

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5787

# **Strömungen mit freien Grenzflächen**

**P. Ehrhard, M. Bunk**

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

Juli 1996

---



**FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**  
Technik und Umwelt  
**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5787

# **Strömungen mit freien Grenzflächen**

**P. Ehrhard, M. Bunk**

Institut für Angewandte Thermo- und Fluiddynamik

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1996

**Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**ISSN 0947-8620**

## Strömungen mit freien Grenzflächen

Stömungen in technischen Anlagen sind häufig durch freie Flüssigkeits/Gas-Grenzflächen oder durch freie Flüssigkeits/Festkörper-Grenzflächen berandet. Diese freien Grenzflächen sind zunächst in ihrer Lage nicht bekannt - sie stellen sich infolge der Druck- oder Temperaturfelder ein.

Im Rahmen der Arbeit werden zunächst die Bedingungen an freien Grenzflächen eingeführt. Ihre Anwendung auf einfache hydrostatische Probleme mit freien Flüssigkeits/Gas-Grenzflächen schließt sich an. Die Behandlung von Beispielen aus der Hydrodynamik mit freien Flüssigkeits/Gas-Grenzflächen nimmt dann einen großen Raum ein. Schließlich wird ein Problem mit Erstarrung behandelt, bei welchem eine freie Flüssigkeits/Festkörper-Grenzfläche auftritt.

## Flows in Presence of Free Interfaces

Flows in technical systems are frequently bounded by free liquid/gas interfaces or free liquid/solid interfaces. The position of such free interfaces is not known a priori - they adjust depending on pressure- or temperaturefields.

In the frame of this work, firstly, conditions at free interfaces are inferred. The applications of these conditions to hydrostatic problems is the second focus. Quite a number of hydrodynamic problems featuring free liquid/gas interfaces is treated in the third part. Finally a problem with solidification is treated, demonstrating the occurrence of a free liquid/solid interface.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Beispiele zu freien Grenzflächenströmungen aus Natur und Technik . . .	3
1.1.1	Vertikaler Austritt eines Flüssigkeitsstrahls (mit Zerfall) aus einem Rohr . . . . .	3
1.1.2	Strömung in einem Spaltbeschichter . . . . .	5
1.1.3	Wasserwellen (reibungsfreie Betrachtung) . . . . .	7
1.1.4	Ausbreitungsströmung . . . . .	8
1.1.5	Zusammenfassung der charakteristischen Merkmale freier Grenzflächen . . . . .	10
1.2	Eigenschaften freier l/g- und l/l-Grenzflächen . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Hydrostatische Probleme</b>	<b>21</b>
2.1	Blasen in Verbindung . . . . .	21
2.2	Steighöhe in einem Kapillarrohr . . . . .	23
2.3	Tropfen auf einer Platte (ebenes Problem) . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Hydrodynamische Probleme</b>	<b>28</b>
3.1	Die ebene Ausbreitungsströmung . . . . .	28
3.1.1	Überlegungen zur Skalierung . . . . .	28
3.1.2	Das durch Trägheits- und Schwerkraft kontrollierte Problem . . .	31
3.1.3	Das durch Viskositäts- und Schwerkraft kontrollierte Problem . . .	32
3.1.4	Das durch Viskositäts-, Schwer- und Kapillarkräfte kontrollierte Problem . . . . .	40
3.2	Der kapillare Freistrahel . . . . .	47
3.2.1	Ableitung einer Näherungslösung für die Strahlkontur des fallenden Freistrahls . . . . .	47
3.2.2	Der Zerfall des kapillaren Freistrahls . . . . .	55
3.2.3	Der Einfluß der Zähigkeit auf den Strahlzerfall . . . . .	66
3.3	Wellen auf freien Flüssigkeitsspiegeln . . . . .	67
3.3.1	Stabilität einer freien Grenzfläche zwischen geschichteten Flüssigkeiten ohne Berücksichtigung der Viskosität . . . . .	67

<b>4</b>	<b>Hydrodynamische Probleme mit Phasenwechsel</b>	<b>80</b>
4.1	Das Filmsieden an der vertikalen Wand . . . . .	80
4.1.1	Grundgleichungen, Skalierung, Grenzschichtapproximation . .	82
4.1.2	Lösung mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation . . . . .	87
4.1.3	Ergebnisse . . . . .	91
4.2	Die gerichtete Erstarrung einer Legierung . . . . .	96
4.2.1	Grundlösung . . . . .	96
4.2.2	Stabilität der Grundlösung . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Literatur</b>	<b>105</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>106</b>
6.1	Numerische Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen des Filmsiede-Problems an der vertikalen Wand (vgl. 4.1) . . . . .	106

# 1 Einführung

## 1.1 Beispiele zu freien Grenzflächenströmungen aus Natur und Technik

### 1.1.1 Vertikaler Austritt eines Flüssigkeitsstrahls (mit Zerfall) aus einem Rohr

Betrachten wir den Austritt eines Flüssigkeitsstrahls, senkrecht nach unten im Schwerfeld, wie dies beispielsweise an einem Wasserhahn auftritt, so beobachtet man im wesentlichen eine Einschnürung nach dem Rohrende. Dies ist eine Folge der Beschleunigung der Strömung unmittelbar nach Verlassen des Rohres. Diese Beschleunigung tritt auf, weil eine Änderung der Randbedingungen erfolgt: die Haftbedingung im Rohr entfällt beim Austritt und an ihre Stelle tritt der näherungsweise schubspannungsfreie Rand der  $l/g$ -Grenzfläche. Die Beschleunigung der Strömung führt zu einer Absenkung des Druckes (vgl. Bernoulli-Gleichung), die freie  $l/g$ -Grenzfläche reagiert auf das Druckfeld - sie schnürt sich ein.

Hier erkennen wir bereits einige wichtige Eigenschaften einer freien  $l/g$ -Grenzfläche:

- Die Strömung verläuft immer tangential zur freien  $l/g$ -Grenzfläche, ein Durchtreten von Flüssigkeit durch die freie Grenzfläche würde bedeuten, daß dort keine Grenzfläche vorliegt.
- Die freie  $l/g$ -Grenzfläche stellt sich als Folge des Druckfeldes ein und über die freie  $l/g$ -Grenzfläche kommt es infolge der Oberflächenspannung zu einem Drucksprung, sofern die Grenzfläche gekrümmt ist. Dies werden wir noch näher kennenlernen.
- An der freien  $l/g$ -Grenzfläche kann keine Haftbedingung gestellt werden. Vielmehr wird in der Regel eine Bedingung für die Schubspannung auftreten. Im einfachsten Fall, wie auch für den gewählten senkrechten Freistrahls, ist die freie  $l/g$ -Grenzfläche schubspannungsfrei. Es wird somit die Kraftwirkung des umgebenden Gases auf die freie  $l/g$ -Grenzfläche vernachlässigt.

Im weiteren Fall des zylindrischen Freistrahls können noch andere Phänomene beobachtet werden. In Achsrichtung können gegebenenfalls periodische Störungen des Strahlquerschnitts auftreten, die je nach Parameter in ihrer Amplitude anwachsen

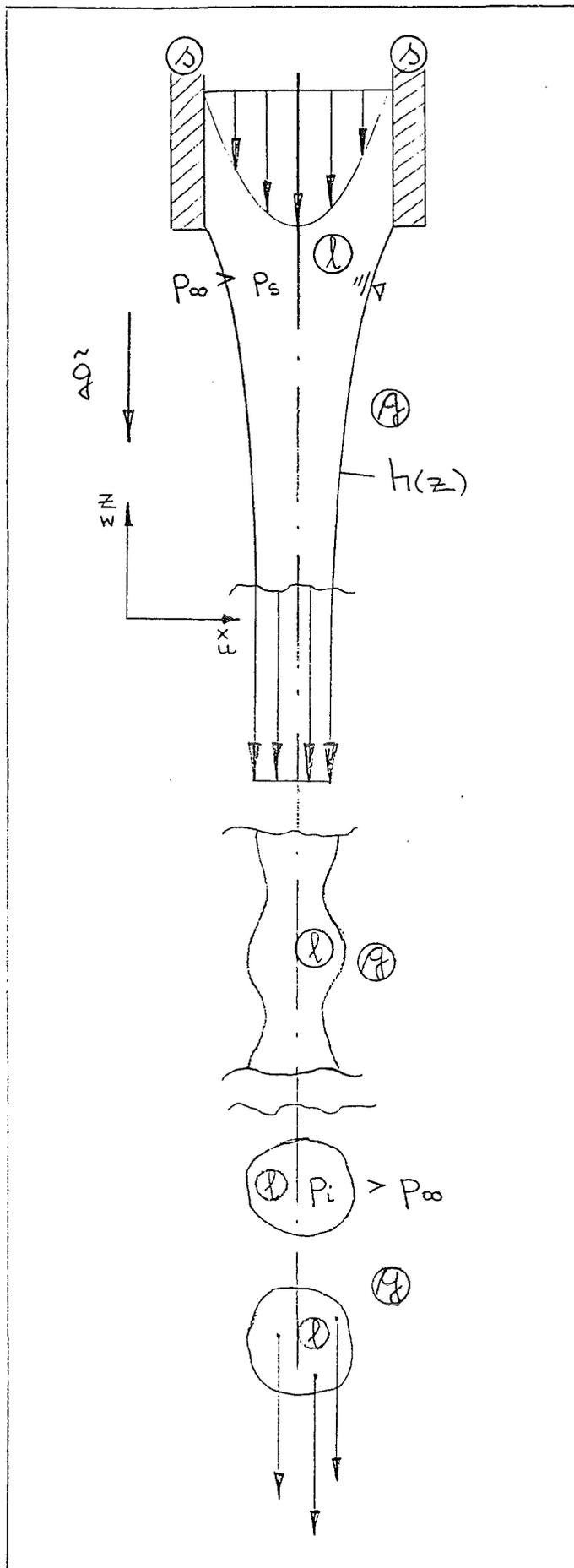


Abbildung 1: Verschiedene Phänomene innerhalb eines fallenden Flüssigkeits- Freistrahls

können. Dies führt schließlich zum Zerfall des Strahls in einzelne Tropfen. Vernachlässigen wir wiederum die Wirkung des umgebenden Gases auf die Tropfen, so fallen diese wie Festkörper. Somit besitzt jedes Fluidpartikel im Tropfen den gleichen, nach unten gerichteten Geschwindigkeitsvektor. Der Druck im Innern ist hierbei aufgrund der Krümmung der Oberfläche und aufgrund der Oberflächenspannung stets höher als im umgebenden Gas.

### 1.1.2 Strömung in einem Spaltbeschichter

Bei der Herstellung von hochintegrierten Bausteinen der Elektronik oder bei der Herstellung von LCD-Bildschirmen müssen eine Unzahl von unterschiedlichen Schichten aufgebracht werden. Dies sind zum einen elektrisch leitende Raster oder Schaltungen und zum anderen optisch aktive Schichten wie Filter oder Polarisatoren. Dies geschieht u.a. durch photochemische Prozesse, Ätzschritte, Bedampfungsprozesse oder Flüssigbeschichtung mit nachfolgendem Aushärten oder Verdampfen der Trägerflüssigkeit. In vielen Fällen ist deshalb das Aufbringen von Flüssigkeit auf ebene Flächen ein wesentlicher Verfahrensschritt.

Wir wollen uns die Strömung in einem Spaltbeschichter vor Augen führen. In einem Vorratsbehälter befindet sich eine Flüssigkeit, welche zwischen den beiden Klingen infolge der Benetzungseffekte hochsteigt. Der Abstand der Klingen ist hierzu entsprechend klein gewählt. Wird am oberen Austritt der Klingen eine Glasplatte aufgelegt, so benetzt die Flüssigkeit auch die Glasplatte und diese kann anschließend um eine kleine Distanz angehoben werden. Nun setzt man die Platte in Bewegung und die skizzierte Strömung stellt sich ein. Im Problem sind zwei freie l/g-Grenzflächen erkennbar, der rückwärtige Meniskus  $h_1(x, t)$  und der stromab gelegene Meniskus  $h_2(x, t)$ , welcher im stationären Fall die Dicke der erzeugten Flüssigkeitsschicht bestimmt. Wird die Position der freien l/g-Grenzfläche zeitabhängig, so kommt es zu einer unerwünschten periodischen Änderung der Schichtdicke. Zu den beiden l/g-Grenzflächen ist die Strömung naturgemäß tangential und an den Grenzflächen gilt in guter Näherung die Schubspannungsfreiheit. Aus der Krümmung der freien Grenzflächen folgt zwingend, daß der Druck innerhalb der Flüssigkeit im Bereich der Strömungsumlenkung geringer als im umgebenden Gas ist. Dagegen signalisiert die ebene l/g-Grenzfläche in einigem Abstand stromab ausgeglichenen Druck, d.h. in der Flüssigkeit herrscht Umgebungsdruck.



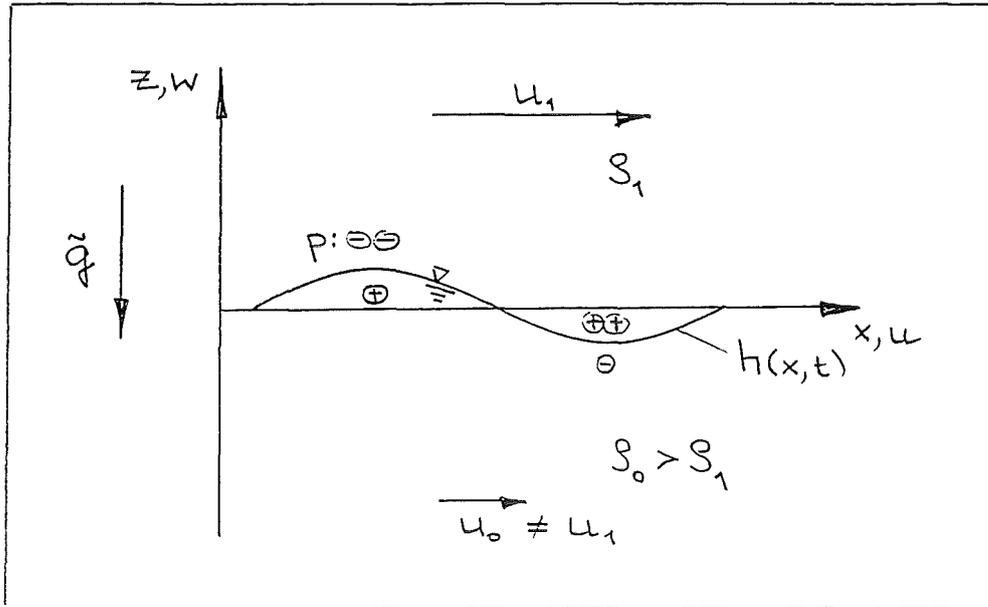


Abbildung 3: Wellenbildung infolge von Windbewegungen

### 1.1.3 Wasserwellen (reibungsfreie Betrachtung)

Ein weiteres Beispiel zu Strömungen mit freien Oberflächen erhalten wir bei Betrachtung der Wellenbildung infolge von Windbewegungen in der Natur. Analoge Ergebnisse erhält man im übrigen auch bei der Schichtung von zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten. Wir wollen zunächst viskose Effekte vernachlässigen.

Streicht eine Luftströmung über einen freien Wasserspiegel, so wird im allgemeinen ein Geschwindigkeitsunterschied ( $u_1 - u_0$ ) vorliegen. Naturgemäß folgt weiterhin für die Dichten  $\rho_1 < \rho_0$ , d.h. die Schwerkraft hat die Tendenz die Schichtung zu erhalten. Lenken wir gedanklich die  $1/g$ -Grenzfläche etwa sinusförmig aus, so macht man sich leicht anhand der Bernoulli-Gleichung klar, daß die in Kreisen angegebenen Veränderungen des Druckes auftreten. Wo sich die  $1/g$ -Grenzfläche anhebt, wird im Bereich von Fluid 2 aus Kontinuitätsgründen lokal eine größere Strömungsgeschwindigkeit auftreten. Dies hat dort eine Absenkung des Druckes zur Folge. Diese Änderung des Druckes in Verbindung mit der Druckänderung unterhalb der Grenzfläche führt zu einer Verstärkung der Auslenkung. Das Geschwindigkeitsfeld wirkt demnach destabilisierend auf die freie  $1/g$ -Grenzfläche. Demhingegen versucht sowohl die Schwerkraft als auch die Oberflächenspannung die Grenzfläche in die ebene Lage zurückzuführen. Diese Kräfte sind demnach stabilisierend.

Die Analyse dieser sogenannten Kelvin-Helmholtz Instabilität führt zu folgendem Er-

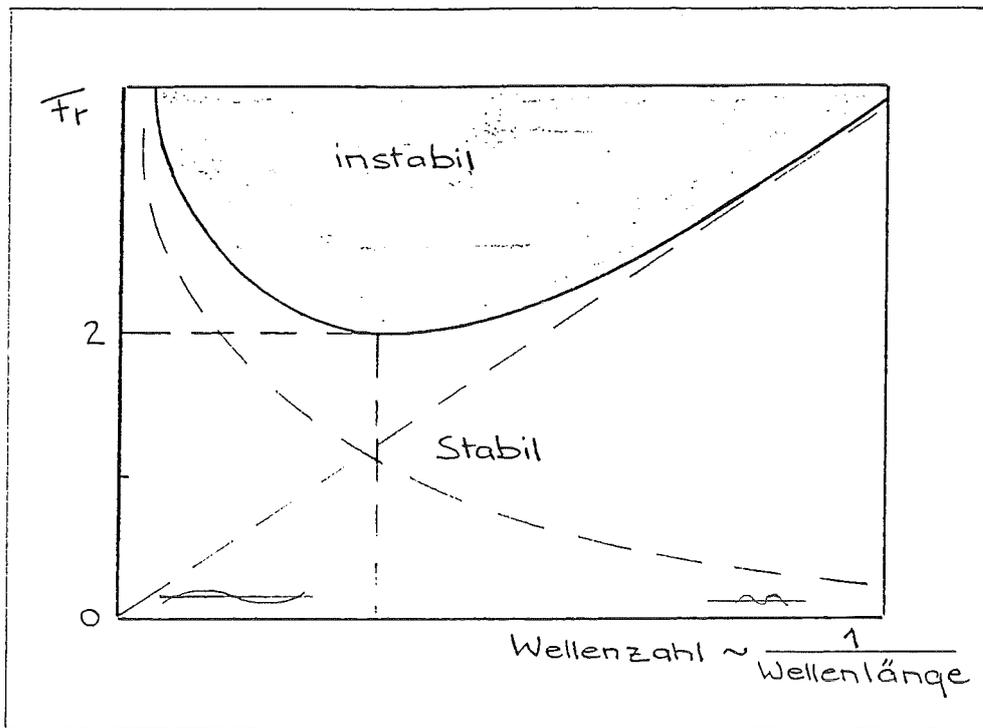


Abbildung 4: Stabilitätsdiagramm für das Kelvin-Helmholz Problem

gebnis. Die maßgebliche Kennzahl ist die Froude-Zahl

$$Fr = \frac{\rho_1 \rho_0 (u_1 - u_0)^2}{(\rho_0 - \rho_1) \sqrt{(\rho_0 + \rho_1) g \sigma}}$$

Wird die Froude-Zahl groß, so dominiert der destabilisierende Trägheitseffekt. Wird die Froude-Zahl klein, so dominieren die stabilisierenden Effekte der Schwerkraft und Kapillarkraft. Das Stabilitätsdiagramm zeigt demnach eine Grenzkurve, unterhalb welcher die Grenzfläche stabil ist, d.h. eben bleibt. Oberhalb, für Werte  $Fr > 2$ , werden Störungen angefacht und Wellen entstehen.

Die Ordinate im Stabilitätsdiagramm ist die Wellenzahl, welche ein Maß für die Wellenlänge darstellt, es gilt  $Wellenzahl \sim \frac{1}{Wellenlänge}$ . Das Stabilitätsdiagramm zeigt, daß für mittlere Wellenlängen eine Anfachung für  $Fr > 2$  auftritt. Lange Wellenlängen (kleine Wellenzahlen) sind offenbar deutlich stabilisiert. Dies ist eine Folge der Schwerkraft. Der Bereich kurzer Wellen (große Wellenzahlen) wird demhingegen durch die Kapillarkräfte stabilisiert.

#### 1.1.4 Ausbreitungsströmung

Wir betrachten nun eine Ausbreitungsströmung. Bringen wir eine Flüssigkeit auf eine horizontale Platte auf, so erwarten wir eine Ausbreitung angetrieben durch die

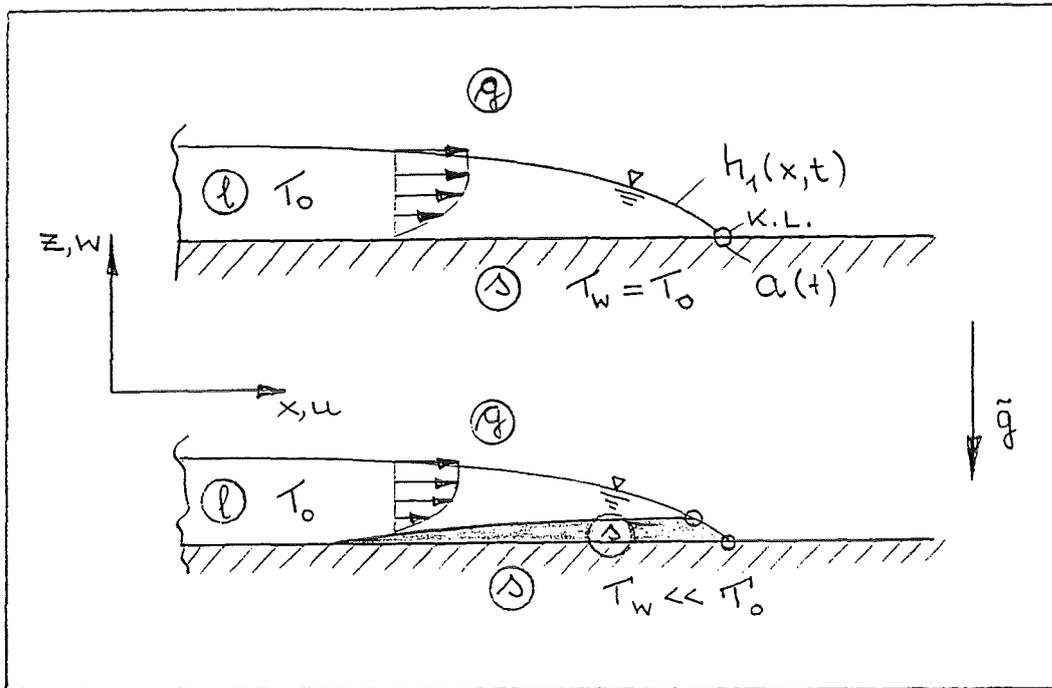


Abbildung 5: Verhältnisse bei einer Ausbreitungsströmung (a) ohne Erstarrung und (b) mit Erstarrung.

Schwerkraft. Solche Strömungen treten bei Beschichtungsprozessen in der Technik oder bei Lava-Strömungen in der Natur auf. Zunächst erwarten wir eine Strömung, abhängig von der Zufuhr der Flüssigkeit, welche das angehäuften Fluid in die unbedeckten Außenbereiche befördert. Auf der Platte, an der l/s-Grenzfläche, ist sicherlich die Haftbedingung erfüllt, während an der freien l/g-Grenzfläche  $h_1(x, t)$  näherungsweise Schubspannungsfreiheit herrscht. Die Position der freien l/g-Grenzfläche wird sich als Funktion der Ortskoordinate  $x$  darstellen, zusätzlich erwarten wir eine Veränderung in der Zeit. Bei  $x = a(t)$  endet die freie l/g-Grenzfläche auf der Platte. An der Flüssigkeitsfront liegt also eine sogenannte Kontaktlinie vor, welche ihre Position  $a(t)$  in der Zeit ändert. Die Bezeichnung Kontaktlinie kennzeichnet zum einen den Kontakt von drei Phasen s,l,g. Zum anderen handelt es sich stets um eine Linie, welche im gewählten Beispiel normal auf der Zeichenebene steht.

Wir wollen nun eine weitere Form von freien Grenzflächen kennenlernen, indem wir uns vorstellen, die Platte sei unterhalb die Erstarrungstemperatur der Flüssigkeit gekühlt. In diesem Fall wird sicherlich die Flüssigkeit in unmittelbarer Plattennähe ausfrieren und eine erstarrende Zone wird sich entwickeln. Dies ist eine Folge der Wärmeabfuhr in die Platte. Somit entsteht eine weitere freie l/s-Grenzfläche deren Position mit  $h_2(x, t)$  bezeichnet werden kann. Diese l/s-Grenzfläche stellt eine freie Grenzfläche

dar, weil ihre Lage im Gegensatz zur Plattenoberfläche nicht vorweg bekannt ist. Sie stellt sich vielmehr abhängig vom Temperaturfeld ein. Kinematisch ist diese Grenzfläche ähnlich zu behandeln wie die Plattenoberfläche: die Haftbedingung ist in der Regel erfüllt. Thermisch befindet sich diese l/s-Grenzfläche näherungsweise auf Erstarrungstemperatur, wobei wir die Freisetzung der Latentwärme an dieser Grenzfläche zunächst nicht berücksichtigen wollen.

### 1.1.5 Zusammenfassung der charakteristischen Merkmale freier Grenzflächen

Wir haben in den Abschnitten 1.1.1 bis 1.1.4 eine ganze Reihe freier Grenzflächen kennengelernt und wollen die wesentlichen Aussagen zusammenfassen. Freie Grenzflächen sind Berandungen des Strömungsgebiets, welche in ihrer Lage vorab nicht bekannt sind. Sie stellen sich vielmehr als Folge des Druckfeldes (l/g- oder l/l-Grenzfläche) oder als Folge des Temperaturfeldes (l/s- oder g/s-Grenzfläche) ein. An freien Grenzflächen ist die Strömung in der Regel tangential. Die Randbedingungen, welche wir an den freien l/g- oder l/l-Grenzflächen stellen können legen die tangentiale und normale Komponente des Spannungstensors fest, d.h. Druck und Schubspannung. An l/s- oder g/s-Grenzflächen ist in der Regel die Haftbedingung erfüllt.

## 1.2 Eigenschaften freier l/g- und l/l-Grenzflächen

Wir wollen uns nun im Detail mit den Gegebenheiten an freien Grenzflächen beschäftigen. Zunächst herrscht an jeder l/g- bzw. l/l-Grenzfläche (l/l-Grenzflächen existieren für nichtmischbare Flüssigkeiten) eine Oberflächenspannung. Diese kann auch als Grenzflächenspannung oder spezifische Oberflächenenergie bezeichnet werden. Die Grenzflächenspannung  $\sigma$  ist die Folge eines Ungleichgewichts molekularer Kräfte an der Grenzfläche (vgl. Zierep (1993)): Im Innern einer Flüssigkeit heben sich die intermolekularen Kräfte im Mittel auf. An der Grenzfläche sind die intermolekularen Kräfte aufgrund der anderen Molekülart und -dichte des benachbarten Fluids verschieden und somit verbleibt eine resultierende Kraft auf die Moleküle direkt an der Grenzfläche (in einem Bereich von einigen Moleküldurchmessern, d.h. typisch  $10^{-9}m$ ). Ist das benachbarte Fluid ein Gas, so verschwinden die intermolekularen Kräfte nahezu ganz. In allen Fällen muß deshalb Arbeit geleistet werden, um die Moleküle an die Grenzfläche zu transportieren. Die Folge sind Minimalflächen, d.h.

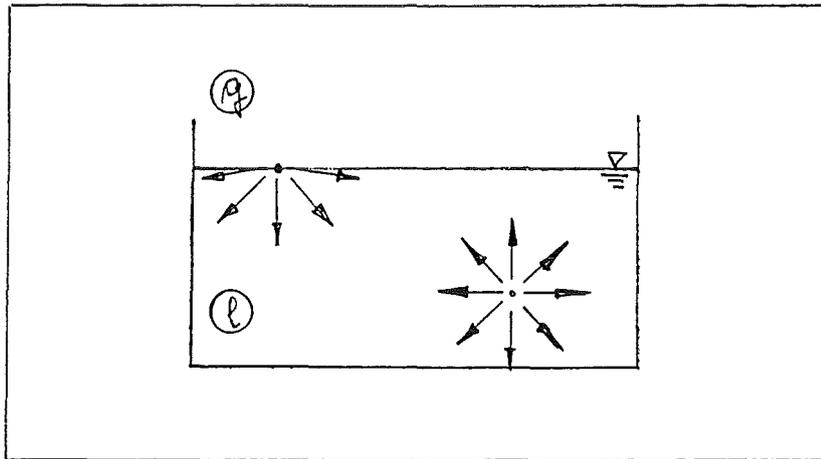


Abbildung 6: Intermolekulare Kräfte im Innern einer Flüssigkeit und an der l/g-Grenzfläche nach Zierep (1993).

die Natur minimiert die aufzuwendende Arbeit durch Einstellen der kleinstmöglichen Grenzfläche. Die Oberflächenspannung  $\sigma$  kann somit auf zwei Arten definiert werden:

$$\sigma = \frac{\text{Kraft an der Berandung}}{\text{Länge der Berandung}} = \frac{\text{Energiezunahme}}{\text{Oberflächenzunahme}}$$

Aus diesen Definitionen lassen sich unmittelbar verschiedene Meßmethoden ableiten, welche im allgemeinen auf einer Kraftmessung beruhen. Im Fall a) wird ein Drahtbügel in die Flüssigkeit eingetaucht und die Kraft  $\tilde{F}$ , welche den Flüssigkeitsfilm aufspannt, wird gemessen. Aufgrund der Tatsache, daß der Flüssigkeitsfilm auf beiden Seiten eine l/g-Grenzfläche besitzt, erhalten wir  $\sigma = |\tilde{F}|/(2L)$ . Im Fall b) und c) werden eine Platte bzw. ein Ring in die Flüssigkeit eingetaucht und danach herausgezogen bis der sie benetzende Flüssigkeitsfilm abreißt. Dies geschieht sobald der Flüssigkeitsfilm etwa senkrecht steht und die gemessene Kraft  $\tilde{F}$  deshalb ein Maximum aufweist. Somit erhalten wir  $\sigma = |\tilde{F}_{max}|/(2 \cdot L_{ben} \cdot k)$ , wobei  $k \sim 1$  einen Eichfaktor darstellt, welcher die Gewichtskraft und die nicht perfekte Geometrie berücksichtigt.

Die bisher vorgestellten Meßverfahren eignen sich vorzugsweise zur Bestimmung der Oberflächenspannung  $\sigma$  an einer l/g-Grenzfläche. Die eingetauchten Körper (vgl. b) und c)) können bei günstigen Dichteverhältnissen auch zur Messung einer l/l-Grenzflächenspannung eingesetzt werden. Aus den oben dargestellten molekularen Überlegungen geht unmittelbar hervor, daß sich die maximale Grenzflächenspannung einer Flüssigkeit stets gegen Vakuum ergibt - hier fehlen jegliche intermolekulare Kräfte nach einer Seite. Dieser Wert wird durch Anwesenheit eines (dünnen) Gases

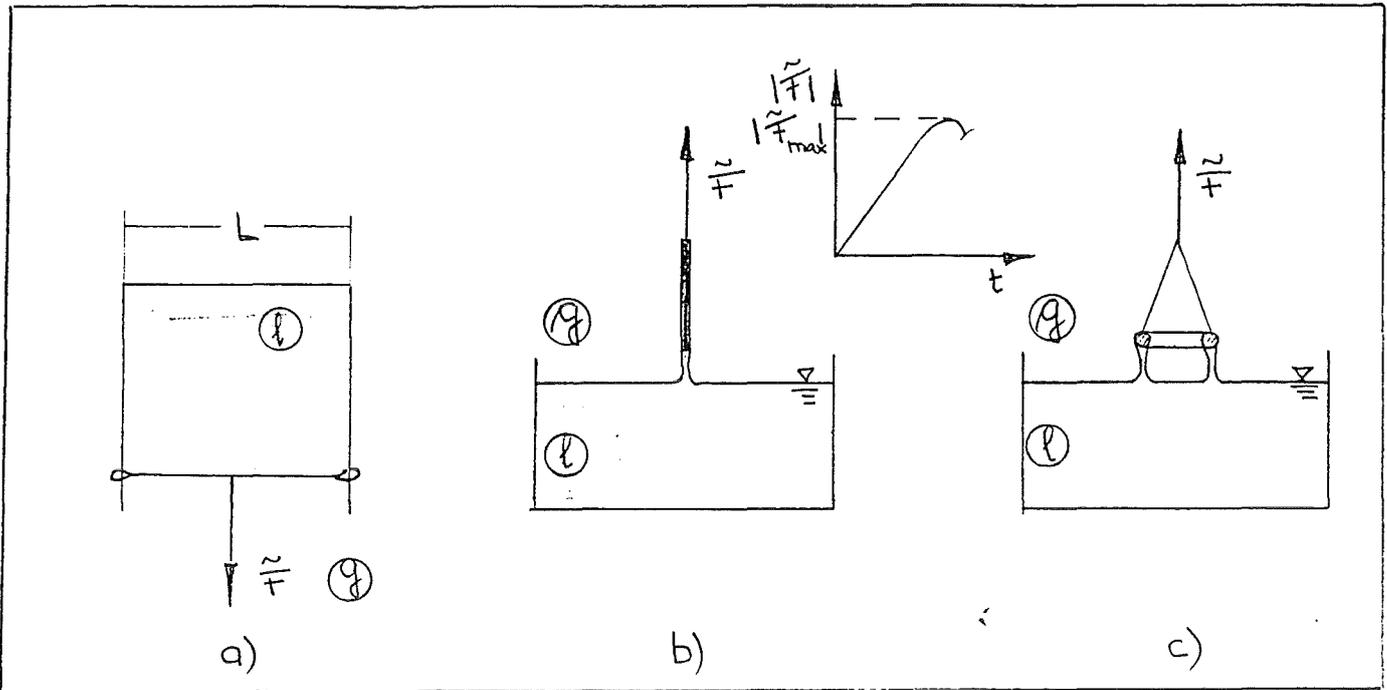


Abbildung 7: Einige Meßmethoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung  $\sigma$

nur unwesentlich geändert. Sind folglich die Grenzflächenspannungen zweier Flüssigkeiten gegen ein Gas (oder Luft) bekannt, so kann aus der Differenz bereits eine erste Abschätzung der Grenzflächenspannung an der  $l/l$ -Grenzfläche gewonnen werden.

Wollen wir die Grenzflächenspannung an einer  $l/l$ -Grenzfläche direkt messen, so können wir hierzu den Drucksprung über eine gekrümmte Grenzfläche benutzen. Bevor wir also ein weiteres Meßverfahren zur Messung von  $\sigma$  diskutieren, müssen wir uns zunächst die Kräfteverhältnisse an einer allgemein gekrümmten Grenzfläche ableiten. Die normale Kräftebilanz an einer Grenzfläche ist von zentraler Bedeutung - sie stellt die Position der Grenzfläche ein. Bild 8 zeigt ein infinitesimales Flächenelement der Kantenlänge  $r_1 d\varphi_1$  und  $r_2 d\varphi_2$ . Die Schnittrichtung ist orthogonal gewählt, die Krümmungsradien in beiden Schnitten sind mit  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet.

Aufgrund des Freischnitts muß die Wirkung der Grenzflächenspannung an den Schnittkanten berücksichtigt werden. Weiterhin sind Druckkräfte aufgrund der Drücke  $p_a$ ,  $p_i$  auf beiden Seiten der Grenzfläche wirksam. Wir erhalten in der Normalenrichtung

$$|d\tilde{F}_{pa}| - |d\tilde{F}_{pi}| + 2|d\tilde{F}_{k2}|\frac{d\varphi_1}{2} + 2|d\tilde{F}_{k1}|\frac{d\varphi_2}{2} = 0$$

und mit

$$|d\tilde{F}_{pa}| = p_a r_1 d\varphi_1 r_2 d\varphi_2$$

$$|d\tilde{F}_{pi}| = p_i r_1 d\varphi_1 r_2 d\varphi_2$$

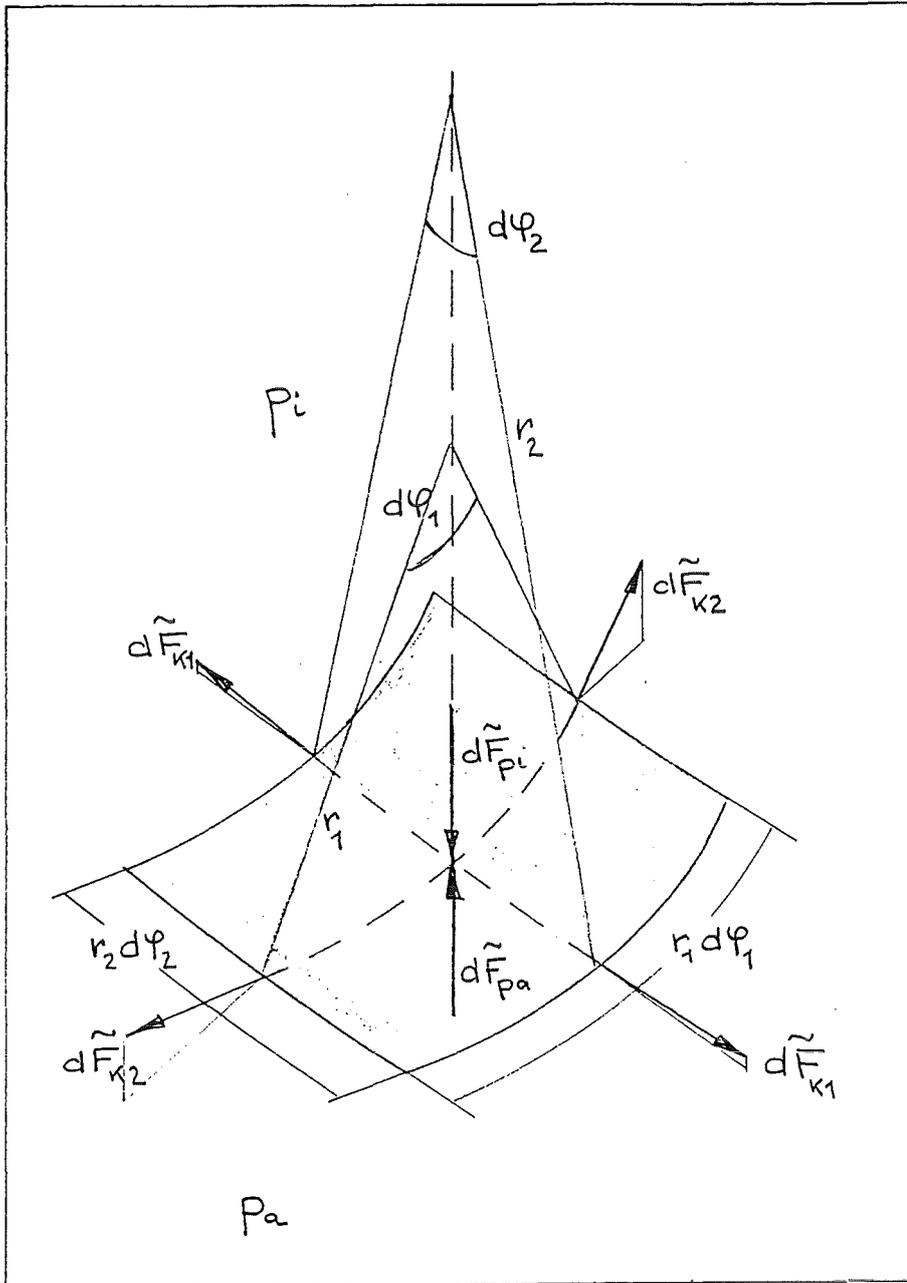


Abbildung 8: Kräfteverhältnisse an einer allgemein gekrümmten Grenzfläche (vgl. Zieryp (1993)).

$$|d\tilde{F}_{k2}| = \sigma r_2 d\varphi_2$$

$$|d\tilde{F}_{k1}| = \sigma r_1 d\varphi_1$$

kommt

$$(p_i - p_a) r_1 d\varphi_1 r_2 d\varphi_2 = \sigma (d\varphi_1 r_2 d\varphi_2 + d\varphi_2 r_1 d\varphi_1),$$

bzw.

$$(p_i - p_a) = \Delta p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) .$$

Somit berechnet sich der Drucksprung über eine gekrümmte Grenzfläche aus einem mittleren Krümmungsradius  $R$  oder einer mittleren Krümmung  $H$  wobei

$$H = \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

gilt. Wir wollen an dieser Stelle zwei Spezialfälle diskutieren. Haben wir eine zylindrische Grenzfläche mit dem Radius  $r$  vorliegen, so wird  $r_1 = r$  und  $r_2 \rightarrow \infty$ . Somit wird

$$\Delta p_{Zylinder} = \frac{\sigma}{r} .$$

Für eine kugelförmige Grenzfläche (z.B. einen Tropfen) wird  $r_1 = r$  und  $r_2 = r$ . Daraus erhalten wir

$$\Delta p_{Kugel} = \frac{2\sigma}{r} .$$

An dieser Stelle sollte noch darauf hingewiesen sein, daß die Krümmungsradien  $r_1, r_2$  vorzeichenbehaftet sind. Im Falle unterschiedlicher Vorzeichen befinden sich die Krümmungszentren auf verschiedenen Seiten der Grenzfläche.

Unsere Betrachtungen zum Drucksprung über eine gekrümmte Grenzfläche wollen wir nun gleich an dem folgenden Meßgerät anwenden. Eine Kapillare ist in ein Gefäß mit der Flüssigkeit  $l_1$  eingetaucht und mit der Flüssigkeit  $l_2$  gefüllt. Infolge der Füllhöhe  $h$  in der Kapillare bildet sich ein Tropfen der Flüssigkeit  $l_2$  wie in Abbildung 9 gezeigt. Der Tropfendurchmesser  $d$ , sowie die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  sind aus einer vergrößerten Photographie meßbar.

Infolge der Hydrostatik erhält man am Punkt 1:

$$p_{1a} = \varrho_1 h_1 g \quad , \quad p_{1i} = \varrho_2 (h + h_1) g .$$

Mit dem kapillaren Drucksprung

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

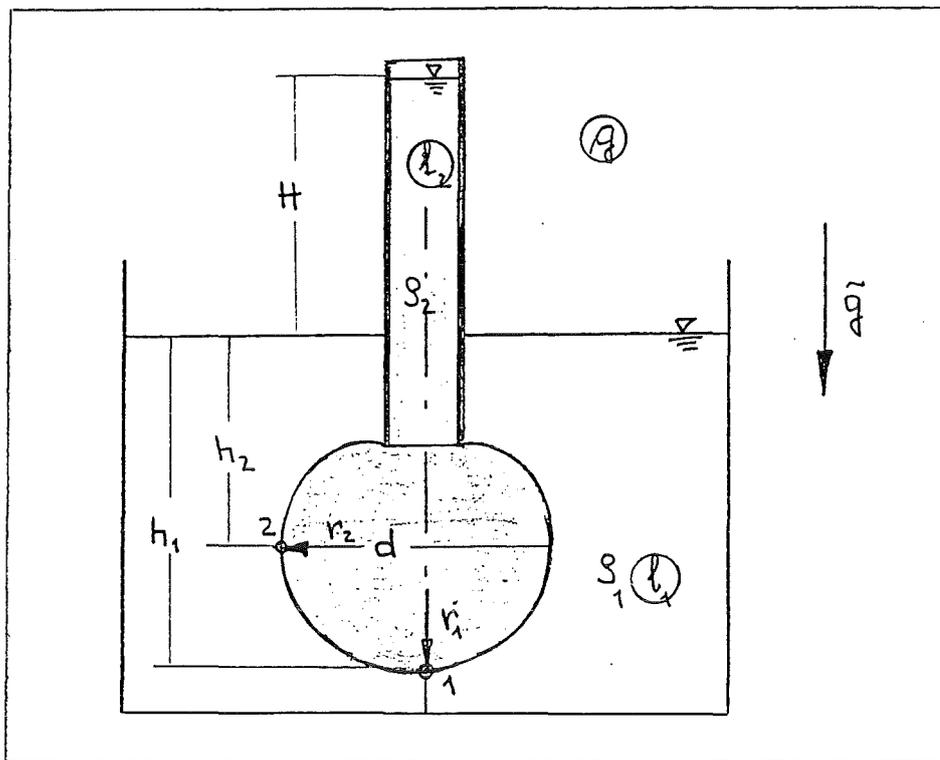


Abbildung 9: Messung der Oberflächenspannung über den Drucksprung einer gekrümmten Oberfläche - Versuchsaufbau

ergibt sich somit

$$\sigma = \frac{r_1 g}{2} \{ \rho_2 (h + h_1) - \rho_1 h_1 \} .$$

Am Punkt 1 ist die Fläche aufgrund der Rotationssymmetrie in beiden Richtungen mit dem Radius  $r$  gekrümmt. Die redundante Auswertung der Punktes 2 liefert

$$p_{2a} = \rho_1 h_2 g \quad , \quad p_{2i} = \rho_2 (h + h_2) g \quad ,$$

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{(d/2)} \right) \quad ,$$

und somit

$$\sigma = \frac{g}{1/r_2 + 2/d} \{ \rho_2 (h + h_2) - \rho_1 h_2 \} .$$

Im Punkt 2 ist zu beachten, daß nur ein Krümmungsradius  $r_2$  aus der Projektion ermittelt werden kann. Der zweite Krümmungsradius ergibt sich aus dem gemessenen Durchmesser  $d$  des Tropfens an dieser Stelle. Es empfiehlt sich im übrigen das beschriebene Meßverfahren stets an mehreren Punkten auszuwerten um dann mit Hilfe der Statistik auch Aussagen zur Genauigkeit des Meßverfahrens zu gewinnen.

Wir wollen nun einen weiteren Begriff einführen - die Benetzung. Endet eine freie l/g- oder l/l-Grenzfläche an einer festen Berandung, so können die beteiligten Fluide dort unterschiedliches Verhalten zeigen:

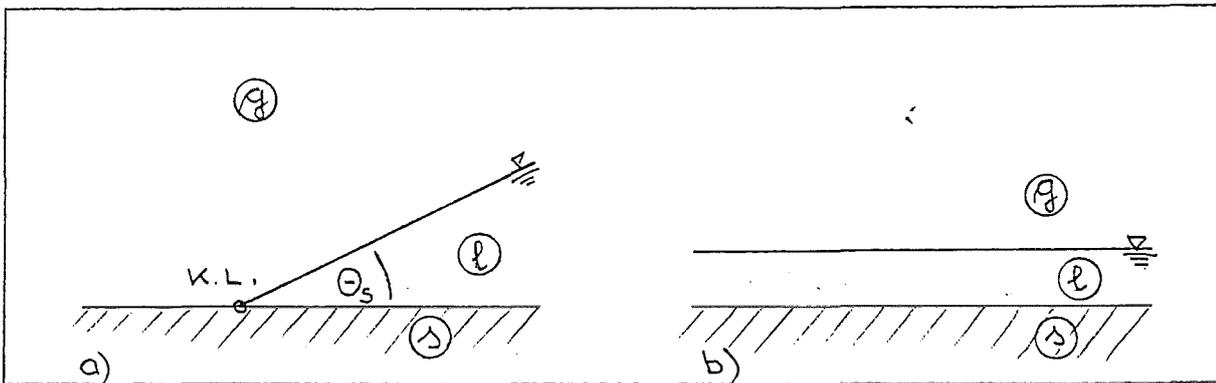


Abbildung 10: Partielles und vollständiges Benetzen

1. Für lange Zeiten stellt sich ein stationäres Gleichgewicht mit stationärer Grenzfläche und einem Kontaktwinkel  $\Theta_s$  ein. Dies wird als partielles Benetzen bezeichnet. Nach Young gilt dort die Gleichgewichtsbeziehung

$$\sigma_{sg} - \sigma_{ls} = \sigma_{lg} \cos \Theta_s$$

2. Für lange Zeiten schreitet die Benetzung der Flüssigkeit auf dem Festkörper immer weiter voran und wir finden einen weit ausgedehnten Flüssigkeitsfilm auf dem Festkörper. Dies wird als vollständiges Benetzen bezeichnet.

Das Phänomen der Benetzung ist wiederum eng mit intermolekularen Kräften verknüpft. Die intermolekularen Kräfte zwischen Festkörper und Flüssigkeit sind es, welche die Benetzung antreiben. Demhingegen müssen die Gasmoleküle durch die Flüssigkeit vom Festkörper verdrängt werden - die intermolekularen Kräfte zwischen Gas- und Festkörpermolekülen hemmen den Fortschritt der Benetzungsfront. Weiterhin bestehen zwischen den Flüssigkeitsmolekülen untereinander anziehende Kräfte, welche die Benetzung des Festkörpers hemmen. Ein Gleichgewicht dieser intermolekularen Kräfte führt demgemäß zur partiellen Benetzung. Sind die anziehenden intermolekularen Kräfte zwischen Flüssigkeits- und Festkörpermolekülen hingegen sehr stark, so führt dies zu vollständiger Benetzung. Obige Diskussion zur Benetzung kann analog auf ein s/l/l-System übertragen werden.

Bei partieller Benetzung tritt eine sogenannte stationäre Kontaktlinie (K.L.) auf. Im Falle der vollständigen Benetzung ist keine stationäre Kontaktlinie erkennbar. Vielmehr bewegt sich die Kontaktlinie kontinuierlich, bis der gezeigte Flüssigkeitsfilm für  $t \rightarrow \infty$  entsteht. Im allgemeinen besteht zwischen der Geschwindigkeit der Kontaktlinie  $u_{cl}$  und dem Kontaktwinkel  $\Theta$  ein funktioneller Zusammenhang. Diesen kann man

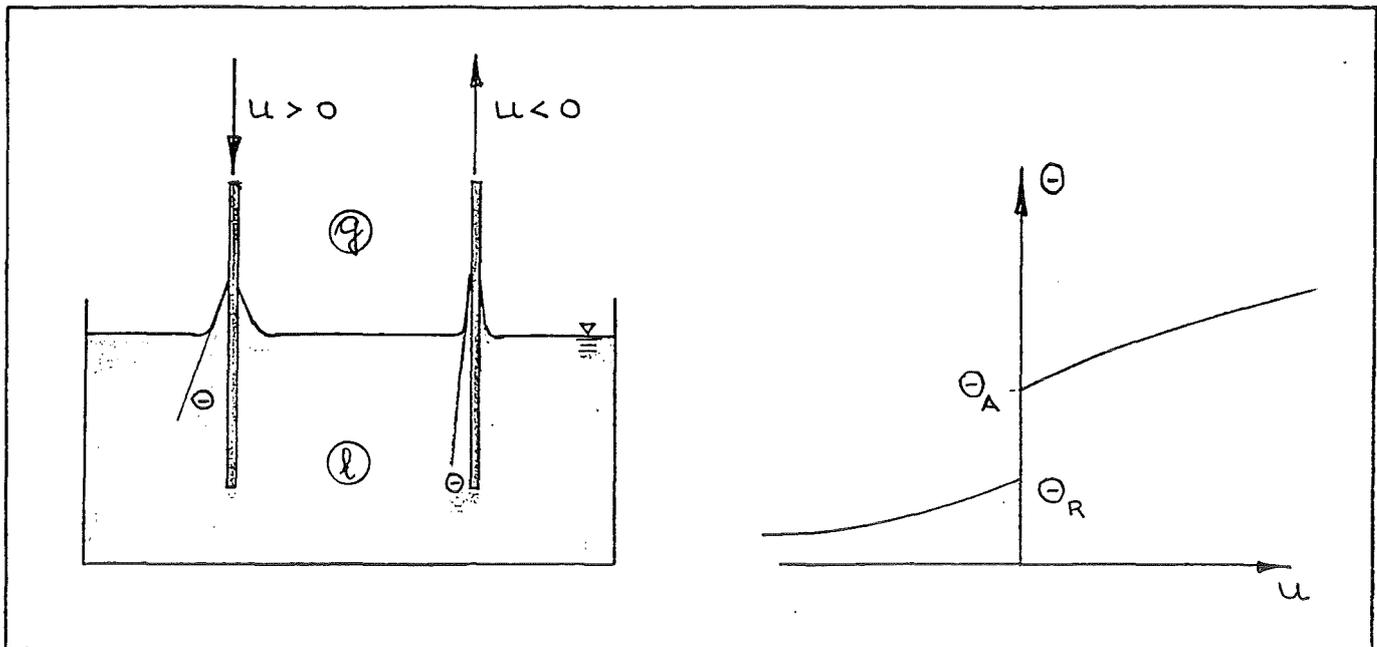


Abbildung 11: Abhängigkeit zwischen Kontaktwinkel  $\sigma$  und der Geschwindigkeit  $u_{cl}$  der Kontaktlinie.

ermitteln, indem man beispielsweise eine Platte in eine Flüssigkeit eintaucht oder, umgekehrt, herauszieht. Mißt man hierbei den Kontaktwinkel, so ergibt sich der in Abbildung 11 gezeigte Verlauf. Für eine voranschreitende (benetzende) Kontaktlinie ( $u_{cl} > 0$ ) zeigt sich ein größerer Kontaktwinkel. Für eine zurückweichende (entnetzende) Kontaktlinie ( $u_{cl} < 0$ ) findet man deutlich kleinere Kontaktwinkel. Ermittelt man den stationären Kontaktwinkel ( $u_{cl} = 0$ ) von beiden Seiten her ( $u_{cl} > 0, u_{cl} < 0$ ), so findet man zwei verschiedene Werte  $\Theta_A \neq \Theta_R$ . Dieser Effekt wird als 'Hysterese' der Kontaktlinie bezeichnet. Für stationäre Kontaktwinkel  $\Theta_S$  ist demnach der ganze Bereich  $\Theta_A \geq \Theta_S \geq \Theta_R$  möglich.

Die Grenzflächenspannung hängt im allgemeinen von der Temperatur ab - sie fällt bei steigender Temperatur infolge der schwächeren intermolekularen Kräfte (stärkere Brown'sche Molekularbewegung). Dieses Phänomen wird als Thermokapillarität oder Marangoni-Effekt bezeichnet. Stellen wir uns ein Experiment vor, bei welchem die Flüssigkeit und das darüberliegende Gas an einer Seite erwärmt und auf der anderen Seite gekühlt werden. Wir wollen gedanklich die Schwerkraft zu Null setzen, d.h. Auftriebseffekte nicht berücksichtigen. Der Boden und Deckel des Gefäßes seien adiabatisch. Entlang der l/g-Grenzfläche finden wir dann einen Temperaturgradienten aufgrund dessen auch die Grenzflächenspannung variiert. Sie ist größer auf der kal-

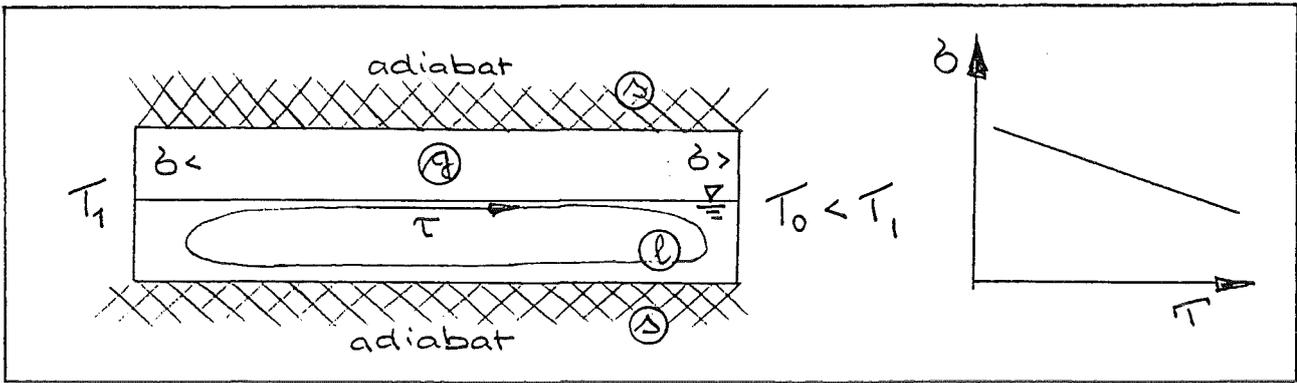


Abbildung 12: Konvektionsströmung aufgrund temperaturabhängiger Grenzflächenspannung.

ten Seite und demzufolge finden wir eine Schubspannung  $\tau$ , welche die Strömung in der gezeigten Weise antreibt. Eine Änderung der Grenzflächenspannung kann auch als Folge der Konzentration einer zweiten Flüssigkeitskomponente (z.B. Spülmittel in Wasser) auftreten.

Offensichtlich ist es die räumliche Abhängigkeit  $\sigma(s_1, s_2)$ , welche die Schubspannungen an der freien Oberfläche bedingt.  $s_1$  und  $s_2$  sind hierbei zwei beliebige, orthogonale Koordinaten in der Grenzfläche  $h(x, y)$ . Wir wollen nun, analog zu dem normalen Kräftegleichgewicht, ein tangenciales Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Flächenelement mit den Kantenlängen  $ds_1$  und  $ds_2$  betrachten. In der Tangentialebene wirken die Kräfte  $d\tilde{F}_{ki}$ , welche die Wirkung der freigeschnittenen Grenzfläche repräsentieren. Weiterhin ist eine allgemeine Schubspannung  $\tau$  möglich. Wir wollen nun aber die Grenzflächenspannung  $\sigma$  als räumlich veränderlich auffassen. Das Kräftegleichgewicht in den Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  ergibt,

$$-|d\tilde{F}_{k1}(s_1)| + |d\tilde{F}_{k1}(s_1 + ds_1)| + \tau_1 ds_1 ds_2 = 0$$

$$-|d\tilde{F}_{k2}(s_2)| + |d\tilde{F}_{k2}(s_2 + ds_2)| + \tau_2 ds_1 ds_2 = 0.$$

Die Schnittkräfte  $d\tilde{F}_{ki}$  ergeben sich hierbei zu

$$|d\tilde{F}_{k1}(s_1)| = \sigma(s_1) ds_2,$$

$$|d\tilde{F}_{k2}(s_2)| = \sigma(s_2) ds_1,$$

$$|d\tilde{F}_{k1}(s_1 + ds_1)| = \sigma(s_1 + ds_1) ds_2 = \left\{ \sigma(s_1) + \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} ds_1 + \dots \right\} ds_2,$$

$$|d\tilde{F}_{k2}(s_2 + ds_2)| = \sigma(s_2 + ds_2) ds_1 = \left\{ \sigma(s_2) + \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} ds_2 + \dots \right\} ds_1.$$

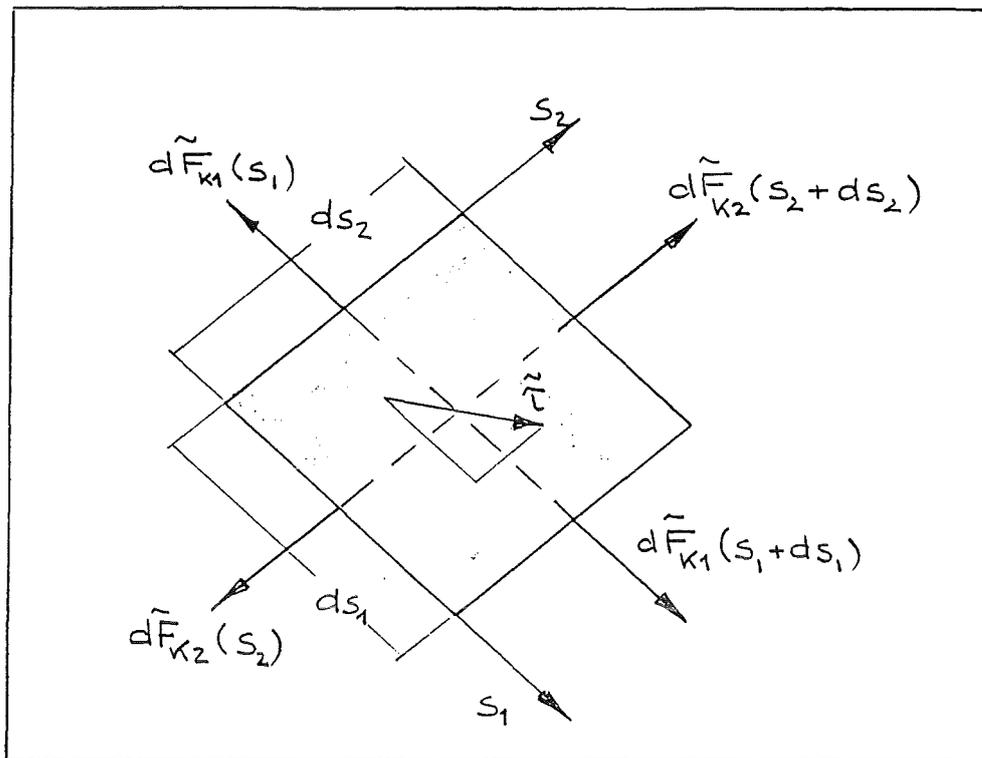


Abbildung 13: Tangentiales Kräftegleichgewicht am Grenzflächenelement.

Hierbei wird für die Berechnung von  $\sigma(s_i + ds_i)$  eine Taylor-Reihenentwicklung angewandt. Wir erhalten bei Zusammenfassung der obigen Gleichungen eine Gleichung für den Schubspannungsvektor  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$  zu

$$\tau_1 = -\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} \quad , \quad \tau_2 = -\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \quad .$$

Somit ist deutlich, daß jegliche Abhängigkeit  $\sigma(s_1, s_2)$ , welche entweder infolge der Temperatur oder einer Konzentration zustande kommen kann, unmittelbar eine Schubspannung an der freien Grenzfläche zur Folge hat.

Wir haben schon bei den Beispielen diskutiert, daß an einer freien Grenzfläche ( $1/g$  oder  $1/l$ ) die Strömung (auf beiden Seiten) tangential sein muß. Wir wollen dies nun mathematisch formulieren. Die freie Grenzfläche sei gegeben im Raum durch die Darstellung  $h(x, y, t)$ , d.h. eine zeitliche Veränderung ihrer Lage wird zugelassen. Betrachten wir hierzu die Verhältnisse am Punkt 1: Einerseits kann die momentane Steigung der Ebene  $h_x$  benutzt werden um den Steigungswinkel  $\alpha_x$  auszudrücken, d.h.

$$\tan \alpha_x = h_x \quad .$$

Andererseits existiert in dieser Schnittebene ein Geschwindigkeitsfeld mit den Komponenten  $u$  und  $w$ . Da auch die Grenzfläche die Geschwindigkeit  $h_t$  besitzt, kann der

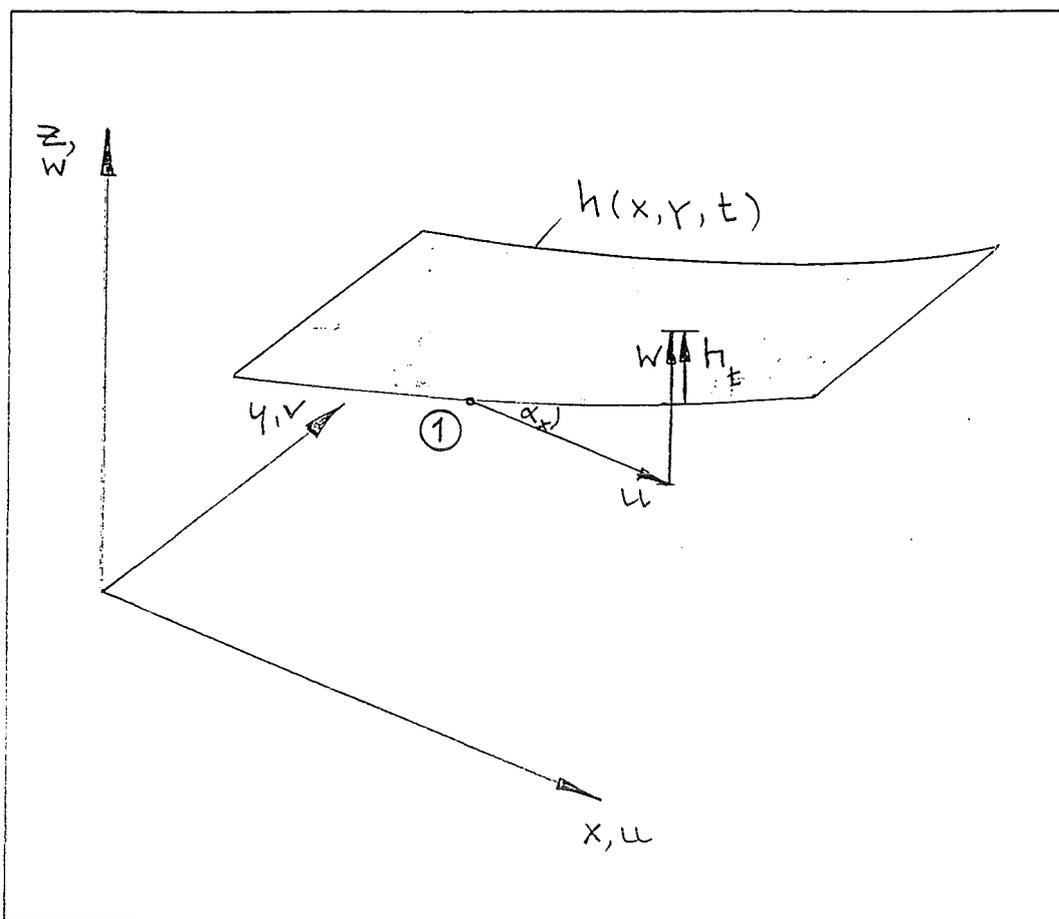


Abbildung 14: Geschwindigkeiten in einer  $x - z$ -Schnittebene mit freier Grenzfläche.

momentane Steigungswinkel der Grenzfläche bei tangentialer Strömung ausgedrückt werden als

$$\tan \alpha_x = \frac{(w - h_t)}{u} .$$

Aus den obigen Gleichungen eliminieren wir  $\alpha_x$  und erhalten

$$h_x u = w - h_t ,$$

eine Beziehung für tangentiale Strömung in der  $x$ - $z$ -Ebene. Die analoge Betrachtung in der  $y$ - $z$ -Ebene liefert

$$h_y v = w - h_t .$$

Mit den letzten beiden Gleichungen ist die kinematische Bedingung einer tangentialen Strömung nunmehr mathematisch formuliert.

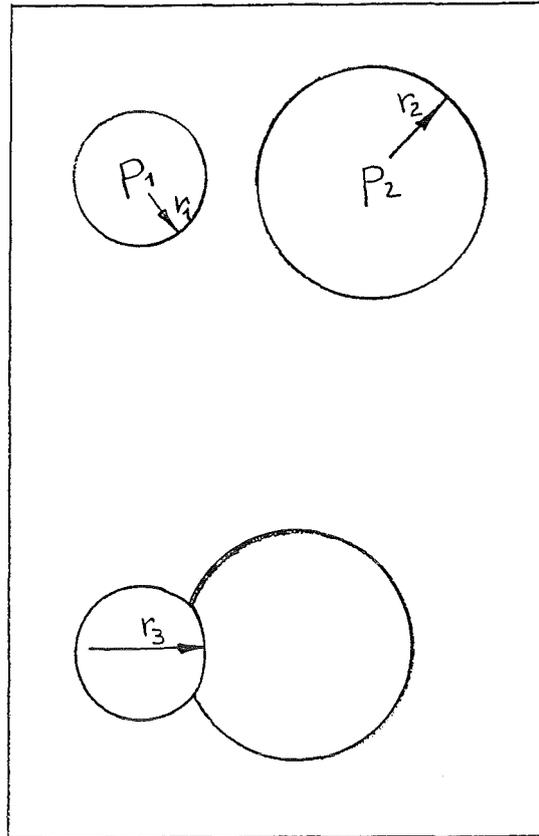


Abbildung 15: Kontakt zweier Blasen nach Zierrep (1993).

## 2 Hydrostatische Probleme

Bevor wir uns nun verschiedenen Strömungsproblemen widmen, ist es sinnvoll einige hydrostatische Probleme zu behandeln bzw. einige Phänomene zu erläutern. Dies erlaubt uns, die Druck- und Schubspannungsbedingungen an freien Grenzflächen zunächst pur anzuwenden, ohne hierbei gleichzeitig noch die Strömung mit den kinematischen Randbedingungen beachten zu müssen. Wir werden hierbei, bei wachsendem Schwierigkeitsgrad, zunächst einige Phänomene bei verbundenen Blasen, die Flüssigkeitssäule in einem Kapillarrohr und schließlich einen Tropfen auf der Platte diskutieren.

### 2.1 Blasen in Verbindung

Bringen wir zwei unterschiedlich große Blasen in Berührung (vgl. Zierrep 1993), so wird sich an der Berührungsstelle eine gemeinsame freie Grenzfläche einstellen. Aus

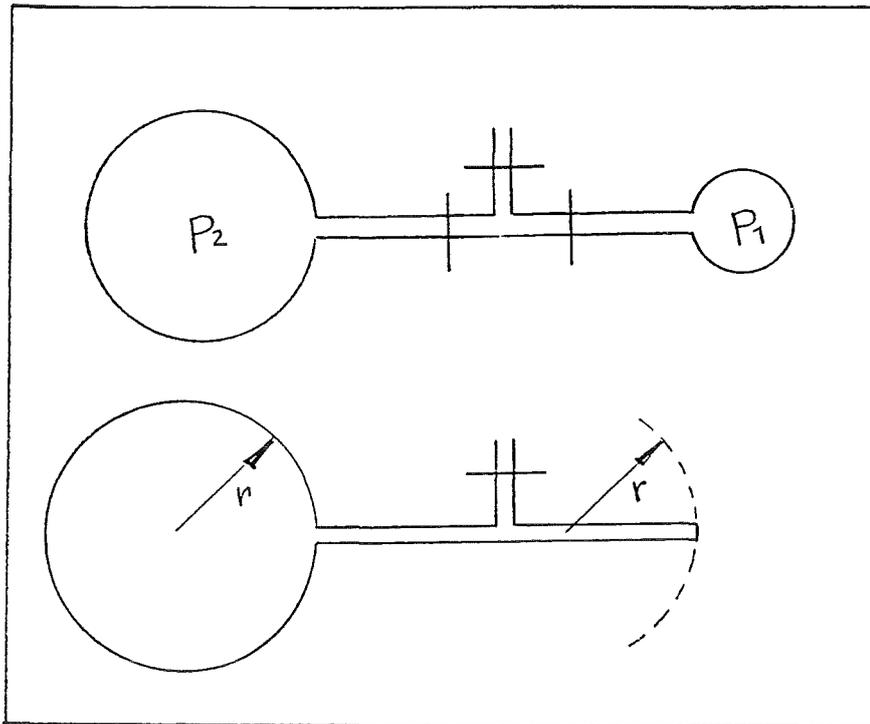


Abbildung 16: Druckausgleich zweier Blasen nach Ziarep (1993)

den Radien beider Blasen  $r_1$  und  $r_2$  können wir auf die Drücke

$$(p_1 - p_\infty) = \frac{2\sigma}{r_1} \quad , \quad (p_2 - p_\infty) = \frac{2\sigma}{r_2}$$

schließen. Somit folgt wegen  $r_1 < r_2$  unmittelbar  $p_1 > p_2$ , ein erwartetes Ergebnis. Der Druck in der kleinen Blase ist stets größer als in der großen Blase. An der durch Berührung neu entstehenden Grenzfläche wird gelten

$$(p_1 - p_2) = \frac{2\sigma}{r_3}$$

und wegen  $p_1 > p_2 > p_\infty$  wird  $r_3 > r_1$ . Damit muß die Berührungsgrenzfläche das in Abbildung 15 gezeigte Aussehen haben. Die konkave Seite ist auf der Seite des höheren Druckes und zudem ist diese Grenzfläche schwächer gekrümmt als die Blase 1.

Ein ähnliches Phänomen erhalten wir nach Erzeugung zweier unterschiedlich großer Blasen, welche beispielsweise am Ende von Kapillarrohren fixiert und verbunden sind. Der Druck in der kleinen Blase wird zunächst größer sein als der Druck in der großen Blase,  $p_1 > p_2$ . Öffnen wir das Ventil am Verbindungsrohr, so wird sich der Druck ausgleichen, mit der Konsequenz, daß der Inhalt der kleinen Blase in die große Blase strömt. Die große Blase wächst also an und die kleine Blase verschwindet gänzlich.

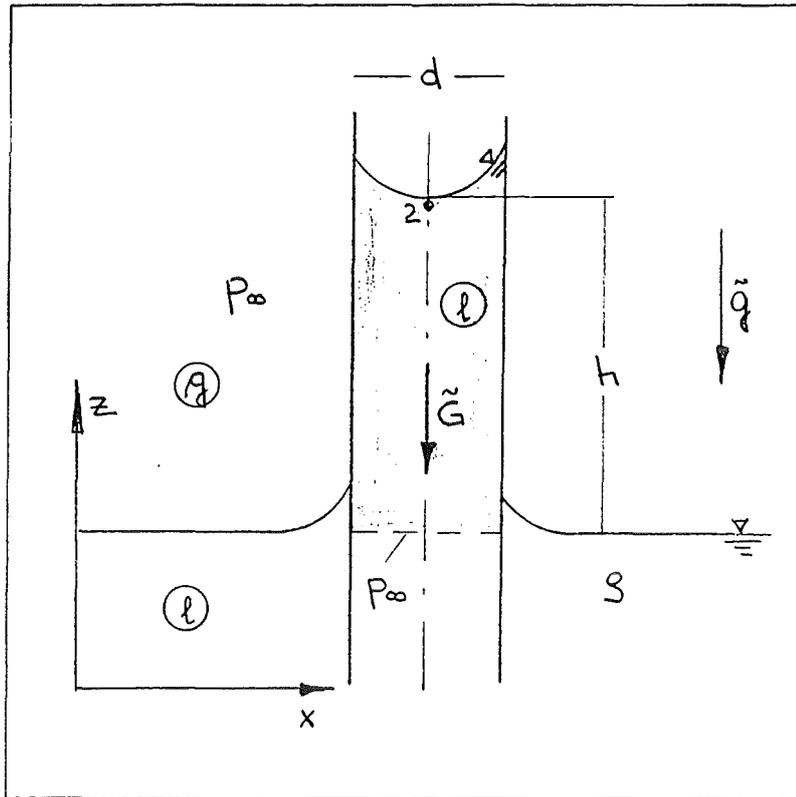


Abbildung 17: Steighöhe in einem Kapillarrohr nach Zierep (1993).

Für  $t \rightarrow \infty$  wird sicherlich Druckausgleich hergestellt sein, sodaß an beiden Kapillarenden der identische Krümmungsradius vorliegen muß. Dies ist in der Tat zu beobachten, der Krümmungsradius der großen Blase tritt auch an der freien Grenzfläche im Kapillarrohr auf.

## 2.2 Steighöhe in einem Kapillarrohr

Bringen wir ein Kapillarrohr senkrecht in einen Behälter mit Flüssigkeit und einer freien  $l/g$ -Grenzfläche, so wird die Flüssigkeit bei guter Benetzung im Kapillarrohr eine bestimmte Strecke hochsteigen (vgl. Zierep 1993). Die Kräfte infolge der Benetzung sind offensichtlich groß genug, um die Anhebung der Flüssigkeit gegen die Schwerkraft zu bewirken. Wir wollen uns dieses Problem näher betrachten. Hierzu schneiden wir den angehobenen Teil der Flüssigkeitssäule (schattiert) frei und stellen ein Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung auf. Zu berücksichtigen sind Druckkräfte, Gewichtskraft und Kapillarkraft. Wir erhalten in der vertikalen Richtung  $z$ :

$$p_{\infty} \frac{\pi d^2}{4} - \rho h g + \sigma \pi d \cos \Theta - p_{\infty} \frac{\pi d^2}{4} = 0$$

und lösen auf nach der gesuchten Steighöhe

$$h = \frac{4\sigma \cos \Theta}{\rho g d} \leq \frac{4\sigma}{\rho g d} .$$

Für gegebene Durchmesser  $d$  erhalten wir demnach eine Steighöhe  $h$ , welche für den Kontaktwinkel  $\Theta \rightarrow 0$  maximal wird. Dies ist gerade der Fall der vollständigen Benetzung. Wir erkennen weiterhin, daß für  $\Theta > 90$ , d.h. für schlechte Benetzung, keine positive Steighöhe mehr erhalten wird, sondern eine Senkung ( $h < 0$ ) auftritt. Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß man im Falle von zwei ebenen Platten im Abstand  $d$  die (zylindrische) Kapillarhebung

$$h = \frac{2\sigma \cos \Theta}{\rho g d}$$

völlig analog ableiten kann.

Aus obigen Gleichungen kann desweiteren entnommen werden, daß die Proportionalität  $h \sim \frac{1}{d}$  gilt. Somit kann die Kapillarhebung durch immer dünner gewählte Kapillarrohre fast beliebig gesteigert werden. Theoretisch wird eine maximale Steighöhe  $h \rightarrow \infty$  für  $d \rightarrow 0$  erreicht. Hier ist allerdings eine natürliche Grenze durch Verdampfung gegeben. Dies können wir verstehen, indem wir den Druck an der Position 2 explizit berechnen. Dies kann auf zwei verschiedene Arten geschehen:

$$p_2 = p_\infty - \rho g h \quad ,$$

$$p_2 = p_\infty - \frac{2\sigma}{R} \quad .$$

Hier wird der Druck, ausgehend von  $p_\infty$ , zum ersten über die Hydrostatik in der Flüssigkeit und zum zweiten über den Drucksprung an der freien l/g-Grenzfläche berechnet. Setzen wir die obigen Ausdrücke für  $p_2$  gleich, so erhalten wir unmittelbar unseren Ausdruck für die Steighöhe  $h$  den wir oben diskutiert haben. Hier tritt er in leicht geänderter Form auf, indem statt  $\frac{4 \cos \Theta}{d}$  nun  $\frac{2}{R}$ , mit dem mittleren Krümmungsradius  $R$ , auftaucht. Man vergewissere sich aber leicht, daß beide Ausdrücke aufgrund der Geometrie identisch sind. Insbesondere werden im Falle vollständiger Benetzung  $\Theta = 0$  die Krümmungsradien  $r_1 = r_2 = \frac{d}{2} = R$ . Gleichzeitig erkennen wir, daß der Druck  $p_2$  nicht beliebig fallen kann, denn sobald  $p_2$  kleiner als der Dampfdruck der Flüssigkeit wird, tritt Verdampfung ein. Aus  $p_2 \geq p_{Dampf}$  kann deshalb sofort eine maximal mögliche Steighöhe  $h$  ermittelt werden. Wir wollen schließlich noch einige typische Zahlenwerte für das System Wasser/Luft angeben. Mit den Stoffwerten

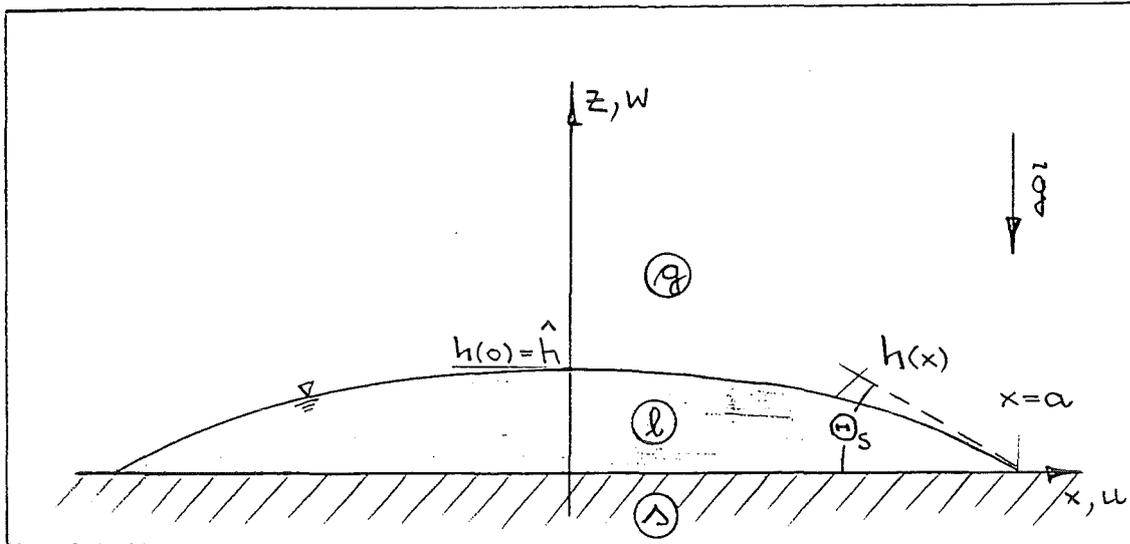


Abbildung 18: Tropfen auf der Platte (eben  $x, z$ )

$\sigma = 7.1 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ ,  $p_\infty = 10^5 \text{ N/m}^2$  und  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  erhält man für ein Kapillarrohr mit  $d = 1 \text{ mm}$  eine Steighöhe  $h = 28.8 \text{ mm}$ . Die maximal erreichbare Steighöhe erhält man in einem Kapillarrohr von  $d \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  mit  $h \approx 9.6 \text{ m}$ .

### 2.3 Tropfen auf einer Platte (ebenes Problem)

Wir wollen nun eine stationäre Konfiguration behandeln, welche sich ergibt, wenn wir eine partiell benetzende Flüssigkeit auf eine Platte aufbringen. Nach einiger Zeit wird sich der Tropfen in einer symmetrischen Form mit dem beidseitig stationären Kontaktwinkel  $\Theta_s$  befinden. Diese Form bleibt erhalten für alle Zeiten. Wir wollen uns diese stationäre Tropfenkontur  $h(x)$  berechnen, wobei wir das ebene Problem betrachten, d.h. in  $y$ -Richtung bleibt die Kontur  $h(x)$  unverändert. Der achsensymmetrische Tropfen kann im übrigen bei identischer Vorgehensweise und Verwendung eines zylindrischen Koordinatensystems berechnet werden.

Zunächst können wir feststellen, daß die Flüssigkeit im Tropfeninnern in Ruhe sein muß. Die Flüssigkeitsränder sind stationär und auf der Platte wird die Haftbedingung erfüllt. Weder durch Auftrieb noch durch Schubspannungen ( $\sigma = \text{konst.}$ ) ist eine Strömung möglich. Mit  $u = w = 0$  wird die Aussage der Kontinuitätsgleichung trivial. Aus den stationären Navier-Stokes-Gleichungen entfallen die konvektiven und viskosen Terme und es verbleibt lediglich

$$x: \quad 0 = -p_x \quad ,$$

$$z : 0 = -p_z - \rho g \quad .$$

Hieraus können wir uns unmittelbar die Druckverteilung in der Flüssigkeit berechnen. Durch einfache Integration erhalten wir

$$p = p_0 - \rho g z \quad ,$$

worin  $p_0$  eine zunächst unbekannte Integrationskonstante bezeichnet. Als nächstes können wir die Stetigkeit des Druckes über die  $1/g$ -Grenzfläche auswerten. Es muß gelten

$$p(z = h) = p_0 - \rho g h = p_\infty - 2H\sigma \quad .$$

Der Druck in der Flüssigkeit unmittelbar unter der Grenzfläche kann somit einerseits aus unserem hydrostatischen Druckfeld berechnet werden, andererseits kann ausgehend vom Umgebungsdruck  $p_\infty$  der Drucksprung über die gekrümmte Grenzfläche subtrahiert werden. Die Krümmung der Funktion  $h(x)$  läßt sich dabei ausdrücken als

$$2H = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \quad .$$

Setzen wir die Krümmung in obige Gleichung ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung für  $h(x)$

$$\frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = \frac{(p_0 - \rho g h) - p_\infty}{\sigma} \quad .$$

Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2.Ordnung . Zur Vereinfachung wollen wir hier annehmen, daß die hydrostatische Druckvariation klein ist, d.h. es gilt

$$(p_0 - p_\infty) \gg |\rho g h| \quad .$$

Dies ist sicherlich eine gute Näherung für dünne Tropfen, bei denen  $h$  sehr klein ist. Somit ergibt sich eine genäherte Differentialgleichung

$$\frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \simeq \frac{p_0 - p_\infty}{\sigma} \quad .$$

Bei näherer Betrachtung erkennen wir auf der linken Seite die mittlerer Krümmung  $2H$  der Funktion und auf der rechten Seite eine Konstante. Wir suchen demnach eine Funktion  $h(x)$  mit konstanter Krümmung, eine Eigenschaft, die der Kreis besitzt. Wir wählen deshalb die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (h - h_0)^2 = r^2$$

als Ausgangspunkt und können aufgrund der Symmetrie von  $h(x)$ , d.h.

$$h(x) = h(-x)$$

sofort  $x_0 = 0$  festlegen. Somit kommt für  $h(x)$  der Ansatz

$$h(x) = h_0 + (r^2 - x^2)^{1/2} \quad ,$$

mit den Ableitungen

$$h_x = -x(r^2 - x^2)^{-1/2} \quad ,$$

$$h_{xx} = -(r^2 - x^2)^{-1/2} \{1 + x^2(r^2 - x^2)^{-1}\} \quad .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die genäherte Differentialgleichung ein, so kommt

$$\frac{-(r^2 - x^2)^{-1/2} \{1 + \frac{x^2}{(r^2 - x^2)}\}}{\{1 + \frac{x^2}{(r^2 - x^2)}\}^{3/2}} = \frac{1}{r} \approx \frac{p_0 - p_\infty}{\sigma} \quad .$$

Somit ist der Radius des Kreises  $r$  im Ansatz für  $h(x)$  festgelegt. Wir haben jedoch noch zwei weitere freie Konstanten  $p_0$  und  $h_0$ , mit welchen wir noch zwei Randbedingungen für  $h(x)$  erfüllen können. Mögliche Randbedingungen sind die Vorgabe der Tropfenhöhe in der Tropfenmitte, die Vorgabe der Position der Kontaktlinie oder die Vorgabe eines Kontaktwinkels, d.h.

$$h(x = 0) = \hat{h} \quad ,$$

$$h(x = a) = 0 \quad ,$$

$$h_x(x = a) = -\tan \Theta_s \quad .$$

Alternativ könnte man hier noch das Volumen vorgeben, d.h die Integralbedingung

$$2 \int_0^a h(x) dx = V_0$$

stellen. Durch 2 dieser 4 Bedingungen sind die freien Konstanten festzulegen und damit ist die Lösung  $h(x)$  bekannt. In allen Fällen stellt  $h(x)$  ein Kreissegment dar. Wir wollen den weiteren Gang der Rechnung hier unterdrücken, weil keine neuen Einsichten zu erwarten sind.



horizontale Ausdehnung immer weiter anwächst. Bezeichnen wir die beiden Ausdehnungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung mit  $H_0$  und  $L_0$ , so gilt sicherlich  $\epsilon = \frac{H_0}{L_0} \ll 1$ . Wir haben also einen kleinen Parameter  $\epsilon$  im Problem, welcher uns im weiteren Fortgang der Rechnung helfen kann, Vereinfachungen in den Gleichungen einzuführen. Wenn nun die Ausdehnungen in den beiden Raumrichtungen so unterschiedlich sind, ist es sicherlich sinnvoll, formal separate Längenskalen in  $x$  und  $z$  einzuführen. Wir führen deshalb die dimensionslosen Koordinaten

$$X = \frac{x}{L_0} \quad , \quad Z = \frac{z}{H_0}$$

ein. Mit der horizontalen Geschwindigkeit  $u_0$  im Problem erhalten wir sofort die Geschwindigkeitsskalen

$$U = \frac{u}{u_0} \quad , \quad W = \frac{w}{w_0} \quad ,$$

wobei  $w_0$  zunächst noch nicht festgelegt ist. Mit der Längenskala und der Geschwindigkeit in horizontaler Richtung erhalten wir die Zeitskala

$$\tau = \frac{t}{(L_0/u_0)} \quad .$$

Schließlich wählen wir eine noch nicht festgelegte Druckskalierung

$$P = \frac{p}{p_0} \quad .$$

Im nächsten Schritt entdimensionieren wir die Differentialgleichungen indem wir die gewählten Skalierungen einbringen. Hierbei ist zu beachten, daß unsere dimensionslosen Koordinaten und Zustandsgrößen aufgrund der oben gewählten Skalen alle von den Größenordnung  $O(1)$  sind. Wir können folglich die Größe der einzelnen Terme in den Differentialgleichungen anhand der dimensionslosen Vorfaktoren beurteilen. Wir erhalten formal für die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{u_0}{L_0} U_X + \frac{w_0}{H_0} W_Z = 0 \quad ,$$

bzw.

$$U_X + \frac{w_0 L_0}{u_0 H_0} W_Z = 0 \quad .$$

Aufgrund der gewählten Skalen muß gelten,  $U_X = O(1)$ ,  $W_Z = O(1)$ . Wollen wir die Gleichung erfüllen, so muß zwangsläufig der Vorfaktor  $\frac{w_0 L_0}{u_0 H_0} = \frac{w_0}{u_0} \cdot \frac{1}{\epsilon} = O(1)$  sein. Die einfachste Wahl ist hier den Vorfaktor willkürlich identisch 'Eins' zu setzen, was gleichzeitig unsere Geschwindigkeitsskala zu  $w_0 = \epsilon \cdot u_0$  festlegt. Prinzipiell hätte

hier jede andere Zahl anstatt der 'Eins' gewählt werden können. Es muß lediglich die Größenordnung beachtet werden. Die dimensionslose Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich damit zu

$$U_X + W_Z = 0 \quad .$$

Die gleiche Prozedur wenden wir nun auf die horizontale Navier-Stokes-Gleichung an und erhalten

$$\frac{\rho u_0^2}{L_0} \{U_\tau + UU_X + WW_Z\} = -\frac{p_0}{L_0} P_X + \frac{\mu u_0}{H_0^2} \left\{ \frac{H_0^2}{L_0^2} U_{XX} + U_{ZZ} \right\} \quad ,$$

bzw. vereinfacht nach Einführung der Reynolds-Zahl  $Re = \frac{u_0 H_0}{\nu}$

$$Re \cdot \epsilon \{U_\tau + UU_X + WW_Z\} = -\frac{p_0 H_0^2}{\mu u_0 L_0} P_X + \{\epsilon^2 U_{XX} + U_{ZZ}\} \quad .$$

Betrachten wir den Fall kleiner Reynolds-Zahlen, d.h. schwache Einströmung ( $u_0 H_0$ ), so kann der konvektive Term auf der linken Seite sicherlich vernachlässigt werden. In diesem Falle erwartet man, rein anschaulich, daß die Ausbreitung des Fluids durch das hydrostatische Druckfeld angetrieben wird. Hemmend werden sicherlich die viskosen Kräfte sein. Wegen  $U_{ZZ} = O(1)$  und  $P_X = O(1)$  muß deshalb der Vorfaktor des Druckterms ebenfalls von der Größenordnung  $O(1)$  sein. Nur so kann in der Gleichung ein Gleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskräften auftreten. Wir wählen den Vorfaktor des Druckterms identisch 'Eins' und legen damit unsere Druckskala fest, d.h.

$$p_0 = \frac{\mu u_0}{H_0} \cdot \frac{L_0}{H_0} \quad .$$

Bei Vernachlässigung von Termen der Größe  $O(\epsilon^2)$  reduziert sich somit die horizontale Impulsgleichung auf

$$Re \cdot \epsilon \{U_\tau + UU_X + WW_Z\} = -P_X + U_{ZZ} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Uns bleibt nun noch, die Skalierung in der vertikalen Impulsgleichung anzuwenden. Wir erhalten zunächst

$$\frac{\rho u_0^2}{L_0} \frac{H_0}{L_0} \{W_\tau + UW_X + WW_Z\} = -\frac{\mu u_0 L_0}{H_0^3} P_Z + \frac{\mu u_0}{L_0 H_0} \left\{ \frac{H_0^2}{L_0^2} W_{XX} + W_{ZZ} \right\} - \rho g$$

bzw. nach Einführung der Reynolds-Zahl und einer Froude-Zahl  $Fr = \frac{u_0^2}{g H_0}$

$$Re \cdot \epsilon^3 \{W_\tau + UW_X + WW_Z\} = -P_Z + \epsilon^2 \{\epsilon^2 W_{XX} + W_{ZZ}\} - \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} \quad .$$

Die Froude-Zahl erscheint invers im Schwerkraft-Term, sie stellt allgemein ein Verhältnis von Trägheits- und Schwerkraft dar. In der obigen Gleichung ist nun zu erkennen, daß sowohl die konvektiven Terme auf der linken Seite der Gleichung als auch die viskosen Terme auf der rechten Seite offensichtlich sehr klein werden. Dies ist unmittelbar an den Vorfaktoren  $Re \cdot \epsilon^3$  bzw.  $\epsilon^2$  zu erkennen. Bei Vernachlässigung von Termen der Größenordnung  $O(\epsilon^2)$  wird deshalb ein Gleichgewicht aus Druckterm und Schwerkraftterm in der führenden Ordnung bleiben, d.h.

$$0 = -P_z - \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Aus den obigen dimensionslosen Grundgleichungen können nun die folgenden Grenzfälle betrachtet werden:

1. Ist  $Re \cdot \epsilon \gg 1$ , so wird die horizontale Impulsgleichung durch die konvektiven Terme dominiert. Dies ist der Fall, für welchen die Trägheitskräfte das Geschehen bestimmen. Viskose Kräfte spielen keine Rolle mehr.
2. Wird  $Re \cdot \epsilon \ll 1$ , so können die Trägheitskräfte vernachlässigt werden und das Zusammenspiel aus hydrostatischem Druckfeld und den viskosen Effekten ist entscheidend.

### 3.1.2 Das durch Trägheits- und Schwerkraft kontrollierte Problem

Wie oben erwähnt verschwinden wegen  $Re \cdot \epsilon \gg 1$  in den Grundgleichungen die viskosen Terme in der führenden Ordnung. Dies hat zur Folge, daß wir die Haftbedingung auf der Platte zunächst nicht erfüllen können. Das Problem müßte daher, bei Verwendung einer kinematischen Grenzschichtdicke  $\delta$  als vertikale Längenskala, reskaliert werden. Als Ergebnis zeigt sich, daß die viskosen Kräfte innerhalb der kinematischen Grenzschicht in die gleiche Größenordnung wie die Trägheitskräfte kommen. Weiterhin wäre der Druck in diesem Falle auf Basis der Trägheitskräfte, d.h. mit dem Staudruck zu skalieren. Die Lösung wäre somit eine Grenzschichtlösung unmittelbar an der Platte, welche an eine trägheitsbestimmte Außenlösung angepaßt werden müßte. Wir wollen den Strömungstyp in Abbildung 20 skizzieren und die typische Abmessung der Grenzschicht nach Schlichting (1982) mit  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$  angeben. Ansonsten wollen wir den Schwerpunkt auf den zweiten Grenzfall legen.

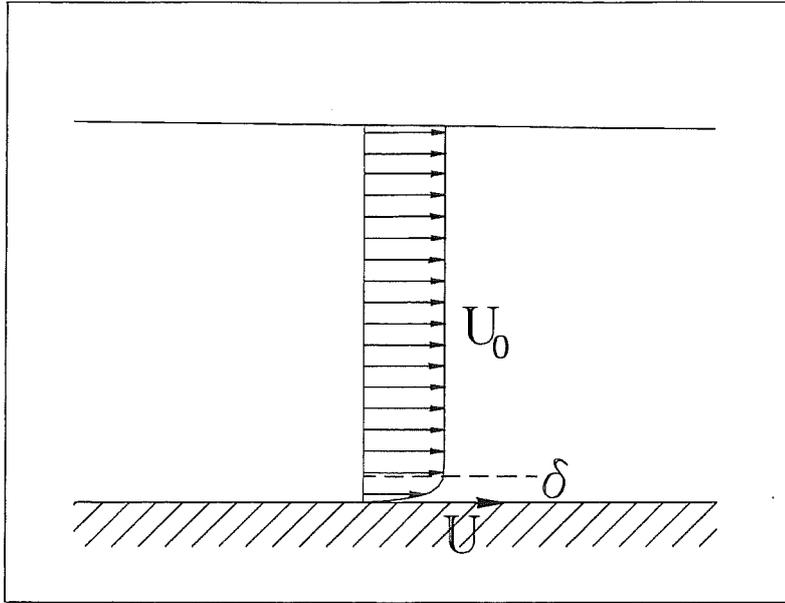


Abbildung 20: Geschwindigkeitsprofil bei der trägheitsdominierten Ausbreitungsströmung.

### 3.1.3 Das durch Viskositäts- und Schwerkraft kontrollierte Problem

Wie oben erwähnt verschwinden wegen  $Re \cdot \epsilon \ll 1$  nun die konvektiven Terme in der Impulsgleichung, sodaß wir das Problem mit den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} U_X + W_Z &= 0 \quad , \\ 0 &= -P_X + U_{ZZ} \quad , \\ 0 &= -P_Z - \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} \quad , \end{aligned}$$

zu lösen haben. Weiterhin müssen wir für eine konkrete Lösung geeignete Randbedingungen formulieren. Wir stellen hierzu die Haftbedingung an der Wand ( $Z = 0$ ) und fordern an der freien l/g-Grenzfläche eine tangentiale Strömung und Schubspannungsfreiheit. Weiterhin formulieren wir den Drucksprung über die freie Grenzfläche. Dieses Problem wurde erstmals von Huppert (1982) behandelt. Für die Randbedingungen erhalten wir zunächst in dimensionsbehafteter Darstellung

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad u &= w = 0 \quad , \\ z = h : \quad \frac{\partial |\vec{v}|}{\partial \vec{n}} &= 0 \quad , \\ h_x u &= w - h_t \quad , \\ \Delta p &= \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \sigma \quad . \end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch das Volumen der Flüssigkeit vorgeben. Dies geschieht über die Integralbedingung

$$\int_0^{a(t)} h(x, t) dx = V(t) = q \cdot t^\alpha \quad ,$$

welche ein zeitabhängiges Volumen über ein Potenzgesetz erlaubt, gleichzeitig aber für  $\alpha = 0$  das konstante Volumen beinhaltet.

Wir müssen nun wiederum die Rand- und Integralbedingungen in eine dimensionslose Form überführen. Dies ermöglicht die Anwendung weiterer Näherungen. Es wird

$$Z = 0 : U = W = 0 \quad ,$$

$$Z = H : |\tilde{v}| = (u^2 + w^2)^{1/2} \quad , \quad \tilde{n} = (1 + h_x^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} -h_x \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\frac{\partial |\tilde{v}|}{\partial \tilde{n}} = \frac{u_0}{H_0} (1 + \epsilon^2 H_X^2)^{-1/2} \left\{ -\epsilon^2 (U^2 + \epsilon^2 W^2)_X^{1/2} H_X + (U^2 + \epsilon^2 W^2)_Z^{1/2} \right\} \quad ,$$

$$\rightarrow 0 = U_Z + O(\epsilon) \quad ;$$

$$Z = H : H_X U + H_\tau = W \quad ,$$

$$Z = H : \Delta P = \frac{\sigma \epsilon^3}{\mu u_0} H_{XX} \left\{ 1 + \epsilon^2 H_X^2 \right\}^{-3/2} \quad ,$$

$$\rightarrow \Delta P = Ca^{-1} \epsilon^3 H_{XX} + O(\epsilon^4) \quad .$$

Die Kennzahl  $Ca$  ist die sogenannte Kapillaritätszahl, welche das Verhältnis von viskosen und kapillaren Kräften charakterisiert. Es gilt  $Ca = \mu u_0 / \sigma$ . Schließlich entdimensionieren wir die Integralbedingung und erhalten

$$\int_0^{A(\tau)} H(X, \tau) dX = \frac{q L_0^\alpha}{u_0^\alpha L_0 H_0} \tau^\alpha \quad .$$

Zur Lösung des Problems integrieren wir zunächst die vertikale Navier-Stokes-Gleichung und berechnen hieraus das Druckfeld. Wir erhalten

$$\int P_Z dZ = - \int \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} dZ \quad ,$$

$$P = - \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} Z + P_0 \quad .$$

Wir wählen willkürlich unser Druckniveau mit  $P_\infty = 0$  und kommen mit unserer Gleichung für den Drucksprung unmittelbar zum Druck innerhalb der Grenzfläche, d.h.

$$P(Z = H) = P_\infty + \Delta P = 0 + O(\epsilon^3) \quad .$$

Hiermit kann direkt die Integrationskonstante  $P_0$  festgelegt werden und das Druckfeld ist bekannt,

$$P = \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} (H - Z) \quad .$$

Die Anwendung der vertikalen Impulsgleichung erlaubt somit sofort die Geschwindigkeit  $U$  durch Integration zu ermitteln. Wir erhalten zunächst

$$U_Z = \int P_X dZ = \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} H_X Z + C_0 \quad .$$

Die Auswertung der Schubspannungsfreiheit,  $U_Z(Z = H) = 0$ , legt die Integrationskonstante  $C_0$  fest. Es wird

$$U_Z = \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} H_X (Z - H)$$

bzw.

$$U = \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} H_X \left( \frac{Z^2}{2} - HZ \right) + C_1 \quad .$$

Die Auswertung der Haftbedingung bei  $Z = 0$  liefert  $C_1 = 0$ , womit das Endergebnis

$$U = \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} H_X \left( \frac{Z^2}{2} - HZ \right)$$

folgt. Hiermit haben wir sowohl das Druckfeld als auch das Geschwindigkeitsfeld  $U$  berechnet. Die entsprechenden Randbedingungen sind bereits erfüllt. Bei näherer Betrachtung der Ausdrücke für  $P$  und  $U$  ist allerdings festzustellen, daß sie die Funktion  $H(X, \tau)$  bzw. deren Ableitungen beinhalten. Die Funktion  $H(X, \tau)$  stellt die dimensionslose Lage der Grenzfläche dar - sie ist zum jetzigen Zeitpunkt noch unbekannt!

Im nächsten Schritt werten wir die Kontinuitätsgleichung aus, indem wir sie einmal über die Schichthöhe  $H(X, \tau)$  integrieren, d.h.

$$\int_0^H U_X dZ + \int_0^H W_Z dZ = 0 \quad .$$

Wir erhalten hieraus

$$\int_0^H U_X dZ + W(Z = H) - W(Z = 0) = 0 \quad ,$$

bzw. nach Verwertung der tangentialen Strömungsbedingung bei  $Z = H$  und der Haftbedingung bei  $Z = 0$

$$\int_0^H U_X dZ + H_X U(Z = H) + H_\tau = 0 \quad .$$

Die beiden ersten Glieder können gemäß Bronstein (S. 327) zusammengefaßt werden, da gilt

$$\left( \int_0^{H(X)} U dZ \right)_X \equiv H_X U(Z = H) + \int_0^{H(X)} U_X dZ \quad .$$

Somit erhalten wir

$$\left( \int_0^{H(X)} U dZ \right)_X + H_\tau = 0$$

und können das Integral aus dem bekannten Geschwindigkeitsfeld berechnen. Wir erhalten letztendlich

$$H_\tau - \frac{1}{3} \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} (H^3 H_X)_X = 0 \quad .$$

Dies stellt eine partielle Differentialgleichung für die Position der freien l/g-Grenzfläche  $H(X, \tau)$  dar, welche erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort  $X$  ist. Weiterhin ist diese Gleichung hochgradig nichtlinear. Es gilt nun diese Gleichung zu lösen und damit die Kontur der Grenzfläche  $H(X, \tau)$  zu berechnen.

Wir wollen hierzu den Versuch unternehmen, eine sogenannte ähnliche Lösung des Problems abzuleiten. Der Grundgedanke ist der folgende: Unsere freie Grenzfläche  $H(X, \tau)$  wird sicherlich stets bei  $X = 0$  ihr Maximum haben und bei  $X = A(\tau)$  wird sie auf die Platte treffen. Die Form ist folglich immer ähnlich, mit der Komplikation, daß die Kontaktlinie  $A(\tau)$  in der Zeit wandert. Wir können aber sicherlich eine neue Variable

$$\eta = \frac{X}{A(\tau)}$$

eingeführen, mit der Eigenschaft  $0 \leq \eta \leq 1$ . Unter Verwendung dieser Variable hat die freie Grenzfläche bei  $\eta = 0$  ihren größten Wert. Bei  $\eta = 1$  trifft sie unabhängig von der Zeit  $\tau$  auf die Platte. Verwenden wir für die Position der Kontaktlinie den Ansatz  $A(\tau) = C_0 \tau^m$  für die Zeitabhängigkeit, so erhalten wir

$$\eta = \frac{X}{C_0} \tau^{-m} \quad .$$

Durch diese Variable  $\eta$  sollte eine Darstellung der freien Grenzfläche gemäß dem Ansatz

$$H(X, \tau) = \tilde{H}(\eta) \cdot F(\tau)$$

möglich sein. Hierin gibt  $\tilde{H}(\eta)$  die ähnliche Form der freien Grenzfläche an, sie ist in Abbildung 21 dargestellt. Die Funktion  $F(\tau)$  erlaubt, die Amplitude als Funktion der Zeit zu verändern. In gleicher Weise wie oben bietet sich für diese Zeitfunktion der Ansatz  $F(\tau) = C_1 \tau^n$  an, sodaß wir die Darstellung

$$H(X, \tau) = \tilde{H}(\eta) \cdot C_1 \tau^n$$

erhalten. Durch diese Zerlegung der Funktion  $H(X, \tau)$  in eine Formfunktion  $\tilde{H}(\eta)$  und eine Amplitudenfunktion  $F(\tau) = C_1 \tau^n$  sollte die Abhängigkeit von  $X$  zu eliminieren



wir keine Abhängigkeit von  $X$  in dieser Gleichung und die Zeitabhängigkeit kann durch die Wahl

$$\tau^{(n-1)} = \tau^{(4n-2m)}$$

eliminiert werden. In diesem Fall hat jeder Summand die gleiche Zeitabhängigkeit und der Ausdruck kann herausdividiert werden. Somit haben wir eine erste Bestimmungsgleichung für die Exponenten  $m$  und  $n$ , d.h.

$$n - 1 = 4n - 2m \quad .$$

Eine weitere Bestimmungsgleichung erhalten wir, wenn wir unsere Ansätze in die Integralbedingung für das Volumen einsetzen. Wir erhalten

$$C_0 C_1 \tau^{(m+n)} \int_0^1 \tilde{H} d\eta = \frac{qL_0^\alpha}{u_0^\alpha L_0 H_0} \tau^\alpha \quad .$$

Auch hier muß zwangsläufig die Zeitabhängigkeit entfallen, wenn unsere Ansätze schlüssig sind. Es muß also gelten

$$m + n = \alpha \quad .$$

Aus den zwei Bestimmungsgleichungen kann sofort  $m$  und  $n$  berechnet werden, es wird

$$n = \frac{(2\alpha - 1)}{5} \quad ,$$

$$m = \frac{(3\alpha + 1)}{5} \quad .$$

Die Differentialgleichung und die Integralbedingung für das Volumen haben somit das Aussehen

$$(\tilde{H}^3 \tilde{H}_\eta)_\eta - \frac{3C_0^2 Fr}{C_1^3 Re \cdot \epsilon} \left\{ \frac{(2\alpha - 1)}{5} \tilde{H} - \frac{(3\alpha + 1)}{5} \eta \tilde{H}_\eta \right\} = 0 \quad ,$$

$$\int_0^1 \tilde{H} d\eta = \frac{qL_0^\alpha}{u_0^\alpha L_0 H_0 C_0 C_1} \quad .$$

Aufgrund der gewählten Skalierung müssen die Vorfaktoren in beiden Gleichungen von der Größenordnung  $O(1)$  sein. Wir können an dieser Stelle wiederum unsere Konstanten  $C_0$ ,  $C_1$  willkürlich so wählen, daß die Brüche identisch zu eins werden. Jede andere Wahl führt im übrigen zum gleichen Ergebnis, weil zum einen in den Gleichungen beispielsweise die Zahl zwei erscheint, parallel hierzu hätten aber auch

$C_0$  und  $C_1$  andere Werte, sodaß die physikalische Größe am Ende erhalten bleibt. Wir verwenden folglich die Beziehungen

$$\frac{3 C_0^2 Fr}{C_1^3 Re \cdot \epsilon} = 1 \quad , \quad \frac{q L_0^\alpha}{u_0^\alpha L_0 H_0 C_0 C_1} = 1$$

um unsere Konstanten festzulegen. Wir erhalten

$$C_0 = \left( \frac{Re \cdot \epsilon}{3 Fr} \right)^{1/5} \left( \frac{q L_0^\alpha}{u_0^\alpha L_0 H_0} \right)^{3/5} \quad ,$$

$$C_1 = \left( \frac{3 Fr}{Re \cdot \epsilon} \right)^{1/5} \left( \frac{q L_0^\alpha}{u_0^\alpha L_0 H_0} \right)^{2/5} \quad .$$

Unsere Differentialgleichung und Volumenbedingung werden schließlich zu

$$(\tilde{H}^3 \tilde{H}_\eta)_\eta + \frac{3\alpha + 1}{5} \eta \tilde{H}_\eta - \frac{2\alpha - 1}{5} \tilde{H} = 0 \quad ,$$

$$\int_0^1 \tilde{H} d\eta = 1 \quad .$$

Im allgemeinen muß diese Differentialgleichung numerisch integriert werden um die Lösung für die Formfunktion  $\tilde{H}(\eta)$  zu bestimmen. Da es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung handelt, finden sich in jeder mathematischen Programmbibliothek eine Unmenge solcher Integrationsverfahren, wie z.B. das Runge-Kutta-Verfahren. Zudem ist zu beachten, daß lediglich noch eine Abhängigkeit der Lösung  $\tilde{H}(\eta)$  vom Parameter  $\alpha$  besteht, d.h. vom Zeitgesetz des Volumens. Alle anderen Abhängigkeiten sind bereits explizit bekannt. Die numerische Lösung muß folglich nur einmal erfolgen, während Abhängigkeiten von  $Re$ ,  $Fr$ , etc. analytisch diskutiert werden können.

Wir wollen uns nun die Ausbreitungsströmung, welche oben berechnet wurde, für zwei Fälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$  graphisch veranschaulichen. Der Fall  $\alpha = 0$  entspricht dem Fall eines konstanten Volumens der Flüssigkeit, der Fall  $\alpha = 1$  entspricht einer konstanten Einströmung, d.h. einem Volumen  $V \sim \tau^1$ . Hierzu sind in Abbildung 22 die l/g-Grenzfläche und die entsprechenden Stromlinien gezeigt. Gegeben ist jeweils eine Anfangskontur bei  $\tau = 1$ , welche bei beiden Fällen identisches Volumen aufweist. Die folgende Kontur mit den Stromlinien ist dann berechnet für  $\tau = 3$ .

Wir erkennen im Falle  $\alpha = 0$ , daß das Volumen konstant bleibt. Die freie Grenzfläche senkt sich für kleine  $X$  ab, die Flüssigkeit strömt demzufolge von links nach rechts und schiebt die Kontaktlinie vorwärts. Für das Zeitgesetz der Kontaktlinie gilt in diesem Fall  $A(\tau) \sim \tau^{1/5}$ , die Höhe der Flüssigkeitsschicht bei  $X = 0$  sinkt gemäß

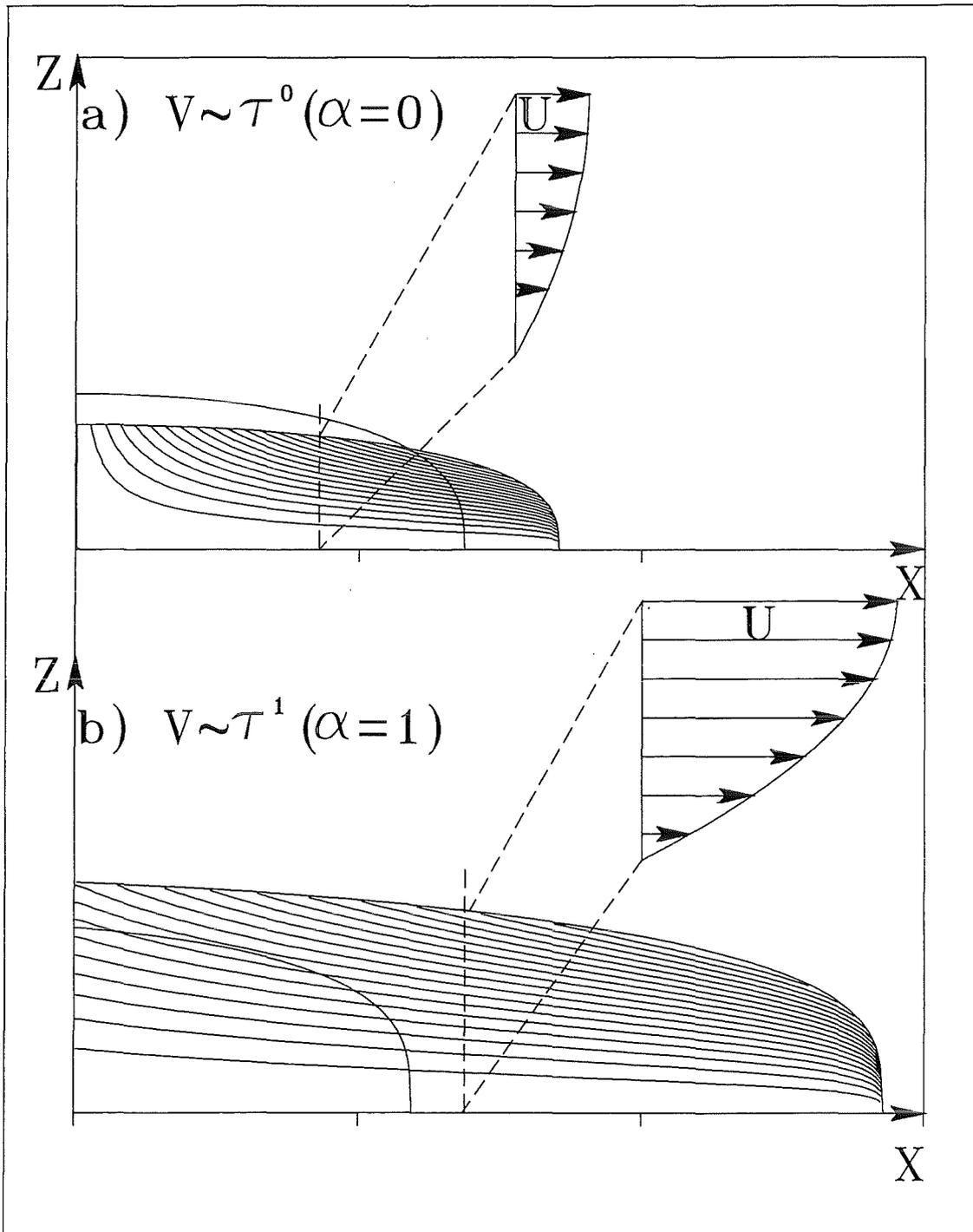


Abbildung 22: Kontur der freien Grenzfläche und Stromlinien für a)  $\alpha = 0$  und b)  $\alpha = 1$ .

$H(0, \tau) \sim \tau^{-1/5}$ . Für stationäre Ränder sind Stromlinien generell parallel zu diesen Rändern, weil tangentialer Strömung gefordert ist. Bei unserem Problem können die Stromlinien den zeitabhängigen Rand der l/g-Grenzfläche jedoch unter jedem Winkel durchstoßen. Die Strömung ist in diesem Fall trotzdem tangential zur freien l/g-Grenzfläche. Schließlich erkennen wir anhand des herausgezogenen Profils der Horizontalkomponente  $U$  der Geschwindigkeit, daß in diesem Fall kein Grenzschichtprofil vorliegt. Vielmehr erstreckt sich die Scherschicht über die gesamte Höhe  $H(X, \tau)$  der Flüssigkeitsschicht.

Der Fall  $\alpha = 1$  kennzeichnet nun einen konstanten Zufluß von Flüssigkeit über den Rand bei  $X = 0$ , sodaß gilt  $V \sim \tau^1$ . Demzufolge ändert sich das Zeitgesetz der Kontaktlinie zu  $A(\tau) \sim \tau^{4/5}$ . Die Flüssigkeitshöhe bei  $X = 0$  steigt nun gemäß  $H(0, \tau) \sim \tau^{1/5}$ . Alle diese Effekte wie Anwachsen des Volumens, schnelleres Vorranschreiten der Kontaktlinie und Anwachsen der Flüssigkeitshöhe bei  $X = 0$  können wir deutlich bei der numerischen Lösung erkennen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Lösung können wir den Bildern entnehmen. Der Kontaktwinkel an der Front ist stets  $\Theta = 90^\circ$ . Dies steht in einem gewissen Widerspruch zu den Ausführungen in Abschnitt 1.2. Dort hatten wir erkannt, daß der dynamische Kontaktwinkel von der Geschwindigkeit der Kontaktlinie abhängt, d.h.  $\Theta = f(A_\tau)$ ! Die Freiheit eine solche Abhängigkeit einzuführen, haben wir bei der Lösung dieses Problems nicht gehabt. Dies ist eine Folge der Vernachlässigung der Kapillarkräfte. Der Drucksprung

$$\Delta P = \frac{\epsilon^3}{Ca} H_{XX} + O(\epsilon^4) \ll 1$$

wurde bisher vernachlässigt. Wir können jedoch hier bereits erkennen, daß bei geeigneter Wahl für  $Ca = O(\epsilon^3)$  diese Vernachlässigung nicht zulässig ist, denn in diesem Fall sind die Kapillarkräfte zu berücksichtigen. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt tun.

### 3.1.4 Das durch Viskositäts-, Schwer- und Kapillarkräfte kontrollierte Problem

Wir gehen aus von den identischen Differentialgleichungen und Randbedingungen wie in Abschnitt 3.1.3. Bei geeigneter Wahl der Kapillaritätszahl wollen wir nun jedoch den Drucksprung über die freie l/g-Grenzfläche nicht vernachlässigen. Die

Differentialgleichungen sind demnach (vgl. Ehrhard & Davis 1991)

$$\begin{aligned} U_X + W_Z &= 0 \quad , \\ 0 &= -P_X + U_{ZZ} \quad , \\ 0 &= -P_Z - \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} \quad , \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} Z = 0 : \quad U = W &= 0 \quad ; \\ Z = H : \quad U_Z &= 0 \quad , \\ W &= H_X U + H_\tau \quad , \\ \Delta P &= \frac{\epsilon^3}{Ca} H_{XX} \end{aligned}$$

und der Integralbedingung

$$\int_0^{A(\tau)} H(X, \tau) dX = V(\tau) \quad .$$

Der Rechengang, der sich nun anschließt ist identisch wie in Abschnitt 3.1.3. Wir integrieren die Impulsgleichung in  $Z$  und erhalten nach Verwendung der Randbedingungen für das Druckfeld

$$P = \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} (H - Z) - \frac{\epsilon^3}{Ca} H_{XX} \quad .$$

Durch Einbringen der Lösung für den Druck in die Impulsgleichung in  $X$  erhalten wir nach zweimaliger Integration über  $Z$  und Verwendung der Randbedingungen für die Geschwindigkeit  $U$  die Lösung

$$U = \left\{ \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} H_X - \frac{\epsilon^3}{Ca} H_{XXX} \right\} \left( \frac{Z^2}{2} - HZ \right)$$

für das Geschwindigkeitsfeld. Schließlich verwenden wir die Kontinuitätsgleichung und integrieren sie bestimmt in  $Z$  über die Flüssigkeitsschicht. Hierdurch können wir die Entwicklungsgleichung für die Tropfenkontur  $H(X, \tau)$  ableiten. Wir erhalten

$$H_\tau - \frac{1}{3} \frac{Re \cdot \epsilon}{Fr} (H^3 H_X)_X + \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{Ca} (H^3 H_{XXX})_X = 0 \quad .$$

Diese Gleichung wollen wir noch weiter vereinfachen, indem wir sie mit  $Ca$  durchmultiplizieren und in dem Ausdruck

$$\frac{Re \cdot Ca}{\epsilon^2 Fr} = \frac{\rho g H_0^2}{\sigma} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} = Bo \cdot \frac{1}{\epsilon^2}$$

die Bond-Zahl  $Bo$  einführen. Wie man sich unmittelbar aus der Interpretation für  $Re$ ,  $Ca$  und  $Fr$  als Kräfteverhältnisse herleiten kann, stellt  $Bo$  ein Verhältnis aus Schwerkraft und Kapillarkraft dar. Nach dieser identischen Umformung erhalten wir

$$CaH_\tau + \frac{\epsilon^2}{3} \left\{ H^3 \left( H_{XX} - \frac{Bo}{\epsilon^2} H \right)_X \right\}_X = 0$$

für die Entwicklungsgleichung. Dies ist eine partielle nichtlineare Differentialgleichung für  $H(X, \tau)$ , welche erster Ordnung in der Zeit und vierter Ordnung in  $X$  ist.

Wir hatten bereits oben erkannt, daß  $Ca$  klein zu wählen ist um den Drucksprung über die freie l/g-Grenzfläche nicht in dem Problem zu verlieren, die Größe des Drucksprunges ist  $O(\epsilon^3/Ca)$ . Kleines  $Ca$  bedeutet konsistenterweise, daß die Kapillarkräfte groß gegenüber der Schwerkraft sind. Wählen wir nun weitergehend  $Ca \ll \epsilon^3$ , so wird der Term der Zeitableitung in der Entwicklungsgleichung sehr klein und wir dürfen ihn vernachlässigen. Man spricht dann von einer quasistationären Lösung, weil in der Differentialgleichung zwar keine Zeitableitung mehr präsent ist, aber trotzdem eine zeitabhängige Lösung  $H(X, \tau)$  auftreten wird.

Wir wollen uns also auf den Fall  $Ca \ll \epsilon^3$  beschränken und können deshalb die gewöhnliche Differentialgleichung lösen, welche nach einfacher Integration

$$H^3 \left( H_{XX} - \frac{Bo}{\epsilon^2} H \right)_X = C_0$$

lautet. Für unsere Funktion  $H(X, \tau)$  müssen wir nun sinnvolle Randbedingungen formulieren. Dies sind

$$\begin{aligned} H(X = A, \tau) &= 0 \quad , \\ H_X(X = A, \tau) &= -\tan \Theta \approx -\Theta \quad , \\ H_X(X = 0, \tau) &= 0 \quad , \\ H_{XXX}(X = 0, \tau) &= 0 \quad , \\ \int_0^A H dX &= V \quad . \end{aligned}$$

Wir fordern somit die Existenz einer Kontaktlinie bei  $X = A$  und geben den Kontaktwinkel  $\Theta$  dort in Form der Steigung der Funktion  $H$  vor. Weiterhin fordern wir einen symmetrischen und glatten Funktionsverlauf an der Stelle  $X = 0$ , was sich mathematisch in Form des Verschwindens der ersten und dritten Ableitung ausdrückt. Schließlich finden wir unser Volumen durch Integration über die Funktion  $H$ . Durch

Einbringen der Symmetrie- und Glattheitsbedingung bei  $X = 0$  in die Differentialgleichung erhalten wir

$$H^3(X = 0, \tau) \left( H_{XXX}(X = 0, \tau) - \frac{B_0}{\epsilon^2} H_X(X = 0, \tau) \right) = C_0$$

und können sofort  $C_0 = 0$  festlegen. Somit verbleibt die Differentialgleichung

$$H_{XXX} - \frac{B_0}{\epsilon^2} H_X = 0 \quad ,$$

welche nun eine homogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten darstellt. Aus dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^3 - \frac{B_0}{\epsilon^2} \lambda = 0 \quad ,$$

folgen sofort die Nullstellen

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} \quad ,$$

und deshalb die allgemeine Lösung

$$H(X, \tau) = C_1 + C_2 e^{\sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} X} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} X} \quad .$$

Aufgrund der Symmetriebedingung  $H_X(X = 0, \tau) = 0$  folgt sofort  $C_2 = C_3$  und wir können deshalb die Lösung auch schreiben als

$$H(X, \tau) = C_1 + C_2 \left\{ e^{\sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} X} + e^{-\sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} X} \right\} \quad ,$$

bzw.

$$H(X, \tau) = C_1 + C'_2 \cosh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} X \quad .$$

Wir erfüllen die Bedingung  $H(X = A, \tau) = 0$  und bestimmen hieraus  $C_1$  zu

$$C_1 = -C'_2 \cosh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} A \quad .$$

Schließlich erfüllen wir die Integralbedingung und bestimmen hieraus die Konstante  $C'_2$ . Das Ergebnis lautet

$$C'_2 = \frac{V \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}}}{\sinh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} A - A \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} \cosh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} A} \quad ,$$

$$H(X, \tau) = \frac{V \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} \left\{ \cosh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} X - \cosh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} A \right\}}{\sinh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} A - A \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} \cosh \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}} A} \quad .$$

Von den oben angegebenen Bedingungen für  $H(X, \tau)$  haben wir nun alle erfüllt mit Ausnahme der Bedingung für den Kontaktwinkel  $\Theta$ . Unsere Funktion  $H$  besitzt folglich eine Kontaktlinie bei  $X = A$ , ist glatt und symmetrisch bei  $X = 0$  und erfüllt die Integralbedingung. In der Gleichung für  $H$  verbleibt jedoch die Position der Kontaktlinie  $A(\tau)$  als unbekannt. Wir können folglich  $A(\tau)$  so festlegen, daß auch unsere Kontaktwinkelbedingung erfüllt wird. Hierzu müssen wir uns zunächst nochmals die Eigenschaften bewegter Kontaktlinien in Erinnerung rufen (vgl. Abbildung 11). Dort hatten wir erkannt, daß der Kontaktwinkel eine Funktion der Geschwindigkeit der Kontaktlinie darstellt. In unserem Fall ist die Geschwindigkeit der Kontaktlinie durch  $A_\tau$  gegeben. Wir verwenden also den allgemeinen Ansatz

$$A_\tau = \kappa^m (\Theta - \Theta_A)^m$$

für die erwähnte Abhängigkeit. Drücken wir den Kontaktwinkel  $\Theta$  aus der Steigung unserer Funktion  $H$  aus, so erhalten wir

$$H_X(A, \tau) = \frac{V \frac{Bo}{\epsilon^2}}{1 - A \sqrt{\frac{Bo}{\epsilon^2}} \coth \sqrt{\frac{Bo}{\epsilon^2}} A} = -\Theta = -\left(\frac{1}{\kappa} A_\tau^{1/m} - \Theta_A\right) \quad .$$

Dies stellt eine Differentialgleichung für die Position der Kontaktlinie dar, welche im allgemeinen Fall nur numerisch gelöst werden kann. Dies geschieht üblicherweise durch Anwendung eines Standardprogramms zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie es sich in jeder mathematischen Programmbibliothek befindet. Hierbei muß natürlich noch eine Anfangsbedingung für  $A(\tau = 0)$  gestellt und die Zeitabhängigkeit des Volumens  $V(\tau)$  angegeben werden.

Wir wollen trotzdem aus der obigen Gleichung zwei analytische Grenzfälle herleiten. Dies wollen wir tun für eine vollständig benetzende Flüssigkeit, für welche gilt  $\Theta_A = 0$ .

- Fall 1:  $Bo \rightarrow 0$

Dieser Fall entspricht dem Verhalten der Strömung ohne Schwerkräfteinfluß. Der Grenzfall  $Bo \rightarrow 0$  im obigen Ausdruck erweist sich bei näherem Hinsehen als nicht trivial, weil der Ausdruck  $\coth(X)$  für  $X \rightarrow 0$  singularär wird. Wir verwenden deshalb für  $\coth(X)$  eine Reihenentwicklung um  $X = 0$  und erhalten

$$\frac{V \frac{Bo}{\epsilon^2}}{1 - A \sqrt{\frac{Bo}{\epsilon^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{Bo}{\epsilon^2}} A} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{Bo}{\epsilon^2}} A + \dots \right)} \simeq \frac{V}{-\frac{1}{3} A^2 + \dots} = -\frac{1}{\kappa} A_\tau^{1/m} \quad .$$

Diese Gleichung hat somit die Form

$$V(\tau) \sim A_\tau^{1/m} A^2 \quad .$$

Unterstellen wir nun ein Potenzgesetz für die Zeitabhängigkeit  $A(\tau)$ , d.h.  $A \sim \tau^n$  und verwenden für das Volumen wiederum die Abhängigkeit  $V \sim \tau^\alpha$ , so erhalten wir

$$\tau^\alpha \sim \tau^{(n-1)/m} \cdot \tau^{2n}$$

bzw.

$$n = \frac{\alpha m + 1}{2m + 1} \quad .$$

Bei konstantem Volumen ( $\alpha = 0$ ) und linearer Abhängigkeit  $\Theta(A_\tau)$  ( $m = 1$ ) wird somit  $n = 1/3$  bzw. das Zeitverhalten

$$A(\tau) \sim \tau^{1/3} \quad .$$

- Fall 2:  $B_0 \neq 0, A \rightarrow \infty$

Überlassen wir die Ausbreitungsströmung dem Schwerfeld, so wird die Kontaktlinie immer weiter voranschreiten. Das bedeutet, daß  $A(\tau)$  immer mehr anwächst. In diesem Fall können wir die Differentialgleichung für  $A(\tau)$  wiederum angeben, wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} \coth(x) = 1$ . Wir erhalten

$$\frac{V \sqrt{\frac{B_0}{\epsilon^2}}}{(-A + \dots)} = -\frac{1}{\kappa} A_\tau^{1/m} \quad ,$$

mit der Form

$$V(\tau) \sim A_\tau^{1/m} A \quad .$$

Unsere Ansätze liefern für diesen Fall

$$n = \frac{\alpha m + 1}{m + 1} \quad .$$

Wir setzen wiederum konstantes Volumen ( $\alpha = 0$ ) und eine lineare Abhängigkeit für  $\Theta(A_\tau)$  ein ( $m = 1$ ) und erhalten für das Zeitverhalten

$$A(\tau) \sim \tau^{1/2} \quad .$$

In Abbildung 23 haben wir nun die numerischen Ergebnisse für  $A(\tau)$  bei allgemeiner Wahl des Parameters  $B_0/\epsilon^2$  dargestellt. Die Rechnungen sind ausgeführt für konstantes Volumen ( $\alpha = 0$ ) und vollständig benetzende Flüssigkeiten ( $\Theta_A = 0$ ). Weiterhin

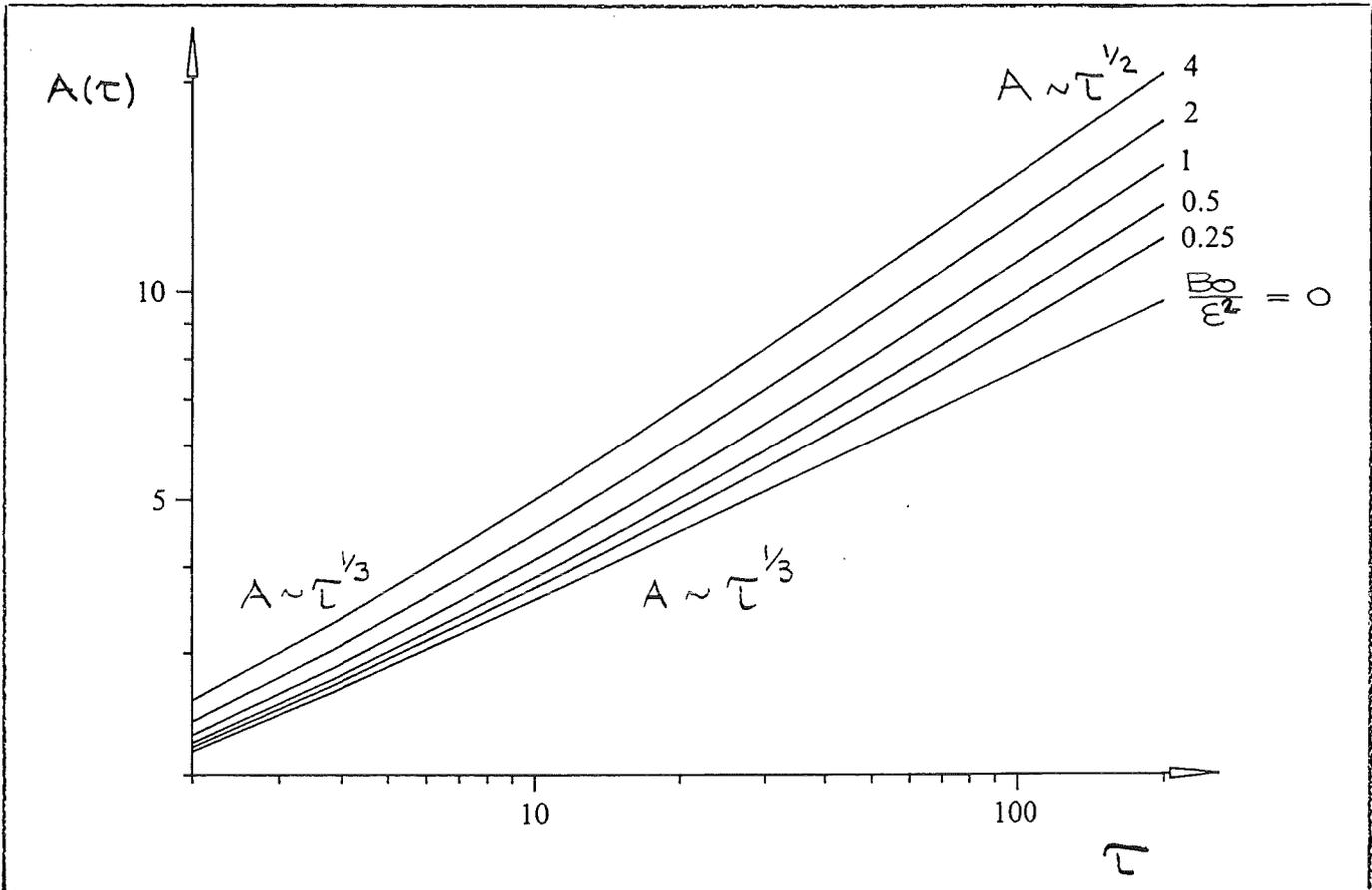


Abbildung 23: Position der Front als Funktion der Zeit für ein vollständig benetzendes System nach Ehrhard & Davis (1991)

ist mit  $m = 1$  eine lineare Abhängigkeit  $\Theta(A_\tau)$  modelliert. Wir erkennen zunächst für  $Bo/\epsilon^2 = 0$  die bereits abgeleitete Abhängigkeit  $A \sim \tau^{1/3}$ . Für  $Bo/\epsilon^2 \neq 0$  ist dieselbe Abhängigkeit für kleine Zeiten vorhanden. Für große Zeiten ändert sich dann jedoch die Abhängigkeit und wir finden wie erwartet  $A \sim \tau^{1/2}$ .

Physikalisch kann dies wie folgt interpretiert werden: Die Abhängigkeit  $A \sim \tau^{1/3}$  ist rein durch Kapillarkräfte bestimmt, sie existiert immer für kleine Zeiten, wo das Geschehen offensichtlich durch die Kapillarkräfte bestimmt ist. Für große Zeiten übernehmen dann für  $Bo/\epsilon^2 \neq 0$  die Schwerkkräfte die Kontrolle über das Geschehen. Die Abhängigkeit  $A \sim \tau^{1/2}$  ist folglich von der Schwerkraft bestimmt.

Für vollständig benetzende Stoffsysteme ( $\Theta_A = 0$ ) zeigt Abbildung 23 eine unbegrenzte Ausbreitung indem  $A(\tau)$  immer weiter anwächst. Im Fall partiell benetzender Stoffsysteme ( $\Theta_A > 0$ ) existiert hingegen ein stationärer Gleichgewichtskontaktwinkel. Wir erwarten also eine Ausbreitung solange, bis dieser stationäre Kontaktwinkel  $\Theta_A$  eingestellt ist.

Abbildung 24 zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung. Die Parameter sind  $Bo/\epsilon = 0.05$ ,  $\Theta_a = 0.25$ ,  $m = 1$  und  $\alpha = 0$ . Der Anfangswert ist als  $A(\tau = 0) = 1$  gewählt. Wir erkennen ein Voranschreiten der Front, bis bei  $\tau = 42$  in etwa der stationäre Kontaktwinkel eingestellt ist. Bis zu diesem Zeitpunkt wird Flüssigkeit aus dem inneren Bereich an die Kontaktlinie transportiert, was die Stromlinien verdeutlichen. Für  $\tau = 42$  ist dann die stationäre Kontur nahezu erreicht und die Strömung im Inneren verschwindet.

## 3.2 Der kapillare Freistrah

Wir wollen uns in diesem Kapitel nun mit einem Problem beschäftigen, welches wir qualitativ bereits in Abschnitt 1.1.1 diskutiert haben. Wir haben dort bereits verschiedene Einzeleffekte am Freistrah identifiziert, die wir jetzt näher betrachten wollen.

### 3.2.1 Ableitung einer Näherungslösung für die Strahlkontur des fallenden Freistrahls

Verläßt ein Flüssigkeitsstrahl, von oben nach unten strömend, ein Rohr, so formt sich das am Austritt vorherrschende parabolische Geschwindigkeitsprofil stromab um.

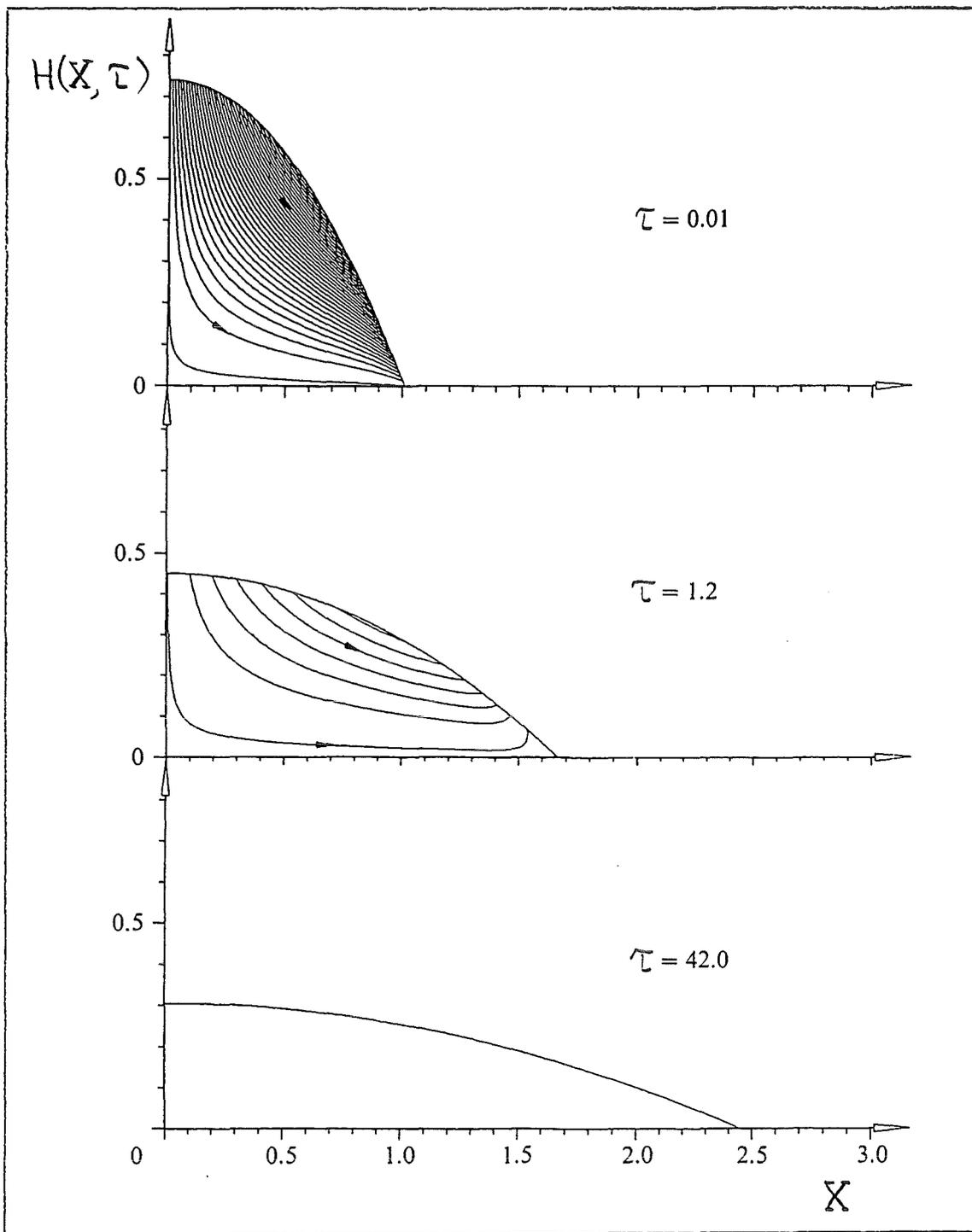


Abbildung 24: Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes für ein partiell benetzendes System nach Ehrhard & Davis (1991)

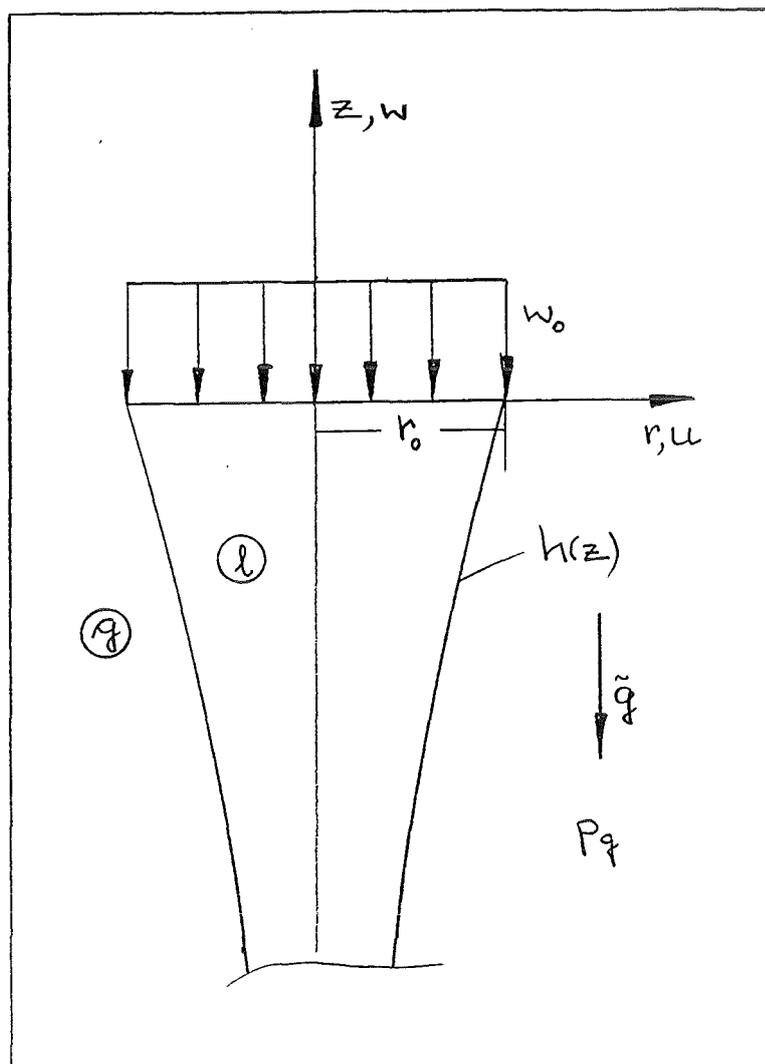


Abbildung 25: Strahlkontur des fallenden Freistrahls, Problemskizze.

Dies ist eine Folge der sich am Rohraustritt ändernden kinematischen Randbedingungen von der Haftbedingung hin zum in etwa schubspannungsfreien Rand. Die hier folgenden Betrachtungen beruhen wesentlich auf der Arbeit von Mitrovic (1995). Die zweidimensionale Behandlung des fallenden kapillaren Freistrahls bei parabolischem Einströmprofil erweist sich als äußerst schwierig und ist in der Regel nur mit numerischen Methoden zugänglich. Wir wollen deshalb hier eine vereinfachte, näherungsweise Beschreibung durchführen.

Eine Skizze des Problems findet sich in Abbildung 25. Wir unterstellen eine konstante parallele Einströmgeschwindigkeit  $w_0$  in einem kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius  $r_0$ . Die Schwerkraft wirkt nach unten, das Problem sei stationär und in allen Größen achsensymmetrisch. Die Kontur des Freistrahls findet sich bei  $h(z)$ . Wir

können somit die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls in einem zylindrischen Koordinatensystem formulieren und erhalten:

$$\begin{aligned}(ru)_r + (rw)_z &= 0 \quad , \\ \varrho(uu_r + wu_z) &= -p_r + \mu(u_{rr} + \frac{u_r}{r} - \frac{u}{r^2} + u_{zz}) \quad , \\ \varrho(uw_r + ww_z) &= -p_z + \mu(w_{rr} + \frac{w_r}{r} + w_{zz}) - \varrho g \quad .\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind zu lösen unter Einhaltung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned}z = 0 : \quad u &= 0 \quad , \quad w = -w_0 \quad , \\ r = 0 : \quad u &= 0 \quad , \quad w_r = 0 \quad , \\ r = h : \quad h_z w &= u \quad , \\ &|\tilde{v}|_{\tilde{n}} \simeq w_r = 0 \quad , \\ &p = p_g + 2\bar{H}\sigma \quad .\end{aligned}$$

Somit wird eine konstante parallele Einströmung und eine zu  $r = 0$  symmetrische Strömung vorgegeben. Weiterhin wird auf der Kontur  $h(z)$  die Schubspannungsfreiheit, eine tangentiale Strömung und der kapillare Drucksprung formuliert, mit  $2\bar{H}$  als mittlere Krümmung.

Wir wollen diese Gleichungen vor der weiteren Behandlung zunächst skalieren. Hierzu bieten sich folgende Skalen an:

$$\begin{aligned}R, Z &= \frac{r, z}{r_0} \quad , \\ U, W &= \frac{u, w}{w_0} \quad , \\ P &= \frac{p}{\varrho w_0^2} \quad .\end{aligned}$$

Wir erhalten nach kurzer Rechnung die dimensionslose Form der Erhaltungsgleichungen

$$\begin{aligned}(RU)_R + (RW)_Z &= 0 \quad , \\ UU_R + WW_Z &= -P_R + Re^{-1} (U_{RR} + \frac{U_R}{R} - \frac{U}{R^2} + U_{ZZ}) \quad , \\ UW_R + WW_Z &= -P_Z + Re^{-1} (W_{RR} + \frac{W_R}{R} + W_{ZZ}) - Fr^{-1} \quad .\end{aligned}$$

Die Randbedingungen werden

$$\begin{aligned}
 Z = 0: \quad U = 0 \quad , \quad W = -1 \quad , \\
 R = 0: \quad U = 0 \quad , \quad W_R = 0 \quad , \\
 R = H: \quad H_Z W = U \quad , \\
 \quad \quad \quad W_R = 0 \quad , \\
 P = \frac{p_g}{\rho w_0^2} + W e^{-1} 2 \bar{H} r_0 \quad .
 \end{aligned}$$

Wir finden hierbei die dimensionslosen Parameter Reynolds-Zahl  $Re$ , Froude-Zahl  $Fr$  und Weber-Zahl  $We$ , welche alle Kräfteverhältnisse darstellen. Mit den beteiligten Kräften Trägheitskraft ( $F_T$ ), Reibungskraft ( $F_R$ ), Gewichtskraft ( $F_G$ ) und Kapillarkraft ( $F_K$ ) ergeben sich die Definitionen bzw. Verhältnisse zu

$$\begin{aligned}
 Re = \frac{w_0 r_0}{\nu} &\sim \frac{F_T}{F_R} \quad , \\
 Fr = \frac{w_0^2}{g r_0} &\sim \frac{F_T}{F_G} \quad , \\
 We = \frac{w_0^2 r_0 \rho}{\sigma} &\sim \frac{F_T}{F_K} \quad .
 \end{aligned}$$

Aufgrund der gewählten konstanten Einströmung, der Symmetriebedingung bei  $R = 0$  sowie der Schubspannungsfreiheit bei  $R = H$  ist nun zu erwarten, daß  $W$  nur wenig über den Strahlradius variiert. Es ist deshalb sicherlich in guter Approximation  $W \neq f(R)$  zu erwarten. Dies bedeutet faktisch, daß wir quasi zu einer eindimensionalen Beschreibung übergehen. Fordern wir nun einen konstanten Volumenstrom durch den Strahl, so muß weiterhin gelten

$$\dot{V} = -w_0 r_0^2 \pi = w h^2 \pi \quad ,$$

bzw. dimensionslos

$$-1 = W H^2 \quad .$$

Wir integrieren nun die Kontinuitätsgleichung bestimmt über  $R$  und erhalten hieraus

$$\int_0^R (RU)_R dR + \int_0^R (RW)_Z dR = 0 \quad ,$$

bzw.

$$RU + \frac{1}{2} (R^2 W)_Z = 0 \quad .$$

Wenden wir diese Gleichung für  $R = H$  an, so erhalten wir unmittelbar

$$HU(R = H) + \frac{1}{2}(H^2W)_Z = 0 \quad ,$$

was wegen  $(H^2W) = -1$  sofort  $U(R = H) = 0$  liefert. Somit verschwindet die Geschwindigkeit in Radialrichtung  $U$  aufgrund der Randbedingungen am Eintritt und auf der Symmetrielinie, sowie zusätzlich auf der Kontur bei  $R = H$ . Wiederum kann angenommen werden, daß in guter Näherung  $U$  im gesamten Stromfeld verschwindet. Anders betrachtet ist dies die Folge aus der quasi eindimensionalen Beschreibung. Dadurch verlieren wir die Abhängigkeit der Geschwindigkeiten  $U, W$  von der Radialkoordinate  $R$ . Zusammenfassend beinhaltet diese 'eindimensionale' Näherung folglich

$$\begin{aligned} U_R = U_{RR} &= 0 \quad \rightarrow \quad U = 0 \quad , \\ W_R = W_{RR} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen und Randbedingungen können im Rahmen dieser Näherung drastisch vereinfacht werden. Wir erhalten für die Erhaltungsgleichungen

$$\begin{aligned} -1 &= WH^2 \quad , \\ 0 &= -P_R \quad , \\ WW_Z &= -P_Z - Fr^{-1} + Re^{-1}W_{ZZ} \quad , \end{aligned}$$

und die verbleibenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} Z = 0 : \quad W &= -1 \quad , \\ R = H : \quad P &= \frac{p_g}{\rho w_0^2} + We^{-1}2\bar{H}r_0 \quad . \end{aligned}$$

Wir wollen uns zunächst den Druck auf der Kontur berechnen. Hierzu unterstellen wir im umgebenden Gas zunächst den Druckverlauf

$$p_g = p_{g0} - \rho_g g z \quad .$$

Weiterhin müssen wir die mittlere Krümmung  $2\bar{H}$  berechnen. Die Situation hierzu ist in Abbildung 26 skizziert. In zwei orthogonalen Ebenen finden wir die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  auf entgegengesetzten Seiten der gekrümmten Strahlkontur. Wir müssen deshalb die Vorzeichen beachten. Der Krümmungsradius  $r_1$  ergibt sich unmittelbar aus dem Funktionsverlauf  $h(z)$  in bekannter Weise

$$\frac{1}{r_1} = \frac{h_{zz}}{(1 + h_z^2)^{3/2}} \quad .$$

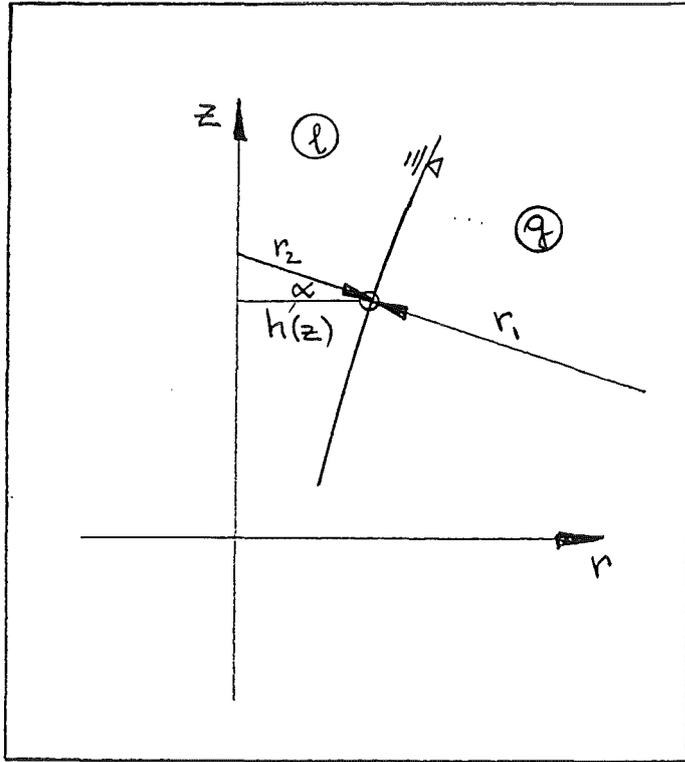


Abbildung 26: Krümmungsradien an der Kontur des Freistrahls.

Der Krümmungsradius  $r_2$  ist gegenüber dem Strahlradius  $h$  um den Winkel  $\alpha$  verdreht - er steht normal auf der Kontur. Es ist deshalb

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\cos \alpha}{h} .$$

Andererseits kann der Winkel  $\alpha$  aus der Ableitung der Funktion  $h(z)$  bestimmt werden mit dem Ergebnis (für kleine Winkel  $\alpha$ )

$$\tan \alpha = -h_z \simeq \alpha .$$

Drücken wir den Kosinus in der oberen Gleichung mit Hilfe des bekannten Tangens aus, so erhalten wir

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{h(1+h_z^2)^{1/2}} .$$

Der mittlere Krümmungsradius berechnet sich dann, bei Beachtung der Vorzeichen, zu

$$2\bar{H} = \left( -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1 - \frac{hh_{zz}}{1+h_z^2}}{h(1+h_z^2)^{1/2}} .$$

Durch Einführung und Entdimensionieren dieses Ausdrucks in die Druckrandbedingung erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$R = H : \quad P = P_{g0} - \frac{\rho g}{\rho} Fr^{-1} Z + We^{-1} \frac{1 - \frac{HH_{zz}}{1+H_z^2}}{H(1+H_z^2)^{1/2}} .$$

Die weitere Rechnung gestaltet sich nun zielstrebig. Wir integrieren die vertikale Impulsgleichung unbestimmt, d.h.

$$\int WW_Z dZ = - \int P_Z dZ - Fr^{-1} \int dZ + Re^{-1} \int W_{ZZ} dZ + C_0$$

und erhalten hieraus

$$\frac{1}{2}W^2 = -P - Fr^{-1}Z + Re^{-1}W_Z + C_0 \quad ,$$

bzw. nach Einbringen der Druckrandbedingung

$$\frac{1}{2}W^2 - Re^{-1}W_Z + We^{-1} \frac{1 - \frac{HH_{ZZ}}{1+H_Z^2}}{H(1+H_Z^2)^{1/2}} = Fr^{-1} \frac{\varrho_g - \varrho}{\varrho} Z + (C_0 - P_{g0}) \quad .$$

Verwenden wir weiterhin die Abkürzungen  $\Delta\varrho = (\varrho - \varrho_g)$  und  $C_1 = 2(C_0 - P_{g0})$  und nutzen die Kontinuitätsgleichung  $WH^2 = -1$  aus, so erhalten wir

$$W^2 = \frac{1}{H^4} \quad ,$$

$$W_Z = \frac{2H_Z}{H^3} \quad .$$

Schließlich erhalten wir die Differentialgleichung für die Strahlkontur  $H(Z)$  als

$$\frac{1}{H^4} + 2We^{-1} \frac{1 - \frac{HH_{ZZ}}{1+H_Z^2}}{H(1+H_Z^2)^{1/2}} - 4Re^{-1} \frac{H_Z}{H^3} = -2Fr^{-1} \frac{\Delta\varrho}{\varrho} Z + C_1 \quad .$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung ist von 2.Ordnung und hochgradig nichtlinear. Eine analytische Integration erscheint deshalb unmöglich. Diese Gleichung ist folglich mit Hilfe numerischer Standard-Integrationsverfahren zu behandeln, wobei sinnvolle Randbedingungen für  $H(Z)$  an der Einströmung bei  $Z = 0$  oder für  $Z \rightarrow \infty$  zu formulieren sind:

$$Z = 0 \quad : \quad H = 1 \quad ,$$

$$Z \rightarrow \infty \quad : \quad H \rightarrow 0 \quad .$$

Um wenigstens einige Aussagen analytisch ableiten zu können wollen wir die Gleichung nochmals vereinfachen, indem wir schwache Abweichungen vom parallelen Strahl annehmen. Dadurch wird  $H_Z \rightarrow 0$  und  $H_{ZZ} \rightarrow 0$ . Wir erhalten die algebraische Gleichung

$$\frac{1}{H^4} + \frac{2We^{-1}}{H} = -2Fr^{-1} \frac{\Delta\varrho}{\varrho} Z + C_1 \quad .$$

Die Konstante  $C_1$  wird aus der Randbedingung bei  $Z = 0$  bestimmt zu

$$C_1 = 1 + 2We^{-1} \quad .$$

Wir erhalten schlußendlich

$$\frac{1}{H^4} + \frac{2We^{-1}}{H} - (1 + 2We^{-1}) = -2Fr^{-1} \frac{\Delta \varrho}{\varrho} Z \quad .$$

Die Ergebnisse für die Strahlkontur  $H(Z)$ , berechnet aus dieser stark vereinfachten algebraischen Gleichung, sind in Abbildung 27 dargestellt. Wir erkennen im Grenzfall  $We \rightarrow \infty$ , d.h. für verschwindende Kapillarkräfte, eine Kontraktion des Strahles schon nach einer kurzen Distanz. Für klein werdende Weber-Zahlen, d.h. für wachsende Kapillarkräfte, erkennen wir, daß die Kontraktion viel langsamer erfolgt. Dies ist eine Folge der nun relativ großen Oberflächenspannung, welche eine starke Krümmung der Strahlkontur nicht mehr zuläßt. Somit kommt es zu einer allmählichen Strahlverjüngung, welche erst für deutlich größere  $Z$  abflacht. Alle Kurven im gezeigten Diagramm haben dennoch den Grenzwert  $Z \rightarrow \infty$ :  $H \rightarrow 0$ .

### 3.2.2 Der Zerfall des kapillaren Freistrahls

Wir wollen nun der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen ein kapillarer Freistrahler zerfällt. Abbildung 28 zeigt eindrucksvoll den Zerfall eines Wasserfreistrahls in Experimenten von Goedde & Yuen (1976). Dies ist ein typisches Stabilitätsproblem, welches wir mit der Methode kleiner Störungen behandeln können. Wir müssen hierzu zunächst eine Grundlösung haben. Im nächsten Schritt stören wir diese Grundlösung und fragen, ob die Störungen in Ort oder Zeit anwachsen ( $\rightarrow$  instabil) oder aber weggedämpft ( $\rightarrow$  stabil) werden. Als Grundlösung wollen wir den zylindrischen Strahl mit konstanter vertikaler Geschwindigkeit und verschwindender Radialgeschwindigkeit betrachten. Wir hatten im vorigen Kapitel gesehen, daß im Schwerfeld kein zylindrischer Strahl auftritt. Vielmehr wird durch die Schwerkraft der Strahl immer weiter beschleunigt und deshalb verjüngt. Es ist hier deshalb sinnvoll, den schwerelosen Fall zu betrachten. Wir wollen weiterhin vereinfachend annehmen, daß die gestörte Strahlkontur achsensymmetrisch bleibt und weiterhin die viskose Reibung in der Flüssigkeit keinen wesentlichen Anteil am Geschehen hat. Dies sind alles Vereinfachungen, welche in vernünftiger Näherung erfüllt sind. Die hier folgende Ableitung wurde erstmals von Rayleigh (1879) in leicht vereinfachter Form angegeben.

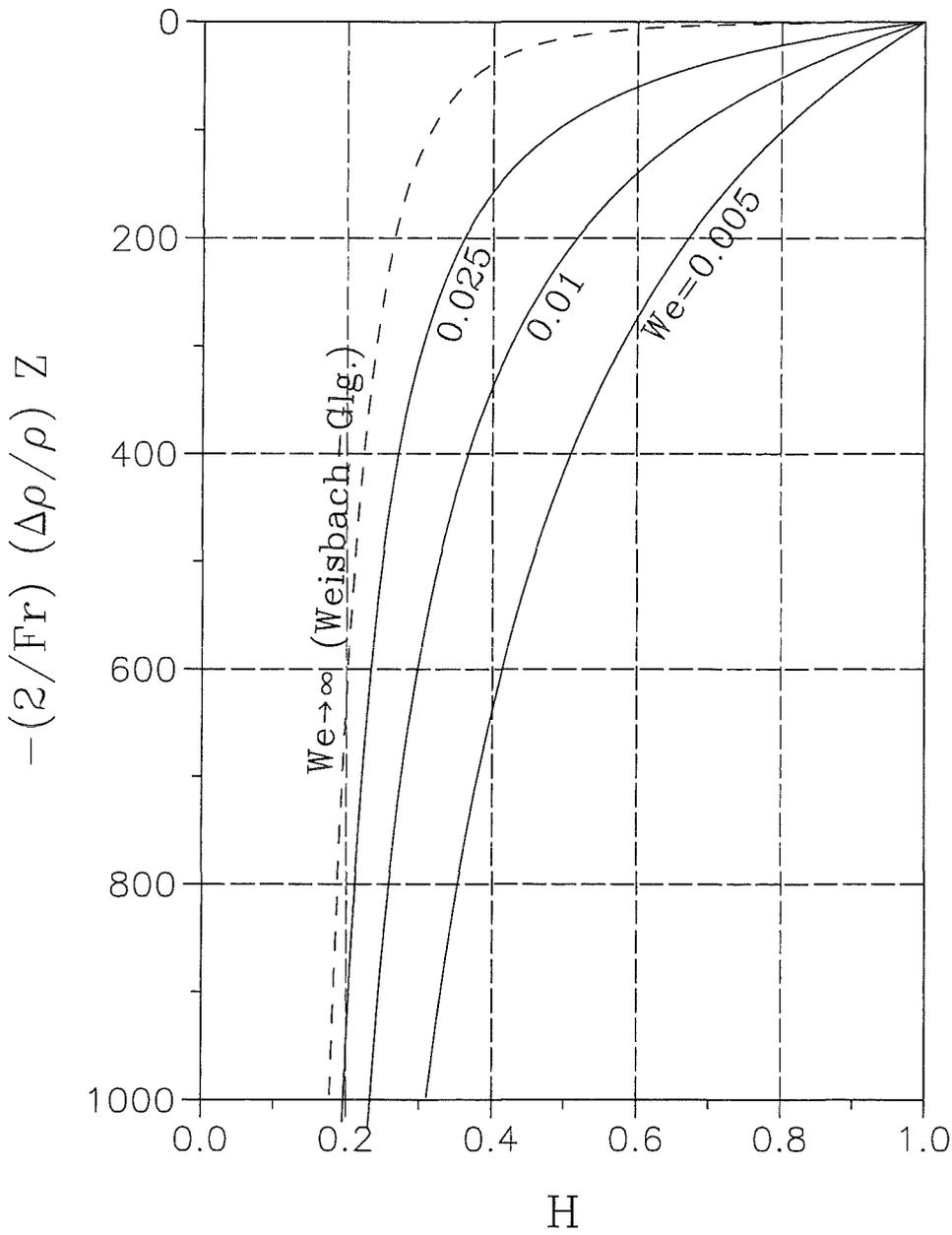


Abbildung 27: Strahlkontur in Abhängigkeit von  $Z$ , nach Mitrovic(1995).

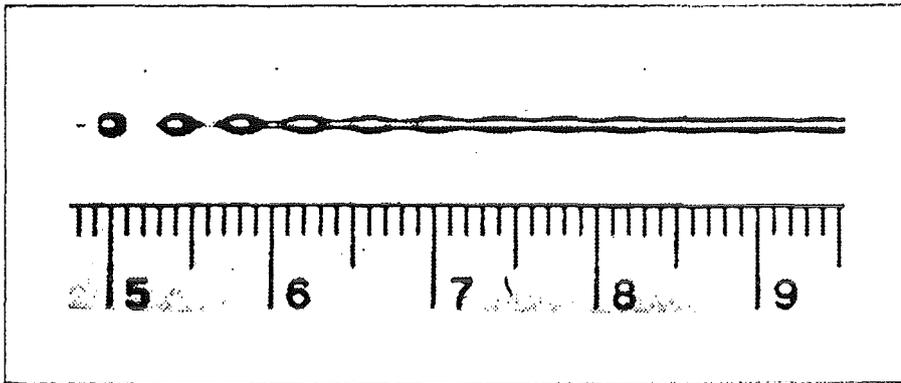


Abbildung 28: Zerfall eines Wasserfreistrahls nach Experimenten von Goedde & Yuen (1976).

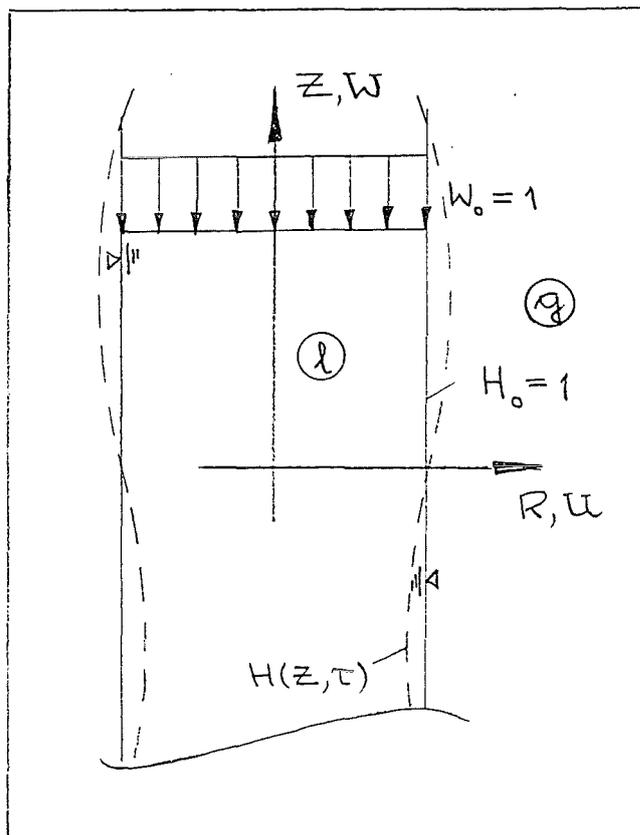


Abbildung 29: Grundlösung des zylindrischen Freistrahls und Störung (gestrichelt) der Kontur  $H(Z, \tau)$ .

Die Grundlösung und Grundgleichungen wollen wir, ausgehend von den dimensionslosen Gleichungen im vorangegangenen Kapitel bei identischer Skalierung angeben. Wir gehen aus von der stationären Grundlösung

$$\begin{aligned} U &= 0 & , & & W &= -W_0 & , \\ H &= H_0 & , & & P &= P_0 & , \end{aligned}$$

wobei aufgrund der gewählten Skalierung unmittelbar  $W_0 = 1$  und  $H_0 = 1$  folgt. Bringen wir nun eine Störung ein, so müssen wir davon ausgehen, daß das Problem zeitabhängig wird, wobei wir zunächst unterstellt haben, daß die Achsensymmetrie erhalten bleibt. Die Grundgleichungen des gestörten Systems sind demnach

$$\begin{aligned} (RU)_R + (RW)_Z &= 0 & , \\ U_\tau + UU_R + WU_Z &= -P_R & , \\ W_\tau + UW_R + WW_Z &= -P_Z & . \end{aligned}$$

Hier haben wir zusätzlich die Zeitskalierung  $\tau = \frac{tw_0}{r_0}$  benutzt. Die hier angegebenen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls sind unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} R = 0 : & & U &= 0 & , \\ & & W_R &= 0 & , \\ R = H : & & H_Z W &= U - H_\tau & , \\ & & W_R &= 0 & , \\ & & P &= P_g + W e^{-1} 2 \bar{H} r_0 \end{aligned}$$

zu lösen. Auch diese Randbedingungen hatten wir im vorangegangenen Kapitel bereits kennengelernt. Sie stellen bei  $R = 0$  Symmetrie sicher und geben schließlich die tangentialen und normalen Spannungen auf die freie Grenzfläche wieder. Weiterhin stellen sie auf der freien Grenzfläche die tangentielle Strömung sicher.

Die Störungen der Grundlösung sollen nun bei kleiner Amplitude  $\epsilon$  erfolgen. Unter dieser Annahme kann man davon ausgehen, daß alle Zustandsgrößen gleichfalls nur um eine kleine Amplitude aus der Grundlösung ausgelenkt werden. Wir verwenden deshalb die Ansätze

$$\begin{aligned} U &= 0 + \epsilon \cdot U_1(R, Z, \tau) + \dots & , \\ W &= -W_0 + \epsilon \cdot W_1(R, Z, \tau) + \dots & , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= P_0 + \epsilon \cdot P_1(R, Z, \tau) + \dots , \\
H &= H_0 + \epsilon \cdot H_1(R, Z, \tau) + \dots ,
\end{aligned}$$

wobei generell  $\epsilon \ll 1$  gelten soll. Bringen wir diese Ansätze zunächst in die Grundgleichungen ein, so dürfen wir davon ausgehen, daß Terme mit den Multiplikatoren  $\epsilon^2, \epsilon^3, \text{etc.}$  sehr klein werden. Wir können diese Ausdrücke folglich in einem Abbruchfehler der Größe  $O(\epsilon^2)$  zusammenfassen und erhalten somit stark vereinfachte Grundgleichungen in der Größenordnung  $\epsilon^1$ :

$$\begin{aligned}
(RU_1)_R + (RW_1)_Z + O(\epsilon) &= 0 , \\
U_{1\tau} - W_0 U_{1Z} + O(\epsilon) &= -P_{1R} , \\
W_{1\tau} - W_0 W_{1Z} + O(\epsilon) &= -P_{1Z} .
\end{aligned}$$

Dies sind die Differentialgleichungen für die Störgrößen  $U_1, W_1$  und  $P_1$ , welche nun im Gegensatz zu den Originalgleichungen **linear** sind. Dies wird deutlich, wenn wir beispielsweise in der letzten Original-Impulsgleichung den konvektiven Term  $(WW_Z)$  betrachten. Dieser Term war offensichtlich nichtlinear. Er wird nach Einführung der Störansätze zu  $(-W_0 W_{1Z})$ . Hier ist dieser Term linear, da die Geschwindigkeit  $W_0$  aus der Grundlösung bekannt ist.

Wir führen nun die Störansätze auch in die Randbedingungen ein und können gleichfalls gewisse Vereinfachungen erhalten. Es wird

$$\begin{aligned}
R = 0 : \quad U_1 + O(\epsilon) &= 0 , \\
W_{1R} + O(\epsilon) &= 0 , \\
R = H : \quad -W_0 H_{1Z} &= U_1 - H_{1\tau} + O(\epsilon) , \\
W_{1R} + O(\epsilon) &= 0 .
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen für den Druck wollen wir etwas ausführlicher angeben. Wir hatten im vorangegangenen Kapitel abgeleitet

$$P = P_g + W e^{-1} \frac{1 - \frac{HH_{ZZ}}{1+H_Z^2}}{H(1+H_Z^2)^{1/2}} .$$

Wegen

$$HH_{ZZ} = \epsilon H_0 H_{1ZZ} + O(\epsilon^2) ,$$

$$\begin{aligned}(1 + H_Z^2) &= 1 + O(\epsilon^2) \quad , \\ H(1 + H_Z^2)^{1/2} &= H_0 + \epsilon H_1 + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

erhalten wir

$$P = P_0 + \epsilon P_1 = P_g + W e^{-1} \frac{1 - \epsilon H_0 H_{1ZZ}}{H_0(1 + \epsilon \frac{H_1}{H_0})} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Den Nenner können wir gemäß Bronstein entwickeln als

$$\left(1 + \epsilon \frac{H_1}{H_0}\right)^{-1} = 1 - \epsilon \frac{H_1}{H_0} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Wir erhalten demnach

$$P_0 + \epsilon P_1 = P_g + W e^{-1} \left\{ \frac{1}{H_0} - \epsilon \left( H_{1ZZ} + \frac{H_1}{H_0^2} \right) \right\} + O(\epsilon^2)$$

und aus der Grundlösung

$$P_0 = P_g + W e^{-1} \frac{1}{H_0} \quad .$$

Die Subtraktion der letzten Gleichung von der vorangegangenen erlaubt uns schließlich die Randbedingung für die Druckstörung anzugeben. Wir erhalten

$$R = H : \quad P_1 = -W e^{-1} \left( H_{1ZZ} + \frac{H_1}{H_0^2} \right) + O(\epsilon) \quad .$$

Somit haben wir den vollständigen Satz der Differentialgleichungen und Randbedingungen für die Störgrößen abgeleitet. Wir wollen die Gleichungen hier nochmals zusammengefaßt angeben, wobei wir den Abbruchfehler nicht mehr explizit angeben.

Es gilt demnach für die Störgrößen:

$$\begin{aligned}(RU_1)_R + (RW_1)_Z &\simeq 0 \quad , \\ U_{1\tau} - W_0 U_{1Z} &\simeq -P_{1R} \quad , \\ W_{1\tau} - W_0 W_{1Z} &\simeq -P_{1Z} \quad ,\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}R = 0 : \quad U_1 &\simeq 0 \quad , \\ W_{1R} &\simeq 0 \quad , \\ R = H : \quad -W_0 H_{1Z} &\simeq U_1 - H_{1\tau} \quad , \\ W_{1R} &\simeq 0 \quad , \\ P_1 &\simeq -W e^{-1} \left( H_{1ZZ} + \frac{H_1}{H_0^2} \right) \quad .\end{aligned}$$

An dieser Stelle müssen wir nun Ansätze für die Art der Störungen einführen. Wir wollen hierzu die Kontur mit einer kleinen Störung beaufschlagen, welche periodisch in der vertikalen Richtung  $Z$  ist. Wir wählen für die Störung  $H_1$  den Ansatz

$$H_1 = \hat{H} e^{\alpha\tau} \sin k(Z + a\tau) \quad .$$

Hierin stellt  $\hat{H}$  die Amplitude und  $k$  eine freie Konstante dar, welche die Wellenlänge der Störungen in  $Z$  festlegt.  $k$  wird als Wellenzahl bezeichnet. Stören wir die Kontur in  $Z$ , so wissen wir zunächst nicht, wie sich diese Störung in der Zeit verhält. Wir führen zunächst die allgemeine Zeitabhängigkeit  $e^{\alpha\tau}$  ein. Die reelle Konstante  $\alpha$  erlaubt uns dann zu bewerten, ob eine Störung zeitlich anwächst ( $\alpha > 0$ ), oder aber zeitlich gedämpft wird ( $\alpha < 0$ ). Das Anwachsen der kleinen Störung bedeutet dann, daß die Grundlösung instabil wird, entsprechend deuten gedämpfte Störungen auf eine stabile Grundlösung hin. Die periodische Störung der Kontur wird natürlich als Folge auch periodische Störungen der anderen Größen hervorrufen. Die periodische Störung in  $Z$  kann zudem aufgrund des gewählten Wellenansatzes mit der Phasengeschwindigkeit  $a$  in der Zeit laufen.

Wir wollen nun mit der Lösung des Problems fortfahren. Wir betrachten ein zweidimensionales, reibungsfreies Problem - eine sogenannte Potentialströmung. Es ist deshalb sinnvoll eine Potentialfunktion  $\Phi(R, Z, \tau)$  einzuführen, welche gemäß

$$\Phi_R = U_1 \quad , \quad \Phi_Z = W_1 \quad ,$$

mit dem Geschwindigkeitsfeld verknüpft ist. Es handelt sich folglich um ein Störpotential. Bringen wir  $\Phi$  zunächst in die Kontinuitätsgleichung ein, so erhalten wir

$$\Phi_{RR} + \frac{\Phi_R}{R} + \Phi_{ZZ} \equiv \Delta\Phi \simeq 0 \quad ,$$

eine sogenannte Laplace-Gleichung, wobei  $\Delta$  den Laplace-Operator in zylindrischen Koordinaten darstellt. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung findet sich in jedem mathematischen Handbuch, z.B. Bronstein. Die allgemeine Lösung, welche die Symmetriebedingungen bei  $R = 0$  erfüllt und zudem periodisch in  $Z$  ist lautet

$$\Phi(R, Z) = \hat{A} J_0(ikR) \sin k(Z + a\tau) \quad .$$

Wir erwarten neben der Ortsabhängigkeit naturgemäß auch eine Zeitabhängigkeit, analog zu unserem Ansatz für  $H_1$ . Wir fassen deshalb die freie Konstante  $\hat{A}$  als zeitabhängig auf. Wir erhalten

$$\Phi(R, Z, \tau) = \hat{\Phi} e^{\alpha\tau} J_0(ikR) \sin k(Z + a\tau) \quad ,$$

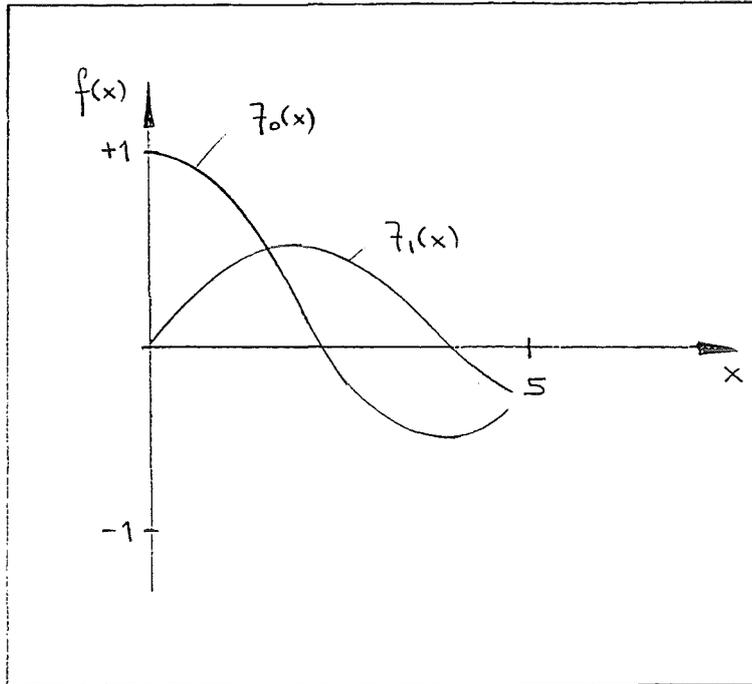


Abbildung 30: Die Bessel-Funktionen 0. und 1. Ordnung.

mit jetzt fester Amplitude  $\hat{\Phi}$ . Die auftretende Funktion  $J_0(x)$  ist die sogenannte Bessel-Funktion 0. Ordnung, welche häufig in achsensymmetrischen Problemen auftritt. Sie beschreibt bei komplexem Argument die Verteilung des Potentials in Radialrichtung  $R$ . Für die Ableitung dieser Bessel-Funktion gilt (nach Bronstein)

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x) \quad ,$$

wobei  $J_1(x)$  die Bessel-Funktion 1. Ordnung bezeichnet. Die beiden Funktionen sind in Abbildung 30 skizziert.

Aus der Lösung für  $\Phi$  können wir unmittelbar die Geschwindigkeitsstörungen  $U_1$  und  $W_1$  angeben. Wir erhalten

$$U_1 = \Phi_R = -ik\hat{\Phi}J_1(ikR)e^{\alpha\tau} \sin k(Z + a\tau) \quad ,$$

$$W_1 = \Phi_Z = k\hat{\Phi}J_0(ikR)e^{\alpha\tau} \cos k(Z + a\tau) \quad .$$

Hieraus erkennen wir unmittelbar  $U_1(R = 0) = 0$  sowie nach kurzer Rechnung  $W_{1R}(R = 0) = 0$ . Somit sind bereits beide Symmetriebedingungen bei  $R = 0$  erfüllt. Wir wollen als nächstes die tangentiale Strömungsbedingung bei  $R = H$  betrachten. Wir haben dort

$$-W_0 H_{1Z} \simeq U_1 - H_{1\tau}$$

und somit bei Verwendung des Ansatzes  $H_1(Z, \tau)$  und der Lösung  $\Phi(R, Z, \tau)$

$$\begin{aligned} -W_0 \hat{H} k e^{\alpha\tau} \cos k(Z + a\tau) &\simeq -ik \hat{\Phi} J_1(ikH) e^{\alpha\tau} \sin k(Z + a\tau) - \\ &\hat{H} \alpha e^{\alpha\tau} \sin k(Z + a\tau) - \\ &\hat{H} a k e^{\alpha\tau} \cos k(Z + a\tau) \quad . \end{aligned}$$

Da die beiden Winkelfunktionen Sinus und Kosinus orthogonal sind, müssen wir die Koeffizienten vor beiden Funktionen separat behandeln. Weiterhin können wir direkt den Term  $e^{\alpha\tau}$  herausdividieren. Es verbleiben also die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin k(Z + a\tau) &: 0 \simeq -ik \hat{\Phi} J_1(ikH) - \alpha \hat{H} \\ \cos k(Z + a\tau) &: -W_0 k \hat{H} = -ak \hat{H} \quad , \end{aligned}$$

welche wir direkt auflösen können, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Phi}}{\hat{H}} &= -\frac{\alpha}{ik J_1(ikH)} \quad , \\ a &= W_0 \quad . \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir die Druckrandbedingung bei  $R = H$  verarbeiten. Dort gilt

$$P_1(R = H) \simeq -W e^{-1} \left( H_{1ZZ} + \frac{H_1}{H_0^2} \right) \quad .$$

Zu einer Lösung für das Druckfeld gelangen wir, wenn wir die vertikale Impulsgleichung über  $Z$  integrieren,

$$\int W_{1\tau} dZ - W_0 \int W_{1Z} dZ \simeq - \int P_{1Z} dZ \quad .$$

Bei Verwendung des Potentials  $\Phi$  erhalten wir

$$\Phi_\tau - W_0 \Phi_Z \simeq -P_1 + C_0 \quad .$$

Wir lösen nach  $P_1$  auf und bestimmen die Konstante aus der obigen Druckrandbedingung bei  $R = H$ . Es muß also gelten

$$P_1(R = H) = C_0 + W_0 \Phi_Z(R = H) - \Phi_\tau(R = H) \quad ,$$

bzw. bei Verwendung von  $\Phi(R, Z, \tau)$  und der obigen Randbedingung bei  $R = H$

$$\begin{aligned} -W e^{-1} \left\{ -k^2 \hat{H} e^{\alpha\tau} \sin k(Z + W_0\tau) + \right. \\ \left. \frac{\hat{H}}{H_0^2} e^{\alpha\tau} \sin k(Z + W_0\tau) \right\} &= C_0 - \hat{\Phi} e^{\alpha\tau} J_0(ikH) k W_0 \cos k(Z + W_0\tau) - \\ &\hat{\Phi} \alpha e^{\alpha\tau} J_0(ikH) \sin k(Z + W_0\tau) + \\ &W_0 k \hat{\Phi} e^{\alpha\tau} J_0(ikH) \cos k(Z + W_0\tau) \quad . \end{aligned}$$

Wir dividieren wiederum durch die Zeitfunktion  $e^{\alpha\tau}$  und notieren separat die Koeffizienten vor den Winkelfunktionen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 1 & : C_0 = 0 \quad , \\ \sin k(Z + W_0\tau) & : We^{-1}\hat{H}\left(k^2 - \frac{1}{H_0^2}\right) = -\hat{\Phi}\alpha J_0(ikH) \quad , \\ \cos k(Z + W_0\tau) & : 0 = -\hat{\Phi}kW_0J_0(ikH) + \hat{\Phi}W_0kJ_0(ikH) \quad . \end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichung sind offensichtlich sofort zu erfüllen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$\frac{\hat{\Phi}}{\hat{H}} = -\frac{We^{-1}\left(k^2 - \frac{1}{H_0^2}\right)}{\alpha J_0(ikH)} \quad .$$

Für dieses Amplitudenverhältnis hatten wir bereits aus der tangentialen Strömungsbedingung eine Gleichung abgeleitet. Durch Elimination der Amplituden  $\hat{\Phi}$  und  $\hat{H}$  ergibt sich nun

$$\frac{\alpha}{ikJ_1(ikH)} = \frac{We^{-1}\left(k^2 - \frac{1}{H_0^2}\right)}{\alpha J_0(ikH)} \quad ,$$

bzw. für die Anfachungsrate in der Zeitfunktion  $\alpha$  unter Verwendung von  $H_0 = 1$

$$\alpha^2 = -\frac{We^{-1}(1 - k^2)ikJ_1(ikH)}{J_0(ikH)} = \frac{We^{-1}(1 - k^2)kJ_1(kH)}{I_0(kH)} \quad .$$

Verwenden wir unseren Störungsansatz  $H = H_0 + \epsilon H_1 + \dots \simeq 1$ , so können wir für  $k < 1$  den obigen Ausdruck durch Verwendung einer Reihenentwicklung der modifizierten Bessel-Funktion  $I_n$  weiter vereinfachen. Wir erhalten die Näherung

$$We \cdot \alpha^2 \simeq \frac{(1 - k^2)kJ_1(k)}{I_0(k)} \simeq \frac{1}{2}(1 - k^2)k^2 \quad .$$

Die Funktion  $\alpha We^{1/2}$  ist im Bereich  $0 \leq k \leq 2$  in Abbildung 31 dargestellt. Die exakte Funktion (durchgezogene Linie) besitzt ihr Maximum bei  $k^* \simeq 0.679$  mit  $\alpha^* We^{1/2} \simeq 0.34$ . Die genäherte Funktion ist zum Vergleich gestrichelt dargestellt, sie weicht nur im Mittenbereich geringfügig von der Originalfunktion ab. Die obige Funktion besitzt im Bereich  $0 \leq k \leq 1$  zwei reelle Lösungen, welche spiegelsymmetrisch zur  $k$ -Achse sind. Für  $k > 1$  existieren keine reellen Lösungen, vielmehr wird dort  $\alpha We^{1/2}$  imaginär.

Für die Stabilität unseres Freistrahls hat dieses Ergebnis die folgende Bedeutung. Im Bereich  $0 < k < 1$  werden Störungen der betrachteten Form wegen  $\alpha > 0$  angefacht - die zylindrische Grundlösung wird folglich instabil. Dies bedeutet, daß achsensymmetrische wellenförmige Störungen (Phasengeschwindigkeit  $w_0$ ) anwachsen und bei

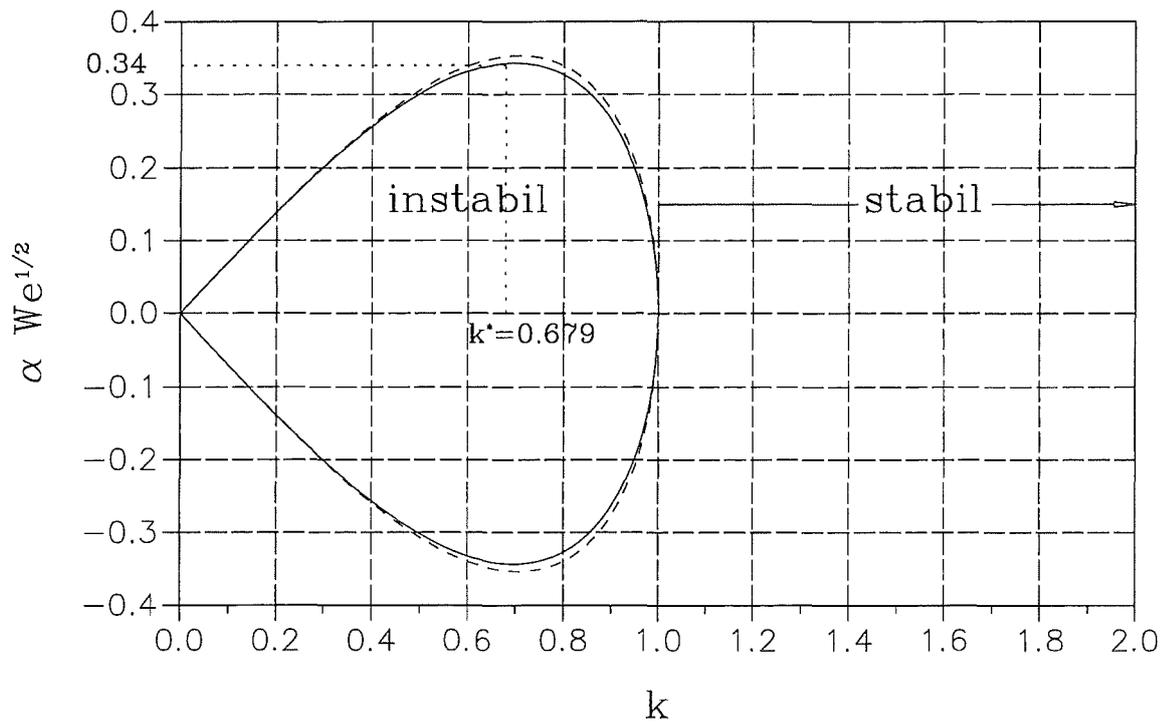


Abbildung 31: Anfachungsrate als Funktion der Wellenzahl für den nichtviskosen Fall.

weiterem Anwachsen der Amplitude vermutlich zum Zertropfen des Strahls führen. Die letzte Aussage kann jedoch nicht mit Hilfe der hier durchgeführten Methode der kleinen Störungen erhalten werden. Hingegen erweisen sich solche Störungen im Bereich  $k > 1$  als stabil. Demzufolge werden langwellige Störungen (kleine  $k$ ) instabil, während kurzwellige Störungen (große  $k$ ) stabil bleiben. Die Wellenzahl mit der größten Anfachung ist  $k^* = 0.679$ . Die dazugehörige Wellenlänge wird in guter Näherung auch in Experimenten beim Zertropfen beobachtet, sofern keine äußere Anregung vorhanden ist. Die Stabilitätsgrenze bei  $k = 1$  entspricht wegen  $\lambda = 2\pi/k$  gerade einer dimensionslosen Wellenlänge von  $2\pi$ , bzw. dimensionsbehaftet  $2\pi r_0$ , dem Umfang des Flüssigkeitszylinders.

Das hier vorgestellte Ergebnis wurde erstmalig von Rayleigh (1878) für einen ruhenden zylindrischen Freistrahler abgeleitet. Wir haben darüber hinaus gesehen, daß der zylindrische Strahl mit der konstanten Strömungsgeschwindigkeit  $w_0$  das gleiche Resultat bezüglich der Stabilität liefert. Wir finden hier lediglich, daß die periodischen Störungen der Strahlkontur mit der Phasengeschwindigkeit  $w_0$  laufen. Ähnliche Stabilitätsuntersuchungen können auch für nicht achsensymmetrische Störungen durchgeführt werden, welche beispielsweise zum Zerwellen des Strahls führen (vgl. Weber

(1931)). Dies wollen wir hier nicht näher diskutieren.

Es soll hier noch auf die Besonderheit unserer Skalierung hingewiesen werden. Wir haben die Geschwindigkeitsskala mit  $w_0$ , der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder aufgebaut. Folglich führt der Grenzfall  $w_0 \rightarrow 0$  bei der Skalierung und bei den Kennzahlen zu undefinierten Ausdrücken. In diesem Fall müssen wir eine andere Geschwindigkeitsskala benutzen. Dies kann beispielsweise mit der kapillaren Geschwindigkeitsskala

$$w_k = \left( \frac{\sigma}{\rho r_0} \right)^{1/2}$$

geschehen. Formal müssen wir dann lediglich in allen Skalierungen und Kennzahlen  $w_0 = w_k$  einführen. Das diskutierte Ergebnis ist natürlich, von dieser Skalierung unabhängig, nach wie vor gültig.

### 3.2.3 Der Einfluß der Zähigkeit auf den Strahlzerfall

Wie bereits oben erwähnt, hat Weber (1931) eine recht umfassende Arbeit zum Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen vorgelegt. Hierin sind eine ganze Reihe von möglichen Mechanismen aufgezeigt, z.B. Zertropfen des nichtzähen Freistrahls, Zertropfen des zähen Freistrahls, Einfluß der umgebenden Luft auf das Zertropfen und Zerwellen des Freistrahls. Wir wollen seine Ergebnisse zum Einfluß der Zähigkeit auf den Strahlzerfall hier angeben, ohne eine vollständige Herleitung auszuführen.

Er findet bei Berücksichtigung der viskosen Terme in den Impulsgleichungen die Gleichung

$$\alpha^2 + 3Re^{-1}\alpha k^2 = We^{-1} \cdot \frac{1 - k^2}{2} k^2$$

für die zeitlich Anfachungsrate  $\alpha$ . Diese Gleichung geht, wie leicht nachzuprüfen ist, im Grenzfall  $Re^{-1} \rightarrow 0$  in unserer oben diskutierte Gleichung über. Hierin ist bereits die Näherung für die Bessel-Funktion verwendet. Der Fall  $Re^{-1} \rightarrow 0$  ist gegeben für  $\nu \rightarrow 0$ , d.h. für verschwindende Viskosität. Wir wollen diese Gleichung in analoger Weise nach  $\alpha$  auflösen und erhalten hieraus

$$We^{1/2}\alpha = -\frac{3k^2}{2} \cdot \frac{We^{1/2}}{Re} \pm \sqrt{\left( \frac{3k^2}{2} \frac{We^{1/2}}{Re} \right)^2 + \frac{1 + k^2}{2} k^2} .$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 32 dargestellt.

Wir erkennen zunächst, daß  $(We^{1/2}/Re)$  als Parameter eingeht. Für  $(We^{1/2}/Re) = 0$  erhalten wir die gestrichelte Kurve, welche wir bereits in Abbildung 31 für den

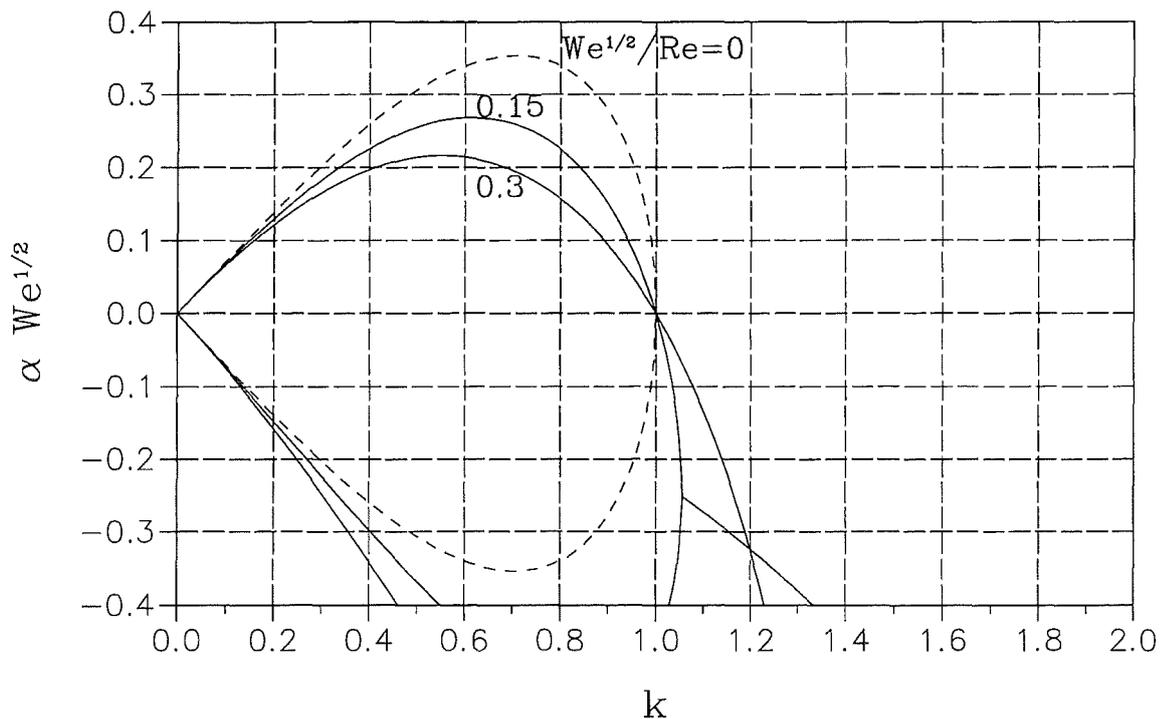


Abbildung 32: Anfachungsrate als Funktion der Wellenzahl für den viskosen Fall.

nichtviskosen Fall diskutiert haben. Für wachsende Werte  $(We^{1/2}/Re) = 0.15, 0.3$  nimmt nun die Viskosität zu und führt zu einer Stabilisierung. Dies erkennen wir daran, daß die Beträge der Anfachungsrate  $\alpha$  abnehmen, Störungen in der Zeit folglich langsamer anwachsen. Weiterhin wandert die am stärksten angefachte Störung zu kleineren Wellenzahlen, d.h. zu längeren Wellen. Nach wie vor bleibt aber der Bereich  $0 < k < 1$  instabil, während der Bereich  $k > 1$  stabil ist. Die Veränderungen der Kurven für negative  $\alpha$  haben hier keine Bedeutung. Das hier gefundene Ergebnis, daß im Falle des viskosen Strahlzerfalls längere Wellen stärker angefacht werden, kann im übrigen im Experiment gleichfalls beobachtet werden.

### 3.3 Wellen auf freien Flüssigkeitsspiegeln

#### 3.3.1 Stabilität einer freien Grenzfläche zwischen geschichteten Flüssigkeiten ohne Berücksichtigung der Viskosität

Wir haben in der Einführung bereits das Problem der Wasserwellen als ein weiteres Stabilitätsproblem angesprochen. Diese sogenannte Kelvin-Helmholz Instabilität

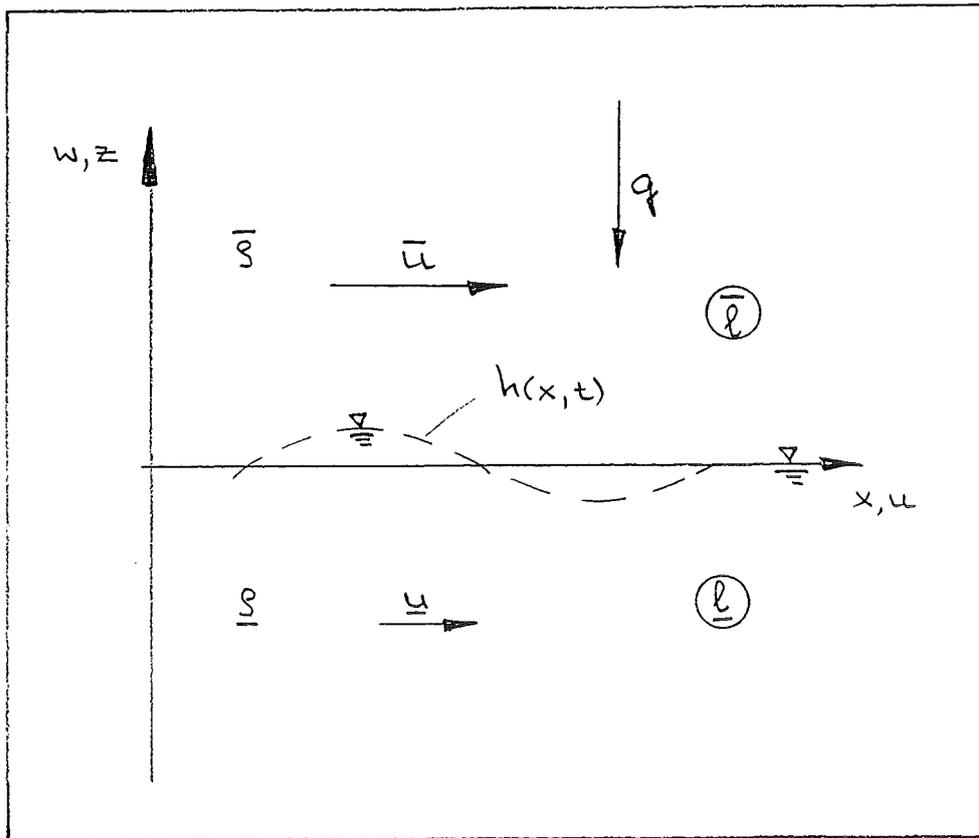


Abbildung 33: Problemskizze zur Stabilität einer Grenzfläche zwischen geschichteten Fluiden.

führt zu Wellen auf der freien Grenzfläche zwischen geschichteten Flüssigkeiten, sobald eine genügend große Geschwindigkeitsdifferenz beider Flüssigkeiten vorliegt.

Wir wollen nun dieses Problem im Detail behandeln. Hierzu gehen wir, wie gewohnt, von einem vereinfachten Problem aus und fügen dann in der Folge weitere Effekte hinzu. Wir gehen dementsprechend von einem zweidimensionalen Problem in  $x, z$ -Koordinaten aus. Auf der Linie  $z = 0$  liegt die in  $x$  beidseitig unendlich ausgedehnte  $L/\bar{l}$ -Grenzfläche, welche im Grundzustand eben ist. Die Fluide oberhalb und unterhalb erstrecken sich jeweils in  $z$  nach  $\pm\infty$ , ihre Dichte ist  $\underline{\rho} > \bar{\rho}$ . Die Geschwindigkeit in beiden Fluiden  $\underline{u}, \bar{u}$  ist parallel zur  $x$ -Achse und konstant. Wir vernachlässigen zunächst viskose Effekte, wodurch ein Sprung der Geschwindigkeiten an der Grenzfläche möglich ist. Das Problem ist in Abbildung 33 skizziert.

Wir wollen wiederum mit der Methode der kleinen Störungen nach der Stabilität der Grundlösung fragen. Hierzu stören wir die oben beschriebene Grundlösung in ihren Zustandsgrößen und betrachten dann das Verhalten der Störungen in Ort und Zeit.

Wir müssen folglich zunächst wieder die Differentialgleichungen für die Störgrößen ableiten. In beiden Fluiden gilt zunächst die Kontinuitätsgleichung, d.h.

$$\begin{aligned}\bar{l}: \quad \bar{u}_x + \bar{w}_z &= 0 \quad , \\ \underline{l}: \quad \underline{u}_x + \underline{w}_z &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Bei reibungsfreier Betrachtung sind ferner die Euler-Gleichungen in beiden Fluidbereichen anzuwenden mit

$$\begin{aligned}\bar{l}: \quad \bar{\rho}(\bar{u}_t + \bar{u}\bar{u}_x + \bar{w}\bar{u}_z) &= -\bar{p}_x \quad , \\ \underline{l}: \quad \underline{\rho}(\underline{u}_t + \underline{u}\underline{u}_x + \underline{w}\underline{u}_z) &= -\underline{p}_x \quad , \\ \bar{l}: \quad \bar{\rho}(\bar{w}_t + \bar{u}\bar{w}_x + \bar{w}\bar{w}_z) &= -\bar{p}_z - \bar{\rho}g \quad , \\ \underline{l}: \quad \underline{\rho}(\underline{w}_t + \underline{u}\underline{w}_x + \underline{w}\underline{w}_z) &= -\underline{p}_z - \underline{\rho}g \quad .\end{aligned}$$

Auf der Grenzfläche, welche im gestörten Fall bei  $h(x, t)$  liegt, haben wir nun die entsprechenden Rand- bzw. Übergangsbedingungen zu formulieren. Dies ist zunächst die kinematische Forderung nach einer tangentialen Strömung auf beiden Seiten der Grenzfläche. Weiterhin müssen die normalen und tangentialen Spannungen stetig sein. Im Fall der reibungsfreien Strömung verbleibt hier nur der Drucksprung über die freie Grenzfläche. Die Schubspannungsfreiheit ist a priori erfüllt. Es gilt demnach

$$\begin{aligned}z = h: \quad h_x \bar{u} &= \bar{w} - h_t \quad , \\ h_x \underline{u} &= \underline{w} - h_t \quad , \\ \bar{p} - \underline{p} &= 2\bar{H}\sigma \quad .\end{aligned}$$

Hierbei ist  $2\bar{H}$  die mittlere Krümmung, welche aus  $h(x, t)$  gemäß

$$2\bar{H} = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}$$

berechnet werden kann.

Wir behandeln das Problem selbstredend in dimensionsloser Form und müssen deshalb zunächst eine Skalierung festlegen. Diese Skalierung soll für beide Fluide gelten, weshalb es sinnvoll ist, die Differenzen  $\Delta u = (\bar{u} - \underline{u})$  und  $\Delta \rho (\underline{\rho} - \bar{\rho})$  heranzuziehen. In Abwesenheit einer ausgezeichneten Länge bietet sich deshalb folgende Skalierung an:

$$(X, Z) = \frac{(x, z)}{l_0} \quad ,$$

$$\begin{aligned}(U, W) &= \frac{(u, w)}{\Delta u} \quad , \\ P &= \frac{p}{\Delta \rho \cdot \Delta u^2} \quad , \\ \tau &= \frac{t \Delta u}{l_0} \quad .\end{aligned}$$

Hierbei ist  $l_0$  eine zunächst unbekannte Länge. Zudem haben wir auf die doppelte Notierung  $\bar{U}, \bar{W}, \bar{P}$  und  $\underline{U}, \underline{W}, \underline{P}$  verzichtet. Dies wollen wir auch in den folgenden Gleichungen vereinfachend beibehalten, wobei stets klar sein muß, daß alle Gleichungen jeweils in beiden Fluiden anzuwenden sind. Die Einführung der obigen Skalierungen liefert nach kurzer Rechnung die dimensionslose Fassung der Erhaltungsgleichungen, d.h.

$$\begin{aligned}U_X + W_Z &= 0 \quad , \\ U_\tau + UU_X + WW_Z &= -\frac{\Delta \rho}{\rho} P_X \quad , \\ W_\tau + UW_X + WW_Z &= -\frac{\Delta \rho}{\rho} P_Z - Fr^{-1} \quad .\end{aligned}$$

Die dimensionslosen Rand- bzw. Übergangsbedingungen werden

$$\begin{aligned}Z = H : \quad H_X U &= W - H_\tau \quad , \\ (\bar{P} - \underline{P}) &= W e^{-1} \frac{H_X X}{(1+H_X^2)^{3/2}} \quad .\end{aligned}$$

Die auftretenden Kennzahlen sind

$$\begin{aligned}Fr &= \frac{\Delta u^2}{g l_0} \quad , \\ We &= \frac{\Delta u^2 \Delta \rho l_0}{\sigma} \quad .\end{aligned}$$

Das alleinige Auftreten der Differenzen  $\Delta u$  und  $\Delta \rho$  ist eine Folge der für beide Fluide gewählten, gemeinsamen Skalierung. Es gibt folglich für beide Kennzahlen nur einen Wert, der in den Gleichungen für beide Teilgebiete gültig ist.

Im nächsten Schritt wollen wir Störansätze um die Grundlösung festlegen. Mit kleiner Amplitude  $\epsilon \ll 1$  sind dies

$$\begin{aligned}U &= U_0 + \epsilon \cdot U_1 + \dots \quad , \\ W &= 0 + \epsilon \cdot W_1 + \dots \quad , \\ P &= P_0 + \epsilon \cdot P_1 + \dots \quad , \\ H &= 0 + \epsilon \cdot H_1 + \dots \quad ,\end{aligned}$$

Wir führen diese Störansätze wiederum in die Erhaltungsgleichungen und in die Rand- bzw. Übergangsbedingungen ein. In der Ordnung  $O(1)$  erscheint das Gleichungssystem der Grundlösung

$$\begin{aligned}\bar{l}: \bar{P}_{0X} &= 0 \quad , \\ \underline{l}: \underline{P}_{0X} &= 0 \quad , \\ \bar{l}: \bar{P}_{0Z} &= -\frac{\bar{\varrho}}{\Delta\varrho} Fr^{-1} \quad , \\ \underline{l}: \underline{P}_{0Z} &= -\frac{\underline{\varrho}}{\Delta\varrho} Fr^{-1} \quad .\end{aligned}$$

In der Ordnung  $O(\epsilon)$  erhalten wir schließlich für die Störgrößen die Erhaltungsgleichungen

$$\begin{aligned}\bar{l}: \bar{U}_{1X} + \bar{W}_{1Z} &= 0 + \dots \quad , \\ \underline{l}: \underline{U}_{1X} + \underline{W}_{1Z} &= 0 + \dots \quad , \\ \bar{l}: \bar{U}_{1\tau} + \bar{U}_0 \bar{U}_{1X} &= -\frac{\Delta\varrho}{\bar{\varrho}} \bar{P}_{1X} + \dots \quad , \\ \underline{l}: \underline{U}_{1\tau} + \underline{U}_0 \underline{U}_{1X} &= -\frac{\Delta\varrho}{\underline{\varrho}} \underline{P}_{1X} + \dots \quad , \\ \bar{l}: \bar{W}_{1\tau} + \bar{U}_0 \bar{W}_{1X} &= -\frac{\Delta\varrho}{\bar{\varrho}} \bar{P}_{1Z} + \dots \quad , \\ \underline{l}: \underline{W}_{1\tau} + \underline{U}_0 \underline{W}_{1X} &= -\frac{\Delta\varrho}{\underline{\varrho}} \underline{P}_{1Z} + \dots \quad .\end{aligned}$$

Die Rand- bzw. Übergangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned}Z = H: \quad H_{1X} \bar{U}_0 &= \bar{W}_1 - H_{1\tau} + \dots \quad , \\ &H_{1X} \underline{U}_0 = \underline{W}_1 - H_{1\tau} + \dots \quad , \\ (\bar{P}_1 - \underline{P}_1) &= W e^{-1} H_{1XX} + \dots \quad .\end{aligned}$$

Dies ist nun der für die Störgrößen gültige Satz von Gleichungen. Aufgrund der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in  $\epsilon$  sind alle Gleichungen linear, d.h. es tauchen keine Produkte der Störgrößen mehr auf. Alle auftretenden Produkte sind vielmehr mit der bekannten Grundlösung

$$\bar{U}_0 = \frac{\bar{u}}{\Delta u} \quad , \quad \underline{U}_0 = \frac{\underline{u}}{\Delta u}$$

gebildet. Somit sind diese Gleichungen durchweg partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Diese gilt es nun zu lösen, um das Verhalten der Störgrößen zu bewerten.

Wir haben, wie im vorangegangenen Problem des Strahl Zerfalls, wiederum unser Stabilitätsproblem zunächst reibungsfrei betrachtet. Somit haben wir auch hier eine sogenannte Potentialströmung vorliegen, welche üblicherweise mit Hilfe eines Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  vereinfacht werden kann. Wir führen demnach die Störpotentiale  $\bar{\Phi}$  und  $\underline{\Phi}$  ein mit

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_X &= \bar{U}_1 \quad , \quad \bar{\Phi}_Z = \bar{W}_1 \quad , \\ \underline{\Phi}_X &= \underline{U}_1 \quad , \quad \underline{\Phi}_Z = \underline{W}_1 \quad .\end{aligned}$$

Unsere Grundgleichungen und Rand- bzw. Übergangsbedingungen werden hiermit zu

$$\begin{aligned}\bar{l}: \quad \bar{\Phi}_{XX} + \bar{\Phi}_{ZZ} &= 0 + \dots \quad , \\ \underline{l}: \quad \underline{\Phi}_{XX} + \underline{\Phi}_{ZZ} &= 0 + \dots \quad , \\ \bar{l}: \quad \bar{\Phi}_\tau + \bar{U}_0 \bar{\Phi}_X &= -\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \bar{P}_1 + \bar{C}_0 + \dots \quad , \\ \underline{l}: \quad \underline{\Phi}_\tau + \underline{U}_0 \underline{\Phi}_X &= -\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \underline{P}_1 + \underline{C}_0 + \dots \quad , \\ Z = H: \quad H_{1X} \bar{U}_0 &= \bar{\Phi}_Z - H_{1\tau} + \dots \quad , \\ H_{1X} \underline{U}_0 &= \underline{\Phi}_Z - H_{1\tau} + \dots \quad , \\ (\bar{P}_1 - \underline{P}_1) &= W e^{-1} H_{1XX} + \dots \quad .\end{aligned}$$

Somit erhalten wir jeweils eine Laplace-Gleichung aus den Kontinuitätsgleichungen. Die Impulsgleichungen in der  $X$ - und  $Z$ -Richtung sind identisch, wenn sie jeweils unbestimmt integriert werden. Dies ist eine typische, in Potentialströmungen auftretende Vereinfachung.

Im nächsten Schritt gilt es nun Ansätze für die Störgrößen zu formulieren. Wir wollen zunächst die Störung der ebenen Grenzfläche  $H_1(X, \tau)$  betrachten. Hier erwarten wir ein periodisches Verhalten in  $X$ , wobei wir zusätzlich ein Fortschreiten der periodischen Störung in der  $X$ -Richtung zulassen wollen. Wir wählen somit den Wellenansatz

$$H_1(X, \tau) = \hat{H} e^{ik(X - c\tau)} \quad .$$

Die hier auftretende periodische Funktion  $e^{ik(X-c\tau)}$  stellt eine Verallgemeinerung des beim Strahlzerfall verwendeten Ansatzes der Form  $\sin(Z + a\tau)$  dar. Diese Exponentialfunktion kann im übrigen in eine Summe aus Sinus- und Kosinusfunktion zerlegt werden (vgl. Bronstein). Bei näherer Betrachtung erlaubt der obige Ansatz auch die Dämpfung bzw. Anfachung der Störung zu bewerten. Fassen wir  $c$  als komplexe Zahl auf, d.h.  $c = c_R + ic_I$ , so kann die Exponentialfunktion gemäß

$$e^{ik(X-c\tau)} = e^{ik(X-c_R\tau)} \cdot e^{kc_I\tau}$$

zerlegt werden. Damit wird klar, daß  $c_R$  der Phasengeschwindigkeit der Welle und  $(k \cdot c_I)$  der Anfachungsrate entspricht. Völlig analog zu unseren Betrachtungen beim Strahlzerfall folgt wegen  $k > 0$ :

$$\begin{aligned} c_I > 0 & : \text{ die Störung wird angefacht (instabil) } , \\ c_I < 0 & : \text{ die Störung wird weggedämpft (stabil) } . \end{aligned}$$

Nach dieser Diskussion der Eigenschaften unseres Ansatzes wollen wir die in den Gleichungen benötigten Ableitungen von  $H_1(X, \tau)$  bereitstellen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} H_1 &= \hat{H} e^{ik(X-c\tau)} , \\ H_{1X} &= ik \hat{H} e^{ik(X-c\tau)} , \\ H_{1XX} &= -k^2 \hat{H} e^{ik(X-c\tau)} , \\ H_{1\tau} &= -ikc \hat{H} e^{ik(X-c\tau)} . \end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir für die Potentiale in beiden Fluidgebieten  $\bar{\Phi}$ ,  $\underline{\Phi}$  analoge Ansätze einführen. Wir wählen hierzu

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(X, Z, \tau) &= \bar{A} e^{-\bar{a}Z} e^{ik(X-c\tau)} , \\ \underline{\Phi}(X, Z, \tau) &= \underline{A} e^{+\underline{a}Z} e^{ik(X-c\tau)} . \end{aligned}$$

Somit ist für beide Potentiale die gleiche periodische Abhängigkeit in  $X$  und die gleiche Zeitabhängigkeit gewählt wie für die Störung der Grenzfläche  $H_1$ . Dieser Ansatz ist naheliegend, da sich die Störung der Grenzfläche zwangsläufig in den Potentialen abbilden muß. Für den Ansatz in der  $Z$ -Richtung lassen wir uns von folgendem Gedanken leiten: Die Störung der horizontalen Grenzfläche führt sicherlich in der Umgebung der Grenzfläche zu einer Störung der Strömung und somit zu Störpotentialen

$\bar{\Phi}$  und  $\underline{\Phi}$ . In großer Entfernung von der Grenzfläche, d.h. für  $Z \rightarrow \pm\infty$ , ist selbstredend keine Störung der Strömung zu erwarten. Damit muß dort das Störpotential verschwinden. Die benutzte Exponentialfunktion in  $Z$  stellt somit sicher, daß

$$\begin{aligned} Z \rightarrow +\infty : \quad \bar{\Phi} &\rightarrow 0 \quad , \\ Z \rightarrow -\infty : \quad \underline{\Phi} &\rightarrow 0 \quad , \end{aligned}$$

gilt. Wir wollen uns auch hier die benötigten Ableitungen der Potentiale zusammensetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi &= Ae^{\mp aZ} e^{ik(X-c\tau)} \quad , \\ \Phi_X &= ik Ae^{\mp aZ} e^{ik(X-c\tau)} \quad , \\ \Phi_{XX} &= -k^2 Ae^{\mp aZ} e^{ik(X-c\tau)} \quad , \\ \Phi_Z &= \mp a Ae^{\mp aZ} e^{ik(X-c\tau)} \quad , \\ \Phi_{ZZ} &= a^2 Ae^{\mp aZ} e^{ik(X-c\tau)} \quad , \\ \Phi_\tau &= -ikc Ae^{\mp aZ} e^{ik(X-c\tau)} \quad . \end{aligned}$$

Nun müssen wir die gewählten Ansätze in die Grundgleichungen und Rand- bzw. Übergangsbedingungen einführen. Wir beginnen zunächst mit der Laplace-Gleichung, welche aus der Kontinuitätsgleichung folgt. Es wird aus

$$\begin{aligned} \Phi_{XX} + \Phi_{ZZ} &= 0 \\ \{-k^2 Ae^{\mp aZ} + a^2 Ae^{\mp aZ}\} e^{ik(X-c\tau)} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur für

$$k = a$$

erfüllt werden. Dies ist ein Ergebnis, welches wir auch sofort hätten erhalten können, wenn wir für das Potential die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung im Ansatz benutzt hätten. Diese Lösung der Laplace-Gleichung findet sich in jedem mathematischen Handbuch (vgl. z.B. Bronstein).

Als nächstes wollen wir die tangentielle Strömungsbedingung bei  $Z = H$  erfüllen. Dort muß gelten

$$H_{1X}U_0 = \Phi_Z(Z = H) - H_{1\tau} + \dots$$

bzw.

$$ik\hat{H}e^{ik(X-c\tau)}U_0 = \mp kAe^{\mp kH}e^{ik(X-c\tau)} + ikc\hat{H}e^{ik(X-c\tau)} + \dots$$

Wegen  $H = 0 + \epsilon H_1 + \dots$  können wir die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickeln mit dem Ergebnis

$$e^{\mp kH} \approx e^0 \cdot e^{\mp k\epsilon H_1} \approx 1 \mp \epsilon k H_1 + \dots$$

Damit wird die tangentiale Strömungsbedingung zu

$$i\hat{H}(U_0 - c) = \mp A + \dots$$

bzw. wenn wir die Gleichung in beiden Fluidgebieten separat notieren

$$\bar{A} = -i\hat{H}(\bar{U}_0 - c)$$

$$A = i\hat{H}(\underline{U}_0 - c)$$

Die tangentialen Strömungsbedingungen erlauben uns demnach die Amplituden der Störpotentiale  $\bar{A}$ ,  $A$  als Funktion der Amplitude der Grenzfläche  $\hat{H}$  auszudrücken.

Im nächsten Schritt benutzen wir die integrierten Impulsgleichungen in beiden Teilgebieten und subtrahieren sie voneinander. Wir erhalten zunächst

$$-\frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho}(\bar{\Phi}_\tau + \bar{U}_0\bar{\Phi}_X) + \bar{C}_1 = \bar{P}_1$$

$$-\frac{\rho}{\Delta\rho}(\underline{\Phi}_\tau + \underline{U}_0\underline{\Phi}_X) + \underline{C}_1 = \underline{P}_1$$

Nach der Subtraktion erhalten wir für die Differenz der Drücke

$$\bar{P}_1 - \underline{P}_1 = -\frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho}(\bar{\Phi}_\tau + \bar{U}_0\bar{\Phi}_X) + \frac{\rho}{\Delta\rho}(\underline{\Phi}_\tau + \underline{U}_0\underline{\Phi}_X) + (\bar{C}_1 - \underline{C}_1)$$

Wir führen nun unsere Ansätze für die Potentiale  $\bar{\Phi}$  und  $\underline{\Phi}$  ein und werten die Gleichung für  $Z = 0$  aus. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(Z=0) - \underline{P}_1(Z=0) &= -\frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho}\{-ikc\bar{A} + \bar{U}_0ik\bar{A}\}e^{ik(X-c\tau)} \\ &+ \frac{\rho}{\Delta\rho}\{-ikcA + \underline{U}_0ikA\}e^{ik(X-c\tau)} \\ &+ (\bar{C}_1 - \underline{C}_1) \end{aligned}$$

Wir benutzen unsere Ausdrücke aus den tangentialen Strömungsbedingungen um die Amplituden  $\bar{A}$  und  $A$  zu eliminieren. Die Gleichung wird dann zu

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(Z=0) - \underline{P}_1(Z=0) &= -\left\{\frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho}k\hat{H}(\bar{U}_0 - c)^2 + \frac{\rho}{\Delta\rho}k\hat{H}(\underline{U}_0 - c)^2\right\}e^{ik(X-c\tau)} \\ &+ (\bar{C}_1 - \underline{C}_1) \end{aligned}$$

Als letzte Bedingung müssen wir nun den Drucksprung über die freie Grenzfläche verarbeiten. Bei  $Z = H$  gilt hiernach

$$\bar{P}_1(Z = H) - \underline{P}_1(Z = H) = We^{-1}H_{1XX} \quad .$$

Im Gegensatz zur obigen Gleichung tritt nun hier die Differenz der Stördrücke bei  $Z = H$  auf. Hier müssen wir nun sorgfältig vorgehen! Wir können ganz formal den Druck in der Umgebung von  $Z = 0$  in eine Taylor-Reihe entwickeln und damit den Druck bei  $Z = H$  berechnen. Wir erhalten

$$P(Z = H) = P(Z = 0) + HP_Z(Z = 0) + \dots \quad .$$

Weiterhin können wir unsere Entwicklungen für  $P$  und  $H$  einsetzen, mit dem Ergebnis

$$P_0(H) + \epsilon P_1(H) + \dots = P_0(0) + \epsilon P_1(0) + \dots + (0 + \epsilon H_1 + \dots)(P_{0Z}(0) + \epsilon P_{1Z}(0) + \dots)$$

bzw.

$$P_0(H) + \epsilon P_1(H) + \dots = P_0(0) + \epsilon \{P_1(0) + H_1 P_{0Z}(0)\} + \dots \quad .$$

Wir vergleichen die Koeffizienten vor  $1, \epsilon, \dots$  und erhalten speziell für die Druckstörung

$$P_1(H) = P_1(0) + H_1 P_{0Z}(0) \quad .$$

Das hydrostatische Druckfeld der Grundlösung war hierbei durch

$$P_{0Z} = -\frac{\rho}{\Delta\rho} Fr^{-1}$$

gegeben. Wir notieren die beiden Fluidbereiche separat und erhalten hieraus die Gleichungen

$$\bar{P}_1(H) = \bar{P}_1(0) - H_1 \frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho} Fr^{-1} \quad ,$$

$$\underline{P}_1(H) = \underline{P}_1(0) - H_1 \frac{\underline{\rho}}{\Delta\rho} Fr^{-1} \quad .$$

Somit wird es möglich die Gleichungen für den Drucksprung über die freie Grenzfläche umzuschreiben und wir erhalten

$$\bar{P}_1(0) - H_1 \frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho} Fr^{-1} - \underline{P}_1(0) + H_1 \frac{\underline{\rho}}{\Delta\rho} Fr^{-1} = We^{-1}H_{1XX}$$

bzw.

$$\bar{P}_1(0) - \underline{P}_1(0) = We^{-1}H_{1XX} - Fr^{-1}H_1 \quad .$$

Wir bringen schließlich unsere Ansätze für die Störung der Grenzfläche  $H_1$  ein und erhalten

$$\bar{P}_1(0) - \underline{P}_1(0) = -(k^2 W e^{-1} + F r^{-1}) \hat{H} e^{ik(X-cr)} .$$

Wir haben somit die Druckdifferenz ( $\bar{P}_1(0) - \underline{P}_1(0)$ ) zweimal ausgedrückt, zum einen durch die Lösung des Druckfeldes mit Hilfe der Impulsgleichungen und zum anderen mit Hilfe des Drucksprunges über die gekrümmte Grenzfläche. Das Gleichsetzen beider Ausdrücke eliminiert den Druck vollständig und wir erhalten

$$-\left\{ \frac{\bar{\varrho}}{\Delta \varrho} (\bar{U}_0 - c)^2 + \frac{\underline{\varrho}}{\Delta \varrho} (\underline{U}_0 - c)^2 \right\} k \hat{H} e^{ik(X-cr)} + (\bar{C}_1 - \underline{C}_1) = -(k^2 W e^{-1} + F r^{-1}) \hat{H} e^{ik(X-cr)} .$$

Ein Koeffizientenvergleich vor den Funktionen liefert demnach

$$1 : \bar{C}_1 - \underline{C}_1 = 0 ,$$

$$e^{ik(X-cr)} : \bar{\varrho} (\bar{U}_0 - c)^2 + \underline{\varrho} (\underline{U}_0 - c)^2 = \left\{ W e^{-1} k + \frac{F r^{-1}}{k} \right\} \Delta \varrho .$$

Somit haben wir alle Amplituden und Funktionen in unseren Ansätzen eliminiert und die letzte Gleichung stellt einen Zusammenhang zwischen der Wellenzahl  $k$  und der komplexen Phasengeschwindigkeit  $c$  her. Wir erwarten demnach eine Abhängigkeit  $c = f(k)$ , was völlig analog ist zu unseren Ergebnissen beim Strahlzerfall. Die obige Gleichung stellt eine quadratische Gleichung für  $c$  dar, welche das Aussehen

$$c^2 - 2c \frac{(\bar{\varrho} \bar{U}_0 + \underline{\varrho} \underline{U}_0)}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})} + \frac{(\bar{\varrho} \bar{U}_0^2 + \underline{\varrho} \underline{U}_0^2)}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})} - \frac{\Delta \varrho}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})} \left\{ W e^{-1} k + \frac{F r^{-1}}{k} \right\} = 0$$

hat. Die Lösungen für  $c$  sind demnach

$$c_{1/2} = \frac{(\bar{\varrho} \bar{U}_0 + \underline{\varrho} \underline{U}_0)}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})} \pm \sqrt{-\frac{\bar{\varrho} \underline{\varrho} (\bar{U}_0 - \underline{U}_0)^2}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})^2} + \frac{\Delta \varrho}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})} \left\{ W e^{-1} k + \frac{F r^{-1}}{k} \right\}} .$$

Diese Gleichung besitzt zwei reelle Lösungen solange der Ausdruck unter der Wurzel positiv bleibt. Wird der Ausdruck unter der Wurzel negativ, so wird  $c = c_R + ic_I$  komplex und deshalb  $c_I \neq 0$ . Das Vorzeichen von  $c_I$  ist es aber, welches die Stabilität unserer Grundlösung charakterisiert. Instabilität ist folglich möglich für

$$\frac{\bar{\varrho} \underline{\varrho} (\bar{U}_0 - \underline{U}_0)^2}{(\bar{\varrho} + \underline{\varrho})} > \Delta \varrho \left\{ W e^{-1} k + \frac{F r^{-1}}{k} \right\} .$$

Wir haben bisher bei unserer Skalierung die zunächst nicht festgelegte Länge  $l_0$  benutzt. An dieser Stelle nun wird deutlich, daß wir die beiden Effekte Oberflächenspannung und Schwereschichtung, welche wir auf der rechten Seite der Gleichung

erkennen, nur im Problem halten können, wenn wir fordern, daß beide Kennzahlen in der gleichen Größenordnung sind. Wir haben somit wiederum die Wahl  $l_0$  so festzulegen, daß die Gleichungen eine möglichst einfache Form erhalten. Wir formen die Stabilitätsgleichung geringfügig um und erhalten zunächst

$$\frac{\bar{\rho} \underline{\rho} (\bar{U}_0 - \underline{U}_0)^2}{(\underline{\rho}^2 - \bar{\rho}^2)} Fr > \frac{Fr}{We} k + \frac{1}{k} .$$

Den Quotienten  $Fr/We$  können wir aus den Definitionen der Kennzahlen angeben als

$$\frac{Fr}{We} = \frac{\sigma}{g \Delta \rho l_0^2} .$$

Wir wählen willkürlich, jede andere Wahl für  $l_0$  ist zulässig bei Einhaltung der Größenordnung,

$$l_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{g \Delta \rho}} ,$$

womit

$$\frac{Fr}{We} = 1 \quad , \quad Fr = \frac{\Delta u^2 \sqrt{\Delta \rho}}{\sqrt{g \sigma}}$$

wird. Die hier auftretende charakteristische Länge  $l_0$  im Problem ist die sogenannte Laplace-Länge, welche bei Problemen mit kombiniertem Einfluß von Kapillarität und Dichteschichtung die typische Wellenlänge der Störung der Grenzfläche angibt. Unsere Stabilitätsgleichung vereinfacht sich somit zu

$$Fr^* = \frac{\bar{\rho} \underline{\rho} (\bar{U}_0 - \underline{U}_0)^2}{(\underline{\rho}^2 - \bar{\rho}^2)} Fr > k + \frac{1}{k} .$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 34 graphisch dargestellt. Die Kurve der Neutralstabilität ist als durchgezogene Linie im Diagramm eingetragen. Für Werte  $Fr^* > k + 1/k$  erwarten wir gemäß unseren obigen Überlegungen  $c_I > 0$ , d.h. die Störungen wachsen mit der Zeit an - unsere Grundlösung ist instabil. Komplementär finden wir unterhalb der Grenzkurve für Werte  $Fr^* < k + 1/k$ , daß die Störungen in der Zeit weggedämpft werden und deshalb die Grundlösung stabil bleibt. Die Kurve der Neutralstabilität (durchgezogene Linie) besitzt zwei Asymptoten für  $k \rightarrow 0$  und  $k \rightarrow \infty$ , welche unmittelbar als  $1/k$  bzw.  $k$  identifiziert werden können. Beide Funktionen sind gestrichelt in Abbildung 34 eingetragen. Das Minimum der Kurve der Neutralstabilität liegt bei  $Fr^* = 2, k = 1$ . Dies bedeutet physikalisch, daß die Wellenzahl  $k = 1$  zuerst instabil wird bzw. die größte Anfachungsrate aufweist. Somit wird die dazugehörige dimensionslose Wellenlänge  $\lambda = 2\pi$  bevorzugt auftreten. Dimensionsbehaftet entspricht dies

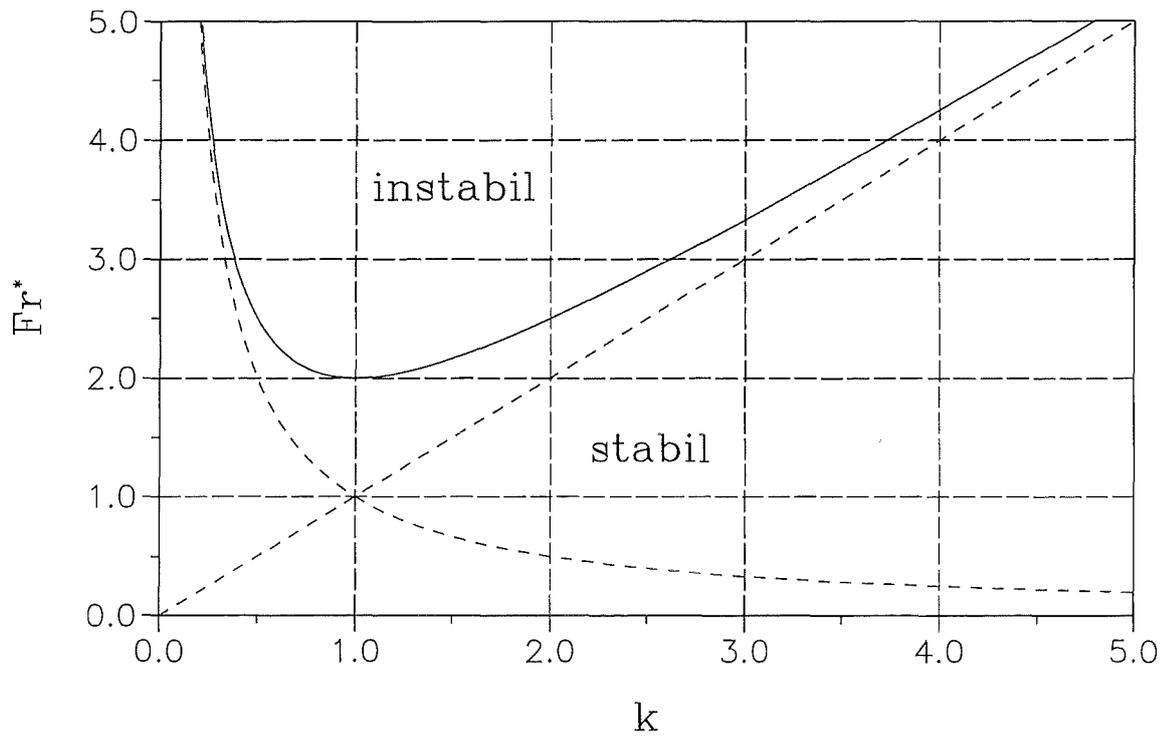


Abbildung 34: Stabilitätsdiagramm zur Kelvin-Helmholtz Instabilität.

gerade einer Wellenlänge von  $2\pi\sqrt{\sigma/g\Delta\rho}$ . Wenden wir das gefundene Ergebnis auf das System Wasser/Luft an, so ergibt sich, mit den Stoffwerten  $\underline{\rho} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{\rho} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $\sigma = 7.4 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ , die Laplace-Länge zu  $l_0 = 1.7 \text{ cm}$ . Die Instabilität der Wasser/Luft-Grenzfläche ist zu erwarten für Geschwindigkeitsdifferenzen  $\bar{u} - \underline{u} > 6.5 \text{ m/s}$ .

## 4 Hydrodynamische Probleme mit Phasenwechsel

In dem vorangegangenen Kapitel haben wir mit der Ausbreitungsströmung, dem Freistrahle und dem ebenen Flüssigkeitsspiegel einige rein hydrodynamische Probleme mit freien Grenzflächen kennengelernt. In diesen Fällen sind stets die Massen- und Impulserhaltung im Flüssigkeitsgebiet aufgetreten. Über die freie Grenzfläche sind demnach eine kinematische Bedingung und die Spannungsbedingungen zu beachten. Wir wollen nun den Begriff der freien Grenzfläche verallgemeinern, indem wir auch Phasenübergänge und die hieraus resultierenden Grenzflächen zweier Phasen mit einbeziehen. Im Regelfall sind Phasenübergänge bestimmt durch das Temperaturfeld, sodaß wir im folgenden stets eine zusätzliche Erhaltungsgleichung zu lösen haben - die Wärmetransportgleichung. Desweiteren kommen an der freien Grenzfläche zusätzliche Bedingungen aufgrund des Phasenwechsels hinzu. Wir wollen uns die Eigenschaften solcher freien Grenzflächen mit Phasenwechsel im folgenden an zwei Beispielen verdeutlichen.

### 4.1 Das Filmsieden an der vertikalen Wand

Betrachten wir einen beheizten Behälter mit Flüssigkeit, so kann es bei entsprechend großen Wärmeströmen an der beheizten Wand zur Ausbildung von Filmsieden kommen. Dieses ist dadurch charakterisiert, daß an der beheizten Wand ein geschlossener Dampffilm besteht, welcher aufgrund seiner geringeren Dichte nach oben abströmt. Die Flüssigkeit kommt hingegen mit der Wand nicht in Kontakt. Vielmehr wird an der Dampf- / Flüssigkeitsgrenzfläche ein Phasenwechsel auftreten, welcher die Strömung im Dampffilm speist. Wir wollen uns die Situation anhand von Temperatur- und Geschwindigkeitsprofilen in Abbildung 35 verdeutlichen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß das Problem stationär und eben ist. Weiterhin unterstellen wir jeweils konstante Stoffeigenschaften in beiden Phasen. Zur Vereinfachung nehmen wir zusätzlich an, daß die Flüssigkeit sich im Sättigungszustand befindet, d.h.  $T = T_S$ . Unter dieser Annahme führt jede weitere Zufuhr von Wärme nicht zu einer Temperaturzunahme sondern vielmehr zu Verdampfung. Diese Annahme ist im Regelfall in Wandnähe recht gut erfüllt. Der Temperaturanstieg vollzieht sich somit ausschließlich im Dampffilm, wo die Temperatur an der Wand bis  $T = T_W$  ansteigt. Der Knick des Temperaturprofils an der Grenzfläche  $h(z)$  rührt



von einer Wärmesenke her. Hier wird der Wärmestrom vollständig in Verdampfungsenthalpie umgesetzt. Bezüglich der Kinematik erwarten wir im Dampf starke Auftriebskräfte aufgrund des Dichteunterschieds  $\rho_g < \rho_l$ . Somit wird hier eine aufwärts gerichtete Strömung die Folge sein, welche an der Wand die Haftbedingung erfüllt. Die Kopplung der Geschwindigkeitsfelder im Dampf und in der Flüssigkeit an der freien Grenzfläche ist dann wiederum eine Folge der Schubspannungen.

#### 4.1.1 Grundgleichungen, Skalierung, Grenzschichtapproximation

Für dieses Problem haben wir somit die zweidimensionalen, kartesischen Erhaltungsgleichungen in beiden Teilgebieten (l,g) anzuwenden. Im Dampfgebiet sind dies

$$\begin{aligned}
 g : \quad u_x + w_z &= 0 \quad , \\
 \rho(uu_x + ww_z) &= -p_x + \mu(u_{xx} + w_{zz}) \quad , \\
 \rho(uw_x + ww_z) &= -p_z + \mu(w_{xx} + w_{zz}) - \rho g \quad , \\
 \rho c_p(uT_x + wT_z) &= \lambda(T_{xx} + T_{zz}) \quad .
 \end{aligned}$$

In der Flüssigkeit können wir aufgrund unserer Annahme  $T = T_S$  auf die Lösung der Wärmetransportgleichung verzichten. Es gilt dort somit

$$\begin{aligned}
 l : \quad u_x + w_z &= 0 \quad , \\
 \rho(uu_x + ww_z) &= -p_x + \mu(u_{xx} + w_{zz}) \quad , \\
 \rho(uw_x + ww_z) &= -p_z + \mu(w_{xx} + w_{zz}) - \rho g \quad .
 \end{aligned}$$

Die Rand- bzw. Übergangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad u &= 0 \quad , \\
 w &= 0 \quad , \\
 T &= T_W \quad , \\
 x = h(z) : \quad |\tilde{v}_g| &= |\tilde{v}_l| \quad , \\
 h_z w_g - u_g &= h_z w_l - u_l \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\mu_g \frac{\partial |\tilde{v}_g|}{\partial \tilde{n}} = \mu_l \frac{\partial |\tilde{v}_l|}{\partial \tilde{n}} \quad ,$$

$$p_g - p_l = \frac{h_{zz}}{(1 + h_z^2)^{3/2}} \sigma \quad ,$$

$$T = T_S \quad ,$$

$$\lambda_g \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} = \varrho_g L \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^{h(z)} w dx \right\} \quad ,$$

$$x \rightarrow +\infty : \quad \begin{array}{l} u \rightarrow 0 \quad , \\ w \rightarrow 0 \quad . \end{array}$$

Somit wird an der Wand die Haftbedingung und eine Temperaturbedingung formuliert. An der Grenzfläche wird zunächst die Geschwindigkeit selbst stetig sein und die Strömung auf beiden Seiten ist tangential zur Grenzfläche. Weiterhin erwarten wir, daß die Spannungen stetig sind. Dies bedeutet in tangentialer Richtung, daß die Schubspannungen im Dampf und in der Flüssigkeit gleich sein müssen. In normaler Richtung ergibt sich, wie gewohnt, ein Drucksprung über die gekrümmte Grenzfläche. Die Grenzfläche ist zudem auf Sättigungstemperatur. Schlußendlich müssen wir eine Bedingung an den Wärmestrom stellen: der Wärmestrom, welcher normal zur Grenzfläche ankommt wird vollständig in Verdampfung umgesetzt ( $L$  bezeichnet die Verdampfungsenthalpie). Er bestimmt deshalb die Änderung des Massenstroms im Dampfteil. In der Flüssigkeit fordern wir lediglich, daß die Geschwindigkeiten in einiger Entfernung von der Grenzfläche abklingen.

Der oben gegebene Satz von Gleichungen ist in dieser Allgemeinheit nur schwer einer Lösung zugänglich. Wir wollen deshalb wiederum unsere Kenntnis über das Problem einbringen um Vereinfachungen der Gleichungen zu erreichen. Das formale Werkzeug hierzu stellt eine Skalierung dar. Betrachten wir einen Dampfteil auf einer Wand, so wird er einerseits die komplette Wand in  $z$ -Richtung bedecken. Andererseits wird seine Dicke, d.h. die Ausdehnung in der  $x$ -Richtung, relativ klein sein. Diese stark unterschiedlichen Längenskalen wollen wir in die folgenden Skalierungen einbringen. Wir wählen mit  $\epsilon \ll 1$

$$X = \frac{x}{\epsilon l_0} \quad , \quad Z = \frac{z}{l_0} \quad ,$$

$$U = \frac{u}{u_0} \quad , \quad W = \frac{w}{w_0} \quad ,$$

$$P = \frac{p}{p_0} \quad , \quad \Theta = \frac{(T - T_S)}{(T_W - T_S)} \quad .$$

Die Anwendung der obigen Skalierung auf die Kontinuitätsgleichung in der Dampfphase liefert unmittelbar

$$g : \quad \frac{u_0}{\epsilon} U_X + w_0 W_Z = 0 \quad ,$$

eine Gleichung welche wir nur mit  $u_0/\epsilon \sim w_0$  erfüllen können. Wir wählen deshalb willkürlich  $u_0 = \epsilon w_0$  um der Gleichung die einfachste Form zu geben. Mit dieser Festlegung ist nur noch eine Geschwindigkeitsskala vorhanden und wir können die Druckskala mit dem Staudruck der Dampfphase aufbauen, d.h. wir wählen  $p_0 = \rho_g w_0^2$ . Als nächstes wollen wir die horizontale Impulsgleichung entdimensionieren. Wir erhalten

$$g : \quad \epsilon^2(UU_X + WW_Z) = -P_X + Re^{-1}(U_{XX} + \epsilon^2 U_{ZZ}) \quad ,$$

mit  $Re = w_0 l_0 / \nu_g$ , der Reynolds-Zahl der Dampfphase. Wollen wir sowohl die viskosen Effekte als auch die Trägheitseffekte im Problem belassen, so müssen beide Vorfaktoren in der gleichen Größenordnung sein. Es muß also gelten  $\epsilon^2 \sim Re^{-1}$ . Jede andere Größenordnung für  $Re$  würde zwangsläufig dazu führen, daß wir in Abwesenheit eines Druckgradienten die obige Gleichung nicht mehr erfüllen können.

Mit der speziellen Wahl  $\epsilon^2 = Re^{-1}$ , jede andere Wahl bei Einhaltung der Größenordnung ist zulässig, erhalten wir schließlich

$$g : \quad \epsilon^2(UU_x + WW_Z) = -P_X + \epsilon^2(U_{XX} + \epsilon^2 U_{ZZ}) \quad ,$$

bzw.

$$g : \quad P_X = 0(\epsilon^2) \quad .$$

Dies ist eine wichtige Aussage: Der Druck variiert normal zur Grenzschicht praktisch nicht. Anders ausgedrückt wird der Druck dem Dampffilm von außen aufgeprägt. Im nächsten Schritt wollen wir die vertikale Impulsgleichung behandeln. Hierzu ist es dienlich zunächst die hydrostatische Druckverteilung in der Flüssigkeit zu eliminieren. In der Flüssigkeit gilt statisch

$$l : \quad 0 = -p_{0z} - \rho_l g \quad .$$

Weiterhin gilt in beiden Phasen dynamisch

$$\begin{aligned} g : \quad \varrho_g(uw_x + ww_z) &= -p_z + \mu_g(w_{xx} + w_{zz}) - \varrho_g g \quad , \\ l : \quad \varrho_l(uw_x + ww_z) &= -p_z + \mu_l(w_{xx} + w_{zz}) - \varrho_l g \quad . \end{aligned}$$

Wir subtrahieren von beiden Gleichungen die hydrostatische Druckgleichung in der Flüssigkeit und erhalten nach Zerlegung des Druckes gemäß  $p = p_0 + p'$  in einen hydrostatischen Anteil  $p_0$  in der Flüssigkeit und einen strömungsbedingten Anteil

$$\begin{aligned} g : \quad \varrho_g(uw_x + ww_z) &= -p'_z + \mu_g(w_{xx} + w_{zz}) + (\varrho_l - \varrho_g)g \quad , \\ l : \quad \varrho_l(uw_x + ww_z) &= -p'_z + \mu_l(w_{xx} + w_{zz}) \quad . \end{aligned}$$

Nun führen wir wiederum die Skalierung ein und bearbeiten zunächst die vertikale Impulsgleichung im Dampfgebiet. Wir erhalten hiernach

$$g : \quad UW_X + WW_Z = -P'_Z + W_{XX} + \epsilon^2 W_{ZZ} + \frac{\Delta\varrho}{\varrho_g} Fr^{-1} \quad ,$$

mit  $\Delta\varrho = (\varrho_l - \varrho_g)$  und  $Fr = w_0^2/gl_0$ . Wir haben den Druck um den hydrostatischen Druckanteil bereinigt. Somit gilt für  $X \rightarrow \infty$  :  $P' = \textit{konstant}$  in der Flüssigkeit. Wegen  $P_X = O(\epsilon^2)$  kann der Druck im Dampfteil lediglich um  $O(\epsilon^2)$  vom konstanten Außendruck abweichen. Es muß folglich gelten

$$P'_Z = O(\epsilon^2) \quad .$$

Wir fassen die obige Gleichung zusammen, indem wir kleine Terme im Abbruchfehler summieren. Wir erhalten somit

$$g : \quad UW_X + WW_Z = W_{XX} + \frac{\Delta\varrho}{\varrho_g} Fr^{-1} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Im nächsten Schritt müssen wir die Wärmetransportgleichung in der Dampfphase entdimensionieren. Wir erhalten nach Einführung der Skalen unmittelbar

$$g : \quad U\Theta_X + W\Theta_Z = Pr^{-1}(\Theta_{XX} + \epsilon^2\Theta_{ZZ}) \quad ,$$

mit  $Pr = \nu_g/\kappa_g$ , bzw.

$$g : \quad U\Theta_X + W\Theta_Z = Pr^{-1}\Theta_{XX} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Die oben angegebenen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Wärme stellen die sogenannten Grenzsichtgleichungen dar (vgl. Schlichting 1982). Dies sind parabolische Transportgleichungen für Impuls und Wärme, welche in schlanken Fluidgebieten Gültigkeit haben. In unserem Fall stellt zunächst der Dampffilm ein solches schlankes Gebiet dar. Bei näherer Betrachtung können wir jedoch gleichfalls in der Flüssigkeit eine kinematische Grenzsicht identifizieren. Während im Außenfeld keine Strömung stattfindet, wird die Flüssigkeit in einer dünnen Schicht vom Dampffilm nach oben gezogen. Skalieren wir folglich die Erhaltungsgleichungen in der Flüssigkeit, so erhalten wir bei identischer Skalierung und gleicher Argumentation die Grenzsichtgleichungen

$$\begin{aligned}
 l: \quad U_X + W_Z &= 0 \quad , \\
 P_X &= O(\epsilon^2) \quad , \\
 UW_X + WW_Z &= \frac{\nu_l}{\nu_g} W_{XX} + O(\epsilon^2) \quad .
 \end{aligned}$$

Die Rand- bzw. Übergangsbedingungen wollen wir im nächsten Schritt entdimensionieren und gegebenenfalls annähern. Hier erhalten wir an der Wand

$$\begin{aligned}
 X = 0: \quad U &= 0 \quad , \\
 W &= 0 \quad , \\
 \Theta &= 1 \quad .
 \end{aligned}$$

An der Grenzfläche wird:

$$\begin{aligned}
 X = H(Z): \quad W_g &= W_l + O(\epsilon) \quad , \\
 H_Z W_g - U_g &= H_Z W_l - U_l \quad , \\
 W_{gX} &= \frac{\mu_l}{\mu_g} W_{lX} + O(\epsilon) \quad , \\
 (P_g - P_l) &= \epsilon W e^{-1} H_{ZZ} + O(\epsilon^2) \quad , \\
 \Theta &= 0 \quad , \\
 \Theta_X &= Pr \cdot \frac{L}{c_{pg}(T_W - T_S)} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \int_0^H W dX \right\} + O(\epsilon) \quad .
 \end{aligned}$$

Somit kommen als dimensionslose Parameter zusätzlich ins Problem  $(\mu_l/\mu_g)$ , bzw.  $(\nu_l/\nu_g)$ , das Verhältnis der Viskositäten,  $Pr = \nu_g/\kappa_g$ , die Prandtl-Zahl der Dampfphase und eine dimensionslose Verdampfungsenthalpie  $L/(c_{pg}(T_W - T_S))$ . Der Druck-

sprung über die Flüssigkeits- / Dampfgrenzfläche ist offensichtlich klein, eine Berücksichtigung im Rahmen der Grenzschichtapproximation ist zudem nicht möglich. Die Weber-Zahl der Dampfphase ist gemäß  $We = w_0^2 l_0 \rho_g / \sigma$  definiert. Wir haben schließlich noch die Bedingung im Außenfeld der Flüssigkeit, d.h.

$$\begin{aligned} X \rightarrow \infty : \quad U &\rightarrow 0 \quad , \\ W &\rightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Diese Formulierung des Problems ist erstmals von Koh (1962) angegeben.

#### 4.1.2 Lösung mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation

Ausgehend von der oben gegebenen, dimensionslosen Formulierung unseres Problems wollen wir nun eine Ähnlichkeitstransformation anwenden, um die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu reduzieren. Der Grundgedanke hierbei ist die Einführung einer neuen Variable  $\eta$ , welche im Gegensatz zu  $X$  mit der Dicke des Dampffilms gestreckt wird. Sicherlich ist mit dem Ansatz

$$\eta = C_1 X Z^{-n} \quad ,$$

erreichbar, daß über den Dampffilm gilt,  $0 \leq \eta \leq \eta_H$ . Für  $H(Z)$  wird damit ein allgemeiner Potenzansatz gemäß  $H(Z) \sim Z^n$  gewählt. Die  $g/l$ -Phasengrenzfläche liegt somit bei  $\eta = \eta_H$ . Wir wollen weiterhin die beiden Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes  $X, W$  in einer Stromfunktion zusammenfassen. Dies geschieht mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} g : \quad U &= \Psi_Z \quad , \\ W &= -\Psi_X \quad . \end{aligned}$$

Wie man leicht durch Einsetzen überprüfen kann, erfüllt diese Stromfunktion stets die Kontinuitätsgleichungen. Die Form des Geschwindigkeitsprofils oder des Temperaturprofils über den Dampffilm wird nun, betrachtet in der Variablen  $\eta$ , stets 'ähnlich' sein. Es sollte also möglich sein, mit den Ansätzen

$$\begin{aligned} g : \quad \Psi(X, Z) &= f(\eta) \cdot C_2 Z^m \quad , \\ \Theta(X, Z) &= \vartheta(\eta) \cdot g(Z) \quad , \end{aligned}$$

das Strom- und Temperaturfeld im Dampffilm auszudrücken. Anschaulich verwenden wir für beide Größen eine Formfunktion, welche nur von  $\eta$  abhängt. Zusätzlich

ist möglich, daß die Amplitude sich in  $Z$  verändert. Dies können wir mit einem allgemeinen Potenzansatz im Falle der Stromfunktion berücksichtigen. Im allgemeinen ist dies auch für das Temperaturfeld zu beachten. In unserem konkreten Problem haben wir aus den Temperaturrandbedingungen an der Wand ( $\Theta = 1$ ) und an der Dampf/Flüssigkeitsgrenzfläche ( $\Theta = 0$ ) jedoch sofort die Möglichkeit  $g(Z) = \textit{konstant}$  zu erkennen. Dies kommt, weil die Amplitude der Temperatur, unabhängig von  $Z$ , durch die Randbedingungen festgehalten wird.

Wir wollen nun die Ansätze in unsere Differentialgleichungen und Randbedingungen einbringen. Hierzu benötigen wir eine ganze Reihe von Ableitungen, welche wir zunächst bereitstellen wollen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 g : \quad \eta_X &= C_1 Z^{-n} \quad , \\
 \eta_Z &= -n C_1 X Z^{-n-1} \quad , \\
 \Psi_X &= C_1 C_2 Z^{m-n} f_\eta \quad , \\
 \Psi_{XX} &= C_1^2 C_2 Z^{m-2n} f_{\eta\eta} \quad , \\
 \Psi_{XXX} &= C_1^3 C_2 Z^{m-3n} f_{\eta\eta\eta} \quad , \\
 \Psi_{XZ} &= C_1 C_2 Z^{m-n-1} \{ (m-n) f_\eta - n \eta f_{\eta\eta} \} \quad , \\
 \Psi_Z &= C_2 Z^{m-1} \{ m f - n \eta f_\eta \} \quad .
 \end{aligned}$$

Bringen wir die Stromfunktion  $\Psi$  in unsere Impulsgleichung ein, so erhalten wir

$$g : \quad \Psi_{XXX} - \Psi_Z \Psi_{XX} + \Psi_X \Psi_{XZ} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho_g} F r^{-1} = 0 \quad .$$

Als nächstes gilt es, die Ähnlichkeitsansätze für die Stromfunktion  $\Psi$  einzubringen. Nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$g : \quad f_{\eta\eta\eta} + \frac{C_2}{C_1} Z^{m+n-1} \{ -m f f_{\eta\eta} + (m-n) f_\eta^2 \} - \frac{1}{C_1^3 C_2} Z^{3n-m} \frac{\Delta \varrho}{\varrho_g} F r^{-1} = 0 \quad .$$

Wenn unsere Grundvorstellung  $f = f(\eta)$  richtig ist, so dürfen an dieser Stelle keine Abhängigkeiten von  $Z$  verbleiben. Die obige Differentialgleichung muß folglich in eine gewöhnliche Differentialgleichung übergehen. Dies aber ist nur möglich für

$$\begin{aligned}
 g : \quad m + n - 1 &= 0 \quad , \\
 3n - m &= 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Wir müssen deshalb die Exponenten in unseren Ansätzen gemäß

$$\begin{aligned}
 g : \quad n &= 1/4 \quad , \\
 m &= 3/4
 \end{aligned}$$

wählen. Somit erhalten wir

$$g: \quad f_{\eta\eta\eta} + \frac{C_2}{4C_1} \{2f_\eta^2 - 3ff_{\eta\eta}\} - \frac{1}{C_1^3 C_2} \frac{\Delta\varrho}{\varrho_g} Fr^{-1} = 0 \quad .$$

Wir haben in unseren Ansätzen weiterhin die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  frei. Diese wählen wir so, daß unsere Differentialgleichung ein möglichst einfaches Aussehen erhält. Mit der Wahl

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{4C_1} &= 1 \quad , \\ \frac{1}{C_1^3 C_2} \frac{\Delta\varrho}{\varrho_g} Fr^{-1} &= 1 \quad , \end{aligned}$$

erhalten wir letztendlich für die Impulsgleichung

$$g: \quad f_{\eta\eta\eta} + 2f_\eta^2 - 3ff_{\eta\eta} - 1 = 0 \quad .$$

Die Konstanten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ \frac{\Delta\varrho}{\varrho_g} \frac{Fr^{-1}}{4} \right\}^{1/4} \quad , \\ C_2 &= 4 \left\{ \frac{\Delta\varrho}{\varrho_g} \frac{Fr^{-1}}{4} \right\}^{1/4} \quad . \end{aligned}$$

Wir wiederholen den identischen Rechengang im folgenden für die Wärmetransportgleichung. Die Einführung der Stromfunktion liefert zunächst

$$g: \quad \Psi_Z \Theta_X - \Psi_X \Theta_Z = Pr^{-1} \Theta_{XX} \quad .$$

Wir bringen die Ansätze ein und erhalten nach kurzer Vereinfachung

$$g: \quad \vartheta_{\eta\eta} - 3Pr f \vartheta_\eta = 0 \quad .$$

Nachdem wir nun die Differentialgleichungen im Dampfgebiet auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert haben, wollen wir uns dem Flüssigkeitsgebiet zuwenden. Dort müssen wir lediglich die Impulsgleichung beachten. Wir benutzen die gleichen Ansätze, nämlich

$$\begin{aligned} l: \quad U &= \Psi_Z \quad , \\ W &= -\Psi_X \quad . \end{aligned}$$

und erhalten hiermit die Impulsgleichung zu

$$l : \quad \frac{\nu_l}{\nu_g} \Psi_{XXX} - \Psi_Z \Psi_{XX} + \Psi_X \Psi_{XZ} = 0 \quad .$$

Weiterhin ist es sicherlich sinnvoll, die gleiche Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  anzuwenden, da der Rand des Flüssigkeitsgebiets ja gerade auf der Dampf/Flüssigkeitsgrenzfläche liegt. Wir wählen zudem für die Stromfunktion einen analogen Ansatz, d.h.

$$l : \quad \Psi(X, Z) = F(\eta) \cdot C_3 Z^m \quad .$$

Die Wahl des identischen Exponenten  $m$  treffen wir hier, weil wir an der  $l/g$ -Grenzfläche die beiden Geschwindigkeiten direkt koppeln. Folglich müssen beide Stromfunktionen eine gleiche Abhängigkeit in  $Z$  aufweisen. Wir bringen den Ansatz in die Impulsgleichung ein und erhalten

$$l : \quad F_{\eta\eta\eta} + \frac{C_3 \nu_g}{4C_1 \nu_l} \{2F_\eta^2 - 3FF_{\eta\eta}\} = 0 \quad .$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} C_3 &= 4 \frac{\nu_l}{\nu_g} C_1 \\ &= 4 \frac{\nu_l}{\nu_g} \left\{ \frac{\Delta \varrho}{\varrho_g} \frac{Fr^{-1}}{4} \right\}^{1/4} \end{aligned}$$

erhalten wir letztendlich

$$l : \quad F_{\eta\eta\eta} + 2F_\eta^2 - 3FF_{\eta\eta} = 0 \quad .$$

In Fortführung des Ähnlichkeitsansatzes müssen wir nun die Rand- bzw. Übergangsbedingungen ebenfalls durch Einbringen unserer Ansätze neu formulieren. An der Wand, d.h. bei  $X = 0$  wird die Haftbedingung und die Temperatur vorgegeben. Wir erhalten hieraus

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad f &= 0 \quad , \\ f_\eta &= 0 \quad , \\ \vartheta &= 1 \quad . \end{aligned}$$

An der freien Grenzfläche, d.h. bei  $X = H(Z)$ , lauten die umformulierten Übergangsbedingungen

$$\eta = \eta_H : \quad \frac{\nu_g}{\nu_l} f_\eta = F_\eta \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_g}{\nu_l} f &= F \quad , \\
\frac{\nu_g^2 \rho_g}{\nu_l^2 \rho_l} f_{\eta\eta} &= F_{\eta\eta} \quad , \\
\vartheta &= 0 \quad , \\
\vartheta_\eta &= -Pr \frac{3L}{c_{pg}(T_W - T_S)} f \quad .
\end{aligned}$$

Für  $X \rightarrow \infty$ , d.h. im Außenfeld, erwarten wir das Abklingen beider Komponenten der Geschwindigkeit. Diese Bedingung kann gleichfalls in den Ähnlichkeitsfunktionen formuliert werden, sodaß wir erhalten

$$\begin{aligned}
\eta \rightarrow \infty : \quad F &\rightarrow 0 \quad , \\
F_\eta &\rightarrow 0 \quad .
\end{aligned}$$

### 4.1.3 Ergebnisse

Wir haben somit das Problem vollständig in den Formfunktionen der Stromfunktionen  $f(\eta)$  und  $F(\eta)$ , sowie der Temperatur  $\vartheta(\eta)$  formuliert. Im Dampfgebiet und im Flüssigkeitsgebiet gelten die abgeleiteten gewöhnlichen Differentialgleichungen für den Impuls- und Wärmetransport. An den Rändern bzw. an der Dampf/Flüssigkeits-Grenzfläche sind die Bedingungen gegeben. Dieser Satz von gewöhnliche Differentialgleichungen und Rand- bzw. Übergangsbedingungen kann nur numerisch, mit Hilfe von Standard-Routinen aus mathematischen Bibliotheken gelöst werden. Wir haben im Anhang konkret die numerische Integration dieses Problems erläutert und geben darüberhinaus ein Beispielprogramm, welches die Integration in der Programmiersprache FORTRAN ausführt.

Das Ergebnis für die Vertikalgeschwindigkeit  $W$ , sowie die Temperatur  $\vartheta$  ist in Abbildung 36 graphisch dargestellt. Wir stellen zunächst fest, daß die Dicke des Dampffilms  $\eta_H$  mit dem Parameter  $L/(c_{pg}(T_W - T_S))$  zusammenhängt. Für große Werte dieser dimensionslosen Latentwärme ergibt sich ein dünner Dampffilm (vgl.  $\eta = 1$ ), für kleine Werte der dimensionslosen Latentwärme finden wir dicke Dampffilme (vgl.  $\eta = 3$ ). Dies ist physikalisch plausibel, indem man für große Latentwärme eine geringe Dampferzeugung erwartet, was letztendlich zu dünnen Dampffilmen führen muß. Wir finden für die Strömung im wesentlichen ein Abströmen des Dampffilms nach oben mit etwa parabolischem Geschwindigkeitsprofil. Die Amplitude der Geschwindigkeit wächst mit der Dicke des Dampffilms. In der Flüssigkeit erkennen wir in

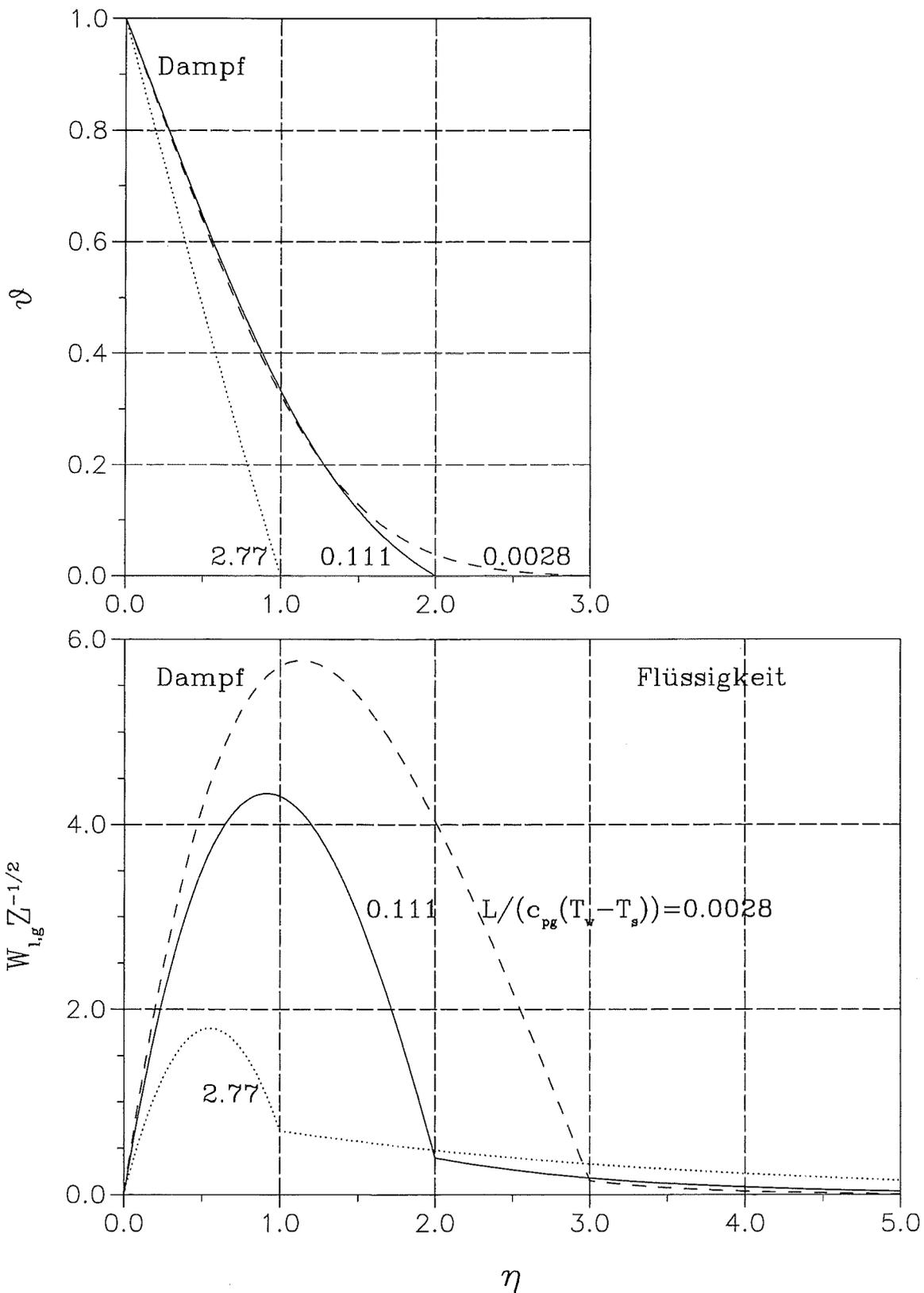


Abbildung 36: Profile der Temperatur  $\vartheta$  und der Vertikalgeschwindigkeiten  $W_g$ ,  $W_l$  für drei Dicken des Dampffilms  $\eta_H = 1, 2, 3$ . Die Parameter sind  $Pr = 1$ ,  $\nu_g/\nu_l = 0.5$ ,  $\rho_g/\rho_l = 0.1$ ,  $Fr = 0.25$ .

allen Fällen eine Zone, welche infolge der Dampfbewegung gleichfalls nach oben mitgezogen wird. Diese Aufwärtsströmung im Flüssigkeitsgebiet klingt für große Werte von  $\eta$  (im Außenfeld) ab. An der Dampf/Flüssigkeits-Grenzfläche sind Dampf- und Flüssigkeitsgeschwindigkeiten gleich und ein prägnanter Knick der Kurven tritt auf als Folge unterschiedlicher Viskositäten in beiden Gebieten. Die Temperatur fällt stets von  $\vartheta = 1$  an der Wand auf  $\vartheta = 0$  an der Dampf/Flüssigkeits-Grenzfläche ab. Bei dünnem Dampffilm geschieht dies näherungsweise linear, d.h. der Wärmetransport ist durch Wärmeleitung bestimmt. Für große Werte von  $\eta_H$  zeigt das  $\vartheta$ -Profil hingegen deutlich nichtlineares Verhalten. Somit ist in diesem Fall der konvektive Wärmetransport maßgeblich. Die eingetragenen Ziffern an den einzelnen Kurven stellen im übrigen stets den Wert der dimensionslosen Latentwärme, d.h.  $L/(c_{pg}(T_W - T_S))$ , dar.

Haben wir nun die numerischen Resultate für die Funktionen  $f(\eta)$ ,  $F(\eta)$  und  $\vartheta(\eta)$  vorliegen, so können wir uns einfach die physikalischen Größen wie Geschwindigkeiten, Temperatur, Wärmeströme, etc. verschaffen, indem wir unsere Ansätze wieder einsetzen. Wollen wir beispielsweise das Geschwindigkeitsprofil des Dampffilms berechnen, so erhalten wir

$$w_g = w_0 W_g = -w_0 \Psi_X \quad .$$

Wir verwenden die Ähnlichkeitsansätze für  $\Psi_X$  und erhalten

$$w_g = -w_0 C_1 C_2 Z^{1/2} f_\eta \quad ,$$

bzw. eingesetzt

$$w_g = -\sqrt{4 \frac{\Delta \varrho}{\varrho_g} g (l_0 Z)^{1/2}} f_\eta \quad .$$

Hier wird unmittelbar ersichtlich, daß das Ergebnis für  $w_g$  weder von der Skalierungslänge  $l_0$  noch von der Skalierungsgeschwindigkeit  $w_0$  abhängt, indem lediglich die Kombination  $l_0 Z = z$  auftaucht. Dies ist zunächst ein überraschendes Ergebnis. Wir haben bis zu diesem Punkt keinerlei Aussagen zu  $w_0$  oder  $l_0$  gemacht. Streng genommen müssen wir mit  $l_0$  und  $w_0$  lediglich die Größenordnungsbeziehungen

$$Re^{-1/2} = \sqrt{\frac{\nu_g}{w_0 l_0}} = \epsilon \ll 1 \quad ,$$

$$Fr = \frac{w_0^2}{g l_0} = O(1)$$

einhalten.

Wir bekommen demzufolge Ergebnisse für die physikalischen Größen ohne unsere Skalierung festzulegen. Dies hängt damit zusammen, daß in unserem Problem weder eine charakteristische Länge noch eine charakteristische Geschwindigkeit existiert. Dies ist eine Eigenschaft, welche man häufig bei Verwendung der Grenzschichtapproximation hat. Unser Ausdruck für die Geschwindigkeit  $w_g$  beinhaltet allerdings eine Geschwindigkeitsamplitude. Setzen wir voraus, daß stets  $f_\eta = O(1)$  gilt, so kann der Rest der rechten Seite als Geschwindigkeit aufgefaßt werden, d.h.

$$\hat{w} = \sqrt{4 \frac{\Delta \varrho}{\varrho_g} g z} \quad .$$

Diese Amplitude der Geschwindigkeit hängt nun offensichtlich von  $z$  ab und stellt deswegen keine geeignete Skalierungsgeschwindigkeit dar. Man findet in der Literatur trotzdem häufig die Länge  $z$  und die oben angegebene Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{w}$  als Skalierungsgrößen verwandt. Dies führt dann beispielsweise zu Kennzahlen, welche von  $z$  anhängen - ein etwas unglücklicher Umstand. Wir werden deshalb hier keine Festlegung für  $l_0$ ,  $w_0$  treffen, schlagen aber vor, gegebenenfalls einen typischen aber festen Abstand  $z$  bzw. die dazugehörige Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{w}$ , gemäß obiger Gleichung, zu wählen.

Wir fahren fort, indem wir uns einige praxisrelevanten Größen verschaffen. Die erste Frage die es in einem solchen Problem zu beantworten gilt ist naturgemäß die Frage nach dem Wandwärmestrom. Dieser kann aus dem Temperaturgradienten an der Wand, bei Verwendung des Fourier-Ansatzes gemäß

$$\dot{q}_W = -\lambda_g T_x(x=0)$$

berechnet werden. Wir führen unsere Skalierungen und Ähnlichkeitsansätze ein und erhalten

$$\dot{q}_W = -\lambda_g (T_W - T_S) \left\{ \frac{\Delta \varrho g}{4 \varrho_g \nu_g^2 (l_0 Z)} \right\}^{1/4} \vartheta_\eta(0) \quad .$$

Eine weitere wichtige Information stellt der Anteil der Wärme dar, welcher letztendlich in Verdampfung umgesetzt wird. Die zugeführte Wärme an der Wand wird ja einerseits durch die Dampfströmung nach oben heraustransportiert. Andererseits wird ein Teil der Wärme an der Dampf/Flüssigkeits-Grenzfläche ankommen und dort zur Dampferzeugung verbraucht. Der Anteil des Verdampfungswärmestroms kann deshalb gemäß

$$\frac{\dot{q}(x=h)}{\dot{q}_W} = \frac{\vartheta_\eta(\eta_H)}{\vartheta_\eta(0)}$$

direkt aus unseren dimensionslosen Temperaturgradienten berechnet werden, indem sich die Vorfaktoren aus der Skalierung sofort herausheben. Wir wollen uns schließlich noch den Dampfmassenstrom verschaffen. Dieser kann sicherlich aus einem Integral über den Dampffilm gemäß

$$\dot{M}_g = \int_0^h \rho_g w \, dx$$

berechnet werden. Bringen wir wiederum unsere Skalierung und die Ähnlichkeitsansätze ein, so erhalten wir

$$\dot{M}_g = (\nu_g^2 \Delta \rho g)^{1/4} (4 \rho_g (l_0 Z))^{3/4} f(\eta_H) \quad .$$

Der Dampfmassenstrom  $\dot{M}_g$  hat hier im übrigen die Dimension  $[kg/(ms)]$ , wie man leicht anhand der Definition überprüfen kann. Dies ist eine Folge der zweidimensionalen Behandlung, wodurch alle Größen stets auf die Einheitstiefe (in  $y$ ) bezogen werden.

Wir wollen abschließend noch die typischen Abhängigkeiten unseres Dampffilms in  $z$  diskutieren. Die Dampf/Flüssigkeits-Grenzfläche liegt bei  $\eta = \eta_H = \textit{konstant}$ . Wegen  $\eta = C_1 X Z^{-1/4}$  liegt unsere Grenzfläche demnach bei

$$X = H = \frac{\eta_H}{C_1} Z^{1/4} \quad ,$$

bzw. in dimensionsbehafteter Form

$$h = \eta_H \left\{ 4 \frac{\rho_g \nu_g^2}{\Delta \rho g} \right\}^{1/4} (l_0 Z)^{1/4} \quad .$$

Die Abhängigkeiten der betrachteten physikalischen Größen von  $z$  lassen sich demgemäß zusammenfassen als

$$\begin{aligned} h &\sim z^{1/4} \quad , \\ w_g &\sim z^{1/2} \quad , \\ \dot{q}_w &\sim z^{-1/4} \quad , \\ \dot{M}_g &\sim z^{3/4} \quad . \end{aligned}$$

Somit wächst die Dicke des Dampffilms mit wachsendem  $z$  an, gleiches gilt für die Vertikalgeschwindigkeit des Dampfes. Der Wandwärmestrom hingegen nimmt mit  $z$  ab. Dies ist eine Folge des anwachsenden Dampffilms, welcher den entscheidenden Wärmewiderstand darstellt. Dieser Effekt kann offensichtlich auch durch erhöhte Geschwindigkeiten im Dampffilm nicht kompensiert werden. Erwartungsgemäß nimmt auch der Dampfmassenstrom in  $z$  zu.

Einen letzten Gesichtspunkt bezüglich der typischen Abhängigkeiten sollten wir hier nicht außer Acht lassen. Wir haben oben einige wichtige physikalische Größen im Problem mit Hilfe der numerisch gewonnenen Formfunktionen  $f(\eta)$ ,  $F(\eta)$ ,  $\vartheta(\eta)$  ausgedrückt. Hierbei treten vor den Formfunktionen stets noch Abhängigkeiten von den Stoffeigenschaften etc. als Vorfaktoren auf. Einen Großteil der Abhängigkeiten können wir bereits, wie am Beispiel von  $z$  gezeigt, den Vorfaktoren entnehmen ohne die Lösungen für die Formfunktionen zu kennen.

## 4.2 Die gerichtete Erstarrung einer Legierung

Wir wollen zum Abschluß der Vorlesung ein Problem behandeln, welches eine durch Erstarrung auftretende freie Grenzfläche beinhaltet. Häufig ist es ausreichend eine solche l/s-Grenzfläche auf der Isotherme der Schmelztemperatur zu modellieren. Dies ist insbesondere dann zulässig, wenn die Latentwärme wegen relativ geringer Erstarrungsgeschwindigkeiten vernachlässigt werden kann. Die freigesetzte Latentwärme ist allerdings im allgemeinen zu berücksichtigen. Bei näherer Betrachtung stellt auch die Festlegung der Schmelztemperatur häufig ein nicht triviales Problem dar. Die Schmelztemperatur hängt nämlich empfindlich von der Zusammensetzung der Schmelze ab und desweiteren auch von der geometrischen Form der l/s-Grenzfläche. Diese Besonderheiten an Erstarrungsfronten wollen wir nun näher kennenlernen. Hierzu suchen wir uns ein Problem aus, in welchem das Strömungs- und Temperaturfeld von außen aufgeprägt wird. Wir müssen diese Größen deshalb nicht mühsam aus den Differentialgleichungen und Randbedingungen berechnen und können uns auf die erstarrungsspezifischen Fragen konzentrieren. Ein solches Problem stellt die sogenannte gerichtete Erstarrung dar, welche wir zweidimensional und für eine einfache, binäre Legierung betrachten wollen.

### 4.2.1 Grundlösung

Wir stellen uns vor, daß wir zwei große Kupferplatten in der  $x$ - $z$ -Ebene bei einem kleinen Abstand parallel arrangieren. In den so gebildeten dünnen Spalt füllen wir die flüssige Legierung von oben ein und prägen den Platten, und damit auch der Legierung, einen linearen Temperaturverlauf in  $z$  auf, wie er in Abbildung 37 skizziert ist. Aufgrund der linearen Temperaturabsenkung von oben nach unten wird sich bei  $h(x, t)$  eine l/s-Grenzfläche ausbilden, die gerade auf  $T_S$  liegt. Im nächsten

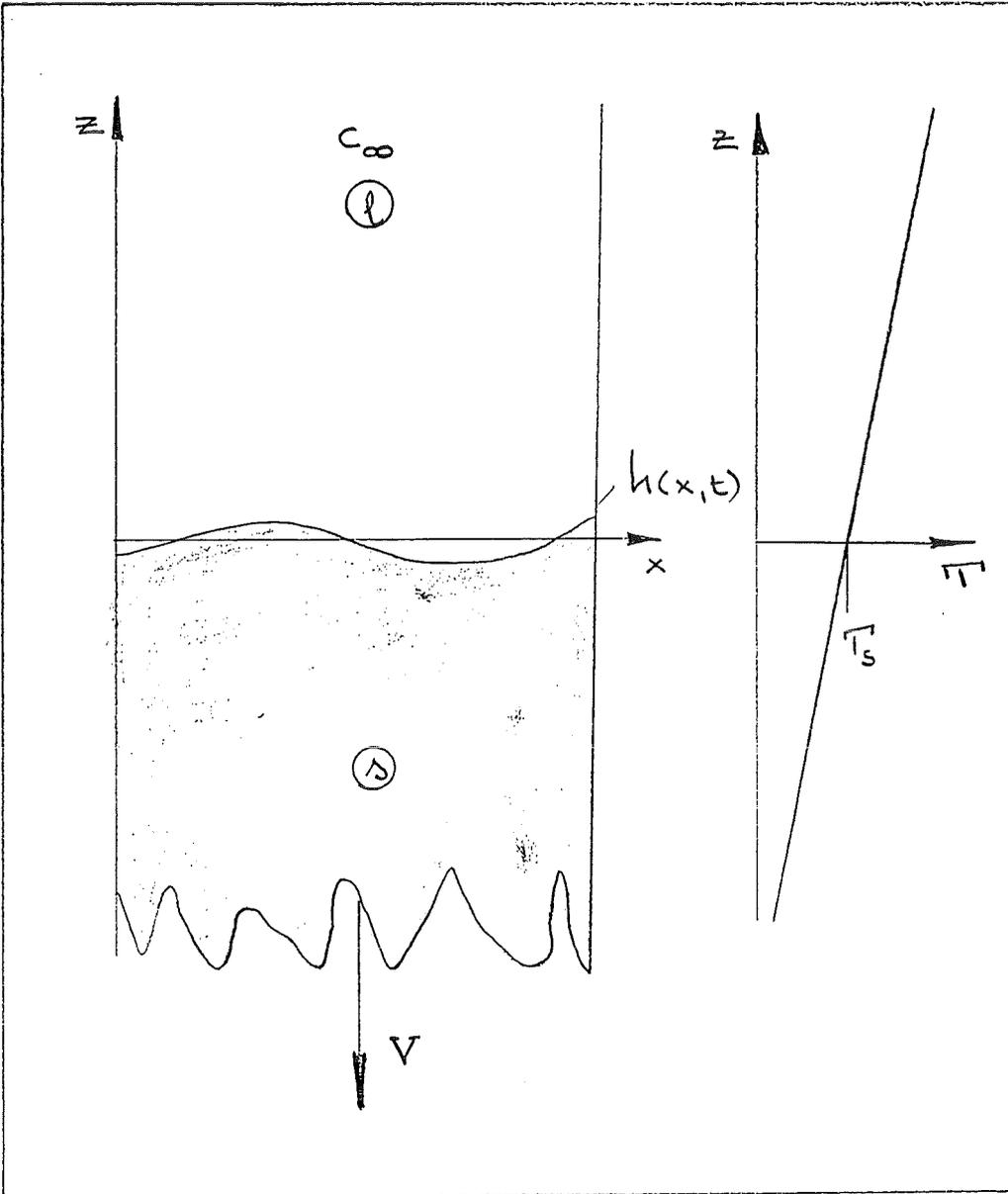


Abbildung 37: Problemskizze zur gerichteten Erstarrung

Schritt beginnen wir den unten liegenden erstarrten Teil mit konstanter Geschwindigkeit  $V$  herauszuziehen, während wir von oben stets Schmelze nachfüllen. Aufgrund des aufgeprägten Temperaturprofils wird sicherlich eine l/s-Grenzfläche erhalten bleiben, welche aber mit der Geschwindigkeit  $V$  relativ zur Schmelze voranschreitet. Offensichtlich ist dieses Geschwindigkeitsfeld von außen vorgegeben. Dieses Problem stellt ein prototypisches Erstarrungsproblem dar, dessen umfassende Darstellung wir beispielsweise bei Davis (1990) finden.

Wir haben bei der Beschreibung des Problems bereits einige implizite Annahmen gemacht, welche wir uns hier verdeutlichen wollen. Die Vorgabe eines linearen Temperaturprofils von außen

$$T = T_{ref} + G \cdot z$$

wird sicherlich nur näherungsweise möglich sein, wenn die Wärmeleitfähigkeiten in der Schmelze und im Festkörper etwa gleich sind ( $\lambda_l \approx \lambda_s$ ) und wenn die freigesetzte Latentwärme relativ klein, bzw. der Spalt relativ eng ist. Weiterhin haben wir angenommen, daß das Geschwindigkeitsfeld durch  $\vec{v} = (0, -V)$  gegeben ist. Dies ist nur möglich, wenn gilt  $\rho_l = \rho_s$ , d.h. es tritt keine Volumenänderung bei der Erstarrung auf. Unsere Schmelze habe im übrigen die Anfangskonzentration  $c_\infty$ , welche klein sein soll. Dies wäre beispielsweise die Kohlenstoffkonzentration in einer Eisenschmelze. Typischerweise ist im Festkörper die Konzentration eingefroren, d.h. hier findet kein Transport des Kohlenstoffs mehr statt. In der Schmelze hingegen ist sowohl durch die Strömung als auch durch Diffusion ein Transport des Kohlenstoffs möglich. Der Transport eines gelösten Stoffes funktioniert hierbei exakt nach den gleichen Mechanismen wie der Transport der Wärme. Wir können also analog zur Wärmetransportgleichung, im Schmelzbereich die Transportgleichung

$$c_t - V c_z = D(c_{xx} + c_{zz})$$

für die Konzentration  $c(x, z, t)$  formulieren.  $D$  stellt (analog zu  $\kappa$ ) einen Diffusionskoeffizienten dar. Das aktuelle, vorgegebene Geschwindigkeitsfeld ist bereits berücksichtigt.

Wir wollen uns nun, bevor wir die zugehörigen Randbedingungen formulieren, das Phasendiagramm einer einfachen binären Legierung in Erinnerung rufen. In Abbildung 38 ist ein solches Diagramm im Bereich kleiner Konzentrationen  $c_\infty$  gegeben. Dort ist es sicherlich zulässig die Liquidus-Linie und die Solidus-Linie als Geraden

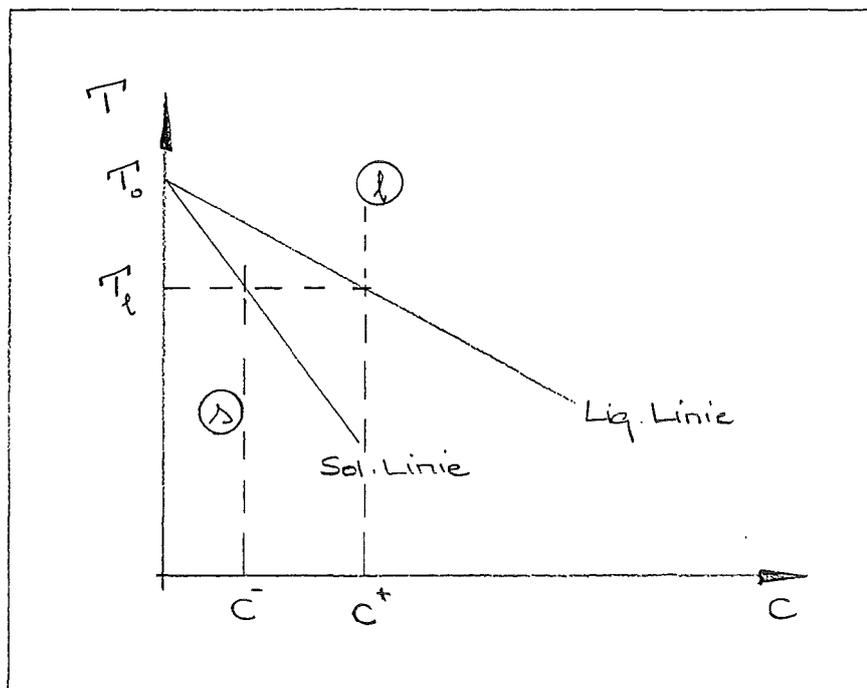


Abbildung 38: Typisches Phasendiagramm einer binären Legierung (linearisiert für kleine  $c$ )

anzunähern. Kühlen wir nun eine Legierung mit der Anfangskonzentration  $c_\infty$  ab, so wird sich bei Erreichen der Liquidustemperatur  $T_l = T_0 - m \cdot c^+$  erstmalig Erstarrung zeigen. Wir frieren dann Festkörper mit der niedrigen Konzentration  $c^-$  aus, welche durch die Soliduslinie gegeben ist. In der obigen Gleichung ist  $T_0$  die Schmelztemperatur des reinen Stoffes ( $c = 0$ ) und  $m$  die Steigung der Liquidus-Linie. Wir führen an dieser Stelle noch den Segregationskoeffizienten  $k = c^-/c^+$  ein, durch welchen die Solidus-Linie festgelegt ist. Das Phasendiagramm, in der hier gegebenen linearen Annäherung, ist damit vollständig durch die Größen  $m$  und  $k$  festgelegt. Zwei wesentliche Konsequenzen können wir Abbildung 38 entnehmen: 1.) Die Schmelztemperatur an der l/s-Grenzfläche wird durch die Konzentration  $c^+$  auf der Schmelzenseite beeinflusst. Im Regelfall fällt sie mit wachsender Konzentration  $c^+$  - dies wird als konstitutionelle Unterkühlung bezeichnet. 2.) An der l/s-Grenzfläche kommt es zu einem Konzentrationsprung  $\Delta c = (c^+ - c^-)$ , da auf der Festkörperseite lediglich die Konzentration  $c^-$  eingebaut werden kann. Somit muß der gelöste Stoff an einer fortschreitenden l/s-Grenzfläche freigesetzt werden. Der freigesetzte Stoffstrom kann hierbei nur durch Diffusion in der flüssigen Schmelze abtransportiert werden. Die Vorgabe eines Stoffstroms an der Phasengrenze stellt demnach (völlig analog zur Vorgabe eines Wärmestroms) unsere Randbedingung dar. Wir haben zusammenfas-

send für die Konzentration deshalb die Randbedingungen

$$\begin{aligned} z = h(x, t) : \quad & (c^+ - c^-)(V + h_t) = -D \frac{\partial c}{\partial \vec{n}} \approx -D(c_z^+ - c_x^+ h_x) \quad , \\ z \rightarrow +\infty : \quad & c \rightarrow c_\infty \quad . \end{aligned}$$

In der Tat haben wir mit diesen Randbedingungen und der obigen Transportgleichung unser Konzentrationsfeld festgelegt. Offen bleibt jedoch die Frage, wo wir die l/s-Grenzfläche finden.  $h(x, t)$  bleibt also zunächst unbekannt. Wir wissen lediglich, daß auf  $h(x, t)$  die 'wahre' Schmelztemperatur  $T_S$  zu finden ist. Es zeigt sich nun, daß  $T_S$  nicht nur von der lokalen Konzentration, sondern auch von der Krümmung der Grenzfläche abhängt. Dieser Zusammenhang hat eine gewisse Analogie zum Drucksprung über eine gekrümmte l/g-Grenzfläche. Im vorliegenden Fall hat die sogenannte Gibbs-Thompson Gleichung Gültigkeit, welche die Schmelztemperatur an einer gekrümmten l/s-Grenzfläche gemäß

$$z = h(x, t) : \quad T_S = T_l \left(1 + \frac{\gamma}{L} 2H\right) = (T_0 - mc^+) \left(1 + \frac{\gamma}{L} 2H\right)$$

als Funktion der mittleren Krümmung  $2H$  ausdrückt. Dieser Effekt wird auch als kapillare Unterkühlung bezeichnet.  $\gamma$  bezeichnet hier die Grenzflächenenergie,  $L$  die Latentwärme und die mittlere Krümmung kann gemäß

$$2H = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}$$

aus  $h(x, t)$  berechnet werden. Wie Abbildung 39 verdeutlicht, führt dieser Effekt dazu, daß Grenzflächen, welche konkav zum Festkörper gekrümmt sind, lokal eine niedrige Schmelztemperatur  $T_S$  aufweisen.

Unser Problem ist nun vollständig formuliert. Wir wollen zunächst überprüfen, ob eine ebene und stationäre Lösung für  $h(x, t)$  existiert. Der einfachen Beschreibung wegen legen wir unser Koordinatensystem genau in die l/s-Grenzfläche. Die ebene, stationäre Lösung liegt dann bei  $h_0 = 0$ . Die Differentialgleichungen und Randbedingungen vereinfachen sich somit zu

$$\begin{aligned} -Vc_z &= Dc_{zz} \quad , \\ z = 0 : \quad & (c^+ - c^-)V = -Dc_z^+ \quad , \\ & c = c^+ \quad , \\ z \rightarrow +\infty : \quad & c \rightarrow c_\infty \quad . \end{aligned}$$

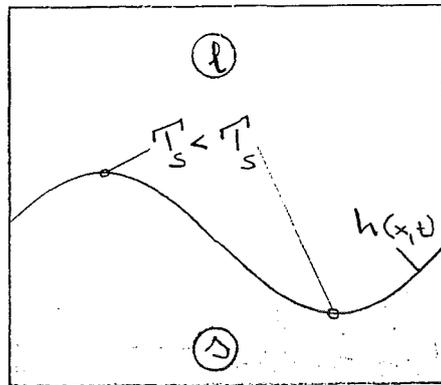


Abbildung 39: Auswirkungen der kapillaren Unterkühlung (Gibbs-Thompson Effekt)

Dieses System können wir offensichtlich leicht einer Lösung zuführen. Die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom ( $\lambda$  bezeichnet hier die charakteristischen Exponenten)

$$\lambda^2 + \frac{v}{D}\lambda = 0$$

und somit die allgemeine Lösung

$$c(z) = C_1 + C_2 e^{-\frac{v}{D}z} .$$

Die Anpassung der Konstanten an die Randbedingungen führt schließlich zur Lösung

$$c(z) = c_\infty \left\{ 1 + \frac{(1-k)}{k} e^{-\frac{v}{D}z} \right\} .$$

Hier wurde bereits von der Beziehung  $(c^+ - c^-) = c^+(1 - k)$  Gebrauch gemacht. Die Lösung für  $c(z)$  ist in Abbildung 40 dargestellt. Wir erkennen in der Schmelze einen exponentiellen Abfall von  $c$  beginnend an der l/s-Grenzfläche bis auf die Ausgangskonzentration  $c_\infty$ . Im Festkörper ist selbstredend die Konzentration  $c^-$  präsent.

Wir haben somit eine ebene, stationäre Grundlösung  $h_0 = 0$ , welche ein Konzentrationsprofil entsprechend Abbildung 40 zeigt. Dies stellt sich ein, aufgrund der Tatsache, daß gerade an der Grenzfläche der gelöste Stoff freigesetzt wird und durch Diffusion in die Schmelze abtransportiert werden muß.

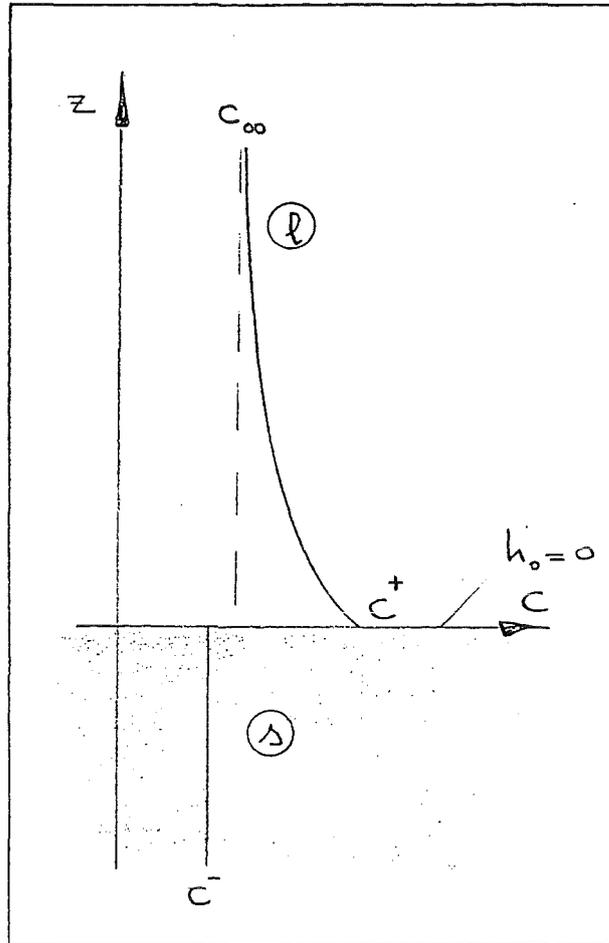


Abbildung 40: Konzentrationsprofil bei der Grundlösung der gerichteten Erstarrung

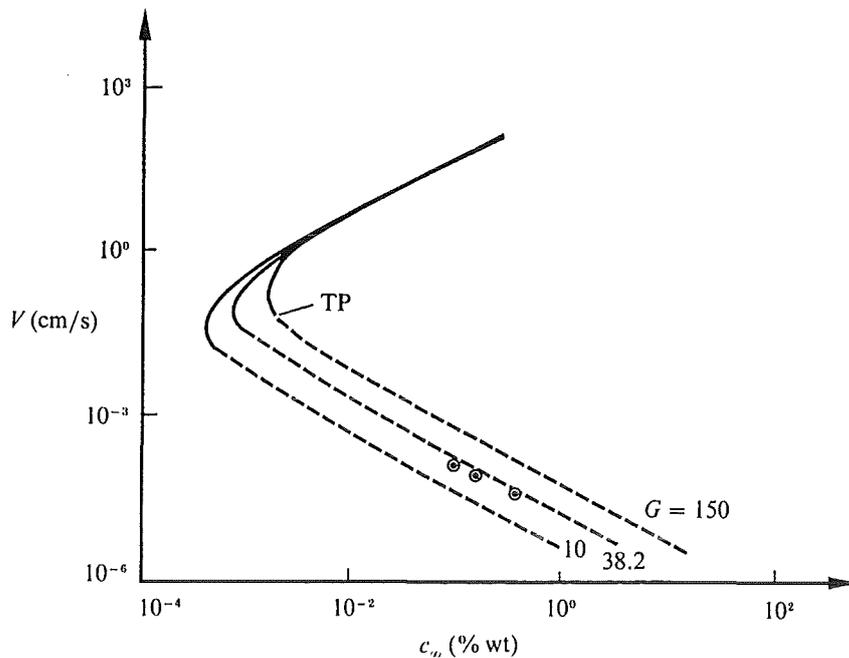


Abbildung 41: Grenzkurven der Neutralstabilität im SCN-A System nach Davis (1990)

#### 4.2.2 Stabilität der Grundlösung

Wir wollen nun diskutieren, ob diese Lösung erhalten bleibt, wenn Störungen am System präsent sind. Die Mechanismen wollen wir hier zunächst qualitativ diskutieren. Wir stellen uns hierzu vor, daß die zunächst ebene Grundlösung an einer Stelle durch eine Störung in Richtung der Schmelze ausgelenkt wird. Aufgrund des angelegten Temperaturprofils sieht die ausgelenkte Front dann an ihrer Spitze eine höhere Temperatur. Sie wird folglich wieder aufschmelzen - der Temperaturgradient stabilisiert folglich. Die Störung ist weiterhin so gekrümmt, daß an ihrer Spitze lokal eine niedrigere Schmelztemperatur herrscht. Somit schmilzt die Spitze der Störung wieder auf - der Kapillareffekt stabilisiert gleichfalls. Hingegen sieht die ausgelenkte Spitze aufgrund des Konzentrationsprofils eine niedrigere Konzentration. Dies führt gemäß dem Phasendiagramm 38 zu einer erhöhten Schmelztemperatur. Die Störung kann deshalb weiter wachsen - das Konzentrationsfeld ist demnach destabilisierend!

In der Tat findet man mit Hilfe einer Störungsrechnung, daß die ebene  $l/s$ -Grenzfläche instabil sein kann gegenüber periodischen Störungen (in  $x$ ). Wir wollen diese Stabilitätsanalyse hier nicht ausführen, die Vorgehensweise gestaltet sich ähnlich wie

bei den Problemen in Abschnitt 3.2.2 oder 3.3.1. Wir wollen allerdings das Ergebnis angeben und diskutieren, weil es von zentraler Bedeutung für Kristallzucht- und Gießprozesse ist. Die Grenzkurve der Stabilität ist in Abbildung 41 gegeben. Auf den Achsen ist die Ausgangskonzentration  $c_\infty$  der Schmelze sowie die Ziehgeschwindigkeit  $V$  aufgetragen. Als Kurvenparameter findet sich der Temperaturgradient  $G$ . Betrachten wir beispielsweise die Ausgangskonzentration  $c_\infty = 10^{-2}$ , so finden wir für kleine  $V$  zunächst eine stabile, ebene Erstarrungsfront. Bei Erhöhung der Ziehgeschwindigkeit  $V$  durchtreten wir, abhängig von  $G$ , die (gestrichelte) Grenzkurve der Stabilität. Wir finden dort periodisch gestörte, d.h. zellulare oder gar dendritische Erstarrung. Die weitere Steigerung von  $V$  führt uns dann wieder in einen stabilen Bereich. Dort, bei sog. überkritischen  $V$ , wird wieder eine ebene Erstarrung erwartet. Man beachte hierbei die logarithmische Teilung der Achse. Erstarrungsgeschwindigkeiten oberhalb des instabilen Bereichs treten in technischen Prozessen selten auf.

Die hier beschriebene Destabilisierung bei Erhöhung von  $V$  kann physikalisch einfach durch die Aufsteilung des Konzentrationsprofils erklärt werden, welches als Folge großer  $V$  auftritt. Dies können wir sofort aus dem Konzentrationsprofil ableiten, aus welchem

$$c_z = -c_\infty \frac{V(1-k)}{Dk} e^{-\frac{V}{D}z}$$

für den Gradienten folgt. Der Konzentrationsgradient aber war es, welcher destabilisierend wirkt. Bewegen wir uns im übrigen zu höheren Konzentrationen, so tritt gleichfalls destabilisierendes Verhalten auf, indem der Verlust der Stabilität der ebenen Erstarrung bereits bei kleineren  $V$  auftritt (vgl. schraffierte Äste). Das Diagramm zeigt weiterhin den stabilisierenden Einfluß des Temperaturgradienten auf. Für große Werte  $G$  tritt die instabile Erstarrungsfront erst bei größeren  $V$  auf. Für extrem kleine Konzentrationen  $c_\infty$  findet sich keine Stabilitätsgrenze, d.h. hier findet man ebene Erstarrung. Auch dieser Bereich ist technisch nur schwer zugänglich, da dies die Herstellung extrem reiner Schmelzen erfordert. Im übrigen findet man in Abbildung 41 drei Datenpunkte, welche die Stabilitätskurve für  $G = 38.2$  bestätigen. Das betrachtete Stoffsystem ist im übrigen eine transparente Bernsteinsäure-Dinitril/Azeton-Legierung, welche ein identisches Phasendiagramm wie die Eisen/Kohlenstoff-Legierung besitzt. Aufgrund dieser Eigenschaften ist dieses Stoffsystem äußerst sorgfältig in der Literatur untersucht worden.

## 5 Literatur

- I.N. Bronstein & K.A. Semendjajew (1984)** Taschenbuch der Mathematik, 21. Auflage, Verlag Harry Deutsch ;
- S. Chandrasekhar (1961)** Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press ;
- S.H. Davis (1990)** 'Hydrodynamic interactions in directional solidification', Journal of Fluid Mech., 212, 241 ff. ;
- P. Ehrhard & S.H. Davis (1991)** 'Non-isothermal spreading of liquid drops on horizontal plates', Journal of Fluid Mech., 229, 365 ff. ;
- E.F. Goedde & M.C. Yuen (1970)** 'Experiments on liquid jet instability', Journal of Fluid Mech., 40, 495 ff. ;
- H.H. Huppert (1982)** 'The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface', Journal of Fluid Mech., 121, 43 ff. ;
- J.C.Y. Koh (1962)** 'Analysis of film boiling on vertical surfaces', J. Heat Transfer, Transact. ASME, 84, 55 ff. ;
- J. Mitrovic (1995)** 'Kontur kapillarer Flüssigkeitsstrahlen', Brennstoff, Wärme, Kraft, 47, 421 ff. ;
- Lord Rayleigh (1879)** 'On the instability of jets', Proc. London Math. Soc., 10, 4 ff. ;
- H. Schlichting (1982)** Grenzschichttheorie, 8. Auflage, Verlag G. Braun Karlsruhe ;
- C. Weber (1931)** 'Zum Zerfall eines Flüssigkeitstrahles', ZAMM 11, 136 ff. ;
- J. Zierep (1993)** Grundzüge der Strömungslehre, 5. Auflage, Springer Verlag Berlin, Heidelberg .

## 6 Anhang

### 6.1 Numerische Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen des Filmsiede-Problems an der vertikalen Wand (vgl. 4.1)

Wir wollen zunächst die Differentialgleichungen, Rand- und Übergangsbedingungen des Problems, welche in Abschnitt 4.1 abgeleitet sind, nochmals zusammenstellen. Mit wachsendem  $\eta$  haben wir:

$$\begin{aligned}
 \eta = 0 : \quad & f = 0 \quad , \\
 & f_\eta = 0 \quad , \\
 & \vartheta = 1 \quad ; \\
 0 < \eta < \eta_H : \quad & f_{\eta\eta\eta} = -2f_\eta^2 + 3ff_{\eta\eta} + 1 \quad , \\
 & \vartheta_{\eta\eta} = 3Pr f\vartheta_\eta \quad ; \\
 \eta = \eta_H : \quad & \frac{\nu_g}{\nu_l} f = F \quad , \\
 & \frac{\nu_g}{\nu_l} f_\eta = F_\eta \quad , \\
 & \frac{\nu_g^2 \rho_g}{\nu_l^2 \rho_l} f_{\eta\eta} = F_{\eta\eta} \quad , \\
 & \vartheta = 0 \quad , \\
 & \vartheta_\eta = -Pr \frac{3L}{c_{pg}(T_W - T_S)} f \quad ; \\
 \eta_H < \eta < \infty : \quad & F_{\eta\eta\eta} = -2F_\eta^2 + 3FF_{\eta\eta} \quad ; \\
 \eta \rightarrow \infty : \quad & F \rightarrow 0 \quad , \\
 & F_\eta \rightarrow 0 \quad .
 \end{aligned}$$

In mathematischen Programmbibliotheken findet sich in der Regel eine Vielzahl von Routinen, welche ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, unter Anwendung verschiedenster Integrationsalgorithmen, integrieren können. Ausgangspunkt ist im Regelfall die Formulierung

$$\dot{\vec{y}} = f(\vec{y}) \quad ,$$

d.h. ein System von  $n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung. In der Tat ist es generell möglich, durch geeignete Substitutionen, eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in

$n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung zu überführen. Wir verwenden hierzu beispielsweise die folgenden Substitutionen (der Punkt bezeichnet die Ableitungen nach  $\eta$ ):

$$\begin{aligned}
 g: \quad y_1 &= f_{\eta\eta} \quad , \\
 y_2 &= f_\eta \quad \rightarrow \quad \dot{y}_2 = f_{\eta\eta} = y_1 \quad , \\
 y_3 &= f \quad \rightarrow \quad \dot{y}_3 = f_\eta = y_2 \quad , \\
 y_4 &= \vartheta_\eta \quad , \\
 y_5 &= \vartheta \quad \rightarrow \quad \dot{y}_5 = \vartheta_\eta = y_4 \quad ; \\
 l: \quad z_1 &= F_{\eta\eta} \quad , \\
 z_2 &= F_\eta \quad \rightarrow \quad \dot{z}_2 = F_{\eta\eta} = z_1 \quad , \\
 z_3 &= F \quad \rightarrow \quad \dot{z}_3 = F_\eta = z_2 \quad .
 \end{aligned}$$

Somit können wir sofort unser System von Differentialgleichungen in den Komponenten der Vektoren  $\vec{y}$  und  $\vec{z}$  umformulieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \eta = 0: \quad y_1 &= ? \quad , \\
 y_2 &= 0 \quad , \\
 y_3 &= 0 \quad , \\
 y_4 &= ? \quad , \\
 y_5 &= 1 \quad ; \\
 0 \leq \eta \leq \eta_H: \quad \dot{y}_1 &= -2y_2^2 + 3y_3y_1 + 1 \quad , \\
 \dot{y}_2 &= y_1 \quad , \\
 \dot{y}_3 &= y_2 \quad , \\
 \dot{y}_4 &= 3Pr y_3y_4 \quad , \\
 \dot{y}_5 &= y_4 \quad ; \\
 \eta = \eta_H: \quad \frac{\nu_g^2 \rho_g}{\nu_l^2 \rho_l} y_1 &= z_1 \quad , \\
 \frac{\nu_g}{\nu_l} y_2 &= z_2 \quad , \\
 \frac{\nu_g}{\nu_l} y_3 &= z_3 \quad , \\
 y_4 &= -Pr \frac{3L}{c_{pg}(T_W - T_S)} y_3 \quad ; \\
 y_5 &= 0 \quad ; \\
 \eta_H \leq \eta \leq \infty: \quad \dot{z}_1 &= -2z_2^2 + 3z_3z_1 \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{z}_2 = z_1 \quad , \\
& \dot{z}_3 = z_2 \quad , \\
\eta \rightarrow \infty : & \quad z_1 \rightarrow ? \quad , \\
& \quad z_2 \rightarrow 0 \quad , \\
& \quad z_3 \rightarrow 0 \quad .
\end{aligned}$$

Wir haben offensichtlich durch die angegebenen Substitutionen unsere Differentialgleichungen im Dampfgebiet, d.h. die Impulsgleichung (3.Ordnung) und die Wärme­transportgleichung (2.Ordnung) in fünf Differentialgleichungen 1.Ordnung überführt, welche wir mit der Standard-Routine integrieren können. Im Flüssigkeitsgebiet hatten wir lediglich die Impulsgleichung (3.Ordnung), welche jetzt in drei Differentialgleichungen 1.Ordnung überführt ist. Wir wollen nun die Integration an der Wand bei  $\eta = 0$  starten und zunächst über den Dampffilm integrieren. Hierzu benötigen wir alle Werte  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  bei  $\eta = 0$  als Startwerte. Aus unseren Randbedingungen sind 3 dieser fünf Werte festgelegt, für  $y_1$  und  $y_4$  haben wir keinen Startwert abgeleitet. Physikalisch ist  $y_1$  proportional zur Wandschubspannung und  $y_4$  proportional zum Wandwärmestrom. Für diese beiden Größen geben wir zunächst einmal Schätzwerte an, welche sicherlich in der Größenordnung  $O(1)$  sein müssen. Nun führen wir die Integration bis  $\eta = \eta_H$  aus und erhalten hieraus den Ergebnisvektor  $\vec{y}$  bei  $\eta = \eta_H$ . Hier können wir nun sofort überprüfen, ob wir die Temperaturrandbedingung  $y_5 = 0$  erfüllen. In der Regel wird dies nicht der Fall sein, sodaß wir unseren Schätzwert für  $y_4$  modifizieren müssen. Diese Prozedur wiederholen wir bis die Temperaturrandbedingung bei  $\eta = \eta_H$  erfüllt ist.

Wir müssen nun in der Folge bei  $\eta = \eta_H$  den Ergebnisvektor  $\vec{y}$  mit Hilfe der Übergangsbedingungen in den Startvektor  $\vec{z}$  des Flüssigkeitsgebiets umrechnen. Dies ist sofort bei Verwendung des Dichte- und Viskositätsverhältnisses möglich. Mit diesem Startvektor  $\vec{z}(\eta = \eta_H)$  beginnen wir nun unsere Integration für wachsende Werte  $\eta$ . Die Randbedingungen sind für  $\eta \rightarrow \infty$  gegeben, sodaß wir numerisch etwa bis  $\eta = 50$  integrieren. Im Regelfall werden wir zunächst die Randbedingungen im Außenfeld, d.h.  $z_2, z_3 \rightarrow 0$ , nicht erfüllen. Wir müssen deshalb mit einem besseren Schätzwert für  $y_1$  an der Wand erneut die komplette Integration über beide Schichten wiederholen, bis letztendlich die Randbedingungen im Außenfeld erfüllt sind. Diese Strategie führt letztendlich zur Lösung, welche sich dadurch auszeichnet, daß sie die Randbedingungen alle erfüllt. Auf eine Besonderheit sollte hier noch hingewiesen werden. Die obige

Prozedur setzt voraus, daß wir  $\eta_H$ , d.h. die Dicke des Dampffilms, a priori kennen. Haben wir dann die Integration vollständig ausgeführt, so legt die Übergangsbedingung  $y_4 = -3Pr L/(c_{pg}(T_W - T_S))y_3$  den Wert des Parameters  $L/(c_{pg}(T_W - T_S))$ , d.h. der dimensionslosen Latentwärme, fest.

Wiederholen wir unsere Rechnung für verschiedene  $\eta_H$ , so ergibt sich jedoch ein klarer Zusammenhang  $\eta_H = f\{L/(c_{pg}(T_W - T_S))\}$ , sodaß wir bei Vorgabe der dimensionslosen Latentwärme auch umgekehrt die Dicke  $\eta_H$  des Dampffilms mit recht guter Genauigkeit schätzen können. Es ist jedoch rechentechnisch einfacher  $\eta_H$  zunächst fest vorzugeben.

Im folgenden ist ein Beispielprogramm in FORTRAN gelistet, welches den oben beschriebenen Integrations- und Schätzalgorithmus ausführt. Die Iteration für den Startwert von  $y_4$  (takt) ist hier bereits automatisiert implementiert, die Iteration des Startwertes von  $y_1$  (cakt) erfolgt manuell durch Neueingabe und Rücksprung am Programmende. Die eigentliche Integration erfolgt durch die Routine 'DC02AD', welche zweimal, für das Dampfgebiet und das Flüssigkeitsgebiet, aufgerufen wird. Die Parameterliste der Subroutine sei im folgenden kurz erläutert:

- neq: Anzahl der Differentialgleichungen 1. Ordnung (INTEGER\*4),
- etaakt: linke Integrationsgrenze für  $\eta$  (REAL\*8),
- etaend: rechte Integrationsgrenze für  $\eta$  (REAL\*8),
- y bzw. z: Feld der Dimension neq, welches die Variablen beinhaltet. Bei Aufruf müssen hier die Startwerte eingebracht werden (REAL\*8 DIMENSION(neq)),
- derivy bzw. derivz: Name der Subroutine, welche die Ableitungen berechnet,
- eps1, eps2: Genauigkeitsanforderungen (REAL\*8),
- npr: Anzahl der Stützpunkte im Integrationsgebiet, welche auf eine Datei geschrieben werden (INTEGER\*4),
- ip: logische Nummer der Ausgabedatei (INTEGER\*4).

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die gelisteten Subroutinen 'DERIVY' und 'DERIVZ' die eigentlichen Differentialgleichungen berechnen. Bei gegebenem Zustandsvektor  $\vec{y}$  bzw.  $\vec{z}$  muß jeweils im Feld  $F(\text{neq})$  die Ableitung  $\dot{\vec{y}}$  bzw.  $\dot{\vec{z}}$  zurückgegeben werden. In 'DERIVY' finden sich demgemäß die fünf Differentialgleichungen



```

c      cakt = -0.8312d00 for etah=2
      cakt = -0.9405d00
ccccccc dimensionless groups cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      write(6,1000) nygl,rogl,pr,fr
      pause
1000 format(' ***** Parameters: *****'/
1      ' * viscosity ratio (g/l):',g14.4,' [1] */'
1      ' * density ration (g/l) :',g14.4,' [1] */'
1      ' * Prandtl-number:      ',g14.4,' [1] */'
1      ' * Froude-number:      ',g14.4,' [1] */'
1      ' *****')
1001 format(5g16.6)
1004 format(2f14.8)
ccccccc writing plot description cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      open(unit=14,file='temp.gnu')
      rewind(unit=14)
      write(14,1003)
1003 format('plot "temp.1" with lines;'/
1      'pause -1;'/
1      'plot "temp.2" with lines;'/
1      'pause -1;'/
1      'plot "temp.3" with lines;'/
1      'pause -1;'/
1      'plot "temp.4" with lines;'/
1      'pause -1;'/
1      'exit;')
      close(unit=14)
ccccccc integrating gas momentum equation f(eta) and teta(eta) cccccccc
1  tmin = -5.d00
   tmax = 0.d00
2  takt = (tmin+tmax)/2.d00
   open(unit=14,file='kleinf.dat')
   ip   = 14
   npr  = 200

```

```

    neq = 5
    etaakt = 0.0d00
    etaend = etah
    eps1 = 1.d-06
    eps2 = 1.d-06
cccccc starting values for y(i) ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    y(1) = cakt
    y(2) = 0.d00
    y(3) = 0.d00
    y(4) = takt
    y(5) = 1.d00
ccc
    call dc02ad(neq,etaakt,etaend,y,deriv,eps1,eps2,npr,ip)
ccc
    if(neq.gt.0) goto 96
    print*, ' ***** ERROR *****: from DC02AD, IERR = ', neq
96 continue
    close(unit=14)
c    print*,y
    if(y(5).gt.0.d00) tmax=takt
    if(y(5).lt.0.d00) tmin=takt
    print*, 't-iteration:', takt,y(5)
    if(dabs(y(5)).gt.1.d-06) goto 2
    latent = y(4)/(y(3)*pr*3.d00)
    print*, 'dim.less latent heat of evaporation:', latent
cccccc integrating liquid momentum equation F(eta) ccccccccccccccccccc
    open(unit=14,file='grossf.dat')
    ip = 14
    npr = 200
    neq = 3
    etaakt = etah
    etaend = 50.d00
    eps1 = 1.d-08
    eps2 = 1.d-08

```

```

cccccc starting values for z(i) ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      z(1) = y(1)*nygl*nygl*rogl
      z(2) = y(2)*nygl
      z(3) = y(3)*nygl
ccc
      call dc02ad(neq,etaakt,etaend,z,derivz,eps1,eps2,npr,ip)
ccc
      if(neq.gt.0) goto 97
      print*, ' ***** ERROR *****: from DC02AD, IERR = ',neq
97 continue
c      print*,z
      close(unit=14)
cccccc fetching data from output file ccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      open(unit=13,file='kleinf.dat')
      open(unit=14,file='grossf.dat')
      open(unit=15,file='temp.1')
      open(unit=16,file='temp.2')
      open(unit=17,file='temp.3')
      open(unit=18,file='temp.4')
      do 50 k=1,200
          read (13,1001) eta,y1,y2,y3,y4
          read (13,1001) y5
          write(15,1004) eta,y2
          write(16,1004) eta,y5
          w = -1.*c1*c2*y2
          write(17,1004) eta,w
50 continue
      do 51 k=1,200
          read (14,1001) eta,z1,z2,z3
          write(18,1004) eta,z2
          w = -1.*c1*c3*z2
          write(17,1004) eta,w
51 continue
      close(unit=13)

```

```

close(unit=14)
close(unit=15)
close(unit=16)
close(unit=17)

cccccc plotting data using gnuplot ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
call system('gnuplot "temp.gnu"')
print*, ' cakt,takt:',cakt,takt
print*, ' enter new cakt:'
read(*,*) cakt
goto 1

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
stop

end

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
subroutine derivy(eta,y,f,neq)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc pe96 ccc
real*8 eta,y(neq),f(neq),alfa,pr
integer*4 neq
common/parameter/ pr
ccc
f(1) = -2.d00*y(2)*y(2) + 3.d00*y(3)*y(1) + 1.d00
f(2) = y(1)
f(3) = y(2)
f(4) = 3.d00*pr*y(3)*y(4)
f(5) = y(4)
ccc
return
end

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
subroutine derivz(eta,z,f,neq)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc pe96 ccc
real*8 eta,z(neq),f(neq),alfa

```

```
integer*4 neq
ccc
f(1) = -2.d00*z(2)*z(2) + 3.d00*z(3)*z(1)
f(2) = z(1)
f(3) = z(2)
ccc
return
end
```