



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5870

**Untersuchungen zum
dynamischen Verhalten
mikrostrukturierter Membranen
mit Hilfe der Methode der
finiten Elemente**

R. Elsäßer, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Februar 1997

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5870

**Untersuchungen zum dynamischen Verhalten
mikrostrukturierter Membranen mit Hilfe der
Methode der finiten Elemente**

R. Elsäßer

M. Kamlah

Ch. Tsakmakis

Institut für Materialforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1997

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Am Institut für Mikrostrukturtechnik des Forschungszentrums Karlsruhe wird ein Sensor bestehend aus mikrostrukturierten Membranen entwickelt, der es erlaubt, beispielsweise die Temperatur, die Dehnung oder die Dichte eines umgebenden flüssigen Mediums berührungslos, d.h. ohne Drahtverbindung, mittels Ultraschall zu messen. Im vorliegenden Bericht wird das Schwingungsverhalten des Sensors mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FE) analysiert.

Nach umfangreichen Voruntersuchungen wird mit der sich daraus ergebenden FE-Modellierung zunächst die Existenz und die Anregbarkeit der für die Messung benötigten Eigenschwingungsmode nachgewiesen. Anschließend wird durch Parameterstudien die Abhängigkeit der zugehörigen Eigenfrequenz von Material- und Geometrieparametern untersucht. Hieraus ergibt sich, daß die analytische Beziehung, die zur Auswertung der experimentellen Messungen herangezogen wird, nur für bestimmte Materialkombinationen aussagekräftig ist.

Finite Element Investigations of the Dynamical Properties of Microstructured Membranes

A sensor consisting of microstructured membranes which is a tool for measuring quantities such as temperature, strain, or density of a surrounding fluid medium by ultrasound, i.e. without any contact (e.g. by a wire connection), is in a stage of development at the Institute for Microstructure Technology at the Karlsruhe Research Center. In this report we study the dynamical properties of the sensor by means of the finite element method.

First, the existence of the eigenmode, which is needed for the measurements, and the possibility to excite it is proved with suitable chosen finite element models resulting from extensive preliminary examinations. Then the dependence of the corresponding eigenfrequency on material- and geometry parameters is examined by variation of these parameters. Hence it follows, that the analytical formula, which is used to evaluate the experimental measurements, is valid for certain material combinations only.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen	iii
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	5
2.2 Plattentheorie	9
2.2.1 Differentialgleichung der Schwingung dünner Platten	9
2.2.2 Freie Schwingung einer eingespannten Kreisplatte	13
2.3 Direkte Lösungsverfahren in der Variationsrechnung	14
2.3.1 Prinzip der minimalen potentiellen Energie	15
2.3.2 Rayleigh-Ritz-Verfahren	16
2.3.3 Methode der finiten Elemente	17
3 Auswahl der Schalenelemente	20
3.1 Einleitende Vorbetrachtungen	20
3.2 Realisierung der Vorspannung	23
3.3 FE-Rechnungen zu einer eingespannten Kreisplatte	25
3.3.1 Schubelastische axialsymmetrische Schalenelemente	26
3.3.2 Schubstarre Schalenelemente	28
3.3.3 Schubelastische Schalenelemente	29
3.3.4 Axialsymmetrische Kontinuumsselemente	30
4 FE-Modelle des Mikrosystems	33
5 Dynamische Rechnungen	40
5.1 Durch Oberflächenlast erzeugte Schwingung	41
5.2 Durch Anfangsgeschwindigkeit erzeugte Schwingung	43
5.3 Harmonische Anregung	45
6 Eigenfrequenzanalyse	48
6.1 Titanfolie und Mikrostruktur aus Nickel	49
6.2 Titanfolie und Mikrostruktur aus Polyimid	51
6.3 Experimentell gemessene Frequenzen	54

7 Parameterstudie	56
7.1 Parameter der Folie (Membranen)	57
7.2 Parameter der Mikrostruktur	59
8 Zusammenfassung	64
Literatur	66

Abkürzungen

Hier werden nur einige der auftretenden Abkürzungen aufgeführt.

f	Frequenz
a	Membranradius
h	Dicke bzw. Höhe
ρ	Dichte
E	Elastizitätsmodul (kurz: E-Modul)
ν	Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl)
α	thermischer Ausdehnungskoeffizient
T	Temperatur
u	Verschiebung
ϵ	Dehnung
σ	Spannung
σ_0	Vorspannung der Membran

Indizes

M	Membran (Folie)
St	Mikrostruktur (Steg)
Ti	Titan
Ni	Nickel
Po	Polyimid
x, y, z	kartesische Koordinaten
r, φ, z	Zylinderkoordinaten

Notation

a, A	Skalar
\mathbf{a}, \mathbf{A}	Vektor
$\underline{\underline{A}}$	Tensor 2. Stufe
$\underline{\underline{\underline{A}}}$	Tensor 4. Stufe
\mathbf{a}	Spaltenmatrix
\mathbf{A}	Blockmatrix

1 Einleitung

Am Institut für Mikrostrukturtechnik (IMT) des Forschungszentrums Karlsruhe wurde ein Meßverfahren entwickelt, bei dem mit Hilfe eines Mikromembransensors, der durch Ultraschall zu Resonanzschwingungen angeregt wird, die Messung verschiedener physikalischer Größen ermöglicht wird [1]. Ein solcher Sensor besteht aus einer wenige Mikrometer dünnen Folie, die durch eine Mikrostruktur in einzelne Membranen unterteilt wird. Die laterale Ausdehnung der Mikrostruktur beträgt einige Millimeter und die Dicke liegt im Bereich von zehn Mikrometern. Es werden kreisförmige, rechteckige und sechseckige Membranen benutzt, die alle Abmessungen von einigen zehn Mikrometern besitzen. Insgesamt befinden sich auf dem Sensor bis zu mehreren tausend Membranen. Die Folie ist auf einem Aluminiumrahmen aufgeklebt, der als tragende makroskopische Struktur dient (siehe Abb.1). Bei der Herstellung erhält die Folie eine Vorspannung. Für die Mikrostruktur werden als Materialien Nickel, Polyimid und Gold verwendet, während die Folie aus Titan oder Polyimid gefertigt wird.

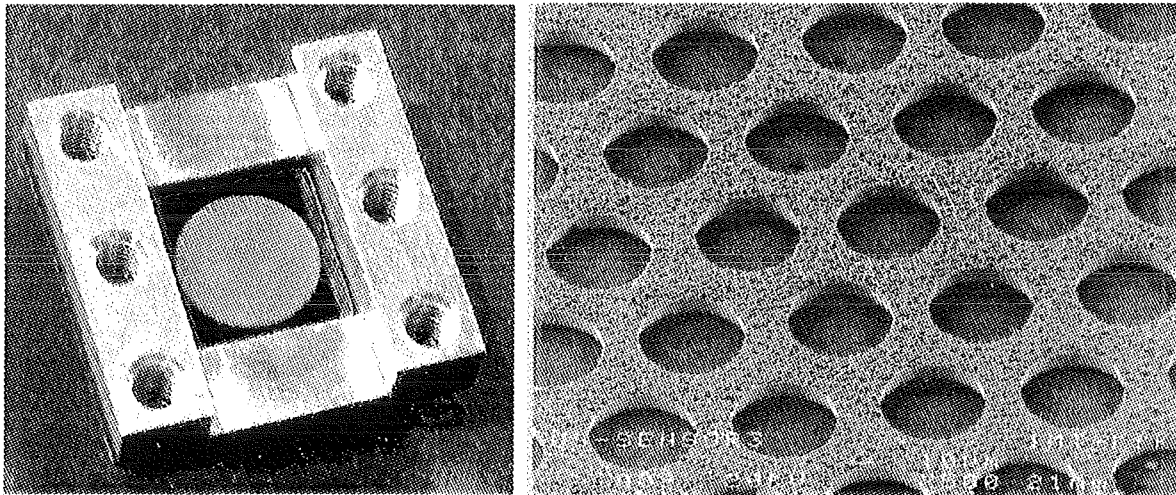


Abb.1: links: Sensor mit Rahmen, wobei in der Mitte die Mikrostruktur erkennbar ist; rechts: Mikrostruktur zur Unterteilung in kreisförmige Membranen

Die Membranen besitzen eine Eigenfrequenz im Megahertz-Bereich und können somit mittels Ultraschall zu Resonanzschwingungen angeregt werden. Bei den experimentellen Untersuchungen in [2] wird der in Abb.2 schematisch dargestellte Versuchsaufbau benutzt. Hierbei befindet sich der Mikrosensor in einem flüssigen Medium. Der Ultraschallkopf dient als Sender und als Empfänger. Zunächst sendet er einen breitbandigen

Puls aus, regt dadurch den Sensor zum Schwingen an und empfängt gleichzeitig das Signal, das aus einer Überlagerung des reflektierten Anteils des Pulses und der einsetzenden Schwingung des Sensors besteht. Nach Beendigung des Einschwingvorgangs wird dann nur noch das Signal, das vom Sensor ausgesendet wird, empfangen. Aus dieser gedämpften Sinusschwingung kann man dann die Resonanzfrequenz und die Dämpfungskonstante bestimmen.

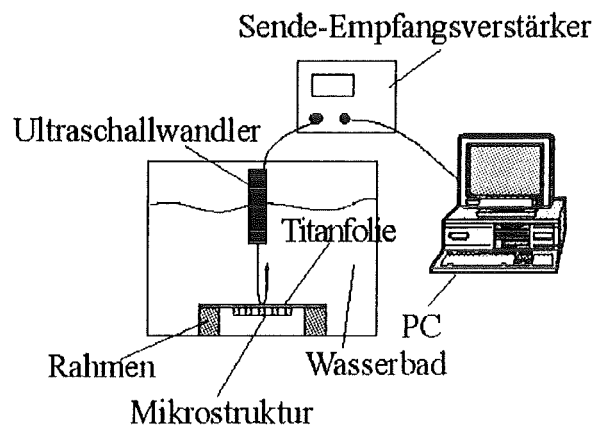


Abb.2: Schematischer Versuchsaufbau, der bei den experimentellen Untersuchungen am IMT verwendet wird.

Parameter, die auf diese beiden Größen einen Einfluß haben, können somit indirekt gemessen werden. Neben der Dichte und der Viskosität des umgebenden Mediums gehören dazu Größen wie Temperatur und Dehnung, die sich jeweils auf die Spannung der Membranen auswirken. Um die Messung möglichst effektiv zu gestalten, besteht die Möglichkeit, die Geometrie und die Materialparameter je nach gewünschter Messgröße geeignet auszuwählen.

Der Mikrosensor soll sowohl in technischen Bereichen als auch in der Medizin Verwendung finden. Ein sehr wichtiger Aspekt ist hierbei, daß zum Ort der Messung keine direkte Drahtverbindung benötigt wird. Somit könnte man mit Hilfe eines Sensors innerhalb des menschlichen Körpers von außen Rückschlüsse auf Heilungsprozesse nach operativen Eingriffen ziehen oder Informationen über die Belastung eingesetzter Implantate bekommen. Bei hermetisch abgeschlossenen Behältern wie Konservendosen oder Farbeimern hätte man eine Möglichkeit, den Zustand des Inhaltes zu überprüfen.

In [2] wird aus theoretischen Betrachtungen die Formel

$$f_{\text{vak}} = \frac{1}{a\pi} \sqrt{\frac{20}{9\rho_M(1-\nu_M^2)} \frac{E_M h_M^2}{a^2} + \frac{5\sigma_0}{3\rho_M} + \frac{5(\alpha_R - \alpha_M)(T - T_0)E_M}{3\rho_M(1-\nu_M)} + \frac{5\epsilon E_M}{3\rho_M(1-\nu_M)}} \quad (1)$$

zur Berechnung der Frequenz einer kreisförmigen Membran im Vakuum hergeleitet. Dabei wird von einer Membran mit Radius a ausgegangen, die am Rand fest eingespannt ist. Der Elastizitätsmodul E_M , die Querkontraktionszahl ν_M , die Dichte ρ_M sowie der thermische Ausdehnungskoeffizient α_M sind hierbei die Materialparameter der Membran. Des weiteren gehen in die Formel die Dicke der Membran h_M , die Dehnung ϵ und die Vorspannung σ_0 ein. Bei α_R handelt es sich um den Wärmeausdehnungskoeffizienten des Rahmens und $T - T_0$ ist die Temperaturdifferenz zur Ausgangstemperatur T_0 .

Die einzelnen Terme in Gleichung (1) spiegeln verschiedenen Einflüsse wieder. Der erste und zweite Term resultieren aus den Rückstellkräften, die bei Auslenkung durch Biegemomente bzw. durch die Vorspannung entstehen. Der Temperatureinfluß wird durch den dritten Term miteinbezogen und der letzte Anteil ergibt sich aus der Dehnung, die durch äußere Kräfte hervorgerufen wird.

Aufgabe der vorliegende Arbeit ist es, daß Schwingungsverhalten des Mikrosensors mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (kurz: FEM bzw. FE) numerisch zu simulieren. Neben der Bestimmung der Resonanzfrequenzen des Systems soll dabei auch die Eigenschwingungsform analysiert werden. Aus den oben erwähnten Membranformen wurden für diese Betrachtungen in Absprache mit den Projektpartnern des IMT die kreisförmigen Membranen ausgewählt. Weiteres Ziel ist es, den Einfluß verschiedener Geometrie- und Materialparametern sowohl der Folie als auch der Mikrostruktur auf die Frequenz zu untersuchen. Dadurch sollen Aussagen ermöglicht werden, inwieweit Gleichung (1) auf das viele Membranen enthaltende Gesamtsystem übertragen werden kann, und auf welche Weise die Mikrostruktur die Schwingung beeinflusst.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich zunächst mit den theoretischen Grundlagen. Nach einer kurzen Einführung in die Kontinuumsmechanik folgt ein Abschnitt über Plattentheorie. Darin wird die Schwingungsgleichung der dünnen Platte hergeleitet und für den speziellen Fall der eingespannten Kreisplatte gelöst. Anschließend wird die Methode der finiten Elemente als Erweiterung des zur Lösung von Variationsproblemen benutzte Rayleigh-Ritz-Verfahrens vorgestellt. In Kapitel 3 werden Methoden zur Erzeugung der Vorspannung vorgestellt und die für die folgenden FE-Rechnungen benötigten Elemente ausgewählt. Dazu werden verschiedene Schalenelemente und axialsymmetrische Kontinuumsselemente zur Berechnung einer einzelnen eingespannten Membran benutzt, und

es wird ein Vergleich der Ergebnisse mit der analytischen Lösung sowie mit Gleichung (1) gezogen. In Kapitel 4 werden fünf verschiedene Modelle des Systems bestehend aus Folie und Mikrostruktur vorgestellt, wobei es sich dabei um vier Schalenmodelle und ein Kontinuumsmodell handelt. Mit diesen Modellen werden im nächsten Kapitel dynamische Rechnungen durchgeführt, um bei unterschiedlichen Anregungsmethoden das zeitliche Verhalten der Schwingung des Gesamtsystems analysieren zu können. Basierend auf den bis dahin vorliegenden Erkenntnissen werden daraufhin die Frequenz und die Eigenschwingungsform, die sich aus einer mit Hilfe der FEM durchgeführten Eigenfrequenzanalyse ergeben, für die Materialkombinationen Titan/Nickel und Titan/Polyimid betrachtet. Des Weiteren wird versucht, einen Vergleich zu den experimentell gemessenen Werten zu ziehen. Schließlich wird in Kap.7 noch die Abhängigkeit der Frequenz von verschiedenen Material- und Geometrieparametern untersucht. Für die Parameter der Folie ist dabei ein Vergleich mit Gleichung (1) möglich, während bei der Mikrostruktur durch geeignet gewählte Fit-Funktionen versucht wird, die funktionale Abhängigkeit zu bestimmen. Im abschließenden Kapitel werden dann nochmals die grundlegenden Ergebnisse zusammengefaßt.

Für die Berechnungen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wird der FE-Code ABAQUS [3] benutzt. Zur Erzeugung der Modelle sowie zur Veranschaulichung der Ergebnisse wird das Hilfsprogramm Femgen/Femview [4] verwendet.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Aufgabe der Kontinuumsmechanik ist die mathematische Beschreibung der Bewegung und Deformation eines makroskopischen Kontinuums infolge von äußeren Einwirkungen [5, 6]. Grundlage für diese Betrachtungen ist der *materielle Körper* \mathcal{G} mit der Oberfläche $\partial\mathcal{G}$, der sich aus der Menge aller materieller Punkte P , die sich in \mathcal{G} befinden, ergibt. Die Bewegung des Körpers kann als zeitliche Abfolge von sogenannten Konfigurationen (Plazierungen) angesehen werden (siehe Abb.3).

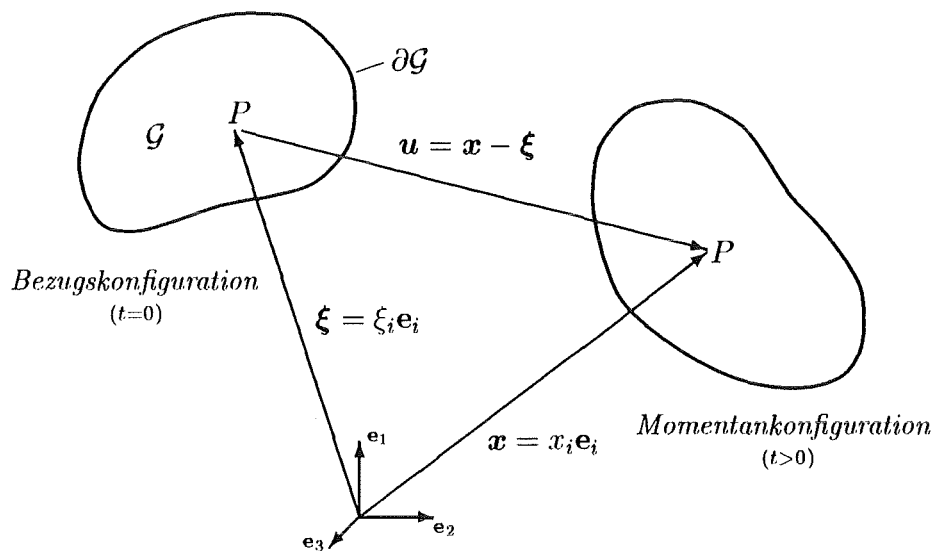


Abb.3: Konfigurationen des materiellen Körpers

Als Referenz wird für $t = 0$ die *Bezugskonfiguration* (auch Anfangskonfiguration) ausgewählt, in der den materiellen Punkten bezüglich eines festen Koordinatensystems mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i die *materiellen Koordinaten* ξ_i zugeordnet werden. In der momentanen Lage, der *Momentankonfiguration*, gelten für dieselben Punkte die *räumlichen Koordinaten* x_i . Die Bewegung des Körpers kann als Abbildung

$$\mathbf{x} = \chi(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \text{mit } \chi(\boldsymbol{\xi}, t = 0) = \boldsymbol{\xi}, \quad (2)$$

dargestellt werden. Aus der Beziehung

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \chi(\boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \quad (3)$$

erhält man das *Verschiebungsvektorfeld* \mathbf{u} . Den Zusammenhang zwischen einem infinitesimalen Linienelement in der Bezugskonfiguration $d\xi$ und dem entsprechenden Linienelement in der Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ stellt der Tensor des *Deformationsgradienten* $\underline{\mathbf{F}}$ gemäß

$$d\mathbf{x} =: \underline{\mathbf{F}} d\xi \quad (4)$$

her. Mit Gleichungen (2) und (3) ergibt sich

$$\underline{\mathbf{F}} = F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \text{Grad } \mathbf{x} = \underline{\mathbf{1}} + \text{Grad } \mathbf{u} \quad (5)$$

wobei \mathbf{e}_k orthonormierte Basisvektoren sind und der Differentialoperator Grad durch $\text{Grad } \mathbf{a}(\xi) := (\partial a_i / \partial \xi_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ definiert ist. Desweiteren tritt neben dem Einheitstensor $\underline{\mathbf{1}}$ in Gleichung (5) das Tensorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ auf, bei dem wie im gesamten Kapitel die Einsteinsche Summenkonvention gilt. Die Transformation von materiellen Flächen- bzw. Volumenelementen $d\mathbf{A}$ und dV (in der Bezugskonfiguration $d\mathbf{A}_0$ und dV_0) folgt aus

$$d\mathbf{A} = (\det \underline{\mathbf{F}}) (\underline{\mathbf{F}}^{-1})^T \mathbf{A}_0 \quad \text{bzw.} \quad dV = (\det \underline{\mathbf{F}}) dV_0. \quad (6)$$

Durch Betrachten der Differenz der Linienelementquadrate

$$d\mathbf{x} d\mathbf{x} - d\xi d\xi = d\xi \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} d\xi - d\xi d\xi = 2 d\xi \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{1}})}_{=: \underline{\mathbf{E}}} d\xi \quad (7)$$

erhält man den symmetrischen *Greenschen Verzerrungstensor* $\underline{\mathbf{E}}$. Durch Benutzung von Gleichung (5) kann man ihn durch

$$\underline{\mathbf{E}} = \underbrace{\frac{1}{2} [\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T]}_{=: \underline{\boldsymbol{\epsilon}}} + \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u})^T \text{Grad } \mathbf{u} \quad (8)$$

ausdrücken.

Mit der Bedingung

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \right| \ll 1 \quad (9)$$

folgt nun der Übergang zur geometrisch linearen Theorie mit dem linearisierten *Deformations- oder Verzerrungstensor* $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, indem man den Term, der von zweiter Ordnung in den Verschiebungsableitungen ist, in Gleichung (8) vernachlässigt. In der linearen Theorie können die Randbedingungen näherungsweise in der Bezugskonfiguration, die sich nur

leicht von der Momentankonfiguration unterscheidet, formuliert werden. Mit Gleichung (3) und Berücksichtigung der Voraussetzung (9) folgt aus

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (\delta_{kj} \hat{=} \text{Kroneckersymbol}), \quad (10)$$

die geometrische Linearisierung, die besagt, daß näherungsweise die Ableitungen nach den materiellen Koordinaten durch die räumlichen Koordinaten ersetzt werden können. Für den Verzerrungstensor ergibt sich in kartesischen Koordinaten

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \quad (11)$$

Die Komponenten des Verzerrungstensors müssen die Kompatibilitätsbedingungen

$$e_{ijk} e_{lmn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_m} \epsilon_{kn} = 0, \quad (e_{ijk} \hat{=} \text{Permutationssymbol}), \quad (12)$$

erfüllen, wodurch sichergestellt wird, daß der Verzerrungstensor eine physikalisch mögliche Deformation beschreibt.

Durch Betrachtung eines aus dem deformierten Körper herausgeschnittenen Teilkörpers wird nun der Begriff der Spannung eingeführt. Damit der Teilkörper den deformierten Zustand beibehält, muß die Einwirkung des abgetrennten Teils durch Kräfte \mathbf{F} , die auf die Oberfläche A wirken, ersetzt werden. Den *Spannungsvektor* $\boldsymbol{\sigma}$, der vom Ort \mathbf{x} und der äußeren Flächennormale \mathbf{n} abhängt, erhält man durch den Grenzübergang

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA}. \quad (13)$$

Analog zum dritten Newtonschen Gesetz gilt hier das erste Cauchysche Theorem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \quad (14)$$

und aus dem zweiten Cauchyschen Theorem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T(\mathbf{x})\mathbf{n} \quad (15)$$

ergibt sich der Zusammenhang des Spannungsvektors $\boldsymbol{\sigma}$ mit dem *Cauchyschen Spannungstensor* $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$. Bei den Diagonalkomponenten des Spannungstensors spricht man von Normalspannungen, während die restlichen Komponenten als Schub- oder Scherspannungen bezeichnet werden. Die wichtige Eigenschaft der Symmetrie $\boldsymbol{\sigma}^T = \underline{\boldsymbol{\sigma}}$ läßt sich aus der Drehimpulserhaltung herleiten.

Eine weitere Erhaltungsgröße ist der *Impuls* \mathbf{I} , dessen Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\mathbf{I} = \mathbf{F}. \quad (16)$$

lautet, d.h. die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Summe der auf den Körper wirkenden Kräfte. Man betrachtet nun wieder einen aus dem gesamten materiellen Körper freigeschnitten Teilkörper \mathcal{T} mit der Oberfläche $\partial\mathcal{T}$. Neben der Einwirkung des Restkörpers, die durch die Spannungsvektoren $\boldsymbol{\sigma}$ auf der Oberfläche wiedergegeben wird, werden zusätzlich feldbedingte *Massenkräfte* \mathbf{k} angenommen, die mit $\mathbf{f} = \rho\mathbf{k}$ ($\rho \hat{=}$ Dichte) auch als *Volumenkräfte* \mathbf{f} betrachtet werden können. Somit ergibt die Impulsbilanz

$$\int_{\mathcal{T}} \rho \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} dV = \int_{\mathcal{T}} \rho \mathbf{k} dV + \int_{\partial\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma} dA. \quad (17)$$

Der letzte Term wird mit Hilfe des zweiten Cauchyschen Theorems (15) und dem Gaußschen Satz zu

$$\int_{\partial\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma} dA = \int_{\partial\mathcal{T}} \mathbf{n} \underline{\boldsymbol{\sigma}} dA = \int_{\mathcal{T}} \text{Div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad (18)$$

umgeformt, wobei der Differentialoperator $\text{Div } \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := (\partial/\partial x_i) A_{ij} \mathbf{e}_j$ auftritt. Setzt man dies nun in die Impulsbilanz (17) ein, so folgt mit der Beziehung (3) die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \rho \mathbf{k} + \text{Div } \underline{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (19)$$

Für das statische Gleichgewicht ergibt sich somit

$$\text{Div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{f} = 0. \quad (20)$$

als Forderung.

Für die 15 unbekannte Größen u_i , ϵ_{ij} , σ_{ij} stehen durch die Bewegungsgleichung (19) und die Definition des Verzerrungstensors in (8) bisher nur 9 Gleichungen zur Verfügung. Die restlichen sogenannten konstitutiven Gleichungen liefert das Materialgesetz. Es berücksichtigt den Einfluß der Materialeigenschaften, der bisher noch nicht in die Theorie eingegangen ist.

Das Materialgesetz der linearen Elastizitätslehre (*Hookesches Gesetz*) lautet

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \epsilon_{kl}. \quad (21)$$

Dabei handelt es sich beim *Elastizitätstensor* $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ um einen Tensor vierter Stufe. Für ein homogenes Material verschwindet die Ortsabhängigkeit und durch zusätzliche Eigenschaften des Materials läßt sich die Anzahl der 81 Komponenten wesentlich reduzieren.

Für einen homogenen, linear elastischen, isotropen Körper ergibt sich schließlich

$$\underline{\sigma} = 2G \left[\underline{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr } \underline{\epsilon}) \underline{\mathbf{1}} \right], \quad (22)$$

wobei die Spur tr eines Tensors gemäß $\text{tr } \underline{\mathbf{A}} = A_{ii}$ gebildet wird. Hierbei treten als unabhängige Materialkonstanten nur die *Querkontraktionszahl* ν (Poisson-Zahl) und der *Schubmodul* G auf. Der *Elastizitätsmodul* E kann aus

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (23)$$

berechnet werden.

Durch Umkehrung des Hookeschen Gesetzes (22) erhält man unter zusätzlicher Berücksichtigung einer Temperaturdifferenz ΔT das Materialgesetz der Thermoelastizität

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\sigma} - \frac{\nu}{1 + \nu} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{\mathbf{1}} \right] + \alpha \Delta T \underline{\mathbf{1}} \quad (24)$$

wobei α der *thermische Ausdehnungskoeffizient* des isotropen Materials ist.

2.2 Plattentheorie

2.2.1 Differentialgleichung der Schwingung dünner Platten

Da ein Großteil der FE-Rechnungen mit Plattenelementen, oder um genauer zu sein, mit Schalenelementen durchgeführt wurde, wird in diesem Abschnitt auf die Plattentheorie eingegangen [7, 8].

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen Membran (auch Scheibe genannt), Platte und Schale. Bei einer Membran bzw. Platte handelt es sich um ein ebenes Flächentragwerk, dessen Wanddicke klein gegenüber den anderen Abmessungen ist, wobei die Grenze hierfür ungefähr bei einem Verhältnis von 1:10 liegt. Bei der Membran ist lediglich die Vorspannung für die Rückstellkraft bei Querauslenkungen verantwortlich (vergleichbar mit der Saite in einer Dimension). Bei der Platte liefert zusätzlich die Biegesteifigkeit einen Beitrag zur Rückstellkraft. Die Schale zeichnet sich im Vergleich zur Platte dadurch aus, daß ihr Flächentragwerk im Gleichgewichtszustand nicht eben ist.

Der für die Berechnungen verwendete FE-Code ABAQUS stellt Schalenelemente zur Verfügung, die eine Platte als „ebene Schale“ beinhalten. Obwohl man die Mikromembranen im folgenden als Platten betrachtet, werden sie trotz der oben genannten Unterscheidung weiterhin Membranen genannt, auch wenn dies terminologisch nicht exakt ist.

Ausgegangen wird von einer ideal elastischen, homogenen und isotropen Platte, die sich im unbelasteten Zustand in der x,y -Ebene befindet, und auf die eine Belastung $p(x, y, t)$ in z -Richtung wirke. Eine mögliche Vorspannung wird dabei vorerst außer Acht gelassen. Die Voraussetzungen der sog. Kirchhoffschen Plattentheorie der dünnen Platte mit kleiner Durchbiegung sind folgende:

- Neben der Plattendicke h werden auch die Durchbiegung u_z und ihre Ableitungen als klein angenommen.
- Die Mittelebene (Ebene, die die Dicke halbiert) bleibe unverzerrt. Sie wird als neutrale Schicht bezeichnet und ihre Punkte erfahren nur eine Verschiebung in z -Richtung.
- Punkte, die sich im unverformten Zustand auf einer Normalen zur Mittelebene befinden, liegen auch nach Verformung auf einer Normalen zur Mittelfläche. Man spricht hier von einer schubstarrten Platte, bei der Querschubverformungen vernachlässigt werden können.
- Verzerrungen ϵ_{zz} und Normalspannungen σ_{zz} seien vernachlässigbar klein, weshalb h als konstant angesehen werden kann.

Nun soll die Differentialgleichung der Plattenschwingung hergeleitet werden. Man kann dies mit Hilfe der Variationsrechnung über das Prinzip der virtuellen Verrückungen tun [9] oder durch Formulierung von Gleichgewichtsbedingungen an einem Plattenelement, wie es im folgenden geschieht. Dazu betrachtet man ein aus der Platte freigeschnittenes Element, dessen Schnittflächen parallel zur x - bzw. y -Achse verlaufen. Man benötigt die Schnittkräfte und die äußeren Lasten, die auf das Element $dx dy$ wirken (siehe Abb.4).

Hierbei treten pro Längeneinheit die Biegemomente

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, \quad (25)$$

sowie die Torsionsmomente

$$m_{xy} = -m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (26)$$

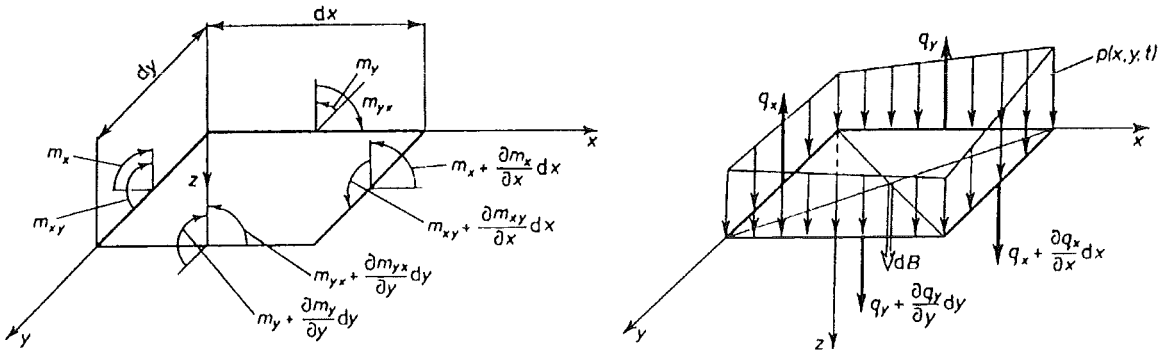


Abb.4: Schnittmomente, Schnittkräfte und Lasten an einem Plattenelement

auf, wobei die neutrale Fläche bei $z = 0$ liege. Außerdem wirken die Querkräfte pro Längeneinheit

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz. \quad (27)$$

Neben der senkrechten Oberflächenlast $p(x, y, t)$ geht noch der Term

$$dB = -\rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dx dy, \quad (28)$$

der sich aus der Trägheit des Elementes ergibt, mit in die Betrachtungen ein.

Die Ortsabhängigkeit der Schnittgrößen wird bis zu den Gliedern erster Ordnung in einer Taylorreihe entwickelt (vgl. Abb.4). Wenn die Gleichgewichtsbedingung für die in z -Richtung angreifenden Kräfte gemäß Abb.4 gebildet wird, erhält man

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (29)$$

Für die Momentengleichgewichte bezüglich paralleler Achsen zur x - bzw. y -Achse gilt entsprechend

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}, \quad q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}. \quad (30)$$

Setzt man nun (30) in (29) ein, so folgt daraus

$$\rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = p(x, y, t). \quad (31)$$

Unter Berücksichtigung der zu Beginn gemachten Voraussetzungen und mit Hilfe der

Gleichungen (11) und (22) ergibt sich für die Momente

$$\begin{aligned} m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), & m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \\ m_{xy} &= D(1 - \nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (32)$$

wobei der Parameter

$$D := \frac{Eh^3}{12(1 - \nu)} \quad (33)$$

die Biegesteifigkeit der Platte, kurz Plattensteifigkeit, ist.

Die Differentialgleichung für erzwungene Plattenschwingungen erhält man schließlich, indem man (32) in (31) einsetzt:

$$D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u_z(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 u_z(x, y, t)}{\partial t^2} =:$$

$$\boxed{D \nabla^4 u_z(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 u_z(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t)} \quad (34)$$

Abschließend wird noch die Differentialgleichung einer Platte mit Vorspannung angegeben. Man müßte bei der Herleitung hierfür zusätzlich pro Längeneinheit Normalkräfte n_x und n_y sowie Schubkräfte $n_{xy} = n_{yx}$ berücksichtigen, die nicht von der Auslenkung u_z abhängen, und die in der x,y-Ebene wirken. Daraus ergibt sich

$$D \nabla^4 u_z(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 u_z(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) + \left(n_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z. \quad (35)$$

Durch Vernachlässigung des Einflusses der Normalspannung σ_{zz} sowie der Schubspannungen σ_{xz} und σ_{yz} bei der Herleitung von Gleichung (34), entsteht ein Fehler, der sich vor allem bei Platten größerer Dicke oder bei großen Deformationen bemerkbar macht. In der Theorie dicker Platten werden auch diese Spannungen und die damit verbundenen Dehnungen berücksichtigt [10]. In diesem Fall läßt sich allerdings keine direkte Beziehung zwischen der Verschiebung u_g und der Last p angeben. Diese Gesamtverschiebung $u_g = u_z + u_s$ setzt sich aus der bisher betrachteten Verschiebung u_z und dem Schubanteil u_s zusammen. In [8] wird durch die Entwicklung

$$u_z = u_g + c_1 \nabla^2 u_g + c_2 \nabla^4 u_g + \dots, \quad c_1, c_2 = \text{const.} \quad (36)$$

und Berücksichtigung der ersten beiden Glieder die im Vergleich zu Gleichung (34) erweiterte Beziehung

$$D \left(1 + \frac{(8 - 3\nu) h^2}{44(1 - \nu)} \nabla^2 \right) \nabla^4 u_g + \rho h \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = p + \left(n_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_g \quad (37)$$

hergeleitet.

2.2.2 Freie Schwingung einer eingespannten Kreisplatte

Bei dem zu untersuchenden System unterteilt die Mikrostruktur die Titanfolie in viele kreisförmige Mikromembranen, weshalb zunächst die freie Schwingung einer einzelnen Kreisplatte betrachtet wird. Die analytische Lösung erhält man aus der homogenen Differentialgleichung (34), d.h. für $p = 0$. Es empfiehlt sich, (34) in Polarkoordinaten zu formulieren [11]:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 u_z(r, \varphi, t) + \rho h \frac{\partial^2 u_z(r, \varphi, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (38)$$

Mit Hilfe des Separationsansatzes $u_z(r, \varphi, t) = R(r)\phi(\varphi)T(t)$, erhält man für $T(t)$ und $\phi(\varphi)$ gewöhnliche Differentialgleichungen der Form $f'' + \lambda f = 0$, $\lambda = \text{const.}$, so daß man auf Grund der Periodizität in φ den Ansatz folgendermaßen wählen kann:

$$u_z(r, \varphi, t) = R_m(r) \sin(m\varphi + \gamma_m) \sin \omega t, \quad \text{mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (39)$$

Ziel ist die Bestimmung der Eigenfrequenzen ω sowie der Eigenschwingungsformen $W(r, \varphi) = R_m(r) \sin(m\varphi + \gamma_m)$ der Platte. Für $R_m(r)$ führt dieser Ansatz zu

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{m^2}{r^2} - \beta^2 \right) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \beta^2 \right) \right] R_m(r) = 0, \quad (40)$$

wobei

$$\beta^2 := \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (41)$$

Da die Operatoren in den eckigen Klammern kommutieren, kann Gleichung (40) durch $R_m(r) = \bar{R}_m(r) + \hat{R}_m(r)$ gelöst werden, wobei \bar{R}_m die Gleichung durch die erste eckige Klammer erfüllt, während $\hat{R}_m(r)$ dies durch die zweite tut. Somit ergibt sich für \bar{R}_m eine gewöhnliche und für $\hat{R}_m(r)$ eine modifizierte Besselsche Differentialgleichung. Als Ergebnis bekommt man

$$R_m(r) = \underbrace{c_1 J_m(\beta r) + c_2 Y_m(\beta r)}_{\bar{R}_m} + \underbrace{c_3 I_m(\beta r) + c_4 K_m(\beta r)}_{\hat{R}_m}, \quad (42)$$

wobei J_m und Y_m Besselfunktionen erster und zweiter Art sowie I_m und K_m modifizierte Besselfunktionen erster und zweiter Art sind. Da bei $r = 0$ die Auslenkung endlich bleiben soll, die Funktionen zweiter Art aber dort gegen Unendlich gehen, werden $c_2 = c_4 = 0$ gesetzt. Die beiden anderen Konstanten werden über die Randbedingungen bestimmt. Ausgegangen wird von einer am Rande fest eingespannten Platte mit Radius a , woraus sich die Randbedingungen

$$W(r = a, \varphi) = 0, \quad \left. \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (43)$$

ergeben. Sie drücken aus, daß am Rand die Verschiebung verschwindet, und daß die Mittelebene eine waagerechte Tangente in Bezug auf die Gleichgewichtslage besitzt. Einsetzen führt schließlich zu der Beziehung

$$I_m(\beta a)J_{m-1}(\beta a) - J_m(\beta a)I_{m-1}(\beta a) = 0, \quad (44)$$

die für festes m unendlich viel Wurzeln $(\beta a)_{m,n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ besitzt.

Somit gilt für die Eigenfrequenzen einer Platte mit Radius a

$$\omega_{m,n} = \beta_{m,n} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (45)$$

und die Eigenschwingungsformen mit der Amplitude $A_{m,n}$ ergeben sich aus

$$W_{m,n}(r, \varphi) = A_{m,n} [I_m(\beta_{m,n}a)J_m(\beta_{m,n}r) - J_m(\beta_{m,n}a)I_m(\beta_{m,n}r)] \sin(m\varphi + \gamma_{m,n}). \quad (46)$$

Durch Superposition dieser orthogonalen Funktionen ergibt sich schließlich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (38)

$$u_z(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m,n}(r, \varphi) \sin \omega_{m,n} t. \quad (47)$$

2.3 Direkte Lösungsverfahren in der Variationsrechnung

In diesem Kapitel wird auf einfache Art und Weise versucht einen Zugang zur Methode der finiten Elemente zu vermitteln, da eine detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise und des zugehörigen mathematischen Formalismus den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Die folgenden Ausführungen beschränken sich dabei auf statische Problemstellungen elastischer Kontinua, wobei zur Veranschaulichung das Beispiels des Biegebalkens herangezogen wird [12, 13].

2.3.1 Prinzip der minimalen potentiellen Energie

Wie schon in Kap.2.2.1 erwähnt wurde, besteht die Möglichkeit die Grundgleichungen mechanischer Kontinua mit Hilfe der Variationsrechnung herzuleiten. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines elastischen Körpers liefert das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Spezialfall des Hamiltonschen Prinzips). Es besagt, daß bei einer virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ des Körpers \mathcal{G} (Oberfläche $\partial \mathcal{G}$) die Änderung der inneren Energie δU gleich der Änderung der äußeren Energie δW ist:

$$\delta U = \delta W . \quad (48)$$

Der inneren Energie entspricht dabei die Formänderungsenergie, während sich die äußere Energie aus der verrichteten Arbeit der Oberflächenkräfte \mathbf{p} sowie der Volumenkräfte \mathbf{f} zusammensetzt. Somit ergibt sich aus Gleichung (48)

$$\int_{\mathcal{G}} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T \delta \underline{\boldsymbol{\epsilon}} dV = \int_{\mathcal{G}} \mathbf{f}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{\delta \mathcal{G}} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} dA . \quad (49)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Oberflächen- und Volumenkräfte nicht von den Verschiebungen abhängen, läßt sich dies zu

$$\delta \left[\underbrace{\int_{\mathcal{G}} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T \underline{\boldsymbol{\epsilon}} dV - \int_{\mathcal{G}} \mathbf{f}^T \mathbf{u} dV - \int_{\delta \mathcal{G}} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dA}_{=: \Pi} \right] = 0 \quad (50)$$

umformen.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ergibt das Gesamtpotential Π des elastischen Kontinuums und man erhält das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Pi = \text{Min.} , \quad (51)$$

das als theoretische Begründung der Methode der finiten Elemente angesehen werden kann. Dies bedeutet anschaulich, daß von allen zulässigen Verschiebungen diejenigen, die unter den gegebenen Lasten die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, das Gesamtpotential Π minimieren.

Für das Beispiel eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Balkens der Länge l ergibt sich bei Vernachlässigung der Volumenkräfte das Funktional

$$\Pi = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 u_z(x)}{\partial x^2} \right)^2 - p(x) u_z(x) \right] dx . \quad (52)$$

Dabei ist EI die Biegesteifigkeit, die sich aus dem E-Modul E und dem axialen Flächenträgheitsmoment I zusammensetzt. Die geometrisch zulässigen Verschiebungen $\tilde{u}_z(x)$ ergeben sich aus der wahren Biegelinie $u_z(x)$ gemäß $\tilde{u}_z = u_z + \delta u_z$ durch die Variation $\delta u_z(x)$, für die dieselben geometrischen Randbedingungen wie für $u_z(x)$ erfüllt sein müssen. Nach Durchführung der Variation erhält man

$$\delta\Pi = \int_0^l \left[EI \frac{\partial^2 u_z(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta u_z(x) - p(x) \delta u_z(x) \right] dx = 0. \quad (53)$$

und zweimalige partielle Integration führt schließlich zu

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_0^l \left[EI \frac{\partial^4 u_z(x)}{\partial x^4} - p(x) \right] \delta u_z(x) \\ & + \underbrace{EI \frac{\partial^2 u_z(x)}{\partial x^2}}_{\substack{\text{dynam. Randb.} \\ \text{(Biegemoment)}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \delta u_z(x)}_{\text{geom. Randb.}} \bigg|_0^l - \underbrace{EI \frac{\partial^3 u_z(x)}{\partial x^3}}_{\substack{\text{dynam. Randb.} \\ \text{(Querkraft)}}} \underbrace{\delta u_z(x)}_{\text{geom. Randb.}} \bigg|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Es zeigt sich, daß man als Ergebnis neben der Differentialgleichung der Biegelinie (eckige Klammer) auch Bedingungen für den Rand des Balkens erhält, die auf verschiedene Arten erfüllt werden können. Im Falle des gelenkig gelagerten Balkens ergeben sich als sogenannte geometrischen Randbedingungen $u_z(0) = u_z(l) = 0$ und als dynamische Randbedingung das Verschwinden der Biegemomente $EI \frac{\partial^2 u_z(0)}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^2 u_z(l)}{\partial x^2} = 0$.

2.3.2 Rayleigh-Ritz-Verfahren

Die aus dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie gewonnene Differentialgleichung ist i.a. nicht geschlossen lösbar. Das Rayleigh-Ritz-Verfahren ist eine Methode zur Bestimmung einer Näherungslösung des Variationsproblems. Dabei wird als Ritz-Ansatz eine endliche Funktionenreihe

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \quad (55)$$

gleich in das zu variierende Funktional eingesetzt, weshalb man hier von einer direkten Lösungsmethode spricht. Während die konstanten Koeffizienten c_i unbekannt sind, werden als $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ bekannte Funktionen vorgegeben, die alle die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Setzt man den Ansatz (55) in das Variationsproblem (51) ein, ergibt sich aus der Variation $\delta\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \delta c_i$

$$\delta\Pi[\mathbf{u}(\mathbf{x})] = \delta\Pi(c_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Pi}{\partial c_i} \delta c_i = 0 \quad (56)$$

und damit die Extremalbedingungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (57)$$

Dieses lineare Gleichungssystem mit n Gleichungen ermöglicht die Berechnung der n Koeffizienten c_i und durch Einsetzen in Ansatz (55) erhält man schließlich die Näherungslösung.

Das Rayleigh-Ritz-Verfahren soll nun auf den gelenkig gelagerten Balken, auf den in der Mitte die Einzellast $p(x) = p_m \delta(\frac{l}{2} - x)$ wirkt ($\delta(x) \hat{=}$ Diracsche Deltafunktion), angewendet werden. Als zweigliedrige Ansatz wird

$$u_z^*(x) = c_1 \sin \frac{\pi x}{l} + c_2 \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (58)$$

gewählt. Mit $u_z^*(0) = u_z^*(l) = 0$ erfüllt dieser offensichtlich die geometrischen Randbedingungen. Durch Einsetzen in Gleichung (52) ergibt sich für das Gesamtpotential nach Durchführung der Integration

$$\Pi = EI \frac{\pi^4}{4l^3} c_1^2 + EI \frac{81\pi^4}{4l^3} c_2^2 - p_m c_1 + p_m c_2. \quad (59)$$

Durch Bildung der partiellen Ableitungen nach c_1 bzw. c_2 , können diese Konstanten berechnet werden, und man erhält

$$u_z^*(x) = \frac{2p_m l^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \quad (60)$$

als Näherungslösung.

Die exakte Lösung der Differentialgleichung aus Formel (54) liefert

$$u_z(x) = \frac{p_m}{48EI} (3l^2 x - 4x^3). \quad (61)$$

Am Vergleich der Durchbiegung in der Mitte des Balkens $u_z^*(l/2) \approx 0,02079 p_m l^3 / (EI)$ und $u_z(l/2) \approx 0,02083 p_m l^3 / (EI)$ erkennt man die gute Qualität der Näherungslösung $u_z^*(x)$.

2.3.3 Methode der finiten Elemente

Bei der Rayleigh-Ritz-Methode handelt es sich um ein sogenanntes kontinuierliches Verfahren, da der Ritz-Ansatz (55) für das gesamte Kontinuum vorgegeben wird. Hieraus ergibt sich auch die Schwierigkeit dieser Methode, da es bei komplexeren Strukturen

i.a. nicht möglich ist einen geeigneten globalen Ansatz zu finden. Hierbei ist die Methode der finiten Elemente, die als Erweiterung des Rayleigh-Ritz-Verfahrens betrachtet werden kann, hilfreich. Dabei handelt es sich um ein diskontinuierliches Verfahren, bei dem die einzelnen Ansatzfunktionen nur auf kleinen Teilgebieten \mathcal{G}_i (Oberfläche $\partial\mathcal{G}_i$) des Gesamtkontinuums definiert sind. Die Unterteilung in diese Teilgebiete entspricht der Diskretisierung der Struktur in finite Elemente.

Da bei den folgenden Ausführungen einige Aspekte außer Acht gelassen werden, sei für die genaue Formulierung des mathematischen Formalismus auf [14, 13] verwiesen.

Bei der Methode der finiten Elemente treten als zu bestimmende Parameter (analog zu den Konstanten c_i des Rayleigh-Ritz-Verfahrens) Knotenpunktverschiebungen auf, wobei die einzelnen Knoten die Verbindung zwischen den verschiedenen Elementen herstellen. Die Gesamtheit aller Knotenverschiebungen ergibt die Spaltenmatrix \mathbf{v} . Anstelle der Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ treten für die Elemente sogenannte Formfunktionen auf, die zusammengefaßt die Matrix \mathbf{N} ergeben. Der Ansatz für die Verschiebung lautet somit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v} . \quad (62)$$

Die Formfunktionen müssen dabei die geometrischen Randbedingungen sowie geometrischen Übergangsbedingungen an den Elementengrenzen erfüllen. Erst solche sogenannten verträgliche Verschiebungsansätze, bei denen keine Unstetigkeiten der Verschiebungen auftreten, erlauben es, die Gesamtenergie der Struktur als Summe der Elementenergien darzustellen. Die Dehnungen erhält man aus

$$\underline{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (63)$$

und die Spannungen mit Hilfe des Materialgesetzes (21). Die Matrix \mathbf{B} ergibt sich dabei aus verschiedenen Ableitungen der Formfunktionen.

Setzt man die Beziehungen (62),(63) und (21) in Gleichung (50) ein, so folgt

$$\delta \left[\underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \int_{\mathcal{G}=\bigcup_i \mathcal{G}_i} \mathbf{B}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}}\mathbf{B} dV \mathbf{v}}_{=: \mathbf{K}} - \underbrace{\mathbf{v}^T \int_{\mathcal{G}=\bigcup_i \mathcal{G}_i} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV}_{=: -\mathbf{F}_f} - \underbrace{\mathbf{v}^T \int_{\partial\mathcal{G}=\bigcup_i \partial\mathcal{G}_i} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA}_{=: -\mathbf{F}_p} \right] = 0. \quad (64)$$

Die Volumenkräfte und Oberflächenlasten aller Knotenpunkte des Systems sind in \mathbf{f} bzw. \mathbf{p} zusammengefaßt. Daraus ergeben sich \mathbf{F}_f und \mathbf{F}_p als Gesamtheit aller Knotenkräfte und bei \mathbf{K} handelt es sich um die sogenannte Gesamtsteifigkeitsmatrix des diskretisierten

Kontinuums. Somit ergibt sich das Potential

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{F}_f + \mathbf{v}^T \mathbf{F}_p. \quad (65)$$

Aus dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_m} \end{bmatrix} = 0 \quad (66)$$

für m verschiedene Knoten mit den Knotenverschiebungen v_i folgt schließlich

$$\mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_p = \mathbf{0}. \quad (67)$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem lassen sich die Knotenverschiebungen bestimmen und mit Hilfe der Beziehungen (63) und (21) können die Dehnungen und Spannungen des Kontinuums bestimmt werden.

3 Auswahl der Schalenelemente

3.1 Einleitende Vorbetrachtungen

Bei Rechnungen mit Hilfe der FE-Methode besteht die erste Aufgabe darin, die zu untersuchende Struktur geeignet in ein FE-Modell abzubilden. Dabei sind verschiedene Gesichtspunkte von Interesse. Zum einen ist man bestrebt, das Modell möglichst originalgetreu zu gestalten. Andererseits darf es nicht zu komplex werden, da der Aufwand zur Erstellung des Modells und in der Regel auch die benötigten Rechenzeiten und die anfallenden Datenmengen zu groß werden. Man muß so je nach Geometrie bzw. Materialien entscheiden, welche Vereinfachungen sinnvoll und vertretbar sind. Im hier vorliegenden Fall zeichnet sich die Geometrie dadurch aus, daß die lateralen Abmessungen im Vergleich zur Dicke wesentlich größer sind. Auf Grund dessen wurde ein Großteil der FE-Rechnungen mit Schalenelementen durchgeführt. Zunächst gilt es also aus den zur Verfügung stehenden Schalenelementen die geeigneten herauszusuchen. Dies wird mit Hilfe von Berechnungen an einer einzelnen Kreismembran geschehen, was einen Vergleich mit der analytischen Lösung des vorigen Kapitels zuläßt.

Im voraus sollte man erwähnen, daß die Frequenzen in diesem Kapitel mit sovielen Nachkommastellen angegeben werden, daß man den gewünschten Vergleich zwischen den entsprechenden Werten noch ziehen kann. Da in den folgenden Kapiteln, in denen dann die eigentlichen Ergebnisse vorgestellt werden, von einem Fehler von einigen Prozent ausgegangen werden muß, werden sinnvoller Weise weniger Stellen angegeben.

Wegen der Symmetrie der Kreisembran bieten axialsymmetrische Schalenelemente die einfachste Möglichkeit einer Modellierung. ABAQUS bietet hierfür isoparametrische eindimensionale Elemente mit zwei bzw. mit drei Knoten (ABAQUS-Bezeichnung: *SAX1*- bzw. *SAX2*-Elemente). Sie sind schubelastisch, d.h. Querschubdeformationen sind erlaubt, und ihnen liegt die Theorie dicker Schalen zugrunde, wobei sie bei abnehmender Dicke zu Elementen im Sinne der Kirchhoffschen Theorie (vgl. Kap.2.2) werden. Angesichts der Symmetrieeigenschaften der Elemente besitzen die Knoten nur drei Freiheitsgrade. Bezogen auf ein zylindrisches Koordinatensystem, dessen z-Achse die Achse der Rotationssymmetrie darstellt, handelt es sich dabei um die Translationen in radialer und in z-Richtung u_r und u_z sowie um die Rotation ϕ_φ in der r,z-Ebene. Das Modell besteht dann lediglich aus einer Linie mit Länge des Radius, die ausgehend vom Ursprung in radialer Richtung senkrecht zur z-Achse liegt. Zunächst wird der Einfluß der Feinheit des FE-Netzes auf die Ergebnisse untersucht. Man muß auch hier ein geeignetes Maß fin-

den zwischen einer zu groben Elementierung, die große Abweichungen vom eigentlichen Ergebnis hervorbringen kann, und einem zu feinen Netz, das trotz erhöhter Rechenzeit keine Verbesserung der Resultate mit sich bringt. Dazu wird bei einer Platte mit Radius $a = 60\text{mm}$ und einer Dicke von $h = 5\text{mm}$ eine Frequenzanalyse durchgeführt, bei der ABAQUS aus dem diskretisierten Modell die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen bestimmt. Als Materialparameter werden in Anlehnung an Stahl der Elastizitätsmodul $E = 200\text{GPa}$, die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$ sowie die Dichte $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ verwendet. Die Randbedingungen bei $r = a$ lauten $u_r = u_z = \phi_\varphi = 0$ und bei $r = 0$ wird $u_r = 0$ erfüllt, d.h. man betrachtet eine eingespannte Platte. Für die Grundschiwingung erhält man aus den FE-Rechnungen folgende Eigenfrequenzen:

Anzahl der Elemente	Erste Eigenfrequenz f in Hz mit	
	2-Knoten-Elemente	3-Knoten-Elementen
3	3108,12	3359,82
6	3299,51	3359,08
12	3344,05	3359,04
24	3355,28	3359,05

Man erkennt, daß die Elemente mit drei Knoten schon mit wenig Elementen gute Ergebnisse liefern und sich diese bei Netzverfeinerung kaum noch ändern. Bei den 2-Knoten-Elementen ist jedoch festzustellen, daß die Frequenz bei wachsender Anzahl der Elemente nur langsam gegen einen Grenzwert konvergiert. Zum Vergleich wird nun noch die aus Gleichung (44) gewonnene analytische Lösung herangezogen. Mit $m = 0$ und $n = 1$ ergibt sich für die Grundschiwingung ein Wert $(\beta a)_{0,1} = 3,1962$. Daraus folgt die Frequenz $f_{th} = 3416,8\text{Hz}$. Diese ist um rund 1,7% größer als die Werte aus den FE-Rechnungen. Ursache dafür ist die Benutzung der Theorie der dicken Schale bei diesen Elementen.

Führt man die Berechnungen mit einer Dicke von $h = 0,5\text{mm}$ durch, so bekommt man für die erste Eigenfrequenz:

Anzahl der Elemente	Erste Eigenfrequenz f in Hz mit	
	2-Knoten-Elemente	3-Knoten-Elementen
12	340,102	341,618
24	341,238	341,619

Diese Werte liegen deutlich näher an dem theoretischen Wert $f_{th} = 341,68\text{Hz}$, wodurch bestätigt wird, daß sich die Elemente bei geringer Dicke gemäß der Theorie dünner Schalen verhalten. Da die 3-Knoten-Elemente sich bisher stets als die geeignetere Variante erwiesen haben, werden die folgenden Rechnungen mit ihnen durchgeführt.

Aus dynamischen Berechnungen mit dem Modell der Kreisplatte aus axialsymmetrischen Schalenelementen lassen sich ebenfalls einige interessante Erkenntnisse ziehen. Eine ABAQUS-Rechnung gliedert sich in aufeinander folgende Schritte. Um die Platte zum Schwingen anzuregen, gibt es mehrere Möglichkeiten (vgl. Kap.5). Dies wird hier so realisiert, daß zunächst in einem Schritt auf alle Elemente eine Drucklast in z-Richtung aufgebracht wird und die statische Auslenkung berechnet wird. Im anschließenden dynamischen Schritt wird diese Last dann schlagartig entfernt, so daß das System sich selbst überlassen wird und freie, ungedämpfte Schwingungen ausführen kann. Für den Ablauf der dynamischen Rechnung muß man verschiedene Parameter angeben. Einerseits wird dabei die Länge des zu durchlaufenden Zeitintervalls festgelegt. Außerdem wird zur Unterteilung dieses Intervalls ein vorgeschlagenes zeitliches Inkrement sowie ein minimal bzw. maximal zulässiges Inkrement bestimmt, wobei nach jedem dieser Zeitschritte die momentane Konfiguration des Modells berechnet wird. Desweiteren besteht die Möglichkeit eine maximale Anzahl an Inkrementen anzugeben, nach deren Berechnung dieser Schritt unweigerlich abgebrochen wird. Es zeigt sich, daß bei diesem einfachen Modell stets das vorgeschlagene Inkrement angenommen wurde. Falls es jedoch Konvergenzschwierigkeiten bei der Berechnung des Gleichgewichtszustandes gibt, was es bei komplexeren Modellen vorkommen kann, so versucht ABAQUS durch Heruntersetzen des Zeitinkrements dieses Problem zu beseitigen.

Betrachtet man für den dynamischen Schritt den zeitlichen Verlauf der Verschiebung eines Knotens in z-Richtung, so erhält man eine sinusförmige Schwingung, natürlich vorausgesetzt, daß das Zeitinkrement wesentlich kleiner ist als die Schwingungsdauer. Dabei fällt auf, daß die Amplitude minimal moduliert ist. Vergleicht man damit das zeitliche Verhalten des Rotationsfreiheitsgrades desselben Knotens, erkennt man ebenfalls eine ge-

ringe Amplitudenmodulation. Allerdings befinden sich nun die Maxima dort, wo bei der Verschiebung die Minima liegen. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Modulation durch einen Energieaustausch zwischen Translations- und Rotationsfreiheitsgrad hervorgerufen wird.

Bestimmt man für die dynamische Rechnung die Frequenz anhand der zeitlichen Abhängigkeit der Verschiebung aus einem Diagramm durch Ausmessen der Schwingungsdauer, so stellt man fest, daß das Resultat kleiner ist als die Frequenz, die direkt in einer Eigenfrequenzanalyse bestimmt wird. Durch Vergleich verschiedener zeitlicher Inkrementierungen erkennt man, daß die so bestimmte Frequenz mit feiner werdenden Inkrementen gegen den berechneten Wert strebt. Diese Beobachtung ist wohl auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen, deren Einfluß bei größerer zeitlicher Inkrementierung zunimmt.

Zur Modellierung des Mikrosensors bestehend aus Folie und Mikrostruktur reichen die axialsymmetrischen Elemente natürlich nicht aus. Bevor jedoch auf die zweidimensionalen Schalenelemente eingegangen wird, werden Möglichkeiten zur Erzeugung der Vorspannung in der Folie vorgestellt und kurz die jeweiligen Vor- und Nachteile erwähnt.

3.2 Realisierung der Vorspannung

Im Experiment wird die Folie vor Aufbringen der Mikrostruktur durch einen Temperprozess auf Grund der verschiedenen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Rahmen und Folie vorgespannt. Die so entstehenden Spannungen liegen ungefähr bei 200MPa. Um dies in den FE-Rechnungen zu integrieren, werden an der einzelnen Kreisplatte zunächst drei Methoden ausprobiert.

1) Spannungsverteilung als Anfangsbedingung:

ABAQUS bietet die Möglichkeit, eine Spannungsverteilung als Anfangsbedingung vorzugeben. Indem man die Normalkomponenten des Spannungstensors in Richtung des Radius bzw. des Umfangs $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 200\text{MPa}$ setzt, erhält man den gewünschten ebenen Spannungszustand. Zur Bestimmung des statischen Gleichgewichtes (20) ist in der Rechnung jedoch zunächst ein Schritt ohne jede Last durchzuführen, da i.a. nicht davon ausgegangen werden kann, daß die gegebene Spannungsverteilung einen Gleichgewichtszustand darstellt. Desweiteren ist es nötig in diesem Schritt mit nicht-linearer Geometrie zu rechnen (ABAQUS: *nlgeom*-Parameter). Dies bewirkt, daß die folgenden Rechnungen nicht in der Anfangs- sondern in der Momentankonfiguration durchgeführt werden. Ansonsten würde die Vorspannung im Verlauf nicht berücksichtigt werden.

2) Thermisch erzeugte Spannung:

Mit Hilfe eines Temperatursprunges kann man ebenfalls Spannungen erzeugen. Dazu gibt man als Anfangsbedingung eine Ausgangstemperatur T_0 an. In der Rechnung wird dann in einem Schritt eine neue Temperatur T vorgegeben und aus der Temperaturdifferenz $\Delta T := T - T_0$ werden die entstehenden Spannungen und Dehnungen berechnet. Aus dem Materialgesetz (24) und der Tatsache, daß auf Grund des eingespannten Randes keine Dehnungen vorkommen, kann man mit

$$\sigma_0 = -\frac{E}{1-\nu}\alpha \Delta T \quad (68)$$

bei gegebenen Wärmeausdehnungskoeffizienten α und Vorspannung σ_0 die Temperaturen T_0 und T passend wählen. Um einen ebenen Spannungszustand zu erreichen, ist es i.a. nötig eine orthotrope Wärmeausdehnung vorzugeben, bei der die Komponente in Dickenrichtung gleich null ist. Auch hier besteht die Notwendigkeit, mit nicht-linearer Geometrie zu arbeiten.

3) Durch Vordeformation erzeugte Spannung:

Bei dieser Methode wird die Vorspannung durch Verschiebung des Randes erreicht. Dabei soll ausgehend vom Radius a_0 durch „Auseinanderziehen“ in radialer Richtung sowohl der gewünschte Radius a als auch die Vorspannung σ_0 erzeugt werden. Mit der Definition der radialen Dehnung

$$\epsilon_{rr} := \frac{a - a_0}{a_0} \quad (69)$$

und dem Hookschen Gesetz (22) kann man aus

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi} \approx \frac{u_r}{a} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_0, \quad \text{falls } a_0 \approx a, \quad (70)$$

die nötige Verschiebung u_r der Randknoten berechnen. Gleichzeitig tritt gemäß

$$\epsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \quad (71)$$

eine Querkontraktion in Dickenrichtung auf. Falls diese nicht vernachlässigbar ist, muß zu Beginn eine Dicke

$$h_0 = (1 - \epsilon_{zz})h \quad (72)$$

vorgegeben werden, um schließlich die gewünschte Dicke h zu erhalten. In der Rechnung wird die Verschiebung in einem eigenen Schritt vorgegeben und wie bei den Methoden zuvor muß dabei mit nicht-linearer Geometrie gerechnet werden.

Die erste Methode die Vorspannung zu erreichen ist für die eingespannte Platte sicherlich die einfachste. Für die späteren Modelle, die die Mikrostruktur, also den Stegbereich, mit beinhalten, ist dies jedoch mit Problemen verbunden. Dort wo sich der Steg unter der Folie befindet, bestehen die Elemente bei den Schalenmodellen aus zwei in Dickenrichtung übereinanderliegenden Materialschichten. Mit dieser Möglichkeit des mehrschichtigen Aufbaus kann in einem Element also sowohl die Folie als auch der Steg berücksichtigt werden. Da die vorgegebenen Spannungen aber stets für das gesamte Element gelten und der Stegbereich nicht vorgespannt sein soll, kann man bei diesen Elementen diese Methode nicht anwenden. Man kann das Problem umgehen, indem man nur für die einzelnen Membranen eine Vorspannung $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} > 200\text{MPa}$ vorgibt, so daß man nach Berechnung des Gleichgewichtszustandes ungefähr die gewünschte Verteilung erreicht. Abhängig von den verwendeten Materialien steigt allerdings die Inhomogenität des so erzielten Spannungszustandes.

Die thermische Vorspannungserzeugung ist bei allen Modellen gut einsetzbar. Man gibt hierzu für das Folienmaterial endliche Koeffizienten einer orthotropen Wärmeausdehnung an, während man den Ausdehnungskoeffizienten des Stegmaterials gleich Null setzt. Somit erreicht man in der Folie einen homogenen, ebenen Spannungszustand, während die Mikrostruktur spannungsfrei bleibt. Nachteilig wird diese Methode erst, wenn man Rechnungen mit thermischen Belastungen durchführen möchte, bei denen man auf den Ausdehnungskoeffizienten des Steges angewiesen ist.

Die dritte Methode ist nur sehr begrenzt einsetzbar, da je nach Modell der Aufwand zur Berechnung der Verschiebungen und die Erstellung des unverzerrten Modells zu groß ist. Bei gewünschter Änderung der Vorspannung und gleichzeitiger Beibehaltung der Materialparameter müßte zwangsläufig stets ein neues Modell erzeugt werden. Bei mehrschichtigen Elementen ist es auch nicht möglich, eine Schicht spannungsfrei zu lassen. Deshalb wurde die Verschiebung des Randes lediglich bei der einzelnen Kreismembran angewendet.

3.3 FE-Rechnungen zu einer eingespannten Kreisplatte

In diesem Abschnitt werden verschiedene Modelle einer einzelnen Kreisplatte betrachtet, denen jedoch allen dieselbe Geometrie zugrunde liegt. Ausgegangen wird dabei von einer Membran des zu untersuchenden Systems. Diese hat folglich einen Radius $a = 30\mu\text{m}$ und eine Dicke $h = 2,7\mu\text{m}$. Desweiteren werden für die Rechnungen von nun an die Materialparameter von Titan aus [2] verwendet. Dies sind der E-Modul $E_{Ti} = 115\text{GPa}$, die

Querkontraktionszahl $\nu_{Ti} = 0,36$, die Dichte $\rho_{Ti} = 4500\text{kg/m}^3$ und der Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_{Ti} = 9 \cdot 10^{-6}1/\text{K}$.

3.3.1 Schubelastische axialsymmetrische Schalenelemente

Die soeben vorgestellten Möglichkeiten zum Erreichen der Vorspannung werden zunächst auf die schon bekannten axialsymmetrischen Elemente mit drei Knoten angewendet. Mit oben genannten Werten wird ein Modell aus zwölf Elementen benutzt.

1) Spannungsverteilung als Anfangsbedingung:

Um den gewünschten ebenen Spannungszustand zu erhalten, werden die zwei vorhandenen Spannungskomponenten in radialer Richtung und in Umfangsrichtung $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 200\text{MPa}$ gesetzt. Daraus wird die erste Eigenfrequenz zu

$$f_{Spann} = 8,017\text{MHz}$$

berechnet.

2) Thermisch erzeugte Spannung:

Um die Vorspannung $\sigma_0 = 200\text{MPa}$ zu erhalten, wird auf Grund von Gleichung (68) eine Temperaturdifferenz von $\Delta T = -123,67\text{K}$ benötigt. Deshalb wird $T_0 = 123,67\text{K}$ und $T = 0\text{K}$ gesetzt. Für die Grundschwingung gilt hier

$$f_{therm} = 7,983\text{MHz} .$$

3) Durch Vordeformation erzeugte Spannung:

Aus Gleichung (70) wird für die Verschiebung des Randknotens $u_r = 3,339 \cdot 10^{-2}\mu\text{m}$ berechnet. Die Querkontraktion führt zu einer vernachlässigbaren Verminderung der Dicke um $3,38 \cdot 10^{-3}\mu\text{m}$. Dies bedeutet, daß hier zunächst ein Modell mit Radius $a_0 = 29,967\mu\text{m}$ erstellt werden muß, daß dann um u_r in radialer Richtung verlängert wird. Die FE-Rechnung ergibt die erste Eigenfrequenz zu

$$f_{Vord} = 8,003\text{MHz} .$$

Wie man sieht, liefern alle Methoden praktisch die gleiche Frequenz. Die Unterschiede sind mit knapp 0,4% vernachlässigbar. Wegen der Einfachheit wird von nun an zunächst die erste Methode, also die vorgegebene Spannungsverteilung, zur Erzeugung der Vorspannung herangezogen.

In [2] wurde mit Hilfe eines Verschiebungsansatzes für die Membranauslenkung, der einer biquadratischen Parabel entspricht, Formel (1) zur Berechnung der Frequenz hergeleitet. Werden der Temperatur- und Dehnungsterm, denen momentan beiden keine Bedeutung zukommt, weggelassen, so erhält man

$$f_{vak} = \frac{1}{a\pi} \sqrt{\frac{20}{9\rho_{Ti}} \frac{E_{Ti} h^2}{(1 - \nu_{Ti}^2) a^2} + \frac{5\sigma_0}{3\rho_{Ti}}} = 8,24\text{MHz} . \quad (73)$$

Im Vergleich zu den mit ABAQUS berechneten Werten gibt dies eine Abweichung von 3%. Die Vermutung liegt nahe, daß dafür Schubdeformationen verantwortlich sind, die in Gleichung (73) nicht berücksichtigt sind. Um dies zu überprüfen gibt es zwei Möglichkeiten:

a) $h \rightarrow 0$:

Wie schon in Kap.3.1 durchgeführt, können die Querschubdeformationen durch Reduzierung der Dicke verringert werden.

b) $\nu \rightarrow -1$:

Nach Gleichung (23) ergibt sich der Schubmodul G aus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (74)$$

Für $G \rightarrow \infty$ verschwinden die Schubdeformationen und dies kann durch $\nu \rightarrow -1$ erreicht werden. Zwar liegt die Querkontraktionszahl in der Realität nur im Bereich $0 < \nu < 1/2$, rein formal kann sie aber auch Werte zwischen -1 und 0 annehmen.

Die erste Variante bringt hier allerdings keinen Erfolg. Denn für wesentlich kleinere Dicken hat in Gleichung (73) der erste Term im Vergleich zum zweiten, der sich aus der Vorspannung ergibt, keinen Einfluß mehr auf die Frequenz. Dies mag daran liegen, daß in diesem Fall der Verschiebungsansatz, der Formel (73) zugrunde liegt, seine Gültigkeit verliert.

Zur zweiten Methode wurden die Frequenzen für $\nu = -0,999$ bestimmt:

	Erste Eigenfrequenz f in MHz mittels		
	FE-Rechnung	Gleichung (73)	analytischer Formel (45)
mit Vorspannung	158,18	160,98	–
ohne Vorspannung	158,10	160,95	159,21

Die Abweichung der beiden Werte beträgt nun rund 1,8%. Die Schubdeformationen tragen also schon zu der Differenz bei, sind aber nicht alleine dafür verantwortlich. Die Rechnungen ohne Vorspannung lassen auch einen Vergleich mit der analytischen Lösung zu. Man sieht, daß die Vorspannung kaum noch Einfluß hat, und daß der analytische Wert in der Mitte der beiden anderen liegt. Die Abweichung zur FE-Rechnung folgt wohl wiederum aus der Benutzung der Theorie der dicken Platte, während sie bei den Ergebnissen aus Gleichung (73) vom Näherungscharakter des Verschiebungssatzes stammen kann.

3.3.2 Schubstarre Schalenelemente

Durch die Benutzung schubstarrer Elemente kann man den Einfluß der Querschubdeformationen innerhalb der FE-Rechnung beurteilen. ABAQUS bietet hierfür dreieckige isoparametrische Schalenelemente mit drei Knoten. Jeder Knoten besitzt sechs Freiheitsgrade, wobei es sich um die Translationen u_x , u_y , u_z und um die Rotationen ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z handelt (ABAQUS-Bezeichnung: *STR13*-Elemente). Als Modell wurde ein Kreisbogen, der sich in der x,z-Ebene befindet, mit einem Öffnungswinkel $\vartheta = 60^\circ$ ausgewählt. Für den Kreisbogen werden alle Translationen und Rotationen beschränkt. An den beiden Schnittkanten werden die Randbedingungen so formuliert, daß bei Deformation die Axialsymmetrie zur z-Achse gewährleistet ist. Eine Verschiebung u_φ , die senkrecht zur jeweiligen Kante und zur z-Achse verläuft, muß also ausgeschlossen werden. Außerdem sind Rotationen um die z-Achse und um die Achse in radialer Richtung an den Schnittkanten nicht erlaubt. Für den Kreismittelpunkt werden schließlich alle Freiheitsgrade bis auf die Verschiebung u_z in z-Richtung beschränkt.

Mit dem recht feinen Netz (vgl. Abb.5), das für diese schubstarrten Elemente nötig ist [3], wird schließlich die Frequenz der ersten Eigenschwingung bestimmt.

	Erste Eigenfrequenz f in MHz mittels		
	FE-Rechnung	Gleichung (73)	analytischer Formel (45)
mit Vorspannung	8,155	8,236	–
ohne Vorspannung	7,609	7,713	7.629

Wie zu erwarten war, liefern diese schubstarrten Elemente ohne Vorspannung nahezu die analytischen Frequenz der dünnen Platte, während der aus Gleichung (73) ermittelte

Wert um 1,4% davon abweicht. Mit Vorspannung verringert sich diese Differenz auf 1%. Insgesamt führt die Vernachlässigung von Querschubdeformationen zu einer Vergrößerung der Frequenz der Platte um rund 2%. Darum sollten für die weiteren Berechnungen Elemente benutzt werden, die die Theorie dicker Schalen beinhalten.

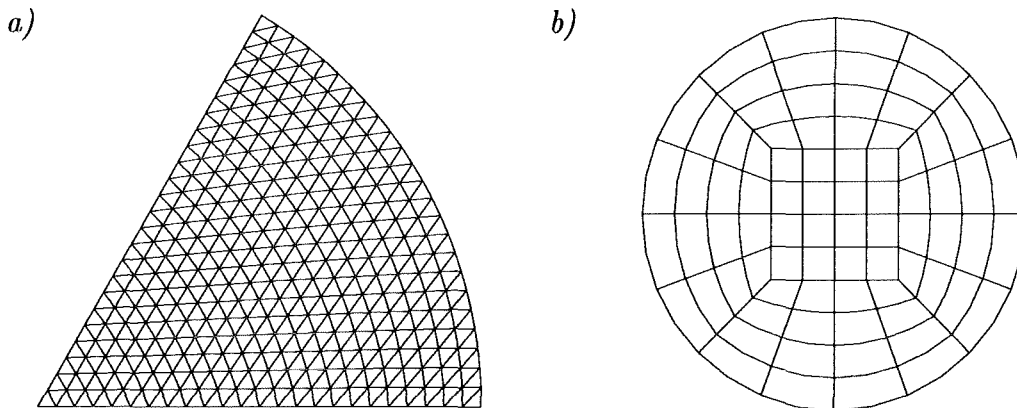


Abb.5: a) 60°-Sektor aus Schalenelementen mit drei Knoten; b) Vollkreis aus Schalenelementen mit acht Knoten

3.3.3 Schubelastische Schalenelemente

Neben den Querschubdeformationen sprechen auch die in den später verwendeten Modellen auftretenden dickeren Elemente im Stegbereich für die Verwendung der Theorie dicker Schalen. Hierfür sind von den in ABAQUS angebotenen Schalenelementen die Elemente mit acht Knoten am besten geeignet [3]. Es handelt sich dabei um isoparametrische Elemente mit reduzierter Integration, wobei es zwei verschiedene Varianten gibt. Bei den ersten werden wieder alle sechs Freiheitsgrade berücksichtigt, während bei der zweiten ein Rotationsfreiheitsgrad außer Acht gelassen wird (ABAQUS-Bezeichnungen: *S8R*- bzw. *S8R5*-Elemente). Dabei handelt es sich um die Rotation bezüglich der Achse senkrecht zur Ebene, in der sich das Element befindet. Diese stellt keinen unabhängigen Freiheitsgrad dar.

Als Modell wird ein Vollkreis (siehe Abb.5) benutzt, wobei Geometrie und Materialparameter den zu Beginn dieses Kapitels gemachten Angaben entsprechen. Um die Einspannung bei $r = a$ zu gewährleisten, werden bei den Randknoten alle Freiheitsgrade beschränkt. Mit dem in Abb.5 dargestellten Netz erhält man folgende Ergebnisse:

	Erste Eigenfrequenz f in MHz für Elemente mit	
	allen Freiheitsgraden	fünf Freiheitsgraden
mit Vorspannung	8,0037	8,0148

Im Hinblick auf die folgenden Anwendungen werden mit diesen Elementen Rechnungen mit einem doppelt so feinen Netz durchgeführt, um den Einfluß der Diskretisierung beurteilen zu können. Mit dem verfeinerten Netz ergeben die FE-Rechnungen folgenden Frequenzen:

	Erste Eigenfrequenz f in MHz für Elemente mit	
	allen Freiheitsgraden	fünf Freiheitsgraden
mit Vorspannung	8,0004	8,0144
ohne Vorspannung	7,4505	7,4639

Die Resultate der beiden Elementtypen unterscheiden sich nur geringfügig. Es zeigt sich auch, daß die Feinheit des Netzes in Abb.5 ausreichend ist und eine Verfeinerung die Frequenz kaum verändert. Die Ergebnisse mit Vorspannung liegen dicht an denen der axialsymmetrischen Elemente. Ohne Vorspannung verdeutlicht der Vergleich mit den verschiedenen Resultaten der schubstarrten Platte aus Kap.3.3.2 wiederum den Einfluß der Querschubverformungen, der eine Verringerung der Frequenz um ungefähr 2% bewirkt.

3.3.4 Axialsymmetrische Kontinuums-elemente

Um zum Vergleich ein Ergebnis zu erhalten, daß ohne die Näherungen der Schalentheorie berechnet wird, muß ein Modell aus Kontinuums-elementen erstellt werden, in dem die Dicke der Platte berücksichtigt wird. Die einfachste Art, dies zu realisieren, ist wiederum mit Hilfe von axialsymmetrischen Elementen. Es werden zweidimensionale isoparametrische Elemente mit acht Knoten verwendet, wobei diese ohne und mit reduzierter Integration zur Verfügung stehen (ABAQUS-Bezeichnung: *CAX8*- bzw. *CAX8R*-Elemente). Das Modell ist dem der axialsymmetrischen Schalenelementen ähnlich, nur daß es nun eine Ausdehnung in Dickenrichtung besitzt (siehe Abb.6). Im Gegensatz zu den entsprechenden Schalenelementen besitzen dafür die Knoten der axialsymmetrischen Kontinuums-ele-

mente nur zwei Freiheitsgrade, nämlich die Verschiebungen in radialer und in z-Richtung u_r und u_z .

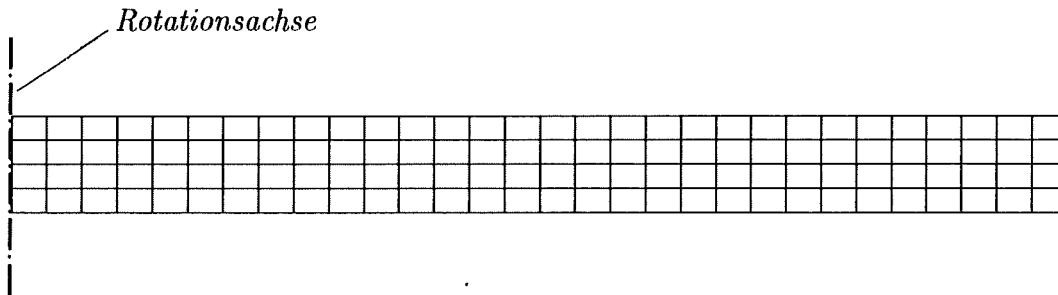


Abb.6: Axialsymmetrisches Kontinuumsmodell

Die Formulierung der Randbedingungen ist hier schwieriger. Bei $r = 0$ gilt stets $u_r = 0$. Beschränkt man bei $r = a$ beide Freiheitsgrade aller Knoten oder nur eines Eckknotens, während man bei den übrigen Randknoten $u_r = 0$ setzt, so können auf Grund dieser Zwänge unter Umständen Spannungskonzentrationen auftreten. Dies zeigt sich, wenn man in z-Richtung eine Drucklast auf die obere Linie wirken läßt und sich die im Modell auftretenden Spannungen ansieht. Vergleicht man den Spannungsverlauf in radialer Richtung sowie die Verschiebung u_z mit den analogen Fällen der Schalenmodelle, so erhält man eine gute Übereinstimmung, wenn für alle Randknoten $u_r = 0$ gilt und für den mittleren zusätzlich $u_z = 0$ gefordert wird. Mit diesen Randbedingungen werden mit Hilfe von ABAQUS schließlich folgende Frequenzen für die Grundschiwingung berechnet:

	Erste Eigenfrequenz f in MHz für Elemente mit	
	voller Integration	reduzierter Integration
mit Vorspannung	7,9848	7,9831
ohne Vorspannung	7,4415	7,4402

Die beiden Elementtypen liefern mit und ohne Vorspannung praktisch dieselben Ergebnisse, die sich zudem kaum von den Resultaten der verschiedenen schubweichen Schalenelemente unterscheiden. Bei der hier betrachteten Kreisplatte beträgt die Differenz

höchstens 0,4%. Für die kommenden Rechnungen mit wesentlich größeren Modellen, in denen auch die Mikrostruktur mit berücksichtigt wird, werden auf Grund der in diesem Kapitel gesammelten Erkenntnisse die Schubelastischen Schalenelemente mit acht Knoten benutzt.

Abschließend bleibt noch zu bemerken, daß sich bei der Durchführung von dynamischen Rechnungen stets die Erkenntnisse aus Kap.3.1 bestätigen lassen. Dies gilt vor allem auch für die geringe Modulation der Amplitude und deren Erklärung. Dies kann man bei den verschiedenen Schalenelementen und den axialsymmetrischen Kontinuumselementen beobachten. Da bei letzteren die Knoten keinen Rotationsfreiheitsgrad besitzen, ist ein direkter Vergleich der Verschiebung u_z mit der Rotation um die Achse senkrecht zur r,z -Ebene nicht möglich. Deshalb muß man sich in diesem Fall die Verdrehung des entsprechenden Querschnitts aus der Differenz der Verschiebungen u_r zweier Knoten berechnen, die in der Anfangskonfiguration denselben Radius besitzen.

4 FE-Modelle des Mikrosystems

Das im Experiment verwendete Mikrosystem besteht aus einer wenige Mikrometer dünnen Folie, die durch eine Mikrostruktur in einzelne Membranen unterteilt wird [1, 2]. Von den verschiedenen Membranformen werden für die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit die kreisförmigen Membranen ausgesucht. Da sich auf dem Sensor einige tausend Membranen befinden, ist es unmöglich, daß System komplett in ein FE-Modell abzubilden. Man muß sich auf einen sehr kleinen Ausschnitt beschränken, damit der Aufwand sowohl für die Erstellung des Modells als auch für die anschließenden Rechnungen nicht zu groß wird.

In diesem Kapitel werden nun die im folgenden benutzten Modelle vorgestellt. Darunter sind vier verschiedene Schalenmodelle und ein dreidimensionales Kontinuumsmodell, das zum Abschätzen der Genauigkeit der Schalenmodellierung herangezogen wird. Bei allen Modellen wird der Radius $a = 30\mu\text{m}$ der Membranen und eine minimale Stegbreite von $b = 10\mu\text{m}$ verwendet. Zum Erstellen der Schalenmodelle reichen diese beiden Geometrieangaben aus, während beim Kontinuumsmodell zusätzlich die Dickenrichtung modelliert werden muß. Hierbei beträgt die Dicke der Folie $h_M = 2,7\mu\text{m}$ und die Höhe des Steges $h_{St} = 10\mu\text{m}$. Das Netz wird aus dreidimensionalen Elementen mit zwanzig Knoten gebildet. Acht von ihnen befinden sich dabei an den Ecken des Elementes und die restlichen zwölf sitzen in der Mitte der Elementkanten. Bei den Schalenelementen wird das Modell aus zweidimensionalen Elementen mit acht Knoten aufgebaut.

Das erste Schalenmodell ist ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $l = 110\mu\text{m}$ (siehe Abb.7). Bei diesem und allen folgenden Modellen liegt der Ursprung des Koordinatensystems gemeinsam mit dem Mittelpunkt einer Membran in der linken unteren Ecke und das Netz befindet sich in der Anfangskonfiguration in der x,z -Ebene. In dem Dreieck befinden sich außer dem 60° -Kreissektor noch zwei Membranhälften, die jeweils von den vom Ursprung ausgehenden Kanten begrenzt werden. Die übrige dritte Kante liefert gewissermaßen die Begrenzung des gesamten Modells. Entlang dieser Außenkante werden alle Freiheitsgrade beschränkt, was einer Einspannung an dieser Kante entspricht. An den beiden anderen Begrenzungslinien werden die Randbedingungen so formuliert, daß die Periodizität in Umfangsrichtung, wie sie durch die Symmetrie der Mikrostruktur gegeben ist, gewährleistet wird. Wie schon beim Modell des Kreissektors in Kap.3.3.2 werden deshalb die Verschiebung u_φ , die senkrecht zur z -Achse und der jeweiligen Kante verläuft, und die Rotationen um die Begrenzungslinien sowie um die z -Achse verboten.

Es muß noch erwähnt werden, daß in der Mitte der äußeren Kante eigentlich ein kleines

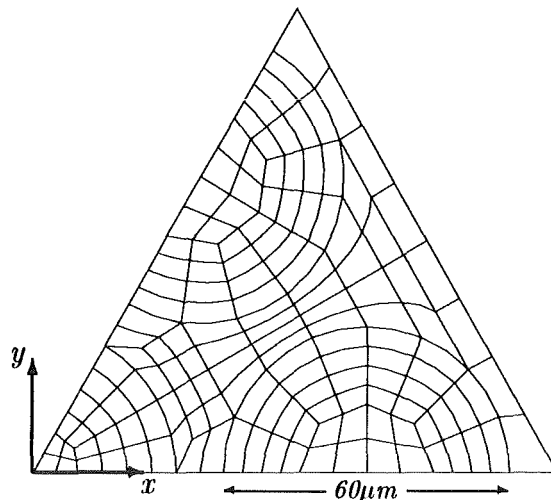


Abb.7: Erstes Schalenmodell mit der Kantenlänge $l = 110\mu\text{m}$

Segment einer weiteren Membran in das Modell hineinragen würde. Da das Modell hier aber sowieso eingespannt ist, wird dies vernachlässigt. Das gilt auch für alle folgenden Modelle.

Beim nächsten Modell handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Öffnungswinkel am Ursprung nur noch 30° beträgt. Der spitze Winkel führt zwar dazu, daß das dort liegende Element recht verzerrt ist, bei den anschließenden Rechnungen sind aber keine Probleme aufgetreten. Das Netz ist in Abb.8 zu sehen, wobei der Stegbereich im Vergleich zu den Membranen zur besseren Übersicht etwas dunkler gezeichnet ist.

Da dieses Modell im Vergleich zum vorhergehenden in radialer Richtung um eine Membran und zugehörigem Steg erweitert ist, hat die untere Kante eine Länge von $l = 180\mu\text{m}$. In diesem rechtwinkligen Dreieck befinden sich somit drei Membranhälften neben dem Kreissektor am Ursprung. Weil hier im Gegensatz zum übernächsten Modell die Unterteilung des Umfangs der einzelnen Membranen nicht an die sechszählige Symmetrie der gesamten Struktur angepasst ist, wird die Elementierung des Stegbereiches schwierig und ist deshalb sehr unregelmäßig. Was die Randbedingungen anbelangt, so werden diese an den Kanten analog zum vorigen Modell formuliert.

Neben der Winzigkeit des FE-Modells im Vergleich zum realen System liegt sicherlich eine Fehlerquelle in der Einspannung der Außenkante, die sich im Stegbereich befindet. Diese Randbedingung ist nicht realistisch, da die Stege nicht in Ruhe bleiben, wie die folgenden Rechnungen zeigen werden (vgl. Kap.5). Ein Versuch, dem besser entsprechen zu können, wird mit dem folgenden Modell gemacht. Hierbei wird das eben vorgestellte

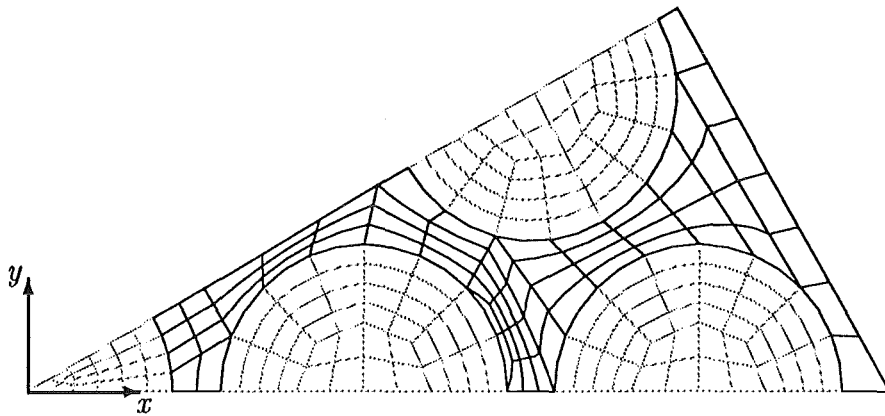


Abb.8: Zweites Schalenmodell, dessen untere Kante eine Länge von $l = 110\mu\text{m}$ besitzt.

Modell um einen wesentlich größeren Außenbereich erweitert (siehe Abb.9).

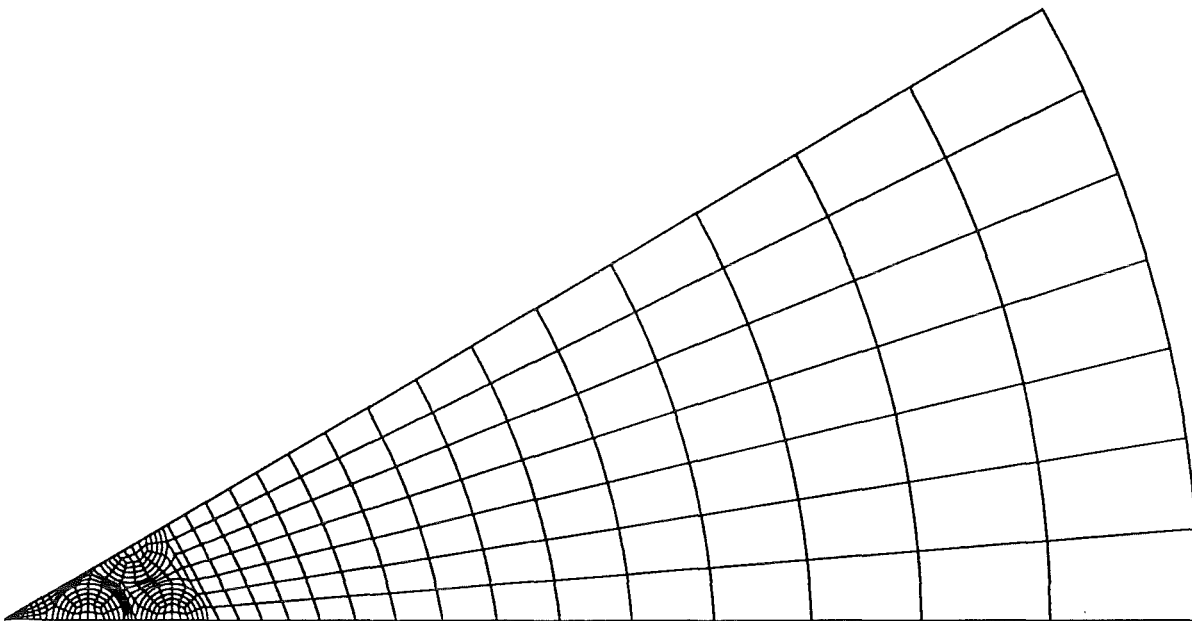


Abb.9: Drittes Schalenmodell mit erweitertem Außenbereich und einer Kantenlänge von $l=1\text{mm}$.

Die Länge der unteren Kante beträgt hier insgesamt $l = 1\text{mm}$. In dem angefügten Bereich befindet sich unter der Folie keine Mikrostruktur mehr, sondern eine durchgehende

Schicht mit gemittelten Eigenschaften. Somit braucht man in diesem Gebiet die Membranen nicht mehr zu modellieren, da lediglich der Einfluß des vernachlässigten Teils des ganzen Systems auf das vorige Modell näherungsweise wiedergegeben werden soll. Da mit größerer Entfernung der Einwirkung auf den Innenbereich abnimmt, werden die Elemente mit zunehmendem Abstand vom Ursprung größer. Als Außenkante wird in diesem Fall ein Kreisbogen benutzt. Bezogen auf das komplette Modell gelten wiederum dieselben Randbedingungen wie zuvor.

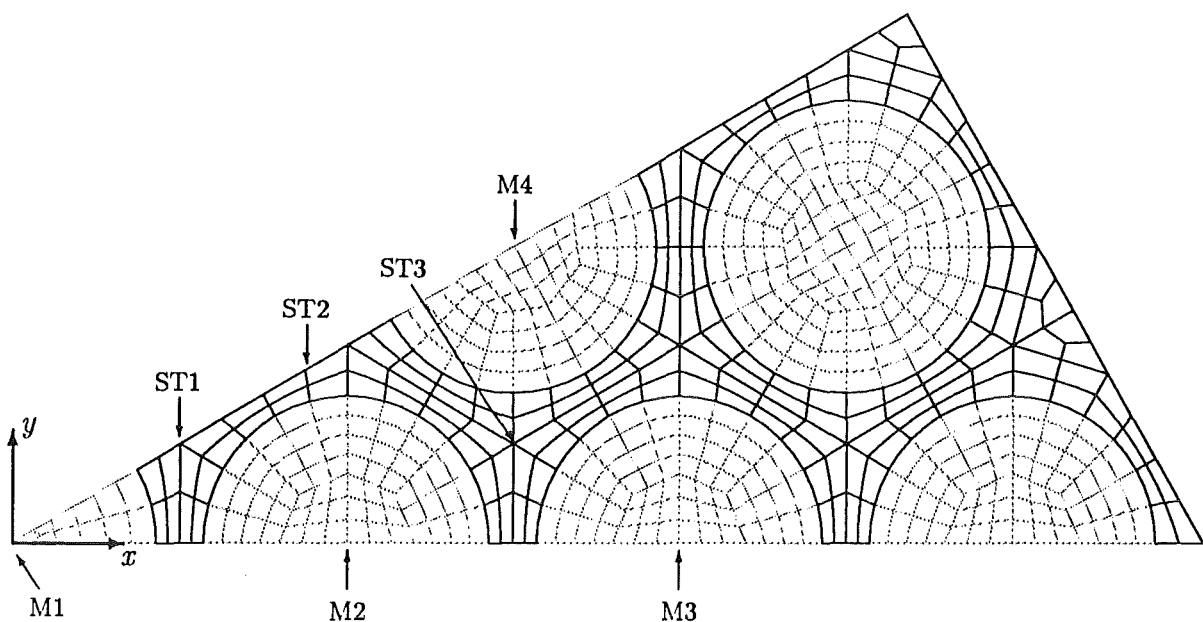


Abb.10: Viertes Schalenmodell, dessen untere Kante eine Länge von $l = 250\mu\text{m}$ besitzt.

Beim letzten Schalenmodell handelt es sich um eine Vergrößerung des zweiten Modells um ein Membran inklusive Steg in radialer Richtung. Es beinhaltet insgesamt drei Membranhälften, eine ganze Membran sowie den 30° -Kreissektor und die Länge der unteren Kante beträgt $l = 250\mu\text{m}$. Durch die bessere Diskretisierung der Membranen ergibt sich für den Stegbereich nun ein regelmäßigeres Netz als bisher, wie man in Abb.10 sehen kann. Die Randbedingungen werden wie bei den übrigen Modellen formuliert. Zur besseren Übersicht ist in Abb.10 der Stegbereich wieder etwas hervorgehoben. Außerdem wird bei diesem Modell einigen Knoten eine Bezeichnung gegeben. Diese werden im nächsten Kapitel, in dem die Ergebnisse der dynamischen Rechnungen vorgestellt wer-

den, benötigt. Für die übrigen Modelle können die Bezeichnungen an die entsprechenden Stellen mit gleichen Koordinaten übertragen werden.

Wie schon erwähnt, bietet ABAQUS die Möglichkeit, die Schalenelemente in Dickenrichtung aus mehreren Schichten verschiedener Höhe aufzubauen. Dies wird im Stegbereich, wo sich unter der Folie die Mikrostruktur befindet, angewendet.

Obwohl eine Schale eigentlich keine Ausdehnung senkrecht zu ihren lateralen Abmessungen besitzt, ergibt sich aus der Theorie eine Spannungsverteilung in Dickenrichtung. Bei den Schalenelementen werden die Spannungen und Dehnungen in dieser Richtung an verschiedenen Integrationsstützpunkten bestimmt. Deshalb kommt der Frage, wie die Elemente an der Grenze zwischen Membran- und Stegbereich aneinander anschließen, eine Bedeutung zu. Denn dort treffen gewissermaßen Elemente verschiedener „Dicke“ aufeinander. Vorstellbar wäre, daß dieser Anschluß entweder zentrisch zur Mittelfläche verläuft oder aber bündig an einer der Außenflächen ist. Anhand des Spannungsverlaufes entlang der Integrationspunkte eines Elementes im Stegbereich läßt sich diese Frage beantworten.

Hierfür eignen sich die Werte, die man bei der Vorspannungserzeugung mittels vorgegebener Membranspannung als Anfangsbedingung erhält (vgl. Kap.3.2). Die Spannungen des Stegbereichs werden bei dieser Methode durch Berechnung des Gleichgewichtszustandes bestimmt. Dabei werden pro Schicht fünf Integrationspunkte benutzt, d.h. im Stegbereich hat man insgesamt zehn. Es zeigt sich, daß dort die Spannungen der mittleren Integrationspunkte in der Größenordnung des in den Membranen vorgegebenen Wertes liegt, während sie bei den äußeren bedeutend kleiner sind. Daran erkennt man, daß am Übergang von Membran zu Steg die Mittelflächen aneinander anschließen.

Um diesen Widerspruch zur realen Struktur zu beseitigen, wird im Stegbereich eine zusätzliche dritte Schicht eingeführt. Sie wird nur als Gegenstück zur Nickelschicht benötigt, um eine durchgehende Titanschicht zu erhalten. Man kann die Materialkennwerte dieser Hilfsschicht, die in Realität nicht vorhanden ist, nicht gleich Null setzen, da singuläre Matrizen eine Lösung mit Hilfe der FEM verhindern würden. Deshalb werden dieser Schicht die Dichte $\rho = 10^{-4}\text{kg/m}^3$ und der E-Modul $E = 10^{-4}\text{MPa}$ zugewiesen, die beide einige Größenordnungen kleiner sind als die Werte der verwendeten Materialien. Für die Querkontraktionszahl wird der Zahlenwert von Titan übernommen.

Bei den Schalenmodellen werden also einerseits für die Membranen Elemente eingesetzt, die nur aus einer einzelnen $2,7\mu\text{m}$ dicken Schicht bestehen. Andererseits werden im Stegbereich Elemente benutzt, die aus drei Schichten bestehen, wobei man jeder einzelnen Materialkennwerte zuweisen kann. Bei den Schichten handelt es sich um die $10\mu\text{m}$ hohe

Mikrostruktur, die $2,7\mu\text{m}$ dicke Folie und die ebenfalls $10\mu\text{m}$ hohe Hilfsschicht.

Bei dem am Rande erweiterten Modell kommt den Elementen des Außenbereichs eine gesonderte Rolle zu. Der Aufbau dieser Elemente wird so bestimmt, daß in diesem Gebiet die Trägheit erhalten bleibt. Die Masse der Mikrostruktur soll also durch eine Schicht konstanter Dicke wiedergegeben werden. Berechnungen anhand einer einzelnen sechseckigen Wabe, die als Elementarzelle der Struktur betrachtet werden kann, ergeben eine nötige Schichtdicke von $3,337\mu\text{m}$.

Alle folgenden Rechnungen werden mit den schubelastischen Acht-Knoten-Elementen mit reduzierter Intergration, bei denen alle Freiheitsgrade berücksichtigt werden, (ABAQUS-Bezeichnung: *S8R*-Elemente, vgl. Kap.3.3.3) durchgeführt. Pro Schicht werden dabei in Dickenrichtung fünf Integrationsstützpunkte verwendet.

Da im nächsten Kapitel einige Male auf die verschiedenen Modelle Bezug genommen wird, werden sie der Einfachheit halber durchnummeriert, wie es in Abb.7-10 bereits geschehen ist.

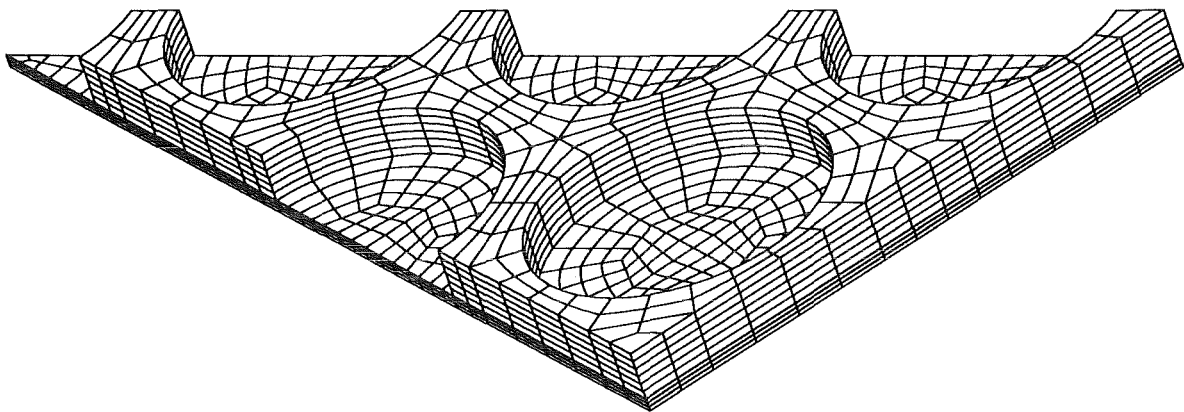


Abb.11: Kontinuumsmodell mit denselben lateralen Abmessungen wie das vierte Schalenmodell

Um den Fehler, der durch die Näherungen der Schalentheorie entsteht, beurteilen zu können, wird als Vergleich zu den Schalenmodellen ein Kontinuummodell erstellt. Dabei wird ausgehend vom letzten Modell dieses zweidimensionale Netz entlang der z-Achse in negativer Richtung verschoben. In Dickenrichtung werden für die Folie drei Elemente und für die Mikrostruktur sechs Elemente erzeugt. Im Gegensatz zu den Schalenelementen besitzen die Kontinuumselemente an jedem Knoten nur drei Translationsfreiheitsgrade.

Das Modell wird nun nicht mehr von Schnittkanten sondern von Schnittflächen begrenzt. Deshalb sehen in diesem Fall die Randbedingungen anders aus. Bezüglich der beiden Begrenzungsflächen, die vom der z-Achse ausgehen, wird die Verschiebung senkrecht zu diesen Flächen verboten. An der äußeren Schnittfläche wird ähnlich wie bei dem axialsymmetrischen Kontinuumsmodell in Kap.3.3.4 für alle Knoten nur die Translation in z-Richtung erlaubt und zusätzlich werden entlang der Trennlinie zwischen Folie und Steg alle Freiheitsgrade beschränkt.

In Abb.11 ist eine Ansicht des Modells von schräg unten dargestellt. Von oben entlang der z-Achse betrachtet, entspricht es dem vorigen Modell (siehe Abb.10).

Auf Grund der Trennung zwischen Folie und Mikrostruktur kann bei diesem Modell jedem Element die entsprechenden Materialwerte zugeordnet werden. Für die folgenden Rechnungen werden isoparametrische Kontinuumsselemente mit zwanzig Knoten verwendet (ABAQUS-Bezeichnung: *C3D20*-Elemente).

5 Dynamische Rechnungen

In Absprache mit den Projektpartnern im Institut für Mikrostrukturtechnik wird den Rechnungen ein Mikrosensor bestehend aus Titanfolie und einer Mikrostruktur aus Nickel zu Grunde gelegt. Die Materialkennwerte von Nickel sind $E_{Ni} = 171\text{GPa}$, $\nu_{Ni} = 0,31$ und $\rho_{Ni} = 8900\text{kg/m}^3$ [20]. Die Vorspannung wird bei dieser Materialkombination Titan/Nickel durch eine als Anfangsbedingung gegebene Spannungsverteilung erzeugt (vgl. Kap.3.2).

Der Spannungswert, der für die Membranen vorgegeben werden muß, um im Gleichgewichtszustand die gewünschte Vorspannung zu erhalten, wird durch einige Testrechnungen ermittelt. Diese ergeben, daß bei allen Modellen für die Membranen $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 233\text{MPa}$ gesetzt werden muß. Nach Berechnung des Gleichgewichtszustandes erhält man somit für die Membranen näherungsweise einen ebenen Spannungszustand mit 200MPa . Vor allem an den Membranrändern treten dabei in radialer Richtung und in Umfangsrichtung Inhomogenitäten auf, welche vereinzelt eine Abweichung der beiden Spannungskomponente von rund 7% mit sich bringen. Wenn man die Werte entlang der Integrationsstützpunkte eines Membranlementes betrachtet, erkennt man auch eine leichte Schwankung der Spannungswerte um ungefähr 4%. Dabei treten an der Seite, auf der sich die Mikrostruktur befindet, im Vergleich zur Mittelfläche Zugspannungen und an der gegenüberliegenden Seite Druckspannungen auf. Damit verbunden ist eine Deformation des Modells, die mit Maximalwerten von $u_z \approx 0,05\mu\text{m}$ aber nicht von Bedeutung ist.

Um die Vorspannung im erweiterten dritten Modell zu realisieren, muß man auch den Elementen des angefügten Außenbereiches Spannungswerte vorgeben. Diese werden dabei so gewählt, daß im Innenbereich, in dem die Mikrostruktur modelliert ist, ungefähr die Spannungsverteilung wie beim zweiten Modell erreicht werden. Aus Testrechnungen mit diesem Modell ergibt sich somit für die Elemente des erweiterten Gebietes $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 76\text{MPa}$.

Das Schwingungsverhalten wird nun zunächst mit Hilfe dynamischer Rechnungen untersucht. Da das Kontinuumsmodell zu aufwendig ist, werden dazu nur die Schalenmodelle herangezogen. Um das System zum Schwingen anzuregen, werden drei verschiedene Methoden benutzt:

1) Oberflächenlast:

Das gesamte Modell wird in negative z-Richtung mit einer Drucklast versehen. Nach schlagartigem Entfernen dieser Belastung kann das System im dynamischen Rechen-schritt freie Schwingungen ausführen.

2) Anfangsgeschwindigkeit in den Membraninnenflächen:

Dabei wird für alle Innenflächen der Membranen dieselbe Geschwindigkeit als Anfangsbedingung in z-Richtung vorgegeben und im dynamischen Schritt das weitere Verhalten des Systems beobachtet.

3) Harmonische Anregung:

In einem ersten dynamischen Schritt wird eine erzwungene Schwingung erzeugt. Dies geschieht mit Hilfe einer auf das gesamte Modell wirkenden, zeitlich veränderlichen Oberflächenlast

$$p(t) = p_0 \sin \omega t , \quad (75)$$

mit der Amplitude p_0 und der Kreisfrequenz ω . Im nächsten Schritt kann das Modell dann frei schwingen.

Außer bei der Kreisfrequenz ω der harmonischen Anregung spielt bei allen drei Möglichkeiten der Betrag der angegebenen Größen eine untergeordnete Rolle. Einziges Kriterium bei der Auswahl der Werte für die Drucklast, die Geschwindigkeit sowie der Amplitude p_0 sind die dadurch erzeugten Deformationen. Damit diese nicht zu groß werden, wird darauf geachtet, daß die Verschiebungen in z-Richtung wenige Mikrometer nicht überschreiten.

5.1 Durch Oberflächenlast erzeugte Schwingung

Das schlagartige Entfernen einer Oberflächenlast ist zwar die einfachste Methode, um das Modell zum Schwingen anzuregen, allerdings sind die sich daraus ergebenden Resultate nicht sehr aufschlußreich. Zur Analyse des Schwingungsverhaltens werden Diagramme betrachtet, in denen die Verschiebung verschiedener Knoten in z-Richtung über der Zeit aufgetragen ist.

In Abb.12 geschieht dies für vier Knoten des ersten Modells, von denen sich zwei jeweils im Zentrum einer Membran und zwei im Stegbereich befinden. Die genaue Lage ist dem größeren vierten Modell in Abb.10 zu entnehmen.

Die Knoten des Steges führen im wesentlichen eine Sinusschwingung aus, deren Frequenz durch Ausmessen $f_{st} \approx 2,52\text{MHz}$ ergibt. Dieser Wert stimmt sehr gut mit der Frequenz der ersten Eigenschwingungsform $f_1 = 2,53\text{MHz}$ überein, die mit Hilfe einer Eigenfrequenzanalyse des Modells berechnet wird. Bei den Membranknoten ist eine Überlagerung mehrerer Schwingungen zu erkennen. Vergleicht man die Knoten M2 und ST2, die

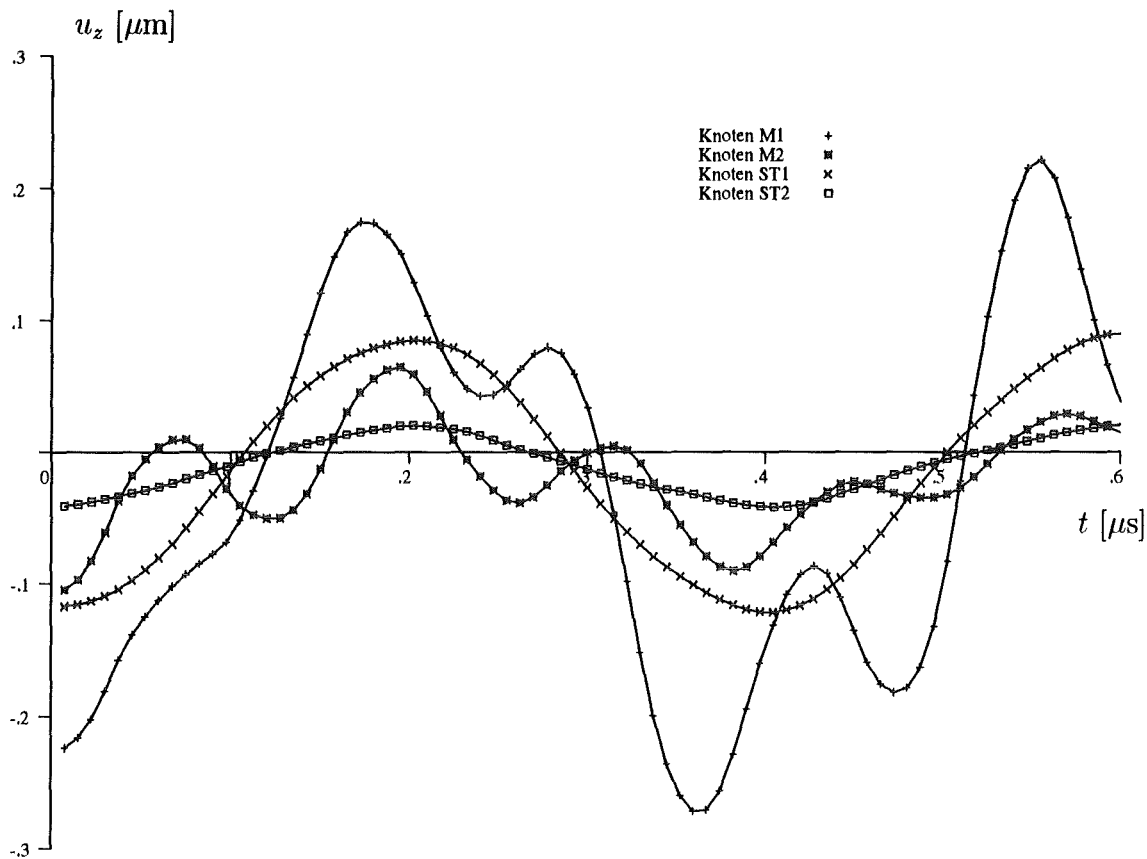


Abb.12: Zeitliche Abhängigkeit der Verschiebung u_z einzelner Knoten (siehe Abb.10) des ersten Schalenmodells

ungefähr den gleichen Radius besitzen, so erkennt man, daß der Membranknoten zusätzlich zur ersten Eigenschwingung des Gesamtsystems noch eine höherfrequente Schwingung beschreibt. Dasselbe gilt für den Knoten M1 am Ursprung, der natürlich die maximale Auslenkung erfährt. Aus dem Diagramm wird die Frequenz der Membranschwingung zu $f_M \approx 8,05\text{MHz}$ bestimmt. Dieser Wert liegt in der Größenordnung der Frequenz einer einzelnen eingespannten Membran. Allerdings sollte man davon ausgehen, daß der wahre Wert wegen der groben zeitlichen Inkrementierung für diese Frequenz in Wirklichkeit größer ist (vgl. Kap.3.1).

Bei den größeren Modellen zeigt sich, daß mit dieser Methode hauptsächlich die erste Eigenschwingungsform des ganzen Modells angeregt wird. Die erste Eigenfrequenz kann aus den Diagrammen im Vergleich zu den Werten aus der Eigenfrequenzanalyse bis auf

1% genau bestimmt werden. Die Membranschwingungen sind beim zweiten und vierten Modell (siehe Abb.13) noch schwach zu sehen. Beim dritten Modell jedoch ist praktisch nur noch die Eigenschwingung des ganzen Modells beobachtbar, da deren Amplitude wesentlich größer ist als diejenige der überlagerten Membranschwingung.

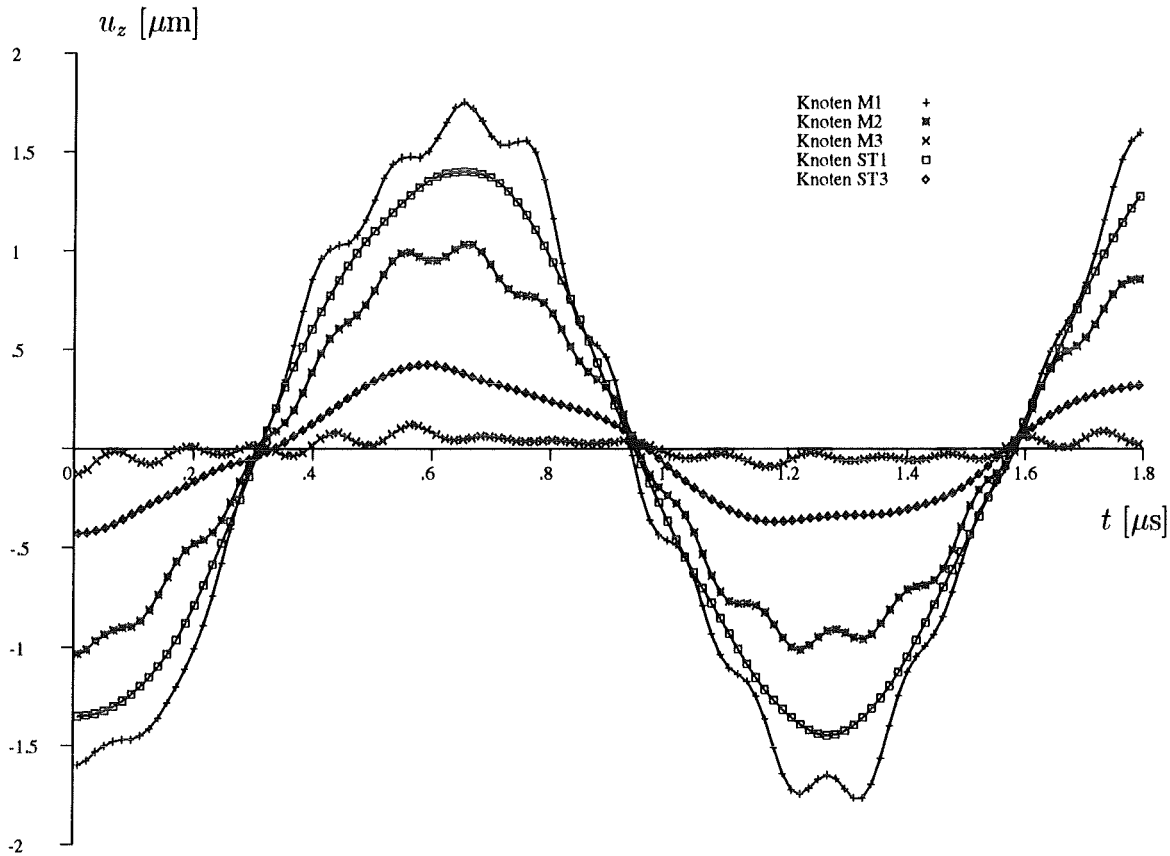


Abb.13: Zeitliche Abhängigkeit der Verschiebung u_z einzelner Knoten (siehe Abb.10) des zweiten Schalenmodells

5.2 Durch Anfangsgeschwindigkeit erzeugte Schwingung

Als Innenflächen werden bei den halben Membranen die in der Mitte erkennbaren Achteckhälften bezeichnet. Bei der ganzen Membran im vierten Modell handelt es sich folglich um das gesamte Achteck und bei den Kreissektoren am Ursprung um den entsprechend kleinere Anteil. Den Knoten aller Elemente dieser Innenflächen wird als Anfangsbedingung die gleiche Geschwindigkeit in z-Richtung vorgegeben.

Dieses unstetige Anfangsgeschwindigkeitsprofil ist eine grobe Approximation an das Geschwindigkeitsprofil der ersten Eigenschwingungsform einer einzelnen Membran. Insgesamt entspricht dieser Vorgabe einer Annäherung an die erwartete Eigenschwingung des Gesamtsystems. Da die FE-Rechnungen sinnvolle Ergebnisse liefern, ist die benutzte Vorgehensweise durchaus zu rechtfertigen.

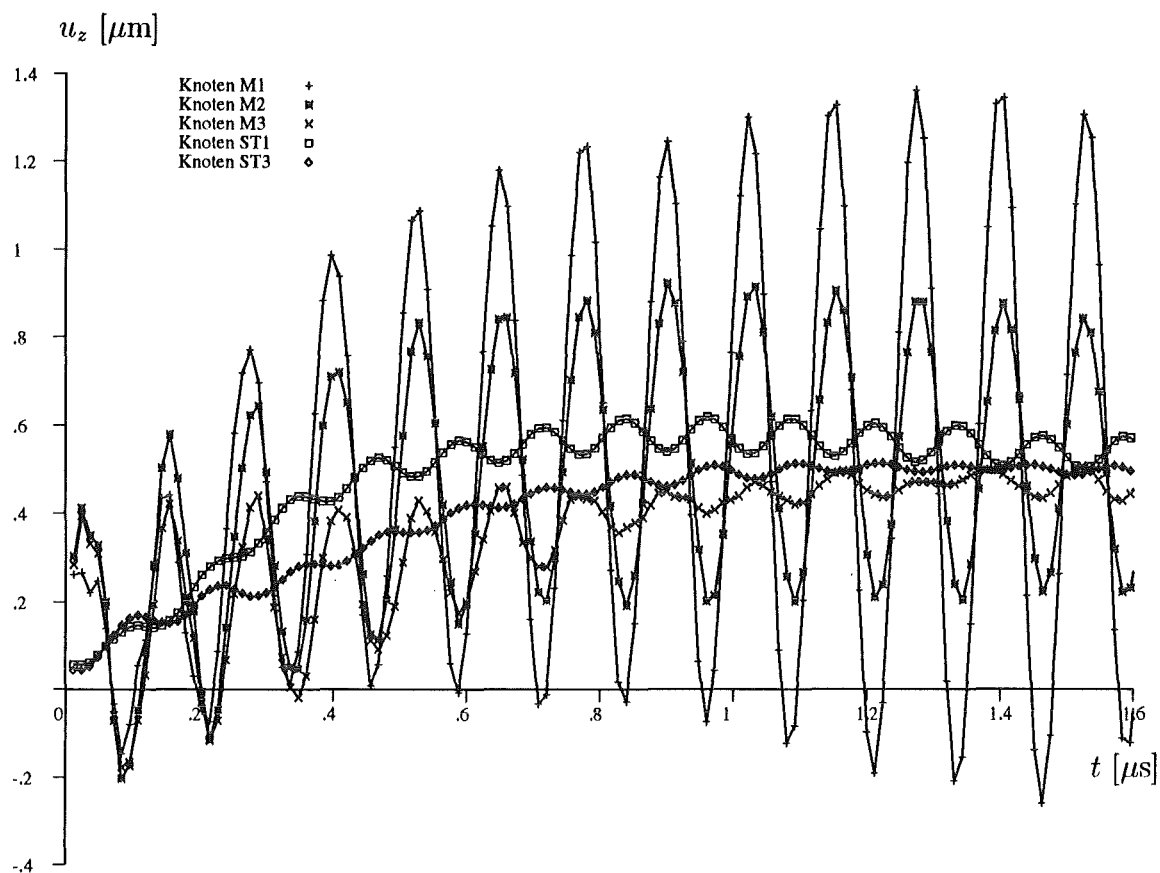


Abb.14: Zeitliche Abhängigkeit der Verschiebung u_z einzelner Knoten (siehe Abb.10) des dritten Schalenmodells

Zur Analyse der Schwingung wird wieder der zeitliche Verlauf der Verschiebung einzelner Knoten betrachtet. In Abb.14 ist das Diagramm für das dritte Modell zu sehen. Bei den übrigen Modellen ergeben sich vergleichbare Bilder, die dieselben Erkenntnisse liefern.

Wie erwartet sind bei dieser Art der Anregung im Gegensatz zur ersten Methode die Membranschwingungen wesentlich deutlicher ausgeprägt, wobei die Amplitude mit

zunehmendem Abstand vom Ursprung kleiner wird. Durch Ausmessen erhält man hier eine Frequenz von $f_M \approx 7,98\text{MHz}$. Auch wenn sich die Erregung der Schwingung nur auf die Membranen beschränkt, zeigt sich, daß der Stegbereich nicht in Ruhe bleibt. Die Bewegung der Stegknoten setzt sich ebenso wie die der Membranknoten aus zwei Schwingungen zusammen. Einerseits läßt sich wieder deutlich die niederfrequente erste Eigenschwingungsform des Gesamtsystems erkennen. Die zugehörige Frequenz des erweiterten Modells ist mit $f_1 = 0,04\text{MHz}$ allerdings zu klein, um aus Abb.14 bestimmt werden zu können. Andererseits erkennt man an den Stegknoten ein überlagerte Schwingung derselben Frequenz, mit der sich auch die Membranen bewegen. Allerdings ist die Amplitude wesentlich kleiner als bei den Membranknoten. Entscheidend beim Vergleich des Stegbereiches mit den Membranen ist die Tatsache, daß die Stegknoten gegenüber den Membranen, die alle in Phase schwingen, einen Phasenunterschied von π besitzen.

5.3 Harmonische Anregung

Für den Schritt, in dem die sinusförmige Anregung des Modells stattfindet, wird eine Zeitdauer von $t_a = 0,5\mu\text{s}$ festgelegt. Als Kreisfrequenz wird der Wert der ersten Eigenkreisfrequenz einer einzelnen Membran benutzt, d.h. $\omega = 2\pi f = 50,27\text{MHz}$ ($\hat{=} f = 8\text{MHz}$). Diese Anregungsmethode ist der in den experimentellen Untersuchungen verwendeten sehr ähnlich. Dort wird allerdings ein breitbandiger Puls verwendet, dessen Mittenfrequenz ungefähr mit der Resonanzfrequenz übereinstimmt. Diese wird auf Grund des Mediums, das den Sensor im Experiment umgibt, um einiges herabgesetzt (vgl. Kap.6.3).

Für die Betrachtungen des Verhaltens bei harmonischer Anregung wird das vierte Modell ausgewählt (siehe Abb.15). Die übrigen Modelle ergeben wiederum vergleichbare Diagramme. Man erkennt auch hier, daß die Knoten im Stegbereich gegenphasig zu den Membranen schwingen. Wie schon in Abb.14 zu sehen ist, tritt bei den verschiedenen Knoten eine Modulation der Amplitude auf. Zusätzlich ist bei den Membranknoten, die im wesentlichen in Phase schwingen, eine leichte Frequenzmodulation zu beobachten. Die Änderung der Amplitude ist um einiges größer als die geringe Modulation, die schon bei den dynamischen Rechnungen zur Einzelmembran (vgl. Kap.3.1) aufgetreten sind, weshalb die dort gegebene Erklärung nicht ausreichend ist. Da das Modell mehrere Eigenfrequenzen in der Umgebung von 8MHz besitzt, ist davon auszugehen, daß die Anregungsenergie in mehrere Eigenschwingungsformen fließt. Deren Überlagerung ergibt dann die beobachteten Modulationen.

Um die Wichtigkeit der richtigen Anregungsfrequenz zu verdeutlichen, werden mit

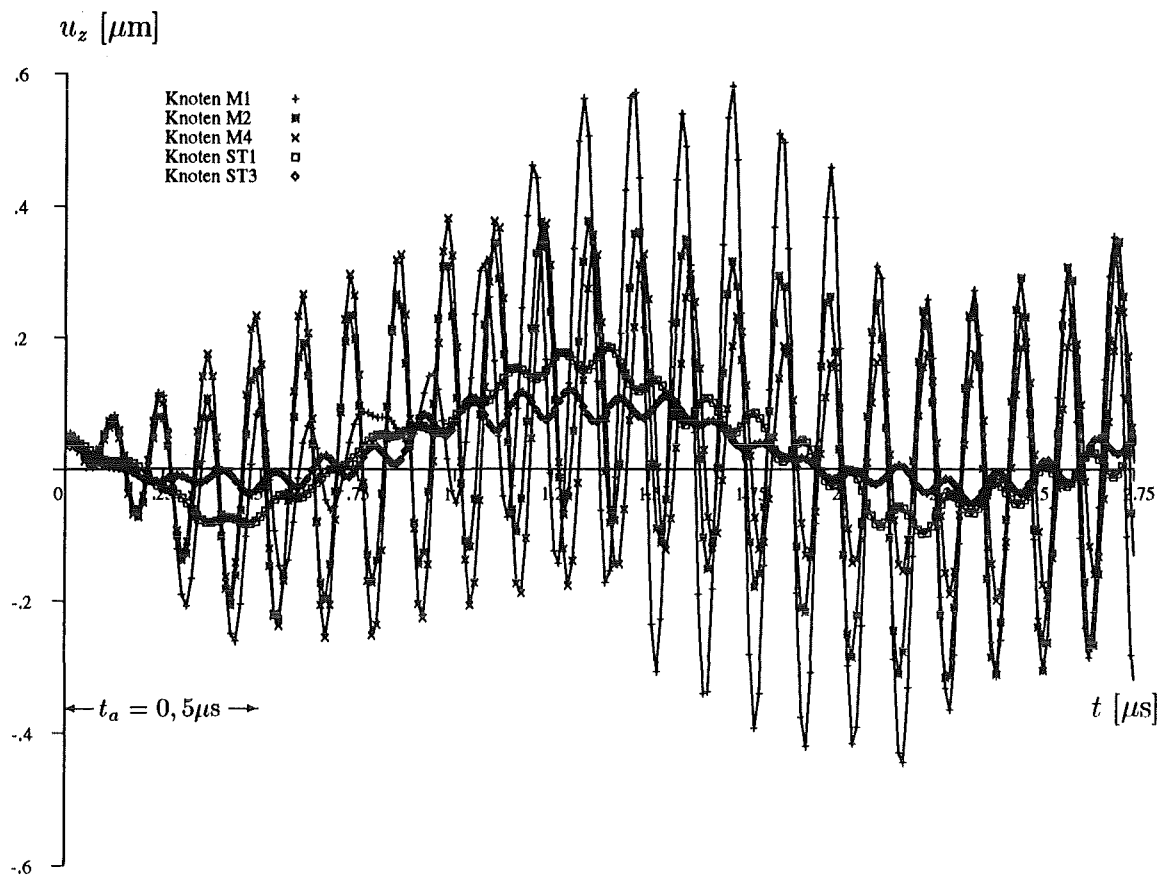


Abb.15: Zeitliche Abhängigkeit der Verschiebung u_z einzelner Knoten (siehe Abb.10) des vierten Schalenmodells mit einer Anregungsfrequenz von $f = 8\text{MHz}$

den verschiedenen Modellen noch Rechnungen mit $\omega = 25,13\text{MHz}$ ($\hat{=} f = 4\text{MHz}$) durchgeführt. Bei allen Modellen ist nur noch erste Eigenschwingung des Systems zu erahnen ist. Ansonsten kann man über das Verhalten keine Aussage machen. In Abb.16 wird dies für das vierte Modell deutlich.

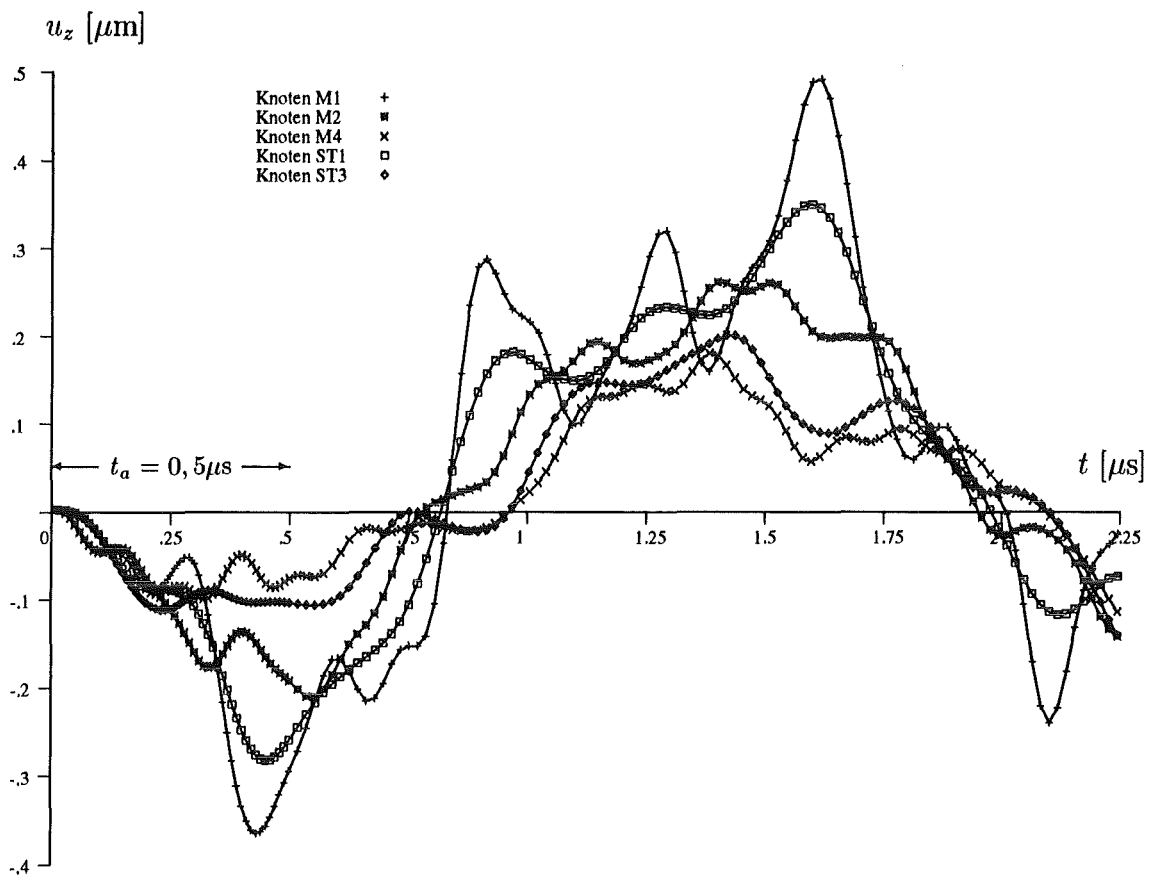


Abb.16: Zeitliche Abhängigkeit der Verschiebung u_z einzelner Knoten (siehe Abb.10) des vierten Schalenmodells mit einer Anregungsfrequenz von $f = 4\text{MHz}$

6 Eigenfrequenzanalyse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse vorgestellt, die sich aus der Eigenfrequenzanalyse für die verschiedenen Modelle einschließlich des Kontinuumsmodells ergeben. Neben den Eigenfrequenzen werden dabei zusätzlich die Eigenschwingungsformen bestimmt. Auf Grund der im vorigen Kapitel gesammelten Erkenntnisse ist dabei die Schwingung, bei der alle Membranen in Phase und der Stegbereich gegenphasig schwingen, die gesuchte Eigenschwingungsform. In Abb.17 ist diese Schwingung für das vierte Modell mit stark überhöhten Auslenkungen dargestellt, wobei zusätzlich die Lage der Begrenzungslinien in der Anfangskonfiguration zu sehen ist.

Beim realen Sensor wird diese Eigenschwingungsform gezielt angeregt und bestimmt daher im wesentlichen das vom gesamten System abgestrahlte Signal. In den dynamischen FE-Rechnungen tritt bei den verschiedenen Modellen noch deren jeweilige erste Eigenschwingung auf. Wegen der deutlich größeren Ausdehnung und der damit viel kleineren ersten Eigenfrequenz kommt dieser Grundschiwingung beim realen Sensor keine Bedeutung zu.

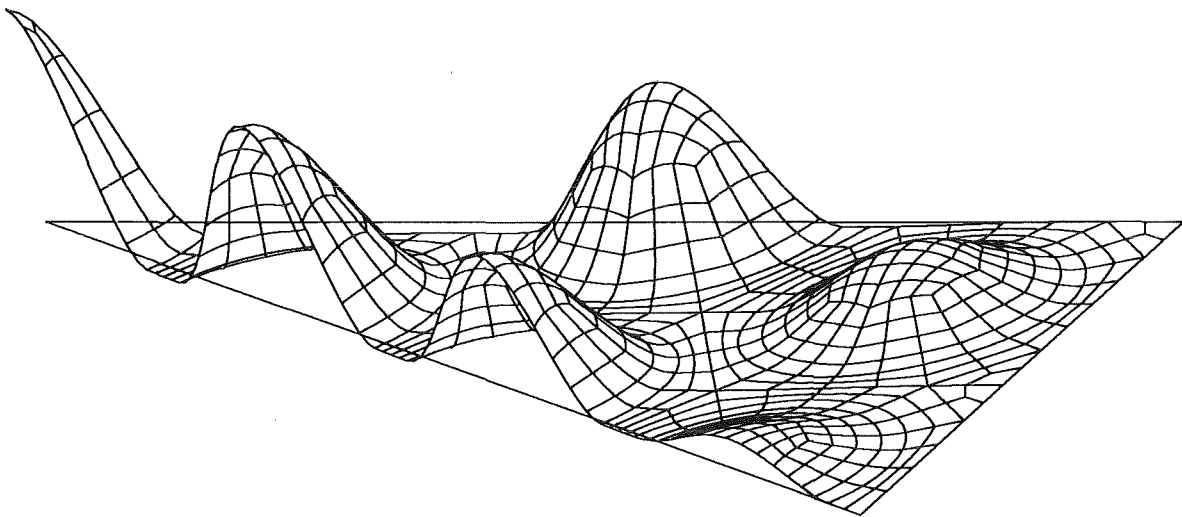


Abb.17: Gesuchte Eigenschwingungsform, bei der alle Membranen in Phase schwingen und sich der Stegbereich gegenphasig dazu bewegt.

6.1 Titanfolie und Mikrostruktur aus Nickel

Mit zunehmender Größe des Modells und damit ansteigender Anzahl an Freiheitsgraden wächst auch die Vielfalt der Eigenschwingungsformen. Deshalb liegen bei den größeren Modellen die zugehörigen Eigenfrequenzen dichter aneinander. In Tab.1 sind die Eigenfrequenzen sowie die Nummern der gewünschten Eigenschwingung (siehe Abb.17), wie sie sich aus der Sortierung nach Größe der Frequenzen ergibt, aufgelistet.

Modell	Nummer der Eigenschwingungsform	Frequenz in MHz
Erstes Schalenmodell	4	8,29
Zweites Schalenmodell	6	8,35
Drittes Schalenmodell	95	8,32
Viertes Schalenmodell	10	8,37
Kontinuumsmodell	10	7,84

Tab. 1: Frequenzen der gesuchten Eigenschwingungsform (siehe Abb.17) für die verschiedenen FE-Modelle

Die Ergebnisse der vier Schalenmodelle liegen mit rund 1% nicht weit auseinander. Sie lassen also den Schluß zu, daß eine weitere Vergrößerung des Modells keine wesentliche Änderungen mehr mit sich bringt. Durch den erweiterten Bereich des dritten Modells wird die Frequenz nur minimal verringert, so daß den veränderten Randbedingungen kein entscheidender Einfluß auf die gesuchte Eigenfrequenz zukommt.

Dies bestätigen zusätzlich Rechnungen mit den drei kleinen Schalenmodellen, bei denen an der äußeren Kante nur die drei Translationen der Randknoten beschränkt, die Rotationsfreiheitsgrade allerdings freigegeben werden. Die unterschiedlichen Randbedingungen wirken sich hauptsächlich auf die niedrigen Eigenfrequenzen aus. So verringert sich die erste Eigenfrequenz um ungefähr die Hälfte. Für die in Tab.1 aufgeführten Eigenschwingungsformen ergibt sich jedoch nur ein unbedeutender Unterschied von wenigen Kilohertz zwischen den verschiedenen Randbedingungen.

Um einen möglichen Einfluß der leicht inhomogenen Vorspannung zu untersuchen, wird anhand des vierten Modelles eine Rechnung mit der thermisch erzeugten Vorspannung (vgl. Kap.3.2) durchgeführt. Auf diese Weise erhält man für die Titanfolie genau den gewünschten homogenen ebenen Spannungszustand. Die daraus berechnete Frequenz ergibt keine signifikante Änderung im Vergleich zur Methode, mit der bisher die Vorspannung erzeugt worden ist.

Aus dem Kontinuumsmodell ergibt sich eine Frequenz, die um rund 7% kleiner ist als bei den Schalenmodellen. Dieses Resultat ist sicherlich das exaktere, da bei der Berechnung nicht die Näherungen der Schalentheorie benutzt werden. Die Ungenauigkeit der Schalenmodellierung läßt sich aus der großen Dicke im Stegbereich ableiten. Ein weiterer Faktor könnte die starke Dickenänderung beim Übergang von Membran zu Steg sein.

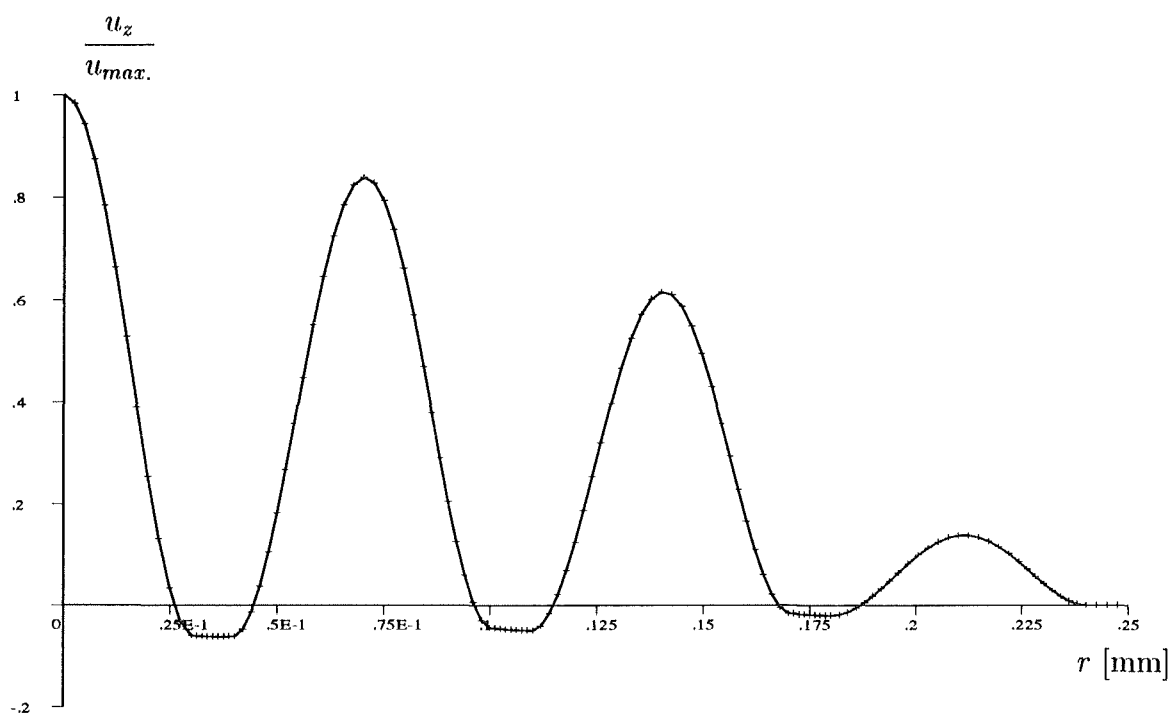


Abb.18: Deformation in z-Richtung der vorderen Begrenzungslinie aus Abb.17

Die bei der Eigenschwingung auftretende Deformation der unteren Begrenzungslinie aus Abb.10 ist nochmals extra in Abb.18 aufgetragen, wobei zu erwähnen ist, daß die maximale Auslenkung auf eins normiert ist. Im Gegensatz zur Frequenz liefert das Kontinuumsmodell für die Eigenschwingungsform ein praktisch identisches Bild.

Interessant ist bei diesem Diagramm die Lage der Knotenpunkte der Schwingung. Sie befinden sich nicht an der Grenze zwischen Membran und Steg, sondern wenige Mikrometer innerhalb der Membranen. Betrachtet man die Knotenlinien des gesamten Modells bei dieser Eigenschwingung, so kann man diese Tatsache für alle Membranen bestätigen, die sich nicht in unmittelbarer Nähe der eingespannten Außenkante befinden. Am dortigen Rand laufen die Knotenlinien jedoch in den Stegbereich, was auf die unrealistischen Randbedingungen zurückzuführen ist.

Bei der Herleitung von Gleichung (1) wird eine einzelne am Rand eingespannte Kreisplatte zugrunde gelegt, wodurch der Einfluß des Stegbereiches unberücksichtigt bleibt. Aus den in diesem Kapitel gewonnenen Erkenntnissen kann man schließen, daß diese Bedingungen und damit der in [2] verwendete Verschiebungsansatz nicht erfüllt sind.

Eine geeignetere Formulierung der Randbedingungen ergibt sich durch die Betrachtung einer Platte, die am bei $r = \tilde{a} < a$ keine Verschiebung zuläßt, und deren Rotationen dort elastisch eingeschränkt werden, so daß bei Auslenkung der Membran ein Drehmoment entgegenwirkt. Die Randbedingungen lauten

$$u_z(\tilde{a}) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_z(\tilde{a})}{\partial r} = -\phi D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right|_{r=\tilde{a}}, \quad (76)$$

wobei ϕ die Konstante der elastischen Federung ist (Drehmoment pro Winkeleinheit). In [15] ist für verschiedene Verhältnisse $\tilde{a}/(\phi D)$ und verschiedene Vorspannungen der nötige Koeffizient c zur Berechnung der Frequenz gemäß $f = \frac{c}{2\pi\tilde{a}} \sqrt{\frac{D}{\rho_M h}}$ zu finden.

Neben der Bestimmung der Konstanten ϕ , die das vom Steg übertragene Drehmoment wiedergibt, ist auch die Ermittlung des von den Materialien abhängigen Radius \tilde{a} , der die Knotenlinie bildet, problematisch. Wie im nächsten Abschnitt zu sehen sein wird, sind die in der FE-Rechnung bestimmten Eigenschwingungsformen nicht für quantitative Aussagen geeignet.

6.2 Titanfolie und Mikrostruktur aus Polyimid

Für die experimentellen Betrachtungen ist die Materialkombination Titan/Polyimid deshalb interessant, weil sich der Sensor bei den Messungen durch eine geringe Dämpfung ausgezeichnet hat. Dies ermöglicht eine längere Meßdauer und damit eine genauere Bestimmung der Resonanzfrequenz. Das verwendete Polyimid besitzt den E-Modul $E_{Po} = 2,6 \text{ GPa}$, die Querkontraktionszahl $\nu_{Po} = 0,41$ und die Dichte $\rho_{Po} = 1600 \text{ kg/m}^3$ [20].

Um die Vorspannung von ca. 200MPa für diese Materialkombination mittels vorgegebener Membranspannungen zu erzielen, reicht der bei der Materialkombination Ti-

tan/Nickel benutzte Wert von 233MPa nicht mehr aus. Testrechnungen ergeben eine nötige Vorspannung der Membranen von $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 260\text{MPa}$. Bei diesen Materialien zeigt der Vergleich anhand des vierten Schalenmodells, daß die Ergebnisse nur mit thermischer Vorspannung (vgl. Kap.3.2) zuverlässig sind. Da diese Methode die reale Vorspannung exakt wiedergibt und im folgenden keine thermischen Belastungen mit einbezogen werden, wird von nun an die Vorspannung auf diese Weise erzeugt. Der thermische Ausdehnungskoeffizient des Polyimid wird dabei gleich Null gesetzt.

In Tab.2 sind die Frequenzen der gesuchten Eigenschwingung mit gleichphasig schwingenden Membranen für die verschiedenen Modelle zu finden.

Modell	Nummer der Eigenschwingungsform	Frequenz in MHz
Erstes Schalenmodell	4	7,52
Zweites Schalenmodell	7	7,74
Drittes Schalenmodell	129	7,82
Viertes Schalenmodell	13	7,90
Kontinuumsmodell	13	7,04

Tab. 2: Frequenzen der gesuchten Eigenschwingungsform, bei der alle Membranen gleichphasig und der Stegbereich gegenphasig dazu schwingen, für die Materialkombination Titan/Polyimid.

Die Werte weisen innerhalb der Schalenmodelle mit rund 5% einen deutlich größeren Unterschied auf als bei Titan/Nickel und im Gegensatz zu dieser Kombination bewirkt das erweiterte Modell hier eine leichte Erhöhung der Frequenz. Was den Vergleich der Schalen- zum Kontinuumsmodell angeht, so fällt die Differenz mit über 12% ebenfalls um einiges höher aus. Hier scheint sich bei der Modellierung mit Elementen aus mehreren Schichten die große Differenz der beiden E-Moduli negativ bemerkbar zu machen.

Diese Resultate zeigen, daß die Mikrostruktur einen bedeutenden Einfluß auf die Frequenz hat. Denn trotz gleicher Folie sowie unveränderter Geometrie und Vorspannung

weichen die Frequenzen für die Kombination Titan/Polyimid deutlich von den Werten für Titan/Nickel ab. Wie man in Abb.19 sieht, gilt dies auch für die Eigenschwingungsform. Wegen der geringen Dichte von Polyimid nimmt die Trägheit des Steges im Vergleich zu Nickel ab, was zu einer größeren Auslenkung während der Schwingung führt.

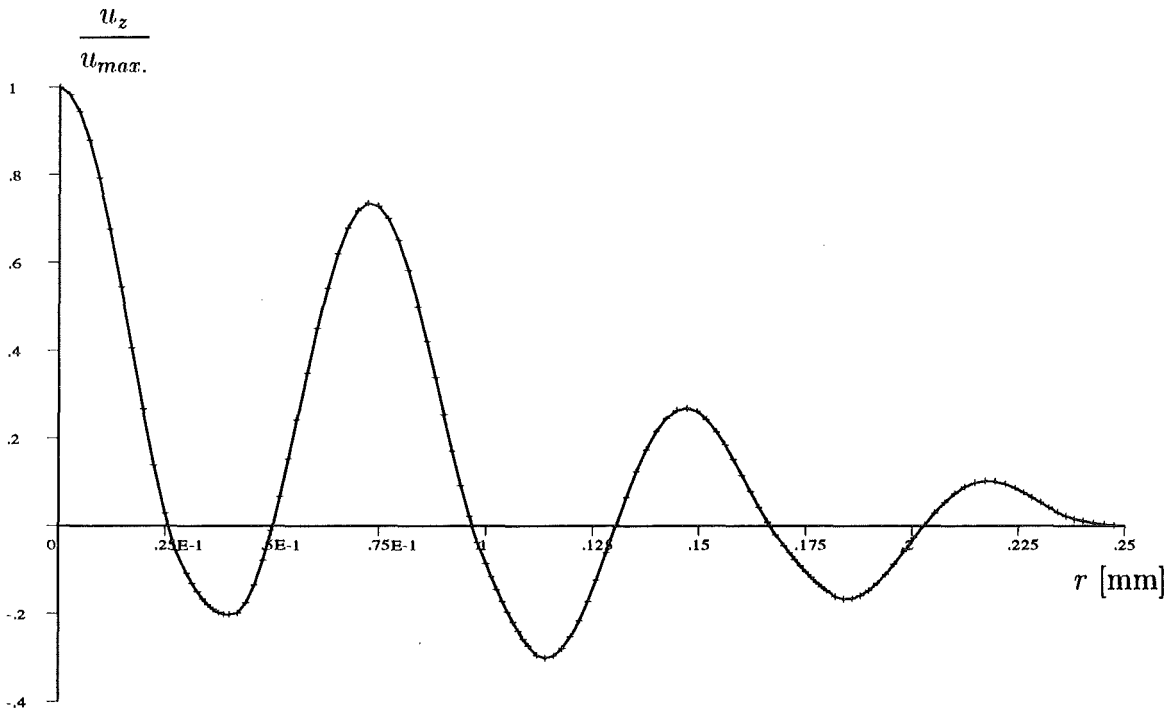


Abb.19: Deformation in z-Richtung der vorderen Begrenzungslinie aus Abb.17

Die bereits erwähnten Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Knotenpunkte lassen sich anhand von Abb.19 verdeutlichen. Auf Grund der kleinen Ausdehnung des Modells kommt es hier zu solchen Effekten wie der Schrägstellung der Stege. Dies führt dazu, daß schon innerhalb einer Membran die Knotenlinie nicht bei konstantem Radius verläuft, was beim realen System aus Symmetriegründen nicht der Fall sein kann. Die Auslenkung des Stegbereichs nimmt auch entgegen den Erwartungen nicht von der Spitze des Modells zum eingespannten Rand hin monoton ab, was bei den folgenden Rechnungen ebenfalls für die Membranen manchmal beobachtet werden kann. Dabei zeigt sich, daß diese Unregelmäßigkeiten vor allem dann auftreten, wenn gemessen an der Frequenz andere Eigenschwingungsformen dicht benachbart sind. Mit Hilfe der durchgeführten FE-Rechnungen lassen sich über die Eigenschwingungsform also nur bedingt qualitative, aber

keine quantitativen Aussagen machen.

6.3 Experimentell gemessene Frequenzen

Ein direkter Vergleich, der aus den FE-Rechnungen bestimmten Frequenzen mit den gemessenen ist nicht möglich, da sich der Sensor im Experiment in einem flüssigen Medium befindet. Dieses Medium bewirkt auf Grund seiner Trägheit einerseits eine Verringerung der Frequenz im Vergleich zum Vakuum. Andererseits wird durch Schallabstrahlung Energie vom schwingenden Sensor an das Fluid abgegeben, was zu einer äußeren Dämpfung des Systems führt.

Wird das Fluid mit in die FEM einbezogen, so ergeben sich bei der Modellierung Bereiche, in denen verschiedene Feldgleichungen gelten. Die Betrachtung eines solchen Mehrfeldproblems würde allerdings den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen, weshalb auf Simulation des Mediums verzichtet wird.

Eine theoretische Betrachtung des Einflusses des Fluids auf die Frequenz einer einzelnen Kreisplatte ist in [16, 17] zu finden. Für das Verhältnis der Frequenz im Medium f_{Fl} zur Vakuumsfrequenz f_{Vak} ergibt sich

$$\frac{f_{Fl}}{f_{Vak}} = \left(1 + \frac{m_a}{m_M}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (77)$$

wobei m_M die Masse einer Platte und m_a eine zusätzliche additive Masse ist. Letzere ergibt sich aus dem umgebenden Medium und ist abhängig von der Geometrie der Platte, den Randbedingungen und der Eigenschwingungsform.

Für eine eingespannte Platte mit Radius a und Dicke h_M , die auf einer Seite vom Medium der Dichte ρ_{Fl} umgeben ist, gilt bezüglich der ersten Eigenschwingungsform

$$m_a = 0,67 \rho_{Fl} \pi a^3. \quad (78)$$

Die Vakuumsfrequenz läßt sich somit aus

$$f_{Vak} = \sqrt{1 + 0,67 \frac{\rho_{Fl} a}{\rho_M h_M}} f_{Fl} \quad (79)$$

berechnen. Befindet sich das Fluid auf beiden Seiten der Platte, ist die additive Masse doppelt so groß.

Die Messungen am Institut für Mikrostrukturtechnik ergeben bei gleicher Geometrie, wie sie in den letzten Abschnitten verwendet worden ist, und der Materialkombination Titan/Nickel eine Frequenz von $f_{Fl,TN} = 3,98\text{MHz}$ [20]. Der Sensor ist dabei auf beiden

Seiten von Wasser ($\rho_{Fl} = 1000\text{kg/m}^3$) umgeben. Mit Hilfe von Gleichung (79) ergibt dies eine Vakuumsfrequenz von $f_{Vak,TN} = 8,26\text{MHz}$.

Für die Kombination Titan/Polyimid wird experimentell eine Frequenz von $f_{Fl,TP} = 6,03\text{MHz}$ bestimmt [20], wobei sich dabei das Medium nur auf einer Seite befindet. Nach Gleichung (79) berechnet sich daraus eine Vakuumsfrequenz $f_{Vak,TP} = 9,82\text{MHz}$.

Im Vergleich zum Kontinuumsmodell weicht der eben berechnete Werte für Titan/Nickel zwar nur um rund 5% von der FE-Rechnung ab. Betrachtet man aber die große Differenz von 40% bei Titan/Polyimid, stellt sich die Frage, inwieweit Gleichung (79) für das betrachtete System angewendet werden kann.

Bei der Herleitung wird von einer einzelnen Membran ausgegangen, die in einer starren Ebene eingebettet ist. Eine mögliche Beeinflussung durch die Membranen, die sich dicht daneben befinden, wird ebenso wie die Schwingung des Stegbereiches außer Acht gelassen. Letztere verändert hierbei nicht nur die Randbedingungen, sondern auch die kinetische Energie des Fluids, die in [17] zur Bestimmung der additiven Masse herangezogen wird. Dies ist ein weiterer Grund, weshalb eine genaue Bestimmung der Eigenschwingungsform von Interesse ist.

Wie die Ergebnisse zeigen, läßt sich Gleichung (79) höchstens auf Sensoren anwenden, deren Mikrostruktur eine hohe Trägheit und große Steifigkeit aufweist. Auf Grund dieser Einschränkung wird darauf verzichtet, das Medium in Form einer modifizierten Dichte des Folienmaterials $\rho_M^* = \rho_M [1 + (0,67\rho_{Fl}a)/(\rho_M h_M)]$ in der FE-Simulation zu berücksichtigen.

7 Parameterstudie

Bei der Herstellung von Mikrosystemen wurden in den letzten Jahren zwar große Fortschritte gemacht, ihre Herstellung ist aber nach wie vor aufwendig und teuer. Es ist deshalb kaum möglich mittels Experimenten aus vielen verschiedenen Mikrosensoren ein günstiges Design auszuwählen. Durch die Methode der finiten Elemente ist man in der Lage, die Variation von Geometrie- und Materialparameter der zu untersuchenden Struktur zu simulieren.

In diesem Kapitel wird nun die Abhängigkeit der Frequenz von diesen Größen bestimmt. Für die Membranen oder genauer gesagt für die Folie ist ein Vergleich mit der theoretischen Formel (1) möglich. Bei den Stegparametern wird durch Fitten der berechneten Werte versucht, ein funktionale Abhängigkeit zu erkennen.

Für alle kommenden FE-Rechnungen wird die Vorspannung von $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 200\text{MPa}$ thermisch erzeugt. Dabei erhält die Folie in lateraler Richtung stets eine orthotrope Wärmeausdehnung mit dem Wert $\alpha_M = \alpha_{Ti} = 9 \cdot 10^{-6} 1/\text{K}$ und der thermische Ausdehnungskoeffizient der Mikrostruktur wird gleich Null gesetzt. Diese Art der Vorspannung ist von den meisten Material- und allen Geometrieparametern unabhängig. An Gleichung (68) erkennt man, daß nur der E-Modul E_M und die Querkontraktionszahl ν_M der Folie eine Rolle spielen. Bei Variation dieser beiden Größen wird durch Veränderung des Temperatursprungs die nötige Vorspannung erreicht.

Im letzten Kapitel hat sich gezeigt, daß zwischen den Frequenzen, die anhand des Kontinuummodells und des gleichgroßen Schalenmodells berechnet werden, eine Differenz von 7% bzw. 12% liegt. Da das Kontinuummodell das exaktere Abbild des Systems darstellt, sollte man die folgenden Rechnungen eigentlich mit ihm durchführen. Allerdings ist der Aufwand dabei viel größer als beim Schalenmodell. Während das Schalenmodell aus 1805 Knoten besteht, besitzt das Kontinuummodell 13913 Knoten. Dies hat zur Folge, daß sich die Rechenzeit ungefähr verzehnfacht. Aus diesem Grund werden nur die Rechnungen, bei denen ausgehend von der Materialkombination Titan/Polyimid ein Parameter verändert wird, mit dem Kontinuummodell durchgeführt. Die Abweichung bei der Kombination Titan/Nickel wird in Kauf genommen und für diese Ausgangswerte wird das vierte Schalenmodell benutzt.

7.1 Parameter der Folie (Membranen)

Um die Abhängigkeit der Frequenz von den Materialparametern zu erhalten, wird ausgehend von den Werten der Materialkombination Titan/Nickel bzw. Titan/Polyimid jeweils ein Parameter variiert. In Abb.20 sind die Ergebnisse für die Parameter der Folie zu sehen. Die theoretischen Kurven aus Gleichung (1) stimmen gut mit den Werten des Schalen-

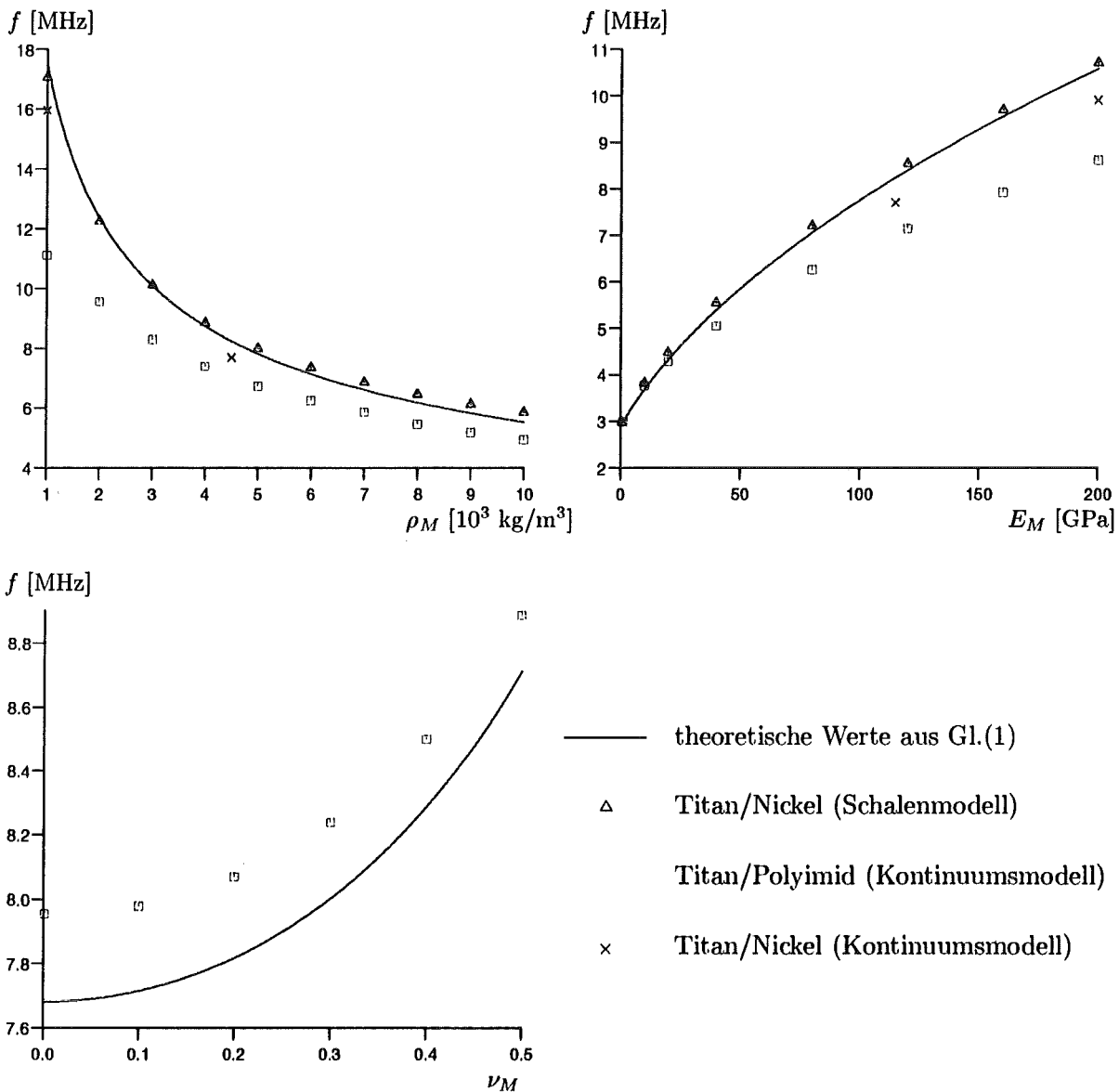


Abb.20: Abhängigkeit der Frequenz von der Dichte, des E-Moduls und der Querkontraktionszahl des Folienmaterials

modells für die Materialkombination Titan/Nickel überein. Allerdings darf man nicht vergessen, daß diese Werte einen Fehler in der Größenordnung von 7% im Vergleich zum exakteren Kontinuumsmodell beinhalten. Diese Abweichung bleibt entlang der Kurven nicht konstant, sondern nimmt bei Reduzierung der Dichte bzw. Erhöhung des E-Moduls zu, wie man an den zusätzlich berechneten Punkten des dreidimensionalen Modells erkennen kann. Aufgrund der geringeren Bedeutung der Querkontraktionszahl werden für diese Größe nur Rechnungen mit dem Schalenmodell durchgeführt.

Führt man für das Schalenmodell die Korrektur zu geringeren Frequenzen durch, die sich aus dem Vergleich mit dem Kontinuumsmodell ergibt, so erkennt man, daß man mit der theoretischen Formel (1) stets eine zu hohe Frequenz berechnet. Dies liegt neben der Vernachlässigung von Querschubdeformationen am Einfluß des Steges. Dadurch, daß er nicht in Ruhe bleibt, sondern gegenphasig zu den Membranen schwingt, sind die Bedingungen, unter denen Formel (1) hergeleitet wurde, nicht mehr erfüllt. Die Abweichung von der Randbedingung der eingespannten Platte wächst dabei mit abnehmender Dichte und kleiner werdendem E-Modul. Dies erklärt auch, weshalb bei der Materialkombination Titan/Polyimid trotz gleicher Folie kleinere Frequenzen berechnet werden als bei Titan/Nickel.

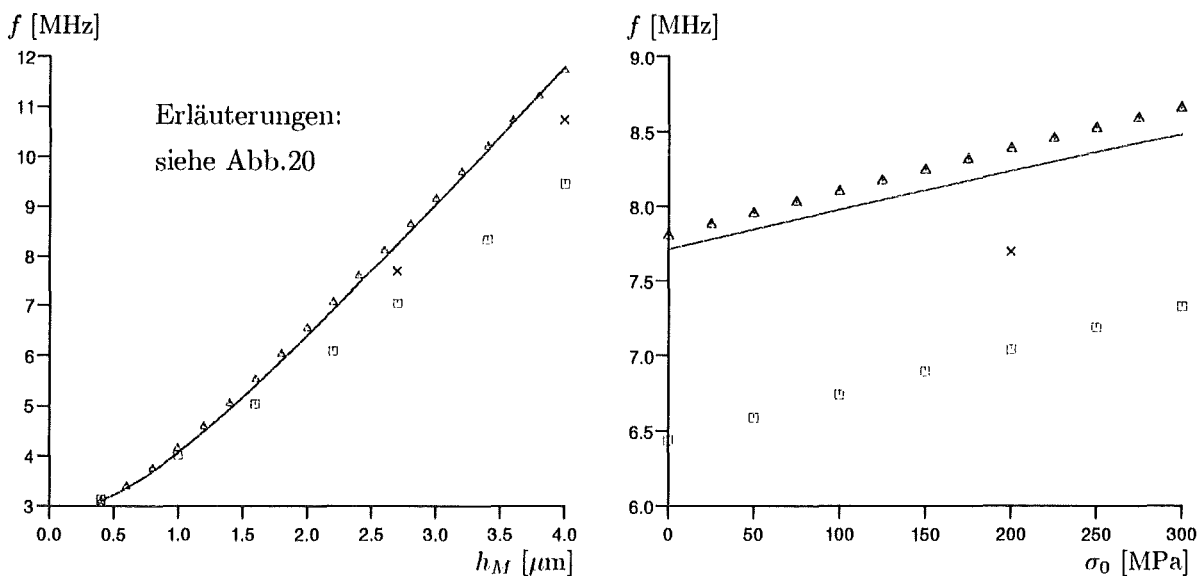


Abb.21: Abhängigkeit der Frequenz von der Dicke und der Vorspannung der Folie

In Abb.21 wird die Frequenz über der Dicke der Membran h_M bzw. der Vorspannung σ_0 aufgetragen. Bezüglich der Werte des Schalenmodells gelten wieder die zuvor gemachten

Aussagen. Bei kleinen Dicken macht sich das Verschwinden der Querschubdeformationen bemerkbar, was zu einer sehr guten Übereinstimmung der Kurven in diesem Bereich führt. Mit zunehmender Dicke dagegen weicht vor allem die durch die FE-Rechnungen bestimmte Kurve für Titan/Polyimid aber auch die korrigierte Kurve für Titan/Nickel immer stärker von der theoretischen Kurve nach unten ab. Was die Vorspannung anbelangt, so erhält man einen nahezu linearen Verlauf, wobei aufgrund der kleinen Steigung der Einfluß auf die Frequenz vergleichsweise klein bleibt.

7.2 Parameter der Mikrostruktur

Der Einfluß der Dichte und des E-Moduls der Mikrostruktur ist Abb.22 zu entnehmen. Die Frequenzänderungen fallen hier insgesamt kleiner aus als bei den verschiedenen Membranparametern.

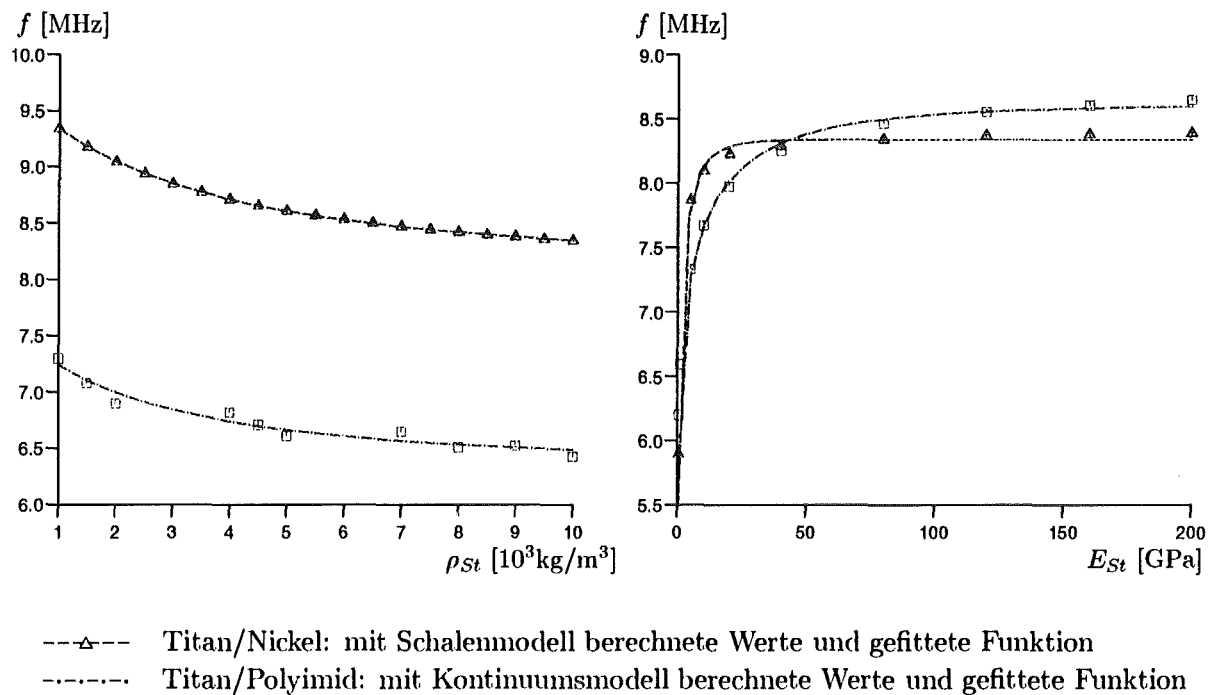


Abb.22: Abhängigkeit der Frequenz von der Dichte und des E-Moduls der Mikrostruktur

In Abhängigkeit von der Dichte verläuft die Frequenz monoton fallend. Für $\rho_{St} \rightarrow \infty$ schwingt der Stegbereich auf Grund der großen Trägheit nicht mehr und die Frequenz

ergibt sich aus der reinen Membranschwingung, wobei die bleibende Differenz der beiden Kurven den erheblichen Einfluß des E-Moduls der Mikrostruktur zum Ausdruck bringt. Bei kleineren Dichten bewegt sich die Mikrostruktur mit, was zu einer Erhöhung der Frequenz führt. In Bezug auf den E-Modul ist die Frequenz in einem großen Bereich nahezu konstant. Erst bei recht kleinen E-Moduli kommt es zu einem rapiden Abfall. Dieser ist wohl auf die „weicheren“ Randbedingungen, die für die einzelnen Membranen durch die Mikrostruktur vorgegeben sind, zurückzuführen. Berechnungen mit verschiedenen Querkontraktionszahlen zeigen, daß die Frequenz angesichts maximaler Änderungen um 0,03% von dieser Größe nahezu unabhängig ist.

Um die funktionale Abhängigkeit der Frequenz zu erfassen, werden die mit Hilfe der FEM berechneten Werte zur Bestimmung gefitteter Kurven herangezogen. Als Fit-Funktionen werden

a) für die Dichte ρ_{St} :

$$f(\rho_{St}) = \frac{b_1}{(b_2 - \rho_{St})^2} + b_3 \quad (80)$$

b) für den E-Modul E_{St} :

$$f(E_{St}) = c_1 \left[1 - \exp\left(-c_2 \sqrt{E_{St}}\right) \right] + c_3 \quad (81)$$

ausgewählt. Dabei sind b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 die zu berechnenden Konstanten. Beim E-Modul wird im Vergleich zur gewöhnlichen Sättigungsfunktion im Exponent eine Wurzel eingefügt, da sich ansonsten anfangs ein zu steiler Anstieg und im weiteren Verlauf eine zu schnelle Sättigung ergibt.

Die numerische Optimierung der Konstanten mit Hilfe des Programmes Mathematica [18] ergibt

a) für die Dichte ρ_{St} :

– Kombination Titan/Nickel (Schalenmodell):

$$b_1 = 57,6(10^3 \text{kg/m}^3)^2 \text{MHz}, \quad b_2 = -5,89 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3, \quad b_3 = 8,12 \text{MHz}$$

– Kombination Titan/Polyimid (Kontinuumsmodell):

$$b_1 = 29,7(10^3 \text{kg/m}^3)^2 \text{MHz}, \quad b_2 = -4,78 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3, \quad b_3 = 6,35 \text{MHz}$$

b) für den E-Modul E_{St} :

– Kombination Titan/Nickel (Schalenmodell):

$$c_1 = 4,99 \text{MHz}, \quad c_2 = 1,01 (\text{GPa})^{-\frac{1}{2}}, \quad c_3 = 3,35 \text{MHz}$$

– Kombination Titan/Polyimid (Kontinuumsmodell):

$$c_1 = 3,00\text{MHz}, \quad c_2 = 0,36(\text{GPa})^{-\frac{1}{2}}, \quad c_3 = 5,61\text{MHz}$$

In Abb.23 ist schließlich noch die Abhängigkeit der Frequenz von der Höhe der Mikrostruktur dargestellt. Hier zeigt sich, daß dabei ein Maximum auftritt. Während sich

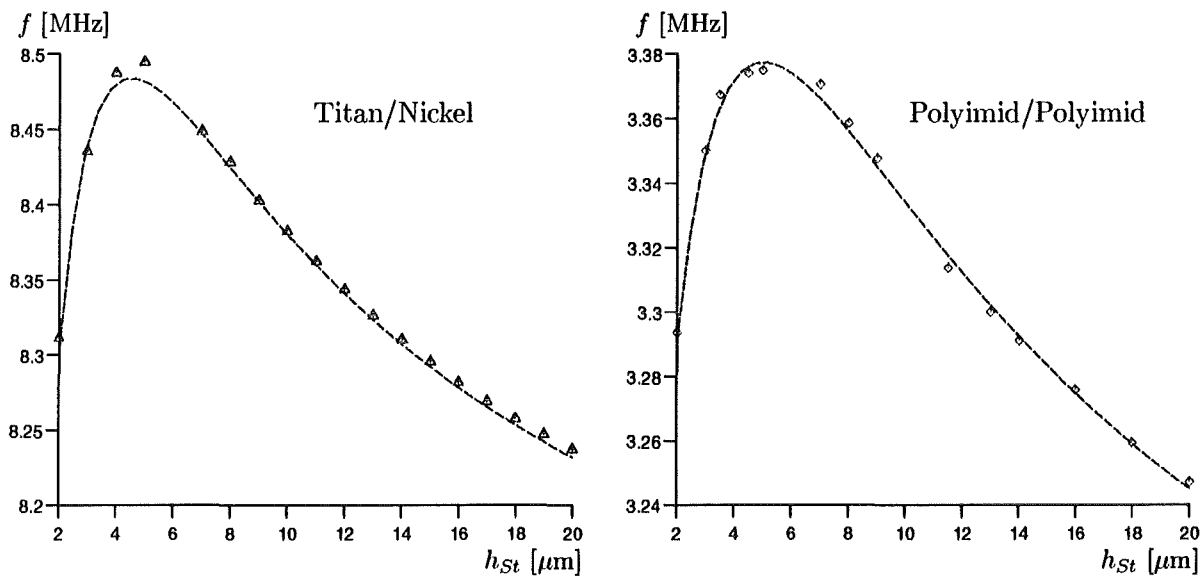


Abb.23: Abhängigkeit der Frequenz von der Höhe der Mikrostruktur (jeweils mit Schalenmodell berechnete Werte und gefittete Funktion)

bei zunehmender Höhe wegen der ansteigenden Trägheit ein ähnlicher Verlauf wie bei der Dichte einstellt, sinkt die Frequenz bei kleinen Höhen wieder ab. Allerdings ist zu beachten, daß bei verschwindender Höhe die Unterteilung der Folie nicht mehr gewährleistet ist.

Abb.23 zeigt auch die Abhängigkeit für die Materialkombination Polyimid/Polyimid, was auf Anfrage der Projektpartner des IMT geschah. Die Vorspannung beträgt in diesem Fall nur $\sigma_0 = 50\text{MPa}$. Mit der in den vorigen Kapiteln benutzten Geometrie ergibt sich für das Schalenmodell eine Frequenz $f = 3,34\text{MHz}$ und für das Kontinuummodell $f = 3,09\text{MHz}$. Bei der Abweichung von 8% macht sich im Vergleich zu Titan/Polyimid die Tatsache, daß zwischen den Materialparametern der Folie und der Struktur kein Unterschied besteht, positiv bemerkbar.

Zum Fitten der berechneten Frequenzen wird für die Abhängigkeit von der Höhe die

Funktion

$$f(h_{St}) = \frac{d_1}{(h_{St} - d_4)^2} + \frac{d_2}{h_{St} - d_4} + d_3 \quad (82)$$

benutzt. Mit Hilfe von Mathematica ergeben sich für die Konstanten d_1 , d_2 , d_3 und d_4 folgende Werte:

- Kombination Titan/Nickel (Schalenmodell):

$$d_1 = -24,5\mu\text{m}^2 \text{ MHz}, \quad d_2 = 7,16\mu\text{m MHz}, \quad d_3 = 7,96\text{MHz}, \quad d_4 = -2,31\mu\text{m}$$

- Kombination Polyimid/Polyimid (Schalenmodell):

$$d_1 = -26,7\mu\text{m}^2 \text{ MHz}, \quad d_2 = 6,00\mu\text{m MHz}, \quad d_3 = 3,04\text{MHz}, \quad d_4 = -3,93\mu\text{m}.$$

In Abb.23 und vor allem bei Variation der Dichte des Steges für Titan/Polyimid weisen die berechneten Werte teilweise „Lücken“ auf. Dafür sind Sprünge der Nummer der Eigenfrequenz verantwortlich, womit gemeint ist, daß die gesuchte Eigenschwingungsform bei der Variation eines Parameters ihren Platz in der Reihenfolge der Eigenschwingungsformen eines Modells ändert. Bereits am Vergleich von Tab.1 mit Tab.2 sieht man, daß

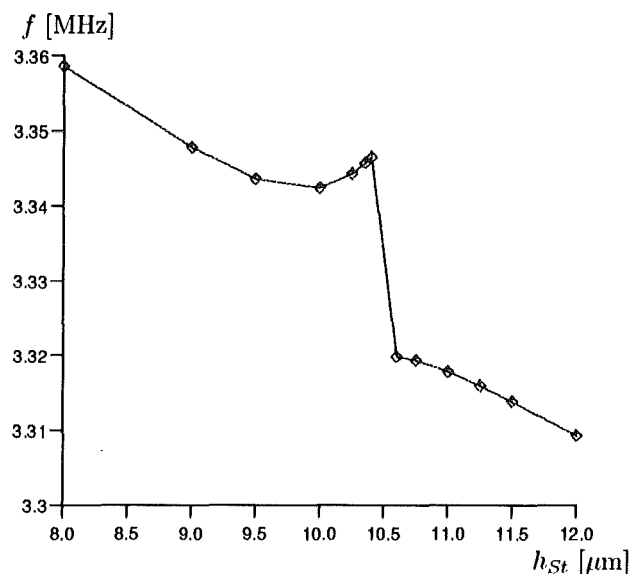


Abb.24: Sprung der Frequenz beim Wechsel der Nummer der Eigenschwingungsform

sich bei verschiedenen Materialparametern diese Nummer ändert. In der Regel bereitet diese Tatsache keine Schwierigkeiten, bei den oben erwähnten Kurven jedoch machte sie sich negativ bemerkbar. Im Bereich des zu variierenden Parameters, in dem der Sprung

zur nächst höheren bzw. tieferen Eigenschwingungsform stattfindet, sind zwei Phänomene zu beobachten. Einerseits weist in diesem Bereich, in dem sich zwei Eigenfrequenzen annähern, die Deformation des Modells Unregelmäßigkeiten auf (vgl. Kap.6.2). Andererseits kommt es bei der Frequenz an diesem Übergang zu einem Sprung. In Abb.24 ist dies für die Materialkombination Polyimid/Polyimid dargestellt. Bei der Variation der Dichte anhand des Kontinuummodells folgten derartige Sprünge praktisch nahtlos aneinander, weshalb die Bestimmung der entsprechenden Kurve recht ungenau ist. Diese Phänomene haben mit der realen Struktur natürlich nichts zu tun, sondern sind rein in der Größe des Modell oder sogar in der verwendeten Diskretisierung begründet.

8 Zusammenfassung

Die Betrachtungen einer einzelnen Membran des zu untersuchenden Systems in Kap.3.3 zeigten bereits deutlich den Einfluß der Querschubdeformationen auf die erste Eigenfrequenz der eingespannten Platte. Aus diesem Grund wurden für die weiteren Rechnungen schubelastische Schalenelemente ausgewählt. Die Frequenz, die sich aus der in [2] hergeleiteten Formel (1) ergibt, ist im Vergleich zu den durch die FE-Rechnung bestimmten Werten um rund 3% höher, was im wesentlichen auf der Vernachlässigung der Schubdeformationen bei dieser Gleichung zurückzuführen ist.

Die dynamischen Rechnungen, die mit Hilfe der Schalenmodelle des Sensors durchgeführt wurden, zeigten, daß nicht nur die Membranen Schwingungen ausführen, sondern auch die Mikrostruktur. Anhand der dem Experiment nachempfundenen periodischen Anregung konnte man erkennen, daß dabei alle Membranen in Phase schwingen und sich der Stegbereich gegenphasig dazu bewegt.

Bei der Eigenfrequenzanalyse erwies sich die Schalenmodellierung teilweise als ungenau, da in Abhängigkeit von der betrachteten Materialkombination die Abweichung bis über 10% im Vergleich zum Kontinuumsmodell beträgt. Für die gesuchte Eigenschwingungsform ergaben sich Knotenlinien bei einem Radius, der innerhalb der Membran verläuft. Aufgrund dessen und der Tatsache, daß der Stegbereich mitschwingt, ergeben sich im Vergleich zur festen Einspannung, die Gleichung (1) zugrunde liegt, wesentlich andere Randbedingungen. Durch die elastische Federung gegenüber Rotationen wurde eine neue Formulierung der Randbedingungen vorgestellt. Um diesen Ansatz weiter verfolgen zu können, benötigt man jedoch die genaue Lage der Knotenlinien, deren quantitative Bestimmung für bestimmte Materialkombinationen mit Hilfe der benutzten Modelle nicht ausreichend genau gewesen ist. Weitere Erkenntnisse könnten in diesem Zusammenhang Messungen an der Fachhochschule Furtwangen (Mikrosystemtechnik) liefern, mit der die Projektpartner des IMT in Verbindung stehen. Dort kann durch eine optische Methode mit Hilfe eines Michelson-Interferometers das dynamische Verhalten von Mikrosystemen charakterisiert werden [19].

Der indirekte Vergleich der experimentell gemessenen Frequenzen des vom Medium umgebenen Sensors mit den durch die FEM bestimmten Werten war nicht erfolgreich, da die Bedingungen, die bei Herleitung der zur Umrechnung benutzte Formel (79) benutzt wurden, zu stark von der Realität abweichen. Hier wäre die Simulation des Fluids mit der FEM eine interessante Erweiterung des bisherigen Modells.

In der abschließenden Parameterstudie konnte gezeigt werden, daß Gleichung (1) den

Verlauf der Frequenz in Abhängigkeit der Membranparameter zwar näherungsweise wiedergibt, allerdings nur in Grenzfällen genaue Resultate liefert, ansonsten jedoch stets zu hohe Frequenzen ergibt. Für die Parameter der Mikrostruktur konnten die berechneten Werte durch vorgegebene Fit-Funktionen gut angenähert werden. Da es im Gegensatz zur Höhe der Mikrostruktur i.a. nicht gelingt, nur eine der beiden Größen Dichte bzw. E-Modul zu ändern, wäre es sicherlich wünschenswert, die Abhängigkeit dieser beiden Parameter in ein Formel zu fassen. Eine weitere Ergänzung dieser Arbeit wäre die Berechnung der Eigenfrequenz in Abhängigkeit vom Membranradius und von der Stegbreite sowie die Betrachtung anderer Membranformen.

Literatur

- [1] W.K.Schomburg, W.Bacher, M.W.Börner, W.Menz, M.Vitt, „Measurements of Physical Parameters with Ultrasound and Microdiaphragms“, Proceedings der Micro Electro Mechanical Systems '95 (1995), S.139-144
- [2] M.Vitt, „Mikromembran-Sensoren für berührungslose Messungen mit Ultraschall“, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe und Forschungszentrum Karlsruhe (1994)
- [3] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., „ABAQUS/Standard User's Manual, Version 5.4, Volume I+II“ und „ABAQUS Theory Manual“, (1994)
- [4] Femsys Limited, „Femgen/Femview User Manual, Version 2.3“, (1994)
- [5] D.C.Leigh, „Nonlinear Continuum Mechanics“, McGraw-Hill, New York (1968)
- [6] L.E.Malvern, „Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium“, Prentice-Hall, New Jersey (1969)
- [7] S.Kaliski, L.Solarz (Hrsg.), „Vibrations and Waves, Part A: Vibrations“, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam (1992)
- [8] L.H.Donnell, „Beams, Plates and Shells“, McGraw-Hill, New York (1976)
- [9] L.D.Landau, E.M.Lifschitz, „Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VII: Elastizitätstheorie“, Akademie-Verlag, Berlin (1970)
- [10] A.E.H.Love, „A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity“, Dover Publications, New York (1927)
- [11] P.Hagedorn, „Technische Schwingungslehre, Band2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme“, Springer-Verlag, Berlin (1989)
- [12] E.Klingbeil, „Variationsrechnung“, BI-Wiss.-Verl., Mannheim, Wien, Zürich (1988)
- [13] H.G.Hahn, „Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre“, Akademische Verlagsges., Wiesbaden (1982)
- [14] T.J.R.Hughes, „The Finite Element Method; Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis“, Prentice-Hall, New Jersey (1987)

- [15] P.A.A.Laura, J.C.Paloto, R.D.Santos, „A Note on the Vibration of a Circular Plate Elastically Restrained Against Rotation“, Journal of Vibration and Sound, Volume 41, Academic Press, London (1975), S.177-180
- [16] R.D.Blevins, „Formulas for Natural Frequency and Mode Shape“, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida (1995)
- [17] H.Lamb, „On the Vibration of an Elastic Plate in Contact with Water“, Proc. Royal Society of London Ser.A 98 (1920), S.205-216
- [18] S.Wolfram, „Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer“, Addison-Wesley Publ. Co., California (1991)
- [19] V.Lange, G.Higelin, „Static and Dynamic Test Methods for Thin Mono- and Polycrystalline Si-Films“, Microsystem Technologies 1, Springer-Verlag (1995), S.185-190
- [20] M.Vitt, W.K.Schomburg, persönliche Mitteilung, Institut für Mikrostrukturtechnik, Forschungszentrum Karlsruhe (1995)