



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5859

**Theoretische Untersuchungen
zum fernen, turbulenten
Nachlauf über einem beheizten
Zylinder**

U. Siegel, P. Ehrhard

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Dezember 1996

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5859

Theoretische Untersuchungen zum fernen, turbulenten Nachlauf über einem beheizten Zylinder

U. Siegel, P. Ehrhard

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1996

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

ISSN 0947-8620

Theoretische Untersuchungen zum fernen, turbulenten Nachlauf über einem beheizten Zylinder

Zusammenfassung

Es werden Lösungen für den turbulenten Nachlauf hinter einem schwach beheizten Zylinder gesucht. Wir gehen dabei von ähnlichen Lösungen für den reinen Nachlauf aus, wie sie von Schlichting, und Schmidt, veröffentlicht wurden. Der Zylinder wird entgegen dem Schwerfeld der Erde angeströmt. Wir betrachten das Problem zweidimensional und im zeitlichen Mittel stationär. Die Grenzschichtapproximation stellt hierbei die Basis unserer Berechnungen dar. Mit Hilfe asymptotischer Methoden wird dann eine Lösung abgeleitet, welche für den schwach beheizten Zylinder gültig ist.

Die erste Ordnung beinhaltet den zum einen linearisierten Nachlauf. Zum zweiten erhalten wir durch die eingebrachte Wärme ein Temperaturfeld, welches in dieser Näherung jedoch keine Auftriebskräfte bewirkt. Die Wärme wird folglich passiv durch die Strömung weitergetragen. Die zweite Ordnung beinhaltet dann Nichtlinearitäten des Impuls- und Wärmetransports.

Typische Merkmale, die den Nachlauf beschreiben, wie die kinematische und thermische Grenzschichtdicke für den reinen Nachlauf und Auftrieb, die Geschwindigkeits- und Temperaturamplituden auf der Symmetrieachse, werden durch Verändern von verschiedenen Parametern aufgezeigt.

Bei den Parametern handelt es sich um den Mischungsweg η_L , die REYNOLDS-Zahl Re und die GRASHOF-Zahl Gr .

Asymptotic theory for the far and turbulent wave above a weakly-heated cylinder

Abstract

We consider the turbulent wake above a weakly-heated cylinder, which is horizontally positioned in the gravitational field, such that the forced flow is from bottom to top with its direction just opposite to the direction of gravitational acceleration. Based on boundary layer theory we develop asymptotic solutions valid in the far wake and perturb those solutions by applying weak buoyant forces. The problem is considered plane and steady with respect to the time-averaged variables of state. Moreover, the mixing length model is applied to capture the turbulent shear stresses and the turbulent heat flux.

In a first approximation we recover the linearized far wake similarity solution as given by Schlichting or Schmidt. Within that flow field heat is passively transported, leading likewise to a similarity solution for the temperature field. Within the first approximation no buoyant effects are present. The second order approximation corrects nonlinearities within the transport of momentum and heat and includes the effect of weak buoyant forces.

The typical properties of the wake such as kinematic or thermal boundary layer thickness or amplitudes of velocities and temperatures are used to discuss the influence of various parameters. The parameters are particularly the mixing length η_L , the Reynolds-number Re and the Grashof-number Gr .

Inhaltsverzeichnis

Seite

KAPITEL 1	1
1. Problemstellung	1
KAPITEL 2	3
2. Mathematische Formulierung	3
2.1 Grundgleichungen.....	3
2.2 Grenzschichtapproximation	8
2.3 Ähnlichkeitstransformation in der ersten Ordnung.....	15
2.4 Ähnlichkeitstransformation in der zweiten Ordnung.....	18
3. Numerik	22
3.1 Numerische Integration.....	22
KAPITEL 4	24
4. Auswertung	24
4.1 Ergebnisse der erster Ordnung.....	24
4.2 Ergebnisse der zweiten Ordnung	26
4.2.1 Superposition	26
4.2.2 Definition der Geschwindigkeitsamplituden und Grenzschichtbreite	27
4.2.3 Variation des Abstandes x/d hinter dem Zylinder	29
4.2.4 Variation des Mischungsweges η_L	36
4.2.5 Variation der REYNOLDS-Zahl Re	42
4.2.6 Variation der GRASHOF-Zahl Gr	48
KAPITEL 5	54
5. Konvergenzbereich	54
5.1 Gültigkeitsbereich der entwickelten Lösungen.....	54
ANHANG	57
A1. Berechnungsprogramm	57
LITERATURVERZEICHNIS	63

Abbildungsverzeichnis

Seite

Abb. 1.1 Nachlauf über einem Zylinder (Zwangskonvektion)	1
Abb. 1.2 Nachlauf über einem beheizten Zylinder (Mischkonvektion).....	1
Abb. 2.1 Turbulente Schwankungen als Funktion der Zeit	4
Abb. 4.1 Geschwindigkeitsprofile U in der ersten Ordnung bei verändertem x/d	24
Abb. 4.2 Geschwindigkeitsprofile V in der ersten Ordnung bei verändertem x/d	24
Abb. 4.3 Temperaturprofile Θ in der ersten Ordnung bei verändertem x/d	25
Abb. 4.4 Geschwindigkeitsprofile erster und zweiter Ordnung (Superposition).....	26
Abb. 4.5 Kinematische Grenzschichten und Geschwindigkeitsamplituden für den Nachlauf und den Auftrieb	27
Abb. 4.6 Thermische Grenzschichten und Temperaturamplituden für den Nachlauf und Auftrieb	27
Abb. 4.7 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem x/d	29
Abb. 4.8 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils.....	29
Abb. 4.9 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils.....	30
Abb. 4.10 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} als Funktion von x/d	30
Abb. 4.11 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem x/d	31
Abb. 4.12 Temperaturprofile Θ bei verändertem x/d	31
Abb. 4.13 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thNL} des Nachlaufanteils	32
Abb. 4.14 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thAT} des Auftriebanteils	32
Abb. 4.15 Temperaturamplituden $\hat{\Theta}$ als Funktion von x/d	33
Abb. 4.16 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem Mischungsweg η_L	36
Abb. 4.17 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils.....	36
Abb. 4.18 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils	37
Abb. 4.19 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} aus beiden Anteilen als Funktion von η_L	37
Abb. 4.20 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem η_L	38
Abb. 4.21 Temperaturprofile Θ bei verändertem η_L	38
Abb. 4.22 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thNL} des Nachlaufanteils	39
Abb. 4.23 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thAT} des Auftriebanteils	39
Abb. 4.24 Temperaturamplituden $\hat{\Theta}$ beider Anteile als Funktion von η_L	40
Abb. 4.25 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem Re	42

Abb. 4.26 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils.....	42
Abb. 4.27 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils.....	43
Abb. 4.28 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} beider Anteile als Funktion von Re	43
Abb. 4.29 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem Re	44
Abb. 4.30 Temperaturprofile Θ bei verändertem Re	44
Abb. 4.31 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thNL} des Nachlaufanteils	45
Abb. 4.32 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thAT} des Auftriebanteils	45
Abb. 4.33 Temperaturamplituden $\hat{\theta}$ beider Anteile als Funktion von Re	46
Abb. 4.34 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem Gr.....	48
Abb. 4.35 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils.....	48
Abb. 4.36 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils.....	49
Abb. 4.37 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} aus beiden Anteilen als Funktion von Gr	49
Abb. 4.38 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem Gr.....	50
Abb. 4.39 Temperaturprofile Θ bei verändertem Gr.....	50
Abb. 4.40 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thNL} des Nachlaufanteils	51
Abb. 4.41 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thAT} des Auftriebanteils	51
Abb. 4.42 Temperaturamplituden $\hat{\theta}$ beider Anteile als Funktion von Gr	52

Kapitel 1

1. Problemstellung

Es soll der turbulente Nachlauf eines beheizten, unendlich langen Zylinders betrachtet werden. Die Betrachtung bezieht sich auf den fernen Nachlauf in einem Abstand hinter dem beheizten Zylinder. Das Problem wird zweidimensional und im zeitlichen Mittel stationär betrachtet. Beim Fluid handelt es sich um ein zähes, wärmeleitendes Medium.

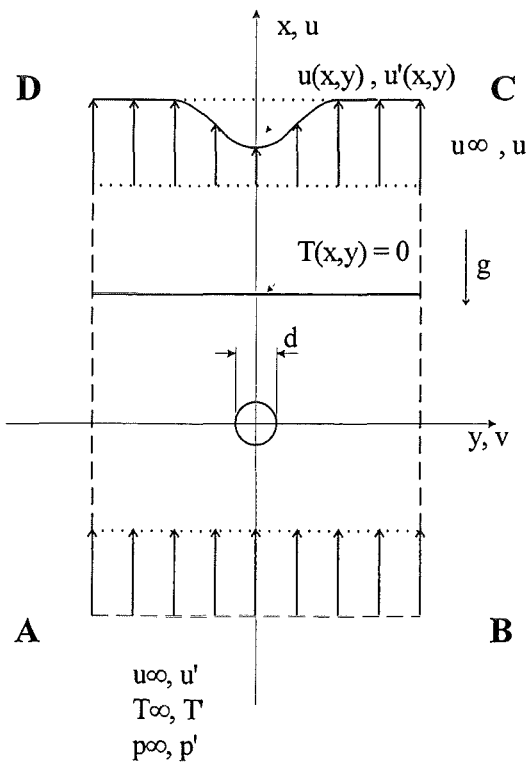


Abb. 1.1 Nachlauf über einem Zylinder
(Zwangskonvektion)

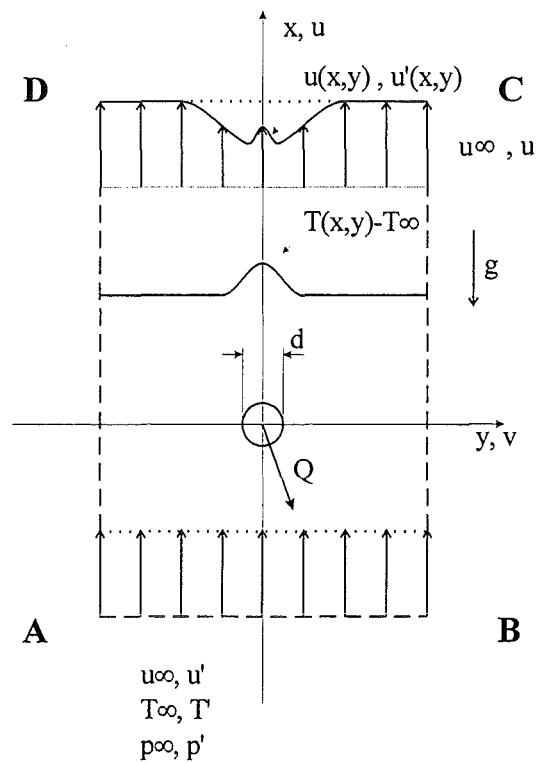


Abb. 1.2 Nachlauf über einem beheizten Zylinder
(Mischkonvektion)

Abb. 1.1 und Abb. 1.2 zeigen den Zylinder mit dem Durchmesser d , in dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung liegt. Die x -Achse zeigt in Richtung der Anströmung, die y -Achse steht senkrecht auf der x -Achse. Die Strömung erfolgt entgegen dem Schwerkraftvektor g mit der Längsgeschwindigkeit u_∞ und einen Schwankungsanteil u' . Der Zylinder wird mit einem konstanten Wärmestrom \dot{Q} beheizt.

Die Abb. 1.1 zeigt ein Profil der Nachlaufgeschwindigkeit $u(x,y)$ bei Zwangskonvektion. Der unbeheizte Zylinder verursacht in der Strömung eine Nachlaufdelle. Diese entsteht durch den Widerstand, den der Zylinder in die Strömung einbringt.

In Abb. 1.2 ist die Mischkonvektion dargestellt. Im Nachlauf finden sich zwei Effekte wieder. Zum einen die Zwangskonvektion, die durch die Anströmung entsteht und zum anderen die Naturkonvektion, die vom beheizten Zylinder herrührt.

Wenn der Zylinder beheizt wird, so verursacht der Wärmestrom einen Temperaturanstieg im Nachlauf des Fluids. Unter dem Einfluß des Schwerfeldes der Erde kommt es dann infolge der temperaturabhängigen Dichte zu Auftriebskräften im Fluid über dem Zylinder. Somit erfährt das Fluid im Nachlauf eine Beschleunigung. Die Nachlaufdüse füllt sich, hervorgerufen durch den Auftriebseffekt, wieder auf.

Kapitel 2

2. Mathematische Formulierung

2.1 Grundgleichungen

Impulsbilanzgleichung:

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \bar{w}, \quad (3.1)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \bar{w} = 0, \quad (3.2)$$

Wärmebilanzgleichung:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T. \quad (3.3)$$

Bei der ersten Gleichung (3.1) handelt es sich um die NAVIER-STOKES-Gleichung in Vektorform. Sie findet Anwendung bei einer inkompressiblen Strömung einer NEWTONSCHEN Flüssigkeit. Dabei entspricht $\bar{w} = (u, v, w)$ dem Geschwindigkeitsvektor, p dem Druck, ν der kinematischen Viskosität und ρ der Dichte des strömenden Mediums. In der Impulsbilanzgleichung (3.1) und der Wärmebilanzgleichung (3.3) steht der LAPLACE-Operator als $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Die Wärmebilanzgleichung (3.3) beinhaltet die spez. Wärmekapazität c_p und die Wärmeleitfähigkeit λ . Hinzu tritt noch die Kontinuitätsgleichung (3.2). In ihr finden wir den NABLA-Operator als $\nabla = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$.

Um die Impulsbilanzgleichungen zu vereinfachen, wird die BOUSSINESQ-Approximation verwendet.

1. Zähes, wärmeleitendes Medium mit konstanten Stoffeigenschaften:

μ ,	dynamische Viskosität,
λ ,	Wärmeleitfähigkeit,
c_p ,	spez. Wärmekapazität,
$\nu = \mu/\rho_\infty$,	kinematische Viskosität,
$\kappa = \lambda/\rho_\infty c_p$,	Temperaturleitfähigkeit;

2. Die Dichte ist als konstant ($\rho = \rho_\infty = \text{const}$) anzunehmen. Eine Ausnahme bildet der Auftriebsterm, wo eine lineare Dichte-Temperatur-Beziehung gemäß

$$\rho = \rho_\infty (1 - \alpha (\bar{T} - T_\infty))$$

verwendet wird. In dieser Gleichung bezeichnet α den Volumenausdehnungskoeffizient.

Für den Fall einer turbulenten Strömung können die Geschwindigkeiten, Temperaturen und Drücke in einen zeitlichen Mittelwert und in die Schwankungen zerlegt werden. Hieraus ergeben sich die REYNOLDSSCHEN Ansätze

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \bar{u}(x, y) + u'(t, x, y, z), \\ v(t, x, y, z) &= \bar{v}(x, y) + v'(t, x, y, z), \\ p(t, x, y, z) &= \bar{p}(x, y) + p'(t, x, y, z), \\ T(t, x, y, z) &= \bar{T}(x, y) + T'(t, x, y, z). \end{aligned} \tag{3.4}$$

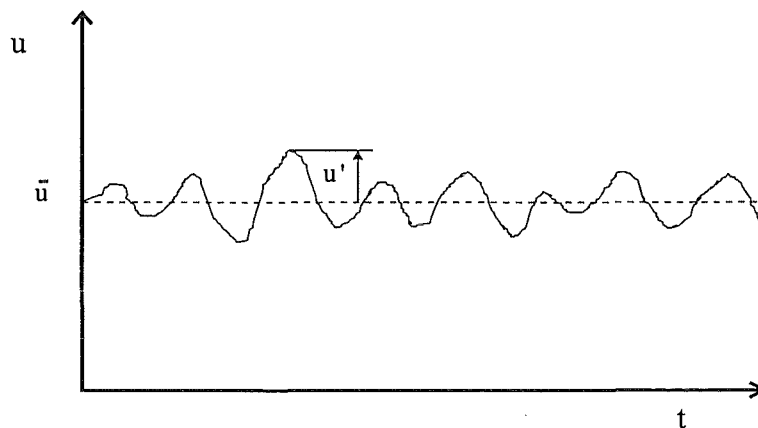


Abb. 2.1 Turbulente Schwankungen als Funktion der Zeit

Diese Ansätze (3.4) werden in die NAVIER-STOKES-Gleichung (3.1), in die Kontinuitätsgleichung (3.2) und in die Wärmetransportgleichung (3.3) eingebracht. Wir führen danach eine zeitliche Mittelung durch und beachten

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{t_\infty} \int_0^{t_\infty} u \, dt, \\ \overline{u'} &= \frac{1}{t_\infty} \int_0^{t_\infty} u' \, dt. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für eine turbulente, zweidimensionale Strömung ergeben sich damit zu:

Impulsbilanzgleichung in x-Richtung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{konvektiver Term}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{\text{Druckterm}} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)}_{\text{mol. Reibung}} - \underbrace{\left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \right)}_{\text{turb. Reibung}} + \underbrace{g \alpha (\bar{T} - T_\infty)}_{\text{Auftriebsterm}}, \quad (3.5)$$

Impulsbilanzgleichung in y-Richtung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}}_{\text{konvektiver Term}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}}_{\text{Druckterm}} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right)}_{\text{mol. Reibung}} - \underbrace{\left(\overline{v' \frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}} \right)}_{\text{turb. Reibung}}, \quad (3.6)$$

Wärmebilanzgleichung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}}_{\text{konvektiver Wärmetransport}} = \underbrace{\kappa \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right)}_{\text{mol. Wärmeleitung}} - \underbrace{\left(\overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y}} \right)}_{\text{turb. Wärmetransport}}, \quad (3.7)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (3.8)$$

Hierbei verwenden wir die kinematische Viskosität ν und die Temperaturleitfähigkeit κ . Die Definitionen sind:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_\infty}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p}.$$

Die Randbedingungen unseres Problems lauten (vgl. Abb. 1.2):

$$\begin{array}{lll} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, & \bar{v} = 0, & \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm\infty, x: & \bar{u} = \bar{u}_\infty, & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, & \bar{T} = \bar{T}_\infty. \end{array}$$

Wir wollen nun eine integrale Impuls- und Wärmebilanz aufstellen. Hierzu benötigen wir einen geeigneten Kontrollraum, welcher in Abb. (1.1) und (1.2) mit A-B-C-D gekennzeichnet ist. Die integralen Bilanzen werden pro Längeneinheit formuliert. Aus der Kräftebilanz am Kontrollraum

$$\sum \bar{F}_j + \sum \bar{F}_a = 0 \quad (3.9)$$

betrachten wir zunächst die Komponente in x-Richtung. In Gleichung (3.9) bezeichnet \bar{F}_j die Impulskräfte und \bar{F}_a die angreifenden Kräfte. Am System angreifende Kräfte sind hierbei Druckkräfte, Auftriebskräfte und Haltekräfte.

Im einzelnen müssen wir folgende Kräfte betrachten:

- Am Eintritt A-B in den Kontrollraum strömt Fluid hinein, wodurch infolge der Einströmung eine Impulskraft und eine Druckkraft entsteht.
- An den seitlichen Kontrollraumgrenzen A-D und B-C entsteht eine Impulskraft, die sich aufgrund der Quergeschwindigkeit v in y -Richtung zusammen mit der Längsgeschwindigkeit u in x -Richtung ergibt.
- Der Austritt C-D verhält sich ähnlich wie der Eintritt A-B. Es entsteht infolge der Ausströmung eine Impulskraft und eine Druckkraft.
- Der beheizte Zylinder ruft Dichteänderungen im Fluid hervor. Wir müssen deshalb im Kontrollraum die Auftriebskräfte berücksichtigen.
- Schließlich existiert eine Kraft, die am Zylinder angreift und ihn festhält. Diese Kraft bezeichnen wir als Haltekraft.

Wir betrachten lediglich die Anteile der Kräftebilanz, welche in der x -Richtung wirken und erhalten hieraus die integrale Impulsbilanz

$$0 = \rho_\infty \int_{-y}^y (\bar{u}_\infty + \overline{u'^2} - \bar{u}^2 - \overline{u'^2}) dy + \int_{-y}^y (\bar{p}_\infty - \bar{p}) dy + \rho_\infty \alpha g \int_{-y-\infty}^y \int_{-\infty}^{x_0} (\bar{T} - \bar{T}_\infty) dx dy - 2 \rho_\infty \int_{-\infty}^{x_0} (\bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'}) dx - \frac{\rho_\infty}{2} (\overline{u_\infty^2}) d c_w .$$

Wir betrachten nun die Wärmebilanz am Kontrollraum A-B-C-D. In der integralen Wärmebilanz finden wir Anteile aufgrund der Wärmeleitung, des konvektiven Wärmestroms, des turbulenten Wärmestroms und der Beheizung des Zylinders.

- An der unteren Kontrollraumgrenze A-B und den seitlichen Kontrollraumgrenzen A-D und B-C finden wir lediglich den konvektiven Wärmetransport.
- An der oberen Kontrollraumgrenze C-D finden wir konvektiven Wärmetransport und Wärmeleitung.
- Im inneren des Kontrollraums müssen wir den Wärmestrom \dot{Q} berücksichtigen, welcher von dem beheizten Zylinder eingebracht wird.

Die integrale Wärmebilanz ergibt sich deshalb zu

$$0 = \rho_{\infty} c_p \int_{-y}^y (\bar{u}_{\infty} \bar{T}_{\infty} + \overline{u'T'_{\infty}}) dy - 2 \rho_{\infty} c_p \int_{-\infty}^{x_r} (\bar{T} \bar{v} + \overline{T'v'}) dx - \rho_{\infty} c_p \int_{-y}^y (\bar{T} \bar{u} + \overline{T'u'}) dy + \lambda \int_{-y}^y \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} dy + \dot{Q}.$$

Mit der Massenbilanz am Kontrollraum A-B-C-D

$$\int_{-y}^y (\bar{u}_{\infty} - \bar{u}) dy = 2 \int_{-\infty}^{x_r} \bar{v} dx \quad (3.10)$$

läßt sich der Impulssatz und die Wärmebilanz vereinfachen. Die integrale Impulsbilanz in x-Richtung wird dann zu

$$0 = \rho_{\infty} \int_{-y}^y (\bar{u}_{\infty} \bar{u} - \bar{u}^2 + \overline{u'_{\infty}{}^2} - \overline{u'^2}) dy - 2 \rho_{\infty} \int_{-\infty}^{x_r} \overline{u'v'} dx + \rho_{\infty} \alpha g \int_{-y}^y \int_{-\infty}^{x_r} (\bar{T} - \bar{T}_{\infty}) dx dy - \frac{\rho_{\infty}}{2} u_{\infty}^2 d c_w + \int_{-y}^y (\bar{p}_{\infty} - \bar{p}) dy, \quad (3.11)$$

und die integrale Wärmebilanz wird zu

$$0 = \rho_{\infty} c_p \int_{-y}^y (\bar{u} (\bar{T}_{\infty} - \bar{T}) - \overline{T'u'}) dy + \lambda \int_{-y}^y \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} dy - 2 \rho_{\infty} c_p \int_{-y}^y \overline{T'v'} dx + \dot{Q}. \quad (3.12)$$

2.2 Grenzschichtapproximation

Bei einer turbulenten Strömung ist die REYNOLDS-Zahl groß. Somit hat die Strömung Grenzschichtcharakter. Die Nachlaufströmung besitzt demnach zwei unterschiedliche Bereiche.

1. Die Grenzschicht ist eine dünne Schicht, in der die Ursache für den Reibungswiderstand zu finden ist. In ihr sind sowohl die Reibungskräfte als auch die anderen Kräfte wichtig.
2. Im Bereich der äußeren Strömung sind die Reibungskräfte vernachlässigbar. Hier kann die Strömung als reibungsfrei betrachtet werden.

In der Grenzschicht lassen sich die Gleichungen vereinfachen und deshalb leichter lösen als die allgemeinen NAVIER-STOKES-Gleichungen. Der Grund ist in der verhältnismäßig dünnen Grenzschicht zu suchen. Um die Größenordnung der Terme in den Gleichungen (3.5), (3.6), (3.7) und (3.8) bewerten zu können, werden diese zunächst in eine dimensionslose Form überführt. Die Grenzschicht besitzt zwei unterschiedliche Längenskalen. Die Längsabmessung in x-Richtung ist gegenüber der Querabmessung in Richtung der y-Achse groß. Aus diesem Grund ist die Querabmessung y mit der Länge εd zu skalieren, während die Längsabmessung mit d skaliert wird. Für den Parameter ε gilt:

$$\varepsilon \ll 1.$$

Hiermit ergeben sich zwangsläufig auch separate Geschwindigkeitsskalen.

Die Skalierung wird zusammenfassend wie folgt vorgenommen:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{d}, \quad Y = \frac{y}{d \varepsilon}, \\ \bar{U} &= \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}, \quad U' = \frac{u'}{\bar{u}_\infty}, \\ \bar{V} &= \frac{\bar{v}}{\bar{u}_\infty \varepsilon}, \quad V' = \frac{v'}{\bar{u}_\infty}, \\ \bar{\Theta} &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{\Delta T}, \quad \Theta' = \frac{T'}{\Delta T}, \\ \bar{P} &= \frac{\bar{p}}{p_0}, \quad P' = \frac{p'}{p_0}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Hierbei bedeuten die Symbole

$$\begin{aligned} d & : && \text{Zylinderdurchmesser,} \\ U & : && \text{Anströmgeschwindigkeit,} \\ \Delta T = \frac{\dot{Q}}{v c_p \rho_\infty} & : && \text{charakteristische} \end{aligned}$$

Temperaturdifferenz,

$$p_0 = \frac{\rho_\infty}{2} u^2 \quad : \quad \text{Staudruck der Anströmung.}$$

Es ergeben sich drei Kennzahlen, die die Physik des Problems beschreiben [1].

$$\text{REYNOLDS-Zahl:} \quad \text{Re} = \frac{u_\infty d}{\nu}, \quad (3.14)$$

$$\text{GRASHOF-Zahl:} \quad \text{Gr} = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu^2}, \quad (3.15)$$

$$\text{PRANDTL-Zahl:} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (3.16)$$

Die REYNOLDS-Zahl entspricht dem Verhältnis von Trägheitskraft zur viskosen Reibungskraft. Die GRASHOF-Zahl beschreibt die Intensität der Auftriebsströmung. Sie ist das Verhältnis von der Leistung der Auftriebsströmung und Leistung der viskosen Kräfte. Die PRANDTL-Zahl gibt das Verhältnis der Transportkoeffizienten für Impuls ν und Wärme κ des Fluids an. Sie stellen eine reine molekulare Stoffeigenschaft dar.

Führen wir die angegebenen Skalierungen ein, so finden wir in dimensionsloser Form

die Impulsgleichung in der x-Richtung:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Y^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{U}^2}{\partial X} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\bar{U}'\bar{V}')}{\partial Y} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \bar{\Theta}, \quad (3.17)$$

die Impulsgleichung in der y-Richtung:

$$\varepsilon^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial Y^2} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial (\bar{U}'\bar{V}')}{\partial X} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{V}'^2}{\partial Y} \right), \quad (3.18)$$

die Wärmetransportgleichung:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial Y} = \frac{\kappa}{\bar{u}_\infty \cdot d} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial Y^2} \right) - \left(\frac{\partial (\bar{U}'\bar{\Theta}')}{\partial X} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\bar{V}'\bar{\Theta}')}{\partial Y} \right), \quad (3.19)$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0. \quad (3.20)$$

Die Randbedingungen in dimensionsloser Form lauten:

$$\begin{aligned} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: \quad & \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} = 0, & \bar{V} = 0, & \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial Y} = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm \infty, x: \quad & \bar{U} = \dots, & \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0, & \bar{\Theta} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die integrale Impulsbilanz lautet dimensionslos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_w = \varepsilon \int_{-y}^y \bar{U}(1 - \bar{U}) dY + \varepsilon \int_{-y}^y \left(\overline{U'^2} - \bar{U}'^2 \right) dY + \frac{Gr}{Re^2} \varepsilon \int_{-y}^y \int_{-\infty}^x \bar{\Theta} dX dY + \varepsilon \int_{-y}^y \left(\bar{P}'_\infty - \bar{P}' \right) dY \\ + 2 \int_{-\infty}^x \left(\overline{U'V'} \right) dX \end{aligned} \quad (3.22)$$

und die integrale Wärmebilanz ergibt sich zu

$$= -Re \varepsilon \int_{-y}^y \left(\overline{U'_\infty \Theta'} - \bar{U} \bar{\Theta} - \bar{U}' \bar{\Theta}' \right) dY - \frac{\varepsilon}{Pr \cdot Re} \int_{-y}^y \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial X} dY + 2 Re \int_{-\infty}^x \left(\overline{\Theta'V'} \right) dX. \quad (3.23)$$

Die obigen Gleichungen beinhalten zum einen die zeitlich gemittelten Größen \bar{U} , \bar{V} , \bar{P} , $\bar{\Theta}$. Zum anderen verbleiben aber nach der zeitlichen Mittelung Mittelwerte über Produkte der Schubspannungen von der Form $\overline{U'V'}$, $\overline{U'^2}$, $\overline{V'^2}$, $\overline{U'\Theta}$, $\overline{V'\Theta}$. Das Gleichungssystem ist demnach nicht geschlossen, weil die Schwankungsgrößen U' , V' , Θ' nicht bekannt sind. Sie müssen deshalb durch die mittleren Größen \bar{U} , \bar{V} , $\bar{\Theta}$ ausgedrückt werden. Dies geschieht mit dem sogenannten Prandl'schen Mischungswegansatz. Hiernach kommen die turbulenten Schwankungen der Größen zustande, weil ein makroskopischer Austausch von Flüssigkeitsballen über eine typische Distanz, dem sogenannten Mischungsweg, vorliegt. Durch diesen Austausch nehmen die Flüssigkeitsballen beispielsweise ihre Geschwindigkeit an den neuen Ort mit, was als Ursache der turbulenten Schwankungen angesehen werden kann. Wird Flüssigkeit in einem Feld $\bar{u}(y)$ um die Distanz l in der y -Richtung versetzt so ergibt sich am neuen Ort eine Geschwindigkeitsdifferenz von

$$\Delta u = \bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) \cong l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dots$$

Hierbei ist von einer Taylor-Reihenentwicklung Gebrauch gemacht worden. Die Turbulenten Schwankungen liegen dann in der gleichen Größenordnung wie Δu , es gilt

$$u' \sim v' \sim l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Mit diesem Mischungswegansatz vgl. [2,3] können nun die Terme der turbulenten Schubspannungen und Wärmeleitung ersetzt werden. Wir erhalten

$$\tau'_{xy} = -\overline{u'v'} = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad q'_{xy} = -\overline{u'T'} = l l_{th} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Die turbulente Schubspannung und der turbulente Wärmestrom in den Differentialgleichungen werden entsprechend dem Mischungswegansatz eliminiert. Wir erhalten hieraus dann ein geschlossenes Gleichungssystem. Da nur noch zeitgemittelte Größen auftauchen, können wir im folgenden auf die Querstriche bei der Notation verzichten. Es kommt die Impulsgleichung in x:

$$\underbrace{U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y}}_{O(1)} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial X}}_{O(\varepsilon)} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}}_{O(1/\text{Re})} + \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}}_{O(1/(\text{Re}\varepsilon^2))} \right) + 2 L^2 \left(\underbrace{\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y \partial X}}_{O(\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)}_{O(1)} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \Theta \quad (3.24)$$

die Impulsgleichung in y:

$$\varepsilon^2 \underbrace{\left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right)}_{O(\varepsilon^2)} = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial Y}}_{O(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}}_{O(\varepsilon^2/\text{Re})} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}}_{O(1/\text{Re})} \right) + 2 L^2 \varepsilon \left(\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial X} \right)}_{O(\varepsilon^2)} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)}_{O(\varepsilon)} \right), \quad (3.25)$$

Wärmetransportgleichung:

$$\underbrace{U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y}}_{O(1)} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\underbrace{\frac{\partial \Theta}{\partial X^2}}_{O(1/(\text{Re Pr}))} + \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\frac{\partial \Theta}{\partial Y^2}}_{O(1/(\text{Re Pr} \varepsilon^2))} \right) + L L_{\text{th}} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y \partial X} \right)}_{O(\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \frac{\partial U}{\partial Y} \right)}_{O(1)} \right) \quad (3.26)$$

Hierbei verwenden wir die Abkürzungen $L = \frac{1}{\varepsilon d}$, $L_{\text{th}} = \frac{1_{\text{th}}}{\varepsilon d}$.

die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (3.27)$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: \quad & \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, & V = 0, & \Theta = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm \infty, x: \quad & U = 1, & \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, & \Theta = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die integrale Impulsbilanzgleichung wird zu

$$\frac{1}{2} c_w = \varepsilon \int_{-y}^y U(1-U) dY + L^2 \varepsilon \int_{-y}^y \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 dY + \frac{\text{Gr}}{\text{Pr}} \varepsilon \int_{-y}^y \int_{-\infty}^x \Theta dX dY + \varepsilon \int_{-y}^y (P_{\infty} - P) dY, \quad (3.29)$$

die integrale Wärmebilanzgleichung kommt als

$$= -\text{Re} \varepsilon \int_{-y}^y (U\Theta) dY + \varepsilon L L_{\text{th}} \text{Re} \int_{-y}^y \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) dY - \frac{\varepsilon}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Theta}{\partial X} dY. \quad (3.30)$$

Wir betrachten zunächst Gleichung (3.24). Hier finden wir den konvektiven Term in $O(1)$ und die molekulare Schubspannung in $O(1/(\varepsilon^2 \text{Re}))$. Zusätzlich finden wir eine turbulente Schubspannung in $O(2L^2/\varepsilon)$, welche wie erwartet deutlich größer ist als die molekulare Schubspannung. Wollen wir konvektive Effekte und turbulente Schubspannungen im Problem belassen, so muß gelten $O(2L^2/\varepsilon) = O(1)$. Mit dieser Vorausbetrachtung wenden wir uns Gleichung (3.25) zu. Der führende Term aus der turbulenten Schubspannung bleibt hier von $O(\varepsilon)$, alle anderen Terme sind kleiner. Somit kann der Druckgradient lediglich von $O(\varepsilon)$ sein. Dies bedeutet, daß der Grenzschicht wegen $\partial P/\partial Y \ll 1$ der Druck von außen aufgeprägt wird, wie das bei laminaren Grenzschichten der Fall ist. Konsistenterweise muß auch in Gleichung (3.24) der Druckgradient von $O(\varepsilon)$ sein. In der Wärmetransportgleichung (3.26) schließlich besteht ein Gleichgewicht zwischen dem konvektiven Term und dem führenden Term des turbulenten Wärmestroms.

Wir ziehen nun die Schlußfolgerung aus der obigen Größenordnungsbetrachtung und geben die Gleichung in der sogenannten Grenzschichtapproximation an, d.h. in führender Ordnung für $\varepsilon \ll 1$. Wir wollen hier willkürlich unterstellen, daß der Auftriebsterm schwach ist. Es kommt die Impulsgleichung in x :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{2L^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \Theta + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{\text{Re} \varepsilon}\right), \quad (3.31)$$

die Wärmetransportgleichung:

$$U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{L L_{\text{th}}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) + O\left(\frac{1}{\text{Re} \text{Pr} \varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{1}{\text{Re} \text{Pr}}\right), \quad (3.32)$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (3.33)$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{array}{lll} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: & \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, & V = 0, & \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm \infty, x: & U = 1, & \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, & \Theta = 0. \end{array} \quad (3.34)$$

Weiterhin müssen wir die integrale Impulsbilanz:

$$\frac{1}{2} c_w = \varepsilon \int_{-y}^y U(1-U) dY + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \varepsilon \int_{-y}^y \int_{-\infty}^x \Theta dX dY, \quad (3.35)$$

und die integrale Wärmebilanz:

$$= \text{Re} \varepsilon \int_{-y}^y \Theta U dY. \quad (3.36)$$

in der Grenzschichtnäherung erfüllen.

Das obige System von Gleichungen (3.31) bis (3.36) wollen wir im folgenden asymptotisch lösen. Bewegen wir uns weit weg stromab vom Zylinder, so werden die Abweichungen der Geschwindigkeiten und der Temperatur von den Werten der Anströmung $U_\infty = 1$, $V_\infty = 0$ und $\Theta_\infty = 0$ sicherlich klein sein. Wir können mit dem kleinen Parameter $\tilde{\varepsilon}$ dann eine Reihenentwicklung der Lösungen gemäß

$$\begin{aligned} U(X, Y) &= 1 - \tilde{\varepsilon} \cdot U_0 - \tilde{\varepsilon}^2 \cdot U_1 - \dots, \\ V(X, Y) &= \tilde{\varepsilon} \cdot V_0 + \tilde{\varepsilon}^2 \cdot V_1 + \dots, \\ \Theta(X, Y) &= \tilde{\varepsilon} \cdot \Theta_0 + \tilde{\varepsilon}^2 \cdot \Theta_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

angeben. Wir bringen diese Reihenentwicklung für die Geschwindigkeiten U , V und die Temperatur Θ in die Gleichungen (3.31) bis (3.36) ein. Anschließend werden wir die Terme der gleichen Größenordnung im Entwicklungsparameter $\tilde{\varepsilon}$ aus. Hieraus erhalten wir zum einen die Gleichungen der Größenordnung $\tilde{\varepsilon}$:

die Impulsgleichung in x:

$$\frac{\partial U_0}{\partial X} + \tilde{\varepsilon} \frac{2L^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_0}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} \right) = 0, \quad (3.38)$$

Wärmetransportgleichung:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} + \tilde{\varepsilon} \frac{L L_{th}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_0}{\partial Y} \frac{\partial \Theta_0}{\partial Y} \right) = 0, \quad (3.39)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$-\frac{\partial U_0}{\partial X} + \frac{\partial V_0}{\partial Y} = 0. \quad (3.40)$$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: & \quad \frac{\partial U_0}{\partial Y} = 0, & \quad V_0 = 0, & \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial Y} = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm \infty, x: & \quad U_0 = 0, & \quad \frac{\partial V_0}{\partial Y} = 0, & \quad \Theta_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Weiterhin gilt die integrale Impulsbilanz:

$$\frac{1}{2} cw = \tilde{\varepsilon} \varepsilon \int_{-y}^y U_0 dy, \quad (3.42)$$

und die integrale Wärmebilanz:

$$= \tilde{\varepsilon} \varepsilon Re \int_{-y}^y \Theta_0 dy. \quad (3.43)$$

Hierbei haben wir davon Gebrauch gemacht, daß die Auftriebskräfte in der Impulsgleichung schwach sind. Dies stellt eine Begrenzung des Parameters $\frac{Gr}{Re^2}$ auf kleine Werte dar.

Zum zweiten erhalten wir Gleichungen der Größenordnung $\tilde{\varepsilon}^2$:

die Impulsgleichung in x:

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} + \tilde{\varepsilon} \frac{2L^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_0}{\partial Y} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right) = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial X} - V_0 \frac{\partial U_0}{\partial Y} + \frac{Gr}{\tilde{\varepsilon} Re^2} \Theta_0, \quad (3.44)$$

die Wärmetransportgleichung:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} + \tilde{\varepsilon} \frac{L L_{th}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_0}{\partial Y} \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_1}{\partial Y} \frac{\partial \Theta_0}{\partial Y} \right) = U_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial X} - V_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial Y}, \quad (3.45)$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$-\frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0. \quad (3.46)$$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{array}{lll} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: & \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0, & V_1 = 0, & \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm \infty, x: & U_1 = 0, & \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0, & \Theta_1 = 0. \end{array} \quad (3.47)$$

Die integrale Impulsbilanz:

$$\int_{-y}^y U_1 dY = \int_{-y}^y U_0^2 dY - \frac{Gr}{Re^2 \tilde{\varepsilon}} \int_{-y}^y \int_{-\infty}^{x^*} \Theta_0 dX dY, \quad (3.48)$$

und die integrale Wärmebilanz:

$$\int_{-y}^y \Theta_1 dY = - \int_{-y}^y \Theta_0 U_0 dY \quad (3.49)$$

sind weiter zu betrachten. Dem Auftriebsterm $\frac{Gr}{\tilde{\varepsilon} Re^2} \cdot \Theta_0$ haben wir willkürlich in die zweite Ordnung geschoben. Dies bedeutet, daß wir einen schwach beheizten Zylinder mit $\frac{Gr}{Re^2} = O(\tilde{\varepsilon})$ betrachten.

2.3 Ähnlichkeitstransformation in der ersten Ordnung

Wir suchen Lösungen für das System der partiellen Differentialgleichungen und Bedingungen, für die Gleichungen (3.38) bis (3.43). Hierzu bietet sich eine Koordinatentransformation an. Ziel dieser Transformation ist es Lösungen zu erhalten, die nur von einer Veränderlichen $\eta = \eta(X, Y)$ abhängen. Die Lösungen werden dann als ähnliche Lösungen bezeichnet. Wir verwenden hierzu die Ansätze

$$\begin{aligned} \eta &= Y g_0(X), \\ U_0(X, Y) &= F_0(\eta) h_0(X), \\ V_0(X, Y) &= G_0(\eta) m_0(X), \\ \Theta_0(X, Y) &= H_0(\eta) k_0(X). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Die partiellen Ableitungen nach den alten Variablen X, Y ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \dot{g}_0(X) Y \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= g_0(X) \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Die Funktionen $g_0(X), h_0(X), m_0(X), k_0(X)$ müssen nun so bestimmt werden, daß die partiellen Differentialgleichungen (3.38) bis (3.40) in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt werden können. Dies ist möglich mit den Funktionen:

$$\begin{aligned} g_0(X) &= \frac{1}{\sqrt{X}}, & h_0(X) &= \frac{1}{\sqrt{X}}, \\ k_0(X) &= \frac{1}{\sqrt{X}}, & m_0(X) &= -\frac{1}{2X}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Formfunktionen $F_0(\eta), G_0(\eta)$ und $H_0(\eta)$ ergeben sich dann zu:

$$-2 \frac{\tilde{\varepsilon} \eta_L^2}{\varepsilon} F_0' F_0'' + \frac{1}{2} \eta F_0' + \frac{1}{2} F_0 = 0, \tag{3.52}$$

$$-\frac{\tilde{\varepsilon} \eta_L \eta_{Lth}}{\varepsilon} F_0' H_0'' - \frac{\tilde{\varepsilon} \eta_L \eta_{Lth}}{\varepsilon} F_0'' H_0' + \frac{1}{2} \eta H_0' + \frac{1}{2} H_0 = 0, \tag{3.54}$$

$$\frac{1}{2} G_0' - \frac{1}{2} \eta F_0' - \frac{1}{2} F_0 = 0. \tag{3.54}$$

Hierbei machen wir von den Abkürzungen $\frac{\eta_L}{g_0(x)} = L$, $\frac{\eta_{Lth}}{g_0(x)} = L_{th}$ Gebrauch. Die

Randbedingungen für die Formfunktionen lauten dann:

$$\begin{aligned} \text{Symmetrielinie } \eta = 0: & \quad F_0' = 0, & \quad G_0 = 0, & \quad H_0' = 0, \\ \text{Außenfeld } \eta = \pm\infty: & \quad F_0 = 0, & \quad G_0' = 0, & \quad H_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Weiterhin gilt es die integrale Impulsbilanz

$$\varepsilon \tilde{\varepsilon} \int_{-\eta}^{\eta} F_0 \, d\eta = \frac{1}{2} c_w \quad (3.56)$$

und die integrale Wärmebilanz

$$\text{Re} \varepsilon \tilde{\varepsilon} \int_{-\eta}^{\eta} H_0 \, d\eta = 1 \quad (3.57)$$

zu erfüllen. Die Integrationsgrenzen der integralen Bilanzen erstrecken sich streng genommen über den kompletten Nachlauf, d.h. im Bereich $-\infty < \eta < \pm\infty$. Es wird sich später zeigen (vgl. auch Schlichting [2]), daß die Lösungen nur im Bereich $-1 \leq \eta \leq 1$ physikalisch sinnvoll sind. Somit können wir die Integrale im genannten begrenzten Bereich ausführen. Aus der Integralen Impulsbilanz erhalten wir für ε die Gleichung

$$\varepsilon = \eta_L \sqrt{10 c_w}.$$

Damit ist der Skalierungsfaktor ε festgelegt und wird in den nachfolgenden Gleichungen ersetzt.

Im weiteren beschränken wir uns auf Lösungen mit $\eta_L = \eta_{Lth}$. Diese Festlegung erlaubt die analytische Lösung der Differentialgleichungen. Im Falle $\eta_L \neq \eta_{Lth}$ scheint die Lösung der Differentialgleichungen nur numerisch möglich zu sein. Physikalisch bedeutet dies, daß der Mischungsweg des Impuls- und Wärmeaustausches identisch sind. Dies ist eine Annahme, die meist in guter Näherung erfüllt ist, indem die turbulente PRANDTL-Zahl beispielsweise nahe bei eins liegt.

Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Formfunktionen ergeben sich dann zu

$$F_0(\eta) = \frac{\sqrt{10 c_w}}{18 \tilde{\varepsilon} \eta_L} \left(1 - \eta^2\right)^2, \quad (3.58)$$

$$G_0(\eta) = \frac{\sqrt{10 c_w}}{18 \tilde{\varepsilon} \eta_L} \left(\eta^2 - 2 \eta^{\frac{5}{2}} + \eta\right), \quad (3.59)$$

$$H_0(\eta) = \frac{\sqrt{10}}{9 \tilde{\varepsilon} \text{Re} \eta_L \sqrt{c_w}} \left(1 - \eta^2\right)^2. \quad (3.60)$$

Wir setzen nun die Formfunktionen (3.58) bis (3.60) in die Ansätze (3.50) ein und erhalten die dimensionslose Längs- und Quergeschwindigkeit, sowie die Temperatur in der ersten Näherung zu

$$U_0(\eta) = 1 - \frac{\sqrt{10 c_w}}{18 \eta_L \sqrt{X}} \left(1 - \eta^{\frac{3}{2}}\right)^2, \quad (3.61)$$

$$V_0(\eta) = -\frac{\sqrt{10 c_w}}{36 \eta_L X} \left(\eta^4 - 2 \eta^{\frac{5}{2}} + \eta\right), \quad (3.62)$$

$$\Theta_0(\eta) = \frac{\sqrt{10}}{9 \operatorname{Re} \eta_L \sqrt{c_w X}} \left(1 - \eta^{\frac{3}{2}}\right)^2. \quad (3.63)$$

Die hier berechnete Lösung für die Längsgeschwindigkeit U_0 und Quergeschwindigkeit V_0 im Nachlauf stimmt mit der Lösung von Schlichting [2, 5] überein. In allen Gleichungen (3.61) bis (3.63) finden wir noch eine freie Konstante η_L , die nur aus Versuchen ermittelt werden kann. Es ist dies die dimensionslose Form des Mischungswegs L .

2.4 Ähnlichkeitstransformation in der zweiten Ordnung

Wir müssen nun das System von Gleichungen in der nächsten Ordnung (3.44) bis (3.49) einer Lösung zuführen. Wir verwenden hierbei die Abkürzung

$$F_0 = (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^2.$$

Bei Berücksichtigung der Ergebnisse erster Ordnung erhalten wir zunächst das System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{2 \eta_L \tilde{\varepsilon} X}{\sqrt{10 c_w}} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_0}{\partial Y} \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} \right) = & - \frac{5 c_w}{108 \tilde{\varepsilon}^2 \eta_L X^2} \left(\frac{F_0^2}{648} + \frac{\eta^{\frac{3}{2}} F_0^{\frac{3}{2}}}{216} + \frac{\eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}}}{216} (\eta^4 - 2 \eta^{\frac{5}{2}} + \eta) \right. \\ & \left. - \frac{\text{Gr} \sqrt{10} F_0}{18 \tilde{\varepsilon}^2 \eta_L \text{Re}^3 \sqrt{c_w X}} \right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} + \frac{\eta_L \tilde{\varepsilon} X}{\sqrt{10 c_w}} \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_0}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} \frac{\partial \Theta_0}{\partial Y} + \frac{\partial U_1}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial Y^2} \right) = \\ \frac{5}{108 \tilde{\varepsilon}^2 \text{Re} \eta_L^2 X^2} \left(\frac{F_0^2}{3} + (\eta F_0)^{\frac{3}{2}} + (\eta^{\frac{3}{2}} - 2 \eta^3 + \eta^{\frac{3}{2}}) F_0^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$-\frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0. \quad (3.66)$$

Hierfür sind die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \text{Symmetrielinie } y = 0, x: \quad & \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0, & V_1 = 0, & \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0, \\ \text{Außenfeld } y \rightarrow \pm \infty, x: \quad & U_1 = 0, & \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0, & \Theta_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

einzuhalten. Ferner gilt die integrale Impulsbilanz

$$\int_{-y}^y U_1 dy = \frac{\sqrt{10 c_w}}{18 \eta_L \sqrt{X}} \int_{-Y}^Y (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^2 dY - \frac{\sqrt{10} \text{Gr}}{9 \text{Re}^3 \tilde{\varepsilon} \eta_L \sqrt{c_w}} \int_{-Y}^Y \int_{-\infty}^X \frac{1}{\sqrt{X}} (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^2 dX dY, \quad (3.68)$$

und die integrale Wärmebilanz

$$\int_{-Y}^Y \Theta_1 dY = - \frac{5}{81 \tilde{\varepsilon}^2 \eta_L^2 \text{Re} X} \int_{-Y}^Y (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^4 dY. \quad (3.69)$$

Analog wie zuvor beim Auffinden der Lösungen in der ersten Ordnung, führen wir auch hier Ansätze mit der Ähnlichkeitsvariablen η ein. Die Gleichungen für die Längsgeschwindigkeit U_1 , die Quergeschwindigkeit V_1 und die Temperatur Θ_1 sind hier als erweiterte Ansätze mit zwei additiv überlagerten Anteilen angesetzt. Dadurch kann später eine Separierung der Gleichungen erfolgen. Wir benutzen die Ansätze:

$$\eta = \frac{Y}{\sqrt{X}},$$

$$U_1(X, Y) = F_1(\eta) h_1(X) + K_1(\eta) f_1(X), \quad (3.70)$$

$$V_1(X, Y) = G_1(\eta) m_1(X) + I_1(\eta) q_1(X),$$

$$\Theta_1(X, Y) = H_1(\eta) k_1(X) + N_1(\eta) s_1(X),$$

Die Funktionen $h_1(X)$, $f_1(X)$, $m_1(X)$, $q_1(X)$, $k_1(X)$ und $s_1(X)$ werden so gewählt, daß aus den partiellen Differentialgleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen entstehen. Dies ist gegeben durch die Wahl

$$h_1(X) = \frac{1}{X}, \quad f_1(X) = 2\sqrt{X},$$

$$m_1(X) = \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}}, \quad q_1(X) = 1, \quad (3.71)$$

$$k_1(X) = \frac{1}{X}, \quad s_1(X) = 2\sqrt{X}.$$

Die Differentialgleichungen werden nun separierbar. Aus Gleichung (3.64) entstehen zwei gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichungen für die Formfunktionen $F_1(\eta)$ und $K_1(\eta)$, die nur noch von η abhängen. Wir erhalten

$$-\frac{1}{3}\eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}} F_1'' + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}}\right)\eta F_1' - F_1 = -\frac{5 c_w}{108 \tilde{\epsilon}^2 \eta_L^2} \left(\frac{F_0^2}{3} - \eta^{\frac{3}{2}} F_0^{\frac{3}{2}} + \eta^{\frac{3}{2}} (\eta^{\frac{3}{2}} - 1)^2 F_0^{\frac{1}{2}} \right), \quad (3.72)$$

$$-\frac{2}{3}\eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}} K_1'' + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}}\right)\eta K_1' + K_1 = -\frac{Gr\sqrt{10} F_0}{9 \tilde{\epsilon}^2 \eta_L Re^3 \sqrt{c_w}}, \quad (3.73)$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{array}{lll} \text{Symmetrielinie } \eta = 0: & F_1' = 0, & K_1' = 0, \\ \text{Außenfeld } \eta = \pm 1: & F_1 = 0, & K_1 = 0. \end{array} \quad (3.74)$$

Die integralen Impulsbilanzen haben dann die Formen

$$\int_0^1 F_1(\eta) d\eta = \frac{3 c_w}{308 \tilde{\varepsilon}^2 \eta_L^2}, \quad (3.75)$$

$$\int_0^1 K_1(\eta) d\eta = -\frac{Gr \sqrt{10}}{40 \tilde{\varepsilon}^2 \eta_L Re^3 \sqrt{c_w}}. \quad (3.76)$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Formfunktionen $G_1(\eta)$ und $I_1(\eta)$

$$G_1' = -\frac{1}{2} \eta F_1' - F_1, \quad (3.77)$$

$$I_1' = -\eta K_1' + K_1, \quad (3.78)$$

für welche die Randbedingungen:

$$\text{Symmetrielinie } \eta = 0: \quad G_1 = 0, \quad I_1 = 0, \quad (3.79)$$

einzuhalten sind. Zwei weitere Differentialgleichungen erhalten wir aus der Wärmebilanzgleichung Gl. (3.66) für die Formfunktionen $H_1(\eta)$ und $N_1(\eta)$

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}}}{6} H_1'' - \frac{1}{4} \left(\frac{F_0^{\frac{1}{2}}}{3 \eta^{\frac{1}{2}}} + \eta \right) H_1' + H_1 - \frac{1}{6 c_w Re} \left(\frac{\eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}}}{3} F_1'' + \frac{F_0^{\frac{1}{2}}}{6 \eta^{\frac{1}{2}}} F_1' + \frac{\eta}{2} F_1' \right) \\ & = \frac{5}{54 \tilde{\varepsilon}^2 Re \eta_L^2} \left(-\frac{F_0^2}{3} - \eta^{\frac{3}{2}} F_0^{\frac{3}{2}} - \eta^{\frac{3}{2}} (\eta^{\frac{1}{2}} - 1)^2 F_0^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$-\frac{1}{3} \eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}} N_1'' - \frac{1}{4} \left(\frac{F_0^{\frac{1}{2}}}{3 \eta^{\frac{1}{2}}} + \eta \right) N_1' - N_1 - \frac{1}{c_w Re} \left(\frac{2 \eta^{\frac{1}{2}} F_0^{\frac{1}{2}}}{3} K_1'' + \frac{F_0^{\frac{1}{2}}}{3 \eta^{\frac{1}{2}}} K_1' + \eta K_1' \right) = 0. \quad (3.81)$$

Hier sind die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Symmetrielinie } \eta = 0: & \quad H_1' = 0, & \quad N_1' = 0, \\ \text{Außenfeld } \eta = \pm 1: & \quad H_1 = 0, & \quad N_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

und die integrale Wärmebilanzen

$$\int_0^1 H_{1(\eta)} d\eta = \frac{3}{154 \tilde{\varepsilon}^2 \eta_L^2 Re}, \quad (3.83)$$

$$\int_0^1 N_{1(\eta)} d\eta = 0, \quad (3.84)$$

zu beachten. Die Gleichungen sind voneinander abhängig. Es handelt sich um lineare, inhomogene Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten. Für die oben angeführten Gleichungen scheint eine analytische Lösung schwierig. Demnach müssen die Differentialgleichungen für die Formfunktionen $F_1(\eta)$, $K_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $I_1(\eta)$, $H_1(\eta)$ und $N_1(\eta)$ numerisch über η integriert werden.

Die dimensionslosen Geschwindigkeiten U und V , sowie die dimensionslose Temperatur Θ können dann bei Kenntnis der Formfunktionen, gemäß

$$U = 1 - \tilde{\varepsilon} F_0(\eta) h_0(X) - \tilde{\varepsilon}^2 (F_1(\eta) h_1(X) + K_1(\eta) f_1(X)) - \dots,$$

$$V = \tilde{\varepsilon} V_0(\eta) m_0(X) + \tilde{\varepsilon}^2 (G_1(\eta) m_1(X) + I_1(\eta) q_1(X)) + \dots,$$

$$\Theta = \tilde{\varepsilon} H_0(\eta) k_0(X) + \tilde{\varepsilon}^2 (H_1(\eta) k_1(X) + N_1(\eta) s_1(X)) + \dots,$$

angegeben werden. Nach Einsetzen aller bekannter Funktionen erhalten wir folgende Gleichungen:

$$U = 1 - \frac{\sqrt{10} c_w}{18 \eta_L \sqrt{X}} (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^2 - \tilde{\varepsilon}^2 \left(F_1(\eta) \frac{1}{X} + K_1(\eta) 2\sqrt{X} \right) - \dots, \quad (3.87)$$

$$V = -\frac{\sqrt{10} c_w}{36 \eta_L X} \left(\eta^4 - 2\eta^{\frac{5}{2}} + \eta \right)^2 + \tilde{\varepsilon}^2 \left(G_1(\eta) \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}} + I_1(\eta) \right) + \dots, \quad (3.88)$$

$$\Theta = \frac{\sqrt{10}}{9 \text{Re} \eta_L \sqrt{c_w X}} (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^2 + \tilde{\varepsilon}^2 \left(H_1(\eta) \frac{1}{X} + N_1(\eta) 2\sqrt{X} \right) + \dots \quad (3.89)$$

3. Numerik

3.1 Numerische Integration

Um die Funktionen $F_1(\eta)$, $K_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $I_1(\eta)$, $H_1(\eta)$ und $N_1(\eta)$ berechnen zu können, werden die Differentialgleichungen numerisch integriert. Wir benutzen dazu ein Programm aus der HARWELL-Bibliothek mit dem Namen DC02AD. Dieses Programm integriert ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir müssen die Differentialgleichungen deshalb umformulieren. Dies geschieht mit der Substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1', \\ y_2 &= F_1, \\ y_3 &= \int F_1 d\eta, \\ y_4 &= G_1, \\ y_5 &= H_1', \\ y_6 &= H_1, \\ y_7 &= \int H_1 d\eta. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen auf der Symmetrielinie bei $\eta=0$ sind hierbei

$$\begin{aligned} y_1(0) &= F_1' = 0, \\ y_2(0) &= F_1 = ?, \\ y_3(0) &= \int F_1 d\eta = 0, \\ y_4(0) &= G_1 = 0, \\ y_5(0) &= H_1' = 0, \\ y_6(0) &= H_1 = ?, \\ y_7(0) &= \int H_1 d\eta = 0 \end{aligned}$$

Die Integration erfolgt nun von $\eta=0$ bis $\eta=1$. Für y_2 und y_6 können wir aus der Physik zunächst keine Randbedingungen ableiten. Wir geben hier deshalb Schätzwerte vor. Die Schätzwerte können wir im folgenden so lange verändern, bis wir die Randbedingungen im Außenfeld, d.h. bei $\eta=1$,

$$\begin{aligned} y_2(1) &= F_1 = 0 \\ y_4(1) &= G_1' = 0 \\ y_6(1) &= H_1 = 0 \end{aligned}$$

erfüllt haben. Um die Ähnlichkeitsfunktionen $K_1(\eta)$, $I_1(\eta)$, und $N_1(\eta)$ zu berechnen, gehen wir analog vor. Zuerst führen wir die Substitutionen

$$\begin{aligned} y_1 &= K_1', \\ y_2 &= K_1, \\ y_3 &= \int K_1 d\eta, \\ y_4 &= I_1', \\ y_5 &= N_1', \\ y_6 &= N_1, \\ y_7 &= \int N_1 d\eta, \end{aligned}$$

ein, wobei die Randbedingungen auf der Symmetrielinie bei $\eta=0$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} y_1(0) &= K_1' = 0, \\ y_2(0) &= K_1 = ?, \\ y_3(0) &= \int K_1 d\eta = 0, \\ y_4(0) &= I_1' = 0, \\ y_5(0) &= N_1' = 0, \\ y_6(0) &= N_1 = ? \\ y_7(0) &= \int N_1 d\eta = 0 \end{aligned}$$

Auch hier werden ausgehend von den Schätzwerten die Randbedingungen für y_2 und y_6 solange iteriert, bis die Randbedingungen im Außenfeld bei $\eta=1$ eingehalten werden. Dies sind

$$\begin{aligned} y_2(1) &= K_1 = 0, \\ y_4(1) &= I_1' = 0, \\ y_6(1) &= N_1 = 0. \end{aligned}$$

Kapitel 4

4. Auswertung

4.1 Ergebnisse der erster Ordnung

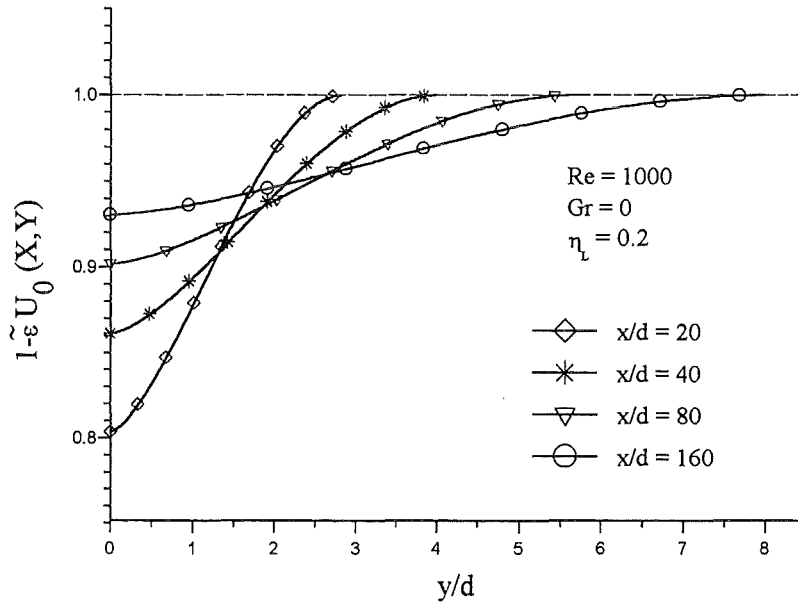


Abb. 4.1 Geschwindigkeitsprofile U_0 in der ersten Ordnung bei verändertem x/d

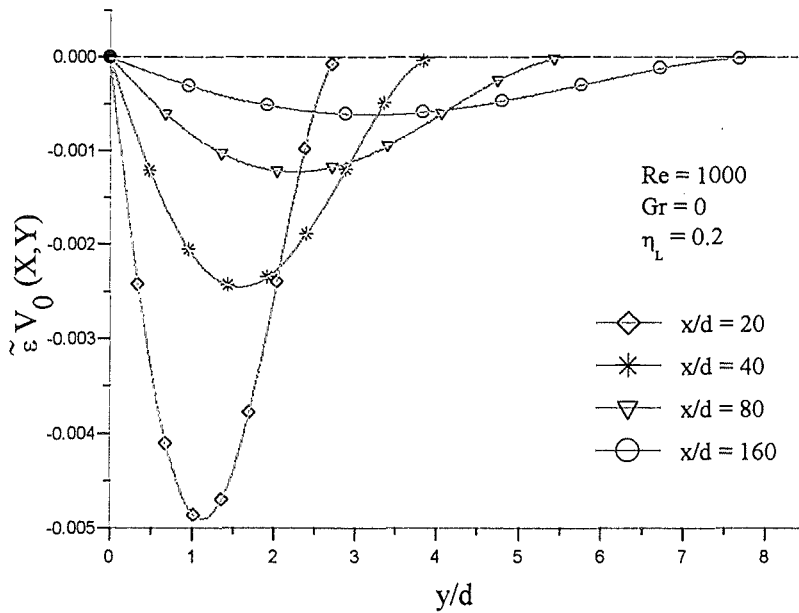


Abb. 4.2 Geschwindigkeitsprofile V_0 in der ersten Ordnung bei verändertem x/d

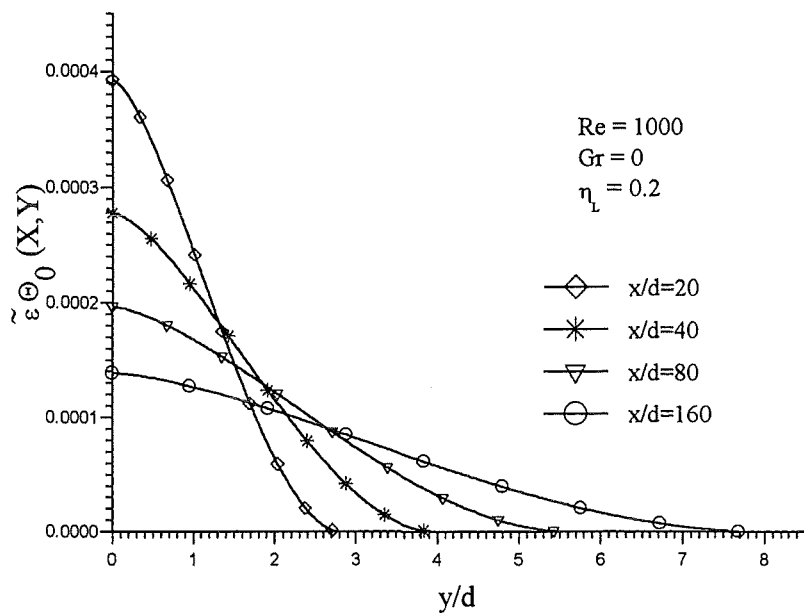


Abb. 4.3 Temperaturprofile Θ_0 in der ersten Ordnung bei verändertem x/d

In Abb. 4.1 sind die Geschwindigkeitsprofile U_0 in der ersten Ordnung dargestellt. Jedes dieser Profile entsteht in einem bestimmten Abstand x/d hinter dem Zylinder. Die Geschwindigkeitsprofile sind symmetrisch, d.h. die y -Achse ist zugleich die Symmetrieachse. Im Außenfeld ist die Strömung ungestört, es herrscht somit die Anströmgeschwindigkeit U_∞ . Zur Symmetrieachse hin wird die Geschwindigkeit kleiner, es bildet sich eine Nachlaufdüse aus. Der Widerstand des Zylinders bringt einen Impulsverlust in die Strömung ein, welcher für die Nachlaufdüse verantwortlich ist. Die Nachlaufdüse ist um so mehr ausgeprägt, je kleiner der Abstand zum Zylinder ist. Stromab füllt sie sich auf und das Profil flacht ab. Die Folge für das Auffüllen ist, daß Fluid nachströmen muß. Dies bewirkt ein zuströmendes Geschwindigkeitsfeld in y -Richtung mit negativen Werten für V_0 , wie Abb. 4.2 zeigt. Die Nachlaufdüse wird somit auch mit zunehmendem Abstand breiter.

Abb. 4.3 zeigt Temperaturprofile in einem bestimmten Abstand hinter dem Zylinder. Die Temperatur nimmt keinen Einfluß auf die Geschwindigkeitsprofile. In den Gleichungen der ersten Näherung befindet sich kein Auftriebsterm. Die Wärme, die vom Zylinder freigesetzt wird, wird lediglich durch die Strömung passiv transportiert. Mit zunehmendem Abstand verflachen die Temperaturprofile, welches auf die turbulenten Wärmeströme zurückzuführen ist.

4.2 Ergebnisse der zweiten Ordnung

4.2.1 Superposition

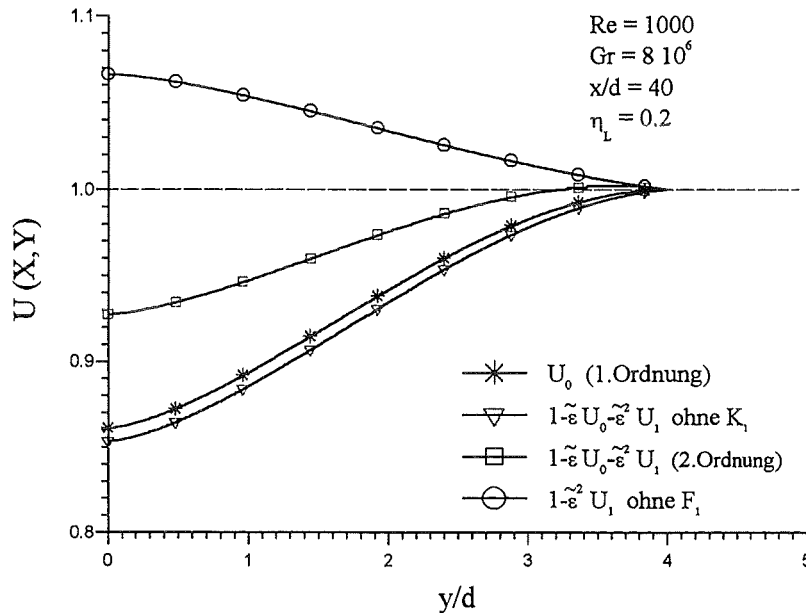


Abb. 4.4 Geschwindigkeitsprofile erster und zweiter Ordnung (Superposition)

In Abb. 4.4 sind Profile der Längsgeschwindigkeit U dargestellt. Wir finden hier Profile erster- und zweiter Ordnung. Für die Geschwindigkeitsprofile zweiter Ordnung werden die Ähnlichkeitsfunktionen $F_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $K_1(\eta)$, $H_1(\eta)$, $I_1(\eta)$ und $N_1(\eta)$ numerisch berechnet und zu den Ergebnissen erster Ordnung addiert.

Das Geschwindigkeitsprofil erster Ordnung (Symbole *), sowie das Geschwindigkeitsprofil zweiter Ordnung (Symbole ∇) sind nahezu gleich. Das Profil in der zweiten Ordnung enthält eine nichtlineare Korrektur des konvektiven Impulstransports. Beide Profile beziehen sich auf den reinen Nachlauf. Das Geschwindigkeitsprofil mit den Symbolen \circ berücksichtigt nur den Auftriebseffekt, der durch den beheizten Zylinder entsteht. Das Profil zweiter Ordnung für den reinen Nachlauf (Symbole ∇) und das Profil, welches den Auftrieb berücksichtigt, (Symbole \circ) sind nun gemäß Gleichung (3.85) zu überlagern. Als Ergebnis erhalten wir das vollständige Geschwindigkeitsprofil zweiter Ordnung, das nun sowohl den Nachlauf als auch den schwachen Auftriebsanteil berücksichtigt (Symbole \square).

4.2.2 Definition der Geschwindigkeitsamplituden und Grenzschichtbreite

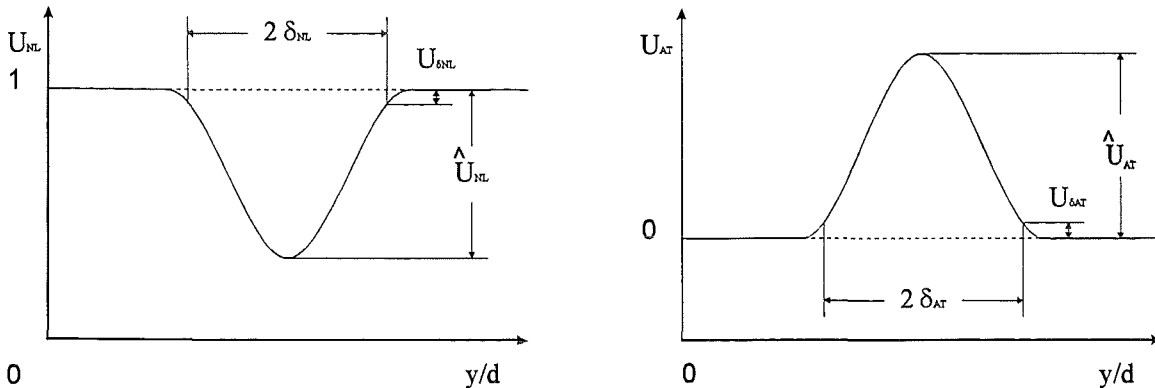


Abb. 4.5 Kinematische Grenzschichten und Geschwindigkeitsamplituden für den Nachlauf und den Auftrieb

$$\frac{U_{\delta_{NL}}}{\hat{U}_{NL}} = 0.0$$

$$\frac{U_{\delta_{AT}}}{\hat{U}_{AT}} = 0.0$$

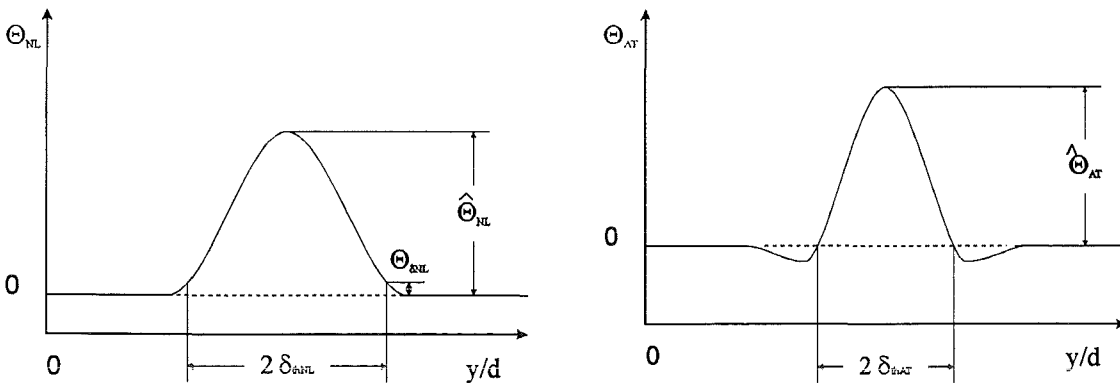


Abb. 4.6 Thermische Grenzschichten und Temperaturamplituden für den Nachlauf und Auftrieb

$$\frac{\Theta_{\delta_{thNL}}}{\hat{\Theta}_{NL}} = 0.01$$

Wie unsere Lösungen für das Geschwindigkeitsfeld und das Temperaturfeld in Gleichungen (3.85) bis (3.87) zeigen, können wir uns alle Profile aus einem Nachlaufanteil und einem Auftriebsanteil vorstellen. Die Überlagerung beider Effekte, zum Beispiel im Geschwindigkeitsprofil für \$U\$, führt zu komplexen Profilen, wie sie in Abbildung 4.4 exemplarisch dargestellt sind. Es wird hier schwierig aus den überlagerten Effekten Amplituden oder Grenzschichtbreiten abzuleiten, weil streng genommen jeweils zwei Amplituden und zwei Grenzschichtbreiten im Profil vorhanden sind. Wir separieren deshalb im folgenden generell diese Profile in einen Anteil, welcher vom Nachlauf herrührt und einen Anteil, welcher vom Auftrieb erzeugt ist. Dementsprechend sind dann die Amplituden und Grenzschichtbreiten für beide Anteile zu definieren.

In Abb. 4.5 sind die kinematische Grenzschicht und die Geschwindigkeitsamplituden für beide Anteile dargestellt. Für die Breite der kinematischen Grenzschicht verwenden wir den Ort, an dem die Amplitude U_g nur noch $1/100$ der Maximalamplitude \hat{U}_{NL} beträgt. In Abbildung 4.6 sind die thermischen Grenzschichten und die Temperaturamplituden von beiden Teilprofilen dargestellt. Der Rand der thermischen Grenzschicht liegt im Falle des Nachlaufanteils an dem Ort, an dem die Temperaturamplitude auf $1/100$ der Maximalamplitude abgefallen ist. Der Rand der thermischen Grenzschicht im Falle des Auftriebanteils liegt an dem Ort, wo das Temperaturprofil die Nulllinie schneidet.

4.2.3 Variation des Abstandes x/d hinter dem Zylinder

- Geschwindigkeitsprofile U

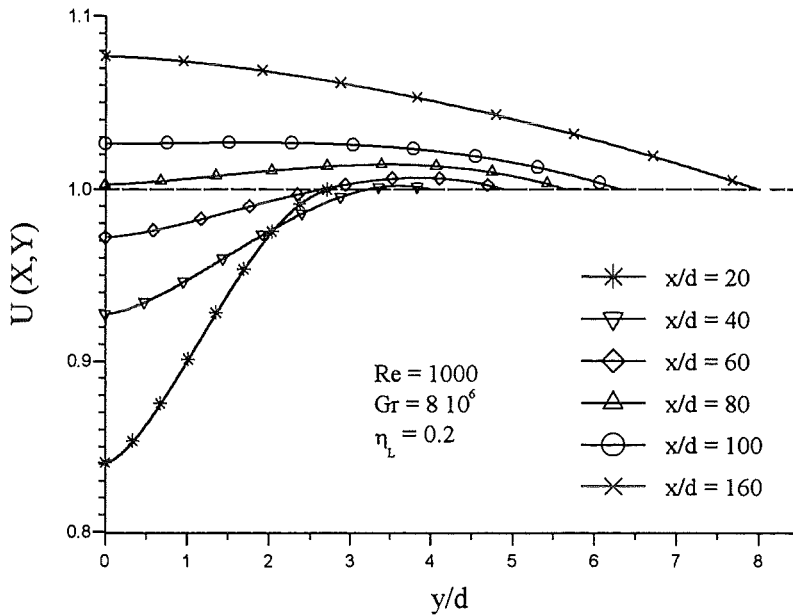


Abb. 4.7 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem x/d

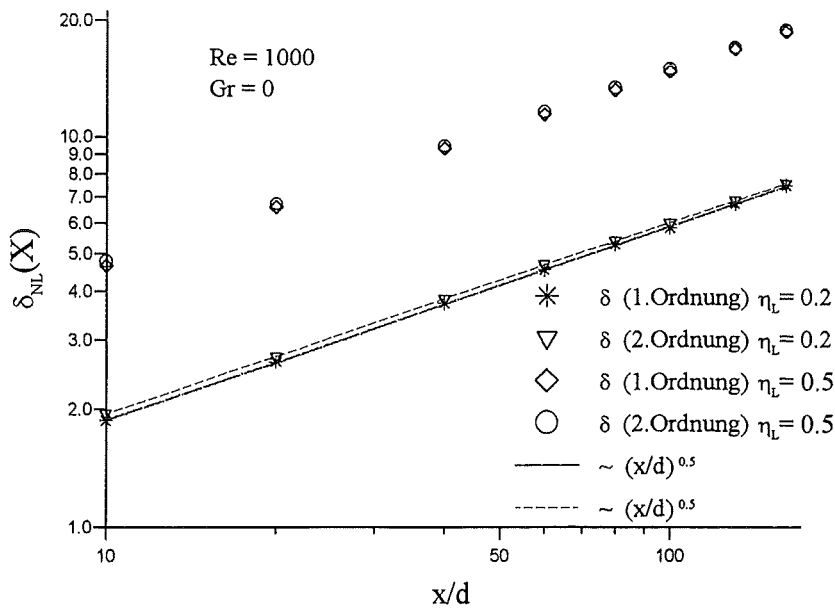


Abb. 4.8 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils

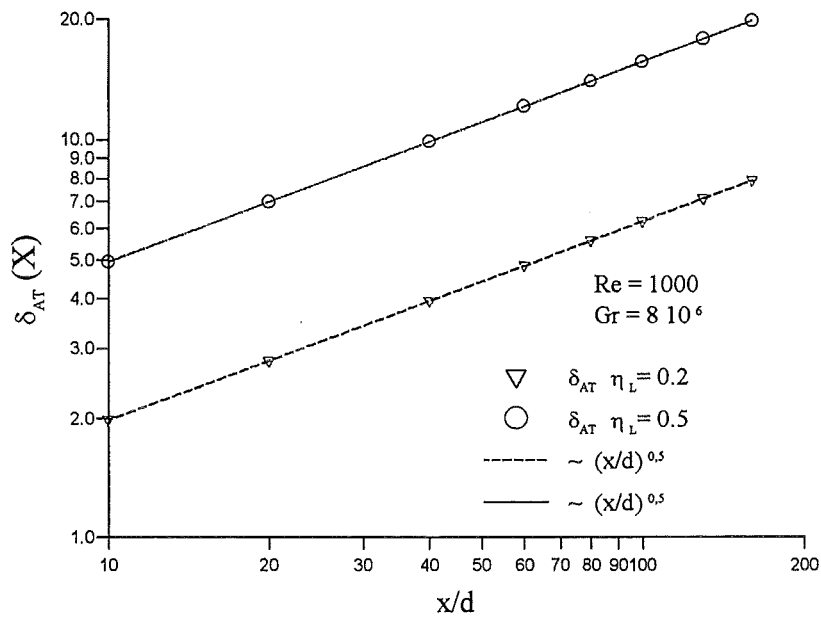


Abb. 4.9 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils

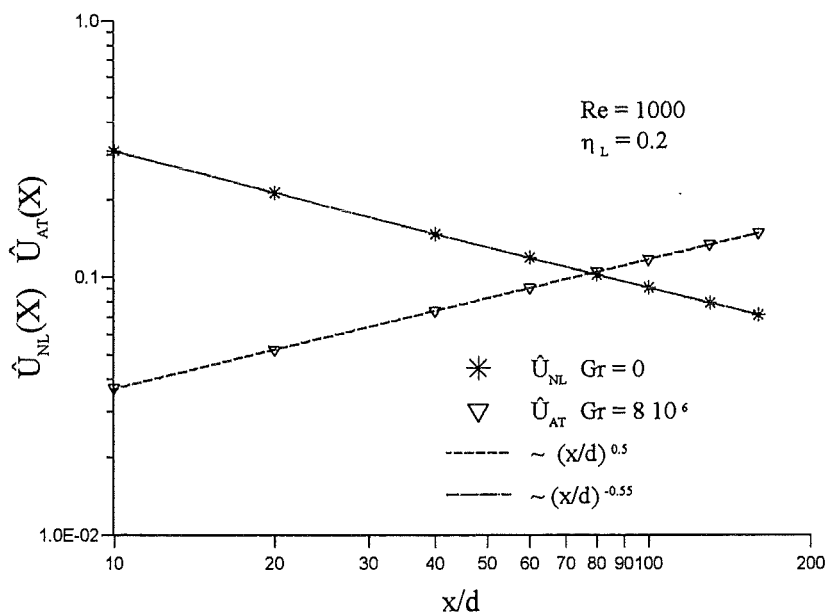


Abb. 4.10 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} als Funktion von x/d

- Geschwindigkeitsprofile V

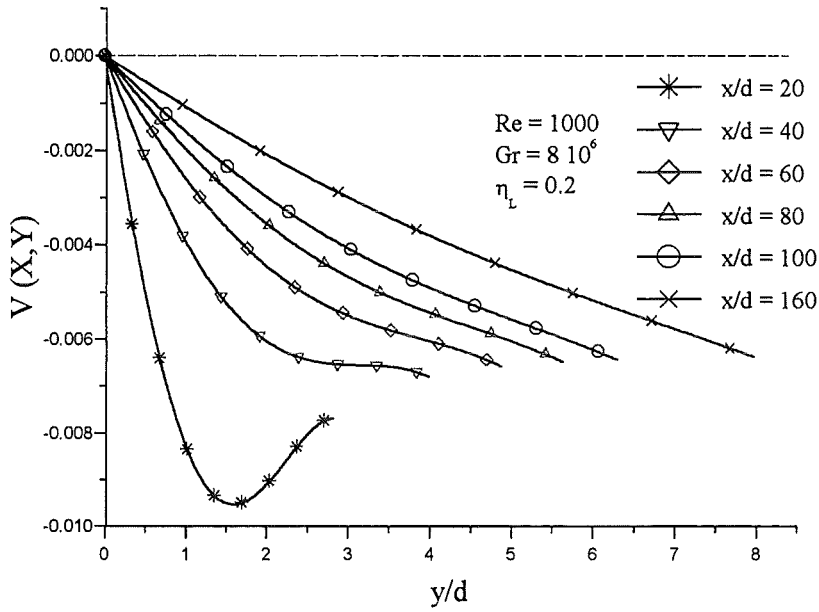


Abb. 4.11 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem x/d

- Temperaturprofile Θ

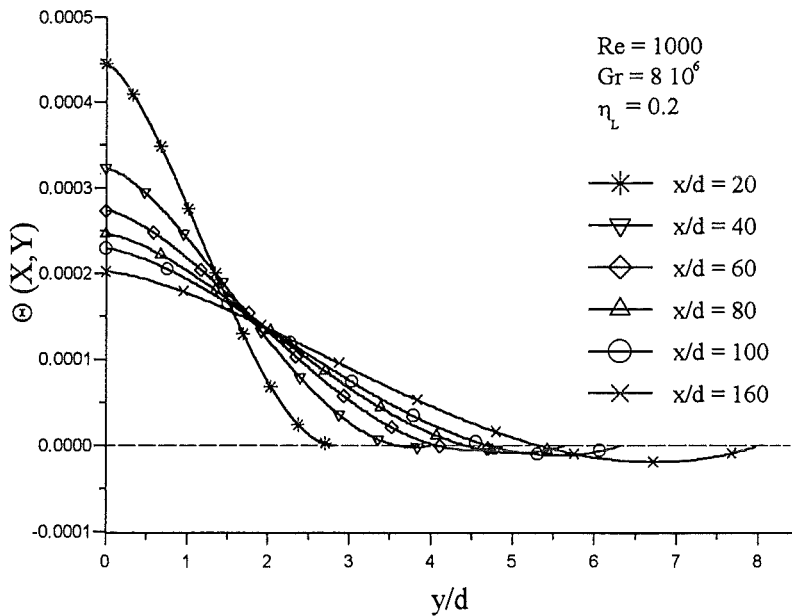


Abb. 4.12 Temperaturprofile Θ bei verändertem x/d

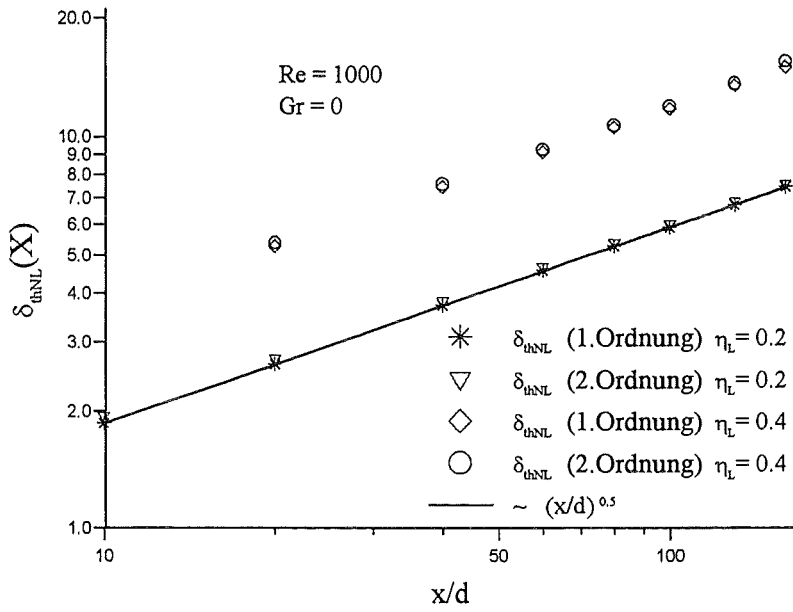


Abb. 4.13 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thNL} des Nachlaufanteils

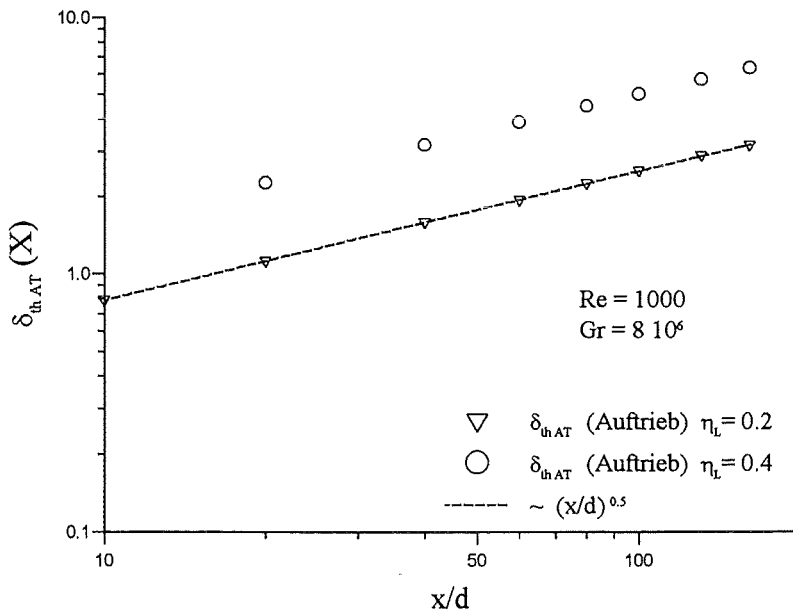


Abb. 4.14 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thAT} des Auftriebanteils

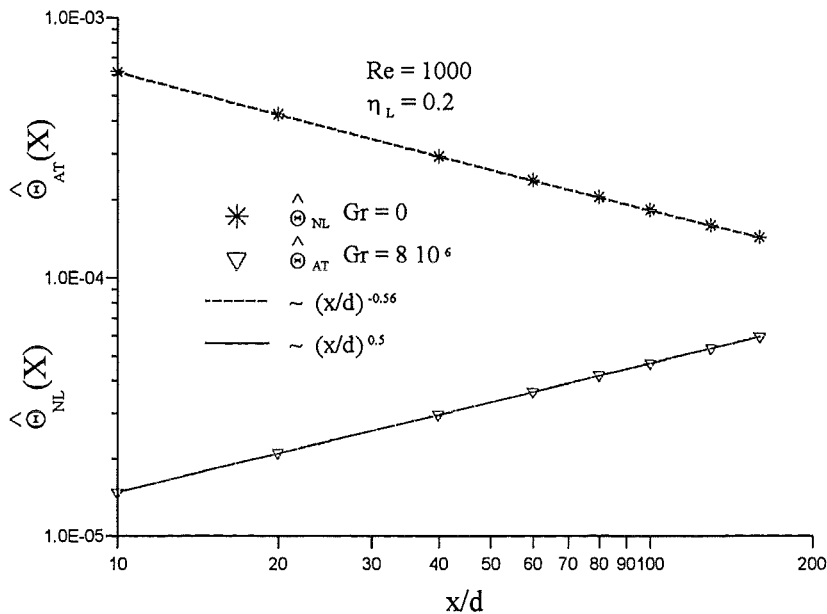


Abb. 4.15 Temperaturamplituden $\hat{\Theta}$ als Funktion von x/d

Abbildung 4.7 zeigt Profile der Längsgeschwindigkeit U in verschiedenen Entfernungen x/d hinter dem Zylinder. Wir erkennen zum einen ein Auffüllen der Nachlaufdüse hinter dem Zylinder in Verbindung mit einer Verbreiterung der Profile. Zum zweiten führt der Auftriebseffekt zu einer Beschleunigung der Strömung, insbesondere für große x/d . So werden für große x/d die Geschwindigkeiten größer als in der Anströmung, insbesondere im Zentrum des Profils.

In Abbildung 4.8 ist die kinematische Grenzschichtbreite des Nachlaufanteils in unterschiedlichen Abständen x/d hinter dem Zylinder aufgetragen. Wir erkennen ein Ansteigen der kinematischen Grenzschichtbreite gemäß

$$\delta_{NL}(X) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{0,5}.$$

Zum Vergleich ist zusätzlich die kinematische Grenzschichtbreite in der ersten Ordnung eingetragen. Die Grenzschichtbreiten unterscheiden sich in erster und zweiter Ordnung nur geringfügig. Dies ist auf die nichtlinearen Korrekturen in der zweiten Ordnung zurückzuführen.

In Abb. 4.9 ist die kinematische Grenzschichtbreite des Auftriebanteils in verschiedenen Abständen hinter dem beheizten Zylinder dargestellt. Sie nimmt ebenfalls mit zunehmender Entfernung vom Zylinder zu. Diese Grenzschichtbreite weist eine Abhängigkeit

$$\delta_{AT}(X) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{0,5}$$

von der Lauflänge auf.

Vergleichen wir die Abhängigkeit der kinematischen Grenzschichtbreiten des Nachlaufanteils mit der kinematischen Grenzschichtbreite des Auftriebanteils, erkennen wir, daß beide bezüglich der Lauflänge die gleiche Abhängigkeit besitzen. Beide Anteile bedeuten eine Verbreiterung der kinematischen Grenzschicht.

Die Geschwindigkeitsamplituden der Längsgeschwindigkeiten aus beiden Anteilen sind für verschiedene Abstände hinter dem Zylinder in Abbildung 4.10 gezeigt. Die Geschwindigkeitsamplituden des Nachlaufanteils werden mit zunehmender Lauflänge kleiner. Sie folgen der Abhängigkeit

$$\hat{U}_{NL}(X) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{-0,55}$$

Dies bedeutet, daß wegen $\hat{U}_{NL} \rightarrow 0$ der Nachlauf für $x/d \rightarrow \infty$ aufgefüllt wird. Die Längsgeschwindigkeit des Auftriebanteils steigt hingegen mit der Lauflänge x/d an. Es zeigt sich eine Abhängigkeit gemäß

$$\hat{U}_{AT}(X) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{0,5}$$

Wir erkennen ein gegenläufiges Verhalten der Amplituden der Längsgeschwindigkeit. Während die Amplitude des Nachlaufanteils absinkt und deshalb der Nachlauf aufgefüllt wird, steigt die Amplitude der Geschwindigkeit des Auftriebanteils mit der Lauflänge immer weiter an.

In Abbildung 4.11 sind Profile der Quergeschwindigkeit V in verschiedenen Abständen hinter dem Zylinder aufgetragen. Das Auffüllen der Nachlaufdelle und die Auftriebsströmung bewirken, daß Fluid in y -Richtung von außen nach innen zufließen muß. Wir finden deshalb negative Werte für V . Die Verbreiterung des Nachlaufs stromab erkennen wir auch anhand der V -Profile. Darüber hinaus nehmen die Werte von V stromab deutlich ab. Der Zustrom von außen stellt offensichtlich einen Effekt aus der zweiten Ordnung dar. Dies erkennt man aus einem Vergleich von Abbildung 4.2 mit Abbildung 4.11. Der linearisierte Nachlauf erster Ordnung zeigt generell Profile, welche im Außenfeld $V=0$ aufweisen. Die Korrektur der Nichtlinearitäten des Nachlaufs und der Auftriebseffekt führen dann aber in zweiter Ordnung zu einer Zuströmung im Außenfeld, d.h. zu $V \neq 0$.

Eine Reihe von Temperaturprofilen für geänderte Werte x/d ist in Abb. 4.12 gezeigt. Wir finden nahe am Zylinder ausgeprägte Profile. Mit zunehmendem Abstand hinter dem Zylinder flachen die Profile ab, indem sie sich verbreitern und gleichzeitig die Amplitude abnimmt. Im Vergleich zum linearisierten, passiven Temperaturfeld der ersten Ordnung (vgl. Abb. 4.3) finden wir hier höhere Temperaturwerte. Es sollte noch darauf hingewiesen werden, daß die negativen Werte für Θ im Außenfeld, wie sie insbesondere für große x/d in den Profilen auftauchen, unphysikalisch sind. Hier ist der Gültigkeitsbereich unserer Näherungslösung verlassen, wie das noch ausführlich im Abschnitt 6.1 erläutert ist.

In Abb. 4.13 ist die thermische Grenzschichtbreite des Nachlaufanteils für verschiedene Abstände hinter dem Zylinder dargestellt. Es liegt eine Abhängigkeit

$$\delta_{\text{thNL}}(\mathbf{X}) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{0,5}$$

bezüglich der Lauflänge vor. Zum Vergleich ist in Abb. 4.13 die thermische Grenzschichtbreite in erster Ordnung eingetragen. Es zeigt sich nur eine geringe Differenz, die auf die nichtlinearen Korrekturen zurückzuführen ist.

Die thermische Grenzschichtbreite des Auftriebsanteils in verschiedenen Abständen hinter dem Zylinder ist in Abb. 4.14 gezeigt. Die Grenzschichtbreite nimmt mit der Lauflänge x/d zu. Wir erkennen eine Abhängigkeit gemäß

$$\delta_{\text{thAT}}(\mathbf{X}) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{0,5}$$

Somit ist aus beiden Anteilen, dem Nachlaufanteil und dem Auftriebsanteil der Temperaturprofile, eine identische Abhängigkeit von x/d zu erkennen.

In Abb. 4.15 sind die Temperaturamplituden aus beiden Anteilen über die Lauflänge x/d hinter dem Zylinder aufgetragen. Die Amplituden der Temperatur aus dem Nachlaufanteil nehmen gemäß

$$\hat{\Theta}_{\text{NL}}(\mathbf{X}) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{-0,56}$$

ab. Die Temperaturamplitude aus dem Auftriebsanteil nimmt gemäß

$$\hat{\Theta}_{\text{AT}}(\mathbf{X}) \sim \left(\frac{x}{d}\right)^{0,5}$$

zu. Dies ist offensichtlich eine Folge der auftriebsbedingten Zunahme der Geschwindigkeitsamplitude \hat{U}_{AT} (vgl. Abb. 4.10) stromab.

4.2.4 Variation des Mischungsweges η_L

- Geschwindigkeitsprofile U

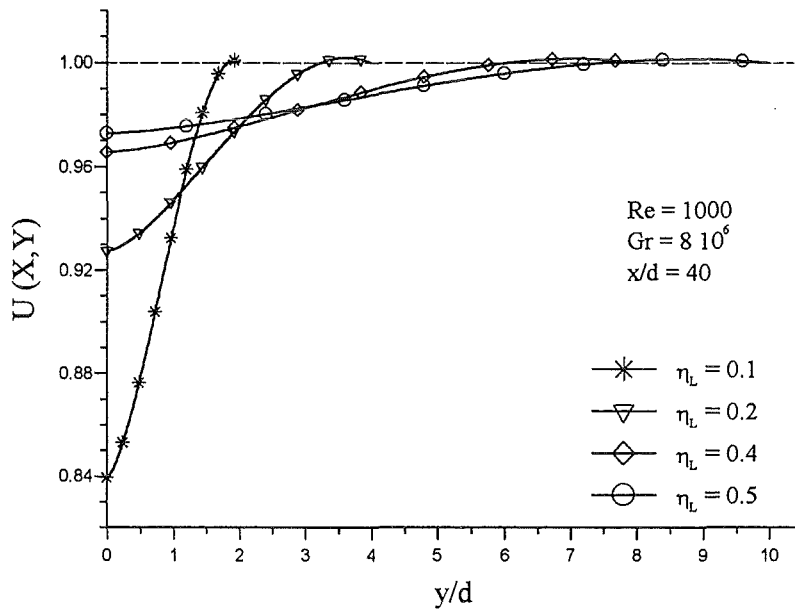


Abb 4.16 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem Mischungsweg η_L

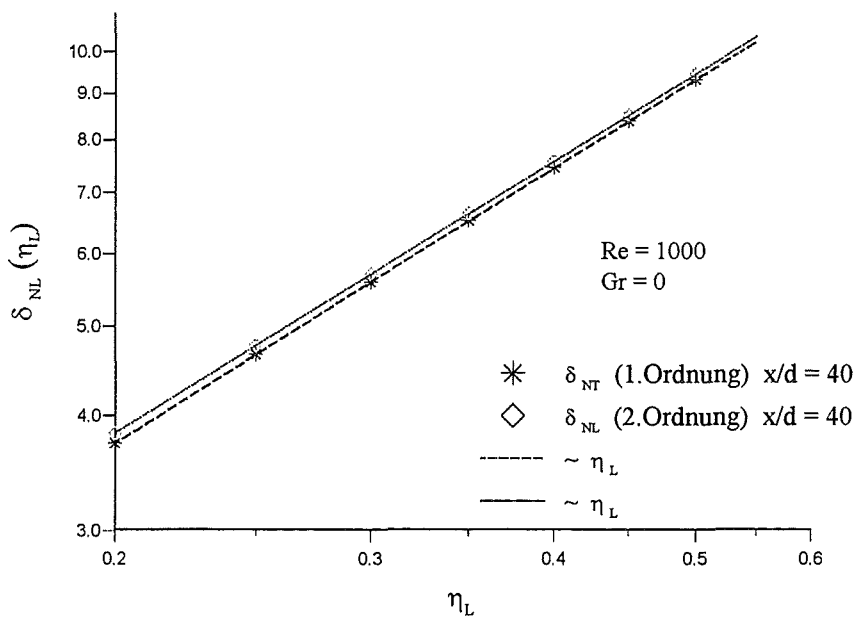


Abb. 4.17 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils

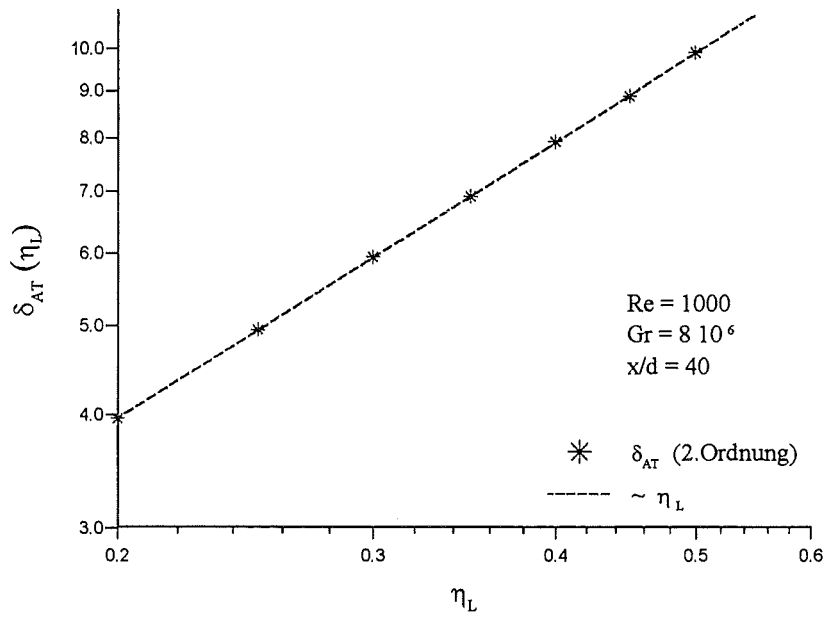


Abb. 4.18 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils

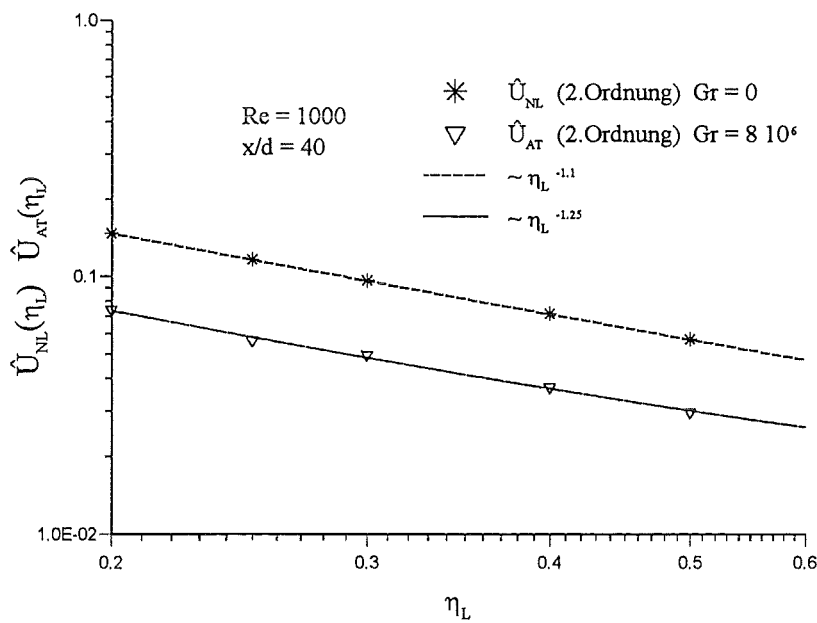


Abb. 4.19 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} aus beiden Anteilen als Funktion von η_L

• Geschwindigkeitsprofile V

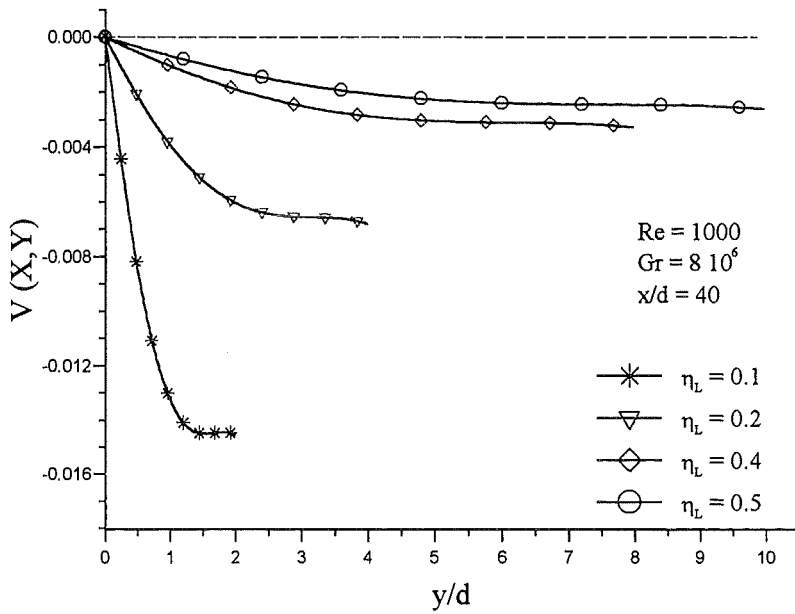


Abb. 4.20 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem η_L

• Temperaturprofile Θ

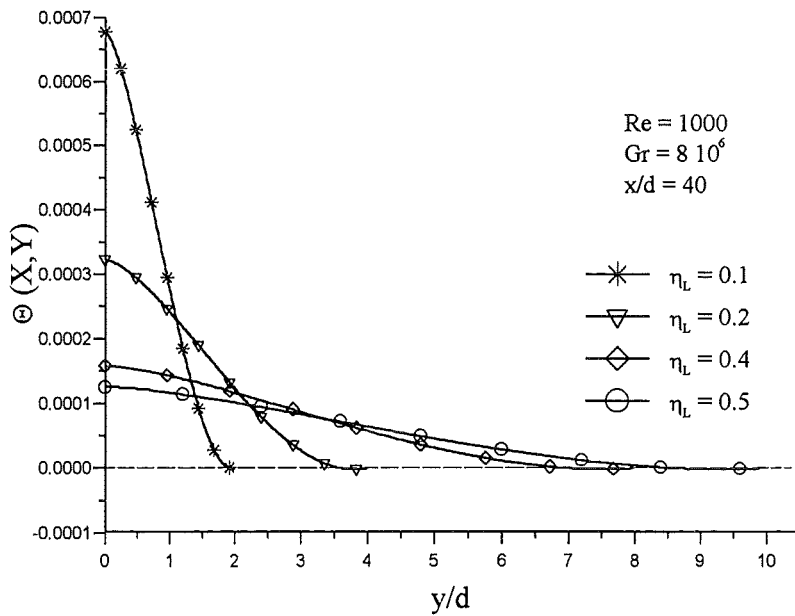


Abb. 4.21 Temperaturprofile Θ bei verändertem η_L

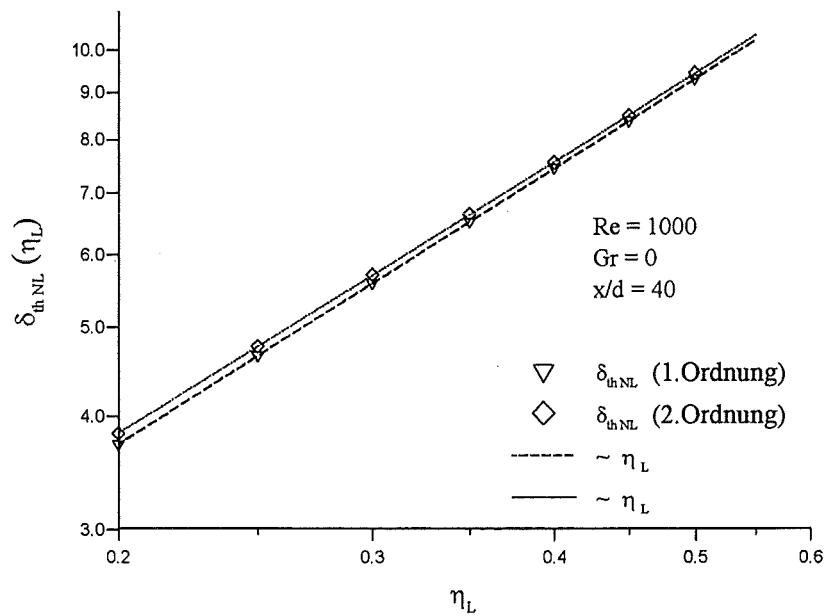


Abb. 4.22 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite $\delta_{th,NL}$ des Nachlaufanteils

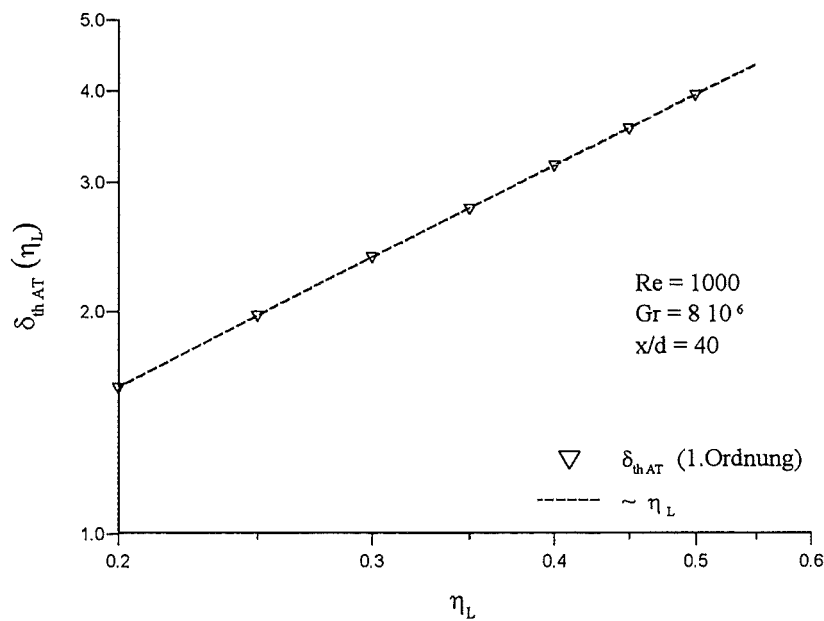


Abb. 4.23 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite $\delta_{th,AT}$ des Auftriebanteils

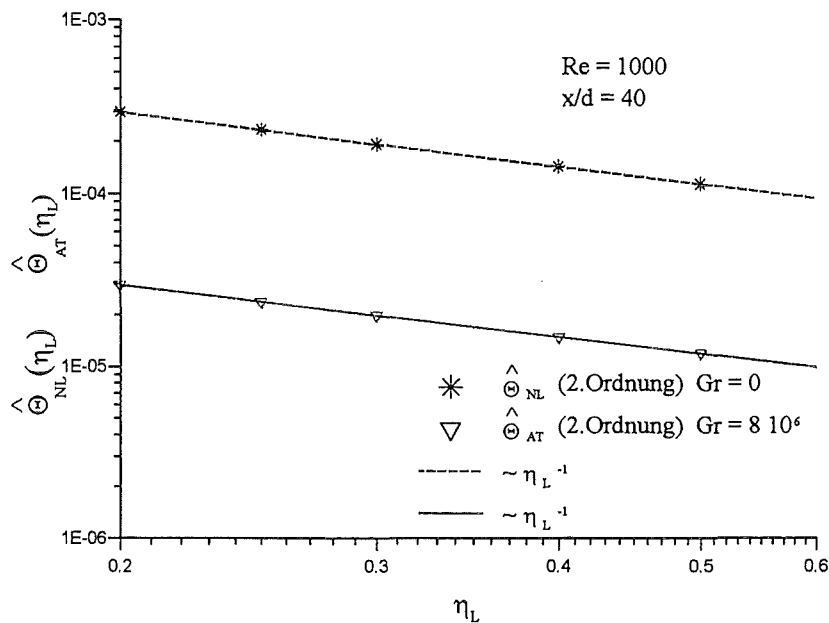


Abb. 4.24 Temperaturamplituden $\hat{\Theta}$ beider Anteile als Funktion von η_L

Abbildung 4.16 zeigt Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Mischungswege. Der Mischungsweg ist ein Maß für die Intensität der Turbulenz. Große Mischungswege bedingen den Impuls- und Wärmeaustausch über große Distanzen und deshalb eine effektive Quervermischung. Wir erkennen aus der Abbildung dementsprechend, daß die Geschwindigkeitsprofile mit zunehmendem Mischungsweg immer stärker zerfließen. Die kinematische Grenzschichtbreite aus beiden Anteilen nimmt konsistenterweise mit η_L zu. Wir finden

$$\delta_{NL}(\eta_L) \sim \eta_L,$$

$$\delta_{AT}(\eta_L) \sim \eta_L$$

für die beiden Anteile (vgl. Abb. 4.17 und 4.18).

In Abbildung 4.19 sind schließlich die Geschwindigkeitsamplituden beider Anteile als Funktion des Mischungswegs dargestellt. Die Abhängigkeiten ergeben sich zu

$$\hat{U}_{NL}(\eta_L) \sim \eta_L^{-1,1},$$

$$\hat{U}_{AT}(\eta_L) \sim \eta_L^{-1,25}.$$

Somit wird die Amplitude kontinuierlich aufgrund der größeren Quervermischung (η_L) abgebaut.

Abbildung 4.21 zeigt Temperaturprofile für verschiedene Mischungswege. Die Temperaturprofile sind für kleine Mischungswege stark ausgeprägt. Mit steigendem Mischungsweg flachen die Profile ab und werden gleichzeitig breiter. Dies ist ein Resultat der verbesserten Quervermischung mit wachsendem η_L , indem nun zusätzlich der turbulente Wärmeaustausch wirksam wird. Die thermischen Grenzschichtbreiten für den Nachlaufanteil und für den Auftriebanteil wachsen kontinuierlich mit

$$\begin{aligned}\delta_{\text{thNL}}(\eta_L) &\sim \eta_L, \\ \delta_{\text{thAT}}(\eta_L) &\sim \eta_L\end{aligned}$$

an. Dies kann aus den Daten in Abbildung 4.22 und 4.23 gefolgert werden.

In Abbildung 4.24 schließlich sind die Geschwindigkeitsamplituden beider Anteile eingetragen. Bei beiden Geschwindigkeitsamplituden ist ein Abfall gemäß

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{\text{NL}}(\eta_L) &\sim \eta_L^{-1}, \\ \hat{\Theta}_{\text{AT}}(\eta_L) &\sim \eta_L^{-1}\end{aligned}$$

zu erkennen. Das Verhalten der Temperaturamplituden ist somit völlig analog zu den beim Geschwindigkeitsfeld gefundenen.

4.2.5 Variation der REYNOLDS-Zahl Re

- Geschwindigkeitsprofile U

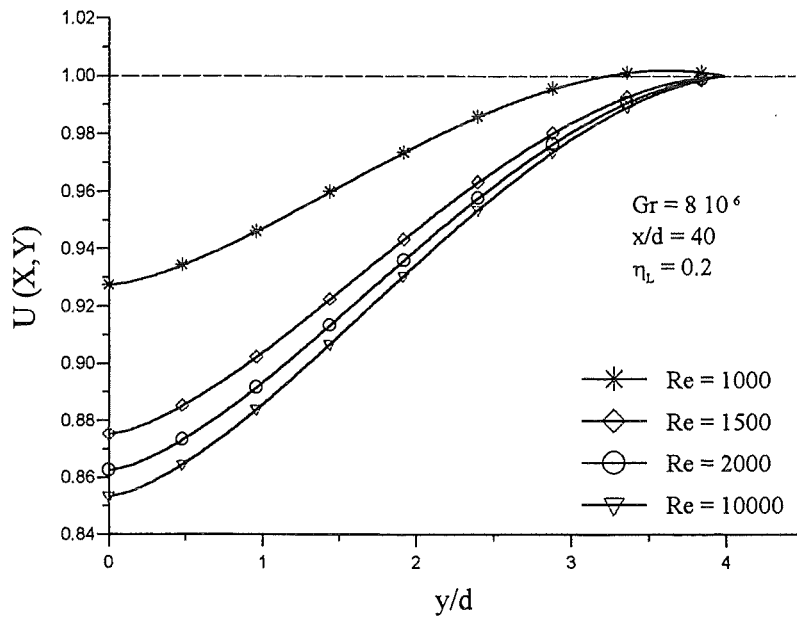


Abb. 4.25 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem Re

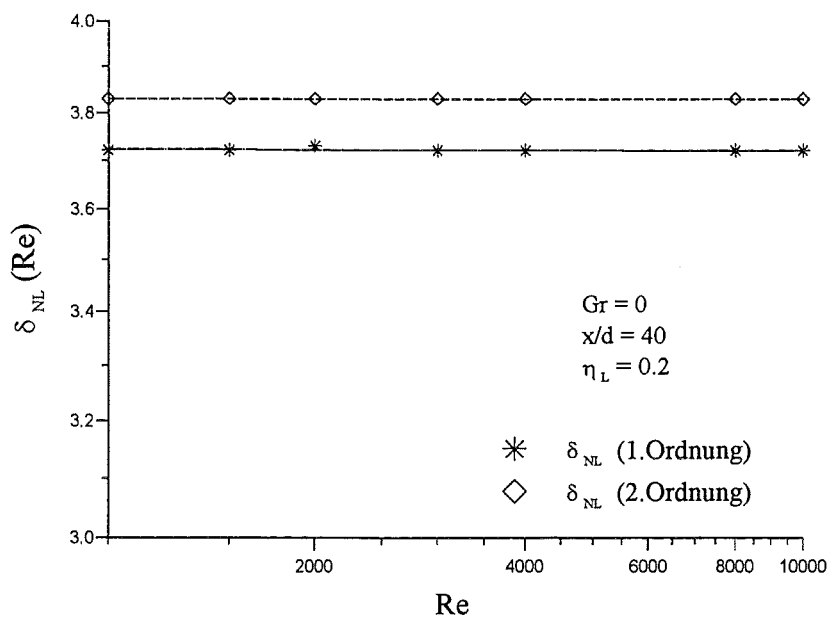


Abb. 4.26 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils

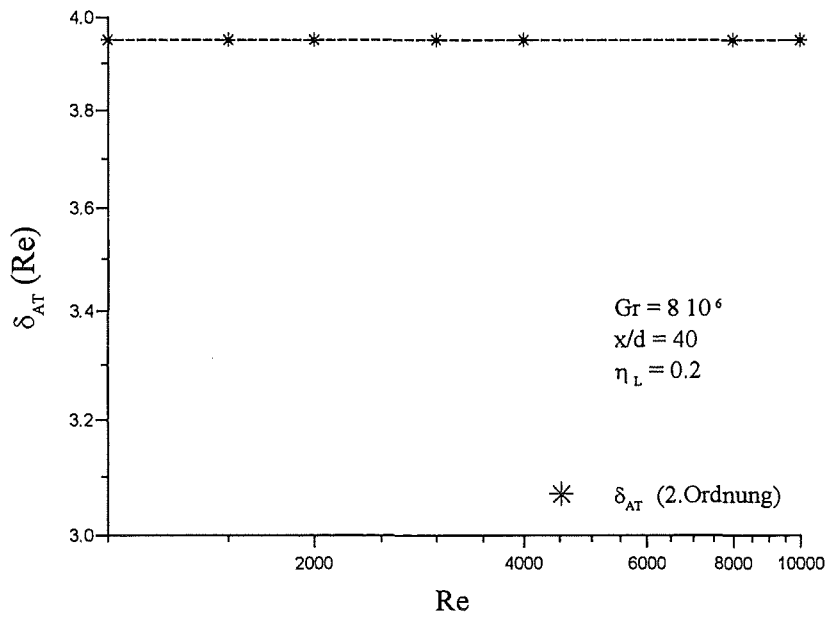


Abb. 4.27 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils

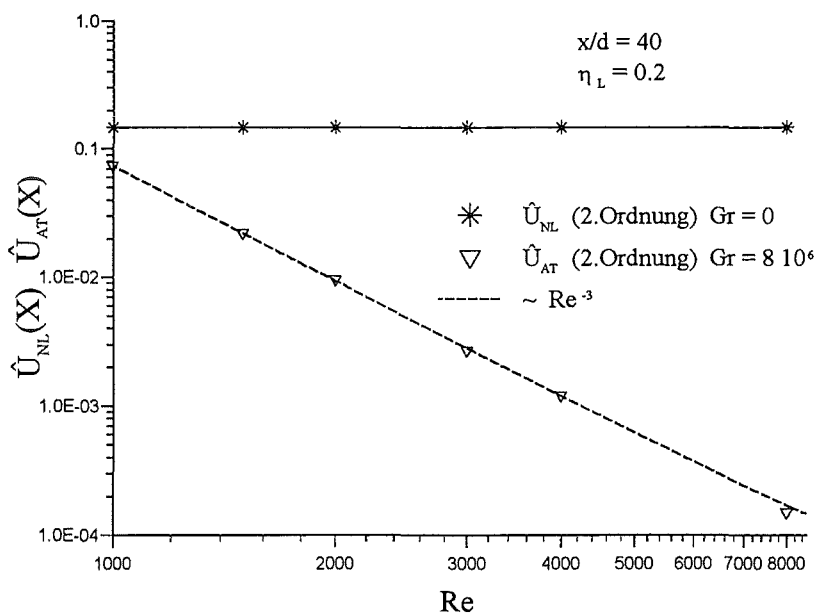


Abb. 4.28 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} beider Anteile als Funktion von Re

- Geschwindigkeitsprofile V

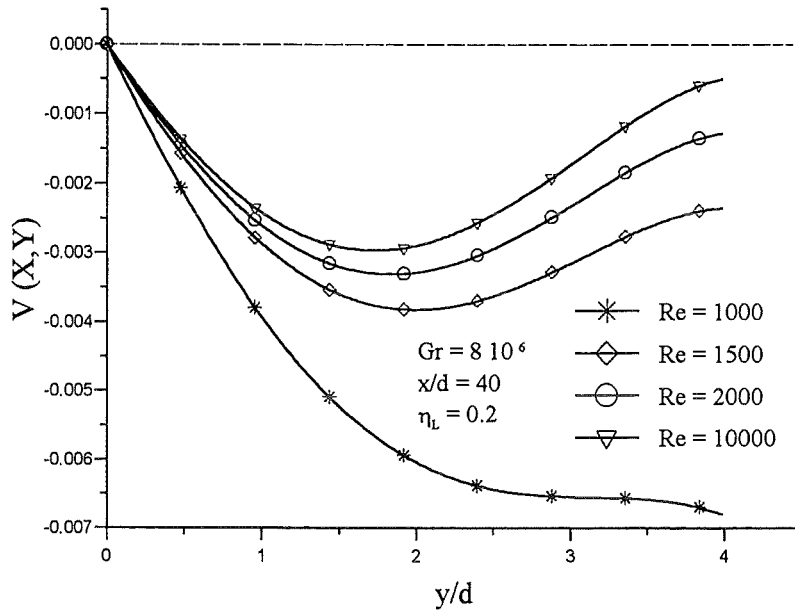


Abb. 4.29 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem Re

- Temperaturprofile Θ

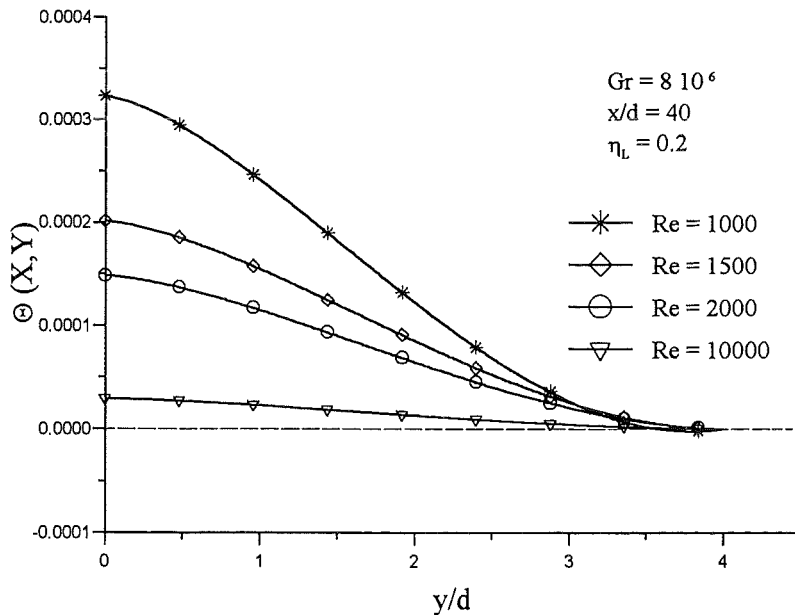


Abb. 4.30 Temperaturprofile Θ bei verändertem Re

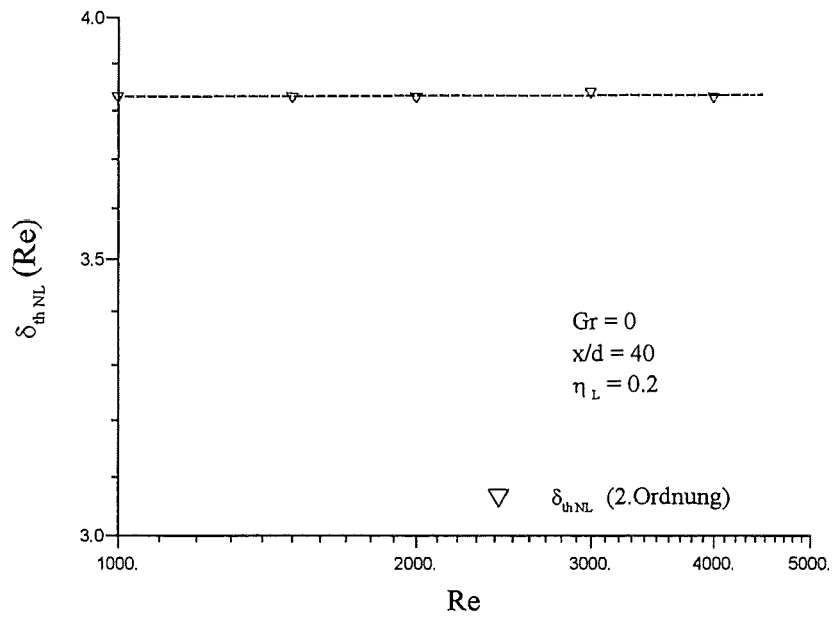


Abb. 4.31 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thNL} des Nachlaufanteils

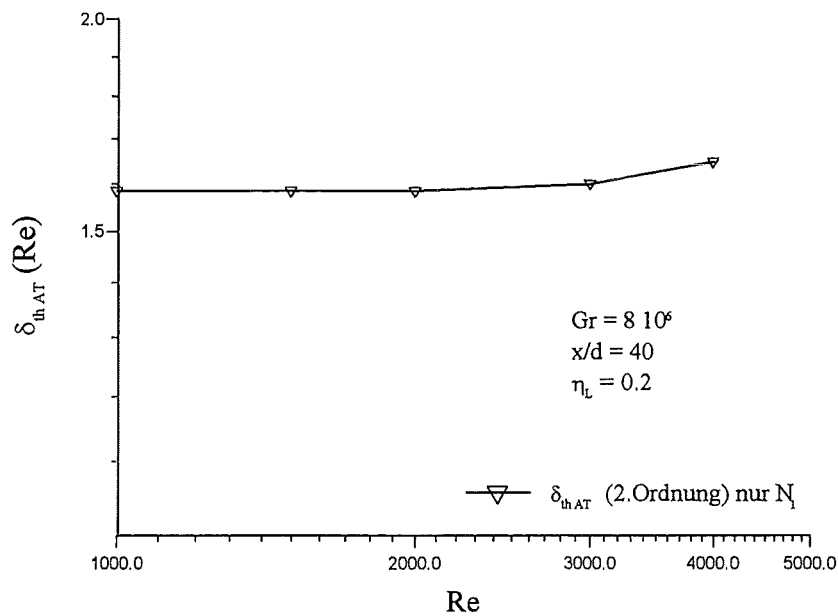


Abb. 4.32 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite δ_{thAT} des Auftriebanteils

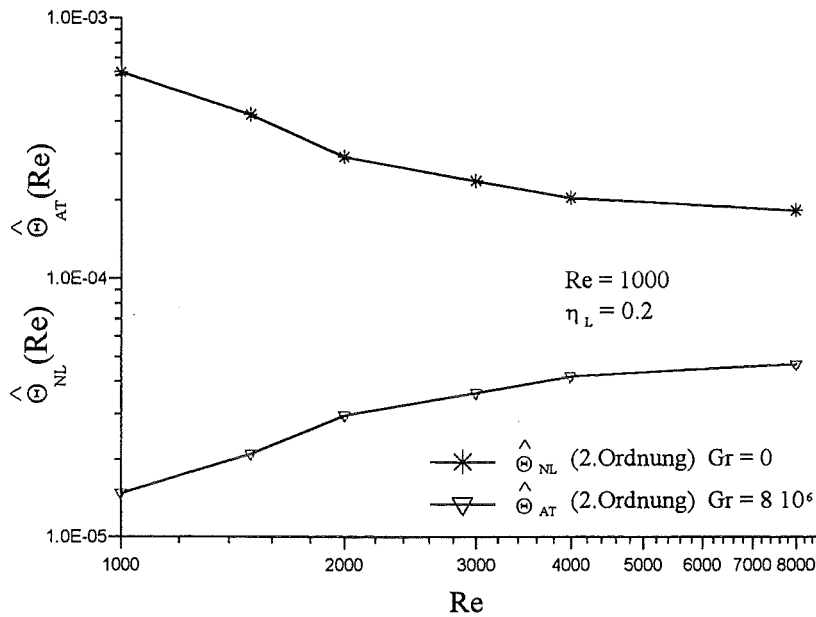


Abb. 4.33 Temperaturamplituden $\hat{\Theta}$ beider Anteile als Funktion von Re

Die REYNOLDS-Zahl wird im Problem im wesentlichen durch die Geschwindigkeit u_∞ der Anströmung verändert. Sie kann den Nachlaufanteil praktisch kaum beeinflussen, denn einerseits ist $c_w \cong \text{konstant}$ im betrachteten Bereich der REYNOLDS-Zahlen, andererseits ist die turbulente Quervermischung dominant gegenüber der molekularen Quervermischung. Der Auftriebsanteil wird demhingegen durch die REYNOLDS-Zahl beeinflusst, denn der Mischkonvektionsparameter ist Gr/Re^3 . Somit ist zu erwarten, daß der Auftriebsanteil für wachsende REYNOLDS-Zahlen geringer wird. Wir erkennen in der Tat, daß in den Profilen aus Abbildung 4.25 dies der Fall ist, indem der Auftriebsanteil bei großer REYNOLDS-Zahl immer schwächer wird. Die Grenzschichtbreite hingegen erscheint in diesem Bild immer gleich. In Abbildung 4.26 und 4.27 sind nun die Grenzschichtbreiten aus beiden Anteilen separat ausgewertet. Wir finden

$$\begin{aligned} \delta_{NL}(Re) &= \text{konst.}, \\ \delta_{AT}(Re) &= \text{konst.} \end{aligned}$$

für beide Anteile. Der Bereich der untersuchten REYNOLDS-Zahlen ist $1000 \leq Re \leq 10000$.

Die Geschwindigkeitsamplituden aus beiden Anteilen sind in Abbildung 4.28 gezeigt. Für den Nachlaufanteil erkennen wir wie erwartet konstante Geschwindigkeitsamplituden, d.h.

$$\hat{U}_{NL}(Re) = \text{konst.}$$

Somit hängt der Nachlaufanteil nicht von der REYNOLDS-Zahl ab. Für die Geschwindigkeitsamplituden des Auftriebanteils ergibt sich hingegen die Abhängigkeit

$$\hat{U}_{AT}(Re) = Re^{-3}.$$

Diese Abhängigkeit rührt vom Mischkonvektionsparameter Gr/Re^3 her und wird generell in dieser Form erwartet. Der Auftriebseffekt wird durch die verstärkte Anströmung abgeschwächt.

Abbildung 4.29 zeigt nun Profile der Quergeschwindigkeit V bei veränderter REYNOLDS-Zahl. Konsistent mit unseren Beobachtungen am U -Feld, wird durch größere REYNOLDS-Zahlen die Auftriebsströmung immer schwächer. Somit fällt der Zustrom von Fluid aus dem Außenfeld ab. Dieses Verhalten findet man beispielsweise im V -Feld bei $Re=10000$ bestätigt, indem die Zuströmung aus dem Außenraum fast verschwindet.

In Abbildung 4.30 sind Temperaturprofile für verschiedene REYNOLDS-Zahlen dargestellt. Erkennbar ist mit wachsender REYNOLDS-Zahl ein immer flacher werdender Verlauf. Dies ist physikalisch plausibel, da bei einem gleichbleibendem Wärmeeintrag bei intensiverer Zwangsströmung der Wärmestrom bei kleinerer Temperaturdifferenz abtransportiert werden kann. Dies bestätigt auch Abbildung 4.33, welche die Temperaturamplituden aus beiden Anteilen zeigt. Der Nachlaufanteil der Temperaturamplitude fällt offensichtlich mit wachsender REYNOLDS-Zahl ab. Der Anteil, welcher aus dem Auftrieb resultiert, steigt hingegen bei kleinerem Absolutwert an. Die thermischen Grenzschichtbreiten aus beiden Anteilen sind in erster Näherung konstant. Dies kann aus der Abbildung 4.31 und 4.32 geschlossen werden.

4.2.6 Variation der GRASHOF-Zahl Gr

- Geschwindigkeitsprofile U

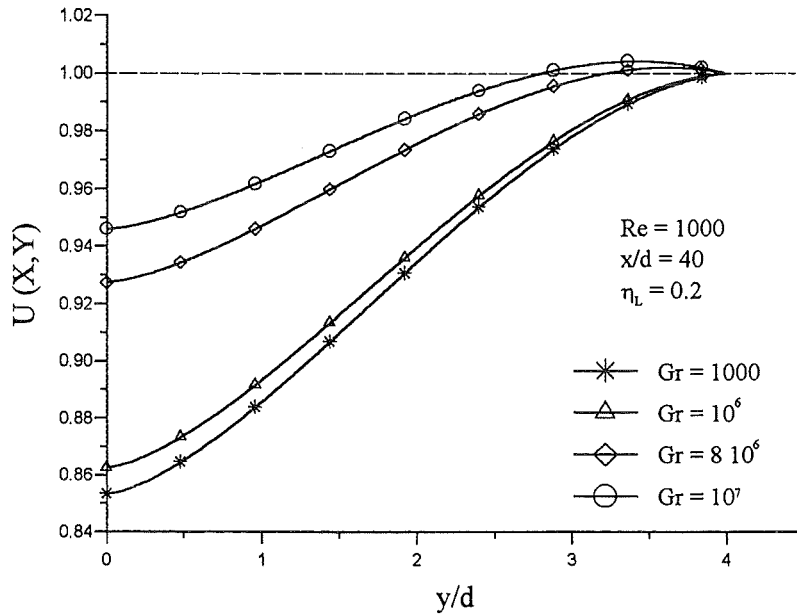


Abb. 4.34 Geschwindigkeitsprofile U bei verändertem Gr

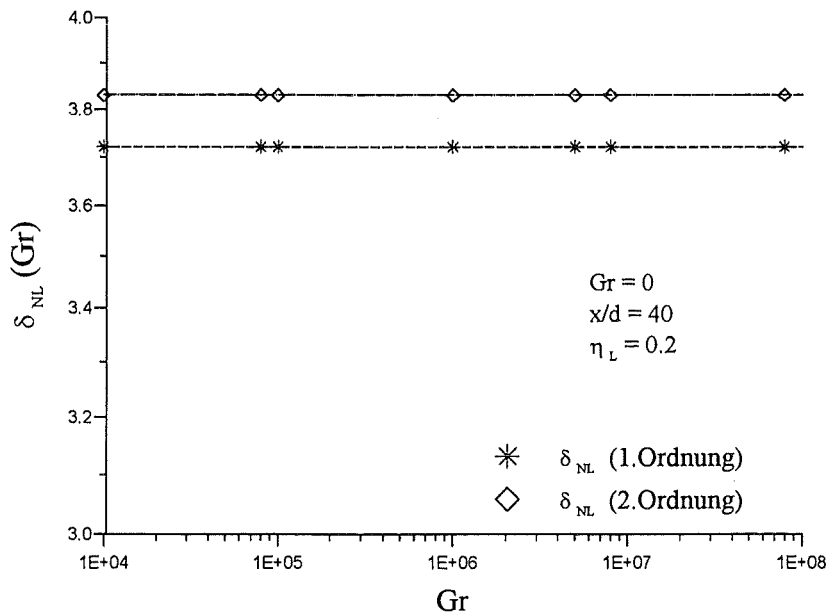


Abb. 4.35 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{NL} des Nachlaufanteils

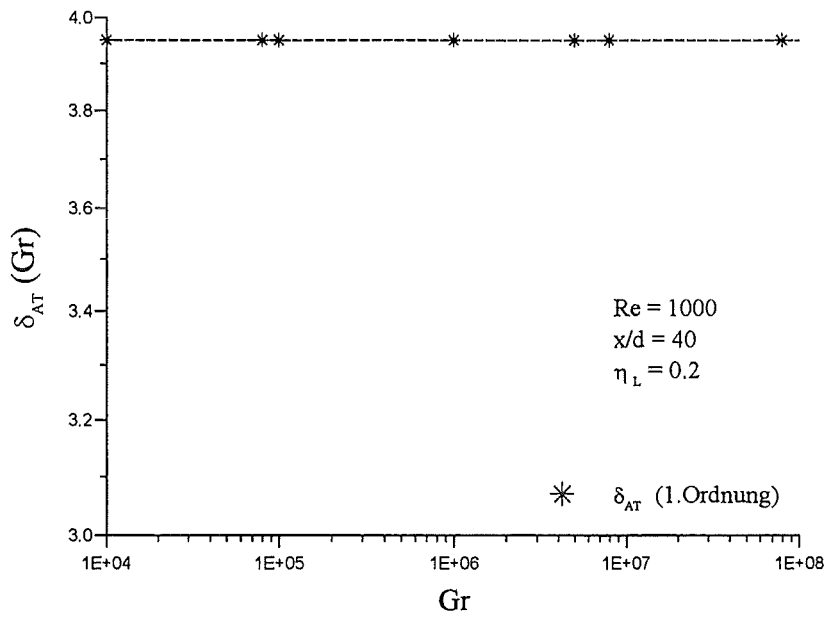


Abb. 4.36 Verhalten der kinematischen Grenzschichtbreite δ_{AT} des Auftriebanteils

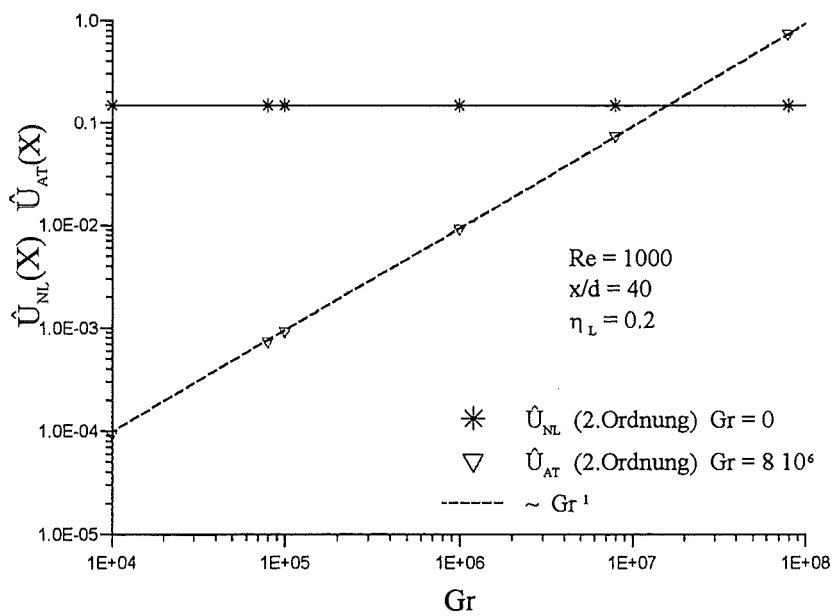


Abb. 4.37 Geschwindigkeitsamplituden \hat{U} aus beiden Anteilen als Funktion von Gr

- Geschwindigkeitsprofile V

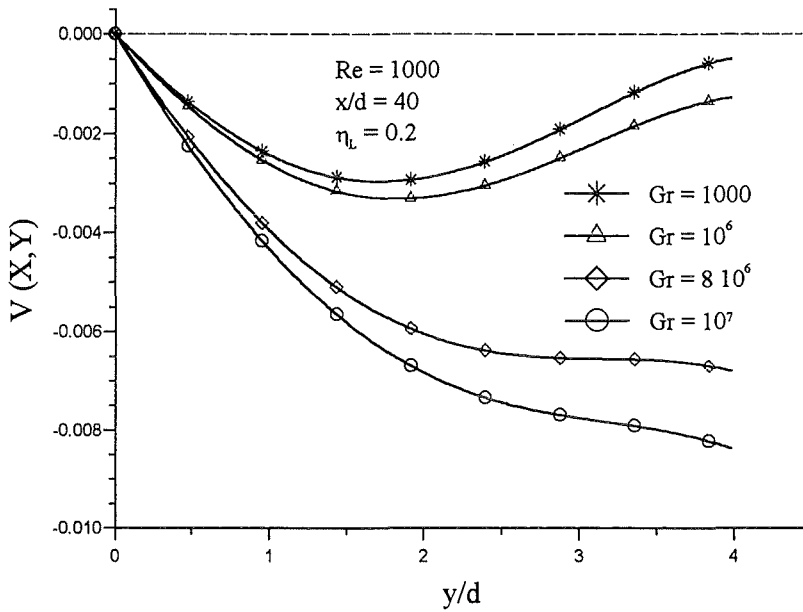


Abb. 4.38 Geschwindigkeitsprofile V bei verändertem Gr

- Temperaturprofile Θ

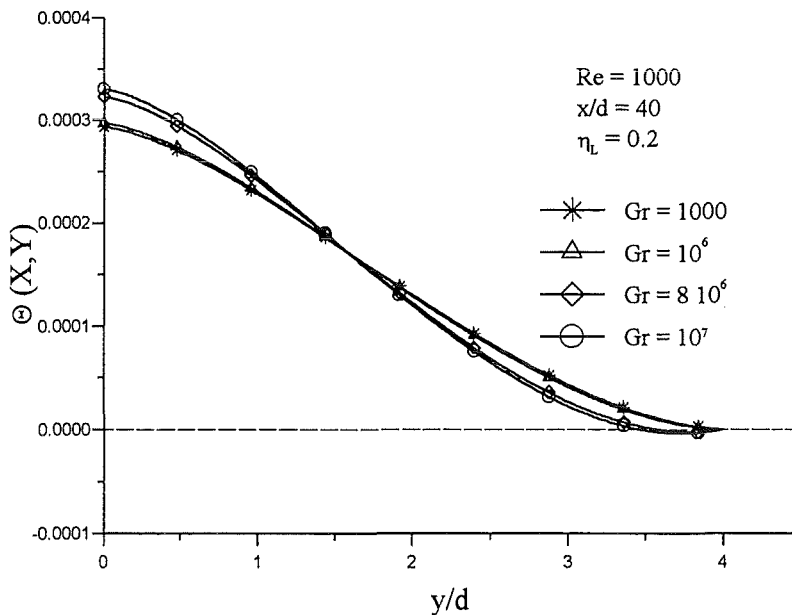


Abb. 4.39 Temperaturprofile Θ bei verändertem Gr

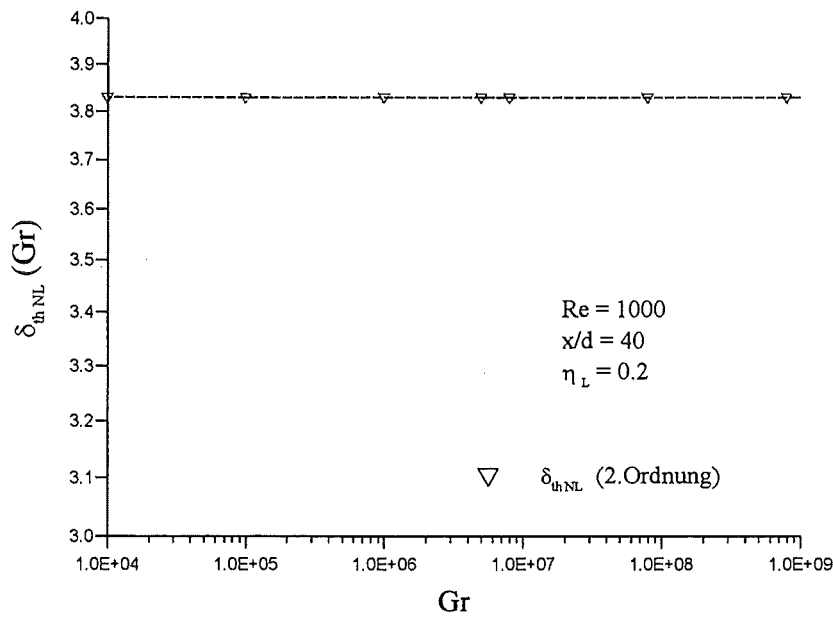


Abb. 4.40 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite $\delta_{th,NL}$ des Nachlaufanteils

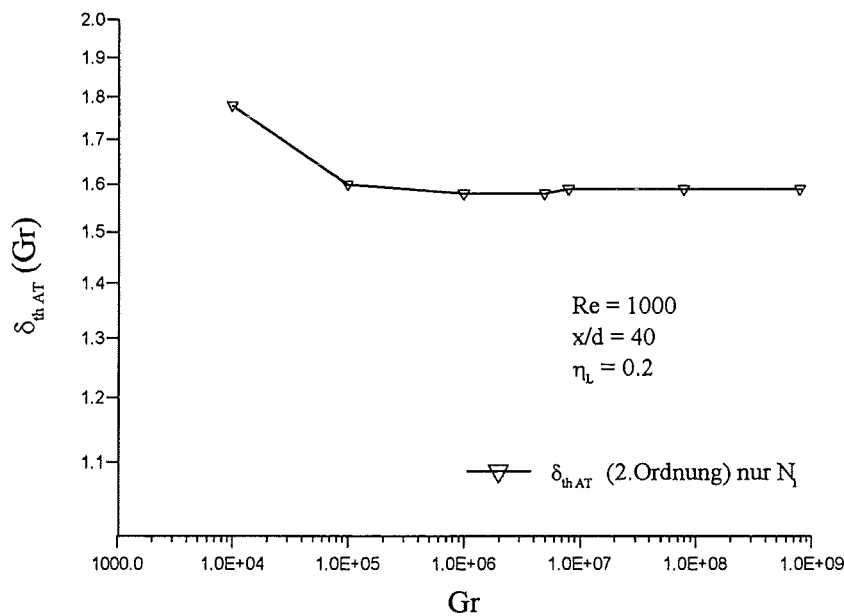


Abb. 4.41 Verhalten der thermischen Grenzschichtbreite $\delta_{th,AT}$ des Auftriebanteils

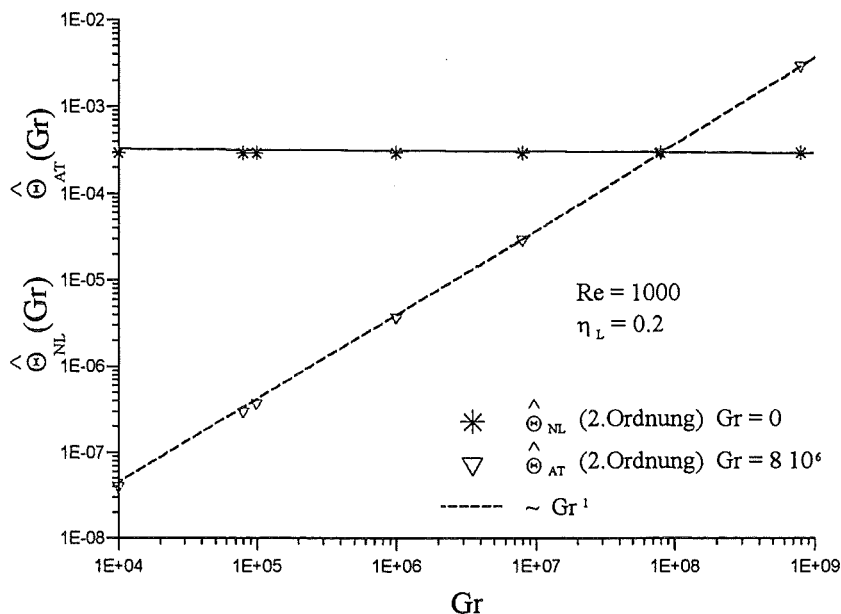


Abb. 4.42 Temperaturamplituden $\hat{\Theta}$ beider Anteile als Funktion von Gr

Die GRASHOF-Zahl beeinflusst das Problem im Auftriebsterm. Sie kann durch die Beheizung \dot{Q} oder durch αg , d.h. das Produkt aus Ausdehnungskoeffizient und Schwerkraft beeinflusst werden. Abbildung 4.34 zeigt nun einen Satz von Geschwindigkeitsprofilen U bei variiertem GRASHOF-Zahl. Wir erkennen, daß für wachsende Werte von Gr der Auftriebseffekt immer stärker auftritt und zu einer Beschleunigung des Mediums im Zentrum des Nachlaufs führt. Dies können wir auch in Abbildung 4.37 erkennen, welche die Geschwindigkeitsamplituden beider Anteile als Funktion der GRASHOF-Zahl zeigt. Wir finden hier die Abhängigkeiten

$$\hat{U}_{NL}(Gr) = \text{konst.},$$

$$\hat{U}_{AT}(Gr) \sim Gr.$$

Hier wird also nochmals verdeutlicht, daß die Beschleunigung infolge des Auftriebanteils auftritt, während die Amplitude des Nachlaufanteils völlig unabhängig von der GRASHOF-Zahl bleibt. Abbildung 4.34 suggeriert nun bereits, daß die Breite der Grenzschicht nicht von der GRASHOF-Zahl abhängt. Die quantitative Auswertung hierzu ist in den Abbildungen 4.35 und 5.36 gegeben. Es zeigt sich hier, daß beide Anteile zu konstanten Grenzschichtbreiten führen, d.h. es gilt

$$\delta_{NL}(Gr) = \text{konst.},$$

$$\delta_{AT}(Gr) = \text{konst.}$$

und somit keine Abhängigkeit von der GRASHOF-Zahl auftritt.

Abbildung 4.38 zeigt Profile der Quergeschwindigkeit V für variierte GRASHOF-Zahlen. Markant ist die geringe Zuströmung aus dem Außenraum im Falle schwacher Auftriebsströmung (kleine GRASHOF-Zahlen). Mit wachsenden GRASHOF-Zahlen wird die Zuströmung aus dem Außenraum immer intensiver. Analog sind in Abbildung 4.39 Profile der Temperatur für verschiedene GRASHOF-Zahlen aufgetragen. Der Einfluß von Gr kann zunächst nur als schwach bezeichnet werden. Dies ist aus einer genaueren Betrachtung der Temperaturamplituden in Abbildung 4.42 verständlich. Hier erweist sich der Nachlaufanteil der Temperaturamplitude als konstant, während der Auftriebsanteil mit der GRASHOF-Zahl anwächst. Wir finden

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{NL}(Gr) &= \text{konst.}, \\ \hat{\Theta}_{AT}(Gr) &\sim Gr.\end{aligned}$$

Die thermischen Grenzschichtbreiten sind in Abbildung 4.40 und 4.41 als Funktion von der GRASHOF-Zahl aufgetragen. Hier erkennen wir im wesentlichen konstantes Verhalten, d.h.

$$\begin{aligned}\delta_{thNL}(Gr) &= \text{konst.}, \\ \delta_{thAT}(Gr) &= \text{konst.}\end{aligned}$$

Lediglich im Bereich kleiner GRASHOF-Zahlen zeigt Abbildung 4.41 einen schwachen Abfall von δ_{thAT} .

Kapitel 5

5. Konvergenzbereich

5.1 Gültigkeitsbereich der entwickelten Lösungen

Wir haben in der vorliegenden Arbeit eine Näherungslösung entwickelt, welche die Strömung und das Temperaturfeld im "fernen" Nachlauf eines "schwach beheizten" Zylinders beschreibt. Der obige Satz beinhaltet schon einige verbale Einschränkungen, für den Gültigkeitsbereich unserer Lösung. Wir wollen deshalb hier den Gültigkeitsbereich so genau wie möglich quantifizieren und daneben einige qualitative Aussagen zu den verwendeten Näherungen anfügen.

Die zentrale Annahme bei der Ableitung unserer Grundgleichungen sind:

- die Grenzschichtapproximation,
- die Boussinesq-Approximation,
- das Prandtl'sche Mischungswegmodell mit $l = l_{th}$,
- Anwendung einer Reihenentwicklung für den fernen Nachlauf,
- Annahme schwacher Beheizung.

Die Verwendung der Grenzschichtapproximation führt bekanntermaßen auf parabolische Gleichungen, welche insbesondere für $X \rightarrow 0$ singuläres Verhalten der Zustandsgrößen liefern. In unserem Gleichungssatz wird folglich die Ausdehnung des Zylinders bei $X = 0$ nicht berücksichtigt und sowohl der Impulsverlust durch den Zylinder als auch der Wärmestrom treten an dieser Stelle punktuell ins Strom- und Temperaturfeld. Die Beschreibung rezirkulierender Zonen, wie sie direkt hinter dem ausgedehnten Zylinder sicherlich auftreten, ist mit Hilfe der Grenzschichtgleichungen gleichfalls nicht möglich. In einigem Abstand stromab, kann man davon ausgehen, daß eine brauchbare Beschreibung vorliegt, welche insbesondere im Integral den Impuls- und Wärmefluß richtig wiedergibt.

Die Boussinesq- und Mischungswegnäherung stellen beides Modelle dar, welche zum einen den Auftriebseffekt und zum anderen die turbulenten Schubspannungen und Wärmeströme modellieren. Die Boussinesq-Approximation ist hierbei sicherlich unproblematisch, indem sie zur Modellierung schwacher Auftriebskräfte benutzt wird. Die Arbeit von Schlichting [2]

demonstriert gleichfalls, daß der Mischungsweg l eine sinnvolle Beschreibung der turbulenten Schubspannung speziell in Nachläufen liefert. Unsere Erweiterung auf den turbulenten Wärmestrom mit $l=l_{th}$ beschränkt uns hier auf turbulente PRANDTL-Zahlen von $Pr_{tur} = 1$. Auch dies wird für Medien mit nicht zu extremer molekularer PRANDTL-Zahl als gute Näherung unproblematisch bleiben.

Die Reihenentwicklung für den fernen Nachlauf unterstellt in Gleichung (3.37), daß die Abweichung von der Anströmung relativ klein bleibt. Bei näherer Analyse der Lösungen Gl. (3.85) bis (3.87), sowie der Differentialgleichungen für die Formfunktionen $F_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $H_1(\eta)$, Gl. (3.72), (3.77) und (3.80), kann der wahre Entwicklungsparameter für den Nachlaufterm als

$$\varepsilon_{NL} \sim \frac{1}{\sqrt{X} \eta_L} \ll 1$$

identifiziert werden. Hierbei ergibt sich sofort eine Untergrenze für die zulässigen Werte von X , wobei aus den Experimenten von Schlichting $\eta_L \cong 0,18$ zu erkennen ist. Der Widerstandsbeiwert c_w des Zylinders ist in ε_{NL} im übrigen unabhängig von der REYNOLDS-Zahl als $c_w \sim$ angenähert.

Die Annahme schwacher Beheizung mit $Gr/Re^2 \ll 1$ ermöglicht uns den Auftriebsterm erst in zweiter Ordnung zu berücksichtigen. Wir müssen weiterhin sicherstellen, daß die Nachlaufentwicklung auch bei Anwesenheit der Auftriebseffekte gültig bleibt. Die sorgfältige Überprüfung der Lösungen, Gl. (3.85) bis (3.87), sowie der Differentialgleichungen für die Formfunktionen $F_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $H_1(\eta)$, Gl. (3.73), (3.78) und (3.81) zeigt auf, daß hierfür

$$\varepsilon_{AT} = \frac{Gr}{Re^3} \frac{\sqrt{X}}{\eta_L} \ll 1$$

erfüllt sein muß. Hieraus resultiert ganz offensichtlich eine Obergrenze für die zulässigen Werte X . Fassen wir beide Bedingungen zusammen, so ergibt sich

$$\frac{1}{\eta_L} \ll \sqrt{X} \ll \eta_L \frac{Re^3}{Gr}$$

als Gültigkeitsbereich unserer Lösungen. Anschaulich resultiert die Untergrenze für X aus der Tatsache, daß erst in einigem Abstand hinter dem Zylinder die Abweichungen von der Anströmung klein werden und deshalb unsere Lösung eine gute Näherung darstellt. Die Obergrenze resultiert aus der Tatsache, daß die Strömung durch die Auftriebseffekte stromab immer mehr beschleunigt wird. Der Korrekturwert in der Lösung aufgrund des Auftriebs darf aber nicht dominant werden, da ansonsten der Reihenansatz unzulässig wird.

Wir wollen schließlich Zahlenwerte für unseren Gültigkeitsbereich gewinnen, indem wir einen typischen Parametersatz mit $\eta_L = 0,2$, $Re = 2000$, $Gr = 10^7$ einsetzen. Es ergibt sich

$$5 < \sqrt{X} < 160.$$


```

y3int= 3.d00*cw/(308.d00*(epss*epss*etal*etal))
y7int= 3.d00/(1.54d02*(epss*epss*etal*etal*re))
y2un = 0.0d00
y2ob = 1.0d00
y6un = 0.0d00
y6ob = 1.0d-02
open(unit=13,file='f1.dat')
5  y2st = (y2un+y2ob)/2.d00
51 y6st = (y6un+y6ob)/2.d00
    neq = 7
    ep1 = 1.d-10
    ep2 = 1.d-10
    ip  = 13
    x0  = 1.d-10
    xe  = 1.0d00-1.d-10
    npr = 250
    yf(1) = 0.0d00
    yf(2) = y2st
    yf(3) = 0.0d00
    yf(4) = 0.0d00
    yf(5) = 0.0d00
    yf(6) = y6st
    yf(7) = 0.0d00
ccc
    call dc02ad(neq,x0,xe,yf,derivf,ep1,ep2,npr,ip)
ccc
    if(neq.gt.0) goto 96
    print*,' ***** ERROR *****: from DC02AD, IERR =',neq
96  y2err=dabs(yf(2)/y2st)
    if (y2err.lt.1.d-06) goto 6
    print*,'iteration y2:',y2st,yf(2)
    if (yf(2).lt.0.) y2ob = y2st
    if (yf(2).gt.0.) y2un = y2st
    rewind(unit=13)
    goto 5
cccccccc second iteration loop ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
6   y6err=dabs(yf(6)/y6st)
    if (y6err.lt.1.d-06) goto 61
    print*,'iteration y6:',y6st,yf(6)
    if (yf(6).lt.0.) y6ob = y6st
    if (yf(6).gt.0.) y6un = y6st
    rewind(unit=13)
    goto 51
cccccccc printout of result ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
61  write(5,1002) yf(1),yf(2),yf(3),y3int,yf(4),yf(5),yf(6),
1   yf(7),y7int
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccc calculating first order velocity field (k1,i1,n1 function) cccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    y3int= -gr*dsqrt(10.d00)/(40.d00 *re*re*re*
1   epss*epss*etal*dsqrt(cw))
    y7int= 0
    y2un = 0.0d00
    y2ob = -2.0d00
    y6un = 1.0d00
    y6ob = -1.0d00
    open(unit=12,file='k1.dat')
7   y2st = (y2un+y2ob)/2.d00
52  y6st = (y6un+y6ob)/2.d00

```



```

        close(unit=21)
ccc
        call system('gnuplot "temp.gnu"')
ccc end of plotting block ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        stop
        end
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        real*8 function f0(eta)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        real*8 eta,res
ccc
        res = (1.-(eta**1.5))*(1.-(eta**1.5))
        f0 = res
ccc
        end
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        subroutine derivf(x,y,f,n)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        implicit real*8 (a-h,o-z)
        common/param/ cw,epss,etal,gr,re
        real*8 y(n),f(n)
        integer*4 n
ccc
        s1 = f0(x)*f0(x)/3.d00
        s2 = x**(1.5d00)*f0(x)**(1.5d00)
        s3 = x**(1.5d00)*(x**(1.5d00)-1.d00)*(x**(1.5d00)-1.d00)
1         *f0(x)**(0.5d00)
        s4 = (1.d00-(x**(-1.5d00)))*x*y(1)/6.d00
        s5 = (5.d00*cw*(s1-s2+s3)/(108.d00*epss*epss*etal*etal))
1         + s4 - y(2)
ccc
        s6 = f0(x)*f0(x)/3.d00
        s7 = (x*f0(x))**(1.5d00)
        s8 = x**(1.5d00)*(x**(1.5d00)-1.d00)**2*dsqrt(f0(x))
        s9 = (dsqrt(f0(x))/(12.d00*dsqrt(x))+(x/4.d00))
        s10 = dsqrt(f0(x)*x)*s5/((x**(0.5d00))*(f0(x)**(0.5d00)))
        s11 = dsqrt(f0(x))*y(1)/(6.d00*dsqrt(x))
        s12 = dsqrt(x*f0(x))/6.d00
        s13 = 5.d00*(s6-s7+s8)/(54.d00*epss*epss*re*etal*etal)
        s14 = (s10+s11-(y(1)*x/2.d00))/(cw*re)
ccc
        f(1) = 3.d00*s5/((x**(0.5d00))*(f0(x)**(0.5d00)))
        f(2) = y(1)
        f(3) = y(2)
        f(4) = -0.5d00*x*y(1)-y(2)
        f(5) = (s13-s9*y(5)-y(6)-s14)/s12
        f(6) = y(5)
        f(7) = y(6)
ccc
        return
        end
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        subroutine derivk(x,y,f,n)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        implicit real*8 (a-h,o-z)
        common/param/ cw,epss,etal,gr,re
        real*8 x,y(n),f(n)
        integer*4 n
ccc

```

```

s1 = -dsqrt(10.d00)*gr*f0(x)/(9.d00*epss*epss*etal*
1  (re**3)*dsqrt(cw))
s2 = dsqrt(f0(x))*y(1)/(3.d00*dsqrt(x))
s3 = -2.d00*dsqrt(x)*dsqrt(f0(x))/3.d00
ccc
s4 = (dsqrt(f0(x))/(6.0d00*dsqrt(x)))+x/2
s5 = 2.0d00*dsqrt(f0(x))*dsqrt(x)*((s1+s2-y(2))/s3)/3.0d00
s6 = dsqrt(f0(x))*y(1)/(3.0d00*dsqrt(x))
s7 = -1.0d00*dsqrt(x*f0(x))/3.0d00
s8 = (s5+s6-x*y(1))/(cw*re)
ccc
f(1) = (s1+s2-y(2))/s3
f(2) = y(1)
f(3) = y(2)
f(4) = -x*y(1)+y(2)
f(5) = (s4*y(5)-y(6)+s8)/s7
f(6) = y(5)
f(7) = y(6)
ccc
return
end

```

Literaturverzeichnis

- [1] Müller, U. *Freie Konvektion und Wärmeübergang*. Skriptum der Vorlesung an der Universität Karlsruhe, WS 1993/94

- [2] Schlichting, H. 1930 *Über das ebene Windschattenproblem*, Diss.Göttingen, Ing.-Arch.1, 533 ff

- [3] Schmidt, W. 1941, *Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft*, Z.Angew.Math.Mech, 21, 265ff

- [4] Zierep J. 1979 *Grundzüge der Strömungslehre*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 5. Auflage

- [5] Schlichting, H. 1982, *Grenzschicht-Theorie*, G.Braun, Karlsruhe, 8.Auflage