an den Wänden auf Null ab. Reibungskräfte spielen hier selbstverständlich neben den elektromagnetischen Kräften eine Rolle. Von Bedeutung sind die Hartmannschichten außerdem, weil sich in ihnen vor allem bei Zwangsströmungen die elektrischen Ströme zu schließen pflegen.

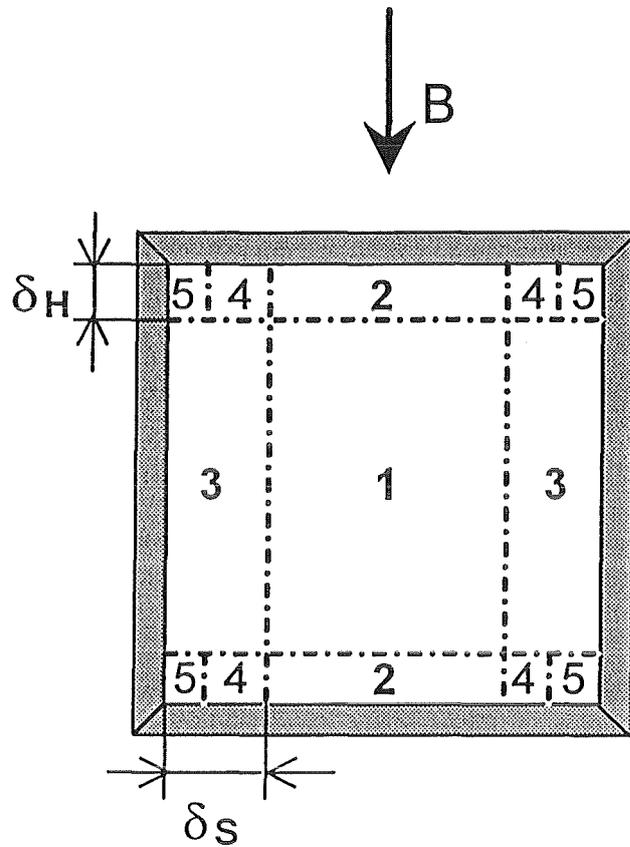
Seitenschichten bilden sich an Wänden parallel zum Magnetfeldvektor (Bereich 3 in Abbildung 4.3). Diese Grenzschichten sind dicker als die Hartmannschichten. Der Zusammenhang

$$\delta_S = O(M^{-\frac{1}{2}}) \quad (4.4)$$

für die Schichtdicke δ_S veranschaulicht dies. Diese Schichten sind für magnetohydrodynamische Strömungen sehr bedeutend, da es hier zu deutlichen Geschwindigkeitsüberhöhungen gegenüber der Geschwindigkeit im Kern kommen kann. Unter Umständen fließt das Fluid sogar fast vollständig in den Seitenschichten. Dieses Phänomen hängt stark von der Leitfähigkeit der Seitenwände ab. Sind diese Wände elektrisch isolierend, muß der im Kernbereich induzierte elektrische Strom in der Seitenschicht parallel zum Magnetfeldvektor fließen, um sich schließen zu können. Dadurch verschwindet hier die hemmende Lorentz-Kraft $\vec{j} \times \vec{B}$ im Gegensatz zum Kern. Nur Reibungskräfte können die Strömung behindern. Deshalb kann es zu gegenüber dem Kern erhöhten Geschwindigkeiten kommen. Nimmt die elektrische Leitfähigkeit der Seitenwände zu, schließt sich ein immer größer werdender Teil des elektrischen Stromes über die Wände. Demzufolge vergrößert sich die Komponente des elektrischen Stromes senkrecht zum Magnetfeldvektor. Deshalb existieren immer stärkere Lorentz-Kräfte in den Seitenschichten und die Geschwindigkeitsüberhöhungen nehmen ab. Bei erzwungenen Kanalströmungen hängt dieses Phänomen zusätzlich von der Leitfähigkeit der restlichen Wände ab (siehe Kapitel 4.2.5).

Bereich 4 in Abbildung 4.3 kennzeichnet ein kleines Gebiet, in dem sich die Hartmann- und Seitenschichten überdecken, und Bereich 5 stellt ein Gebiet nahe der Ecke dar, in dem die Anpassung an die singuläre Ecke erfolgt.

Ändert sich entlang der Strömungsrichtung der Kanalquerschnitt, die Stärke des Magnetfelds oder die Wandleitfähigkeit abrupt, entsteht ein weiterer Typ dünner Grenzschichten, die Scherschichten. Diese Schichten bilden sich immer parallel zum Magnetfeld aus. Hunt und Leibovich [39] zeigen, daß die Ausdehnung dieser Scherschichten im Fall einer Strömung in einem Kanal mit veränderlichem Querschnitt vom Interaktionsparameter abhängen. Für ein intensives Studium dieses Effekts können die Arbeiten von Lenhart [54] und Sterl [82] herangezogen werden. Da diese Strömungen für diese Arbeit keine Relevanz besitzen, wird nicht detailliert darauf eingegangen.



- 1 = Kernbereich
- 2 = Hartmannschicht
- 3 = Seitenschicht
- 4 = Überlappung
Hartmann- / Seitenschicht
- 5 = Eckbereich

δ_H = Dicke der Hartmannschicht

δ_S = Dicke der Seitenschicht

Abbildung 4.3: Grenzschichten in einem Kanalquerschnitt.

4.2.3 Der ideal leitende Kanal

Um die grundlegenden Eigenschaften von magneto hydrodynamischen Strömungen besser verstehen zu können, wird zuerst der Fall einer Zwangsströmung in einem geraden rechteckigen Kanal mit elektrisch ideal leitenden Wänden diskutiert (vergleiche Abbildung 4.4). Diese Strömung steht unter dem Einfluß eines zeitlich und örtlich konstanten Magnetfelds, das senkrecht auf der Strömungsrichtung steht. Aufgrund der Strömung des elektrisch lei-

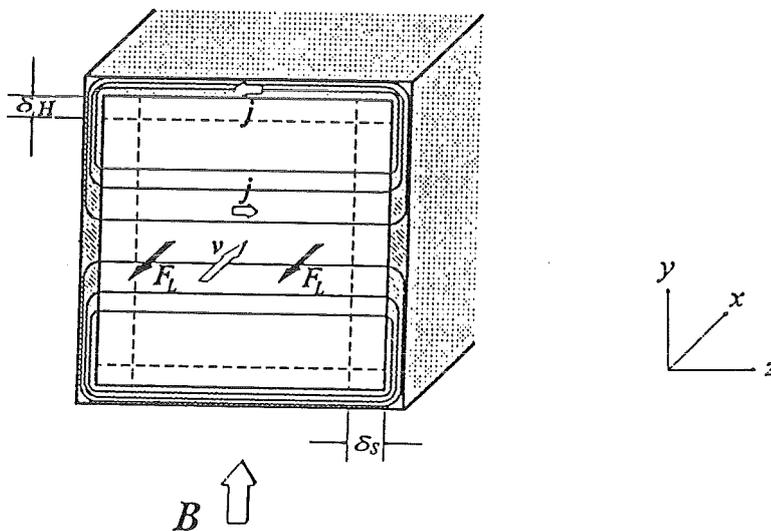


Abbildung 4.4: Der ideal leitende Kanal.

tenden Fluids im Magnetfeld werden elektrische Ströme induziert, die sowohl auf dem Geschwindigkeits- als auch auf dem Magnetfeldvektor senkrecht stehen (siehe Ohmsches Gesetz). Die Richtung dieses Stromes kann mit der Drei-Finger-Regel der rechten Hand ermittelt werden.

Die Stromlinien müssen sich wegen der Quellfreiheit der elektrischen Stromdichte schließen. Im vorliegenden Fall geschieht das über die ideal leitenden Wände, da hier der elektrische Widerstand am geringsten ist (vergleiche auch Abbildung 4.4). In Wechselwirkung mit dem Magnetfeld verursachen diese elektrischen Ströme Lorentz-Kräfte F_L gemäß $F_L = \vec{j} \times \vec{B}$ (Drei-Finger-Regel). Für $M \gg 1$ dominieren diese elektrodynamischen Kraftwirkungen die aus der Hydrodynamik bekannten Kräfte vollkommen. Da die Lorentz-Kräfte entgegen der Strömungsrichtung des Fluids wirken, können sie Druckverluste hervorrufen, die erheblich über den aus der Hydrodynamik gewohnten liegen

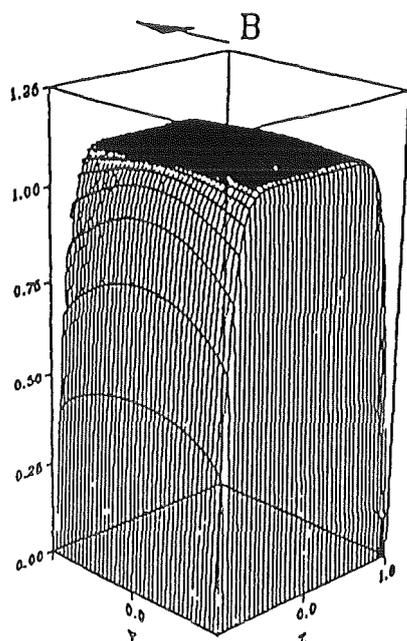
Geschwindigkeit in x -Richtung

Abbildung 4.5: Das abgeflachte Geschwindigkeitsprofil (aus Sterl [82]).

können. Das Geschwindigkeitsprofil flacht sich mit zunehmender Hartmann-Zahl M immer mehr ab, für hohe Hartmann-Zahlen treten Änderungen der Geschwindigkeit nur noch in den dünnen Grenzschichten auf. Dies kann anhand Abbildung 4.5 verdeutlicht werden.

4.2.4 Der endlich leitende Kanal

Wird gegenüber dem vorangehenden Abschnitt von endlich leitenden Kanalwänden ausgegangen (vergleiche Abbildung 4.6), sind weitere, für magnetohydrodynamische Strömungen typische Phänomene beobachtbar. Mit den gleichen Überlegungen wie zuvor kann man erklären, wie elektrische Ströme induziert werden. Allerdings schließen sich diese Ströme nicht mehr ausschließlich über die Kanalwände, sondern auch über die Hartmann- und Seitenschichten. Da sich der elektrische Widerstand gegenüber dem Fall ideal leitender Wände erhöht, reduzieren sich die Stromstärke und damit auch die Lorentz-Kräfte. Folglich ergibt sich auch ein nicht so beträchtlicher Druckabfall.

Durch die veränderte Lage der Stromlinien ergibt sich ein völlig verändertes Verhalten der Fluidströmung. Da nicht alle elektrischen Ströme in die Wand eintreten, sondern auch vor der Wand in den Seitenschichten umge-

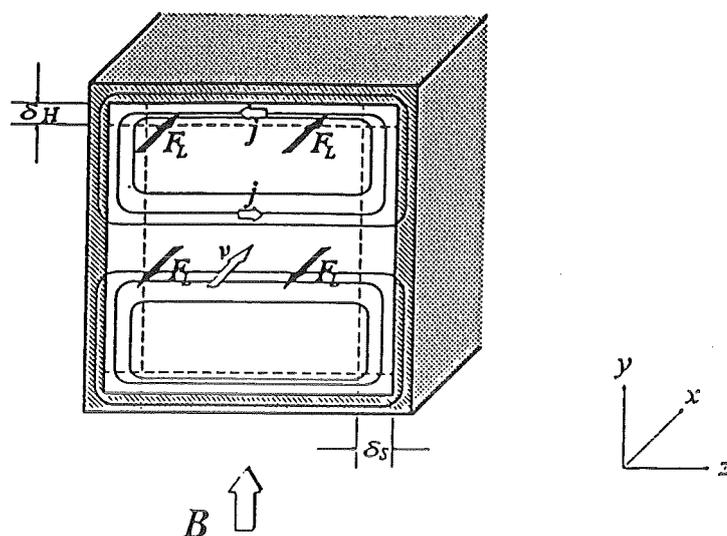


Abbildung 4.6: Der endlich leitende Kanal.

lenkt werden, fließt ein nicht unerheblicher Teil des elektrischen Stromes dort nicht mehr senkrecht zum Magnetfeldvektor. Dadurch verschwindet in den Seitenschichten die hemmende Lorentz-Kraft entgegen der Hauptströmungsrichtung des Fluids. Deshalb weicht das Fluid in die Seitenschichten aus, wodurch es zu deutlichen Geschwindigkeitsüberhöhungen in diesen Grenzschichten kommen kann. Es kommt zur Bildung des sogenannten M-Profiles der Geschwindigkeit (vergleiche Abbildung 4.7). Erstaunlich ist auf den ersten Blick, daß es in den Hartmannschichten nicht ebenso zu solchen Überhöhungen der Geschwindigkeit kommt, zeigt hier doch die Lorentz-Kraft sogar in Strömungsrichtung. Ursache hierfür sind die Reibungskräfte, die in den extrem dünnen Hartmannschichten (vergleiche Kapitel 4.2.2) stets dominieren. Im Kernbereich ist das Geschwindigkeitsprofil nahezu konstant. Die Erklärung findet sich wieder in den im Kern konstant entgegen der Strömung wirkenden Lorentz-Kräften.

Geschwindigkeit in x-Richtung

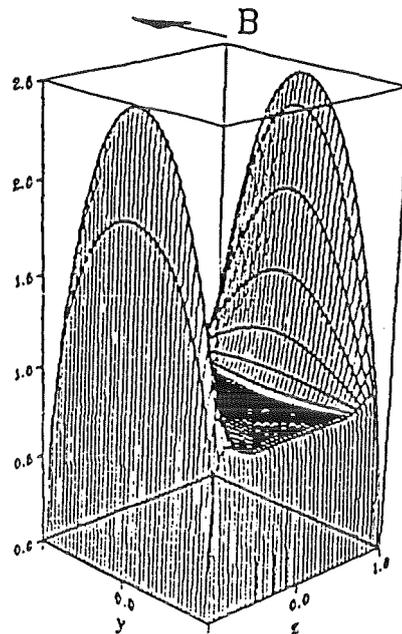


Abbildung 4.7: Das M-Profil der Geschwindigkeit (aus Sterl [82]).

4.2.5 Der isolierte Kanal

Geht man zu elektrisch isolierten Kanalwänden über (siehe Abbildung 4.8), könnte man erwarten, noch stärkere Geschwindigkeitsüberhöhungen in den Seitenschichten zu erhalten, als im Fall endlich leitender Wände, da jetzt überhaupt kein elektrischer Strom mehr durch die Wand fließen kann und somit alle Stromlinien vor der Kanalwand umgelenkt werden. Somit verringert sich die Hemmung der Strömung in den Seitenschichten durch Lorentz-Kräfte noch mehr. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es stellt sich ein abgeflachtes Geschwindigkeitsprofil nach Abbildung 4.5 und ein geringer Druckverlust ein. Eine Begründung kann in der Tatsache gefunden werden, daß in dieser Situation auch kein elektrischer Strom durch die Hartmannwand fließen kann. Dadurch wird der Strom gezwungen, vollständig durch die dünnen Hartmannschichten zu fließen. Diese Grenzschicht kann aber als hoher elektrischer Widerstand interpretiert werden, der die Stärke des induzierten elektrischen Stromes begrenzt. Folglich sind auch die Lorentz-Kräfte im Kernbereich nicht so stark und es besteht kein Grund, in die Seitenschichten auszuweichen.

Behält man die Isolation der Seitenwände bei und läßt elektrisch leitende Hartmannwände zu, bildet sich folgerichtig das charakteristische M-Profil sofort aus, da dadurch der elektrische Widerstand stark abnimmt. Die maximalen Geschwindigkeitsüberhöhungen treten bei Kanalströmungen immer

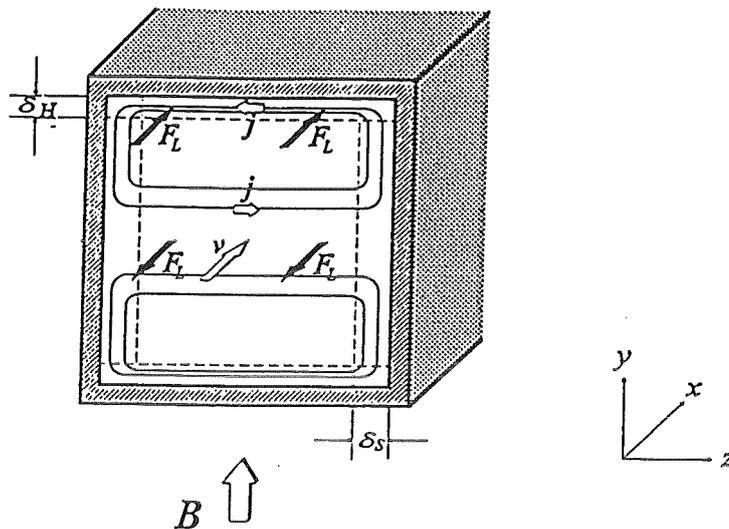


Abbildung 4.8: Der elektrisch isolierte Kanal.

dann auf, wenn die Seitenwände elektrisch isoliert und die Hartmannwände perfekt leitend sind.

4.2.6 Zusammenfassende Bemerkungen

Magneto hydrodynamische Strömungen werden durch elektrodynamische Kraftwirkungen dominiert. Infolgedessen bilden sich Strömungsprofile aus, die starke Abweichungen von den aus der Hydrodynamik bekannten aufweisen können. Vor allem Geschwindigkeitsüberhöhungen an Wänden parallel zum Magnetfeldvektor sind typisch für diese Strömungen. Im Kernbereich ist die Geschwindigkeit zumeist konstant. Druckverluste liegen gewöhnlich deutlich über denjenigen der Hydrodynamik. Will man MHD-Strömungen verstehen, muß man zuerst Kenntnisse über die Strompfade erlangen. Die induzierten elektrischen Ströme erhält man aus dem Geschwindigkeitsvektor und dem Magnetfeldvektor gemäß dem Ohmschen Gesetz. Aufgrund der Quellfreiheit des elektrischen Stromes werden sich die Stromlinien schließen. Die Art des Stromschlusses ist nicht immer sofort aus der Anschauung zu erkennen, hier kann die numerische Simulation ein wertvolles Hilfsmittel sein. Sind die Strompfade bekannt, kann man mit Hilfe der Drei-Finger-Regel ($F_L = \vec{j} \times \vec{B}$) die Wirkungsweise der Lorentz-Kräfte erkennen.

4.3 Naturkonvektion unter Magnetfeldeinfluß

4.3.1 Bisheriger Kenntnisstand

Zum Thema Naturkonvektionsströmungen unter Magnetfeldeinfluß wird zum ersten Mal im Jahre 1962 eine experimentelle Arbeit veröffentlicht (Lykoudis [57]). In den darauf folgenden Jahrzehnten wird diese Thematik mit wachsender Intensität untersucht. Dabei werden sowohl analytische Studien als auch experimentelle Untersuchungen sowie zwei- und dreidimensionale numerische Simulationsrechnungen vorgestellt. Die älteren Arbeiten im Zeitraum bis 1976 umfassen zumeist Ergebnisse aus Experimenten (Lykoudis [57], Pappaliou und Lykoudis [71]) sowie analytischen Untersuchungen (Emery [94], Wilks [96]), wogegen ab 1979 erstmals zweidimensionale numerische Rechnungen durchgeführt werden (Seki, Kawamura und Sanokawa [80]). Neun Jahre später, 1988, erscheint die erste Arbeit, die dreidimensionale numerische Ergebnisse präsentiert (Gelfgat [25]). Aufgrund der spezifischen Besonderheiten von experimentellen Untersuchungen und numerischen Studien werden bis heute in der Regel stark voneinander abweichende Parameterbereiche abgedeckt. Vergleiche der Ergebnisse gestalten sich nach wie vor sehr schwierig (siehe Abbildung 4.9). Diese Problematik wird zusätzlich dadurch verschärft, daß analytische Studien wiederum meist andere Aufgabenstellungen betrachten als Experimente und Simulationsrechnungen. Analytische Studien untersuchen meist vertikale Temperaturgradienten, während in Experimenten und numerischen Rechnungen horizontale Temperaturgradienten bevorzugt werden.

Die analytischen Studien befassen sich zumeist mit der vertikalen halbunendlichen Platte (z.B. Antimirov et al. [3]) und dem rechteckigen Behälter (Garandet, Alboussiere und Moreau [23]). Oftmals erfolgt aus Gründen der Vereinfachung eine Beschränkung auf zweidimensionale Problemstellungen, wobei nur leicht überkritische Parameterbereiche untersucht werden. Standardmäßig wird mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse eine Anordnung mit einem vertikalen Temperaturgradienten und einem Magnetfeld parallel zum Schwerkraftvektor untersucht, um Werte für die kritischen Parameter zu erhalten. Vereinzelt werden jedoch schon Mittel nichtlinearer Stabilitätsanalysen eingesetzt (Weiss [95]). Ausführliche Grundlageninformationen bieten die Werke von Chandrasekhar [10] sowie Gershuni und Zhukhovitskii [27]. Weitergehende allgemeine Informationen liefern Proctor und Weiss in ihrer Arbeit mit dem Titel 'Magnetoconvection' [75].

Experimentelle Untersuchungen beschäftigen sich nahezu allesamt mit

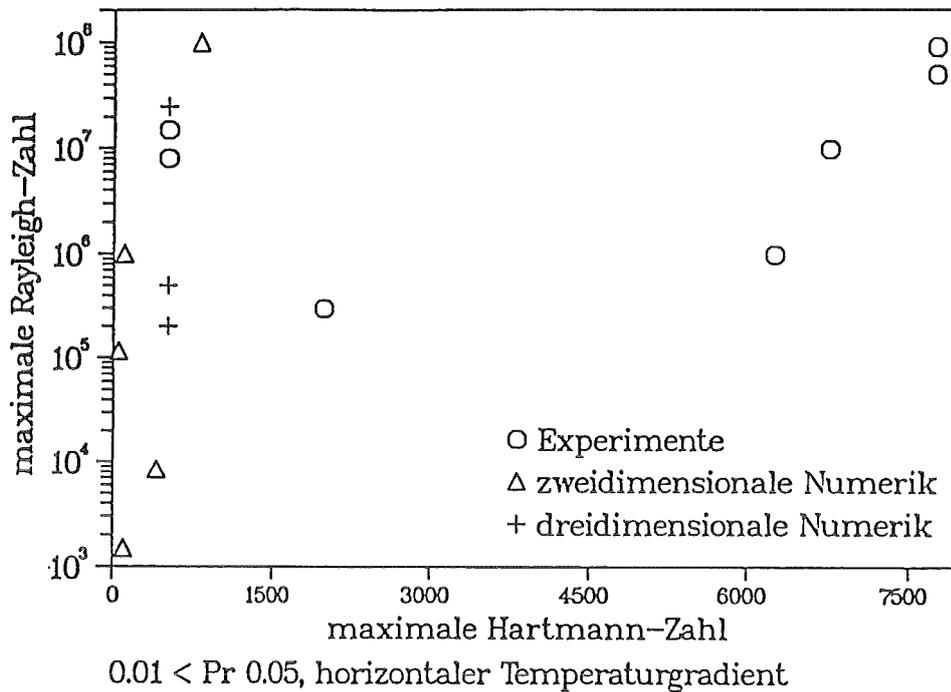


Abbildung 4.9: Die durch Experimente und numerische Rechnungen abgedeckten Parameterbereiche.

Strömungen in Kavitäten, bei denen die Konvektion durch einen horizontalen Temperaturgradienten hervorgerufen wird. Die Seitenwände sind meist adiabatisch und elektrisch isolierend. Hierbei interessiert in der Regel die Steuerung der Strömung in einer Metallschmelze mit Hilfe eines Magnetfeldes (Gorbunov und Boyarevich [31]). Vor allem Oszillationen der Geschwindigkeiten im Strömungsfeld sollen durch ein horizontales oder vertikales Magnetfeld wirkungsvoll unterdrückt werden. Die für diese Experimente bevorzugt verwendeten Flüssigmetalle sind Natrium-Kalium, Lithium und Gallium. Einflüsse eines beliebig im Raum orientierten Magnetfeldvektors werden nicht untersucht. Die Hartmann-Zahlen, bei denen die Experimente durchgeführt werden, liegen in der Größenordnung $M=7000$ und die dazugehörigen Rayleigh-Zahlen erstrecken sich in Bereiche bis $Ra = 5 \cdot 10^7$. Die Prandtl-Zahl $Pr = 0.01$ ist die für die meisten Experimente charakteristische Kennzahl.

Auch die numerischen Simulationsrechnungen behandeln nahezu ausschließlich diejenigen Problemstellungen, bei denen die Konvektionsströmung durch einen horizontalen Temperaturgradienten generiert wird. Die Randbedingungen und die untersuchten Richtungen des Magnetfeldes stimmen mit denen der Experimente überein. Zweidimensionale Untersuchungen haben für ein vertikales Magnetfeld Seki, Kawamura und Sanokawa [80], Gorbunov und Boyarevich [32], Gorbunov und Lyumkis [30] sowie Garandet und Al-

boussiere [22] durchgeführt. Mit horizontalen Magnetfeldern beschäftigt sich Scherbinin [79], wobei sogar induzierte Magnetfelder berücksichtigt werden. Sowohl vertikale als auch horizontale Magnetfelder lassen Ozoe und Maruo [68] sowie Oreper und Szekely [67] zu.

Dreidimensionale Rechnungen sind für Magnetfeldrichtungen parallel und senkrecht der Gravitation durch Gelfgat [25], [26] in den Jahren 1988 und 1990 sowie Ozoe und Okada [69] im Jahre 1989 gewagt worden. Durch vertikale Temperaturgradienten angetriebene Konvektionsströmungen untersuchen Clever und Busse [12], [13] für horizontale und vertikale Magnetfelder bei äußerst niedrigen Rayleigh- und Hartmann-Zahlen.

Das am häufigsten verwendete numerische Verfahren ist das Finite-Differenzen-Verfahren. Es wird aber auch das Finite-Element-Verfahren sowie die Methode von Galerkin benützt. Vereinzelt wird schon auf nichtäquidistante Gitter zurückgegriffen. Der untersuchte Parameterbereich weicht entscheidend von demjenigen der Experimente ab. Die Prandtl-Zahl liegt meist im Bereich $0.02 \leq Pr \leq 1$ und ist damit etwas höher als die Prandtl-Zahl der Experimente. In manchen Arbeiten gilt aber durchaus $Pr \approx 1$ (Venkatalachappa und Subbaraya [90]). Aufgrund der Tatsache, daß die äußerst dünnen Hartmannschichten einigermaßen gut aufgelöst werden müssen, ergeben sich bei äquidistanten Gittern Probleme mit der daraus resultierenden hohen Anzahl von Gitterpunkten. Deshalb können in der Regel Rechnungen nur bis zu einer Hartmann-Zahl von $M=400$ durchgeführt werden. Meistens wird sogar nur bis zu einer Hartmann-Zahl von $M=100$ gerechnet. Die maximal erreichbare Rayleigh-Zahl liegt bei $Ra = 10^7$ und damit in durchaus mit Experimenten vergleichbaren Dimensionen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei Vorliegen eines horizontalen Temperaturgradienten für adiabate und elektrisch isolierende Wände einige zumindest qualitativ brauchbare experimentelle und numerische Ergebnisse existieren, wenn das Magnetfeld entweder parallel oder senkrecht zur Gravitation steht. Diese Ergebnisse sind zumeist für einen Kubus oder zweidimensional für ein quadratisches Rechenggebiet erzielt worden. Noch nicht durchgeführt worden sind Untersuchungen bei horizontalen Temperaturgradienten mit Variationen der thermischen und elektrischen Randbedingungen sowie der Magnetfeldrichtung. Für vertikale Temperaturgradienten sind weder experimentelle noch numerische Ergebnisse bei geschlossenen Behältern verfügbar. Der Einfluß von inneren Wärmequellen oder einer Schiefstellung des Behälters ist generell noch nicht berücksichtigt worden.

4.3.2 Die Rayleigh-Bénard Instabilität mit Magnetfeldeinfluß

Im allgemeinen stabilisiert die Einwirkung eines starken Magnetfeldes die Konvektionsströmung eines elektrisch leitenden Fluids. Dadurch werden in der Regel die Umschlagsgrenzen zu instationären und später zu turbulenten Strömungen verschoben. Dies beruht darauf, daß jede Störung elektrische Ströme induziert, deren Energie durch Joulsche Wärme dissipiert wird. Nicht in jedem Fall jedoch wirkt ein Magnetfeld stabilisierend, es kann auch die gegenteilige Wirkung beobachtet werden. Dies wird in dieser Arbeit in Kapitel 6.2 noch gezeigt werden.

Um die stabilisierende Wirkung eines Magnetfeldes auf eine Naturkonvektionsströmung zu verdeutlichen, wird in diesem Abschnitt der Einfluß eines Magnetfeldes parallel zur Gravitation auf die von Rayleigh und Bénard untersuchte Anordnung einer unendlich ausgedehnten, horizontalen Fluidschicht, die von unten beheizt wird, untersucht (vergleiche Abbildung 4.2 in Kapitel 4.1). Dabei wird zusätzlich vorausgesetzt, daß diese Fluidschicht elektrisch leitend ist. Diese Analyse kann detailliert bei Gershuni und Zhukhovitskii [27] und Moreau [62] studiert werden.

Interessiert man sich ausschließlich für die Stabilitätsgrenze, ab der die Konvektionsströmung einsetzt, erhält man ein Problem, das durch zwei dimensionslose Ähnlichkeitsparameter beschrieben werden kann. Diese dimensionslosen Kennzahlen sind die Rayleigh- und die Hartmann-Zahl. Für eine Hartmann-Zahl von $M=0$ erhält man das klassische Rayleigh-Bénard-Problem.

Eine lineare Stabilitätsanalyse des Problems mit Magnetfeldeinfluß führt auf die Gleichung

$$Ra_{krit}^* = \frac{\pi^2 + \alpha^2}{\alpha^2} [(\pi^2 + \alpha^2)^2 + \pi^2 M^2] \quad (4.5)$$

für die kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit}^* in Abhängigkeit von Wellen-Zahl α (Definition siehe Kapitel 4.1) und Hartmann-Zahl M (Gershuni und Zhukhovitskii [27]). Für ein bestimmtes α_{krit} ergibt sich aus Gleichung (4.5) eine minimale kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit} . Unter der Voraussetzung $M \rightarrow \infty$ lassen sich die Beziehungen

$$Ra_{krit} \rightarrow \pi^2 M^2 \quad , \quad \alpha_{krit} \rightarrow \left(\frac{\pi^4}{2}\right)^{\frac{1}{6}} M^{\frac{1}{3}} \quad (4.6)$$

herleiten. Der stabilisierende Einfluß eines Magnetfeldes geht aus den Beziehungen (4.6) deutlich hervor, steigt doch die kritische Rayleigh-Zahl mit dem

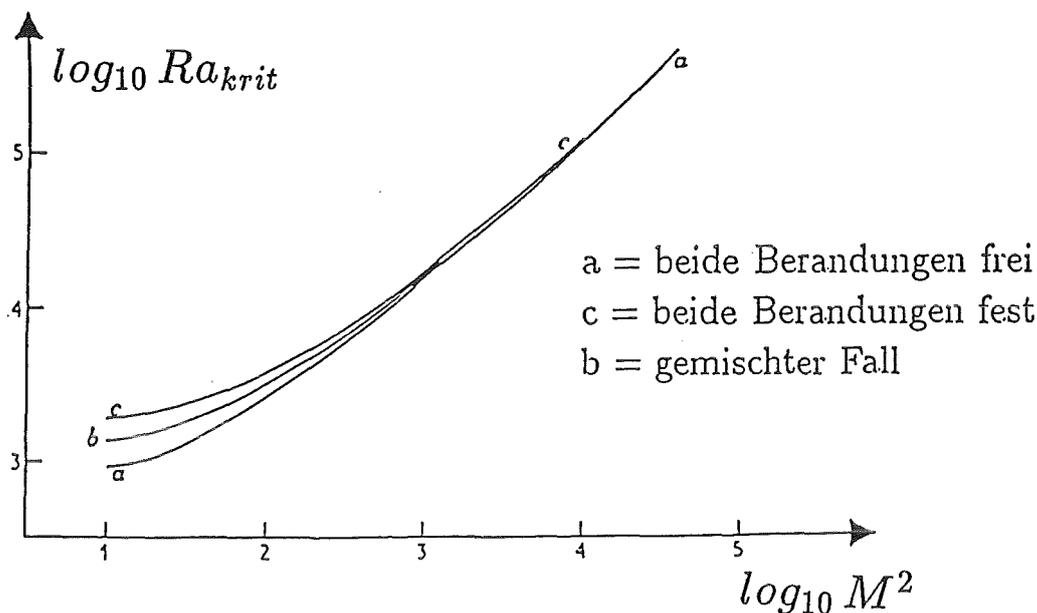


Abbildung 4.10: Die kritische Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit der Hartmann-Zahl für verschiedene Randbedingungen.

Quadrat der Hartmann-Zahl an. Für $M = 100$ liegt die kritische Rayleigh-Zahl demnach bereits bei $Ra_{krit} \approx 10^5$. Dieser Wert liegt bereits zwei Größenordnungen über dem Wert ohne Einfluß eines Magnetfelds. In Abbildung 4.10 ist die kritische Rayleigh-Zahl für verschiedene Arten der Berandung als Funktion der Hartmann-Zahl dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die kritische Rayleigh-Zahl nur für kleine Hartmann-Zahlen von der Art der Berandungen abhängt. Für hohe Hartmann-Zahlen fallen alle Kurven zusammen. Dies kann dadurch erklärt werden, daß bei starken Magnetfeldern jede Fluidbewegung quer zu den magnetischen Feldlinien unterdrückt wird. Deshalb werden zunehmend zelluläre Störungen mit kleinen horizontalen Abmessungen angefacht. Diese Störungen werden von der Art der horizontalen Berandungen nur schwach beeinflusst.

Da die Beziehungen (4.6) unter der Voraussetzung $M \rightarrow \infty$ hergeleitet werden, können sie unterhalb einer bestimmten Hartmann-Zahl nicht mehr angewendet werden. Diese Grenze liegt ungefähr bei $M=80$. Erreicht man Hartmann-Zahlen unterhalb dieser Grenze, wird die kritische Rayleigh-Zahl durch die Beziehungen (4.6) zu stark unterschätzt. Zuverlässige Werte für die kritischen Rayleigh-Zahlen im Bereich $M < 80$ können Chandrasekhar [10] entnommen werden.

Gestalt und Breite der Konvektionsrollen sind eine Funktion der Hartmann-

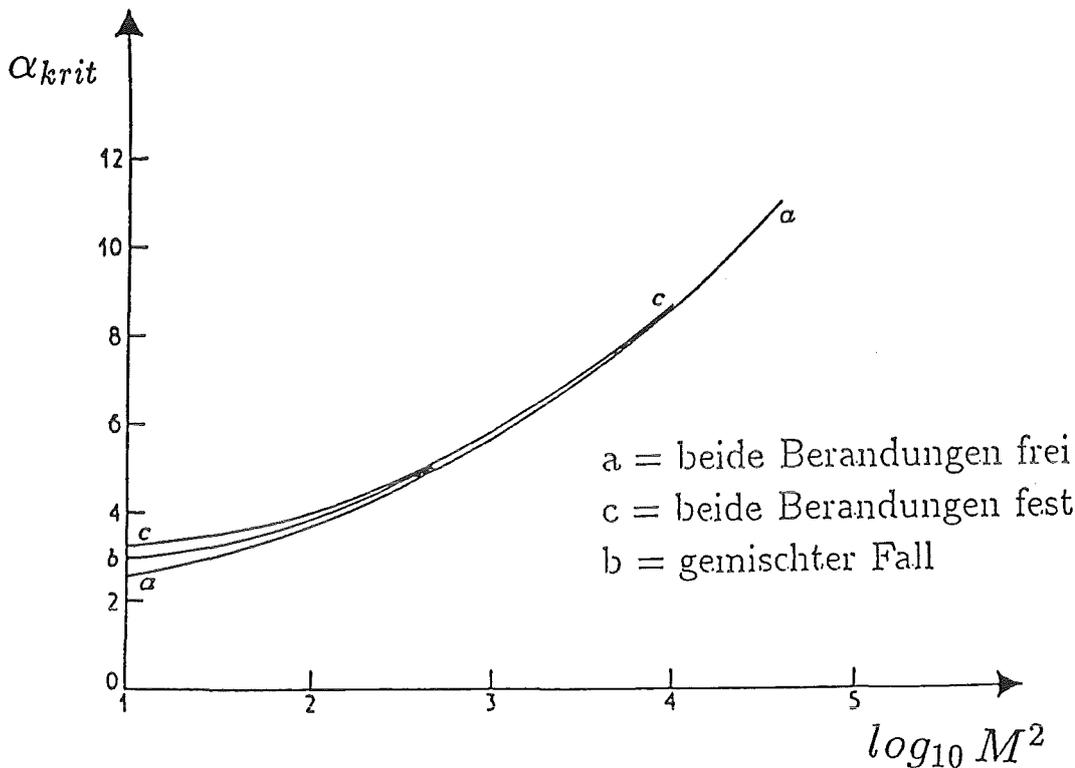


Abbildung 4.11: Die kritische Wellen-Zahl α in Abhängigkeit der Hartmann-Zahl für verschiedene Randbedingungen.

Zahl. Die kritische Wellen-Zahl α_{krit} verändert sich proportional zu $M^{\frac{1}{3}}$ (vergleiche Abbildung 4.11). Dies bedeutet, daß die Konvektionsrollen mit zunehmender Hartmann-Zahl immer schmäler werden, da die Wellenlänge λ_{Kr} bei steigender Wellenzahl abnimmt. Gleichzeitig wird ihre Form bei größeren Hartmann-Zahlen immer eckiger. Die Art der Berandung hat wie schon bei der kritischen Rayleigh-Zahl nur für kleine Hartmann-Zahlen einen Einfluß auf die Wellenzahl und damit auf die Breite der Konvektionsrollen.

Experimentelle Untersuchungen von Nakagawa [64], [65], aus den Jahren 1957 bis 1959, bestätigen die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse sowohl in Hinblick auf die kritische Rayleigh-Zahl als auch in Bezug auf Größe und Form der Konvektionsrollen. Chandrasekhar [10] liefert eine zusammenfassende Darstellung dieses Sachverhalts.

5 Validierung des Programms

5.1 Testrechnungen ohne Magnetfeldeinfluß

5.1.1 Zweidimensionale Testrechnungen

In einem ersten Schritt zur Validierung des Programmes wird eine von J. P. Jones und G. de Vahl Davis [17] vorgeschlagene Vergleichsrechenaufgabe (Benchmark-Problem) herangezogen. Hierbei wird eine zweidimensionale Konvektionsströmung in einem quadratischen Rechengebiet betrachtet, wobei die Beheizung und die Kühlung seitlich erfolgt. Die restlichen Wände sind adiabat (siehe Abbildung 5.1).

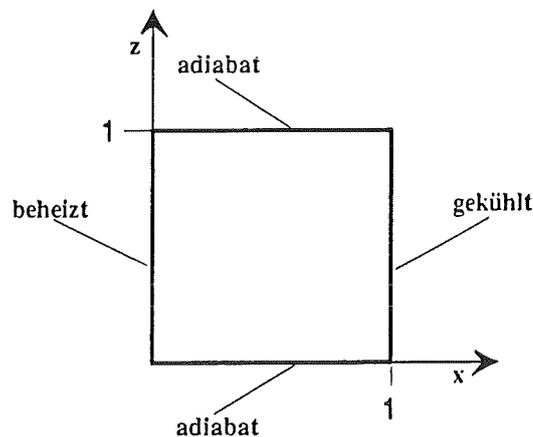


Abbildung 5.1: Skizze zur untersuchten Problemstellung.

Für eine Prandtl-Zahl von $Pr = 0.71$ und die Rayleigh-Zahlen $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ und 10^6 sollen folgende Größen bestimmt werden:

Ra	10 ³		10 ⁴		10 ⁵		10 ⁶	
	BMS	Mößner	BMS	Mößner	BMS	Mößner	BMS	Mößner
$\frac{u_{max}}{w_{max}}$	0.987	0.988	0.824	0.826	0.506	0.502	0.295	0.295
z_{umax}	0.813	0.810	0.823	0.820	0.855	0.860	0.850	0.850
x_{wmax}	0.178	0.180	0.119	0.120	0.066	0.070	0.038	0.040
Nu_{max}	1.505	1.508	3.528	3.516	7.717	7.890	17.925	18.620
z_{Numax}	0.092	0.090	0.143	0.140	0.081	0.080	0.038	0.040
Nu_{min}	0.692	0.692	0.586	0.591	0.729	0.744	0.989	1.004
z_{Numin}	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
\overline{Nu}	1.118	1.119	2.243	2.240	4.519	4.601	8.800	9.060

Tabelle 5.1: Vergleich eigener Rechnungen mit der Referenzlösung. Hierbei steht BMS für benchmark solution.

- Die minimale, maximale und durchschnittliche Nusselt-Zahl an der warmen Wand sowie deren Ort, wobei die durchschnittliche Nusselt-Zahl wie folgt definiert ist: $\overline{Nu} = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dz$,
- die maximale Vertikalgeschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene und deren Ort,
- die maximale Horizontalgeschwindigkeit in der vertikalen Mittelebene und deren Ort.

Für die eigenen Rechnungen wird ein äquidistantes Rechengitter mit einer Schrittweite $\Delta x = \Delta z = 0.01$ in beiden Koordinatenrichtungen verwendet. Dies führt zu jeweils 100 Punkten in Koordinatenrichtung. Die dimensionslose Zeitschrittweite wird auf $\Delta t = 5 * 10^{-4}$ festgesetzt. Da nur die konvergenten Endergebnisse von Interesse sind, wird als Verfahren zur Diskretisierung der Zeit die Euler-Vorwärts-Methode eingesetzt. Im Ort findet das Zentrale-Differenzen-Verfahren Anwendung. Lassen die numerischen Stabilitätskriterien dies nicht mehr zu, wird in einer Art hybridem Verfahren auf das LECUSSO-Verfahren umgeschaltet. Stellt man die mit MAKON ermittelten Ergebnisse der Vergleichslösung gegenüber (siehe Tabelle 5.1), so ist eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen. Die relativen Abweichungen zwischen den einzelnen Lösungen liegen selbst bei hohen Rayleigh-Zahlen

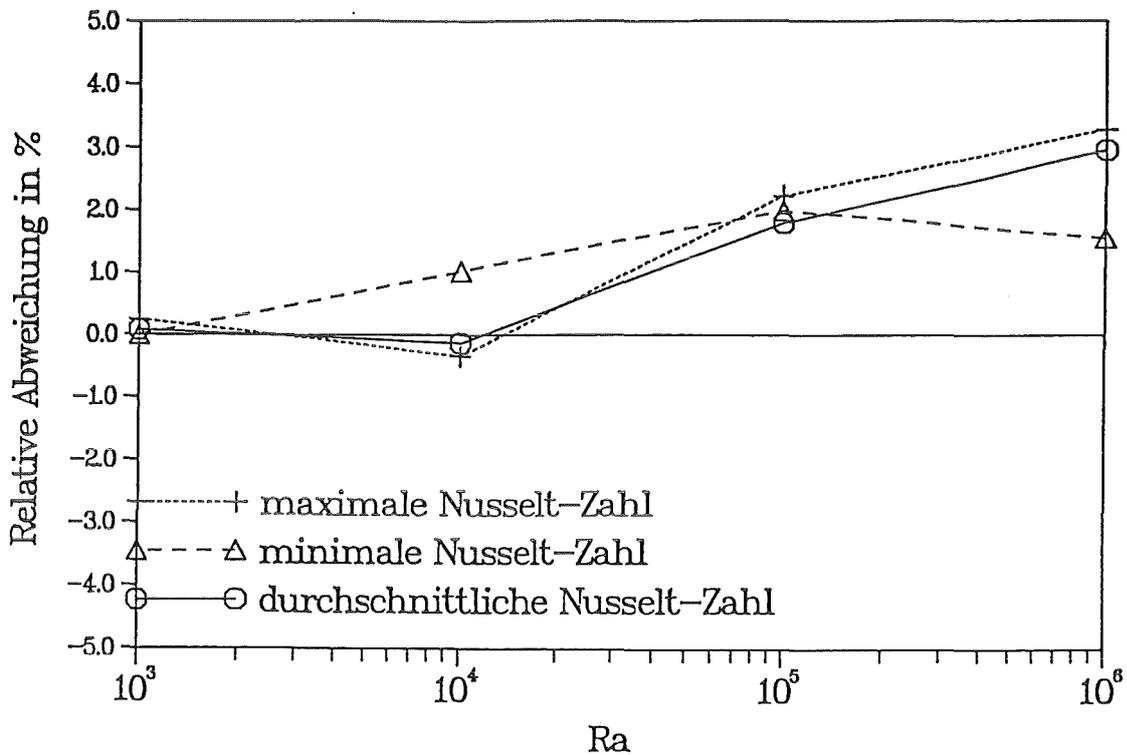


Abbildung 5.2: Die relative Abweichung der berechneten Nusselt-Zahlen von der Vergleichslösung.

noch unterhalb drei Prozent. Bei kleineren Rayleigh-Zahlen reduzieren sich diese Abweichungen auf Bereiche um 0.1 Prozent (Abbildung 5.1.1). Die absoluten Abweichungen, die sich bei der Ortsangabe der jeweiligen Nusselt-Zahlen ergeben, sind kleiner als der halbe Abstand zwischen zwei Gitterpunkten. Dies beweist, daß die Ortsangaben für das verwendete Maschengitter korrekt sind.

5.1.2 Dreidimensionale Testrechnungen

Um die Testrechnungen auf dreidimensionale Strömungen auszudehnen, bietet sich das von Kirchartz [47] in seiner Habilitationsschrift untersuchte Modellsystem an. Bei dieser Problemstellung wird ein Kubus von unten beheizt und von oben gekühlt. Die Seitenwände sind wahlweise entweder perfekt wärmeleitend oder adiabat. Kirchartz gibt für perfekt leitende Seitenwände fünf stationäre Lösungstypen an, die sich in Abhängigkeit von Rayleigh-Zahl und Aufheizgeschwindigkeit einstellen (siehe Abbildung 5.3). Bei einer Prandtl-Zahl von $Pr = 0.71$ gibt Kirchartz die Umbildung der Lösungstypen für perfekt leitende Seitenwände an, wenn die Rayleigh-Zahl von $Ra = 2 \cdot 10^4$ bis auf $Ra = 4 \cdot 10^5$ erhöht wird (siehe Tabelle 4.1.1). Voraussetzung für das Einstellen dieser Strömungsformen ist, daß die Rayleigh-Zahlen quasistationär verändert werden. Ist dies nicht der Fall, wird immer Lösungstyp V erreicht.

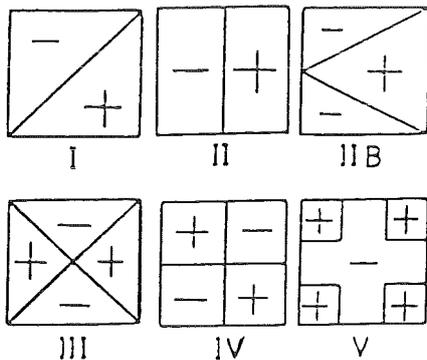


Abbildung 5.3: Klassifizierung der Lösungen zur Konvektion in quaderförmigen Volumina. Die Heizung erfolgt von unten. Ein + steht für Auftriebsströmungen, ein - für Abtriebsbewegungen.

Ra	Lösungstyp
$2 \cdot 10^4$	I
$4 \cdot 10^4$	II
$7 \cdot 10^4$	IIB
10^5	III
$2 \cdot 10^5$	IV
$4 \cdot 10^5$	V

Tabelle 4.1.1: Angabe des Lösungstyps, der sich bei der jeweiligen Rayleigh-Zahl nach quasistationärer Aufheizung ergibt.

Die eigenen Rechnungen zu diesem Modellsystem zeigen vollkommene Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Kirchartz. Wird die Rayleigh-Zahl instationär erhöht, so wird auch schon für niedrige Rayleigh-Zahlen der Lösungstyp V berechnet. Um sicherzustellen, daß eine instationäre Erhöhung vorliegt, wird bei diesen Testrechnungen innerhalb des ersten Zeitschrittes die Rayleigh-Zahl von Null auf die endgültige Rayleigh-Zahl gesetzt. Bei den Rechnungen, bei denen die endgültige Rayleigh-Zahl quasistationär erreicht werden muß, tritt selbstverständlich das Problem auf, daß man vorher nicht

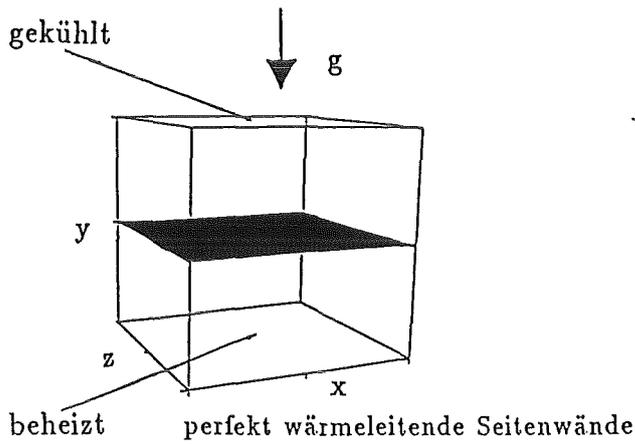


Abbildung 5.4: Das Modellsystem mit vertikaler Mittelebene. Alle folgenden Darstellungen zeigen bei $Pr = 0.71$ die vertikale Geschwindigkeit in dieser Ebene.

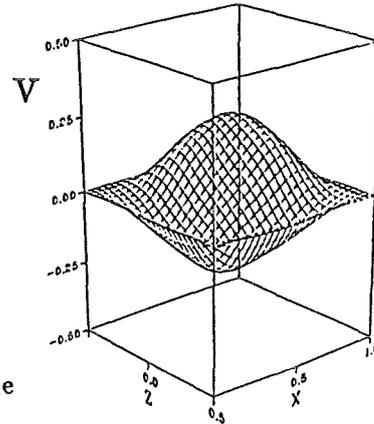


Abbildung 5.5: Lösungstyp I bei $Ra = 2 * 10^4$.

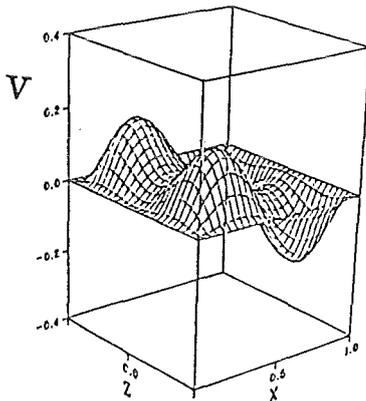


Abbildung 5.6: Lösungstyp II bei $Ra = 4 * 10^4$.

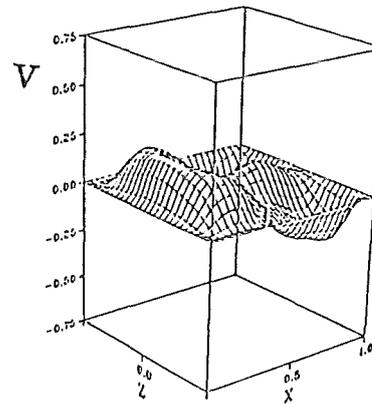


Abbildung 5.7: Lösungstyp IIB bei $Ra = 7 * 10^4$.

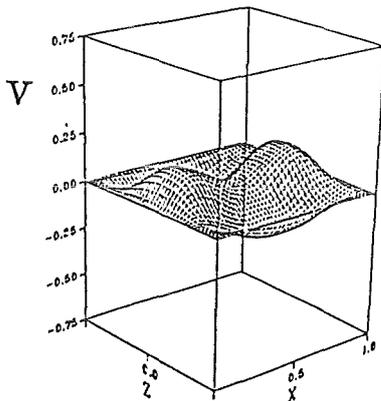


Abbildung 5.8: Lösungstyp III bei $Ra = 10^5$.

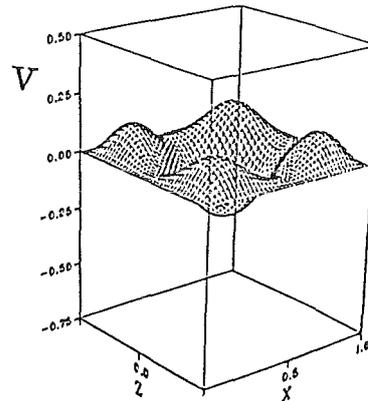


Abbildung 5.9: Lösungstyp V bei $Ra = 4 * 10^5$.

weiß, wie langsam die Rayleigh-Zahl zu erhöhen ist, um immer eine quasistationäre Strömung zu beobachten. Auch Kirchartz macht hierzu wenig Angaben. Hinzu kommt, daß das diffusive Zeitschrittlimit bei den hier verwendeten expliziten Verfahren direkt vom Wert der Rayleigh-Zahl abhängt. Für sehr kleine Rayleigh-Zahlen ist die Beschränkung des maximal wählbaren Zeitschritts so gravierend, daß Rechnungen unmöglich sind. Um dieses Problem zu umgehen, wird bei den Testrechnungen die Rayleigh-Zahl instationär erhöht und eine thermische Anfangsbedingung derart vorgegeben, daß der gewünschte Lösungstyp begünstigt wird. Im weiteren Verlauf der Rechnung wird dann überprüft, ob sich bei dieser Rayleigh-Zahl eine stationäre Lösung mit dem gewünschten Lösungstyp einstellt. Ist dies der Fall, so ist gezeigt, daß der jeweilige Lösungstyp eine zeitlich stabile Strömungsform bei der getesteten Rayleigh-Zahl ist. Wie in den Abbildungen 5.5 bis 5.9 zu sehen ist, können mit der zuvor beschriebenen Methode die von Kirchartz für eine quasistationäre Erhöhung der Rayleigh-Zahl vorhergesagten Lösungstypen I, II, IIB und III numerisch bestätigt werden.

Alle Rechnungen werden zuerst mit einer äquidistanten Gitterweite von $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.04$ durchgeführt. Da die Seitenlängen des Behälters auf Eins normiert sind, hat dies $25 \times 25 \times 25$ Gitterpunkte zur Folge. Um sicherzustellen, daß der Lösungstyp unabhängig vom verwendeten Maschengitter ist, werden die Rechnungen auf einem feineren Gitter mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.025$ wiederholt. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Gitterpunkte auf $40 \times 40 \times 40$ Punkte. Alle berechneten Lösungen erweisen sich jedoch als gitterunabhängig.

Es fällt auf, daß es im Bereich $2 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 2 \cdot 10^5$ mit steigender Rayleigh-Zahl immer länger dauert, bis eine konvergente Lösung erreicht werden kann. Deshalb wird darauf verzichtet, Lösungstyp IV bei $Ra = 2 \cdot 10^5$ zu bestätigen. Anders verhält sich der Lösungstyp V, der sich trotz noch höherer Rayleigh-Zahl als sehr stabil erweist. Dies mag erklären, warum sich dieser Lösungstyp bei instationärer Erhöhung der Rayleigh-Zahl in allen untersuchten Parameterbereichen durchsetzt.

5.2 Testrechnungen mit Magnetfeldeinfluß

5.2.1 Berechnung kritischer Rayleigh-Zahlen

Um einen weiteren Test des Programmes durchzuführen, werden zuerst kritische Rayleigh-Zahlen beim Rayleigh-Bénard Problem mit Magnetfeldeinfluß berechnet. Es wird eine unendlich ausgedehnte, horizontale Fluidschicht nach Abbildung 4.2 in Kapitel 4.1 betrachtet, die von unten beheizt und von

M	31		100	
Δt	$5 * 10^{-3}$	$2 * 10^{-3}$	$5 * 10^{-3}$	$2 * 10^{-3}$
Δx	0.04	0.02	0.04	0.02
Δy	0.025	0.02	0.025	0.02
Δz	0.10	0.10	0.10	0.10
Ra_{krit}	$3.00 * 10^4$	$1.85 * 10^4$	$1.50 * 10^5$	$1.25 * 10^5$
Ra_{krit} aus Gersh.-Zhuk.	$1.70 * 10^4$	$1.70 * 10^4$	$1.24 * 10^5$	$1.24 * 10^5$

Tabelle 5.2: Vergleich der aus eigenen Rechnungen ermittelten kritischen Rayleigh-Zahlen bei Bénard-Konvektion unter Einfluß eines Magnetfeldes parallel zur Schwerkraft mit dem Ergebnis von Gershuni und Zhukhovitskii. Beide Berandungen sind fest.

von oben gekühlt wird. Die Ränder sind elektrisch perfekt leitend. Das Magnetfeld steht parallel zur Richtung der Schwerkraft. Bei dieser Konstellation hängt die kritische Rayleigh-Zahl nur von der Hartmann-Zahl ab, die Prandtl-Zahl spielt keine Rolle (siehe Kapitel 4.3.2). Genau für diesen Fall geben Gershuni und Zhukhovitskii die kritische Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit der Hartmann-Zahl an. Für zwei spezielle Hartmann-Zahlen, $M = 31$ und $M = 100$, wird die kritische Rayleigh-Zahl numerisch bestimmt. Dies geschieht nach einer Art Intervallschachtelung. Zuerst sucht man eine unterkritische und dann eine überkritische Rayleigh-Zahl. Als nächstes überprüft man die Rayleigh-Zahl in der Intervallmitte und erhält so ein neues Intervall, in dem die kritische Rayleigh-Zahl liegen muß. Dieses Verfahren führt man solange durch, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Als kritischer Parameter wird immer die Intervallmitte angenommen.

Die Entscheidung, ob eine Rayleigh-Zahl über- oder unterkritisch ist, wird wie folgt getroffen. Es wird eine Rechnung durchgeführt, bei der man aus dem Ruhezustand startet und als Anfangsbedingung des Temperaturfeldes ein lineares Profil vorgibt. Diese Rechnung wird über eine längere Zeit fortgeführt, wobei der Betrag der Maximalgeschwindigkeit beobachtet wird. Bleibt dieser Betrag bei sehr kleinen Werten (Größenordnung 10^{-8} und kleiner), so liegt eine unterkritische Rayleigh-Zahl vor, wächst er aber immer mehr an, so ist die Rayleigh-Zahl überkritisch.

Führt man diese Testrechnungen mit dem Programm durch, so zeigt sich, daß die von Gershuni und Zhukhovitskii vorhergesagten kritischen Rayleigh-Zahlen recht gut bestätigt werden. Die numerisch ermittelten Werte liegen durchweg etwas zu hoch, werden aber bei besserer Diskretisierung wesentlich genauer. Dies zeigt die Konsistenz des numerischen Verfahrens. Weiterhin ist zu beobachten, daß die Werte bei höheren Hartmann-Zahlen grundsätzlich genauer sind. Legt man die in zwei Koordinatenrichtungen feinere Diskretisierung zugrunde, so liegt die Abweichung bei einer Hartmann-Zahl von $M = 100$ nur bei einem Prozent, während sie bei einer Hartmann-Zahl von $M = 31$ immerhin noch etwas über acht Prozent liegt (vergleiche Tabelle 5.2).

5.2.2 Vergleiche zu den Rechnungen von Ozoe und Okada

Will man Vergleiche zu numerischen Untersuchungen am Themenkreis Naturkonvektion mit Magnetfeldeinfluß ziehen, kommen in erster Linie die Rechnungen von Ozoe und Okada [69] in Frage, da nur wenige andere dreidimensionale numerische Untersuchungen zu dieser Aufgabenstellung aus der Literatur bekannt sind.

Ozoe und Okada untersuchen den Einfluß der Magnetfeldrichtung auf die Wärmeübertragung bei einem Kubus, der seitlich beheizt und gekühlt wird und dessen restliche Wände adiabat sind (siehe Abbildung 5.10). Alle Wände

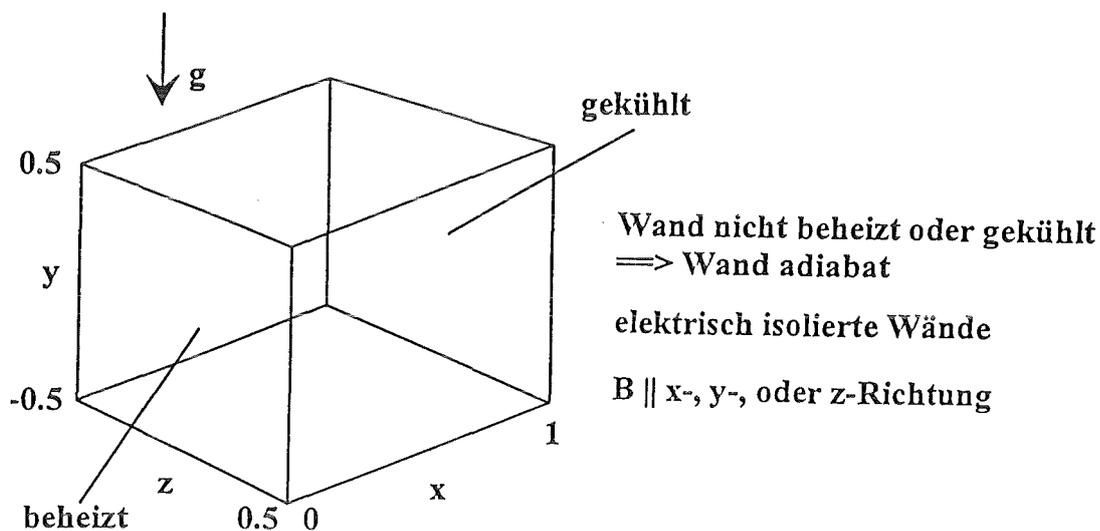


Abbildung 5.10:

Schematische Zeichnung des von Ozoe und Okada untersuchten Systems.

sind elektrisch isolierend. Als Prandtl-Zahl wird diejenige von geschmolzenem Silikon, $Pr = 0.054$, angenommen. Die Autoren berechnen bei einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 10^6$ im Bereich $0 \leq M \leq 300$ ausnahmslos stationäre Lösungen und geben für ein Magnetfeld in x-Richtung die durchschnittliche Nusselt-Zahl \overline{Nu} an der beheizten Wand an. Zur numerischen Lösung dieser Aufgabenstellung wird ein Finites-Differenzen-Verfahren auf einem nichtäquidistanten Gitter verwendet.

Vergleicht man die Ergebnisse aus eigenen Rechnungen mit den von Ozoe und Okada vorhergesagten, stellt man fest, daß beide qualitativ und quantitativ gut übereinstimmen, wenn ein Magnetfeld wirksam ist. Die Strömung wird am stärksten von einem Magnetfeld in x-Richtung unterdrückt und wird von einem Magnetfeld in z-Richtung am wenigsten beeinflusst. Eine Erhöhung

der Hartmann-Zahl führt in jeder Magnetfeldrichtung zu einer stärkeren Unterdrückung der Strömung und damit auch zu einer kleineren durchschnittlichen Nusselt-Zahl an der warmen Wand. Die sich ausbildenden Strömungsformen, die teilweise Geschwindigkeitsüberhöhungen in den Ecken aufweisen, sind physikalisch erklärbar und sollen nachfolgend erläutert werden, obwohl in diesem Abschnitt in erster Linie der Nachweis einer Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Autoren geführt werden soll.

Bei einem Magnetfeld in x-Richtung werden elektrische Ströme derart induziert, daß die Aufwärtsströmung an der beheizten Wand behindert wird. Da der Strom aufgrund der elektrischen Isolation der Wände nicht in diese eintreten kann und deshalb vor der Wand umgelenkt wird, verschwindet dort die Komponente der Lorentz-Kraft, die entgegen der Aufwärtsströmung wirkt. Deshalb treten hier in den Ecken Geschwindigkeitsüberhöhungen auf. Entscheidend ist hierbei auch, daß sich der Strom nicht über die dünnen Hartmannschichten schließt, sondern im Fluid (vergleiche Abbildungen 5.11 und 5.12).

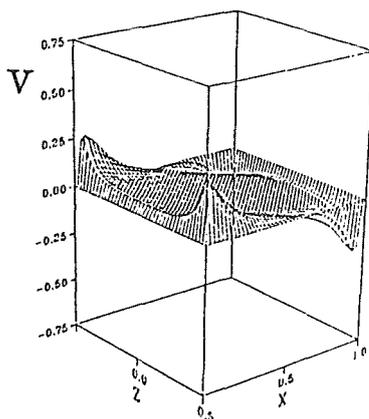


Abbildung 5.11: Die vertikale Geschwindigkeit in der vertikalen Mittelebene bei einem Magnetfeld in x-Richtung.

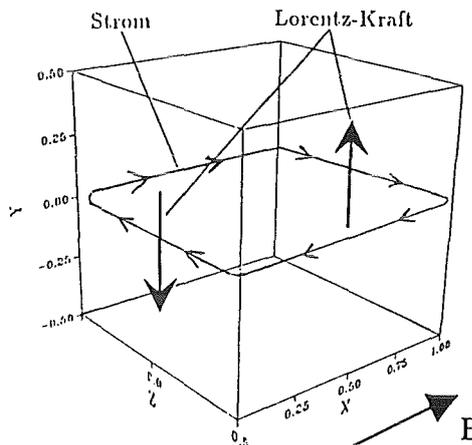


Abbildung 5.12: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung bei einem Magnetfeld in x-Richtung.

Bei einem Magnetfeld in y-Richtung sind diese Überhöhungen bei der horizontalen Geschwindigkeit in x-Richtung zu finden (Abbildung 5.13). Der Grund ist auch hier in der Art zu finden, wie sich der elektrische Strom verhält. An der Wand bei $y = +0.5$ werden elektrische Ströme in positive z-Richtung induziert und an der Wand bei $y = -0.5$ in negative z-Richtung. Diese Ströme schließen sich in y,z -Ebenen und rufen Lorentz-Kräfte hervor, die in negative bzw. positive x-Richtung zeigen (siehe Abbildung 5.14).

Auch diese Lorentz-Kräfte verschwinden wegen der Umlenkung des elektrischen Stromes vor der Wand in den Eckbereichen.

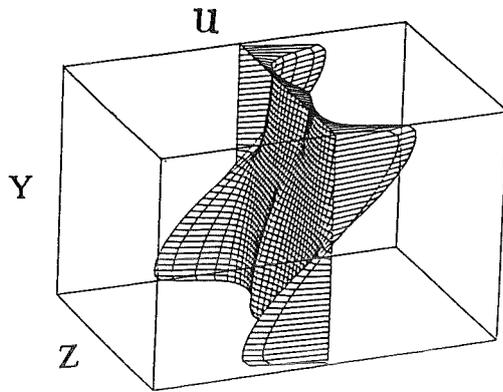


Abbildung 5.13: Die horizontale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene bei einem Magnetfeld in y-Richtung.

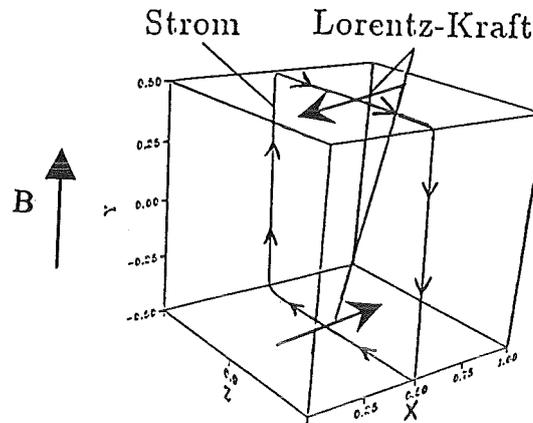


Abbildung 5.14: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung bei einem Magnetfeld in y-Richtung.

Bei einem Magnetfeld in z-Richtung ergibt sich eine ungleich kompliziertere Konstellation in Bezug auf das Verhalten des elektrischen Stromes. An der beheizten bzw. gekühlten Wand wird prinzipiell ein elektrischer Strom in positive bzw. negative x-Richtung induziert. An den Wänden senkrecht zum Gravitationsvektor wird prinzipiell ein elektrischer Strom in positive bzw. negative y-Richtung induziert. Diese Ströme können sich in x-y-Ebenen nicht schließen, deshalb muß hierzu in z-Richtung ausgewichen werden. In einem Bereich, der ungefähr durch die Bedingung $0.2 < x < 0.8$ abgegrenzt werden kann, spielen in erster Linie die Ströme in y-Richtung eine Rolle. Diese Ströme weichen einander in z-Richtung aus und schließen sich zweidimensional über die dünnen Hartmannschichten. Dies geschieht in einem Muster mit acht Zellen (siehe Abbildung 5.15). In der Nähe der beheizten bzw. gekühlten Wand liegen die Verhältnisse anders. In diesem Fall können sich die elektrischen Ströme nur noch dreidimensional schließen. Im folgenden wird nur auf das Verhalten nahe der beheizten Wand eingegangen, da es demjenigen der gekühlten Wand entspricht. Grundsätzlich werden hier Ströme in positive x-Richtung induziert. Diese Ströme müssen sich in z-Richtung über die Hartmannschichten schließen. Dies können sie aber nicht überall, da diese Ströme in x-Richtung auf die achtzellige Struktur treffen. Innerhalb dieser Struktur fließen aber starke Ströme in z-Richtung teilweise ins Innere des Quaders. Deshalb fließt nur dort konzentriert Strom in x-Richtung, wo ein Strompfad in z-Richtung hin zu den Hartmann-Wänden ermöglicht wird. Hierdurch kommt es zu starken Strömen nahe der beheizten Wand parallel zur Gravita-

tion hin zu der Stelle, an der ein Stromfluß in x-Richtung möglich ist (siehe Abbildung 5.16).

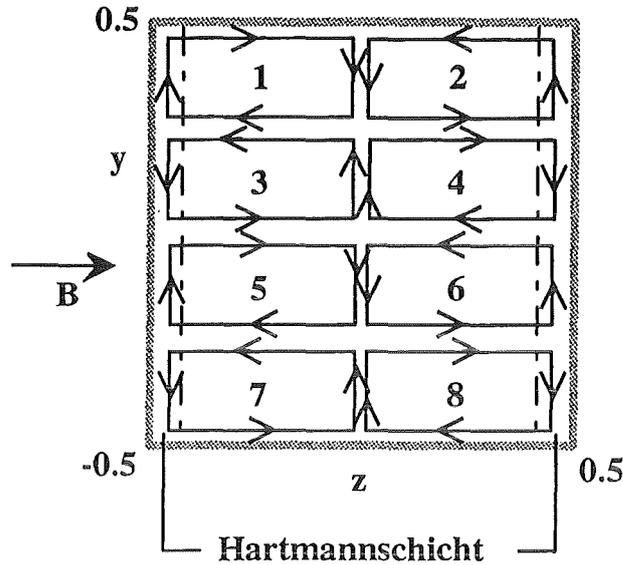


Abbildung 5.15: Der elektrische Strom bei einem Magnetfeld in z-Richtung. Es ist das Verhalten im Bereich $0.2 < x < 0.8$ dargestellt.

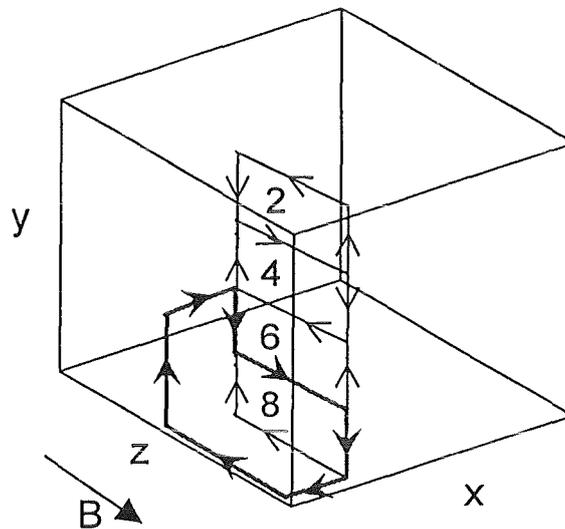


Abbildung 5.16: Ein elektrischer Strompfad bei einem Magnetfeld in z-Richtung für $x < 0.2$, $y < 0$, $z > 0$.

Dieses Verhalten des elektrischen Stromes führt dazu, daß sich im Innern des Kubus ein Wirbel bildet, der entgegen der durch die Konvektion hervorgerufenen Strömung dreht (siehe Abbildungen 5.17 und 5.18).

	Ozoe/Okada	Mößner		
	\overline{Nu} bei Bx	\overline{Nu} bei Bx	\overline{Nu} bei By	\overline{Nu} bei Bz
M = 0	5.737	7.2	7.2	7.2
M = 100	4.458	4.766	6.002	7.135
M = 200	2.917	2.989	4.553	7.050
M = 300	2.251	2.245	3.475	6.923

Tabelle 5.3: Vergleich der mittleren Nusselt-Zahlen der warmen Wand aus eigenen Rechnungen mit den Werten von Ozoe und Okada. Hierbei gilt: $Pr = 0.054$, $Ra = 10^6$.

Zusätzlich ist zu beachten, daß bei einem Magnetfeld in z-Richtung keine Geschwindigkeitsüberhöhungen in den Ecken auftreten. Da sich der Strom über die extrem dünnen Hartmannschichten schließt und nicht im Fluid, wirken die Lorentz-Kräfte praktisch bis in die Eckbereiche hinein. Gleichzeitig wirken die Hartmannschichten als großer elektrischer Widerstand. Dies begrenzt den Stromfluß spürbar.

Wie in Tabelle 5.3 unschwer zu erkennen ist, stimmen die Ergebnisse ohne Magnetfeldeinfluß nicht mit denen der Autoren überein. Die eigenen Rechnungen weisen einen höheren Wert von ca. $\overline{Nu} = 7.2$ gegenüber der Angabe von $\overline{Nu} = 5.7$ von Ozoe und Okada aus. Dieser Wert der Vergleichslösung erscheint fragwürdig, wenn man sich z.B. die Nusselt-Zahl bei einem Magnetfeld in y-Richtung für $M=100$ betrachtet. Dieser Wert ist bereits etwas größer als der Wert beider Autoren ohne Magnetfeldeinfluß. Der Wert $\overline{Nu} = 7.2$ erscheint in diesem Kontext als glaubwürdiger. Auffällig ist auch, daß die Vergleichslösung stationär ist, während die eigenen Rechnungen eine leicht instationäre Lösung zeigen. Dies ändert sich auch nicht, wenn der Zeitschritt verkleinert und die Anzahl der Gitterpunkte erhöht wird. Die Abweichung ist demzufolge nicht auf eine ungenügende Diskretisierung des Rechengebietes zurückzuführen.

Eine Erklärung für die unterschiedlichen Ergebnisse könnte darin liegen, daß mit LECUSSO ein Upwind-Verfahren verwendet wird, das weniger numerische Diffusion erzeugt als die meisten anderen Upwind-Verfahren. Ozoe und Okada setzen bei der örtlichen Diskretisierung das Upwind-Verfahren 1. Ordnung ein, welches bekanntermaßen viel numerische Diffusion produziert und damit stationäre Lösungen begünstigt. Die in MAKON verwendeten expliziten Verfahren erzeugen zudem weniger Diffusion als das bei Ozoe und Okada benutzte, teilimplizite ADI-Verfahren.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die eigenen Rechnungen in sich konsistente Ergebnisse zeigen, die qualitativ und quantitativ mit denen der Vergleichslösung übereinstimmen, solange ein Magnetfeld wirkt. Ohne Magnetfeldeinfluß stimmen die Nusselt-Zahlen an der beheizten Wand nicht überein. Für den Fall der reinen Konvektionsströmung liegt der eigene Wert etwas höher als der beider Autoren. Die von mir erarbeiteten physikalischen Erklärungen für die sich ausbildenden Strömungsformen sowie die Darstellung des Verhaltens des elektrischen Stromes sowie der Geschwindigkeit sind bei Ozoe und Okada nicht zu finden. Insofern stellen Teile dieses Abschnittes nicht nur Validierungsrechnungen, sondern schon neue Ergebnisse dar.

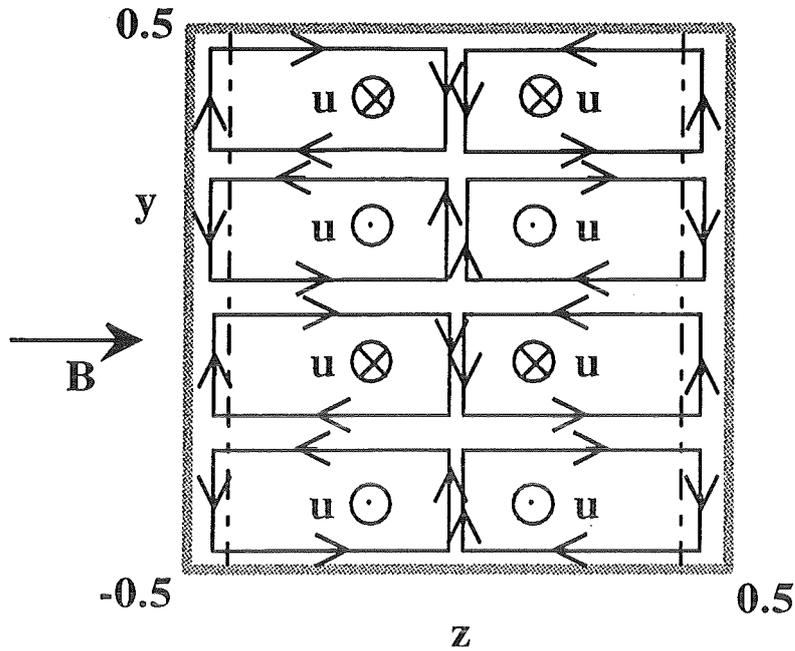


Abbildung 5.17: Die entgegengesetzten äußeren und inneren Wirbel der Fluidströmung für $0.2 < x < 0.8$.

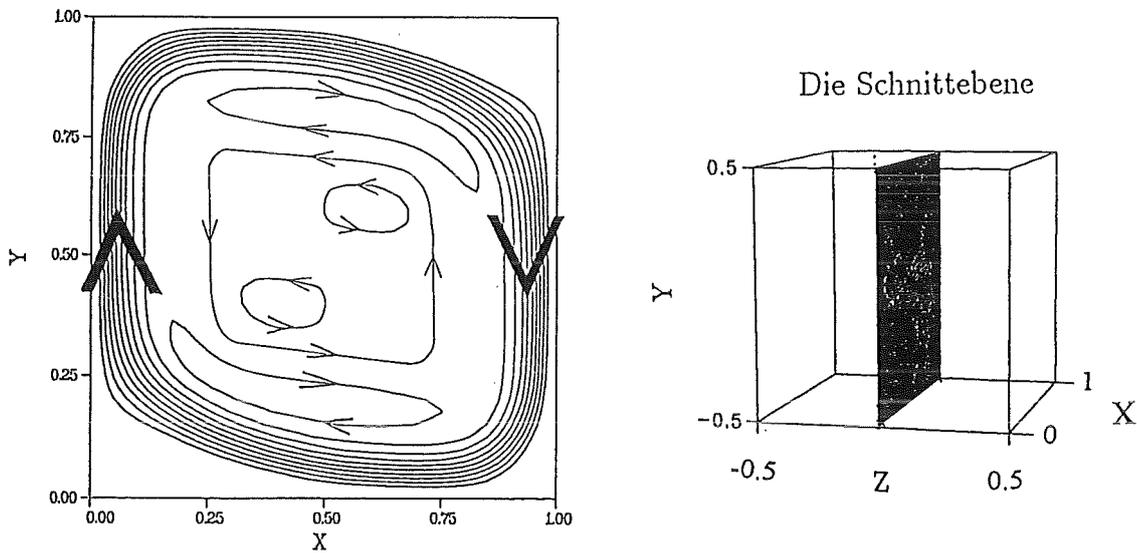


Abbildung 5.18: Die Stromlinien in der vertikalen Mittelebene bei einem Magnetfeld in z -Richtung. Die Strömungsrichtung ist eingezeichnet.

6 Numerische Ergebnisse

6.1 Magnetokonvektion im Kubus

In diesem Abschnitt wird systematisch der Einfluß der Richtung eines Magnetfeldes und der thermischen Randbedingungen auf Naturkonvektionsströmungen im Kubus untersucht. Dies geschieht, um an diesem einfachen Modellsystem die grundlegenden Effekte, die bei der Magnetokonvektion auftreten, herauszuarbeiten. Hierzu wird wieder die bereits im vorigen Abschnitt behandelte Problemstellung mit einem horizontalen Temperaturgradienten herangezogen (siehe Abbildung 5.10). Es wird wieder auf das bereits in Abbildung 2.1 eingeführte Koordinatensystem zurückgegriffen.

6.1.1 Variation der Magnetfeldrichtung

Die Richtung des Magnetfeldes ist ein Parameter, der den Wärmeübergang und die Strömungsprofile entscheidend beeinflusst. Wie bereits in Kapitel 5.2.2 gezeigt, können die Nusselt-Zahlen bei unterschiedlicher Magnetfeldrichtung bei einer festen Hartmann-Zahl um bis zu 300 Prozent voneinander abweichen. Dabei stellen sich auch jeweils völlig unterschiedliche Strömungsmuster ein. Der Betrag des Magnetfeldvektors ist wie bekannt auf Eins normiert.

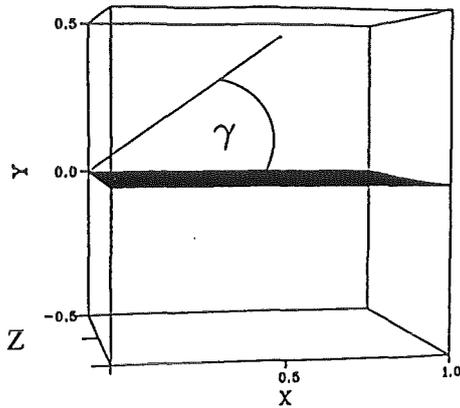
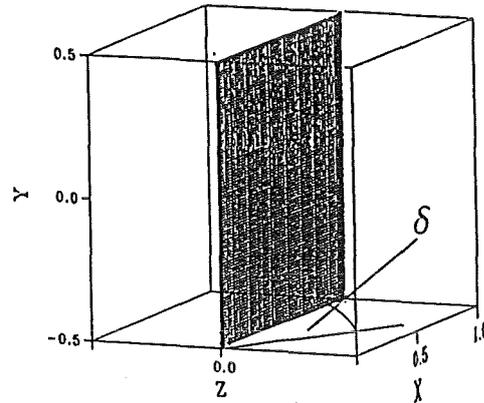
Zuerst wird die Richtung des Magnetfeldes nur so variiert, daß die Komponente des Magnetfeldes in z-Richtung, B_z , verschwindet. Für ein Magnetfeld in x-Richtung ist die Dämpfung der Strömung am größten und damit die durchschnittliche Nusselt-Zahl an der beheizten Wand am geringsten. Im Gegensatz dazu wird die Konvektionsströmung von einem Magnetfeld in y-Richtung am schwächsten unterdrückt. Die auftretenden Strömungsmuster

können durch die Wirkung von Lorentz-Kräften erklärt werden, die ihrerseits durch die induzierten elektrischen Ströme hervorgerufen werden. Dieser Mechanismus ist bereits in Kapitel 5.2.2 beschrieben worden.

Verändert man die Magnetfeldrichtung derart, daß sowohl eine Komponente in x-Richtung, B_x , als auch eine Komponente in y-Richtung, B_y , vorhanden ist, verändert sich das Verhalten des elektrischen Stromes und damit auch das Verhalten der Konvektionsströmung. Sowohl an der beheizten bzw. gekühlten Wand als auch an den Wänden senkrecht zur Gravitation werden elektrische Ströme induziert. Diese Ströme schließen sich in diagonalen Ebenen. Ist B_y positiv, schließen sich die an der beheizten Wand induzierten elektrischen Ströme mit den an der Wand bei $y = +0.5$ induzierten Strömen (siehe Abbildung 6.3). Ist B_y dagegen negativ, erfolgt der Stromschluß mit den bei $y = -0.5$ induzierten Strömen (siehe Abbildung 6.4). Dies hat in beiden Fällen zur Folge, daß Lorentz-Kräfte sowohl die Auf- bzw. Abtriebsströmung als auch die Strömungen in x-Richtung behindern. Da der elektrische Strom abermals vor der isolierten Wand umgelenkt wird, verschwindet auch hier die hemmende Lorentz-Kraft in den jeweiligen Eckbereichen. Deshalb ist in beiden Hauptströmungsrichtungen eine Geschwindigkeitsüberhöhung in den Eckbereichen zu beobachten und es ergibt sich für die Geschwindigkeit in x- bzw. y-Richtung qualitativ das bereits in Abbildung 5.11 bzw. Abbildung 5.13 gezeigte Profil.

Obwohl im untersuchten Fall sowohl alle Strömungen in y- als auch in x-Richtung behindert werden, ist der Wärmeübergang immer besser als im Fall eines Magnetfeldes in x-Richtung und immer schlechter als im Fall eines Magnetfeldes in y-Richtung. Dies liegt daran, daß die Unterdrückung der Strömung durch das Magnetfeld jeweils nur durch eine Vektorkomponente $B_x < 1$ bzw. $B_y < 1$ hervorgerufen wird, da $|\vec{B}| = 1$ immer gelten muß. Je größer die Komponente B_x wird, desto schlechter wird der Wärmeübergang. Steht das Magnetfeld in negative y-Richtung, sind die berechneten Nusselt-Zahlen immer etwas niedriger als die entsprechenden Nusselt-Zahlen bei betragsgleicher positiver y-Komponente des Magnetfeldes. Die Abweichungen sind jedoch kleiner als vier Prozent, deshalb kann durchaus von einer Symmetrieeigenschaft gesprochen werden (vergleiche Tabelle 6.1.1).

Läßt man eine Komponente $B_z \neq 0$ zu, wird die Situation komplizierter. Steht das Magnetfeld in Richtung einer Raumdiagonalen, sind alle Komponenten des Magnetfeldes dem Betrag nach gleich groß. Definiert man gemäß den Abbildungen 6.1 und 6.2 einen Winkel γ als Winkel zwischen dem Magnetfeld und einer horizontalen x,z-Ebene und einen Winkel δ als Winkel zwischen dem Magnetfeld und einer x,y-Ebene, so gilt für eine Raumdiagonale: $|\gamma| \cong 35^\circ$, $|\delta| = 45^\circ$. Unter der Voraussetzung eines positiven B_x bedeutet ein positiver Wert für γ eine positive y-Komponente des Magnetfeldes. Ein

Abbildung 6.1: Der Winkel γ .Abbildung 6.2: Der Winkel δ .

positiver Wert für δ bedeutet eine positive z -Komponente des Magnetfeldes. Untersucht man den Fall $\gamma \cong 35^\circ, \delta = 45^\circ$, stellt man fest, daß sich der elektrische Strom wieder vorwiegend in diagonalen Strukturen schließt. Eine entscheidende Ausnahme existiert aber an der beheizten und an der gekühlten Wand. An diesen Wänden fließen nicht mehr alle Ströme wie gewohnt in z -Richtung, sondern in einem Randbereich auch konzentriert in y -Richtung. An der beheizten Wand ist dieses Verhalten im Bereich $y > 0, z > 0.25$ zu beobachten, an der gekühlten Wand bei $y < 0, z < -0.25$. Dies führt dazu, daß teilweise die diagonalen Strukturen einseitig aufgelöst werden (siehe Abbildung 6.5).

Für das Verhalten der Auf- und Abtriebsströmung hat das signifikante Auswirkungen. Im Bereich, in dem die elektrischen Ströme in y -Richtung fließen, verschwindet die Komponente der Lorentz-Kraft, die entgegen der Strömung des Fluids wirkt, deshalb organisiert sich die Strömung so um, daß der Massentransport vorwiegend in diesem Bereich geschieht (siehe Abbildung 6.9).

Wird die Richtung des Magnetfelds so verändert, daß es nun in Richtung einer anderen Raumdiagonalen wirkt, bleibt das prinzipielle Verhalten des elektrischen Stromes und damit auch das Verhalten der Konvektionsströmung bestehen. Es ändert sich nur die Lage des Bereichs, in dem die elektromagnetische Dämpfung verschwindet. Wichtig ist hierbei, daß sich die elektrischen Ströme immer noch symmetrisch verhalten, es kann in jedem dieser Fälle eine Punktsymmetrie zu einer diagonalen Mittelebene beobachtet werden (vergleiche Abbildungen 6.6 bis 6.8).

Steht das Magnetfeld in Richtung einer Raumdiagonalen, ist der Wärmeübergang schlechter als im Falle eines Magnetfelds in y -Richtung, aber besser als in vergleichbaren Fällen ohne z -Komponente des Magnetfelds. Letzteres ist wenig erstaunlich, da ein Magnetfeld in z -Richtung gewöhnlich weniger dämpfend auf die Konvektionsströmung wirkt. Insgesamt sind die

M = 200, Pr = 0.054, Ra = 10 ⁶	
γ, δ	\overline{Nu}
$\gamma \cong +35^\circ, \delta = +45^\circ$	4.31
$\gamma \cong +35^\circ, \delta = -45^\circ$	4.29
$\gamma \cong -35^\circ, \delta = +45^\circ$	4.44
$\gamma \cong -35^\circ, \delta = -45^\circ$	4.47
$\gamma = -37^\circ, \delta = +22^\circ$	3.31

Tabelle 6.1: Die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand. γ ist der Winkel zwischen \vec{B} und einer x,z-Ebene und δ ist der Winkel zwischen \vec{B} und einer x,y-Ebene.

M = 200, Pr = 0.054, Ra = 10 ⁶		
$\gamma > 0 \rightarrow \overline{Nu}_+ ; \gamma < 0 \rightarrow \overline{Nu}_-$		
γ	\overline{Nu}_+	\overline{Nu}_-
$\pm 0^\circ$	2.989	2.989
$\pm 30^\circ$	3.346	3.214
$\pm 45^\circ$	3.667	3.482
$\pm 60^\circ$	4.012	3.927
$\pm 90^\circ$	4.553	4.548

Tabelle 6.2: Die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand. γ ist der Winkel zwischen \vec{B} und einer x,z-Ebene. Es gilt: $B_z = 0$.

Nusselt-Zahlen für alle Raumdiagonalenrichtungen ziemlich konstant, sie variieren nur mit relativen Abweichungen von maximal vier Prozent. Dabei fällt auf, daß die Werte bei gleichem γ jeweils sehr nahe beisammen liegen.

Wird eine beliebige Richtung des Magnetfeldes zugelassen, wird eine exakte Vorhersage des Verhaltens des elektrischen Stromes schwierig, es ist jedoch möglich, dieses Verhalten durch Kenntnis der hier besprochenen Spezialfälle abzuschätzen. Grundsätzlich bestätigen alle Testrechnungen, daß die Dämpfung der Strömung mit wachsender x-Komponente und verringerter z-Komponente zunimmt. Je größer die Komponente einer bestimmten Magnetfeldrichtung wird, desto mehr verhält sich der elektrische Strom auch wie im nächstliegenden Spezialfall. Im Fall $\gamma = -37^\circ, \delta = 22^\circ$ verhält sich die Strömung z.B. fast wie im besprochenen Fall ohne z-Komponente. Dies ist nicht erstaunlich, da die x- bzw. y-Komponenten des Magnetfelds um mehr als 200 Prozent größer sind als die z-Komponente. Es ist jedoch auch die für eine positive z-Komponente typische Überhöhung der Geschwindigkeit in y-Richtung nahe der Wand bei $z=0.5$ deutlich sichtbar. Sicher ist jedoch, daß bei einem beliebig orientierten Magnetfeld keine Symmetrieeigenschaften zu erwarten sind (siehe Abbildung 6.10).

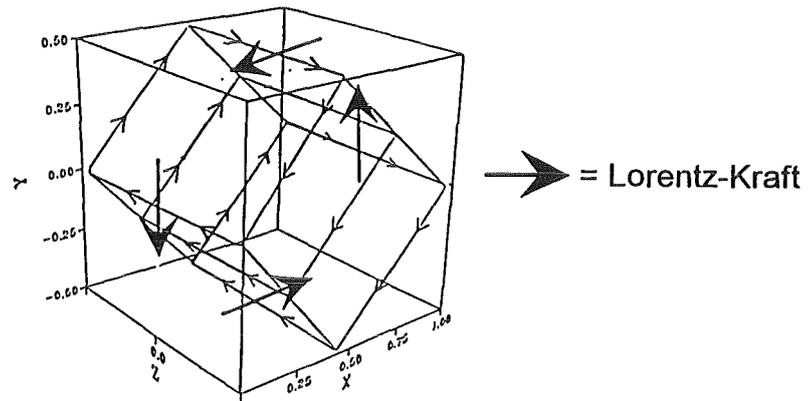


Abbildung 6.3: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung. Es gilt: $B_x = B_y = 0.707$, $B_z = 0$, $\gamma = 45^\circ$.

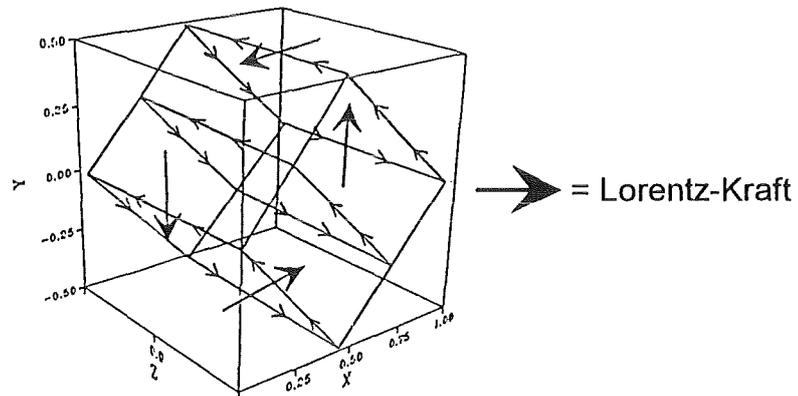


Abbildung 6.4: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung. Es gilt: $B_x = 0.707$, $B_y = -0.707$, $B_z = 0$, $\gamma = -45^\circ$.

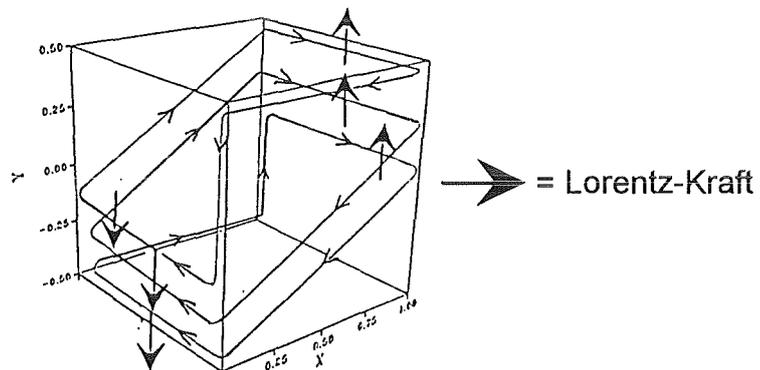


Abbildung 6.5: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung. Es gilt: $B_x = B_y = B_z = 0.577$.

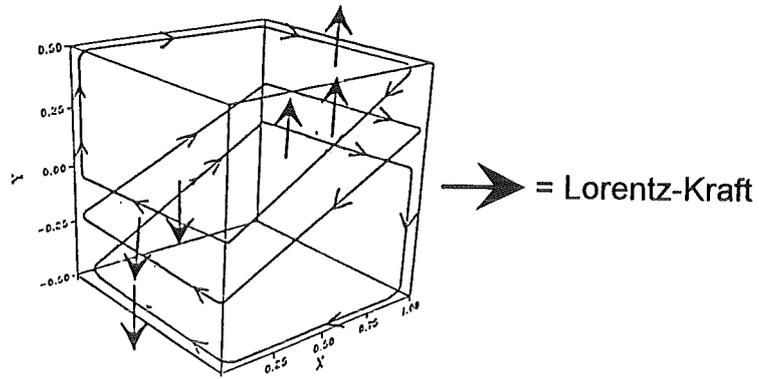


Abbildung 6.6: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung. Es gilt: $B_x = B_y = 0.577$, $B_z = -0.577$.

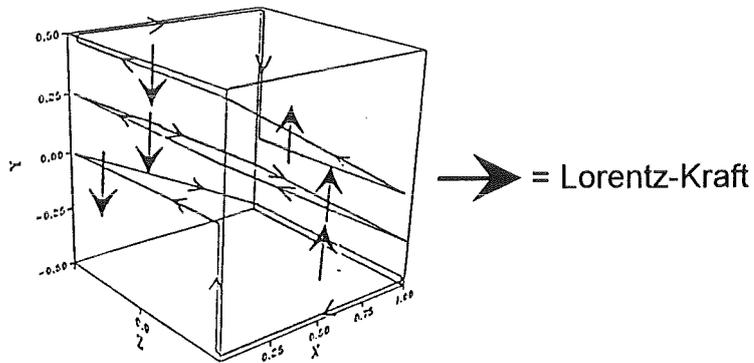


Abbildung 6.7: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung. Es gilt: $B_x = B_z = 0.577$, $B_y = -0.577$.

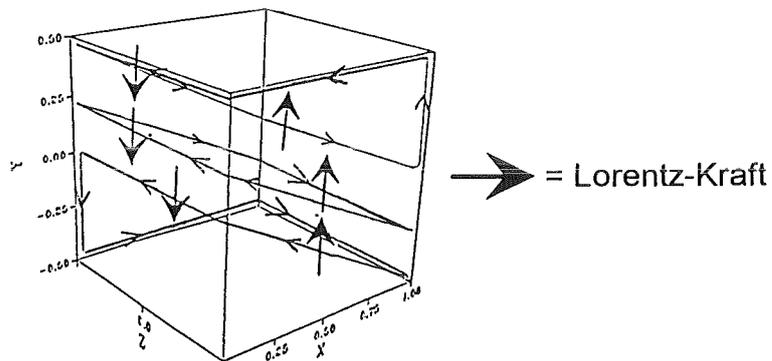


Abbildung 6.8: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung. Es gilt: $B_x = 0.577$, $B_y = B_z = -0.577$.

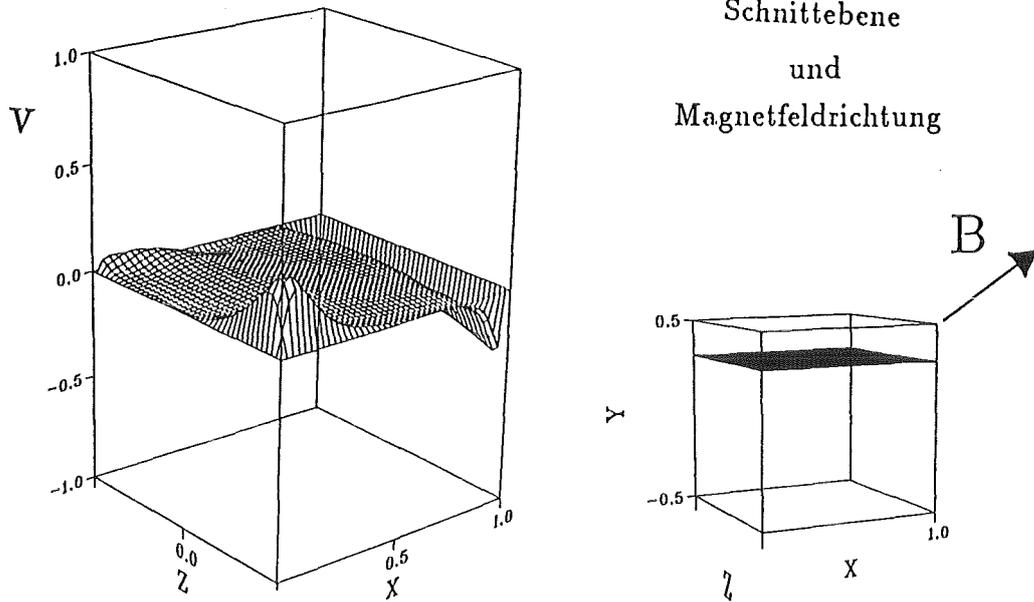


Abbildung 6.9: Die Geschwindigkeit in y -Richtung für $\gamma = 35^\circ$ und $\delta = 45^\circ$.

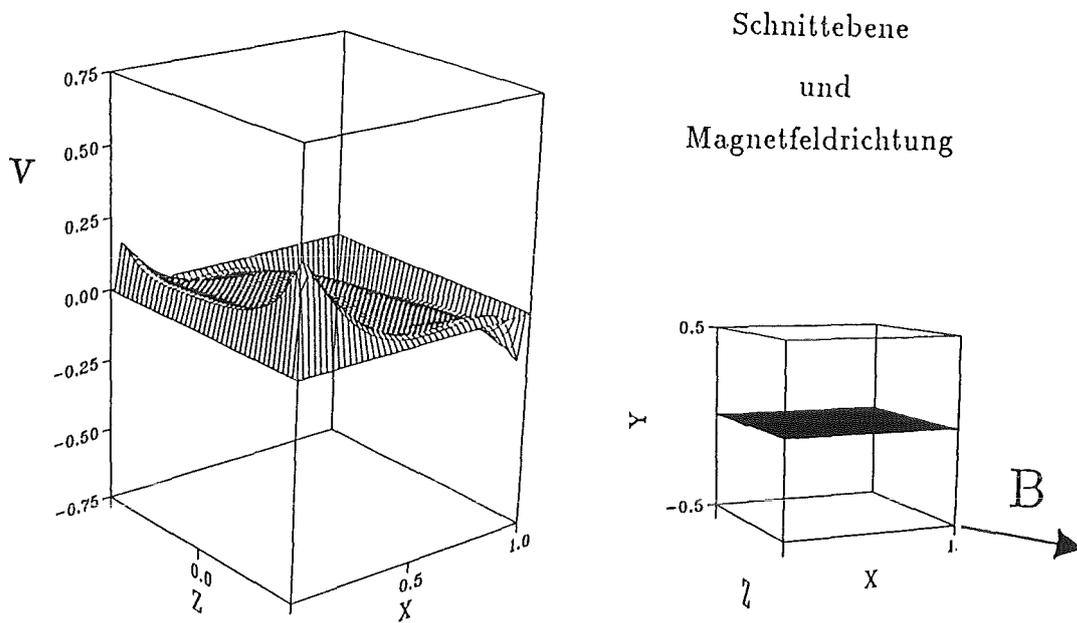


Abbildung 6.10: Die Geschwindigkeit in y -Richtung für $\gamma = -37^\circ$ und $\delta = 22^\circ$.

6.1.2 Variation der thermischen Randbedingungen

Untersucht man das Modellsystem gemäß Abbildung 6.11, erkennt man, daß der Wärmeübergang merklich von der Wahl der thermischen Randbedingungen der Seitenwände abhängt. Als Seitenwände werden in diesem Abschnitt alle Wände bezeichnet, die weder beheizt noch gekühlt sind. Hierbei können alle Seitenwände wahlweise entweder adiabat oder perfekt wärmeleitend sein.

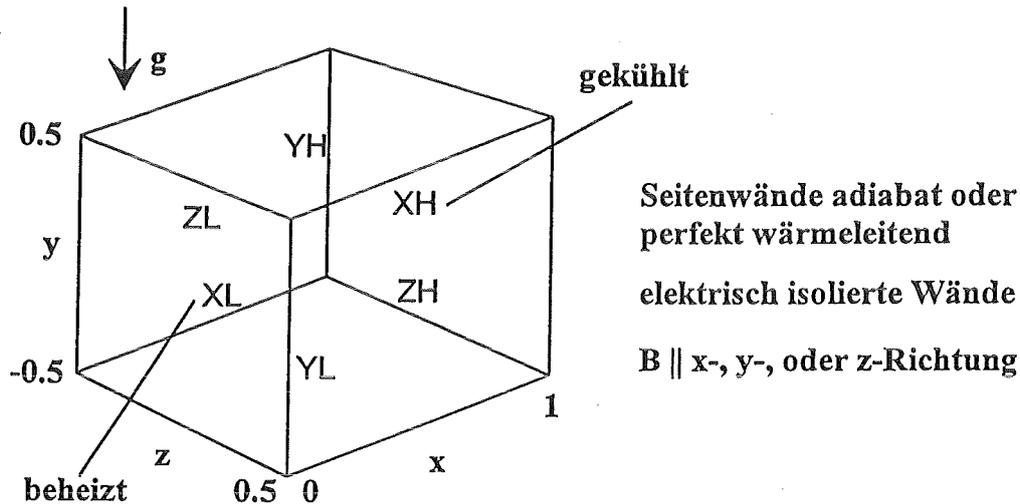


Abbildung 6.11: Das untersuchte Modellsystem mit Bezeichnung der einzelnen Wände.

Steht das Magnetfeld in y-Richtung und wählt man für die dimensionslosen Kennzahlen die Werte $M=200$, $Ra = 10^6$ und $Pr=0.054$, ändert sich die durchschnittliche Nusselt-Zahl an der warmen Wand je nach Art der jeweiligen thermischen Randbedingungen um bis zu 220 Prozent. In den meisten Fällen führt die Verwendung perfekt wärmeleitender Seitenwände¹ zu einer Verschlechterung des Wärmeüberganges. Vergleicht man die Fälle, bei denen entweder alle Seitenwände adiabat oder perfekt wärmeleitend sind, ist dieser Sachverhalt für alle Richtungen des Magnetfeldes sichtbar (siehe Tabelle 6.3). Steht das Magnetfeld in x- oder y-Richtung, ist die Nusselt-Zahl bei Verwendung von adiabaten Seitenwänden ungefähr doppelt so groß wie bei perfekt wärmeleitenden Seitenwänden. Liegt ein Magnetfeld in z-Richtung vor, ist dieser Effekt nicht so stark.

Physikalisch ist der Effekt der Verschlechterung des Wärmeübergangs bei Verwendung von perfekt wärmeleitenden Seitenwänden plausibel. Aufgrund der lokalen Temperaturgradienten zwischen perfekt wärmeleitenden Wänden

¹Obwohl perfekt wärmeleitende Wände im allgemeinen mit elektrisch perfekt leitenden Wänden einhergehen, werden weiterhin elektrisch isolierte Wände betrachtet.

M = 200, Pr = 0.054, Ra = 10 ⁶			
thermische Randbedingung	$\overline{Nu_x}$	$\overline{Nu_y}$	$\overline{Nu_z}$
adiabat	2.989	4.553	7.135
perfekt wärmeleitend	1.646	2.224	6.545

Tabelle 6.3: Die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand in Abhängigkeit der thermischen Randbedingung aller Seitenwände. Der Index der Nusselt-Zahl gibt die Richtung des Magnetfeldes an.

und dem Fluid kommt es zu Wärmeströmen senkrecht zu diesen Wänden. Dadurch wird der horizontale Wärmetransport von der warmen zur kalten Wand verringert.

Sind bei einem Magnetfeld in y-Richtung die Seitenwände YL und YH (Bezeichnungen siehe Abbildung 6.11) perfekt wärmeleitend und die Seitenwände ZL sowie ZH adiabatisch, ist die Nusselt-Zahl etwa um den Faktor 1.5 geringer als im Falle ausschließlich adiabatischer Seitenwände. Das gleiche gilt für den umgekehrten Fall, wenn YL und YH adiabatisch sind und ZL und ZH perfekt wärmeleitend. Dieses Verhalten kann als symmetrisch bezeichnet werden.

Nach diesen Aussagen würde man eigentlich erwarten, daß bei Vorliegen von nur einer perfekt wärmeleitenden Seitenwand die Nusselt-Zahlen ungefähr um einen Faktor 1.25 kleiner werden gegenüber dem Fall ausschließlich adiabatischer Seitenwände. Dies trifft auch dann zu, wenn entweder ZL oder ZH perfekt wärmeleitend sind. In beiden Fällen reduziert sich die Nusselt-Zahl um einen Faktor von 1.2. Wählt man aber YL oder YH zur perfekt wärmeleitenden Seitenwand, wird diese Erwartung nicht erfüllt. Ist z.B. YH perfekt wärmeleitend, wird die Nusselt-Zahl sogar leicht erhöht, fällt die Wahl auf YL, wird die Nusselt-Zahl dagegen um einen Faktor 1.7 verringert. Offensichtlich wirkt sich vor allem eine perfekt wärmeleitende Wand YL sehr ungünstig auf den Wärmeübergang aus. Dies wird auch dann deutlich, wenn eine Wand senkrecht zur z-Richtung zusätzlich zu YL oder YH perfekt wärmeleitend ist. Sind z.B. ZL und YH perfekt wärmeleitend, wird die Nusselt-Zahl nur unwesentlich verringert, sind aber ZL und YL perfekt wärmeleitend, wird sie fast halbiert (siehe Tabelle 6.4).

Da Magnetokonvektionsströmungen in erster Linie durch elektromagnetische Kraftwirkungen dominiert werden, bleiben die grundlegenden physikalischen Mechanismen von der Wahl der thermischen Randbedingungen unberührt. Deshalb haben diese thermischen Randbedingungen auch keinen Einfluß auf

Gemischte Randbedingungen		
M=200, Ra=10 ⁶ , Pr = 0.054		
adiabate Wände	perfekt wärmeleitende Wände	\overline{Nu}
YL , YH	ZL , ZH	2.936
ZL , ZH	YL , YH	3.110
YH , ZL , ZH	YL	2.721
YL , ZL , ZH	YH	4.901
YL , YH , ZH	ZL	3.775
YL , YH , ZL	ZH	3.864
YH , ZH	YL , ZL	2.450
YL , ZH	YH , ZL	4.031

Tabelle 6.4: Die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand XL. Die Wand XH ist gekühlt. Das Magnetfeld steht in y-Richtung.

das qualitative Verhalten des elektrischen Stromes und der Geschwindigkeiten (vergleiche Abbildungen 6.12 und 6.13). Alle Aussagen der vorangehenden Abschnitte bleiben unberührt. Allerdings verändern sie quantitativ das Geschwindigkeitsfeld und damit auch die Stärke des elektrischen Stromes. Zusätzlich beeinflussen sie über die Temperaturverteilung (siehe Abbildungen 6.14 und 6.15) auch den Wärmeübergang. Eine Veränderung dieses Wärmeübergangs um wesentlich mehr als 200 Prozent aufgrund von Variationen der thermischen Randbedingungen der Seitenwände erscheint nach als unrealistisch, wenn man die Nusselt-Zahlen in Tabelle 6.4 vergleicht.

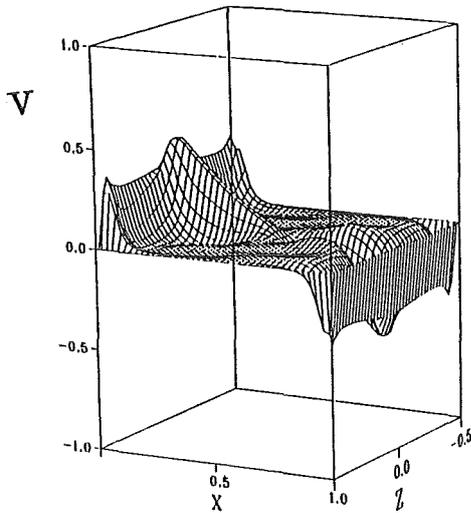


Abbildung 6.12: Die vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene bei adiabaten Seitenwänden. Es gilt: $M=200$, $Ra = 10^6$, $Pr=0.054$, $B_y = 1$.

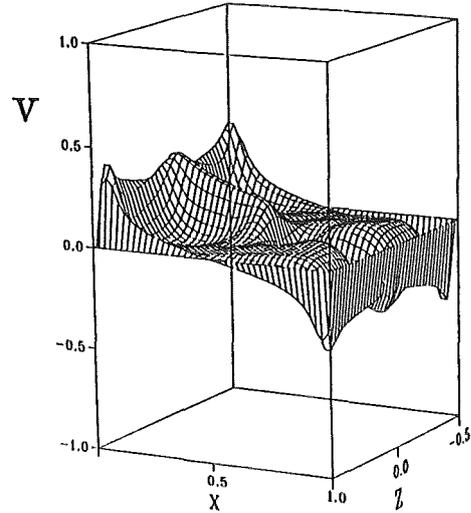


Abbildung 6.13: Die vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene bei perfekt wärmeleitenden Seitenwänden. Es gilt: $M=200$, $Ra = 10^6$, $Pr=0.054$, $B_y = 1$.

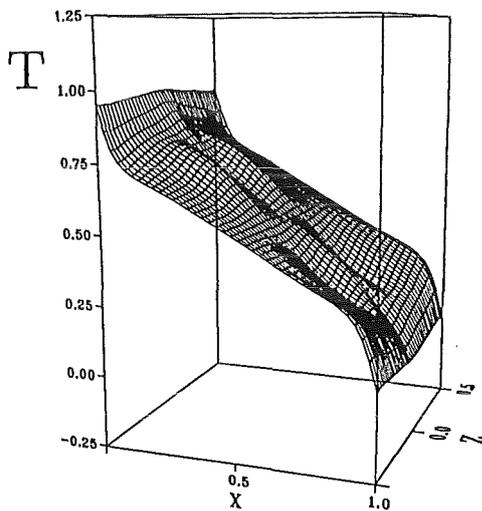


Abbildung 6.18: Die Temperatur in der horizontalen Mittelebene. Alle Seitenwände sind adiabatisch. Es gilt: $M=200$, $Ra = 10^6$, $Pr=0.054$, $B_y = 1$.

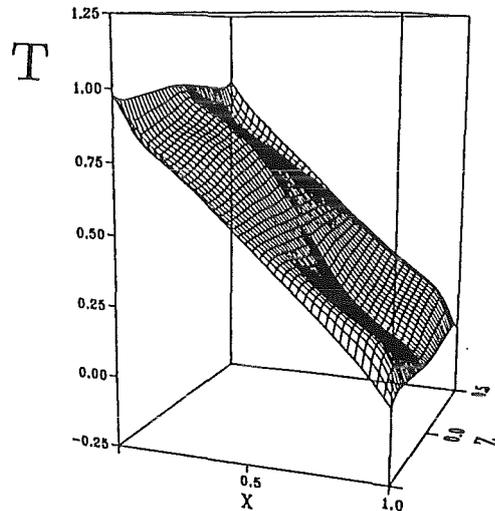


Abbildung 6.19: Die Temperatur in der horizontalen Mittelebene. Alle Seitenwände sind perfekt wärmeleitend. Es gilt: $M=200$, $Ra = 10^6$, $Pr=0.054$, $B_y = 1$.

6.2 Rechnungen zu einem Experiment von Fumizawa

Im Jahr 1980 veröffentlichte Fumizawa [21] experimentelle Ergebnisse zum Themenkreis Naturkonvektionsströmungen unter dem Einfluß starker Magnetfelder, die teilweise überraschend waren. Fumizawa befaßte sich mit einer durch einen horizontalen Temperaturgradienten angetriebenen Konvektionsströmung von Natrium-Kalium in einer Rechtecksgeometrie (vergleiche Abbildung 6.16). Hierbei sind alle Wände elektrisch isolierend und soweit sie nicht beheizt oder gekühlt sind, auch adiabat. Das Magnetfeld steht senkrecht zur nichtbeheizten, vertikalen Wand in positiver z -Richtung.

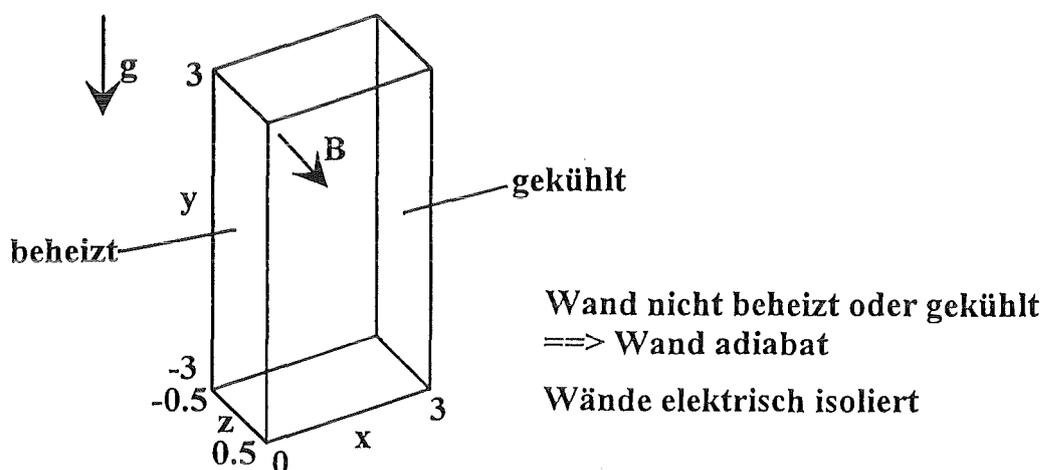


Abbildung 6.16:

Das zum Experiment von Fumizawa numerisch untersuchte Modellsystem.

Für diese Aufgabenstellung fand Fumizawa einen Parameterbereich von Rayleigh- und Hartmann-Zahlen, in dem der Wärmeübergang gegenüber dem Fall ohne Einwirkung eines Magnetfeldes sogar verbessert ist. Dieser Bereich ist in Abbildung 6.17 skizziert und mit Region I bezeichnet. Als Region II wird der Bereich bezeichnet, in dem der Wärmeübergang gegenüber dem Fall ohne Magnetfeldeinwirkung verschlechtert wird. Innerhalb der Region I ist der Temperaturverlauf in Richtung des Temperaturgradienten η -förmig, man spricht hierbei von einem η -Profil der Temperatur (vergleiche Abbildung 6.18). Dieses Profil ist in Region II nicht zu finden (vergleiche Abbildung 6.19). Beim η -Profil existiert nahe der beheizten Wand ein lokales Minimum der Temperatur, welches von einem lokalen Maximum in x -Richtung abgelöst wird. Ab einer bestimmten Rayleigh-Zahl Ra^* kann demnach für alle Rayleigh-Zahlen $Ra \geq Ra^*$ folgendes Verhalten festgestellt werden. Bei klei-

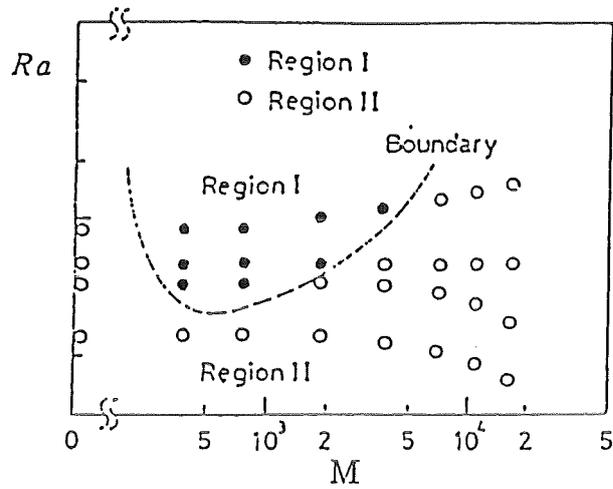


Abbildung 6.17: Fumizawas Darstellung der Regionen I und II.

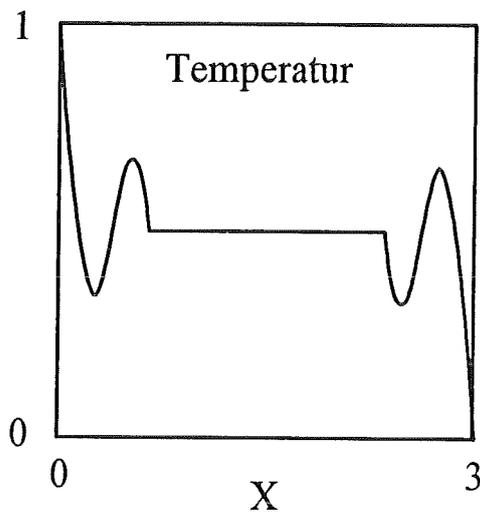


Abbildung 6.18: Das Temperaturprofil in Region I.

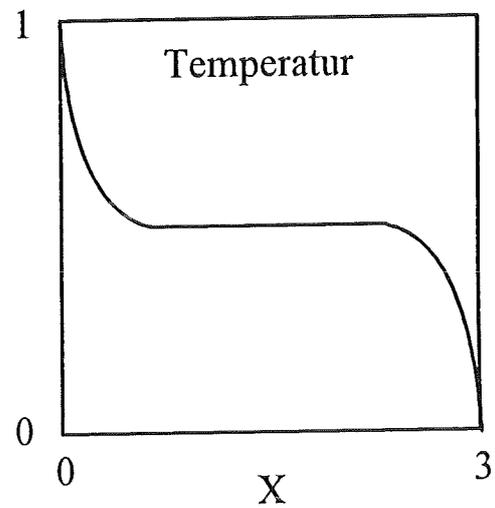


Abbildung 6.19: Das Temperaturprofil in Region II.

nen Hartmann-Zahlen wird die Konvektionsströmung wie erwartet gedämpft und damit der Wärmeübergang verschlechtert. Wird die Hartmann-Zahl zunehmend vergrößert, erreicht man die zuvor beschriebene Region I mit ihrem verbesserten Wärmeübergang. Erhöht man den Wert für die Hartmann-Zahl weiter, verläßt man Region I und der Wärmeübergang verschlechtert sich wieder. Ist die Hartmann-Zahl sehr groß, wird die Konvektionsströmung völlig unterdrückt und es liegt der Fall reiner Wärmeleitung vor.

Für die Existenz der Region I konnte Fumizawa keine physikalische Erklärung angeben. Ziel der eigenen Untersuchungen ist es, festzustellen, ob dieses Ergebnis numerisch bestätigt werden kann. Im Falle einer Bestätigung soll eine physikalische Interpretation vorgenommen werden.

Aufgrund des nur begrenzt verfügbaren Speicherplatzes und numerischer Stabilitätsgrenzen kann bei der numerischen Analyse nicht die identische Problemstellung der experimentellen Arbeit betrachtet werden. Fumizawa verwendete bei seinen experimentellen Untersuchungen eine Rechteckgeometrie mit den Seitenverhältnissen $12.5 : 5.3 : 1$. In Abweichung dazu, begnügt sich die numerische Untersuchung mit einer Geometrie mit den Seitenverhältnissen $6 : 3 : 1$. Der Prandtl-Zahl wird der Wert $Pr = 0.05$ zugewiesen. Dieser Wert ist, verglichen mit dem von Natrium-Kalium, etwas zu hoch. Alle restlichen Parameter sind mit denen des Experimentes in Übereinstimmung, sodaß im ganzen durchaus ein vergleichbares System vorliegt. Der maximal auswertbaren Hartmann-Zahl sind jedoch Grenzen gesetzt, deshalb ist es zwar möglich, einen Bereich zu entdecken, der einen verbesserten Wärmeübergang aufweist, es erscheint jedoch unmöglich, die Hartmann-Zahl so weit zu erhöhen, daß das Verschwinden dieses Verhaltens bei hohen Hartmann-Zahlen nachgewiesen werden kann.

Um numerische Vergleichslösungen zu erhalten, werden zuerst für mehrere Rayleigh-Zahlen Rechnungen ohne Magnetfeldeinfluß durchgeführt und als Maß für den Wärmeübergang die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand bestimmt. Im Anschluß daran werden für die jeweiligen Rayleigh-Zahlen in kleinen Schritten die Hartmann-Zahlen erhöht und die erhaltenen Nusselt-Zahlen mit derjenigen der Konvektionsströmung ohne Magnetfeldeinfluß verglichen. Führt man diese Prozedur für eine Rayleigh-Zahl von $Ra = 10^5$ durch, so ist erkennbar, daß bis zur maximal getesteten Hartmann-Zahl von $M = 300$ der Wärmeübergang mit steigender Hartmann-Zahl stetig schlechter wird (siehe Tabelle 6.5). Diese Rayleigh-Zahl ist offensichtlich zu klein, um den von Fumizawa entdeckten Effekt aufzuzeigen. Wiederholt man diese Vorgehensweise für eine Rayleigh-Zahl von $Ra = 5 \cdot 10^5$, ist der gesuchte Effekt dagegen sichtbar (vergleiche Tabelle 6.6). Bei einer Hartmann-Zahl von $M = 100$ ist die Nusselt-Zahl gegenüber derjenigen bei $M = 0$ schon deutlich reduziert. Erhöht man aber die Hartmann-Zahl weiter auf $M = 150$,

	\overline{Nu}
M = 0	2.95
M = 150	2.71
M = 300	2.35

Tabelle 6.5: Die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand. Das Magnetfeld steht in z-Richtung. Es gilt: $Pr = 0.05$, $Ra = 10^5$.

	\overline{Nu}
M = 0	5.03
M = 100	3.15
M = 150	6.05
M = 300	6.72

Tabelle 6.6: Die mittlere Nusselt-Zahl an der beheizten Wand. Das Magnetfeld steht in z-Richtung. Es gilt: $Pr = 0.05$, $Ra = 5 * 10^5$.

ist die Nusselt-Zahl gegenüber derjenigen bei $M = 0$ erhöht. Das gleiche trifft für $M = 300$ zu. Damit ist bestätigt, daß es für bestimmte Kombinationen von Rayleigh- und Hartmann-Zahlen durchaus zu einer Verbesserung des Wärmeübergangs kommen kann.

Betrachtet man die Temperaturprofile, bestätigt sich die Vorhersage des η -Profils ebenfalls. Für $M = 100$ und $Ra = 5 * 10^5$ sowie für alle anderen Fälle, in denen der Wärmeübergang verschlechtert wird, ist dieses Profil noch nicht sichtbar (siehe Abbildung 6.20). Im Fall $M = 150$, $Ra = 5 * 10^5$ dagegen ist das vorhergesagte Profil sichtbar (siehe Abbildung 6.21). Somit kann auch dieser Teil der Ergebnisse Fumizawas bestätigt werden.

Um die Mechanismen verstehen zu können, die für das oben beschriebene Verhalten verantwortlich sind, ist es wichtig, das Verhalten des elektrischen Stromes zu kennen. Grundsätzlich können sowohl in den Fällen mit verbessertem als auch in Fällen mit ungünstigerem Wärmeübergang zwei Bereiche der Rechteckgeometrie angegeben werden, in denen sich der elektrische Strom unterschiedlich verhält. Dies ist zum einen ein Teilbereich, der durch die Bedingung $0.5 \leq x \leq 2.5$ definiert werden kann. In diesem Bereich bewegt sich das Fluid vorwiegend in positiver bzw. negativer x-Richtung. Deshalb werden hier bei einem Magnetfeld in z-Richtung grundsätzlich elektrische Ströme in positiver bzw. negativer y-Richtung induziert (Drei-Finger-Regel). Diese Ströme schließen sich bevorzugt in y,z-Ebenen, da dies der einfachste und kürzeste Weg darstellt. In den Randbereichen $x < 0.5$ und $x > 2.5$ bewegt sich das Fluid in positiver bzw. negativer y-Richtung. Daraus folgt bei einem Magnetfeld in z-Richtung wieder mit der Drei-Finger-Regel, daß in diesem Fall elektrische Ströme in x-Richtung induziert werden, die sich wiederum in z-Richtung schließen müssen. Diese verschiedenen Bereiche müssen sinnvoll gekoppelt werden, was in manchen Fällen zu einem unerwarteten Verhalten des elektrischen Stromes führt.

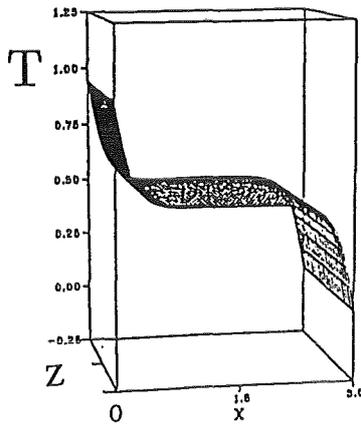


Abbildung 6.20: Der Temperaturverlauf in der horizontalen Mittelenebene bei $Pr = 0.05$, $M = 100$, $Ra = 5 * 10^5$.

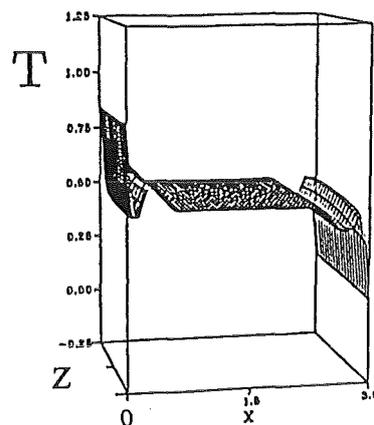


Abbildung 6.21: Der Temperaturverlauf in der horizontalen Mittelenebene bei $Pr = 0.05$, $M = 300$, $Ra = 5 * 10^5$.

Untersucht man zuerst einen Fall, bei dem der Wärmeübergang gegenüber der Situation ohne Magnetfeldeinfluß verschlechtert wird, erkennt man im Bereich $0 \leq x \leq 2.5$ ähnlich dem Verhalten im Kubus bei dieser Magnetfeldrichtung das in Abbildung 6.26 verdeutlichte achtzellige Muster des elektrischen Stromes. Wie erwartet werden an der Oberseite des Behälters Ströme in negative y -Richtung und an der Unterseite Ströme in positive y -Richtung induziert, die sich in z -Richtung über die Hartmannschicht schließen (Abbildung 6.26). Die Größe der beiden mittleren Zellsysteme (Zellen 3,4,5 und 6 bei Abbildung 6.26) variiert mit der x -Koordinate entsprechend der im Geschwindigkeitsfeld erkennbaren diagonalen Teilung (Abbildung 6.22). Dabei wandert der mittlere Knoten des Achtzellenmusters bei kleineren Werten der x -Koordinate nach unten. Dadurch werden die Zellen 3 und 4 vergrößert und die Zellen 5 und 6 verkleinert. Die Größe der Zellen 1,2,7 und 8 der Abbildung 6.26 bleibt dagegen nahezu unverändert. Durch diese Art des Stromschlusses werden in diesem gesamten Bereich Lorentz-Kräfte erzeugt, die entgegen der Konvektionsströmung wirken.

Im Bereich nahe der beheizten Wand werden grundsätzlich Ströme in positive x -Richtung induziert. Da diese Ströme aber in x -Richtung auf das achtzellige Muster treffen, werden sie fast unverzüglich in y -Richtung abgelenkt. Es fließt nur dort konzentriert Strom in x -Richtung, wo sich ein Stromschluß in z -Richtung ermöglicht. Dies ist an der Oberseite des Behälters und im mittleren Knoten des achtzelligen Musters möglich. Es ist zu beachten, daß dieser mittlere Knoten nahe der beheizten Wand deutlich in negative y -Richtung verschoben ist.

Dieses Verhalten führt nahe der beheizten Wand an zwei Stellen zu einer elektromagnetischen Kraftwirkung in negative y -Richtung entgegen der Auftriebsströmung. Dadurch entstehen nahe der Wand die in den Abbildungen 6.22 und 6.24 verdeutlichten Sekundärwirbel. Die Situation an der gekühlten Wand entspricht derjenigen der beheizten Wand.

In den Fällen, in denen der Wärmeübergang verbessert wird, verhält sich der elektrische Strom nach einem vom obigen Fall abweichenden Schema. Im Bereich $0.5 \leq x \leq 2.5$ schließt sich der Strom in einem vierzelligen Muster (vergleiche Abbildung 6.27). Die Größe der einzelnen Zellen variiert in x -Richtung wenig. Dies ist auch am Geschwindigkeitsfeld sichtbar, hier ist keine diagonale, sondern eine seitliche Teilung zu erkennen (Abbildung 6.23). Wie schon im ersten Fall führt auch dieses Muster des elektrischen Stromes zu Lorentz-Kräften, die im gesamten Bereich der Konvektionsströmung entgegen wirken. Nahe der beheizten Wand werden nun wieder Ströme in x -Richtung induziert, die abermals in y -Richtung bis an eine Stelle umgelenkt werden, an der ein Stromfluß in x -Richtung möglich ist. Diese Stelle ist in diesem Fall die Mitte der beheizten Wand. Hier fließt konzentriert elektrischer Strom in positive x -Richtung und erzeugt dadurch eine Lorentz-Kraft entgegen der Auftriebsströmung. Da diese Lorentz-Kraft nicht wie im ersten Fall nur in den Eckbereichen wirkt, sondern direkt in der Mitte der beheizten Wand, wird eine Fluidströmung erzwungen, die direkt an der Wand entgegen der Auftriebsströmung fließt (siehe Abbildungen 6.23 und 6.25). Diese Gegenströmung ist die Ursache des η -Profils in der Temperatur und dem damit verbundenen steileren Temperaturgradienten und der Bulk-Konvektion an der beheizten Wand. Dadurch wird der Wärmeübergang an dieser Wand verbessert.

Mit Hilfe dieser Strompfade kann zusätzlich erklärt werden, warum mit weiter zunehmender Hartmann-Zahl irgendwann der Effekt des erhöhten Wärmeübergangs verschwindet. Nimmt die Hartmann-Zahl weiter zu, verstärken sich die auftretenden Lorentz-Kräfte immer mehr. Irgendwann ist ein Punkt erreicht, an dem diese so stark sind, daß im Bereich $0.5 \leq x \leq 2.5$ die Konvektionsströmung völlig unterdrückt wird; deshalb wird dann die Situation der reinen Wärmeleitung erreicht.

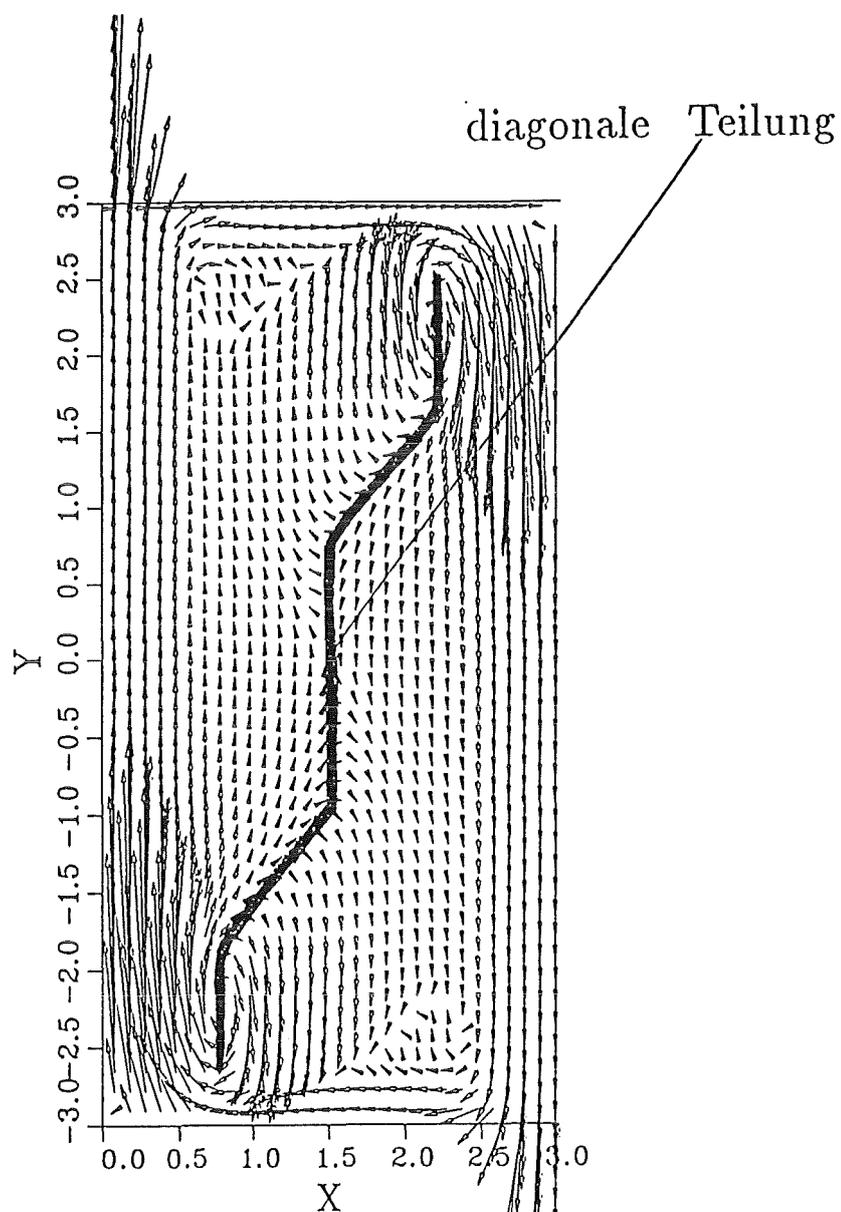


Abbildung 6.22: Die Geschwindigkeit in der vertikalen Ebene bei $z=0$.
Es gilt: $Ra = 5 \cdot 10^5$, $Pr=0.05$, $M=100$.

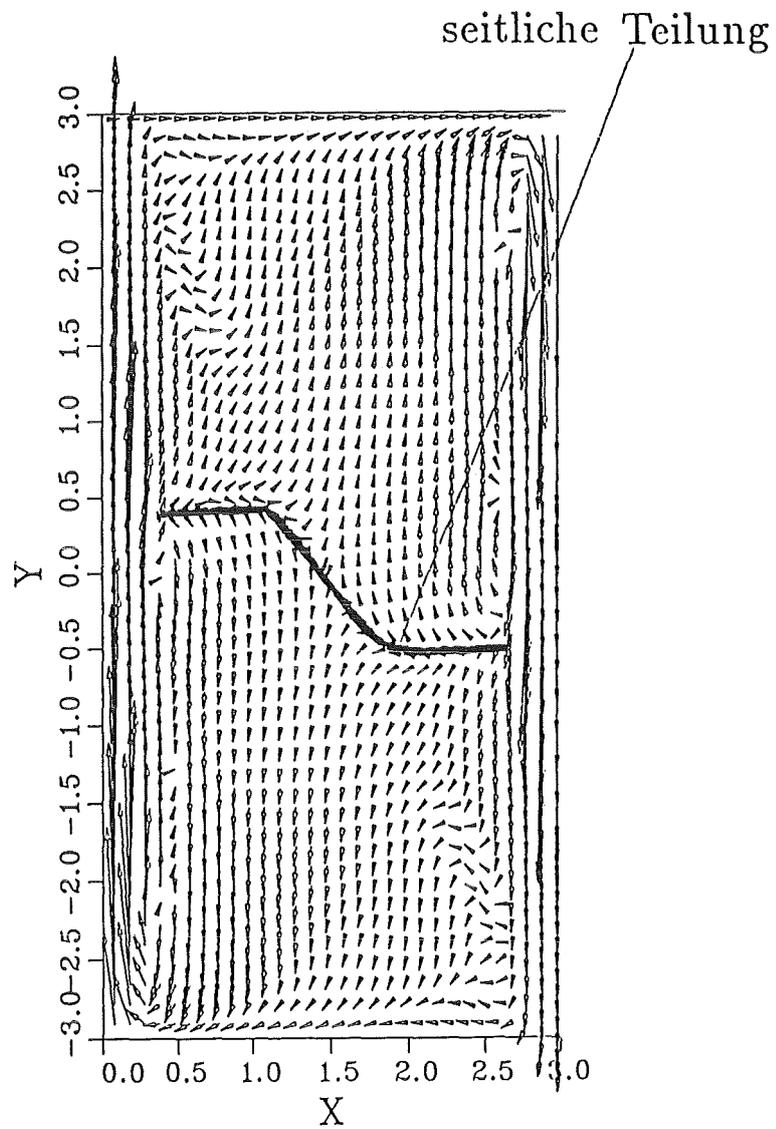


Abbildung 6.23: Die Geschwindigkeit in der vertikalen Ebene bei $z=0$.
Es gilt: $Ra = 5 * 10^5$, $Pr=0.05$, $M=300$.

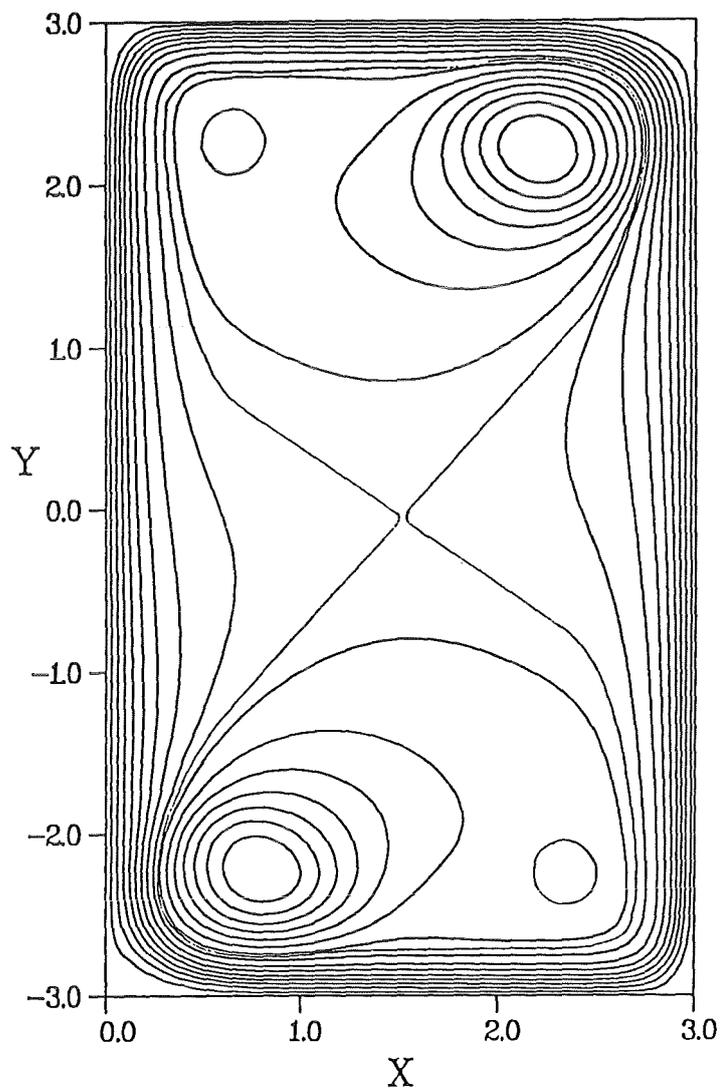


Abbildung 6.24: Die Stromlinien in der vertikalen Ebene bei $z=0$.
Es gilt: $Ra = 5 * 10^5$, $Pr=0.05$, $M=100$.

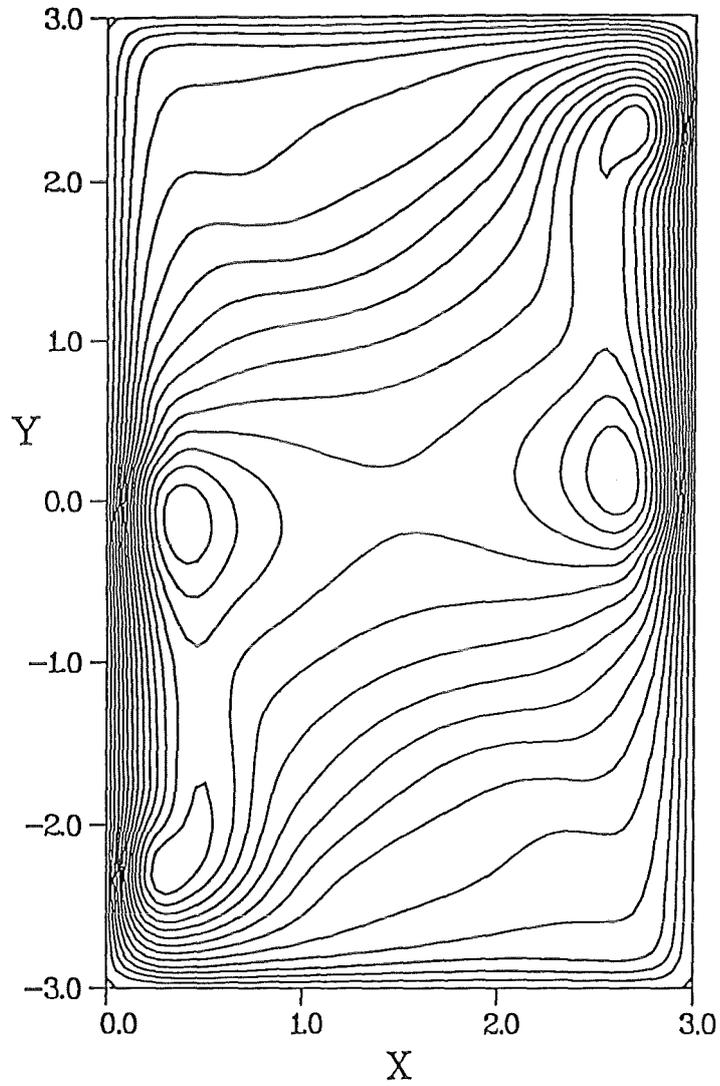


Abbildung 6.25: Die Stromlinien in der vertikalen Ebene bei $z=0$.
Es gilt: $Ra = 5 * 10^5$, $Pr=0.05$, $M=300$.

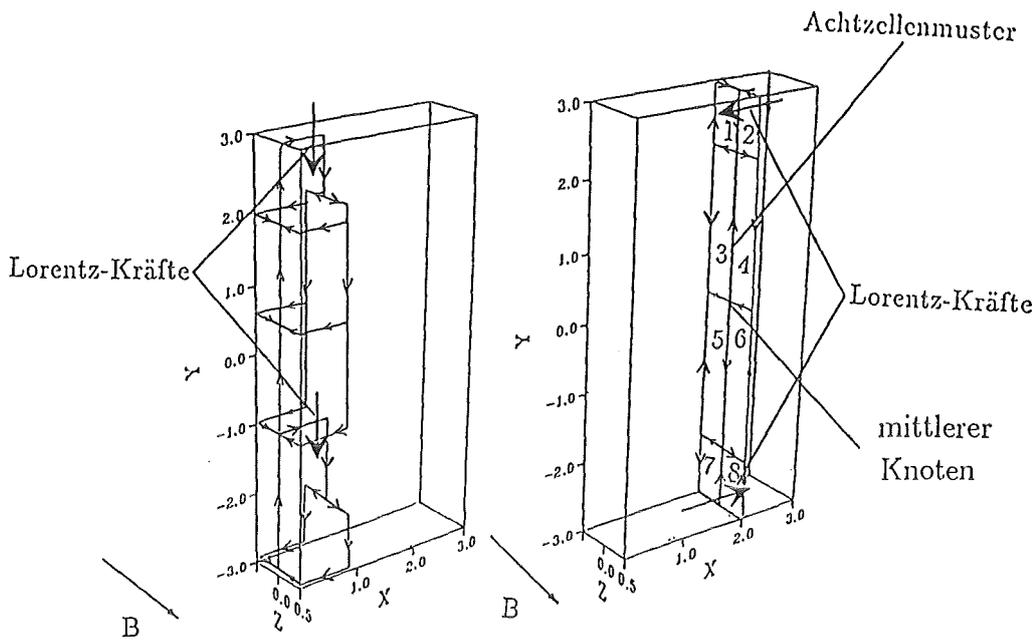


Abbildung 6.26: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung bei $Ra = 5 \cdot 10^5$, $Pr=0.05$, $M=100$. Links ist der Strompfad im Bereich $x < 0.2$ und rechts im Bereich $0.2 < x < 0.8$ dargestellt.

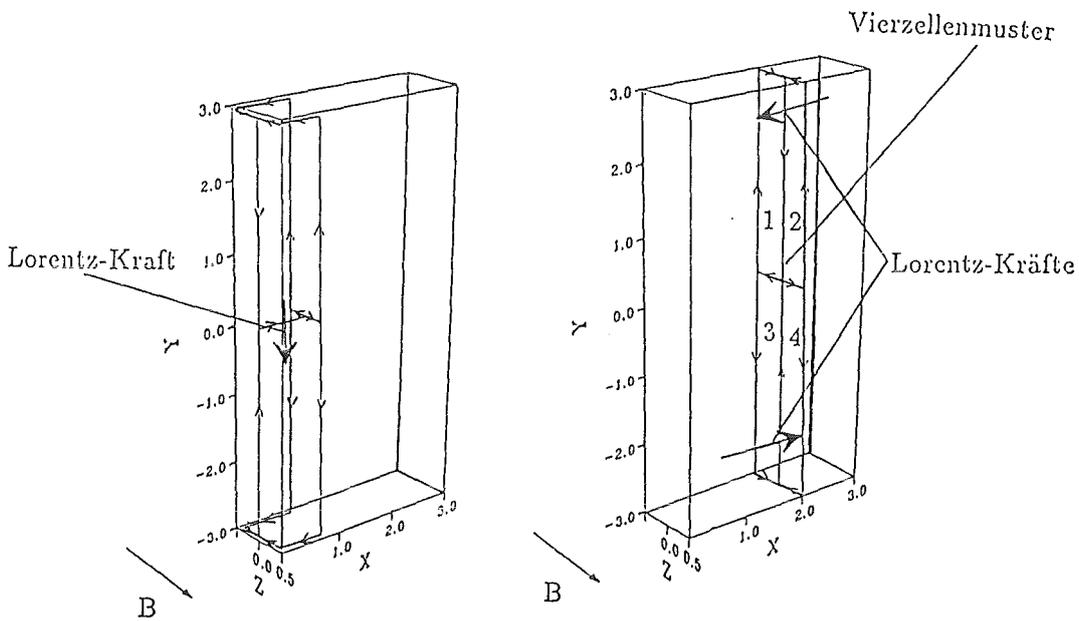


Abbildung 6.27: Der elektrische Strom und die daraus resultierende Kraftwirkung bei $Ra = 5 \cdot 10^5$, $Pr=0.05$, $M=300$. Links ist der Strompfad im Bereich $x < 0.2$ und rechts im Bereich $0.2 < x < 0.8$ dargestellt.

6.3 Magnetokonvektion bei vertikalen Temperaturgradienten

Strömungen, die durch vertikale Temperaturgradienten angetrieben werden, stellen gegenüber den bisher betrachteten Problemstellungen mit horizontalen Gradienten eine besondere numerische Herausforderung dar. Die Einschwingvorgänge zu den Endlösungen sind sehr langsam und oftmals sind diese Lösungen ohnehin zeitabhängig. Dies kann dazu führen, daß Realzeiten von mehreren Minuten und mehr untersucht werden müssen. Für die numerischen Rechnungen sind deshalb viele Zeitintegrationen notwendig. Um die Anzahl der Gitterpunkte und damit auch die Rechenzeit nicht zu sehr anwachsen zu lassen, kann das Seitenverhältnis zwischen der längsten und kürzesten Seitenkante nicht allzu groß gewählt werden. Zusätzlich ist zu fordern, daß das Magnetfeld eine große Komponente parallel zur kürzesten Seitenlänge hat, da in Magnetfeldrichtung die Diskretisierung fein sein sollte.

In diesem Abschnitt wird der Einfluß eines Magnetfelds parallel zur Gravitation auf die Naturkonvektionsströmung in einem geschlossenen, elektrisch isolierten Behälter mit den Seitenverhältnissen 6:3:1 untersucht (siehe Abbildung 6.28). Die Seitenwände dieses Behälters sind adiabat. Der Wert der Prandtl-Zahl wird auf $Pr = 0.05$ festgelegt.

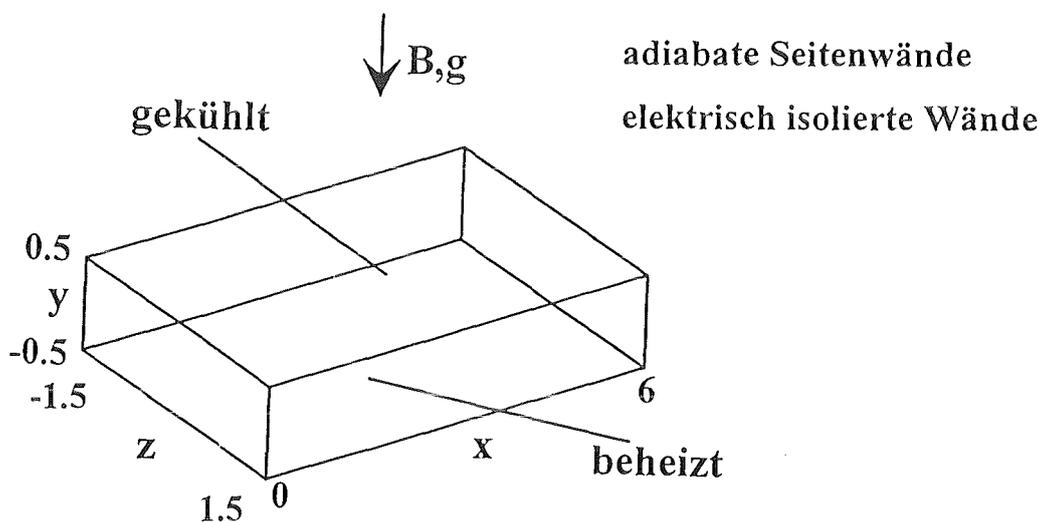


Abbildung 6.28: Die Problemstellung.

Die numerischen Rechnungen werden mit $80 \times 40 \times 80$ Gitterpunkten durchgeführt. Daraus folgt für die dimensionslosen Gitterweiten: $\Delta x = 0.075$, $\Delta y = 0.025$, $\Delta z = 0.0375$. Als Verfahren für die zeitliche Diskretisierung wird das Adams-Bashfort-Verfahren ausgewählt.

Um den Einfluß eines Magnetfelds auf die Naturkonvektionsströmung zu studieren, ist es sinnvoll, zuerst die Strömung ohne Magnetfeldeinfluß zu beschreiben. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 6.7 zusammengefaßt. Die kritische Rayleigh-Zahl für das Einsetzen der Naturkonvektionsströmung ohne den Einfluß eines Magnetfelds kann mit Hilfe von Kirchartz [47] für obige Konfiguration auf $Ra_{krit} \approx 1950$ abgeschätzt werden. Eigene Rechnungen für eine Rayleigh-Zahl von $Ra = 3000$ zeigen eine stationäre Lösung mit sechs Konvektionsrollen im Innern des Behälters (siehe Abbildung 6.29). Die durchschnittliche Nusselt-Zahl an der beheizten Wand \overline{Nu} ergibt sich dabei zu $\overline{Nu} = 1.27$. Dieser Wert der Nusselt-Zahl bestätigt die Größenordnung der bereits zuvor abgeschätzten kritischen Rayleigh-Zahl. Eine exakte numerische Bestimmung dieser Stabilitätsgrenze unterbleibt aus Gründen der Rechenzeit, da sich gerade in der Nähe der kritischen Rayleigh-Zahl Änderungen der Strömungszustände sehr langsam vollziehen. Um die Lösung bei $Ra = 3000$ zu errechnen, ergeben sich bereits Rechenzeiten von mehreren CPU-Tagen.

Wird die Rayleigh-Zahl in Bereiche $10^4 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^4$ erhöht, zeigen sich instationäre Strömungen, die sich als 4-Rollenmuster ausbilden (vergleiche Abbildung 6.30). Diese Konvektionsrollen sind gekennzeichnet durch starke lokale Geschwindigkeitsdifferenzen, die sich mit der Zeit ändern.

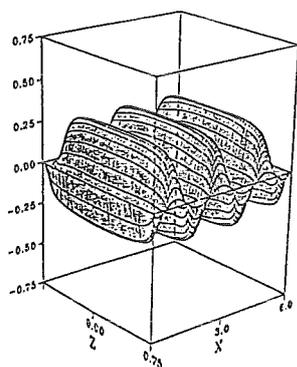


Abbildung 6.29: Die vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene. $Pr = 0.05$, $M = 0$, $Ra = 3000$.

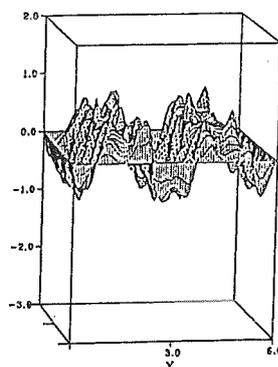


Abbildung 6.30: Die vertikale Momentangeschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene. $Pr = 0.05$, $M = 0$, $Ra = 3 \cdot 10^4$.

Naturkonvektion im 6:3:1 Behälter		
Vertikaler Temperaturgradient, $M = 0$, $Pr = 0.05$, $\vec{B} \parallel \vec{g}$		
Rayleigh-Zahl	\overline{Nu}	Strömungsform
$Ra \approx 1950$	1	Einsetzen stationärer Konvektion
$Ra = 3000$	1.27	stationäres 6-Rollenmuster
$Ra = 6000$	1.83	instationäres 6-Rollenmuster Zick-Zack-Instabilität
$10^4 \leq Ra \leq 5 * 10^4$	1.94 - 2.95	instationäres 4-Rollenmuster unregelmäßige Deformationen der Rollen

Tabelle 6.7: Die durchschnittliche Nusselt-Zahl \overline{Nu} an der beheizten Wand und die sich einstellende Strömungsform.

Die Tatsache, daß sich gegenüber der niedrigeren Rayleigh-Zahl die Anzahl der Rollen verringert, steht in Einklang mit Beobachtungen anderer Autoren (Kirchartz [47]).

Wählt man für die Rayleigh-Zahl den Wert $Ra = 6000$, ergibt sich ein neues Szenario. Es bilden sich 6 Konvektionsrollen aus, die aber anders als im Fall $Ra = 3000$ Instabilitäten zeigen. Diese werden zuerst durch eine regelmäßige Größenänderung der Rollen sichtbar. Die Rollen pulsieren und ändern ihren Durchmesser mit der Zeit. Diese Änderungen sind zunächst konstant entlang der Rollenachse. Nachdem dieses Übergangsstadium durchlaufen ist, kommt es zu einem Ausknicken des Rollenmusters und man beobachtet eine Zick-Zack-Instabilität (siehe Abbildung 6.31). Ob diese Strömung letztendlich stationär wird oder zeitabhängig bleibt, kann mit Hilfe der numerischen Simulation nicht geklärt werden. Allein um bis an den Punkt zu rechnen, an dem sich das Ausknicken der Rollen das erste Mal zeigt, muß von einer Rechenzeit von einer CPU-Woche ausgegangen werden.

Das Auftauchen von Instabilitäten schon bei schwach überkritischen Rayleigh-Zahlen ist typisch für Strömungen bei niedrigen Prandtl-Zahlen. Dieses Phänomen beschreibt bereits Krishnamurti [52]. Die Pulsation der Rollen in einem Übergangsstadium wurde bis jetzt von anderen Autoren noch nicht beobachtet. Die sich jedoch schließlich ergebende Zick-Zack-Instabilität finden bereits Clever und Busse [12], [13].

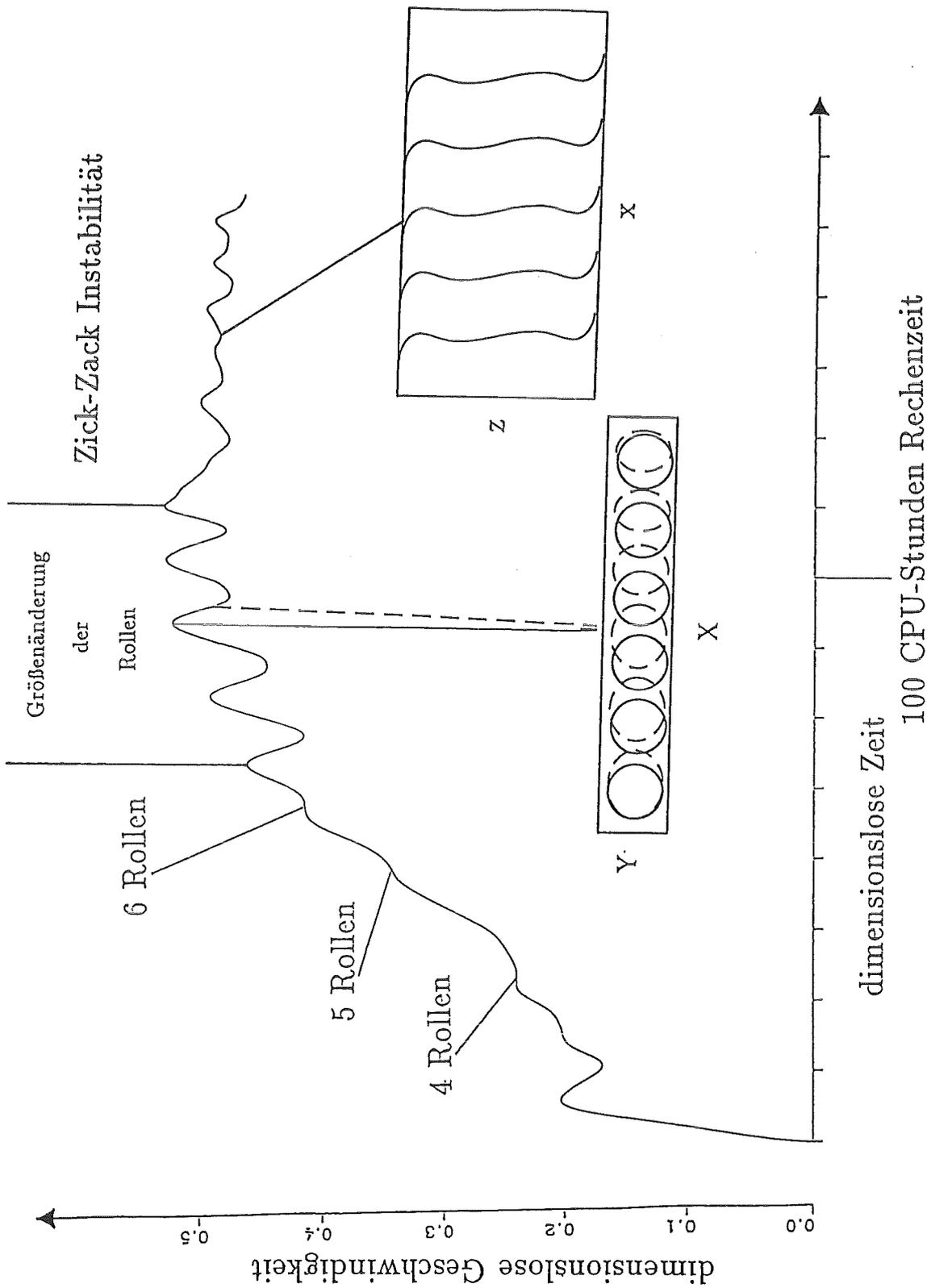


Abbildung 6.31:

Das zeitliche Verhalten der Strömung bei $M = 0$, $Pr = 0.05$ und $Ra = 6000$. Es ist das Ausbilden des 6-Rollenmusters gezeigt, das zuerst transiente Instabilitäten in Form von Größenänderungen der Rollen aufweist. Schließlich geht diese Form der Instabilität in eine Zick-Zack-Instabilität über.

Setzt man die Naturkonvektionsströmungen dem Einfluß eines Magnetfelds parallel zur Gravitation aus, können gegenüber den Strömungen bei $M = 0$ signifikante Änderungen beobachtet werden. Die numerischen Rechnungen werden im Parameterbereich $1.5 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^4$ ausgeführt, da hier die Einschwingvorgänge zu den Endlösungen weniger Zeit benötigen als in Bereichen schwach überkritischer Rayleigh-Zahlen. Dadurch soll die numerische Rechenzeit in erträglichen Grenzen gehalten werden. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Ergebnisse wird in Tabelle 6.8 gegeben.

Die augenfälligste Eigenschaft dieser Magnetokonvektionsströmungen ist die steigende Anzahl der Konvektionsrollen im Behälter mit steigender Hartmann-Zahl. Die Rollen werden in x -Richtung immer schmaler und benötigen deshalb weniger Platz. Als direkte Folge dessen wird die Anzahl der Rollen stetig erhöht. Bei einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 5 \cdot 10^4$ z.B. sind bei einer Hartmann-Zahl von $M = 60$ schon 12 Rollen ausgebildet, wogegen die Strömung für $M = 0$ nur vier Rollen aufweist (siehe Tabelle 6.8). Dieses Verhalten wird bereits in der Theorie für unendlich ausgedehnte, horizontale Fluidschichten vorhergesagt (vergleiche Kapitel 4.3.2). Demzufolge variiert die Breite einer Konvektionsrolle mit $M^{-\frac{1}{3}}$. Auch der bekannte Effekt, daß die Anzahl der Konvektionsrollen mit steigender Rayleigh-Zahl abnimmt, kann nachgewiesen werden. Bei einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 1.5 \cdot 10^4$ bilden sich bei einer Hartmann-Zahl von $M = 28$ bereits acht Rollen aus, während bei einer höheren Rayleigh-Zahl von $Ra = 3 \cdot 10^4$ für eine Hartmann-Zahl von $M = 30$ nur sechs Rollen beobachtet werden (Tabelle 6.8). Es kann folglich eine Art Konkurrenz zweier gegenläufiger Effekte beobachtet werden. Steigende Rayleigh-Zahlen führen zu breiteren und steigende Hartmann-Zahlen zu schmaleren Konvektionsrollen.

Vergleicht man die kritischen Parameterkonstellationen, ab denen die Konvektion vollständig unterdrückt wird, mit denen bei der unendlich ausgedehnten, horizontalen Fluidschicht, findet man eine gute Übereinstimmung. Die durchschnittliche Nusselt-Zahl an der beheizten Wand wird sicherlich den Wert $\overline{Nu} = 1$ annehmen, wenn die Konvektion vollständig unterdrückt ist. Bei einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 1.5 \cdot 10^4$ nimmt diese Nusselt-Zahl für $M = 28$ den Wert $\overline{Nu} = 1.12$ an (Tabelle 6.8). Es kann davon ausgegangen werden, daß die Hartmann-Zahl, ab der $\overline{Nu} = 1$ gilt, nur wenig höher liegt. Bei dem Beispiel der unendlich ausgedehnten, horizontalen Fluidschicht liegt diese Hartmann-Zahl bei $M = 32$. Dies zeigt die gute Übereinstimmung. Vielleicht liegt der numerisch ermittelte Wert dieser Hartmann-Zahl etwas zu hoch, da davon ausgegangen werden kann, daß die Seitenwände des geschlossenen Behälters zu einer zusätzlichen Dämpfung der Konvektion führen. Eine mögliche Erklärung hierfür wäre, daß die errechneten Lösungen nicht weit genug auskonvergieren, um die Nusselt-Zahl exakt genug zu treffen. Für die

Magnetokonvektion im 6:3:1 Behälter		
Vertikaler Temperaturgradient, $Pr = 0.05$, $\vec{B} \parallel \vec{g}$		
$Ra = 1.5 * 10^4$		
	\overline{Nu}	Strömungsform
$M = 0$	1.98	4 Rollen, instationär
$M = 20$	1.32	6 Rollen, stationär
$M = 25$	1.23	6 Rollen, stationär
$M = 28$	1.12	8 Rollen, stationär
Theorie für unendlich ausgedehnte, horizontale Fluidschicht: $M \geq 32 \implies \overline{Nu} = 1$		
$Ra = 3 * 10^4$		
	\overline{Nu}	Strömungsform
$M = 0$	2.49	4 Rollen, instationär
$M = 20$	2.19	6 Rollen, stationär
$M = 30$	1.57	6 Rollen, stationär
$M = 35$	1.31	8 Rollen, stationär
Theorie für unendlich ausgedehnte, horizontale Fluidschicht: $M \geq 45 \implies \overline{Nu} = 1$		
$Ra = 5 * 10^4$		
	\overline{Nu}	Strömungsform
$M = 0$	2.92	4 Rollen, instationär
$M = 30$	2.25	6 Rollen, stationär
$M = 50$	1.33	10 Rollen, stationär
$M = 60$	1.16	12 Rollen, stationär
Theorie für unendlich ausgedehnte, horizontale Fluidschicht: $M \geq 65 \implies \overline{Nu} = 1$		

Tabelle 6.8: Die durchschnittliche Nusselt-Zahl \overline{Nu} an der beheizten Wand und die sich einstellende Strömungsform.

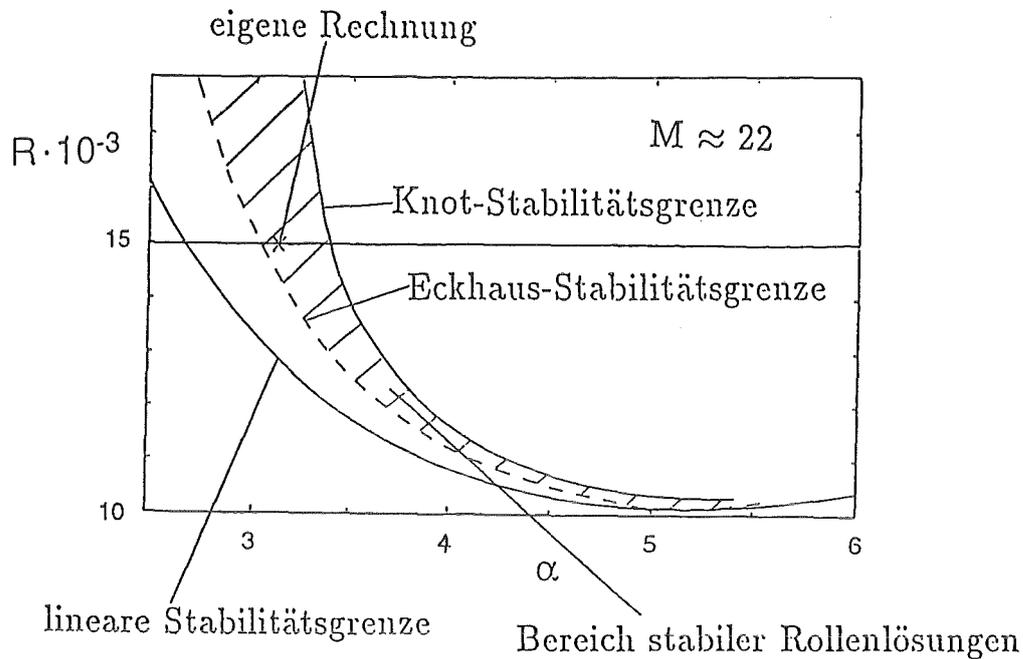


Abbildung 6.32: Einordnung eines mit MAKON ermittelten Ergebnisses in ein Stabilitätsdiagramm von Clever und Busse.

anderen verwendeten Rayleigh-Zahlen können analoge Betrachtungen angestellt werden.

Auffällig ist, daß bei Einfluß eines Magnetfelds ausschließlich stationäre Lösungen bestimmt werden. Die Instabilitäten, die von Clever und Busse [14] beobachtet werden, können nicht gefunden werden. Ein Grund hierfür könnte sicherlich sein, daß die Hartmann-Zahlen zu groß waren, um instationäre Lösungen zuzulassen. Ein Indiz dafür kann ein Stabilitätsdiagramm aus der Arbeit von Clever und Busse [14] liefern. In dieses Diagramm, das für eine Hartmann-Zahl von $M \approx 22$ und eine Prandtl-Zahl von $Pr = 0.01$ ermittelt wurde, kann man ein Ergebnis für $M = 20$ und $Ra = 1.5 \cdot 10^4$ eintragen, das mit MAKON erzielt wurde (vergleiche Abbildung 6.32). Es wird deutlich, daß das eigene Ergebnis in einen Bereich eingetragen werden kann, in dem stationäre Lösungen beobachtet werden können. Selbstverständlich muß dabei beachtet werden, daß für die eigenen Rechnungen eine etwas größere Prandtl-Zahl von $Pr = 0.05$ verwendet und keine unendlich ausgehende Fluidschicht untersucht wurde. Deshalb können beide Ergebnisse nur bedingt verglichen werden. Desweiteren wäre es möglich, daß die Rechen-

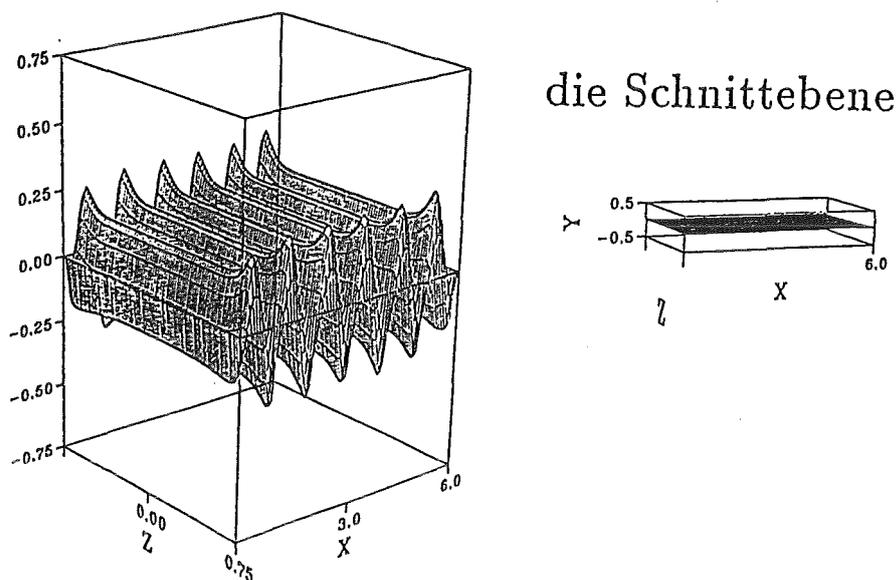


Abbildung 6.33: Die Geschwindigkeit in y -Richtung. Es gilt: $Pr = 0.05$,
 $Ra = 5 \cdot 10^4$, $M = 60$.

zeiten zu kurz waren, um eventuelle Instabilitäten beobachten zu können. Schon die Erfahrungen bei den Strömungen ohne Einfluß eines Magnetfelds weisen auf extrem lange Rechenzeiten hin, um Instabilitäten nachzuweisen. Jedenfalls ist es nicht möglich, in vertretbarer Rechenzeit diese instationären Vorgänge aufzulösen oder gar Stabilitätskarten zu erstellen.

Untersucht man die Geschwindigkeitsprofile der berechneten Lösungen, findet man erneut die typischen Überhöhungen in den Eckbereichen des Behälters. Allerdings existieren diese Überhöhungen nicht nur für die horizontale Geschwindigkeit in x -Richtung (siehe Abbildung 6.34), wie sie bei identischer Magnetfeldrichtung bei einem horizontalen Temperaturgradienten bereits auftauchen (vergleiche Kapitel 5.2.2), sondern auch für die vertikale Geschwindigkeit (siehe Abbildung 6.33).

Der elektrische Strom und die daraus resultierenden Lorentz-Kräfte können auch in diesem Fall eine Erklärung für dieses Verhalten liefern. Durch die Fluidbewegung in x -Richtung werden elektrische Ströme in z -Richtung induziert (Drei-Finger-Regel). Diese Ströme schließen sich teilweise wie im Fall des horizontalen Temperaturgradienten in y - z -Ebenen. Da aber bedingt durch die Rollenmuster mit ihren abwechselnden Geschwindigkeitsrichtungen in x -Richtung jeweils abwechselnd Ströme in positive bzw. negative y -Richtung induziert werden, kann sich der elektrische Strom auch in x - z -Ebenen schließen (siehe Abbildung 6.35). Der elektrische Strom hat also zwei Möglichkeiten sich zu schließen. Der Kurzschluß wird immer auf die Art erfolgen, die mit

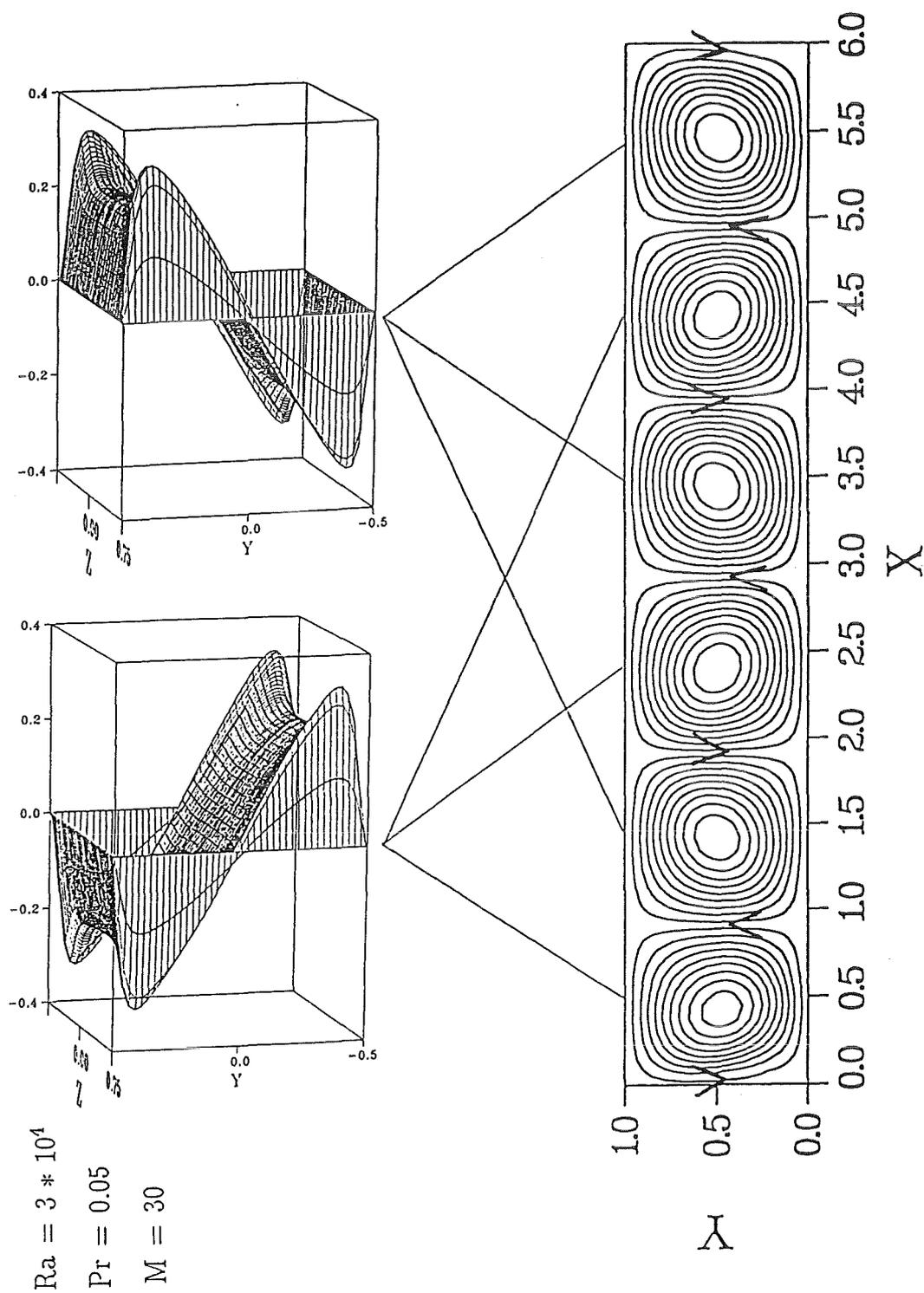


Abbildung 6.34: Die Geschwindigkeit in x-Richtung.

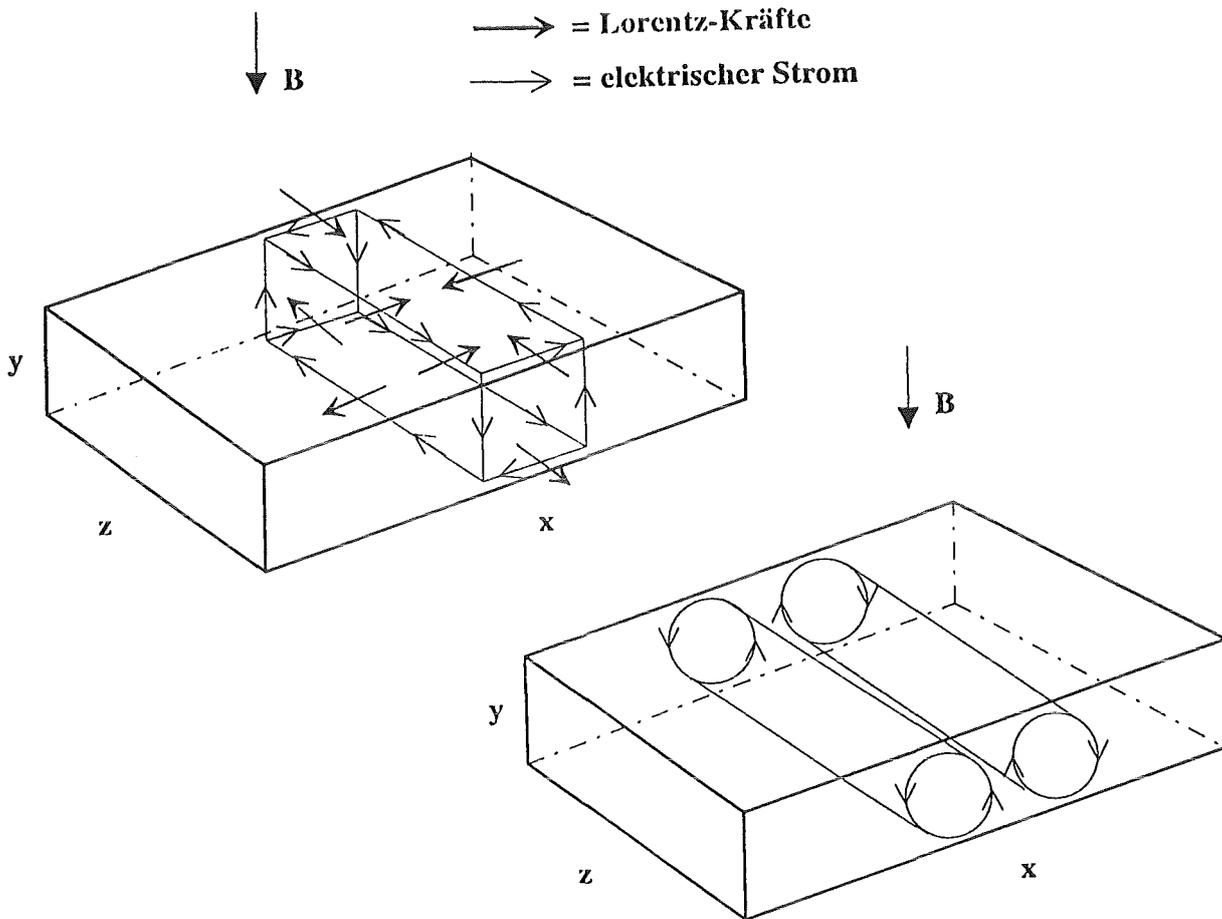


Abbildung 6.35: Das Verhalten des elektrischen Stroms.

dem kürzesten Strompfad verbunden ist. In Bereichen nahe der Deck- und Bodenwand wird sich der Strom vorwiegend in x - z -Ebenen schließen, in der Mitte des Behälters wird ein Stromschluß über y - z -Ebenen bevorzugt. Da mit zunehmender Hartmann-Zahl die Erstreckung der Rollen in x -Richtung immer mehr abnimmt, wird in diesem Fall der Stromschluß über x - z -Ebenen immer attraktiver.

Die Überhöhungen der Geschwindigkeit in den Eckbereichen für die Geschwindigkeit in x -Richtung können erneut damit erklärt werden, daß die Komponente der Lorentz-Kraft, die im Kernbereich der Strömung dieser entgegenwirkt, in den Eckbereichen verschwindet. Dieses Phänomen wird ausgelöst, da die elektrischen Ströme nahe der elektrisch isolierten Wand umgelenkt werden. Für die Tatsache, daß diese Geschwindigkeitsüberhöhungen für die Strömung in y -Richtung nicht wie bei horizontalen Temperaturgradienten

ten zurückgebildet werden, sind diejenigen elektrischen Ströme verantwortlich, die sich in x-z-Ebenen schließen. Der Stromfluß in x-Richtung nahe den Seitenwänden führt zu Lorentz Kräften in z-Richtung. Diese Kräfte weisen jeweils über die halbe Behälterhöhe zu den Wänden hin. Folglich wird in diesen Bereichen das Fluid in die Seitenschicht gedrängt und die Überhöhungen bleiben dort bestehen. Um die Überhöhungen dann in den Bereichen völlig zurückzubilden, in denen die Lorentz-Kräfte von der Wand wegweisen, ist offensichtlich die Lauflänge zu gering.

6.4 Schlußbemerkungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden dreidimensionale Naturkonvektionsströmungen unter dem Einfluß starker Magnetfelder untersucht. Hierzu werden die Grundgleichungen numerisch mittels der Finiten-Differenzen-Methode auf einem versetzten Maschengitter gelöst.

Nach der Validierung des Simulationsprogramms werden für den Kubus systematische Untersuchungen mit Variation der Magnetfeldrichtung und der thermischen Randbedingungen für horizontale Temperaturgradienten durchgeführt. Die grundlegenden Phänomene von Magnetokonvektionsströmungen bei seitlicher Beheizung können herausgearbeitet werden.

Die experimentellen Ergebnisse von Fumizawa können ohne Einschränkung bestätigt und erstmals physikalisch erklärt werden. Dieser hatte in einer Anordnung mit den Seitenverhältnissen 12:6:1 bei einem horizontalen Temperaturgradienten Parameterbereiche entdeckt, in denen das Magnetfeld den Wärmeübergang fördert. Anhand dieses Beispiels können Mechanismen aufgezeigt werden, die in bestimmten Parameterbereichen die dämpfende Wirkung eines Magnetfelds kompensieren.

Als Beispiel eines vertikalen Temperaturgradienten wird die Strömung in einem elektrisch isolierten 6:3:1 Behälter untersucht, der von unten beheizt wird. Das Magnetfeld steht parallel zur Gravitation. Die aus der Theorie für unendliche ausgedehnte, horizontale Fluidschichten bekannten Phänomene können auch für den geschlossenen Behälter bestätigt werden. Zusätzlich können von dieser Theorie abweichende Strömungsmuster entdeckt werden, die auf den Einfluß der vertikalen Wände zurückzuführen sind.

Der Parameterbereich und die zu untersuchenden Geometrien werden in erster Linie durch die Rechnerleistung und den zu Verfügung stehenden Speicherplatz begrenzt. Die Rechnungen in dieser Arbeit wurden auf den Vektorrechnern VP400/EX und SNI600 durchgeführt. Die Rechenzeiten betragen für bestimmte Kennzahlen bis zu einer CPU-Woche. Es konnten in den Parameterbereichen $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, $0.05 \leq Pr \leq 0.71$, $0 \leq M \leq 300$ Ergebnisse

erzielt werden. Es zeigte sich, daß maximal Geometrien untersucht werden können, bei denen die längste Seite des Behälters um einen Faktor sechs länger ist als die kürzeste Seite. Mit Hilfe einer eventuellen Parallelisierung des Programmes könnte man den Bereich der lösbaren Probleme auf der inzwischen schon zur Verfügung stehenden CRAY J916/16 sicherlich etwas vergrößern.

Vergleicht man MAKON mit anderen bekannten Programmen zur Berechnung fluiddynamischer Probleme, wie z.B. FLUTAN oder TURBIT, so kann festgestellt werden, daß all diese Programme Finite-Differenzen-Verfahren mit expliziter Zeitdiskretisierung verwenden. Auch die Methoden für die örtliche Diskretisierung von Differentialgleichungen sind ähnlich. Damit liegen die Rechengeschwindigkeiten in vergleichbaren Größenordnungen. TURBIT und MAKON sind auf einfache Rechteckgeometrien angewiesen, wobei TURBIT nichtäquidistante Gitter einsetzen kann. FLUTAN verwendet ebenfalls nichtäquidistante Gitter und kann zusätzlich kompliziertere Geometrien untersuchen. FLUTAN und TURBIT haben Turbulenzmodelle implementiert und sind für den Einsatz bei hohen Rayleigh-Zahlen konzipiert. MAKON ist speziell für Magnetokonvektion bei niedrigen Prandtl-Zahlen ausgelegt. Das Verhalten des Programmes bei sehr hohen Rayleigh-Zahlen ($Ra > 10^6$) wurde nicht ausgetestet.

Weitere denkbare Schritte der Programmentwicklung in MAKON sind die Erweiterung auf nichtäquidistante Gitter und eine teilweise analytische Behandlung der Hartmannschichten. Dies würde die Gesamtanzahl der zur Zeit noch benötigten Gitterpunkte verringern und die Flexibilität bezüglich der Auswahl der Problemstellungen weiter erhöhen. Außerdem wäre es wünschenswert, allgemeinere Geometrien, auch mit runden Berandungen und inneren Einbauten, untersuchen zu können. Hierzu wären allerdings Umstrukturierungen in größerem Umfang nötig, da in diesem Falle der schnelle Poissongleichungslöser SHAFT3, ein Kernstück des Lösungsalgorithmus, nicht ohne weiteres verwendet werden kann. Abhilfe könnte hier die sogenannte Einflußmatrix-Technik schaffen. Wenig sinnvoll erscheint die Erweiterung auf elektrisch endlich leitende Wände, da die elektrische Leitfähigkeit der Wände bei Magnetokonvektionsströmungen keine bedeutende Rolle spielt. Dies ist der Fall, da sich die elektrischen Ströme leicht im Fluid kurzschließen können und elektrisch endlich leitende Wände nicht benötigen, um die elektrischen Strompfade effektiv zu schließen.

Bezeichnungen

1. Lateinische Buchstaben

a	charakteristische Länge
A	Amplitude
\vec{B}	magnetische Induktion
\hat{c}	Lichtgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärmekapazität
c_x	eindimensionale Courant-Zahl
d_x	eindimensionales Diffusionslimit
D	Dissipation
e	Exponent
\vec{E}	elektrisches Feld
F_{Dr}	Faktor vor dem Druckterm
F_{id}	das Inverse des Faktors vor dem diffusiven Term
F_L	Lorentz-Kraft
G	Anfachungsfaktor
h	Abstand zweier unendlich ausgedehnter Berandungen
H	Differentialoperator
I	komplexe Einheit
\vec{j}	elektrische Stromdichte
\vec{k}	Einheitsvektor in Richtung der Schwerkraft
\vec{n}	Normaleneinheitsvektor
p	Druck
t	Zeit
\vec{t}	Einheitsvektor tangential zur Wand
Δt	Zeitinkrement
T	Temperatur

u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
w	Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
v_0	Bezugsgeschwindigkeit = Auftriebsgeschwindigkeit
x, y, z	globales Koordinatensystem
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Gitterabstände in x-, y-, z-Richtung

2. Griechische Buchstaben

α	Wellen-Zahl
β	thermischer Volumenausdehnungskoeffizient
γ	Winkel zwischen Magnetfeld und der Horizontalen
δ	Winkel zwischen Magnetfeld und der Vertikalen
δ_H	Dicke der Hartmannschicht
δ_S	Dicke der Seitenschicht
ε	Dielektrizitätskonstante
ε_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
κ	Temperaturleitfähigkeit
κ_D	allgemeine Diffusivität
λ	LECUSSO-Faktor
λ_{Kr}	Wellenlänge der Konvektionsrollen
λ_{Wl}	Wärmeleitfähigkeit
φ	allgemeine physikalische Größe
Φ	Elektrisches Potential
Φ_e	Phasenwinkel der exakten Lösung
Φ_P	Phasenwinkel
η	dynamische Viskosität
$\hat{\eta}$	Imaginärteil des Anfachungsfaktors
$\hat{\zeta}$	Realteil des Anfachungsfaktors
μ	magnetische Permeabilität
ν	kinematische Viskosität
ρ	Dichte
ρ_{el}	elektrische Ladungsdichte
σ	elektrische Leitfähigkeit
τ	Schubspannung
Θ	Phasenwinkel

3. Abkürzungen

ADI-Verfahren	ein teilimplizites Verfahren	(<u>A</u> lternating <u>D</u> irection <u>I</u> mplicit)
CDS	Zentrales-Differenzen-Verfahren	(<u>C</u> entral <u>D</u> ifference <u>S</u> cheme)
FDM	Finites-Differenzen-Verfahren	(<u>F</u> inite <u>D</u> ifference <u>M</u> ethod)
FEM	Finite-Element-Methode	(<u>F</u> inite <u>E</u> lement <u>M</u> ethod)
HDS	Hybrides-Differenzen-Verfahren	(<u>H</u> ybrid <u>D</u> ifference <u>S</u> cheme)
LECUSSO	Name eines Upwind-Verfahrens	(<u>L</u> ocally <u>E</u> xact <u>C</u> onsistent <u>U</u> pwind <u>S</u> cheme of <u>S</u> econd <u>O</u> rd)
MAKON	Name des Rechenprogramms	(<u>M</u> agnetok <u>o</u> n <u>v</u> e <u>k</u> tio <u>n</u>)
MHD	Magnetohydrodynamik	(<u>M</u> agnetoh <u>y</u> dro <u>d</u> yna <u>m</u> ics)
UDS	Upwind-Verfahren 1.Ordnung	(<u>U</u> pwind <u>D</u> ifference <u>S</u> cheme)
XL	Wand bei $x = 0$	(<u>x</u> -low)
XH	Wand bei $x = 1$	(<u>x</u> -high)
YL	Wand bei $x = -0.5$	(<u>y</u> -low)
YH	Wand bei $x = 0.5$	(<u>y</u> -high)
ZL	Wand bei $x = -0.5$	(<u>z</u> -low)
ZH	Wand bei $x = 0.5$	(<u>z</u> -high)

4. Dimensionslose Kennzahlen

M	$= aB\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$	Hartmann-Zahl
N	$= \frac{\sigma a B^2}{\rho \nu_0}$	Interaktionsparameter
Pe	$= RePr$	Peclet-Zahl
Pr	$= \frac{\nu}{\kappa}$	Prandtl-Zahl
Ra	$= \frac{g\beta\Delta T a^3}{\kappa\nu}$	Rayleigh-Zahl
Ra_{iw}	$= \frac{g\beta q a^5}{\kappa\nu\lambda_{wl}}$	Rayleigh-Zahl mit innerer Wärmequelle gebildet
Re	$= \frac{M^2}{N}$	Reynolds-Zahl
Re_m	$= \mu \sigma \nu_0 a$	magnetische Reynolds-Zahl
$Re_{\Delta x}$	$= F_{id} u \Delta x$	Maschen-Reynolds-Zahl

Maßstabsfaktoren

Die in dieser Arbeit verwendeten dimensionslosen Größen gehen durch die nachstehend angegebene Normierung aus den dimensionsbehafteten hervor. So erhält man eine dimensionslose Größe φ^* aus der Relation

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{M_\varphi} .$$

Hierbei stellt φ die dimensionsbehaftete Größe und M_φ einen sogenannten Maßstabsfaktor dar. Diese Faktoren werden im folgenden angegeben:

$$\begin{array}{ll} M_v & = v_0 = \sqrt{g\beta\Delta T a}, & M_{T-T_0} & = \Delta T, \\ M_x & = a, & M_g & = \frac{v_0^2}{a\Delta T\beta}, \\ M_t & = \frac{a}{v_0}, & M_\Phi & = a v_0 B_0, \\ M_\sigma & = \sigma, & M_j & = \sigma v_0 B_0, \\ M_B & = B_0, & M_p & = a \sigma v_0 B_0^2, \\ M_{c_p} & = c_p, & M_\rho & = \frac{a \sigma B_0^2}{v_0}, \\ M_\nu & = a v_0, & M_q & = \sigma c_p \Delta T B_0^2, \\ M_\kappa & = a v_0. \end{array}$$

Literaturverzeichnis

- [1] **Aitov T. , Kalyntik A. , Tannanaev A. ,**
Numerical analysis of three-dimensional MHD-flow in channels with abrupt change of cross section,
Magnetohydrodynamics, Vol.19, pp.223-229, 1983.
- [2] **Anderson D. A. , Tannehill J. C. , Pletcher R. H. ,**
Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer,
Hemisphere New York, 1984.
- [3] **Antimirov M. Ya. , Volodko I. M. , Zhirnov O. V. ,**
A class of magnetic fields which cause the problems of free magneto-hydrodynamic thermal convection to remain self-similar,
Magnetohydrodynamics, Vol.27, No.3, pp.301-307, 1991.
- [4] **Badger B. ,**
A Wisconsin toroidal reactor design,
University of Wisconsin, report UWFD-68, 1974.
- [5] **Ben Hadid H. , Henry D. ,**
Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field,
Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows in Aussois, Vol.1, pp.47-55, 1994.
- [6] **Ber L. E. ,**
The conjugate problem of the appearance of convection in a rectangular cavity of finite height in a transverse magnetic field,
Magnetohydrodynamics, Vol.25, No.3, pp.322-326, 1989.
- [7] **Bojarevics V. ,**
Buoyancy driven flow and its stability in a horizontal rectangular channel with an arbitrary oriented transversal magnetic field,

Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows in Aussois, Vol.1, pp.37-45, 1994.

- [8] **Bronstein I. N. , Semendjajew K. A. ,**
Taschenbuch der Mathematik,
Gemeinschaftsausgabe Verlag Nauka, Moskau und BSB B. G. Teubner
Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [9] **Bühler L. ,**
Magnetohydrodynamische Strömungen flüssiger Metalle in allgemeinen
dreidimensionalen Geometrien unter der Einwirkung starker, lokal va-
riabler Magnetfelder,
KfK-Bericht Nr.5095, 1993.
- [10] **Chandrasekhar S. ,**
Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability,
Dover Publications Inc., New York, 1961.
- [11] **Chang C. , Lundgren S. ,**
Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct with perfectly con-
ducting electrodes,
ZAMP, Vol.XII, pp.100-114, 1961.
- [12] **Clever R. M. , Busse F. H. ,**
Nonlinear oscillatory convection in the presence of a vertical magnetic
field,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.201, pp.507-523, 1989.
- [13] **Clever R. M. , Busse F. H. ,**
Finite amplitude convection in the presence of an inclined magnetic
field,
European Journal of Mechanics, B/Fluids, Vol.9, pp.225-238, 1990.
- [14] **Clever R. M. , Busse F. H. ,**
Three-dimensional convection in the presence of strong vertical mag-
netic fields,
To be published in the Journal of Fluid Mechanics in 1996
- [15] **Cowley M. ,**
On the temperature distribution due to convection in the horizontal
Bridgman crystal growth configuration with vertical magnetic field,
Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydro-
dynamic Flows in Aussois, Vol.1, pp.27-35, 1994.

- [16] **Davoust L. , Moreau R. , Bolcato R. ,**
Influence of vertical magnetic field on convection in the horizontal Bridgman crystal growth configuration,
Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows in Aussois, Vol.1, pp.74-81, 1994.
- [17] **De Vahl Davis G. , Jones I. ,**
Natural convection in a square cavity: a comparison exercise,
International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.3, pp.227-248, 1983.
- [18] **Emery A. ,**
The effect of a magnetic field upon the free convection of a conducting fluid,
Journal of Heat Transfer, Vol.85, pp.119-124, 1963.
- [19] **Flassak T. , Moussiopoulos N. ,**
A fully vectorized fast direct solver of the Helmholtz equation,
Proceedings of the first international conference in supercomputing, Southampton, UK, pp.67-77, 1989.
- [20] **Fletcher C. ,**
Computational Techniques for Fluid Dynamics,
Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [21] **Fumizawa M. ,**
Natural convection experiment with liquid NaK under transverse magnetic field,
Journal of Nuclear Science and Technology, Vol.17, pp.98-105, 1980.
- [22] **Garandet J. P. , Alboussiere T. ,**
Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field ,
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.35, No.4, pp.741-748, 1992.
- [23] **Garandet J. P. , Alboussiere T. , Moreau R. ,**
Buoyancy driven convection with a uniform magnetic field,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.253, pp.545-565, 1993.
- [24] **Gelfgat A. Yu. , Kit L. ,**
Investigation of occurrence of M-shaped velocity-profiles at a sudden expansion or contraction of a magnetohydrodynamic flow,
Magnetohydrodynamics, Vol.1, pp.43-52, 1971.

- [25] **Gelfgat A. Yu.** ,
Effects of the magnetic field magnitude and direction on the oscillatory thermogravitational convection regimes in a rectangular cavity,
Magnetohydrodynamics, Vol.24, No.3, pp.70-75, 1988.
- [26] **Gelfgat A. Yu.** ,
The magnetic field as it affects the three-dimensional structure of the self-oscillational regimes in free convection,
Magnetohydrodynamics, Vol.26, No.1, pp.13-22, 1990.
- [27] **Gershuni G. Z.** , **Zhukhovitskii E. M.** ,
Convective stability of incompressible fluids,
Verlag Nauka, Moskau, 1972.
- [28] **Günther C.** ,
Vergleich verschiedener Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der 2-d-Konvektions-Diffusionsgleichung anhand eines Beispiels mit bekannter exakter Lösung,
KfK-Bericht Nr.4439, 1988.
- [29] **Günther C.** ,
Fortgeschrittene Upwind-Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung,
KfK-Bericht Nr.4697, 1992.
- [30] **Gorbunov L. A.** , **Lyumkis E. D.** ,
Unique features encountered in the influence exerted by thermoelectromagnetic convection on melt hydrodynamics in the process of monocrystal growth by the czochralski method in a magnetic field,
Magnetohydrodynamics, Vol.26, No.2, pp.75-82, 1990.
- [31] **Gorbunov L. A.** , **Boyarevich A. V.** ,
Effect of magnetic fields of different orientation on thermogravitational convection in an electrically conducting fluid with a horizontal heat flow,
Magnetohydrodynamics, Vol.24, No.2, pp.54-59, 1988.
- [32] **Gorbunov L. A.** , **Boyarevich A. V.** ,
Physical and numerical modelling of the influence exerted by a vertical magnetic field on the forced convection in the processes of using the czochralski method to grow single crystals,
Magnetohydrodynamics, Vol.25, No.2, pp.73-81, 1989.

- [33] **Gorlei V. ,**
The effect of a magnetic field on the stability of convective fluid motion where viscosity depends on temperature,
Magnetohydrodynamics, Vol.25, No.3, pp.121-131, 1989.
- [34] **Hartmann J. ,**
HG-Dynamics I. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field,
Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisc-fysike Meddelelser XV(6), 1937.
- [35] **Hartmann J. , Lazarus F. ,**
HG-Dynamics II. Experimental investigations of the flow of mercury in a homogeneous magnetic field,
Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisc-fysike Meddelelser XV(7), 1937.
- [36] **Hirsch C. ,**
Numerical computation of internal and external flows,
John Wiley & Sons, New York, Vol.I, 1988.
- [37] **Hunt J. ,**
Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.21, pp.577-590, 1965.
- [38] **Hunt J. , Holroyd R. ,**
Applications of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion relevant technology,
UKAEA-Report CLM-R 169, 1977.
- [39] **Hunt J. , Leibovich S. ,**
Magnetohydrodynamic flow in channels of variable cross-section with strong magnetic fields,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.28, pp.241-260, 1967.
- [40] **Hunt J. , Leibovich S. ,**
Applications of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion relevant technology,
UKAEA-Report CLM-R 169, 1977.
- [41] **Karniadakis G. M. , Israeli M. , Orszag S. ,**
High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes Equations,
Journal of Computational Physics, Vol.97, pp.414-443, 1991.

- [42] **Kessler R.** ,
Nonlinear transition in three-dimensional convection,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.174, pp.357-379, 1987.
- [43] **Khalili A.** , **Venkatachalappa M.** , **Subbaraya C.** , **Rath H.** ,
Natural convection in a rectangular enclosure in the presence of a mag-
netic field,
Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydro-
dynamic Flows in Aussois, Vol.1, pp.107-115, 1994.
- [44] **Khine Y.** , **Walker S.** ,
Buoyant convection during Czochralski growth of silicon crystals with
a non-uniform, axissymmetric magnetic field,
Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydro-
dynamic Flows in Aussois, Vol.1, pp.57-64, 1994.
- [45] **Kim C.**,
Development of numerical method for full solution of magnetohydro-
dynamic flows and application to fusion blankets,
Dissertation, University of California, Los Angeles, US, 1989.
- [46] **Kim J.** , **Moin P.** ,
Application of a Fractional-Step-Method to incompressible Navier-
Stokes Equations,
Computational Fluid Dynamics Branch, NASA Ames Research Center,
Moffett Field, California, 1984.
- [47] **Kirchartz K.R.** ,
Dreidimensionale Konvektion in quaderförmigen Behältern,
Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe
genehmigte Habilitationsschrift, 1988.
- [48] **Kishida Y.** , **Takeda K.** ,
Suppression of turbulent Benard convection by horizontal D.C. mag-
netic field,
Proceedings on Liquid Metal MHD Seminar, Vol.1, pp.110-116, 1992.
- [49] **Kit L. et al.** ,
Investigation of the influence of fringe effects on a magnetohydrodyna-
mic flow in a duct with nonconducting walls,
Magnetohydrodynamics, Vol.4, pp.47-53, 1971.
- [50] **Knobloch E.** , **Weiss N. O.** , **Da Costa L. N.** ,
Oscillatory and steady convection in a magnetic field,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.113, pp.153-186, 1981.

- [51] **Kolyshkin A. A.** ,
Convective stability of a horizontal fluid layer with nonuniformly distributed internal sources of heat in a magnetic field,
Magnetohydrodynamics, Vol.24, No.4, pp.435-439, 1988.
- [52] **Krishnamurti R.** ,
On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.42, pp.295-307, 1970.
- [53] **Lenhart L.** ,
Magnetohydrodynamik in Rechteckgeometrien - Volle numerische Simulation,
KfK-Bericht Nr.5241, 1991.
- [54] **Lenhart L.** ,
Magnetohydrodynamik in Rechteckgeometrien - Volle numerische Simulation,
Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation, 1994.
- [55] **Lenhart L.** , **McCarthy K.** ,
Comparison of the core flow solution and the full solution for MHD flow,
Metallurgical Technologies, Energy Conversion, and MHD flows, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol.148, pp.482-499, 1990.
- [56] **Lilly D. K.** ,
On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems,
U.S. Weather Bureau Monthly Weather Review, Vol.93, No.1, pp.11-26, 1965.
- [57] **Lykoudis P. S.** ,
Natural convection of an electrically conducting fluid in the presence of a magnetic field,
International Journal of Heat and Mass Transfer Vol.5, pp.23-34, 1962.
- [58] **Madarame H.** , **Hagiwara T.** ,
Computer code for analyzing liquid metal MHD flow in rectangular ducts under strong transverse magnetic field,
International Symposium on Fusion Nuclear Technology, Tokio, Japan, 1988.

- [59] **Maday Y. , Patera A. T. , Ronquist E. M. ,**
An Operator-Integration-Factor Splitting Method for time-dependend problems: Application to incompressible flow,
Journal of Scientific Computing, Vol.5, No.4, pp.263-292, 1990.
- [60] **Mc Carthy K. ,**
Analysis of liquid metal MHD flow using a core flow approximation, with applications to calculating the pressure drop in basic geometric elements of fusion reactor blankets,
Dissertation, University of California, Los Angeles, 1989.
- [61] **Miyazaki K. , Yamaschita S. , Yamaoka N. ,**
Natural convection heat transfer of liquid lithium under transverse and parallel magnetic fields,
Journal of Nuclear Science and Technology, Vol.24, pp.101-123, 1987.
- [62] **Moreau R. ,**
Magnetohydrodynamics,
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [63] **Müller U. ,**
Freie Konvektion und Wärmeübergang,
Skriptum einer im WS 1993/94 an der Universität Karlsruhe gehaltenen Vorlesung.
- [64] **Nakagawa Y. ,**
Experiments on the inhibition of thermal convection by a magnetic field,
Proc. Roy. Soc., A240, pp.312-336, 1957.
- [65] **Nakagawa Y. ,**
Experiments on the instability of a layer of mercury heated from below und subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation,
Proc. Roy. Soc., A249, pp.159-187, 1959.
- [66] **Okanga H. , Saitoh A. , Tanashashi T. ,**
Natural convection of magnetic fluids,
Magnetohydrodynamics, Vol.26, No.4, pp.426-429, 1990.
- [67] **Oreper G. , Szekely J. ,**
The effect of an externally imposed magnetic field on buoyancy driven flow in a rectangular cavity,
Journal of Crystal Growth, Vol.64, pp.505-515, 1983.

- [68] **Ozoe H. , Maruo E. ,**
Magnetic and gravitational natural convection of melted silicon - Numerical computations for the rate of heat transfer,
JSME International Journal, Vol.30, No.263, pp.774-784, 1987.
- [69] **Ozoe H. , Okada K. ,**
The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensional natural convection in a cubial enclosure,
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.32, No.10, pp.1939-1954, 1989.
- [70] **Ozoe H. , Okada K. ,**
Experimental heat transfer rates of natural convection of molten gallium suppressed under an external magnetic field in either the x,y or z direction,
Journal of Heat Transfer, Vol.114, pp.107-114, 1992.
- [71] **Papailiou D. , Lykoudis P. ,**
Magneto fluid-mechanic free convection turbulent flow,
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.17, pp.1181-1189, 1974.
- [72] **Patankar S. V. ,**
Numerical Heat Transfer and Fluid Flow,
Hemisphere, New York, 1980.
- [73] **Perot J. B. ,**
An analysis of the Fractional Step Method,
Journal of Computational Physics, Vol.108, pp.51-58, 1993.
- [74] **Peyret R. , Taylor T. ,**
Computational methods for fluid flow, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [75] **Proctor M. , Weiss N. ,**
Magnetoconvection,
Reports of Progress in Physics, Vol.45, pp.1317-1379, 1982.
- [76] **Roache P. J. ,**
Computational Fluid Dynamics,
Academic Press Incorporation, Lexington, 1972.
- [77] **Roberts P. ,**
An introduction to magnetohydrodynamics,
Longmans, 1967.

- [78] **Sachetti N. , Chandran P. , Singh A. ,**
An exact solution for unsteady magnetohydrodynamic free convection flow with constant heat flux,
International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol.21, pp.187-201, 1994.
- [79] **Scherbinin S. ,**
Zweidimensionale numerische Simulation von Geschwindigkeit, Stromdichte und Temperatur in einem flüssigen Metall,
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik Vol.74, pp.629-632, 1994.
- [80] **Seki M. , Kawamura H. , Sanokawa K. ,**
Natural convection of mercury in a magnetic field parallel to the gravity,
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.101, pp.227-332, 1979.
- [81] **Shercliff J. ,**
A textbook of magnetohydrodynamics,
Pergamon press, Oxford, 1965.
- [82] **Sterl A. ,**
Numerische Simulation magnetohydrodynamischer Flüssig-Metall-Strömungen in rechteckigen Rohren bei großen Hartmann Zahlen,
Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation, 1989.
- [83] **Strandbridge J.,**
Design of a stainless steel blanket cell for a fusion reactor,
UKAEA Research group report, 1986.
- [84] **Takahashi O. , Nagase N. , Michiyoshi I. , Takenaka N. ,**
Natural convection heat transfer from a vertical cylindrical heater to liquid metals under horizontal magnetic field,
Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference San Francisco, pp.1317-1319, 1986.
- [85] **Takashima M. ,**
The stability of natural convection in a vertical layer of electrically conducting fluid in the presence of a transverse magnetic field,
Fluid Dynamics Research, Vol.14, pp.121-134, 1994.

- [86] **Temperly D. , Todd L. ,**
The effects of wall conductivity in magnetohydrodynamic duct flow at high Hartmann numbers,
Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.69, pp.337-351, 1971.
- [87] **Tillack M. ,**
MHD flow in rectangular ducts. Design equations for pressure drop and flow quantity,
UCLA-Report, UCLA-FNT-41, 1990.
- [88] **Toschi R. , Chazalon M. , Engelmann F. ,**
Next european torus objectives, general requirements and parameter choices, Fusion Technology, Vol.14, pp.19-29, 1981.
- [89] **Uflyand Y. ,**
Y. S. Soviet Phys. Tech. Phys, Vol.5, p.1194, 1961.
- [90] **Venkatachalappa M , Subbaraya C. ,**
Natural convection in a rectangular enclosure in the presence of a magnetic fluid with uniform heat flux from the side walls,
Acta Mechanica, Vol.96, pp.13-26, 1993.
- [91] **Vives C. , Perry C. ,**
Effects of magnetically damped convection during the controlled solidification of metals and alloys,
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.30, No.3, pp.479-496, 1987.
- [92] **Walker J. ,**
Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls. Part I. Constant area and variable area ducts with strong magnetic fields,
Journal de Mechanique, Vol.20, pp.79-112, 1981.
- [93] **Walker J. , Ludford G. , Hunt J. ,**
Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Part II. Variable-area rectangular ducts with conducting sides,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.46(4), pp.657-684, 1971.
- [94] **Walker J. ,**
Approximate side-layer solutions for a liquid metal flow in a rectangular duct with a strong, non-uniform magnetic field,
Fourth Beer-Sheva International Seminar on Magnetohydrodynamic Flows and Turbulence, Vol.1, pp.72-85, 1984.

- [95] **Weiss N.** ,
Convection in an imposed magnetic field. The development of nonlinear convection,
Journal of Fluid Mechanics, Vol.108, pp.247-272, 1981.
- [96] **Wilks G.** ,
Magnetohydrodynamic free convection about a semi-infinite vertical plate in a strong cross field,
Journal of Applied Mathematics and Physics(ZAMP), Vol.27, pp.621-625, 1976.
- [97] **Wilks G.** , **Hunt R.** ,
Low Prandtl-Number MHD convection about a semi-infinite horizontal plate,
Numerical Heat Transfer, Vol.8, pp.203-216, 1985.
- [98] **Zierep J.** , **Oertel jr. H.** ,
Convective transport and instability phenomena,
G. Braun Verlag, Karlsruhe, 1982.