



---

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5916

# **Direkte numerische Simulation der Konvektion in einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle**

**M. Schmidt, M. Wörner, G. Grötzbach**

Institut für Reaktorsicherheit  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

August 1997

---



**Forschungszentrum Karlsruhe**

**Technik und Umwelt**

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5916

**Direkte numerische Simulation der  
Konvektion in einer Fluidschicht  
mit interner Wärmequelle**

M. Schmidt, M. Wörner, G. Grötzbach

Institut für Reaktorsicherheit

Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1997

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Zeitschrift

ISSN 0947-8620

Direkte numerische Simulation von  
Komplexen in einer turbulenten  
mit lokaler Wirbelbildung

M. Schmidt, M. Weiser, G. Gatzke

Journal für die Technische Physik

Heft 1/2000, Seite 1-10

Forschungszentrum Karlsruhe

**Als Manuskript gedruckt**  
**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH**  
**Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft**  
**Deutscher Forschungszentren (HGF)**

**ISSN 0947-8620**

# Zusammenfassung

## Direkte numerische Simulation der Konvektion in einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Naturkonvektion in einer horizontalen Fluidschicht mit homogen verteilter volumetrischer Wärmequelle. Die obere und untere Wand sind isotherm und auf gleicher Temperatur. Die Untersuchungen erfolgen mit der Methode der direkten numerischen Simulation, wobei in den beiden horizontalen Richtungen periodische Randbedingungen verwendet werden. Für ein Fluid mit Prandtl-Zahl  $Pr=7$  werden Rechnungen für die internen Rayleigh-Zahlen  $Ra=10^5$ ,  $Ra=5 \cdot 10^5$ ,  $Ra=10^6$ ,  $Ra=5 \cdot 10^6$ ,  $Ra=10^7$ ,  $Ra=10^8$  und  $Ra=10^9$  vorgestellt. Die Ergebnisse sind, bis auf den Wärmeübergang an der unteren Wand in der Simulation mit  $Ra=10^9$ , in sehr guter Übereinstimmung mit experimentellen Daten.

Für alle untersuchten Rayleigh-Zahlen sind die Konvektionsmuster dreidimensional und instationär. Die phänomenologische Analyse der Konvektion zeigt bei  $Ra=10^5$  einzelne kalte Abwindfahnen an der oberen Wand. Bei  $Ra=10^6$  finden sich am Rande der Grenzschicht der oberen Wand Speichenstrukturen mit Abwärtsbewegung. Bei  $Ra=10^7$  formen benachbarte Speichenstrukturen ein geschlossenes Netzwerk von unregelmäßigen Zellen. Unterhalb der Kreuzungspunkte von Speichen bilden sich tropfenförmige Ablösungen. Im Inneren der Zellen herrscht langsame Aufwärtsbewegung, wobei die höchsten Geschwindigkeiten neben den Ablösungen auftreten. Mit Steigerung der Rayleigh-Zahl auf  $Ra=10^8$  und  $Ra=10^9$  werden die Zellen unregelmäßiger und ihre charakteristische Länge nimmt ab.

Basierend auf den Simulationsergebnissen für  $Ra=10^8$  wird die Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie  $k$  analysiert, die in statistischen Turbulenzmodellen gelöst wird. Es zeigt sich, daß Produktions- und Dissipationsterm nicht in lokalem Gleichgewicht sind. Der Diffusionsterm spielt eine wichtige Rolle, da er den Überschuß an Produktion von Turbulenzenergie aus dem Zentralbereich des Kanals hin zu den Wänden umverteilt, wo die Energie dissipiert wird. Die Analyse des in einfachen Turbulenzmodellen verwendeten Konzeptes einer vorgegebenen turbulenten Prandtl-Zahl zeigt, daß dieser Schließungsansatz für die turbulenten Wärme-flüsse nicht in der Lage ist, die Konvektion in Fluidschichten mit interner Wärmequelle adäquat zu beschreiben. Eine entsprechende Schlußfolgerung ergibt sich für das Standardmodell für den turbulenten diffusiven Transport von  $k$ , das auf einer Prandtl-Zahl  $\sigma_k$  für die kinetische Turbulenzenergie basiert.

## Abstract

### Direct Numerical Simulation of the convection in an horizontal fluid layer with internal heat generation

Results of direct numerical simulations (DNS) of the convection in an internally heated horizontal fluid layer are presented. The boundary conditions used are periodic in both horizontal directions while the top and bottom walls are isothermal and of equal temperature. Results are given for fluid Prandtl number  $Pr = 7$  and Rayleigh numbers  $Ra=10^5$ ,  $Ra=5 \cdot 10^5$ ,  $Ra=10^6$ ,  $Ra=5 \cdot 10^6$ ,  $Ra=10^7$ ,  $Ra=10^8$ , and  $Ra=10^9$ . Besides the simulation with  $Ra=10^9$ , where the heat transfer at the lower wall is somewhat too high, the computational results compare very well with experimental findings.

For all Rayleigh numbers considered, the flow patterns are three-dimensional and time-dependent. The dominant flow structures at  $Ra=10^5$  are single cold drop-like plumes which release from the upper wall. In the simulation with  $Ra=10^6$  at the edge of the boundary layer of the top wall spoke patterns with downward motion are identified. At  $Ra=10^7$  neighbouring spokes form a closed net of irregular cells. At locations where different spokes are connected to knots, drop-like downward falling cold plumes exist. In the inner region of the cells slow upward motion is found, whereas the highest velocities occur in the vicinity of the downward falling plumes. With further increase of the Rayleigh number to  $Ra=10^8$  and  $Ra=10^9$  the cells become more irregular and their typical length scale decreases.

The simulation results for  $Ra=10^8$  are used to analyse the transport equation of turbulent kinetic energy  $k$ , which represents the basis of most of the commonly used statistical turbulence models. The results show that production and dissipation of  $k$  are not in local equilibrium. Instead, diffusive transport of  $k$  is very important in redistributing the surplus of production of  $k$  from the centre of the layer towards the walls, where it is dissipated. The analysis of the concept of a prescribed constant turbulent Prandtl number used in simple turbulence models reveals that this approach is not capable to adequately describe the turbulent heat transfer in a convective layer driven by internal heat generation. A similar conclusion holds for the standard model for the turbulent diffusive transport of  $k$  by a Prandtl number of turbulent kinetic energy  $\sigma_k$ .

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Problemstellung .....	1
1.2 Zielsetzung.....	1
<b>2 Strömungsmechanische und mathematische Grundlagen</b> .....	<b>3</b>
2.1 Konvektion mit innerer Wärmequelle .....	3
2.2 Mathematische Formulierung.....	4
2.2.1 Erhaltungsgleichungen .....	4
2.2.2 Boussinesq-Approximation .....	5
2.2.3 Randbedingungen.....	7
2.2.4 Anfangsbedingungen .....	8
2.3 Kennzahlen .....	8
2.4 Turbulenz .....	10
<b>3 Literatur zur Konvektion mit innerer Wärmequelle</b> .....	<b>12</b>
3.1 Theoretische Untersuchungen .....	12
3.2 Experimentelle Untersuchungen .....	15
3.3 Numerische Untersuchungen.....	18
3.4 Bewertung der existierenden Literatur .....	20
<b>4 Das Computerprogramm TURBIT</b> .....	<b>23</b>
4.1 Allgemeines.....	23
4.1.1 Dimensionslose Grundgleichungen in TURBIT.....	23
4.1.2 Randbedingungen.....	24
4.1.3 Simulationsmethoden .....	25
4.1.4 Diskretisierung .....	26
4.1.5 Numerische Integration.....	28
4.2 Vorgehensweise bei den Simulationen .....	29
4.2.1 Preprocessing .....	29
4.2.2 Durchführung der Integration .....	30
4.2.3 Postprocessing .....	31
4.3 Automatische Maschennetzgenerierung .....	32
4.3.1 Mathematisches Modell .....	32
4.3.2 Implementierung in TURBIT .....	34

---

<b>5 Simulationen und Ergebnisse</b> .....	<b>36</b>
5.1 Durchgeführte Simulationen .....	36
5.2 Verifikation der Ergebnisse .....	38
5.2.1 Auflösung des Dissipativen Bereichs .....	38
5.2.2 Auflösung der Grenzschicht .....	39
5.2.3 Auflösung der makroskopischen Strukturen .....	41
5.2.4 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen .....	45
5.3 Konvektionsformen .....	49
5.3.1 Strukturen im Temperaturfeld .....	49
5.3.2 Strukturen im Geschwindigkeitsfeld .....	53
5.4 Auswertung statistischer Strömungsgrößen .....	55
5.4.1 Temperaturfeld .....	55
5.4.2 Geschwindigkeitsfeld .....	61
5.5 Zeitsignale .....	64
5.6 Analyse von Turbulenzmodellansätzen .....	66
5.6.1 Zu statistischen Turbulenzmodellen .....	66
5.6.2 Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie .....	69
5.6.3 Turbulente Prandtl-Zahl .....	76
<b>6 Schlußbetrachtung</b> .....	<b>78</b>
6.1 Zusammenfassung .....	78
6.2 Ausblick .....	80
<b>7. Literaturverzeichnis</b> .....	<b>81</b>
<b>Anhang</b> .....	<b>86</b>
Anhang A: Zeitnormierung in TURBIT .....	86
Anhang B: Farb-Abbildungen .....	87

---



## Symbolverzeichnis

### Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
$a$	$m^2/s$	Temperaturleitzahl (Konduktivität)
$a_t$	$m^2/s$	Wirbelkonduktivität
$c_p$	$J/(kg\ K)$	Spezifische Wärme ( $p$ =konst.)
$D$	$m$	Kanalhöhe
$\bar{f}$	$N/m^3$	Massenkraft
$g$	$m/s^2$	Erdbeschleunigung
IM, JM, KM	-	Anzahl der Maschen in $x_1, x_2, x_3$ -Richtung
$k$	$m^2/s^2$	Kinetische Turbulenzenergie
$m_1, m_2, c$	-	Parameter zur automatischen Gittergenerierung
$p$	$N/m^2$	Druck
$u, v, w$	$m/s$	Geschwindigkeiten in $x_1, x_2, x_3$ -Richtung
$u_1, u_2, u_3$	$m/s$	"
$\bar{u}$	$m/s$	Geschwindigkeitsvektor
$\dot{q}_{in}$	$W/m^3$	Innere Wärmequellendichte
$q_i$	$W/m^2$	Wärmestromdichte an Wand $i$ ( $i=1,2$ )
$\bar{q}$	$W/m$	Wärmestromdichtevektor
$T$	$K$	Temperatur
$t$	$s$	Zeit
$x, y, z$	-	Koordinaten
$x_1, x_2, x_3$	-	"
$X_1, X_2$	-	Periodenlänge in $x_1, x_2$ -Richtung

### Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\alpha$	$W/(m^2\ K)$	Wärmeübergangskoeffizient
$\beta$	$1/K$	Isobarer thermischer Volumenausdehnungskoeffizient
$\delta_i$	$m$	Grenzschichtdicke an Wand $i$ ( $i=1,2$ )
$\delta_{ij}$	-	Kronecker-Symbol ( $\delta_{ij}=1$ für $i=j$ ; $\delta_{ij}=0$ für $i \neq j$ )
$\varepsilon$	$m^2/s^3$	Dissipation der kinetischen Turbulenzenergie
$\lambda$	$W/(m\ K)$	Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	$Ns/m^2$	dynamische Viskosität
$\nu$	$m^2/s$	kinematische Viskosität

---

$\nu_t$	$\text{m}^2/\text{s}$	Wirbelviskosität
$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte
$\tau_{ij}$	$\text{N}/\text{m}^2$	Spannungstensor
$\Phi_{\text{Diss}}$	$\text{N}/\text{s}$	Dissipationsfunktion
$\Phi$	-	Beliebige Strömungsgröße ( $u_i, p, T$ )
$\hat{\Phi}$	-	Beliebige, dimensionslose Strömungsgröße ( $u_i, p, T$ )
$\langle \Phi \rangle$	-	Zeitlicher Mittelwert der Strömungsgröße
$\Phi'$	-	Turbulenter Schwankungsanteil der Strömungsgröße

## Kennzahlen

$$\text{Da} = \frac{\dot{q}_{\text{in}} D^2}{\lambda \Delta T_{\text{max}}} \quad \text{Damköhler-Zahl}$$

$$\text{Fo} = \frac{a t}{D^2} \quad \text{Fourier-Zahl}$$

$$\text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T_{\text{max}} D^3}{\nu^2} \quad \text{Grashof-Zahl}$$

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad \text{Nußelt-Zahl}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad \text{Prandtl-Zahl}$$

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Da} = \frac{g \beta \dot{q}_{\text{in}} D^5}{\nu a \lambda} \quad \text{Interne Rayleigh-Zahl}$$


---

---

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

Die freie Konvektion in Fluiden mit innerer Wärmequelle wurde im Gegensatz zur Rayleigh-Bénard Konvektion zunächst nur sehr spärlich untersucht. Man brachte sie in geo- und astrophysikalischer Hinsicht mit der Kontinentaldrift und Vorgängen in den äußeren Schichten von Sternen in Zusammenhang. Von größerem Interesse wurde sie Anfang der 70er Jahre durch Untersuchungen über die Wärmeübertragung bei schweren Reaktorunfällen, bei denen geschmolzener Brennstoff auftritt. Der geschmolzene Reaktorkern wird zunächst im unteren Teil des Druckbehälters gehalten, wobei das Ziel ist, die durch radioaktiven Zerfall freiwerdende Nachwärme durch freie Konvektion abzuführen. In diesem Zusammenhang werden Experimente in kalottenförmigen Geometrien durchgeführt. Ist die Kühlung nicht ausreichend, so durchschmilzt der Brennstoff den Reaktordruckbehälter und wird in einem großen, ebenen Kernfänger aufgefangen und langfristig gekühlt. Experimentelle Untersuchungen hierzu betrachten die Konvektion in horizontalen Fluidschichten.

Begleitet und unterstützt werden die Experimente durch numerische Berechnungen mit ingenieurtechnischen Rechenprogrammen. Die Beschreibung der turbulenten Impuls- und Wärmeübertragungsvorgänge erfolgt in solchen Codes mit Hilfe von statistischen Turbulenzmodellen. Die Qualität der Rechenergebnisse hängt damit wesentlich davon ab, inwieweit die verwendeten Modelle in der Lage sind, die Turbulenz bei Naturkonvektion in Fluiden mit interner Wärmequelle zu beschreiben. Es ist daher von Wichtigkeit, die Gültigkeit von Vereinfachungen und Modellannahmen in statistischen Turbulenzmodellen für die Konvektion mit innerer Wärmequelle zu überprüfen und Modellkoeffizienten zu bestimmen.

Hierzu eignet sich neben grundlegenden experimentellen Untersuchungen auch die Methode der direkten numerischen Simulation (DNS). Bei der DNS werden alle Wirbelgrößen der turbulenten Strömung durch das Rechengitter aufgelöst und das Stromfeld kann ohne weitere Vereinfachungen oder Modellannahmen direkt aus den vollständigen Erhaltungsgleichungen berechnet werden.

## 1.2 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine grundlegende Untersuchung zur Wärmeübertragung bei der Konvektion mit interner Wärmequelle mit Hilfe der direkten numerischen Simulation. Um die physikalischen Vorgänge ohne geometrieabhängige Artefakte untersuchen zu können, wird eine horizontale Fluidschicht mit isothermen

---

Randbedingungen betrachtet. Die maßgebliche Kennzahl ist in diesem Fall die interne Rayleigh-Zahl, die auch als dimensionslose Wärmequellstärke interpretiert werden kann. Es soll untersucht werden, welche Mechanismen für die Wärmeübertragung bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen verantwortlich sind. Hierbei steht neben der zeitlichen und räumlichen Entwicklung der grundlegenden Strömungsstrukturen die statistische Analyse der einzelnen Strömungsgrößen bei steigender Rayleigh-Zahl im Vordergrund. Weiterhin soll geklärt werden, bis zu welchen Rayleigh-Zahlen eine direkte numerische Simulation mit den im ersten Halbjahr 1996 im Forschungszentrum Karlsruhe verfügbaren Computern in tolerierbarer Rechenzeit durchgeführt werden kann.

Um hochturbulente Strömungen in technischen Geometrien numerisch untersuchen zu können, ist die direkte numerische Simulation heute und in absehbarer Zeit nicht geeignet. Es müssen hierzu auch weiterhin Turbulenzmodelle verwendet werden. Mit dieser Arbeit soll deshalb auch eine Datenbasis zur Bestimmung der für Turbulenzmodelle benötigten empirischen Koeffizienten geschaffen werden und mit ihr einige in der Literatur existierende Modellansätze für Schließungsterme analysiert werden. Konkret wird in dieser Arbeit die in vielen Turbulenzmodellen verwendete Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie  $k$  untersucht. Die mit den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation ausgewerteten einzelnen Terme der Gleichung werden auf ihre Relevanz für die betrachtete Konvektionsart hin untersucht und mit Modellannahmen aus der Literatur verglichen.

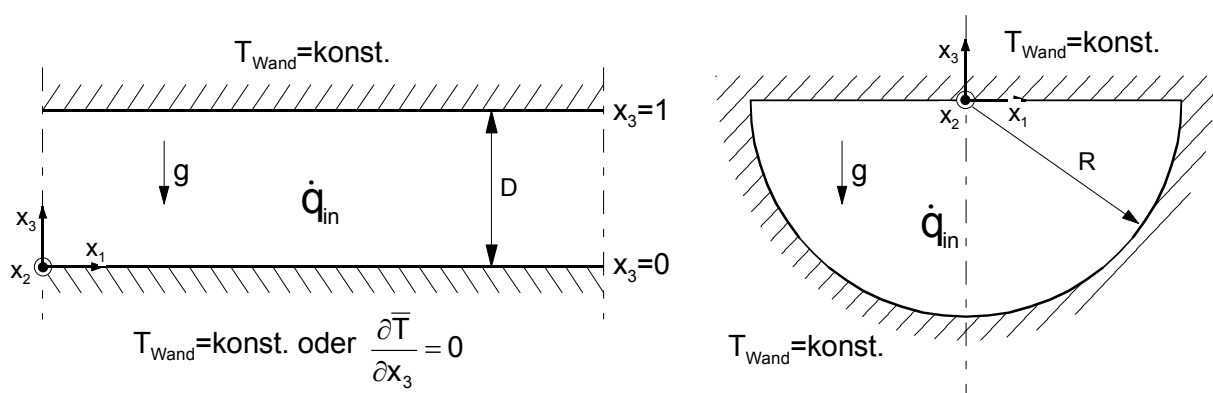
---

## 2 Strömungsmechanische und mathematische Grundlagen

### 2.1 Konvektion mit innerer Wärmequelle

Zur grundlegenden Untersuchung von Konvektion mit homogen verteilter innerer Wärmequelle verwendet man einfache Geometrien (siehe Abb. 2.1). Meistens wird eine horizontale, zwischen zwei kalten oder einer kalten oberen und einer adiabaten unteren Wand eingeschlossene Fluidschicht verwendet, die theoretisch unendlich weit ausgedehnt ist. Häufig wird auch ein kalottenförmiger Bereich betrachtet. Fluide mit inneren Wärmequellen liegen z.B. bei exothermen chemischen Reaktionen, bei Kernschmelzen mit radioaktiver Nachwärme oder in Elektrolysebädern vor.

In dieser Arbeit betrachten wir eine ebene Fluidschicht, die zwischen zwei horizontalen, isothermen Wänden eingeschlossen ist. Diese Schicht ist zunächst auf dem gleichen Temperaturniveau wie die Wände und in Ruhe. Durch eine innere Wärmequelle erwärmt sich das Fluid und Wärmeleitung vom Fluid zu den Wänden beginnt. Es stellt sich ein Temperaturprofil ein, das im Kanalinneren hohe Werte aufweist und zu den Wänden hin auf Wandtemperatur abfällt. Bei weiterer Temperaturerhöhung setzt ab einem bestimmten Zeitpunkt die freie Konvektion ein. Als Bedingung für das Einsetzen der Konvektion läßt sich angeben, daß die Auftriebskräfte durch die Dichteunterschiede größer sein müssen als die Reibungskräfte im Fluid. Je größer der Temperaturunterschied wird, desto mehr gewinnt die Konvektion im Vergleich zur Konduktion an Bedeutung. Ein im statistischen Sinne stationärer Zustand stellt sich ein, wenn Wärmeproduktion und Wärmeabfuhr über die obere und untere Wand gleich sind.



**Abb. 2.1:** Geometrien zur Untersuchung von Konvektion mit innerer Wärmequelle.

An der unteren Wand liegt also aufgrund der Dichteverhältnisse eine stabile thermische Schichtung vor, während sich an der oberen Wand eine instabile Schichtung ergibt. Hier ist kaltes, und damit dichteres Fluid, über heißem, weniger dichtem.

## 2.2 Mathematische Formulierung

### 2.2.1 Erhaltungsgleichungen

Ausgangsbasis für die mathematische Beschreibung reibungs- und auftriebsbehafteter Strömungen sind die physikalischen Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Unter den Voraussetzungen, daß ein Newtonsches Fluid vorliegt und der Wärmeleitungsansatz nach Fourier anwendbar ist, ergeben sie sich in folgender Form (Bird et al., 1960):

Die Erhaltungsgleichung für die Masse (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0, \quad (2.1)$$

mit der Dichte  $\rho$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\bar{u}$ . Die Erhaltungsgleichung für den Impuls (Bewegungsgleichung)

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \bar{f} + \nabla \tau_{ij}, \quad (2.2)$$

wobei  $\bar{f}$  eine Massenkraft,  $p$  der Druck und  $\tau_{ij}$  der Spannungstensor ist. Die Erhaltungsgleichung für die Energie (Wärmetransportgleichung oder Fouriergleichung)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \beta T \frac{dp}{dt} + \dot{q}_{in} + \Phi_{Diss}, \quad (2.3)$$

mit der spezifischen Wärme  $c_p$ , der Temperatur  $T$ , der als konstant angenommenen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , dem isobaren thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\beta$ , der Wärmequellendichte  $\dot{q}_{in}$  und der Dissipationsfunktion  $\Phi_{Diss}$ . Diese ist definiert als

$$\Phi_{Diss} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

(2.1) bis (2.3) ergeben zusammen mit einer Zustandsgleichung und einem Stoffgesetz für die Schubspannungen ein vollständiges System von Gleichungen zur Berechnung des Strömungs-, Temperatur- und Druckfelds. Zur Berechnung von Naturkonvektion ist es sinnvoll und üblich, zusätzliche Vereinfachungen einzuführen.

### 2.2.2 Boussinesq-Approximation

Bei der Boussinesq-Approximation geht man von folgenden Annahmen aus:

- Die Dichte wird in allen Termen, außer im Auftriebsterm der Bewegungsgleichung, als konstant betrachtet
- Sie ist lediglich eine Funktion der Temperatur ( $\rho = \rho(T)$ )
- Alle übrigen Stoffwerte werden als konstant angenommen
- Die Energiedissipation  $\Phi_{\text{Diss}}$  wird als Wärmequelle vernachlässigt

Entwickelt man die Dichtefunktion in eine Taylorreihe um den Referenzpunkt  $T_0$ , so folgt, unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung:

$$\frac{\rho(T)}{\rho_0} = 1 - \beta_0(T - T_0) \quad (2.5)$$

Zusammen mit dem Stokesschen Schubspannungsansatz für  $\tau_{ij}$  folgen damit aus (2.1) bis (2.3) die Gleichungen

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \beta_0 \bar{\mathbf{f}}(T - T_0) + \frac{\mu_0}{\rho_0} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.7)$$

$$\rho_0 c_{p,0} \frac{dT}{dt} = \lambda_0 \nabla^2 T + \dot{q}_{\text{in}}, \quad (2.8)$$

welche man üblicherweise als Grundgleichungen für den Wärmeübergang bei freier Konvektion betrachtet.

In drei Raumdimensionen, mit der Schwerkraft  $g$  als einziger Massenkraft und in kartesischen Koordinaten, ergibt sich aus den Gleichungen (2.6), (2.7) und (2.8) folgendes Gleichungssystem:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \beta_0 g (T - T_0) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.10c)$$

Wärmetransportgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a_0 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_{in}}{\rho_0 c_{p,0}} \quad (2.11)$$

mit der Temperaturleitzahl

$$a_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_{p,0}} \quad (2.12)$$

Dies ist ein System aus fünf nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die fünf skalaren Größen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $T$  und  $p$ . Sie gelten grundsätzlich, also sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen, können jedoch nur in einigen speziellen Fällen streng analytisch gelöst werden. In den meisten Fällen, insbesondere bei turbulenten Strömungen, sind sie nur numerisch zu lösen.



### 2.2.3 Randbedingungen

Zur mathematischen Beschreibung eines bestimmten Strömungsproblems sind außer den Differentialgleichungen auch Randbedingungen nötig. Man unterscheidet zwischen hydrodynamischen und thermischen Randbedingungen:

#### a) Hydrodynamische Randbedingungen:

Für Strömungsteilchen, die sich an einer festen Wand befinden, gilt die sogenannte Haftbedingung, d.h.

$$\vec{u}_{\text{Wand}} = 0 \quad (2.13)$$

Sämtliche Geschwindigkeitskomponenten an der Wand sind also gleich Null.

#### b) Thermische Randbedingungen:

Als thermische Randbedingung lässt sich für den Wärmeübergang an der Wand die Gleichung

$$\alpha(T_{\text{Wand}} - T_{\text{Fluid}}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \quad (2.14)$$

mit  $\alpha$  als Wärmeübergangskoeffizienten angeben, d.h. die Wärmestromdichte an der Wand kann mit dem Temperaturgradienten des Fluids in Wandnähe berechnet werden.

Für praktische Berechnungen lassen sich drei Arten von thermischen Randbedingungen unterscheiden:

- Bei der Randbedingung erster Art wird eine Temperaturverteilung an den Rändern des betrachteten Gebiets vorgegeben (Dirichlet-Randbedingung).
- Bei der Randbedingung zweiter Art besteht die Vorgabe aus einer Verteilung der Wärmestromdichte am Rand des Systems (Neumann-Randbedingung).
- Bei der Randbedingung dritter Art wird eine allgemeine Kopplungsbedingung zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichen Medien angegeben.

Im Fall einer horizontalen Fluidschicht mit innerer Wärmequelle wird im allgemeinen an der oberen Wand eine Dirichlet- und an der unteren Wand eine Dirichlet- oder

Neumann-Randbedingung angegeben. In der vorliegenden Arbeit wird an der oberen und unteren Wand stets eine Dirichlet-Randbedingung verwendet.

### 2.2.4 Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen bestehen in der Angabe von Werten für das Geschwindigkeits-, Temperatur- und Druckfeld für einen bestimmten Zeitpunkt. Von diesen Anfangsbedingungen ausgehend wird das Feld dann weiter integriert. Auf die in dieser Arbeit verwendeten Anfangsbedingungen wird in Kapitel 4.2.1 näher eingegangen.

## 2.3 Kennzahlen

Durch Ähnlichkeitsüberlegungen und Modellgesetze kommt man zu den, in der Anwendung wichtigen, dimensionslosen Kennzahlen. Mit ihrer Hilfe lassen sich Lösungen auf eine ganze Klasse physikalisch ähnlicher Probleme übertragen. Kennzahlen lassen sich aus Kräfte- oder Energieverhältnissen, einer Dimensionsanalyse oder aus der Entdimensionalisierung der Differentialgleichungen herleiten. Mit  $D$  als Abstand zwischen der oberen und unteren Wand ergeben sich in unserem Fall als maßgebende, dimensionslose Kennzahlen:

- Grashof-Zahl 
$$\text{Gr} = \frac{g\beta\Delta T_{\max} D^3}{\nu^2} \quad (2.15)$$

Sie läßt sich auch als Verhältnis von Auftriebskräften zu Reibungskräften deuten.

- Prandtl-Zahl 
$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad (2.16)$$

Sie kennzeichnet als Verhältnis der molekularen Transportkoeffizienten von Impuls und Energie die Stoffeigenschaften des Fluids und ist ein Maß für das Verhältnis der Grenzschichtdicken im Impuls- und Temperaturfeld. Für den Fall  $\text{Pr}=1$  bilden sich identische thermische und viskose Grenzschichtdicken aus.

- Damköhler-Zahl 
$$\text{Da} = \frac{\dot{q}_{\text{in}} D^2}{\lambda \Delta T_{\max}} \quad (2.17)$$

Sie charakterisiert das Verhältnis von freigesetzter Wärme zum Wärmetransport durch Leitung und ist ein Maß für die Temperaturerhöhung im Fluid.

- Fourier-Zahl 
$$Fo = \frac{a t}{D^2} \quad (2.18)$$

Sie ist für instationäre Wärmeleitungsvorgänge wichtig.

- Nußelt-Zahl 
$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (2.19)$$

Sie läßt sich als Verhältnis des gesamten Wärmeflusses zum Wärmefluß durch reine Wärmeleitung deuten, und ist damit ein Maß für die Erhöhung des Wärmeflusses durch Konvektion. Der charakteristischen Länge  $l$  entspricht im vorliegenden Fall die Schichthöhe  $D$ .

Multipliziert man die Grashof-Zahl mit der Prandtl-Zahl, so ergibt sich die (externe) Rayleigh-Zahl

$$Ra_E = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta \Delta T_{\max} D^3}{a \nu} \quad (2.20)$$

Zwischen der Damköhler-Zahl und den Nußelt-Zahlen an der oberen,  $Nu_o$ , und unteren Wand,  $Nu_u$ , läßt sich für die Konvektion mit innerer Wärmequelle im eingelaufenen Zustand aus einer Energiebilanz folgende Beziehung ableiten:

$$Da = Nu_u + Nu_o \quad (2.21)$$

Im Fall reiner Wärmeleitung ergibt sich für  $Nu_u$  und  $Nu_o$  ein Wert von vier, für  $Da$  entsprechend von acht.

$\Delta T_{\max}$  bezeichnet in obigen Gleichungen die maximal im Kanal auftretende Temperaturdifferenz  $T_{\max} - T_{\text{Wand}}$ . Da diese a priori nicht bekannt ist, wird als weitere Kennzahl die für unser Problem maßgebliche interne Rayleigh-Zahl angegeben, in der  $\Delta T_{\max}$  nicht mehr auftritt:

$$Ra_i = Ra_E \cdot Da = Gr \cdot Pr \cdot Da = \frac{g \beta \dot{q}_{\text{in}} D^5}{\nu a \lambda} \quad (2.22)$$

Diese wird im folgenden nur noch als Rayleigh-Zahl  $Ra$  bezeichnet. Wird eine bestimmte kritische Rayleigh-Zahl  $Ra_c$  überschritten, setzt die Konvektion im horizontalen Kanal ein (siehe Kapitel 3.1).

Der Wärmeübergang läßt sich in der Form  $Nu=f(Ra,Pr)$  schreiben. Für große Prandtl-Zahlen ( $Pr \geq 1$ ) ist die Rayleigh-Zahl die einzige maßgebende Kennzahl, sodaß sich der Wärmeübergang auch als  $Nu=f(Ra)$  schreiben läßt. In vielen Fällen ergibt sich als Funktion eine einfache Potenzgleichung der Form

$$Nu = \text{const} \cdot Ra^m \quad (2.23)$$

Der Koeffizient und Exponent in (2.23) wird üblicherweise aus experimentellen Daten ermittelt. Bei der Anwendung einer solchen empirischen Beziehung muß daher auf den Gültigkeitsbereich geachtet werden, da sie nur eine bereichsweise Näherung der tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten darstellt.

## 2.4 Turbulenz

Im Gegensatz zu laminaren Strömungen sind turbulente Strömungen stets dreidimensional, instationär, wirbelbehaftet und unregelmäßig. Turbulenz ist zurückzuführen auf das Auftreten von Instabilitäten und Verzweigungen und ist damit ein Stabilitätsproblem. Beim laminar-turbulenten Umschlag einer Rohrströmung ist z.B. die Reynoldszahl eine entscheidende Kenngröße. Bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist die Rayleigh-Zahl die maßgebliche Kennzahl bezüglich der Strömungsform. Überschreitet sie einen bestimmten Wert, wird die Strömung instabil gegenüber kleinen Störungen und schlägt in den turbulenten Zustand um. Bei der Konvektion mit innerer Wärmequelle und isothermen Randbedingungen gibt es jedoch, im Gegensatz zur Rayleigh-Bénard-Konvektion, keinen ausgeprägten laminaren Bereich, sodaß die Strömung sofort, mit Einsetzen der Konvektion, in den turbulenten Zustand übergeht.

Sind alle statistischen Eigenschaften der turbulenten Strömung unabhängig vom Ort und von der Richtung, so spricht man von isotroper Turbulenz. Sind sie dagegen nur unabhängig vom Ort, aber abhängig von der Richtung, so liegt homogene Turbulenz vor. Liegt keine dieser Unabhängigkeiten der statistischen Eigenschaften vor, so spricht man von anisotroper Turbulenz.

Die Grundgleichungen der freien Konvektion (2.6) bis (2.8) oder (2.9) bis (2.11) gelten sowohl für laminare, als auch für turbulente Strömungen. Um diese Gleichungen jedoch bei turbulenten Strömungen anwenden zu können, muß das ge-

---

samte Spektrum der Wirbelgrößen durch das Rechengitter im Raum und in der Zeit aufgelöst werden. Diese Möglichkeit wird bei der direkten numerischen Simulation verwendet. Um auch auf groben Gittern und mit großen Zeitschrittweiten den Einfluß der Turbulenz auf das Stromfeld berechnen zu können, führt man über eine statistische Betrachtungsweise zeitliche Mittelwerte der Strömungsgrößen ein, denen Schwankungswerte überlagert sind. Durch Einführung dieser Aufspaltung in die Differentialgleichungen und Mittelung über der Zeit ergeben sich zusätzliche, unbekannte Terme, die durch empirische Ansätze modelliert werden müssen. Im Falle des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells werden hierzu zusätzliche Transportgleichungen für charakteristische Größen der Turbulenz aufgestellt (siehe Kapitel 5.6).

---

### 3 Literatur zur Konvektion mit innerer Wärmequelle

Wie in der Einleitung bereits beschrieben, kam das Interesse an Konvektion mit innerer Wärmequelle, im Gegensatz zur Rayleigh-Bénard-Konvektion, erst spät auf. Zunächst wurden theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt, die später, nachdem entsprechend leistungsfähige Rechner verfügbar waren, durch numerische ergänzt wurden. Die Motivation für derartige Untersuchungen ergab sich zunächst aus geo- und astrophysikalischen Fragestellungen, z.B. Sonnengranulation, und später aus Fragen zur Kühlung niedergeschmolzener nuklearer Reaktoren. Bei den astrophysikalischen Untersuchungen wird meist die untere Wand als adiabat angenommen (Symmetriebedingung im Kern einer Sonne), bei den Untersuchungen für nukleare Reaktoren sollten beide Wände auf gleicher Temperatur sein, da eine Schmelze von über 2800K praktisch nur innerhalb ihrer eigenen Krusten gehalten werden kann ( $T_{\text{Wand}} = T_{\text{Erstarrung}}$ ).

In der Literatur werden oft unterschiedliche Definitionen für die Rayleigh-Zahl verwendet, die sich um den Faktor zwei oder 64 von der in dieser Arbeit angegebenen Rayleigh-Zahl unterscheiden. Im folgenden Text und in den Tabellen sind die Werte auf die in Kapitel 2.3. angegebene Definition umgerechnet worden.

Kulacki und Richards (1985) geben einen umfassenden Überblick über Konvektion mit innerer Wärmequelle und die bis dahin veröffentlichte Literatur auf diesem Gebiet. Die Literaturrecherche von Baker et al. (1976) ist weniger umfangreich, gibt jedoch eine mögliche Anwendung der bisherigen Ergebnisse bei der Wärmeabfuhr nach einem Reaktorunfall an. Eine Auflistung der Literatur zur Konvektion mit interner Wärmequelle anhand theoretischer, experimenteller und numerischer Untersuchungen geben die Tabellen 3.1 - 3.3.

#### 3.1 Theoretische Untersuchungen

Die ersten theoretischen Arbeiten, die sich mit dem Problem der Fluidschicht mit innerer Wärmequelle befaßten, waren Stabilitätsbetrachtungen. Sparrow et al. (1964) untersuchen den Effekt unterschiedlicher Randbedingungen auf die Stabilität einer horizontalen Fluidschicht und ermitteln für intern beheizte Konvektion mit isothermen Rändern eine kritische Rayleigh-Zahl für das Einsetzen der Konvektion von  $Ra_c=37\ 325$ .

Roberts (1967) findet mit Hilfe der linearen Stabilitätstheorie eine kritische Rayleigh-Zahl von  $Ra_c=2\ 772,28$  für eine horizontale Fluidschicht mit isothermer oberer und adiabater unterer Begrenzung. Er führt ebenfalls Überlegungen zur Konvektionsform

---

durch und findet hexagonale Zellen mit absinkendem Fluid in der Zellenmitte als stabile Form. Für zunehmende Rayleigh-Zahl sagt er einen abnehmenden Zelldurchmesser voraus.

Schwiderski (1972) führt ebenfalls eine Stabilitätsanalyse für isotherm/adiabate Begrenzung durch. Er bestätigt den von Roberts gefundenen Wert für  $Ra_c$ . Schwiderski untersucht weiterhin die Abhängigkeit der Konvektionsform von der Aufheizung des Fluids, um Abweichungen vom Experiment zur Theorie zu erklären. Er geht dabei davon aus, daß im Experiment heiße Bereiche im Fluid stärker durch die Joulsche Wärme aufgeheizt werden als kalte, und zeigt, daß die gleichmäßigen hexagonalen Zellen durch diesen Effekt gestört werden.

Kulacki und Goldstein (1974) untersuchen durch Auswertung der gemessenen vertikalen Temperaturprofile den turbulenten Wärmetransport in einer intern beheizten Schicht und finden im oberen Bereich einen hohen, aufwärts gerichteten

Autor(en)	Jahr	$Nu = f(Ra, Pr)$	Pr	Ra	RB. [oben/ unten]	Bemerkungen
Arpaci, V.S.	1995	$Nu_o = f(Ra, Pr)$	$10^6 < Ra / (1 + 0,041 \cdot Pr^{-1}) < 10^{11}$ $0 < Pr < \infty$		isoth./ isoth.	Phänomenologisches Modell
Catton, I.; Suo-Anttila, A.J.	1974	Nur Diagramm	-	$3,7 \cdot 10^4 < Ra < 10^8$	isoth./ isoth.	Landau-Methode
Cheung, F.B.	1980	$Nu_o = f(Ra, Pr)$	$0 < Pr < \infty$	$10^5 < Ra < \infty$	isoth./ adiabat	-
Cheung, F.B.	1977	$Nu_o = 0,104 Ra^{0,25}$	„mäßig“	$10^6 < Ra < 10^{11}$	isoth./ adiabat	Phänomenologisches Modell
Cheung, F.B.; Shiah, S.W.; Cho, D.H.; Baker, L.	1991	$Nu_o = f(Ra, Pr)$	beliebig	beliebig	isoth./ isoth.	Mit externer Beheizung
Kulacki, F.A.; Goldstein, R.J.	1974	-	-	$8,2 \cdot 10^5 < Ra < 2,5 \cdot 10^7$	isoth./ isoth.	Unters. des turb. Wärmetransports
Roberts, P.H.	1967	-	-	-	isoth./ adiabat	Stabilitätsanalyse
Schwiderski, E.W.	1972	-	-	-	isoth./ adiabat	Stabilitätsanalyse
Tveitereid, M.	1978	$Nu_o = 4,05 + 0,21 \log(Ra/Ra_c)$ $Nu_u = 4,2 + 1,42 \log(Ra/Ra_c)$	$Pr = \infty$	-	isoth./ isoth.	Stabilitätsanalyse (Andere Def. der Ra- Zahl)

**Tabelle 3.1:** Theoretische Untersuchungen zu Fluidschichten mit innerer Wärmequelle.

Wärmestrom und im unteren Bereich einen schwachen abwärts gerichteten. Für die Temperatur-RMS-Werte ermitteln sie an den Wänden hohe und im Kern der Strömung niedrige Werte. Sie analysieren damit als erste ein Detail der Konvektion.

Catton und Suo-Anttila (1974) benutzen die Landau-Methode, um bei isotherm/isothermen Randbedingungen die Nußelt-Zahl an oberer und unterer Wand und die Temperaturprofile über der Kanalhöhe anzugeben. Ihre Ergebnisse stimmen bis zu Rayleigh-Zahlen von  $4 \cdot 10^6$  gut mit den experimentellen Resultaten von Kulacki und Goldstein (1972) überein. Bei höheren Rayleigh-Zahlen versagt die Methode jedoch aufgrund von dann unzulässigen Annahmen.

Ebenso wie Kulacki und Goldstein (1974) hat Cheung (1977) den turbulenten Wärmetransport untersucht, allerdings mit anderen Randbedingungen (isotherm/adiabat). Er gibt für die Nußelt-Zahl an der oberen Wand eine Abhängigkeit von  $Nu_o = 1,04 Ra^{0,25}$  für  $10^6 < Ra < 10^{11}$  an. Cheung gibt ebenfalls die Verteilung der Temperatur-RMS-Werte und des turbulenten Wärmestroms über der Kanalhöhe an.

In einer weiteren Studie untersucht Cheung (1980) den Einfluß der Prandtl-Zahl auf die Wärmeübertragung. Er gibt zunächst als asymptotische Näherung für sehr große Prandtl-Zahlen  $Nu_o \sim Ra^{1/4}$  und für sehr kleine Prandtl-Zahlen  $Nu_o \sim Pr^{1/4} Ra^{1/4}$  an. Für mittlere Prandtl-Zahlen ergeben sich je nach Rayleigh-Zahl unterschiedliche Proportionalitäten, die durch folgende Funktionen angenähert werden können:

$$\begin{array}{lll} Nu_o \sim Ra^{0,227} & \text{für} & 10^5 < Ra < 10^{11} \\ Nu_o \sim Ra^{0,245} & \text{für} & 10^{12} < Ra < 10^{22} \\ Nu_o \sim Ra^{0,25} & \text{für} & Ra > 10^{22} \end{array}$$

Cheung et al. (1991) untersuchen den Einfluß unterschiedlicher Wandtemperaturen auf ein Fluid mit sehr kleiner Prandtl-Zahl und innerer Wärmequelle. Sie geben Formeln sowohl für die Nußelt-Zahl in Abhängigkeit von der externen Rayleigh-Zahl  $Ra_E$ , als auch in Abhängigkeit von der internen Rayleigh-Zahl  $Ra$  an.

Tveitereid (1978) führt eine Stabilitätsanalyse für isotherm/isotherm berandetes Gebiet mit interner Wärmequelle ( $\dot{q}_{in}$  positiv) oder interner Kühlung ( $\dot{q}_{in}$  negativ) und  $Pr = \infty$  durch. Als stabile Lösung findet er hexagonale Strukturen, die für positives  $\dot{q}_{in}$  und  $Ra < 3,6 Ra_c$  Abwärtsbewegung, für negatives  $\dot{q}_{in}$  und  $Ra < 3,6 Ra_c$  Aufwärtsbewegung im Inneren aufweisen. Er gibt ebenfalls Rayleigh-Abhängigkeiten der Nußelt-Zahl an der oberen und der unteren Wand an.

Arpaci (1995) gibt in seiner Studie eine universelle Formel für die Funktion  $Nu = f(Ra, Pr)$  an, die eine Weiterentwicklung der von Cheung (1980) angegebenen Näherung für sehr kleine und sehr große Prandtl-Zahlen darstellt:



$$\text{Nu} = \frac{0,047 \cdot K_N^{\frac{1}{3}}}{1 - 1,734 \cdot K_N^{-\frac{1}{9}}} \quad \text{mit} \quad K_N = \frac{\text{Ra}}{1 + 0,0414 \cdot \text{Pr}^{-1}} \quad (3.1)$$

Der Gültigkeitsbereich umfaßt Rayleigh-Zahlen  $10^6 < \text{Ra} < 10^{11}$ .

### 3.2 Experimentelle Untersuchungen

Bei allen Experimenten wird die innere Wärmequelle durch Joulsche Wärme erzeugt. Dabei werden als obere und untere Begrenzung leitende Platten benutzt, an die eine Spannung angelegt wird. Als Fluid verwendet man Salzlösungen, die sich durch den Strom erhitzen.

Erste experimentelle Studien über eine intern beheizte Fluidschicht mit isotherm/adiabaten Randbedingungen wurden von Tritton und Zarraga (1967) durchgeführt. Es handelt sich hierbei um eine rein qualitative Untersuchung der auftretenden Konvektionsformen. Sie beobachteten hexagonale Zellen mit absinkendem Fluid im Zentrum. Im Gegensatz zur Theorie von Roberts vergrößern sich die Zellen mit zunehmender Rayleigh-Zahl. Ab  $\text{Ra}/\text{Ra}_c = 80$  ( $\text{Ra}_c = 2773$ ) lösen sich die regelmäßigen Strukturen auf und die Strömung wird turbulent.

Um die Abweichungen der Experimente von Tritton und Zarraga zur Theorie von Roberts zu erklären, wiederholen Schwiderski und Schwab (1971) den Versuch, kommen jedoch im großen und ganzen zu den selben Ergebnissen. Sie beobachten allerdings bei gleicher Rayleigh-Zahl kleinere Zelldurchmesser. Im zeitlichen Verlauf stellen sie ein Anwachsen der Zellgröße fest. Die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment können sie nicht erklären, begründen sie aber mit einer temperaturabhängigen Erwärmung des Fluids, was Schwiderski (1972) in einer weiteren theoretischen Studie auch nachweisen kann (siehe Kapitel 3.1.).

Kulacki und Goldstein (1972) führen als erste Experimente mit isothermen Randbedingungen an oberer und unterer Wand durch. In ihrer Arbeit werden Wärmeübergangsbeziehungen und Temperaturprofile angegeben. Für den Wärmeübergang finden sie diskrete Übergänge, die an der oberen Wand bei  $\text{Ra} = 5,68 \cdot 10^5$ ,  $5,88 \cdot 10^6$  und  $1,248 \cdot 10^7$ , an der unteren Wand bei  $\text{Ra} = 1,68 \cdot 10^6$  und  $1,216 \cdot 10^7$  stattfinden. An diesen Stellen weist die Nußelt- über Rayleigh-Zahl-Kurve leichte Knicke auf. Diese sind jedoch sehr schwach, sodaß die entsprechenden Rayleigh-Zahlen nur ungenau angegeben werden können.

Jahn und Reineke (1974) machen eine zweidimensionale Betrachtung des Vorganges, indem sie einen schmalen Kanal mit adiabaten Seitenwänden benutzen, den sie mittels holographischer Interferometrie untersuchen. Sie finden bei keiner Rayleigh-Zahl einen stationären regelmäßigen Zustand. Die Konvektionsstrukturen ändern sich ständig. Sie geben ebenfalls eine Wärmeübergangsbeziehung an.

Die Dissertation von Jahn (1975) ist eine umfassende Untersuchung der Konvektionsformen im horizontalen Kanal und im halbkreisförmigen Hohlraum bei isothermen Randbedingungen. Sie enthält sowohl vertikale als auch horizontale

Autor(en)	Jahr	$Nu = f(Ra, Pr)$	Pr	Ra	Geometrie B·L·H [cm]	Randbed. [Oben/Unten] [Seite]
Jahn, M.; Reineke, H.H	1974	$Nu_o=0,78 (Ra Pr)^{0,2}$ $Nu_u=2,14 (Ra Pr)^{0,1}$	Pr=7	$10^5 < Ra < 10^8$	Kanal	isoth./isoth. adiabat
Jahn, M.	1975	$Nu_o=0,345 Ra^{0,233}$ $Nu_u=1,389 Ra^{0,095}$	Pr=7	$4 \cdot 10^4 < Ra < 5 \cdot 10^{10}$	Kanal 14·14·(0,5-16)	isoth./isoth. -
Kikuchi, Y.; Kawasaki, T.; Shioyama, T.	1982	$Nu_o=0,309 Ra^{0,238}$	$6 < Pr < 7$	$4,6 \cdot 10^6 < Ra < 7 \cdot 10^9$	Kanal 20·20·(2,9-9,8)	isoth./adiabat adiabat
Kikuchi, Y.; Kawasaki, T.; Kawara, Z.	1986	-	$6 < Pr < 7$	$2,2 \cdot 10^8 < Ra < 6,9 \cdot 10^9$	Kanal 20·20·(2,9-9,6)	isoth./adiabat adiabat
Kulacki, F.A.; Goldstein, R.J.	1972	$Nu_o=0,329 Ra^{0,236}$ $Nu_u=1,428 Ra^{0,094}$	Pr=6	$4 \cdot 10^4 < Ra < 2,42 \cdot 10^7$	Kanal 25,4·25,4· (0,13-6,35)	isoth./isoth. -
Kulacki, F.A.; Emara, A.A.	1977	$Nu_o=0,338 Ra^{0,227}$	$2,75 < Pr < 6,86$	$3,72 \cdot 10^3 < Ra < 4,34 \cdot 10^{12}$	Kanal 25·25; 50·50	isoth./adiabat adiabat
Kulacki, F.A.; Nagle M.E.	1975	$Nu_o=0,258 Ra^{0,239}$	Pr=6,4	$3 \cdot 10^5 < Ra < 5 \cdot 10^9$	Kanal 50,8·50,8· (2,5-12,7)	isoth./adiabat -
Ralph, J.C.; Mc Greevy, R.; Peckover, R.S.	1976	$Nu_o=0,211 Ra^{0,238}$ $Nu_u=0,257 Ra^{0,175}$	$6 < Pr < 7$	$3,7 \cdot 10^8 < Ra < 1,08 \cdot 10^{12}$	Kanal Zylinder D=22	isoth./isoth. (adiabat) adiabat
Schwidorski, E.W.; Schwab, H.J.A.	1971	-	-	$8 \cdot 10^3 < Ra < 1,3 \cdot 10^5$	Kanal 29·29	isoth./adiabat -
Steinberner, U.; Reineke, H.H	1978	$Nu_{seite}=0,85 Ra^{0,91}$	$6 < Pr < 7$	$8,4 \cdot 10^{12} < Ra < 3,7 \cdot 10^{13}$	Kanal 80·3,5·80	isoth./isoth. isoth./isoth.
Tritton, D.J.; Zarraga, M.N.	1967	-	Pr=5,5	$1,1 \cdot 10^4 < Ra < 2,2 \cdot 10^5$	Kanal 29·29	isoth./adiabat -

**Tabelle 3.2:** Experimentelle Untersuchungen zu Fluidschichten mit innerer Wärmequelle.

Interferenzbilder und Temperaturprofile für Rayleigh-Zahlen bis  $5 \cdot 10^{10}$ . Des weiteren gibt er den lokalen Verlauf der Nußelt-Zahl entlang der oberen Wand an. Auch Jahn

findet keinen Rayleigh-Zahlenbereich, bei dem sich die Strömung laminar verhält. Vielmehr entsteht nach der reinen Konduktion sofort ein turbulenter Zustand.

Kulacki und Nagle (1975) geben in ihrer Arbeit ebenfalls diskrete Punkte mit Veränderungen im Wärmeübergang an, die sich jedoch von denen von Kulacki und Goldstein (1972) unterscheiden. Sie zeigen für verschiedene Kanalhöhen den Temperaturverlauf für einen bestimmten Punkt im Kanal über der Zeit.

Die Wärmeübergangsbeziehung, die Ralph et al. (1976) in ihrer Studie für isotherme Randbedingungen angeben, weicht stark von der von Jahn (1975) oder Kulacki und Goldstein (1972) ab. Erklärt wird dies mit den Eigenschaften der kühlenden Wände. In Versuchen stellen sie fest, daß sich, je nach Material und Dicke der oberen Wand, der Wärmeübergang ändert. Die großen Abweichungen zu anderen Experimenten lassen sich damit jedoch nicht erklären.

Kulacki und Emara (1977) geben in ihrer Arbeit eine Beziehung für die zeitliche Abhängigkeit der Konvektion an. In transienten Untersuchungen stellen sie fest, daß die Fourier-Zahl einer einfachen Abhängigkeit folgt. Sie läßt sich demnach in der Form

$$Fo = \text{konst} \cdot (\Delta Ra)^m \quad (3.2)$$

schreiben. Das heißt, daß die Strömung durch eine Änderung der Rayleigh-Zahl um  $\Delta Ra$  eine bestimmte, durch  $Fo$  gegebene Zeit braucht, um wieder quasistationär zu werden. Die Koeffizienten in der Gleichung sind durch Experimente zu bestimmen.

Steinberner und Reineke (1978) machen Untersuchungen an isothermen Seitenwänden für sehr hohe Rayleigh-Zahlen bis  $3,7 \cdot 10^{13}$ . Die vertikale Grenzschicht, die sich an den Seitenwänden ausbildet, geht dabei vom laminaren Zustand an der oberen Wand zum turbulenten an der unteren Wand über.

Kikuchi et al. (1982, 1986) kombinieren innere Wärmequelle und Beheizung von unten miteinander. Sie geben aber auch eine Wärmeübergangsbeziehung für den Fall reiner interner Wärmequelle und adiabatischer unterer Wand an. Es sind dies die ersten experimentellen Untersuchungen, die auch verschiedene Turbulenzdaten bereitstellen.

---

### 3.3 Numerische Untersuchungen

Bereits 1970 wurde von Thirlby (1970) die erste numerische Arbeit zur Konvektion mit innerer Wärmequelle und isotherm/adiabaten Randbedingungen veröffentlicht. Für die Lösung verwendet er Fourier-Reihen. Er benutzt schon ein dreidimensionales Rechengebiet mit 12 Maschen in jeder Richtung. Als Konvektionsform ergeben sich hexagonale Zellen mit Abwärtsbewegung im Zentrum. Weiterhin gibt er Temperaturprofile über der Kanalhöhe an.

Peckover und Hutchinson (1974) finden bei einer zweidimensionalen Rechnung und isothermen Randbedingungen ein, in schmalen Bereichen schnell absinkendes, und in einem breiten Bereich langsam aufsteigendes Fluid als Lösung. Sie schließen daher auf konvektive Rollen. Ihre seitlichen Randbedingungen waren jedoch nicht periodisch. Es ist deshalb zu vermuten, daß der Konvektion eine bestimmte Strömungsform und Wellenlänge aufgeprägt wurde.

Auch Jahn und Reineke (1974) verwenden bei ihren Berechnungen eine adiabate seitliche Wand mit Haftbedingung. Aufgrund ihres größeren Rechengebietes erkennen sie jedoch bereits das instationäre Verhalten der Strömung. Ihre berechneten Wärmeübergangsbeziehungen liegen ca. 20% unter den im Experiment ermittelten. Sie untersuchen ebenfalls die Konvektion im halbkreisförmigen Rechengebiet.

Tveitereid und Palm (1976) benutzen bei ihren Berechnungen mit adiabater unterer Wand ein Runge-Kutta Verfahren. Sie gehen dabei von  $Pr=\infty$  aus. Als Ergebnis erhalten sie hexagonale Zellen mit Abwärtsbewegung im Inneren, die bis mindestens  $15 \cdot Ra_c$  stabil sind. Bei weiteren Rechnungen mit  $Pr < 0,25$  finden sie Zellen mit Aufwärtsbewegung im Zentrum als stabile Strömungsform.

Emara und Kulacki (1980) rechnen zweidimensional bis zu Rayleigh-Zahlen von  $10^9$  mit einem Gitter von  $30 \cdot 30$  Maschen ohne Turbulenzmodell. Es ist daher kaum möglich, daß alle Skalen des Stromfeldes aufgelöst sind. Trotzdem erhalten sie sowohl für isotherme, als auch für isotherm/adiabate Randbedingungen recht gut mit den Experimenten übereinstimmende Wärmeübergangsbeziehungen. Sie bestätigen weiterhin das Fehlen eines laminaren Strömungszustandes. Bei Variation der Prandtl-Zahl bleibt die Konvektionsform bis auf Details unverändert. Es ergeben sich breite Bereiche, in denen das Fluid langsam aufsteigt, und schmale Bereiche, in denen es schnell absinkt.

Von Grötzbach (1981, 1982, 1987, 1989) werden mehrere Arbeiten zur intern beheizten Konvektion veröffentlicht. Als Erster berechnet er mittels direkter numerischer Simulation (DNS) die Konvektion im dreidimensionalen Rechengebiet. Das verwendete Gitter ist ausreichend fein, um Rayleigh-Zahlen bis  $Ra=4 \cdot 10^6$

---

rechnen zu können. Er benutzt periodische Randbedingungen an den Seiten, um einen unendlich ausgedehnten Kanal zu simulieren. Die Periodenlänge von 2,8 kann bei den späteren Untersuchungen (Grötzbach, 1989) durch leistungsfähigere Rechner auf 7,2 vergrößert werden, sodaß sowohl die großskaligen als auch die kleinskaligen Strukturen der Strömung erfaßt werden können. Es ergeben sich unregelmäßige zellförmige Strukturen mit langsamer Aufwärtsbewegung im Inneren und schneller Abwärtsbewegung am Rand. Grötzbach (1981) gibt außerdem eine Mindestanforderung an die Gitterfeinheit für bestimmte Rayleigh-Zahlen an. Zur Verifikation werden bezüglich der Strömungsmechanismen die experimentellen Ergebnisse von Jahn (1975) herangezogen, und bezüglich statistischer Größen alle für den Fall isothermer Randbedingungen an beiden Wänden verfügbaren Daten, das sind Nußelt-Zahlen und Temperaturprofile. Aus den Simulationsergebnissen werden für diese Konvektionsart die ersten umfangreichen Analysen von Turbulenzdaten, speziell von Transportgleichungsmodellen, durchgeführt. Diese finden bis heute kein experimentelles Gegenstück.

Farouk (1988) benutzt bei seinen zweidimensionalen Rechnungen mit isotherm/adiabaten Randbedingungen das  $k$ - $\epsilon$ -Modell zur Simulation der turbulenten Strömung und kann dadurch mit einem recht groben Gitter von 71·41 Maschen bis zu  $Ra=10^{10}$  rechnen. Für einige Rayleigh-Zahlen gibt er Nußelt-Zahlen an der oberen Wand an, die gut mit den experimentellen Werten übereinstimmen.

Fusegi et al. (1992) untersuchen den Wärmeübergang an den Seitenwänden bei adiabater oberer und unterer Wand. Insbesondere vergleichen sie verschiedene B/H-Verhältnisse.

Seiter (1995) führt erstmals eine Grobstruktursimulation (engl.: large-eddy simulation, LES) der Konvektion in einer horizontalen Fluidschicht mit interner Wärmequelle durch. Er betrachtet bei isotherm/isothermen Randbedingungen ein Fluid mit  $Pr = 7$  und führt für  $Ra = 1,5 \cdot 10^{10}$  zwei Simulationen durch. Beide unterscheiden sich in der Periodenlänge (4,5 bzw. 6) und den Anfangswerten für das mittlere Temperaturprofil. Seiter (1995) zeigt anhand von Zweipunktkorrelationen, daß die kleinere Periodenlänge voll ausreichend ist. Trotz sehr unterschiedlicher Anfangswerte erreichen beide Simulationen einen im statistischen Sinne äquivalenten Zustand. Die Nußelt-Zahl an oberer bzw. unterer Wand unterscheiden sich in beiden Rechnungen nur minimal. Während die Nußelt-Zahl an der oberen Wand sehr gut mit dem experimentellen Ergebnis von Jahn (1975) übereinstimmt, liegt die an der unteren Wand ca. 50 % über der von Jahn, ohne daß hierfür eine voll befriedigende Erklärung gegeben werden kann.

---

Dinh und Nourgaliev (1996, 1997) und Nourgaliev und Dinh (1997) benutzen sowohl ein modifiziertes  $k$ - $\varepsilon$ -Modell, bei dem die turbulente Prandtl-Zahl lokal definiert wird, als auch die Methoden der direkten numerischen Simulation zur Simulation einer Konvektion mit adiabater unterer Wand. Mit Hilfe des modifizierten Modells können sie die Wärmeübergangsbeziehung für hohe Rayleigh-Zahlen gegenüber dem Standard- $k$ - $\varepsilon$ -Modell verbessern. Bei der DNS verwenden sie ein Gitter von  $35^2 \cdot 74$  Maschen (Periodenlänge  $X_{1,2}=1$ ), was sich bei Rayleigh-Zahlen bis  $10^{13}$  als zu grob herausstellt. Für die Auswertung ziehen sie daher nur Ergebnisse bis  $Ra=10^9$  heran. Auch für diese Rayleigh-Zahlen ist es jedoch fraglich, ob bei dieser Kanalgröße in horizontaler Richtung alle Skalen, insbesondere die großen, aufgelöst worden sind. Die Nußelt-Zahlen stimmen trotzdem gut mit den experimentellen Werten überein. Weiterhin untersuchen sie die Abhängigkeit der Konvektion von der Prandtl-Zahl des Fluids. Sie geben eine ausführliche Analyse verschiedener Turbulenzgrößen, z.B. der kinetischen Turbulenzenergie, des turbulenten Wärmestromes und der Parameter des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells, an.

### 3.4 Bewertung der existierenden Literatur

Betrachtet man die bisherigen Ergebnisse zur Konvektion mit innerer Wärmequelle, so zeigt sich, daß die Strömungsformen und Strukturen wie auch die Abnahme der Zellgröße mit zunehmender Rayleigh-Zahl inzwischen gut untersucht sind und als gesichert angesehen werden können. Weitergehende Details des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes sind jedoch bis heute nur für kleine Rayleigh-Zahlen in einfachen Geometrien bekannt. Besonders für hohe Rayleigh-Zahlen und komplexe Geometrien besteht ein deutliches Defizit, da Experimente die gewünschten Daten nur schwer zur Verfügung stellen können und numerische Studien aufgrund der heutigen Rechnerkapazitäten nicht in der Lage sind, sehr hohe Rayleigh-Zahlen zu erreichen.

Zur Modellierung turbulenter Strömungen mit Hilfe des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells sind verschiedene Annahmen und Modellkoeffizienten notwendig. Diese Koeffizienten müssen dem jeweiligen physikalischen Anwendungsfall angepaßt und validiert werden. Für die Konvektion mit interner Wärmequelle sind hierfür nur unzureichende Daten verfügbar. Sicher scheint jedoch, daß das Standard  $k$ - $\varepsilon$ -Modell zur Beschreibung dieser

---

Autor(en)	Jahr	$Nu = f(Ra, Pr)$	Pr	Ra	Geometrie	Randbed. [Oben/Unten] [Seite]	Bemerkungen
Dinh, T.H.; Nourgaliev, R.R.	1996	-	$3 < Pr < 7$	$10^7 < Ra < 10^9$ ( $10^{13}$ )	3-D Kanal Netz: $35^2 \cdot 74$	isoth./adiabat periodisch	DNS
Dinh, T.H.; Nourgaliev, R.R.	1997	-	Pr=1	$10^6 < Ra < 10^{15}$	2-D Halbkreis Netz: $61^2$	isoth./isoth. isoth.	k-ε-Modell
Emara, A.A.; Kulacki, F.A.	1980	$Nu_o = 0,385 Ra^{0,23}$ $Nu_u = 1,131 Ra^{0,119}$ bei Pr=6,5	$0,05 < Pr < 20$	$10^5 < Ra < 10^9$	2-D Rechteck Netz: $30^2$	isoth./isoth. (adiabat) adiabat	Nußelt-Zahlen bei isoth. unterer Wand
Farouk, B.	1988	Nur Diagramm	Pr=6,5	$2 \cdot 10^6 < Ra < 2 \cdot 10^{10}$	2-D Rechteck Netz: 71·41	isoth./adiabat adiabat	k-ε-Modell
Fusegi, T.; Hyun, J.M.; Kuwahara, K.	1992	-	Pr=5,85	$4 \cdot 10^7 < Ra < 5 \cdot 10^9$	2-D Rechteck Netz: 112· (62-242)	adiabat/adiabat isoth.	Auch mit externer Beheizung
Grötzbach, G.	1981	-	Pr=6	$Ra = 4 \cdot 10^6$	3-D Kanal Netz: $64^2 \cdot 32$	isoth./isoth. periodisch	DNS
Grötzbach, G.	1982	-	Pr=6	$3 \cdot 10^4 < Ra < 4 \cdot 10^6$	3-D Kanal Netz: $64^2 \cdot 32$	isoth./isoth. periodisch	DNS
Grötzbach, G.	1987	-	Pr=6	$3 \cdot 10^4 < Ra < 4 \cdot 10^6$	3-D Kanal Netz: $64^2 \cdot 32$	isoth./isoth. periodisch	DNS
Grötzbach, G.	1989	-	Pr=6	$Ra = 4 \cdot 10^6$	3-D Kanal Netz: $180^2 \cdot 32$	isoth./isoth. periodisch	DNS
Jahn, M.; Reineke, H.H.	1974	$Nu_o = 0,78 (Ra Pr)^{0,2}$ $Nu_u = 2,14 (Ra Pr)^{0,1}$	$1 < Pr < 80$	$10^5 < Ra < 10^8$	2-D Rechteck, Halbkreis Netz: 31·61	isoth./isoth. adiabat	-
Nourgaliev, R.R.; Dinh, T.N.	1997	-	$0,2 < Pr < 7$	$10^6 < Ra < 10^{12}$	2-D Halbkreis,- Kugel, Quadrat Netz: $70^2$	isoth./isoth. isoth. (adiabat)	-
Peckover, R.S.; Hutchinson, I.H.	1974	-	Pr=8	$1,7 \cdot 10^4 < Ra < 1,36 \cdot 10^6$ Ra=Def.	2-D Rechteck Netz:(24-48)· (24-48)	isoth./isoth. adiabat	-
Seiter	1995	-	Pr=7	$Ra = 1,5 \cdot 10^{10}$	3-D Kanal Netz: $40^2 \cdot 18$	isoth./isoth. periodisch	LES
Thirby, R.	1970	-	$1 < Pr < 6,8$	$3 \cdot 10^3 < Ra < 5,2 \cdot 10^5$	2-D Rechteck 3-D Kanal Netz: $40 \cdot 33, 12^3$	isoth./adiabat	-
Tveitereid, M.; Palm, E.	1976	$Nu_o = 0,64$ $\log(Ra/Ra_c) + 1$ für Pr=∞	$0,02 < Pr < \infty$	$2,7 \cdot 10^3 < Ra < 8,3 \cdot 10^4$	-	isoth./adiabat	Mit Runge- Kutta

**Tabelle 3.3:** Numerische Untersuchungen zu Fluidschichten mit innerer Wärmequelle.

Konvektionsform nicht geeignet ist. Zur Entwicklung eines neuen Modells müssen daher erst die grundlegenden Eigenschaften der turbulenten Auftriebsströmung mit interner Wärmequelle untersucht werden und damit die existierenden Modelle modifiziert werden. Arbeiten hierzu gibt es bisher, bis auf die Angabe von turbulenten Wärmeströmen, nur von Grötzbach (1982, 1987) für den Kanal mit isothermer oberer und unterer Wand und von Dinh und Nourgaliev (1996) für die Fluidschicht mit adiabater unterer Wand.

---



## 4 Das Computerprogramm TURBIT

TURBIT (**TURB**ulenter **Impuls Transport**) wurde von 1971 bis 1973 von Schumann (1973) am Institut für Reaktorsicherheit des Kernforschungszentrums Karlsruhe entwickelt und später von Grötzbach (1977), Wörner (1994) und Seiter (1995) erweitert. Es basiert auf den dimensionslosen, zeitabhängigen, dreidimensionalen und inkompressiblen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, die mittels eines Finite Volumen Verfahrens gelöst werden.

### 4.1 Allgemeines

#### 4.1.1 Dimensionslose Grundgleichungen in TURBIT

Die grundlegenden Differentialgleichungen werden in TURBIT dimensionslos gelöst. Dies hat den Vorteil, daß die sich ergebenden Lösungen auf eine ganze Klasse physikalisch ähnlicher Probleme angewendet werden können. Außerdem erhalten alle Terme annähernd vergleichbare Größenordnung, wodurch numerische Rundungsfehler minimiert werden.

Zur Normierung werden in TURBIT folgende Größen verwendet:

- Länge:  $\hat{x}_i = \frac{x_i}{D}$
- Geschwindigkeit:  $\hat{u}_i = \frac{u_i}{u_0}$  mit  $u_0 = (g\beta\Delta T_{\max}D)^{1/2}$
- Zeit:  $\hat{t} = \frac{tu_0}{D}$
- Druck:  $\hat{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}$
- Temperatur:  $\hat{T} = \frac{T - T_{\text{Wand}}}{T_{\max} - T_{\text{Wand}}}$

Setzt man diese Ansätze in die Differentialgleichungen (2.6) bis (2.8) ein und läßt  $\hat{\phantom{x}}$  zur Kennzeichnung der dimensionslosen Größen weg, ergeben sich als Grundgleichungen in TURBIT die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zu

$$\nabla \bar{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla p - \delta_{i3}(T - T_{\text{ref}}) + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \nabla^2 \bar{u}, \quad (4.2)$$

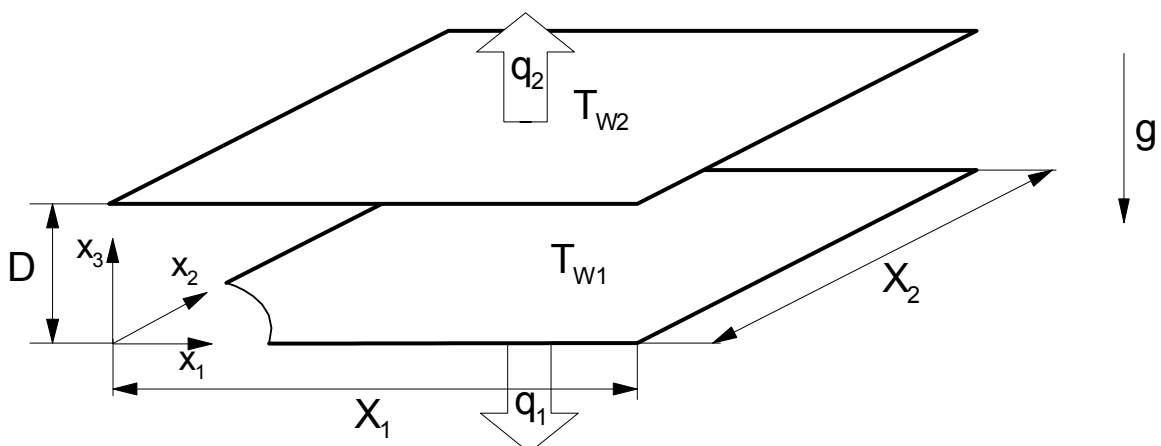
$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \nabla^2 T + \frac{Da}{Pr \sqrt{Gr}} \quad (4.3)$$

### 4.1.2 Randbedingungen

Als Geometrien können ebene Kanäle (siehe Abb. 4.1) oder Ringspalte verwendet werden, d.h. die Erhaltungsgleichungen werden entweder in zylindrischen oder kartesischen Koordinaten gelöst. Bei ebenen Kanälen können in beiden horizontalen Richtungen periodische Randbedingungen vorgegeben werden, d.h. mit  $\phi$  als beliebiger Variable und  $X_i$  als Periodenlänge gilt

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1 + m \cdot X_1, x_2 + n \cdot X_2, x_3) \quad \text{mit } m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

was der Simulation eines unendlich ausgedehnten Kanals nahekommt. In der vertikalen (bei Ringspalten radialen) Richtung können als Randbedingung konstante Wandtemperaturen, isolierte Wände oder Kombinationen aus beiden verwendet werden.



**Abb. 4.1:** Geometrie der horizontalen Fluidschicht in TURBIT.

---

Die Periodenlängen  $X_i$  ( $i=1,2$ ) sind entscheidend für die Größe des berechneten Strömungsgebiets und damit für die physikalisch korrekte Simulation der großen Strukturen. Um große Strukturen nicht zu behindern und um damit der Konvektion keine bestimmte Strömungsform aufzuprägen, müssen sie groß genug gewählt werden. Dem Ideal beliebig großer Periodenlängen steht jedoch die begrenzte Rechnerkapazität entgegen. Denn das Gitter muß auch ausreichend fein sein, um im ganzen Strömungsgebiet auch die kleinsten Strukturen zuverlässig zu erfassen. Man muß daher einen Kompromiß zwischen akzeptabler Rechenzeit und Einfluß der Periodenlänge auf die Simulation eingehen. Mit steigender Rayleigh-Zahl nimmt bei der intern beheizten Konvektion die Größe der Konvektionszellen ab, sodaß die Periodenlänge reduziert werden kann. Dadurch lassen sich die durch kleiner werdende Maschenweiten anwachsenden Maschenzahlen zum Teil dadurch kompensieren, daß das Rechengebiet entsprechend verkleinert wird. Damit können auch höhere Rayleigh-Zahlen simuliert werden.

#### 4.1.3 Simulationsmethoden

Zur Simulation der turbulenten Strömung stehen in TURBIT zwei Verfahren zur Wahl:

- **Direkte numerische Simulation (DNS)**

Hierbei wird ein Gitter verwendet, das fein genug ist, auch die kleinskaligen Wirbel aufzulösen. Dadurch ist keine Modellierung dieser Wirbel notwendig und die Erhaltungsgleichungen beschreiben das Problem vollständig.

- **Grobstruktursimulation (Large-Eddy Simulation, LES)**

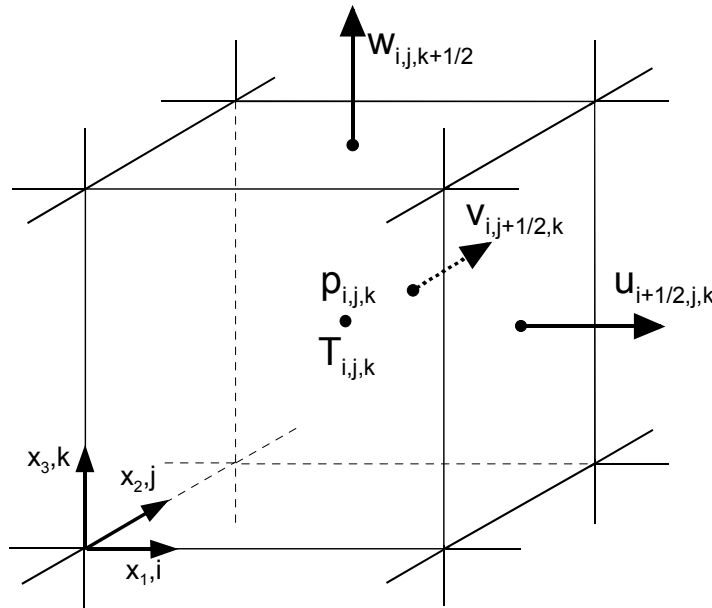
Ist das Gitter nicht fein genug, um auch kleinste Wirbel aufzulösen, muß deren Einfluß durch einen Modellansatz simuliert werden. Durch das Aufspalten der nichtlinearen Terme in einen Grobstruktur- und einen Feinstrukturanteil ergeben sich in den Erhaltungsgleichungen Zusatzterme, die über das sogenannte Feinstrukturmodell empirisch modelliert werden müssen.

Für feiner werdende Gitter geht die Grobstruktursimulation in die direkte numerische Simulation über. In dieser Arbeit werden ausschließlich direkte numerische Simulationen durchgeführt werden.

---

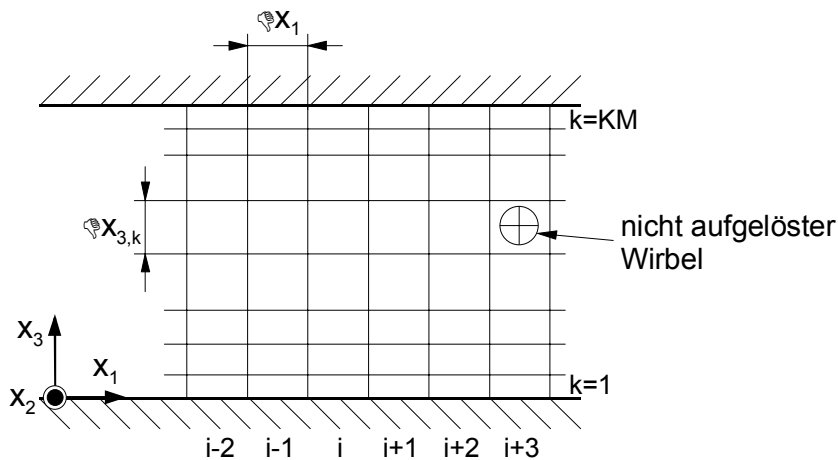
### 4.1.4 Diskretisierung

Um die Differentialgleichungen einer numerischen Berechnung zugänglich zu machen, muß das Rechengebiet mit Hilfe eines Maschennetzes diskretisiert und die Differentialgleichungen in Differenzengleichungen überführt werden. Beim Finite Volumen Verfahren werden die Strömungsgrößen dazu formal über ein Zellvolumen integriert.



**Abb. 4.2:** Versetztes Maschennetz für  $u_i$ ,  $p$  und  $T$  in TURBIT.

TURBIT verwendet bei der räumlichen Diskretisierung ein versetztes Maschennetz, Abb. 4.2. Dabei werden die skalaren Größen Temperatur und Druck in den Ma-



**Abb. 4.3:** Diskretisierung des Rechengebiets in TURBIT.

schenmittelpunkten und die Geschwindigkeiten um eine halbe Maschenweite - versetzt auf den Rändern der Maschen definiert. Dies ist physikalisch anschaulich, da die Geschwindigkeiten durch eine Druckdifferenz zwischen zwei benachbarten Zellen zustande kommen.

In  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung werden bei TURBIT äquidistante Maschenweiten vorgegeben. In  $x_3$ -Richtung läßt sich eine nicht-äquidistante Verteilung angeben, um die thermische und viskose Grenzschicht an den Wänden besser auflösen zu können, Abb. 4.3. Die Maschenweiten  $\Delta x_i$  ( $i=1,2,3$ ) sind maßgebend für das Auflösen der kleinsten Strukturen. Dies sind kleine Wirbel, die die kinetische Energie in Wärme dissipieren. Um eine direkte numerische Simulation durchzuführen, muß in allen Bereichen des Rechengebiets das Gitter fein genug sein, um diese Wirbel zu erfassen. Als Mindestanforderung für die Maschenweite gibt Grötzbach (1981, 1987) für den Fall intern beheizter Konvektion

$$\Delta x_{i,\max} = 3,45 \cdot \left( \frac{a^3}{\varepsilon} \right)^{0,25} \quad (4.5)$$

mit

$$\varepsilon \approx (\text{Nu}_o - \text{Nu}_u) \frac{\text{Ra}}{\text{Re}^3 \text{Pr}^2 \text{Da}} \quad \text{und} \quad \text{Re} = \frac{u_0 D}{\nu} \quad (4.6)$$

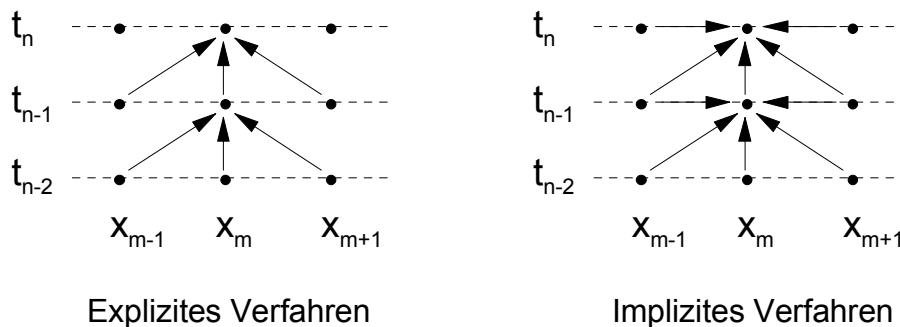
an. Die maximale Maschenweite im Rechengebiet darf diesen Wert bei einer direkten numerischen Simulation nicht überschreiten.

Maßgebend für die nötige Feinheit des Gitters ist die Rayleigh-Zahl. Mit steigender Rayleigh-Zahl wird die Strömung turbulenter und es treten immer kleinere Wirbel auf. Um eine DNS bei hohen Rayleigh-Zahlen durchführen zu können, werden also extrem feine und damit auch sehr viele Maschen benötigt, was bei den momentanen Rechnerleistungen auch die Beschränkung der Simulation nach oben darstellt.

Gleichung (4.5) gibt nur einen Anhaltswert. Um beurteilen zu können, ob die Diskretisierung des Rechengebiets tatsächlich fein genug gewählt wurde, bieten sich räumliche Spektren, z.B. der Energie oder der Geschwindigkeitsfluktuationen, an (Grötzbach, 1981). Diese müssen bei ausreichender Gitterfeinheit bei hohen Frequenzen mit  $k^{-7}$  abfallen, wobei  $k$  die Wellenzahl ist. Bei zu grobem Gitter wird die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie unterbewertet, d.h. die Dämpfung der Konvektion durch viskose Kräfte fällt zu gering aus. Es werden höhere Geschwindigkeiten erreicht, was sich in zu hohen Nußelt-Zahlen ausdrückt.

### 4.1.5 Numerische Integration

Bei der numerischen Zeitintegration kann man zwischen expliziten und impliziten Verfahren unterscheiden. Erstere berechnen die Werte einer neuen Zeitebene  $t_n$  aus den bekannten Werten der zurückliegenden Zeitebenen  $t_{n-1}$  und  $t_{n-2}$ , während bei impliziten Verfahren auch benachbarte Werte der gleichen Zeitebene  $t_n$  in die Berechnung mit eingehen, Abb. 4.4. Bei den impliziten Verfahren muß daher für jeden Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden, was einen höheren numerischen Aufwand darstellt. Implizite Verfahren sind daher auch schwieriger zu programmieren. Als Nachteil der expliziten Verfahren lassen sich jedoch deutlich strengere Stabilitätskriterien angeben, was unter Umständen zu sehr kleinen Zeitschrittweiten führen kann. In einigen Fällen kann der zusätzliche numerische Aufwand des impliziten Verfahrens durch eine wesentlich größere Zeitschrittweite überkompensiert werden. Allerdings muß bei einer direkten numerischen Simulation die Zeitschrittweite stets ausreichend klein gewählt werden, um eine Zeitfilterung hochfrequenter konvektiver Transportvorgänge zu vermeiden.



**Abb. 4.4:** Vorgehensweise bei explizitem und implizitem Integrationsverfahren.

In TURBIT ist zur Lösung der Impulsgleichung ein explizites Euler-Leapfrog-Verfahren implementiert, das bezüglich der Konvektionsterme von zweiter Ordnung genau ist. Dabei wird ein Euler-Schritt von  $N-2$  (im allgemeinen  $N=40$ ) Leapfrog-Schritten gefolgt, bei dem die Werte zweier zurückliegender Zeitebenen zur Berechnung der neuen Werte herangezogen werden. Abschließend folgt ein gemischter Euler-Leapfrog-Schritt. Zur Lösung der Energiegleichung stehen für den Diffusionsterm sowohl implizite als auch explizite Verfahren zur Verfügung. Einen wesentlichen Zeitgewinn bei der Berechnung bringen die impliziten Verfahren jedoch nur bei sehr kleinen Prandtl-Zahlen (Wörner, 1994). Bei der in dieser Arbeit angenommenen

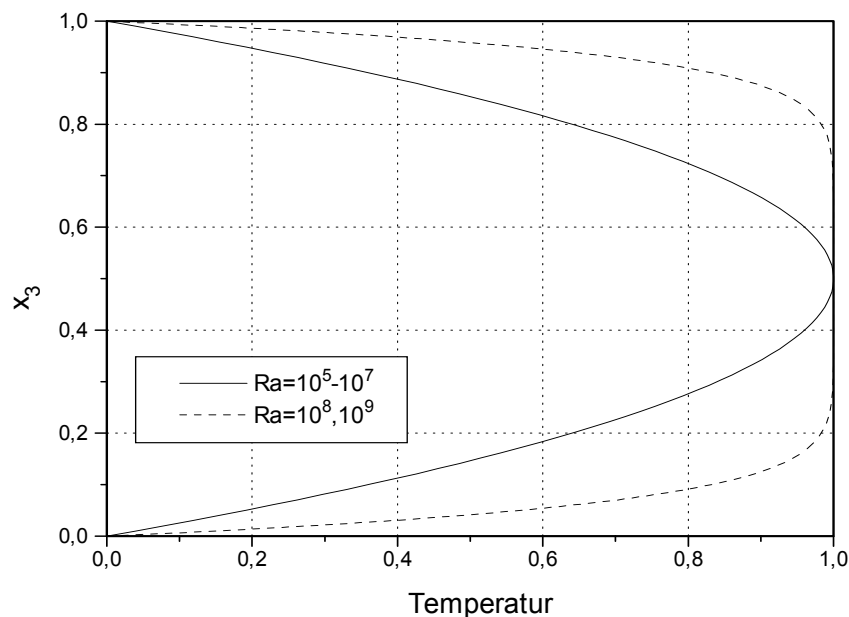
Prandtl-Zahl von sieben ergibt sich kein Vorteil für die impliziten Verfahren, weshalb die Energiegleichung ebenfalls explizit gelöst wurde.

## 4.2 Vorgehensweise bei den numerischen Simulationen

### 4.2.1 Preprocessing

Um eine Simulation starten zu können, müssen zunächst die Geometrie, die Rand- und Anfangsbedingungen und die Stoffdaten festgelegt werden. Dafür gibt es in TURBIT den sogenannten Initialisierungslauf. Im Zuge der Umstellung von MVS auf der IBM 9021-640 und der VP400 auf UNIX auf der Cray J916 oder der Cray Y/MP-EL 98 im IRS wurden zur Ablaufsteuerung der Jobs neue Shellskripte entwickelt.

Als Anfangsbedingung für die Geschwindigkeiten wurden alle Komponenten gleich Null gesetzt. Das Ausgangsprofil für die mittlere Temperatur sollte bereits möglichst nahe an dem nachher sich tatsächlich einstellenden Profil liegen, um die Simulationszeit bis zum quasistationären Zustand kurz zu halten. Es wurde daher bei kleinen Rayleigh-Zahlen das parabelförmige Wärmeleitungsprofil, bei großen Rayleigh-Zahlen ein Polynom achten Grades als mittleres Temperaturprofil vorgegeben (siehe Abb 4.5), denen statistisch verteilte Fluktuationen überlagert wurden.

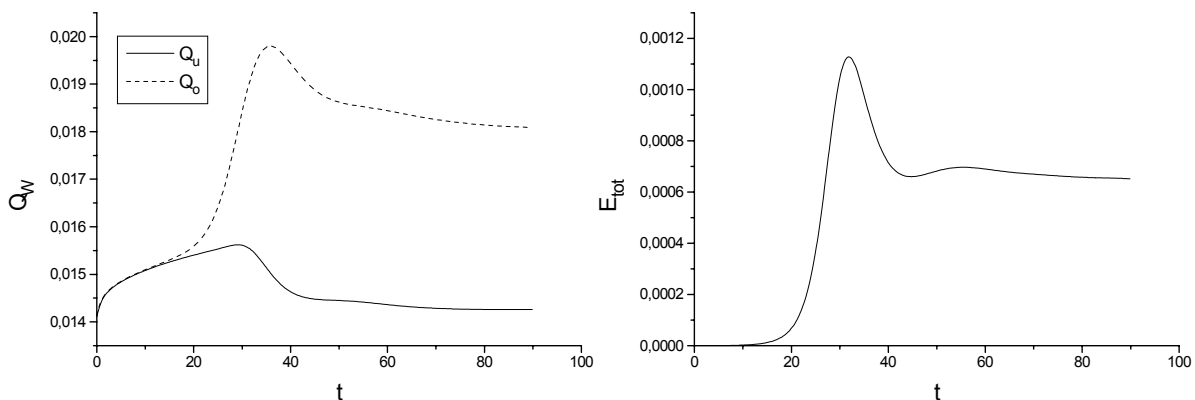


**Abb. 4.5:** Anfangsbedingungen für das mittlere Temperaturprofil.

Für kleine Rayleigh-Zahlen wurde der Initialisierungslauf auf der IBM9021-640 und die Integrationsläufe auf der CRAY J916 bzw. der CRAY Y/MP-EL98 durchgeführt. Später wurde auf letzteren Maschinen auch der Initialisierungslauf gerechnet. Um die binären Daten zwischen beiden Rechnertypen austauschen zu können, wurden die Restart-Files auf den Crays im IBM-kompatiblen Format geschrieben.

#### 4.2.2 Durchführung der Integration

Das vom Initialisierungslauf bereitgestellte Ausgangs-Strömungsfeld kann nun zeitlich integriert werden. Hierfür wird der Integrationslauf verwendet. Als Ergebnis erhält man einen Restart-File, dessen Daten dann in aufeinanderfolgenden Integrationsläufen weiterintegriert werden. Dies erfolgt so lange bis die Strömung im statistischen Sinne eingelaufen ist und genügend Zeitpunkte für eine Auswertung zur Verfügung stehen. Als Kriterium für eine statistisch eingelaufene Konvektion dienen charakteristische, integrale Daten, z.B. Kurzzeit- und Flächenmittelwerte der Wandwärmeströme oder der kinetischen Energie.



**Abb. 4.6:** Zeitliche Entwicklung der Wandwärmeströme und der kinetischen Energie für  $Ra=10^5$ ,  $X_{1,2}=10$  (Fall IN1E5E).

Streben diese Größen im zeitlichen Verlauf einem zeitunabhängigen Mittelwert zu, so ist die Simulation im statistischen Mittel stationär und die Integration kann abgebrochen werden. Das Geschwindigkeitsfeld bildet sich, ausgehend vom Ruhezustand erst langsam aus, was zu einem starken Anstieg der kinetischen Energie und des Wandwärmestroms an der oberen Wand führt. Nach einem Überschießen, bei  $t=35$  in Abb. 4.6, entsteht, statistisch gesehen, ein stationärer Strömungszustand.



---

Als weiteres Kriterium für eine eingelaufene Strömung läßt sich bei der Konvektion mit innerer Wärmequelle die Summe der Nußelt-Zahlen und die Damköhler-Zahl verwenden. Sie müssen im statistisch stationären Fall identisch sein, da die über die Wände abgeführte Wärmemenge gleich der im Fluid erzeugten sein muß. Es stellt sich ein Gleichgewicht in der Energiebilanz des Rechengebiets ein.

Da bei hohen Rayleigh-Zahlen ein sehr feines Gitter mit einer entsprechend großen Maschenanzahl benötigt wird, wird die Rechenzeit bis zum Überschreiten der Transiente in diesem Fall sehr lang. Um diesen Vorgang zu beschleunigen, kann mit Hilfe des sogenannten Netzmodifikationslaufs auf einem groben Maschennetz losgerechnet und später das Stromfeld schrittweise über mehrere immer feinere Gitter auf das endgültige Gitter interpoliert werden. Nach einem kurzen Übergang wird dann schnell ein quasistationärer Zustand erreicht, wodurch sich die benötigte Rechenzeit deutlich verkürzt.

Die Rechenzeit pro Lauf ist auf den CRAY-Maschinen im Nachtmodus auf 12, im Wochenendmodus auf 24 CPU-Stunden beschränkt. Da diese Computer jedoch vier bzw. 16 Prozessoren besitzen, ist die tatsächlich verstrichene Zeit durch paralleles Arbeiten ca. um den Faktor drei kleiner. Es lassen sich daher, mit Hilfe von Job-Ketten, bei denen der folgende Job im Shell-Script aufgerufen wird, pro Nacht drei bis vier 12 h-Läufe rechnen.

### 4.2.3 Postprocessing

Für das Postprocessing stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung:

#### a) Phänomenologische Analyse der Konvektion

Mit Hilfe des Auswertelaufs lassen sich mit TURBIT Konturlinien- und Vektorplots für beliebige Schnittebenen des Stromfeldes erstellen. Der Auswertelauf kann als Output zusätzlich einen File erzeugen, der mit Hilfe eines Konvertierungsprogramms in einen AVS-File umgewandelt werden kann. Dadurch stehen einem alle Möglichkeiten des mächtigen Grafikprogramms AVS zur Verfügung, bis hin zur dynamischen Darstellung von Ergebnissen in Filmen. Die im Anhang B dargestellten Bilder wurden mit AVS erzeugt.

#### b) Statistische Analyse der Konvektion

Mit dem Auswertelauf können die Simulationsergebnisse statistisch ausgewertet und in Form von Profilplots dargestellt und ausgedruckt werden. Dabei wird die

---

auszuwertende Größe  $\Phi$  zunächst über eine  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und anschließend über  $N_t$  Zeitpunkte nach der Vorschrift

$$\bar{\Phi}(k) = \frac{1}{N_t \cdot IM \cdot JM} \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{IM} \sum_{j=1}^{JM} \Phi(i, j, k, t) \quad (4.7)$$

gemittelt. Dieses Mittelungsverfahren ist zulässig, da die  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtungen beim vorliegenden Problem im statistischen Sinne homogen sind und die für die Analyse verwendeten Stützstellen in der Zeit einen großen Abstand haben. Man kommt daher mit relativ wenigen Zeitpunkten zu guten statistischen Daten. Führt man diese Mittelung für  $1 \leq k \leq KM$  aus, entstehen also vertikale Profile der Form  $\bar{\Phi}(k) = f(x_3)$ .

Für die Auswertung von eindimensionalen Energiespektren wird die entsprechende Größe in TURBIT für festes  $x_2$  und  $x_3$  als ein in  $x_1$ -Richtung räumlich periodisches Signal aufgefaßt. Die Auswertung für eine komplette Ebene  $x_3 = \text{konst.}$  führt damit auf insgesamt  $JM$  von der Wellenzahl  $k_1$  abhängige Spektren. Das Spektrum für die  $k$ -Ebene wird dann durch Mittelung über diese  $JM$  Spektren ermittelt. Zusätzlich erfolgt eine weitere Mitteilung über die auf diese Weise für unterschiedliche Zeitpunkte erhaltenen Spektren.

### 4.3 Automatische Maschennetzgenerierung

#### 4.3.1 Mathematisches Modell

Bisher wurde die vertikale Verteilung der  $x_3$ -Maschenweiten in TURBIT unter Berücksichtigung der physikalischen Anforderungen intuitiv festgelegt. Janßen (1995) zeigt mit Hilfe von Testfunktionen, daß die dabei unter Umständen gemachten großen Sprünge in den Maschenweiten zu Ungenauigkeiten bei der Berechnung von Ableitungen führen können. Bei einer feineren Abstufung der Maschenweiten werden die Sprünge und damit der numerische Fehler kleiner. TURBIT wurde daher um eine Routine erweitert, die es ermöglicht, ein zur Kanalmitte symmetrisches nicht-äquidistantes Maschennetz automatisch zu generieren.

Im Gegensatz zur Rayleigh-Benard-Konvektion ergeben sich bei Konvektion mit innerer Wärmequelle asymmetrische Temperaturprofile über der Kanalhöhe. Die Temperaturschicht ist an der oberen Wand dünner als an der unteren Wand. Um beide Grenzschichten optimal aufzulösen, ist daher ein in  $x_3$ -Richtung asymmetrisches Maschennetz sinnvoll. Es wurde ein Unterprogramm entwickelt, das die asymmetrische Netzgenerierung unter Berücksichtigung der an beiden Wänden zu erwartenden Nußelt-Zahlen automatisch vornimmt.

Agrawal und Peckover (1980) schlagen in diesem Zusammenhang eine Transformation der vertikalen Koordinate  $x$  in  $\xi$  vor und empfehlen

$$\xi = c \left( \frac{\tanh(m_1(1+x))}{\tanh(2m_1)} - \frac{\tanh(m_2(1-x))}{\tanh(2m_2)} \right) + (1-c)x \quad (4.8)$$

mit  $-1 < x < 1$ ,  $m_1, m_2 > 0$  und  $0 \leq c \leq 1$

Die Konstanten  $m_1$  und  $m_2$  sind verantwortlich für die Verfeinerung des Gitters an den Wänden. Für  $m_1, m_2 > 1$  ergibt sich an den Wänden ein feineres Gitter als im Kanalinneren. Der Parameter  $c$  sollte je nach Wichtigkeit der Kernströmung bestimmt werden. Für  $c=0$  ergibt sich ein äquidistantes Maschennetz, das für größer werdendes  $c$  auf Kosten der Kernmaschenweiten an den Wänden feiner wird. Als Bestimmungsgleichung für  $m_1$  und  $m_2$  geben Agrawal und Peckover (1980)

$$m_i \approx \frac{1}{\delta_i} \tanh^{-1} \left( \frac{C_m \cdot n_i}{c \cdot KM} \right) \quad (i=1,2) \quad (4.9)$$

an, wobei  $n_i$  die Anzahl der in der jeweiligen Grenzschicht liegenden Maschen,  $\delta_i$  die Grenzschichtdicke,  $KM$  die Anzahl der Maschen in  $x_3$ -Richtung und  $C_m$  ein noch festzulegender Koeffizient ist. Für  $C_m$  empfehlen sie den Wert zwei. In den Simulationen dieser Arbeit hat sich jedoch  $C_m=1,3$  als günstiger herausgestellt. Der Wert von  $\delta_i$  ergibt sich aus folgender Überlegung: Bei  $Pr > 1$  ist die thermische Grenzschicht dünner als die viskose. Ihre Dicke ist damit für die Wahl der Maschenweite an der Wand maßgebend. Die Dicke der thermischen Grenzschicht kann abgeschätzt werden zu

$$\delta_{th} = \frac{1}{Nu} \quad (4.10)$$

Für Simulationen mit vorgegebener Rayleigh- und Prandtl-Zahl kann  $Nu$  aus empirisch ermittelten Korrelationen  $Nu=f(Ra,Pr)$  bestimmt und  $\delta_{th}$  mit (4.10) abgeschätzt werden. Damit liegen alle Parameter zur Berechnung des Maschennetzes vor.

Mit Gleichung (4.8) können optimale Gitter selbst für stark unterschiedliche Grenzschichtdicken bestimmt werden.

### 4.3.2 Implementierung in TURBIT

In TURBIT werden die Maschenweiten für  $k=1$  bis  $k=KM$  benötigt. Um Gleichung (4.8) verwenden zu können, muß sie für das Koordinatensystem von TURBIT umgestellt werden. Mit der Diskretisierung

$$\xi_k = \frac{2k}{KM} - 1 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

ergibt sich für die Koordinate  $x_k$  der  $k$ -ten Masche die Gleichung

$$\frac{2k}{KM} - 1 = c \left( \frac{\tanh(m_1(1+x_k))}{\tanh(2m_1)} - \frac{\tanh(m_2(1-x_k))}{\tanh(2m_2)} \right) + (1-c)x_k \quad (4.12)$$

Diese Gleichung läßt sich jedoch nicht analytisch nach  $x_k$  auflösen. Zur Lösung wurde als Iterationsverfahren das Newton-Verfahren (Tangentenverfahren) verwendet. Die Berechnungsvorschrift lautet

$$x_k^{n+1} = x_k^n - f(x_k^n) \left( \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k=x_k^n} \right)^{-1} \quad (4.13)$$

Die Funktion konvergiert jedoch sehr schlecht, sodaß für manche Werte von  $m_1, m_2$  und  $c$  keine Lösung möglich ist. In der Praxis ergibt sich für diese Werte jedoch kein physikalisch sinnvolles Gitter, weshalb dies keine Einschränkung der Anwendbarkeit der Formel darstellt.

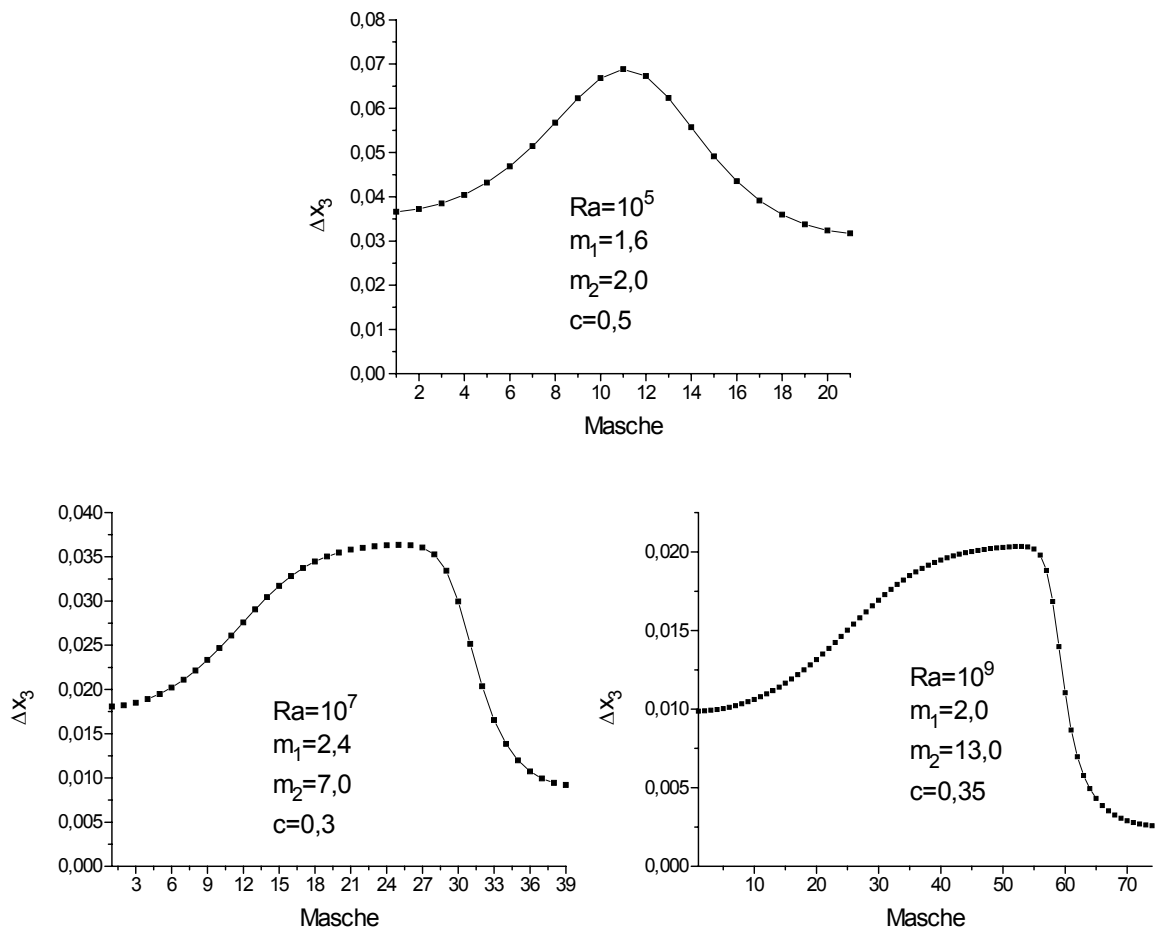
Um die Maschenweitengenerierung in TURBIT anwenden zu können, wurde in der Eingabe für den Initialisierungslauf das Logical LGENMN eingeführt, das die Wahl zwischen automatischer und manueller Generierung läßt. Ein weiteres Logical, LMNASY, schaltet zwischen symmetrischem und asymmetrischem Maschennetz um. Bei asymmetrischer Generierung erwartet TURBIT in der nächsten Zeile des Inputs die Eingabe von  $m_1$ ,  $m_2$  und  $c$ . Bei ungünstiger Wahl der Parameter wird das Programm abgebrochen und eine Fehlermeldung ausgegeben.

Abb. 4.7 zeigt einige automatisch erzeugte Maschenweitenverteilungen. Man sieht, daß die Maschenweiten, von zunächst fast symmetrischer Verteilung bei  $Ra=10^5$ , bei hohen Rayleigh-Zahlen immer asymmetrischer werden. An der oberen Wand werden durch die dünne Grenzschicht sehr feine Gitter benötigt, während in der Mitte und an der unteren Wand ein grobes Gitter ausreichend ist. Trotz des starken Gradienten am Übergang von oberer Wand zum Kernbereich, können die Maschenweiten-

sprünge von Masche zu Masche relativ klein gehalten werden. Tabelle 4.1 zeigt die größten Änderungen für die Maschenweiten benachbarter Maschen für alle durchgeführten Simulationen.

Ra	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$10^7$	$10^8$	$10^9$
Größte Änderung	11,8%	16,4%	14,3%	17,0%	19,0%	16,5%	21,4%

**Tabelle 4.1:** Größte Maschenweitemsprünge in  $x_3$ -Richtung.



**Abb.4.7:** Maschenweitenverteilung der mit automatischer Maschennetzgenerierung erzeugten asymmetrischen Gitter.

## 5 Simulationen und Ergebnisse

### 5.1 Durchgeführte Simulationen

Es wurden direkte numerische Simulationen der Konvektion einer Fluidschicht mit innerer Wärmequelle für Rayleigh-Zahlen im Bereich  $10^5 < Ra < 10^9$  durchgeführt. Bei allen Rechnungen war  $Pr=7$ , was etwa der Prandtl-Zahl von Wasser oder Kernschmelze entspricht. Anfangsbedingung für das Geschwindigkeitsfeld war stets der Ruhezustand, für das Temperaturfeld eine Verteilung nach einem Polynom zweiter oder achter Ordnung (siehe Abschnitt 4.2.1). In horizontaler Richtung wurden periodische, in vertikaler Richtung isotherme Randbedingungen vorgegeben.

In TURBIT muß bei Simulationen mit innerer Wärmequelle im Rahmen der Normierung der Variablen eine Anfangs-Damköhler-Zahl vorgegeben werden. Für die Berechnung dieses Wertes wurde die Formel von Jahn (1975)

$$Da = 1,05 Ra^{0,19} \quad (5.1)$$

verwendet, ebenso für die Nußelt-Zahlen an den Wänden (siehe Abb. 5.1), mit deren Hilfe die Parameter für die automatische Maschenweitengenerierung berechnet wurden. Tabelle 5.1 zeigt die Periodenlänge, die für die Normierung verwendete Damköhler-Zahl  $Da_{Anf}$ , die Simulations- und Rechenzeiten und, ob während der Simulation Zeitsignale für lokale Geschwindigkeiten, Druck und Temperatur auf Unit 15 mitgeschrieben wurden.

Da die Simulationen nicht alle auf dem gleichen Computer gerechnet wurden, ist die CPU-Zeit unterschiedlich zu interpretieren. Bei Simulationen auf dem Skalarrechner IBM 9021-640 ist die CPU-Zeit gleich der tatsächlich verstrichenen Zeit. Die meisten Rechnungen wurden jedoch auf der Cray J916 mit 16 Prozessoren und der Cray Y/MP-EL 98 mit 4 Prozessoren durchgeführt. Die tatsächlich vergangene Zeit ist hier also CPU-Zeit durch Anzahl der parallel genutzten Prozessoren. Auf der J916 konnten im Durchschnitt 3, im Extremfall bis zu 6 Prozessoren gleichzeitig benutzt werden, während auf der Y/MP im Durchschnitt 3,25 Prozessoren genutzt wurden. Insgesamt wurden mehr als 10 GB Daten erzeugt.

Um bei den hohen Rayleigh-Zahlen  $10^8$  und  $10^9$  die Rechenzeiten im Rahmen zu halten, wurden diese Fälle auf einem groben Gitter begonnen und anschließend zwei Verfeinerungsstufen mit dem Maschennetzinterpolationsjob durchgeführt. Tabelle 5.2 zeigt die Gitterparameter sämtlicher Simulationen. Der vertikalen Verteilung von  $\Delta x_3$  kann man entnehmen, daß im Kanalinnern mit  $\Delta x_{3,max}$  stets ein annähernd isotropes Gitter, d.h.  $\Delta x_1 = \Delta x_2 \approx \Delta x_{3,max}$ , angestrebt wurde.

Ra	Simulation	$X_{1,2}$	$Da_{Anf}$	Zeitschritte	$t_{TURBIT}$	$t_{CPU}$	U15	Film
$10^5$	IN1E5B	3	9	44 400	184	33 h	-	-
	IN1E5F	6	9	73 200	304	114 h	X	X
	IN1E5E	10	9	21 600	89	52 h	-	-
$5 \cdot 10^5$	IN5E5B	3	13	33 840	96	43 h	-	-
	IN5E5A	6	13	22 120	59	52 h	-	-
$10^6$	IN1E6A	5	15	43 520	121	240 h	-	X
$5 \cdot 10^6$	IN5E6A	5	20	28 240	78	165 h	-	-
10	IN1E7A	5	22	45 600	111	604 h	-	X
$10^8$	IN1E8A	4	35	55 160	264	1 087 h	-	-
$10^9$	IN1E9A	3	53,8	38 480	120	979 h	-	-

Tabelle 5.1: Durchgeführte Simulationen.

Ra	Simulation	$X_{1,2}$	Gitter	$\Delta x_{1,2}$	$\Delta x_{3,Oben}$	$\Delta x_{3,Unten}$	$\Delta x_{3,max}$
$10^5$	IN1E5B	3	30-30-21	0,1	0,032	0,037	0,069
	IN1E5F	6	60-60-21	0,1	0,032	0,037	0,069
	IN1E5E	10	100-100-21	0,1	0,032	0,037	0,069
$5 \cdot 10^5$	IN5E5B	3	40-40-27	0,075	0,019	0,025	0,064
	IN5E5A	6	80-80-27	0,075	0,019	0,025	0,064
$10^6$	IN1E6A	5	80-80-31	0,0625	0,0161	0,0231	0,054
$5 \cdot 10^6$	IN5E6A	5	100-100-35	0,05	0,0115	0,0228	0,0486
$10^7$	IN1E7A	5	128-128-39	0,0417	0,0092	0,018	0,0364
$10^8$	IN1E8A	4	80-80-39	0,05	0,0081	0,0165	0,032
			120-120-47	0,03	0,0059	0,013	0,0306
			160-160-55	0,025	0,0057	0,012	0,0259
$10^9$	IN1E9A	3	100-100-47	0,3	0,0037	0,012	0,0304
			144-144-59	0,021	0,0035	0,010	0,0242
			200-200-75	0,015	0,0026	0,010	0,020

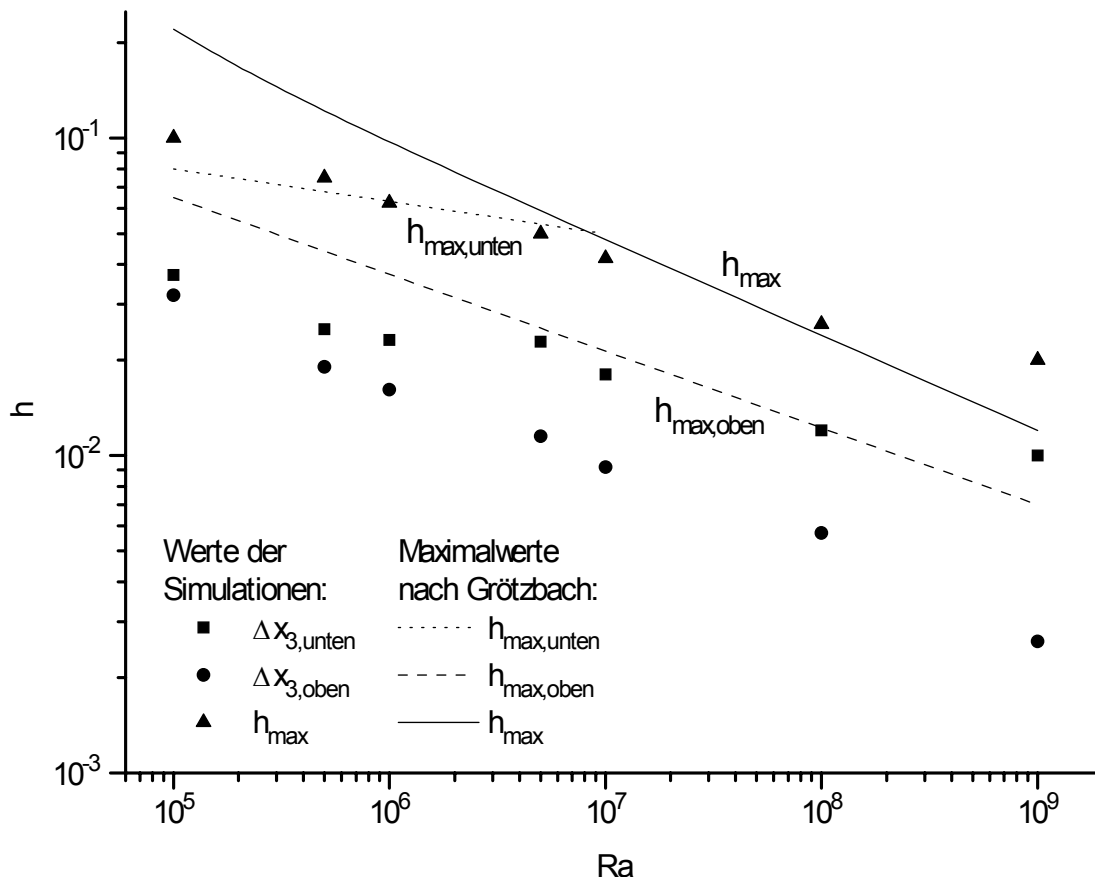
Tabelle 5.2: Gitterparameter der durchgeführten Simulationen.

Im Gegensatz zu den Integrationsläufen benötigen die Auswerteläufe von TURBIT wesentlich weniger CPU-Zeit. Das Mittelungsverfahren zur Auswertung statistischer Daten ist in Abschnitt 4.2.3 beschrieben. Für die Mittelung über der Zeit wurden in dieser Arbeit dabei typischerweise  $N_t \approx 10$  verschiedene Zeitpunkte verwendet.

## 5.2 Verifikation der Ergebnisse

### 5.2.1 Auflösung des dissipativen Bereichs

Abb. 5.1 zeigt die in den Simulationen verwendeten Diskretisierungen und die Mindestanforderungen bei direkten numerischen Simulationen nach Grötzbach (1987) (siehe Kapitel 4.1.3.).



**Abb. 5.1:** Vergleich der Maschenweiten der durchgeführten Simulationen mit den erforderlichen Werten nach Grötzbach (1987).

Man sieht, daß bei hohen Rayleigh-Zahlen, trotz Verwendung von bis zu drei Millionen Maschen, die Anforderungen an die maximale Maschenweite  $h_{max}$  nicht mehr erfüllt werden. Während bei  $Ra=10^8$  die Werte nur knapp oberhalb des erforderlichen



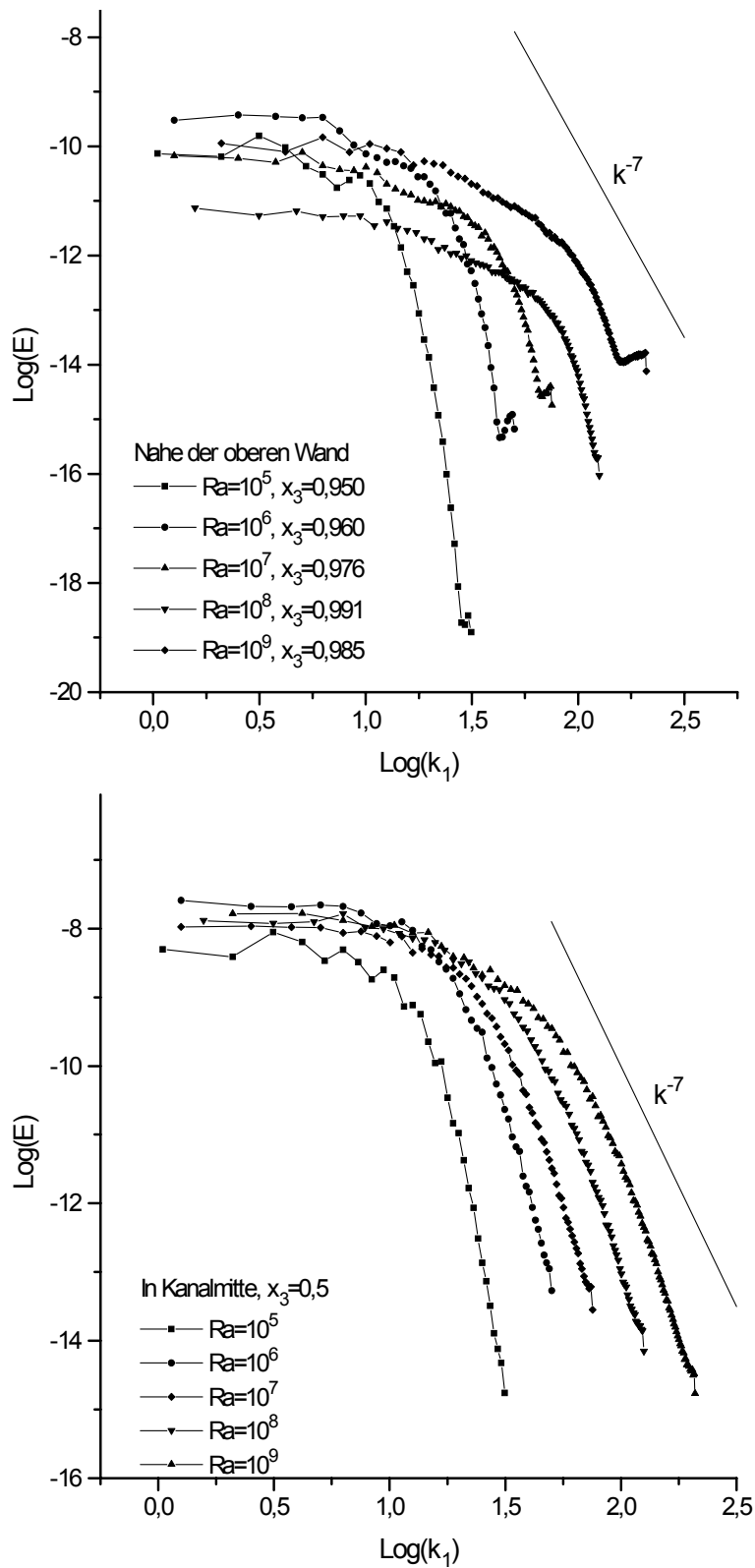
Bereichs liegen, ist  $h_{\max}$  bei  $Ra=10^9$  eindeutig zu groß. Die Abweichungen von experimenteller und simulierter Nußelt-Zahl (siehe Kapitel 5.2.4) an der unteren Wand lassen sich hiermit erklären. Ein feineres Gitter war jedoch aufgrund der dafür notwendigen Rechenzeiten nicht möglich. Hier wäre es unter Umständen sinnvoll, die Periodenlänge weiter zu reduzieren, um damit noch kleinere Maschenweiten zu ermöglichen. Selbst mit den heute verfügbaren Rechnerleistungen ist man bei der direkten Simulation von Konvektion immer noch auf mittlere Rayleigh-Zahlen beschränkt.

Ein Kriterium dafür, ob die kleinskaligen Wirbel ausreichend aufgelöst sind ergibt sich aus den Energiespektren. Abb. 5.2 zeigt die aus den horizontalen Verteilungen ausgewerteten eindimensionalen Energiespektren, einmal für die Kanalmitte und einmal für die Masche in unmittelbarer Nähe zur oberen Wand. Die Spektren für  $Ra=5 \cdot 10^5$  und  $5 \cdot 10^6$  werden hier der Übersichtlichkeit wegen nicht dargestellt. Man sieht, daß der Energiegehalt der großräumigen Wirbel (kleine Wellenzahl  $k_1$ ) in Kanalmitte mit steigender Rayleigh-Zahl stetig abnimmt, während sich an der oberen Wand kein klarer Trend zeigt. Bei den hohen Frequenzen ergibt sich mit steigender Rayleigh-Zahl eine Verschiebung der Spektren nach rechts, d.h. die kleinskaligen Wirbel, die für die Energiedissipation verantwortlich sind, werden kleiner. Im Gegensatz zur Rayleigh-Benard-Konvektion (Wörner, 1994) ergibt sich hier keine Anhebung des Energieniveaus, sondern eine wesentlich stärkere Verschiebung zu höheren Frequenzen, und damit kleineren Strukturen. Nur beim Übergang von  $Ra=10^5$  auf  $Ra=10^6$  zeigt sich ein sprunghaftes Ansteigen des Energieniveaus, das aber für höhere Rayleigh-Zahlen wieder geringer wird.

Man kann deutlich erkennen, daß in der Kanalmitte sämtliche Wirbelgrößen des Stromfelds aufgelöst sind, da alle Spektren im Bereich hoher Wellenzahlen eine Steigung kleiner  $-7$  aufweisen. An der Wand zeigen sich jedoch am oberen Ende des Spektrums Anstiege, die auf ein zu grobes Gitter in Wandnähe hindeuten. Nur bei  $Ra=10^8$  und  $10^5$  scheint auch die Maschenweite an der oberen Wand ausreichend klein zu sein. Dies zeigt, daß mit den bei der Durchführung dieser Arbeit verfügbaren Rechnern die Grenze für direkte numerische Simulationen im Bereich  $Ra=10^9$  zu suchen ist. Bei höheren Rayleigh-Zahlen würden die Speicher- und Rechenzeitanforderungen zu hoch.

### 5.2.2 Auflösung der Grenzschicht

Man kann hier zwischen thermischer und viskoser Grenzschicht unterscheiden. Das Verhältnis der Grenzschichtdicken kann nach Zierep (1991) durch die Gleichung



**Abb. 5.2:** Eindimensionale Energiespektren nahe der oberen Wand und in Kanalmitte.

$$\frac{\delta_{\text{viskos}}}{\delta_{\text{thermisch}}} \cong \sqrt{\text{Pr}} \quad (5.2)$$

charakterisiert werden. Bei einer Prandtl-Zahl von sieben wird sich also eine relativ dünne thermische und eine dicke viskose Grenzschicht einstellen.

Zur Beurteilung, wie gut die Temperaturgrenzschichten an den Wänden aufgelöst sind, kann das vertikale Profil der mittleren Temperatur verwendet werden. Ergebnisse hierzu finden sich in Abb. 5.12 des Abschnittes 5.4.1, in dem statistische Analysen zum Temperaturfeld ausführlich diskutiert werden. Wie Abb. 5.12 zeigt, ist bei allen Rayleigh-Zahlen die thermische Grenzschicht an oberer und unterer Wand mit mindestens fünf Maschen ausreichend fein aufgelöst.

Zur Beurteilung der Auflösung der viskosen Grenzschichten eignet sich das vertikale Profil des RMS-Wertes (RMS = „root mean square“) der Vertikalgeschwindigkeit, das in Abb. 5.19 gezeigt und in Abschnitt 5.4.2 ausführlich diskutiert wird. Nach Wörner (1994) muß der Gradient des RMS-Wertes von  $u_3$  an der Wand verschwinden. In der Herausvergrößerung der Abb. 5.19 läßt sich erkennen, daß diese Bedingung tendenziell für alle durchgeführten Simulationen erfüllt ist.

Obwohl die realisierten Diskretisierungen für eine direkte numerische Simulation ausreichend sind, ist unter Umständen für die detaillierte Analyse von Termen in Transportgleichungen von Turbulenzmodellen eine noch feinere Auflösung in Wandnähe sinnvoll.

### 5.2.3 Auflösung der makroskopischen Strukturen

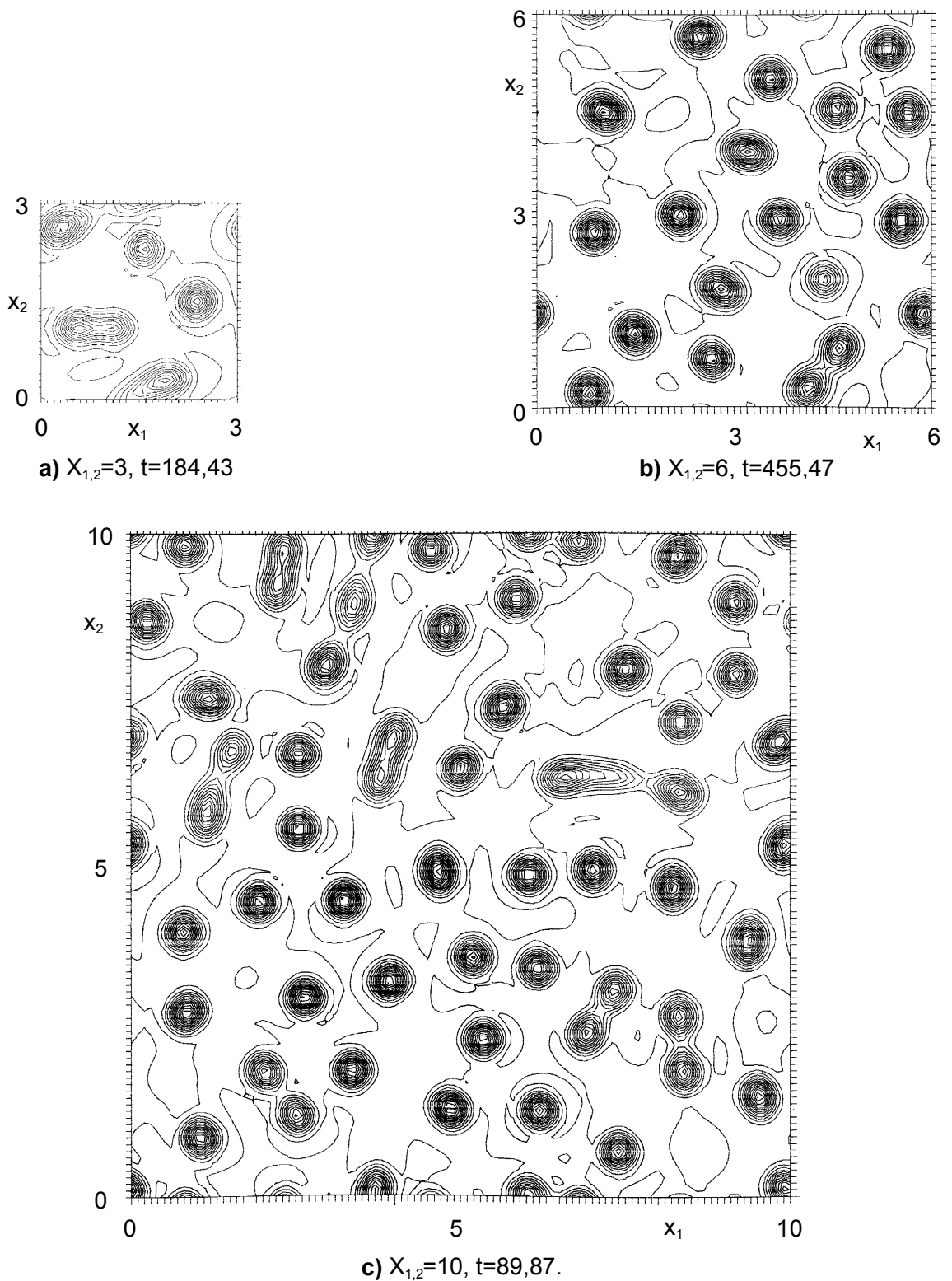
Um den Einfluß der Periodenlänge zu untersuchen, wurden bei  $\text{Ra}=10^5$  und  $\text{Ra}=5 \cdot 10^5$  Simulationen mit unterschiedlichen Periodenlängen, aber gleichen Maschenweiten durchgeführt. Die Parameter der Simulationen lassen sich den Tabellen 5.1 und 5.2 entnehmen. Für  $\text{Ra}=10^5$  wurde  $X_{1,2}=3, 6$  und  $10$  gewählt, für  $\text{Ra}=5 \cdot 10^5$   $X_{1,2}=3$  und  $6$ . Abb. 5.3 zeigt Bilder des Temperaturfeldes bei  $\text{Ra}=10^5$  und  $x_3=0,5$ . Nimmt man die Anzahl der Strukturen (Ablösungen) für die jeweilige Periodenlänge und teilt sie durch die Fläche der Horizontalebene, so ergibt sich eine charakteristische Größe, die sich bei einem Einfluß der Periodenlänge auf die Strömungsform ändern müßte. Tabelle 5.3 zeigt die entsprechenden Werte für  $\text{Ra}=10^5$ . Der Quotient bleibt weitgehend konstant, woraus man schließen kann, daß bei dieser Rayleigh-Zahl die Periodenlänge keinen besonderen Einfluß auf die Ausbildung der großräumigen Strukturen hat.

Vergleicht man jedoch die in Abb. 5.4 dargestellten Bilder für  $Ra=5 \cdot 10^5$  und  $x_3=0,86$ , so sieht man, daß eine zu kleine Periodenlänge das Bilden von Speichenstrukturen behindert. Während bei  $X_{1,2}=6$  bereits längere Speichen entstehen, sind diese bei  $X_{1,2}=3$  nicht ausgebildet. Es muß daher sichergestellt sein, daß mehrere Zellen in das Rechengebiet passen, um das Auftreten von großräumigen Strukturen nicht zu behindern.

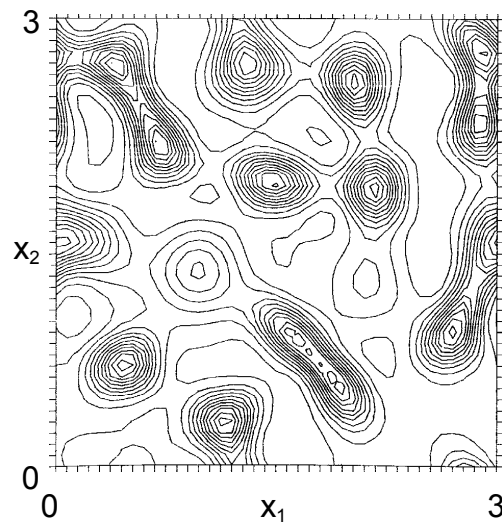
Für die Rayleigh-Zahl  $4 \cdot 10^6$  wurde der Einfluß der Periodenlänge auf die makroskopischen Strukturen der Konvektion und einige statistischen Turbulenzgrößen für die Werte  $X_{1,2} = 2.8$  und  $X_{1,2} = 7.2$  von Grötzbach (1989) untersucht. Die sich bei der kleineren Periodenlänge einstellenden Strukturen stimmen qualitativ recht gut mit den im größeren Rechengebiet gefundenen überein. Eine statistische Analyse mittels der Zweipunktkorrelationen der horizontalen Verteilungen der drei Geschwindigkeitskomponenten ergibt jedoch, daß im kleinen Rechengebiet die Geschwindigkeitsfluktuationen über  $X_{1,2}/2$  hinweg noch nicht statistisch entkoppelt sind. Wertet man aus den analogen Ergebnissen für das große Rechengebiet das makroskopische Längenmaß  $\lambda$  aus, so findet man Werte zwischen  $0,7 D$  und  $0,8 D$ . Aus diesem Ergebnis und aus Erfahrungen in der Literatur wurde gefolgert, daß  $X_{1,2} \geq 5$  ausreichen sollte. Da die Strukturen für größere Rayleigh-Zahlen kleiner werden, ist eine Periodenlänge von  $X_{1,2}=5$  für Rayleigh-Zahlen bis  $10^7$  mit Sicherheit ausreichend. Bei weiterer Steigerung von  $Ra$  kann sie sukzessive bis auf  $X_{1,2}=3$  bei  $Ra=10^9$  verkleinert werden.

Simulation	$X_{1,2}$	Strukturen	Quotient
IN1E5B	3	5	0,56
IN1E5F	6	20	0,56
IN1E5E	10	55	0,55

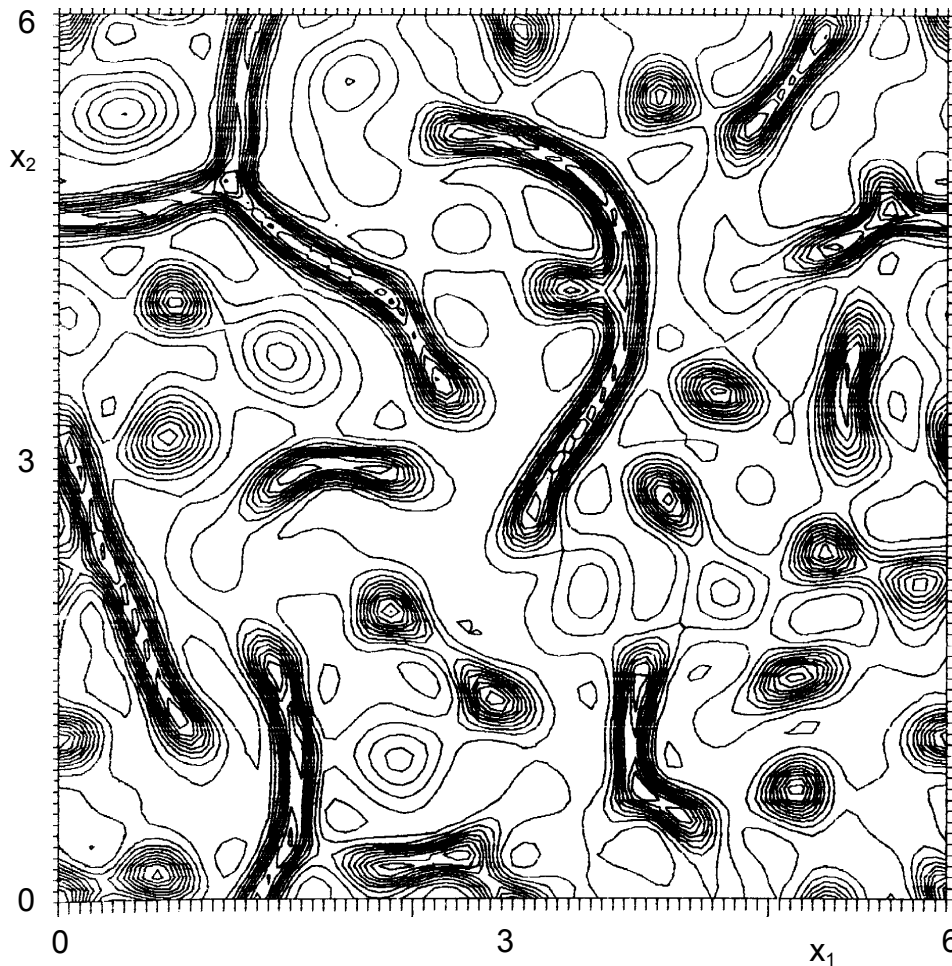
**Tabelle 5.3:** Vergleich der Ablösungen pro Fläche bei unterschiedlichen Periodenlängen,  $Ra=10^5$ .



**Abb. 5.3:** Isolinen des Temperaturfelds bei  $x_3=0,5$  für die Periodenlängen  $X_{1,2}=3$ ,  $X_{1,2}=6$  und  $X_{1,2}=10$  bei  $Ra=10^5$  (Inkrement: 0,025).



a)  $X_{1,2}=3, t=95,78$ .



b)  $X_{1,2}=6, t=59,69$ .

**Abb 5.4:** Isolinien des Temperaturfelds bei  $x_3=0,86$  für die Periodenlängen  $X_{1,2}=3$  und  $X_{1,2}=6$  bei  $Ra=5 \cdot 10^5$  (Inkrement: 0,0625).

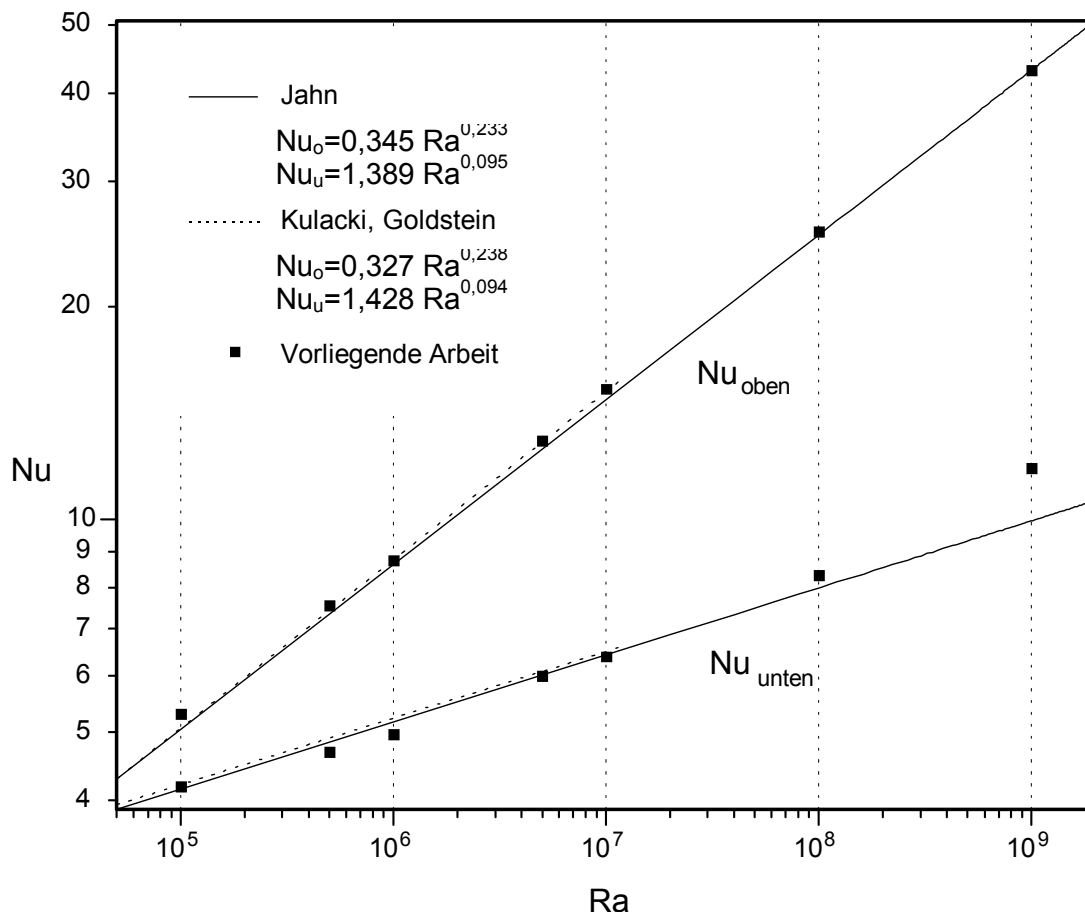
### 5.2.4 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Tabelle 5.4 zeigt die Nußelt- und Damköhler-Zahlen der durchgeführten Simulationen. Man erkennt, daß sich bei  $Ra \leq 10^8$  nur relativ geringe Abweichungen zwischen der aus der Simulation nach Gleichung (2.17) ausgewerteten Damköhler-Zahl und der Summe der Nußelt-Zahlen ergeben. Dies deutet auf ein ausreichend feines Maschengitter und eine quasistationäre Strömung hin. Bei  $Ra = 10^9$  ist die Abweichung jedoch zu groß. Dies liegt teilweise an der noch nicht eingelaufenen Strömung, teilweise an dem zu groben Maschennetz. Die zu hohe Damköhler-Zahl dürfte an dem noch nicht ausgebildeten, mittleren Temperaturprofil liegen. Wird bei den Anfangsbedingungen ein Temperaturprofil vorgegeben, das noch stark von dem endgültigen abweicht, so braucht die Simulation aufgrund der kleinen Zeitschrittweite bei feinen Maschennetzen extrem lange Rechenzeiten, um das Temperaturfeld auszubilden. Die Simulation wurde daher bereits vorher abgebrochen. Die zu hohe Nußelt-Zahl an der unteren Wand dürfte allerdings auf das zu grobe Maschennetz zurückzuführen sein. Da das Geschwindigkeitsfeld aber bereits als quasistationär angesehen werden kann, werden die Ergebnisse für  $Ra = 10^9$  hier trotzdem vorgestellt.

Ra	Simulation	$Nu_o$	$Nu_u$	$Nu_o + Nu_u$	Da	Abweichung
$10^5$	IN1E5B	5,478	4,303	9,781	9,693	0,90 %
	IN1E5F	5,307	4,187	9,494	9,562	0,71 %
	IN1E5E	5,313	4,189	9,502	9,478	0,25 %
$5 \cdot 10^5$	IN5E5B	7,592	4,560	12,152	12,111	0,34 %
	IN5E5A	7,533	4,675	12,208	12,326	0,96 %
$10^6$	IN1E6A	8,742	4,965	13,707	14,665	6,53 %
$5 \cdot 10^6$	IN5E6A	12,896	6,001	18,897	19,876	4,93 %
$10^7$	IN1E7A	15,273	6,396	21,669	22,291	2,79 %
$10^8$	IN1E8A	26,288	8,321	34,609	35,058	1,28 %
$10^9$	IN1E9A	43,835	12,063	55,898	63,907	12,53 %

**Tabelle 5.4:** Nußelt- und Damköhler-Zahlen der durchgeführten Simulationen.

Abb. 5.5 zeigt, im doppelt-logarithmischen Maßstab aufgetragen über der Rayleigh-Zahl, die Nußelt-Zahlen der Simulationen und die von Jahn (1975) und Kulacki und Goldstein (1972) angegebenen Näherungsfunktionen. An der oberen Wand ist die Übereinstimmung mit den Experimenten sehr gut, während sich an der unteren Wand kleinere Abweichungen ergeben. Bei den mittleren Rayleigh-Zahlen wird die Nußelt-Zahl dort eher unterschätzt, bei  $Ra=10^5$  und  $Ra=10^9$  überschätzt. Zu bedenken ist dabei jedoch, daß Kulacki und Goldstein als Gültigkeitsbereich für ihre Korrelation nur  $Ra < 1,2 \cdot 10^7$  angeben und die Prandtl-Zahl im Experiment sechs betrug. Jahn gibt für seine Korrelation  $Ra < 5 \cdot 10^{10}$  als Gültigkeitsbereich an. Weiterhin werden bei der Simulation periodische Randbedingungen und damit praktisch ein unendlich ausgedehnter Kanal angenommen. In den Experimenten ist der Kanal dagegen endlich und die Seitenwände haben einen, wenn auch geringen, Einfluß auf die Strömung. Bei einem ausreichend großen Kanal sollte sich dieser Effekt jedoch im Experiment nicht bemerkbar machen.



**Abb. 5.5:** Vergleich der Nußelt-Zahlen der Simulationen mit experimentellen Ergebnissen.



---

Aus den Nußelt-Zahlen der vorliegenden Simulationen ergibt sich für die Wärmeübergangsbeziehung an den Wänden nach der Methode der geringsten Fehlerquadrate:

$$\text{Nu}_o = 0,381 \text{ Ra}^{0,228} \quad \text{für } 10^5 < \text{Ra} < 10^9 \quad (5.3)$$

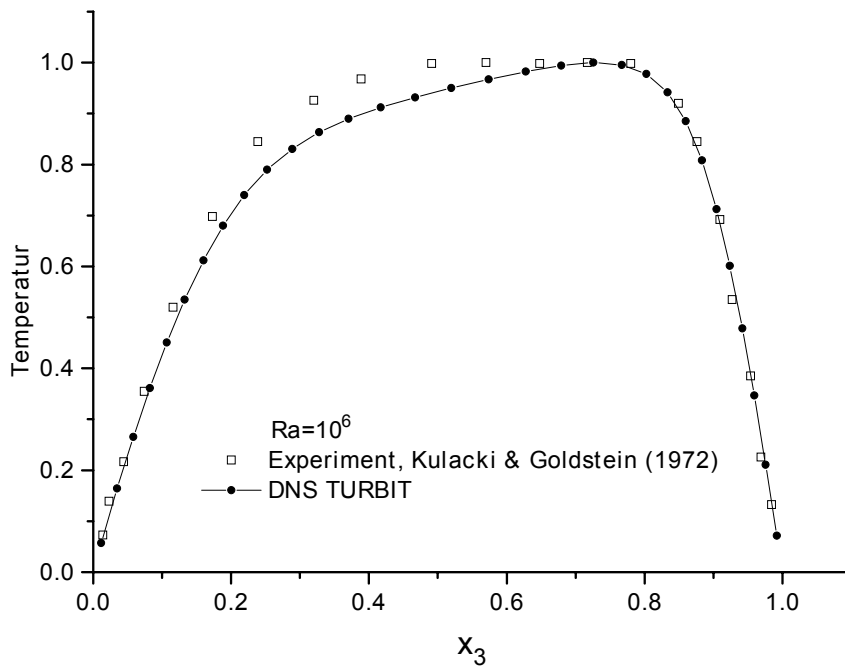
$$\text{Nu}_u = 1,159 \text{ Ra}^{0,107} \quad \text{für } 10^5 < \text{Ra} < 10^8 \quad (5.4)$$

wobei für die Beziehung an der unteren Wand nur die Werte bis  $\text{Ra}=10^8$  verwendet wurden.

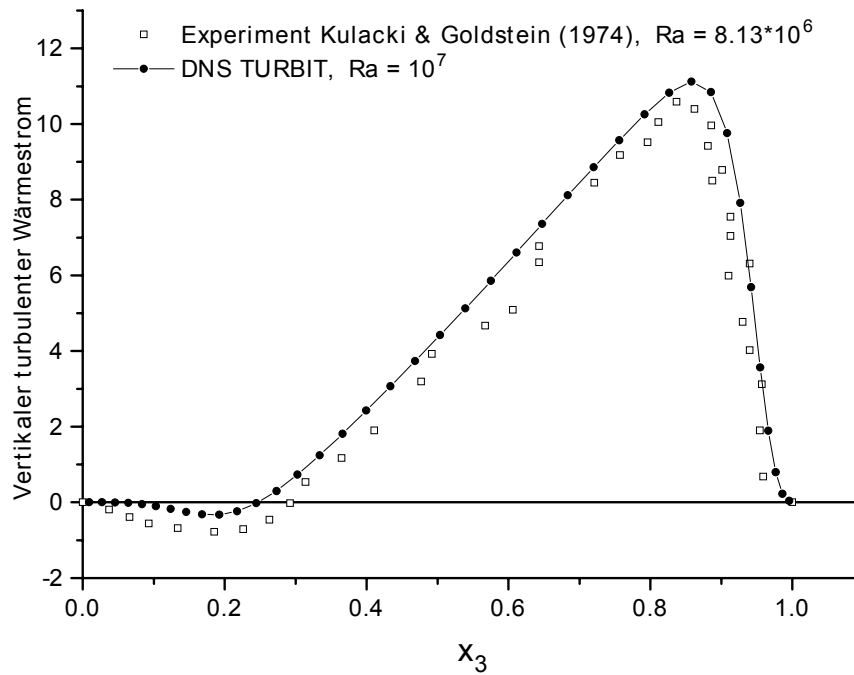
Neben den Nußelt-Zahlen stehen bei den in dieser Arbeit betrachteten thermischen Randbedingungen für eine detaillierte Verifikation nur noch Meßwerte für die vertikalen Temperaturprofile und daraus abgeleitete Größen zur Verfügung. Das aus den Simulationsergebnissen für  $\text{Ra}=10^6$  ermittelte vertikale Temperaturprofil ist in Abb. 5.6 den Meßwerten von Kulacki und Goldstein (1972) gegenübergestellt. Die thermischen Grenzschichten nahe der Wand und die Lage des Temperaturmaximums werden durch die Simulation gut wiedergegeben. Der Temperaturanstieg mit zunehmender Höhe, der sich in der Simulation im Kanallinnern zeigt, wurde so auch in früheren Simulationen gefunden (Grötzbach, 1982). Er wird in diesem Maße nicht von den publizierten experimentellen Daten wiedergegeben, ist aber ähnlich in späteren Experimenten beobachtet worden (Kulacki, 1982).

Für den Vergleich geeignete direkt gemessene Turbulenzgrößen sind bisher nicht veröffentlicht worden. Doch wurden von Kulacki und Goldstein (1974) turbulente Wärmeströme aus den gemessenen Temperaturprofilen ermittelt. In Abb. 5.7 ist das so für  $\text{Ra} = 8,13 \cdot 10^6$  ermittelte Profil des vertikalen turbulenten Wärmestroms dem aus der Simulation mit  $\text{Ra}=10^7$  ausgewerteten Profil gegenübergestellt. Während die Übereinstimmung in der oberen Hälfte des Kanals recht gut ist, treten im unteren Bereich Abweichungen auf. Die unterschiedliche Position des Nulldurchgangs sowie die stärker negativen Werte bei den experimentellen Daten sind dabei zum Teil sicher auf den geringen Unterschied in der Rayleigh-Zahl zurückzuführen.

---



**Abb. 5.6:** Vergleich des Profils der mittleren Temperatur für die Simulation mit  $Ra = 10^6$  mit experimentellen Ergebnissen.



**Abb. 5.7:** Vergleich des Profils des vertikalen turbulenten Wärmestroms für die Simulation mit  $Ra = 10^7$  mit experimentellen Ergebnissen für  $Ra = 8,13 \cdot 10^6$ .

---

## 5.3 Konvektionsformen

### 5.3.1 Strukturen im Temperaturfeld

Abb. 5.8 und Abb. 5.9 zeigen Isolinien von beliebigen Momentaufnahmen der Temperaturfelder für verschiedene Rayleigh-Zahlen. Die Vertikalschnitte sind jeweils in der Mitte des Kanals in  $x_2$ - $x_3$ -Richtung gemacht. Die Temperatur steigt vom Wert Null an den Wänden zur Kanalmitte hin an und erreicht ihren höchsten Wert in der oberen Hälfte des Kanals. Das Maximum wandert für steigende Rayleigh-Zahlen immer weiter in Richtung der oberen Wand. Die obere Grenzschicht wird für hohe Rayleigh-Zahlen extrem dünn, während sich die untere nur relativ schwach verändert. Ihr oberer Rand wird jedoch zunehmend unruhiger, was aus den wellig werdenden Isolinien hervorgeht. Insgesamt gehen die bei  $Ra=10^5$  und  $Ra=10^6$  noch ziemlich geordnet erscheinenden Strukturen ab  $Ra=10^7$  in einen zunehmend chaotischen und turbulenten Zustand über. Aus der oberen Grenzschicht fallen kalte Ablösungen herunter, die sich auf ihrem Weg durch die Kanalmitte aufheizen. Teilweise dringen diese Ablösungen bis in die untere Grenzschicht vor, was sich in Abb. 5.8 in einem Zusammenstauchen der Isolinien bemerkbar macht. Sie entziehen damit der heißen Kernströmung Wärme und transportieren sie zur unteren Wand. Deutlich sieht man dies im Vertikalschnitt d) für  $Ra=10^8$  auf der linken Seite. Während diese kalten Abstromschläuche bei niedrigen Rayleigh-Zahlen noch in Verbindung mit der oberen Wand bleiben, können sie sich bei hohen Rayleigh-Zahlen vollständig von der oberen Wand lösen und mit hoher Geschwindigkeit als Tropfen herunterfallen. Sie bilden dabei eine pilzförmige Struktur und erzeugen beim Auftreffen auf die untere Grenzschicht Isotemperaturflächen, die einer Wasseroberfläche beim Aufprall eines Wassertropfens ähneln (Abb. B.3). Bei diesem Auftreffen wird kaltes Fluid der unteren Grenzschicht nach oben geschleudert. Zwischen den Ablösungen steigt das Fluid langsam auf und heizt sich dabei wieder auf.

Betrachtet man die Horizontalschnitte, so sieht man, daß sich bei steigender Rayleigh-Zahl die zunächst nur einzeln auftretenden kalten Ablösungen zusammenschließen und Speichenstrukturen bilden. Für hohe Rayleigh-Zahlen sind diese Strukturen überwiegend geschlossen und bilden eine Art Netz aus einzelnen Zellen. Diese sind am deutlichsten am oberen Grenzschichttrand zu erkennen, während sie nach unten hin in lose Strukturen zerfallen. Die Speichen saugen kaltes Fluid aus der oberen Grenzschicht ab, wodurch diese in unmittelbarer Nachbarschaft der Ablösungen dünner wird. Auf Abb. B.1 e) im Anhang erkennt man, daß die sich ablösenden Tropfen durch Scherung heißes Fluid an ihren Rändern in die untere Grenzschicht mitreißen. Es bilden sich Ringe heißen Fluids, die besonders gut am oberen

---

Grenzschichtrand zu sehen sind. Anhand der Zellenanzahl im Rechengebiet ist deutlich abzulesen, daß die Periodenlänge bei allen Simulationen ausreichend groß gewählt wurde.

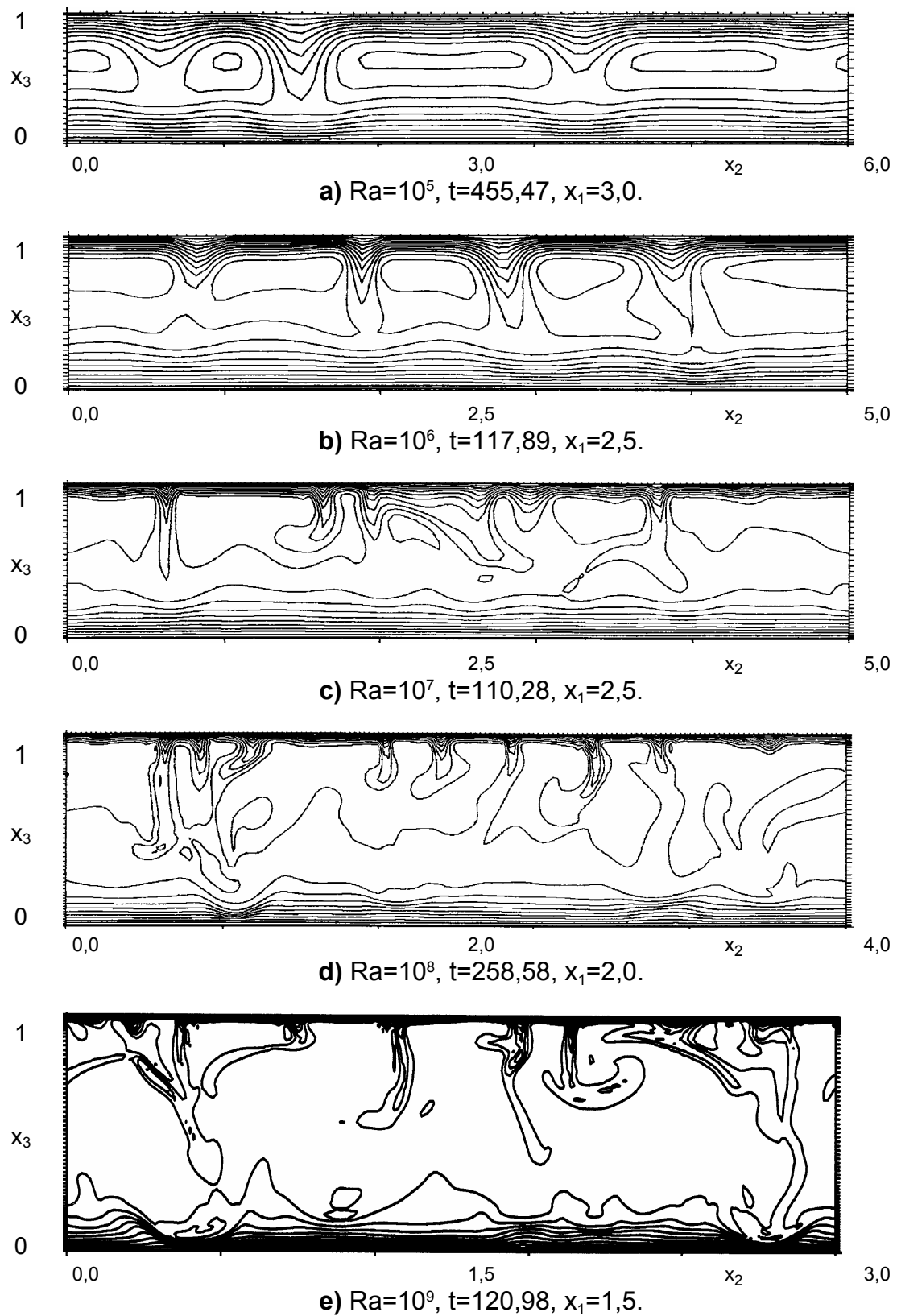
Um die zeitliche Entwicklung der Strukturen beobachten zu können, wurden für die Rayleigh-Zahlen  $Ra=10^5$ ,  $10^6$  und  $10^7$  jeweils ein Film mit horizontaler und einer mit vertikaler Schnittebene erzeugt. Als horizontale Schnittebene wurde diejenige mit maximalen Temperatur-RMS-Werten ausgewählt. Tabelle 5.5 zeigt die Daten der Filme mit  $t_{real}$  berechnet nach Gleichung (A.3).

<b>Ra</b>	<b><math>t_{TURBIT}</math></b>	<b><math>t_{real}</math> bei <math>D=15</math> mm, <math>\nu=10^{-6}</math> m<sup>2</sup>/s</b>	<b>Bilder</b>	<b><math>x_3</math> (horizontal)</b>	<b><math>x_2</math> (vertikal)</b>
$10^5$	104,51-304,21	1158,0 s	127	0,759	3
$10^6$	31,99-121,46	203,5 s	100	0,860	2,5
$10^7$	62,38-111,26	43,5 s	100	0,927	2,5

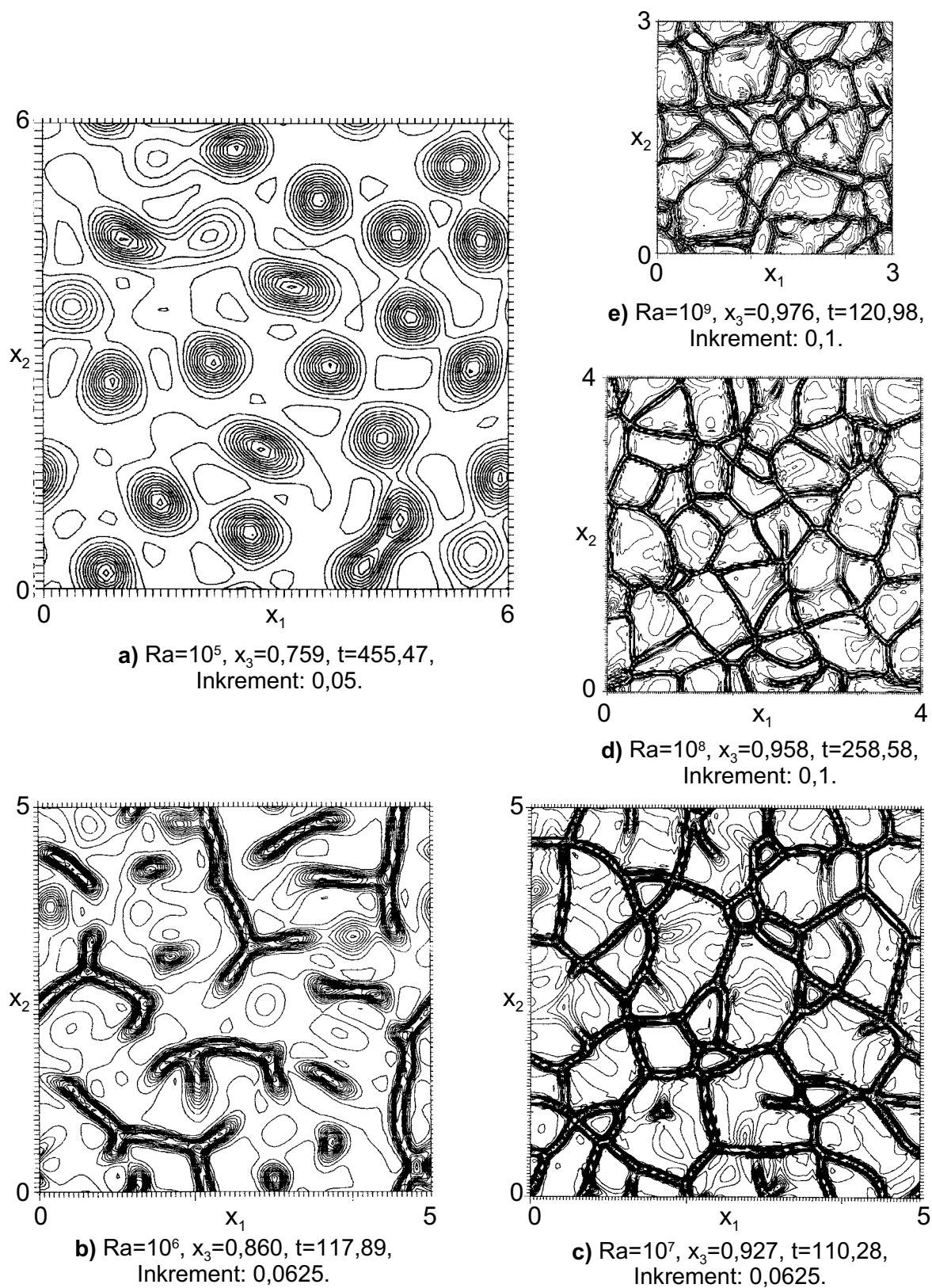
**Tabelle 5.5:** Daten der erzeugten Filme.

Betrachtet man die Entwicklung für  $Ra=10^5$  im zeitlichen Verlauf, so zeigt sich, daß die einzelnen Ablösungen zwar nicht stationär, aber sehr dauerhaft sind. Durch die Druckverteilung, die sich an der oberen Grenzschicht durch das aufwärts nachströmende Fluid ergibt, haben die einzelnen Ablösungen die Tendenz, sich aufeinander zuzubewegen und zu verschmelzen. In dem dabei entstehenden, ablösungsfreien Bereich verdickt sich die obere Grenzschicht und es entsteht eine neue Ablösung. In der Umgebung der entstehenden Ablösung ist im Horizontalschnitt eine kurzzeitige Temperaturzunahme festzustellen.

Bei  $Ra=10^6$  bilden sich bereits Speichenstrukturen, die aber noch nicht zusammenwachsen. Es entstehen wieder punktförmige Ablösungen, die sich mit den Speichen vereinigen. Die Ablösungen bleiben mit der oberen Grenzschicht in Kontakt. Bei  $Ra=10^7$  sind die Zellen überwiegend geschlossen. Kleine Zellen haben dabei die Tendenz sich zusammenzuziehen und zu verschwinden. Im Inneren der großen Zellen wächst die thermische Grenzschichtdicke an, und es bildet sich beim Erreichen einer bestimmten Dicke durch Rayleigh-Taylor Instabilität eine neue Ablösung. Diese wachsen zu linienförmigen Ablösebereichen an und bilden neue Speichen, die die großen Zellen unterteilen.



**Abb 5.8:** Vertikalschnitte mit Isolinien momentaner Temperaturfelder (Inkrement: 0,1) für verschiedene Rayleigh-Zahlen.



**Abb. 5.9:** Horizontalschnitte mit Isolinien des Temperaturfelds für verschiedene Rayleigh-Zahlen, jeweils an der Stelle mit maximalen Temperatur-RMS-Werten.

Das beschriebene Verhalten der Abstromgebiete und Zellen, das Wegsaugen der kleinen Zellen, die damit einhergehende Vergrößerung großer Zellen und die Bildung von neuen Speichen wurden auch so von Jahn (1975) experimentell gefunden und von Grötzbach (1987, 1989) numerisch selbst für den Fall der sehr kleinen Periodenlänge aufgezeigt.

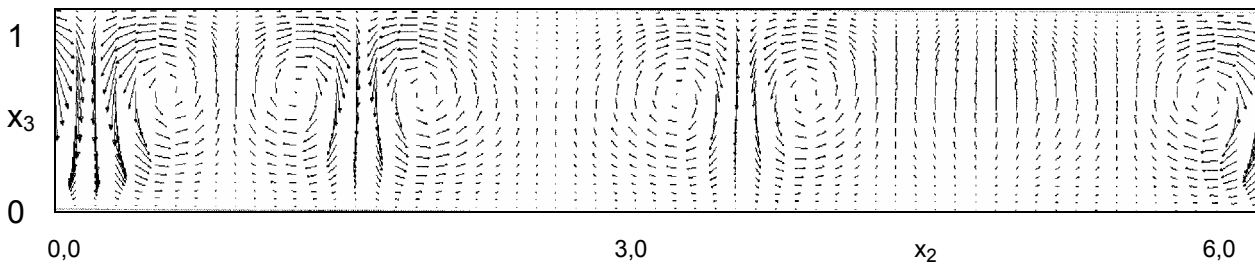
### 5.3.2 Strukturen im Geschwindigkeitsfeld

Das kalte Fluid der oberen Grenzschicht fällt in den Ablösungen mit hoher Geschwindigkeit nach unten und dringt dort in die untere Grenzschicht ein. Im Zelleninneren bildet sich zum Ausgleich eine langsame Aufwärtsbewegung, während der sich das Fluid wieder aufheizt. Abb B.4 im Anhang zeigt in Bild a) einmal das Vektorfeld der Geschwindigkeit mit den Temperaturwerten als Farbinformation und in Bild b) das Vektorfeld mit der Vektorlänge als Farbinformation. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Aufwärtsbewegung ihre Maximalgeschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der kalten Ablösung hat. Es bildet sich ein lokaler Wirbel, der auch für die in Abb B.1 b) erkennbare und in Kapitel 5.3.1 beschriebene Temperaturerhöhung direkt neben den Ablösungen an der oberen Grenzschicht verantwortlich ist.

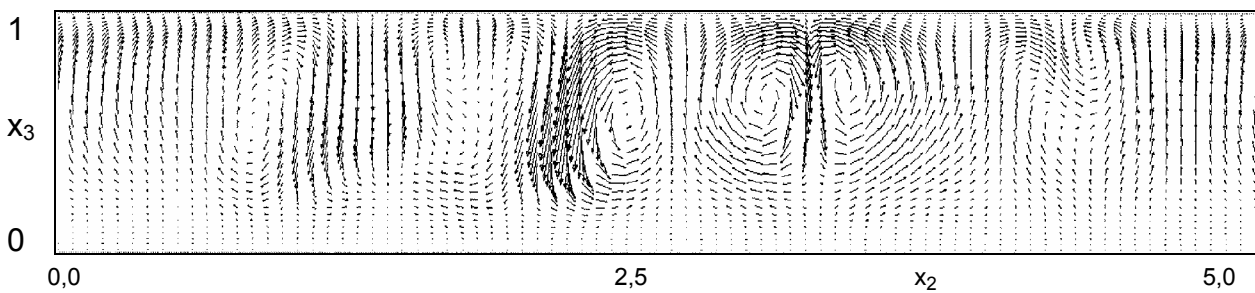
Die Abb. 5.10 und 5.11 zeigen Vektordarstellungen von Momentaufnahmen der Geschwindigkeitsfelder. Die zunehmende Turbulenz des Geschwindigkeitsfelds wird hier sehr deutlich. Während bei den niedrigen Rayleigh-Zahlen noch einzelne Wirbel zu erkennen sind, lösen sich diese Strukturen bei  $Ra=10^8$  und  $Ra=10^9$  vollständig auf und erscheinen chaotisch.

Abb. B.2 im Anhang zeigt die Isofläche der  $u_3$ -Geschwindigkeitskomponente für  $Ra=10^7$  und  $u_3=-0,02$  mit dem Druck als Farbinformation auf der Isofläche. Rot kennzeichnet dabei hohen Druck und blau geringen Druck. Man sieht, daß die Ablösungen, die am weitesten in den Kernbereich der Strömung oder sogar in die untere Grenzschicht vordringen, unter den Kreuzungspunkten der Speichen entstehen. Dort sind also auch die größten Vertikalgeschwindigkeiten zu finden. Der Druck nimmt nach unten hin stetig ab, um dann am oberen Rand der unteren Grenzschicht wieder zuzunehmen. Die Ablösungen werden dort abgebremst.

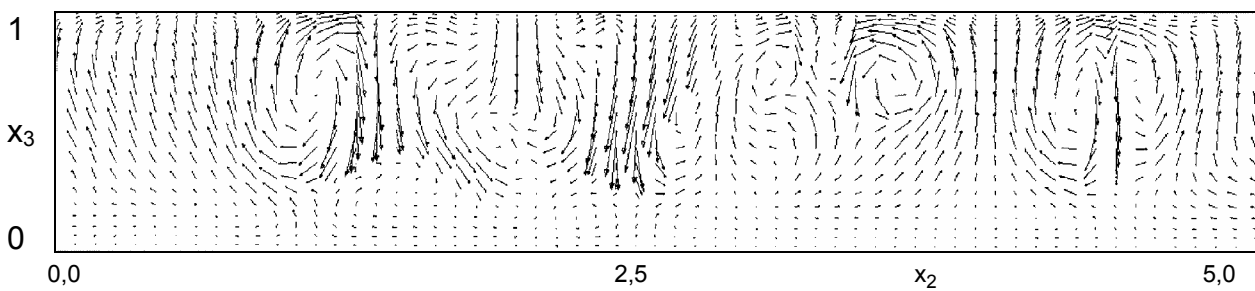
Detaillierte Analysen der Phänomene im Geschwindigkeitsfeld gibt es bisher aus Experimenten nicht. Dort wurde stets die Änderung des Temperaturfeldes als Indikator für das Geschwindigkeitsfeld herangezogen. Aus den früheren Simulationen von TURBIT für diese Strömung wurden nur wenige Analysen zum Geschwindigkeitsfeld für die Rayleigh-Zahl  $Ra = 4 \cdot 10^6$  durchgeführt (Grötzbach, 1987). Die dort



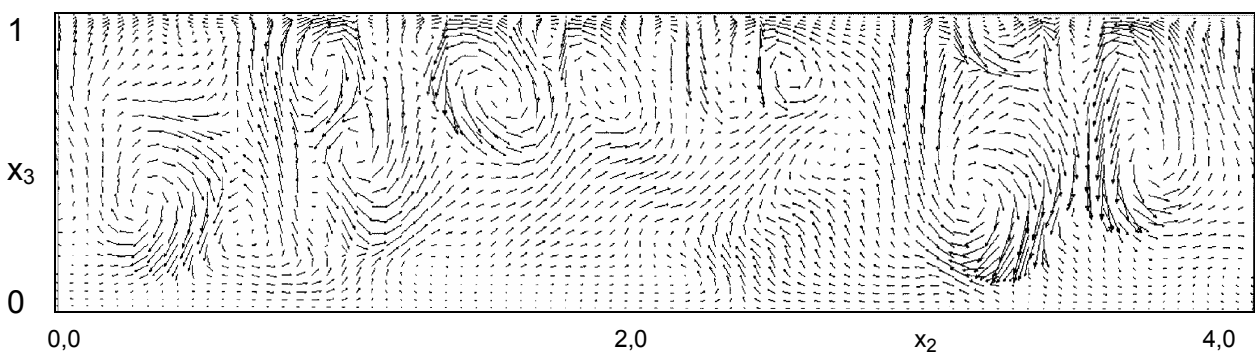
a)  $Ra=10^5$ ,  $t=120,98$ ,  $x_1=3,0$ .



b)  $Ra=10^6$ ,  $t=117,89$ ,  $x_1=2,5$ .



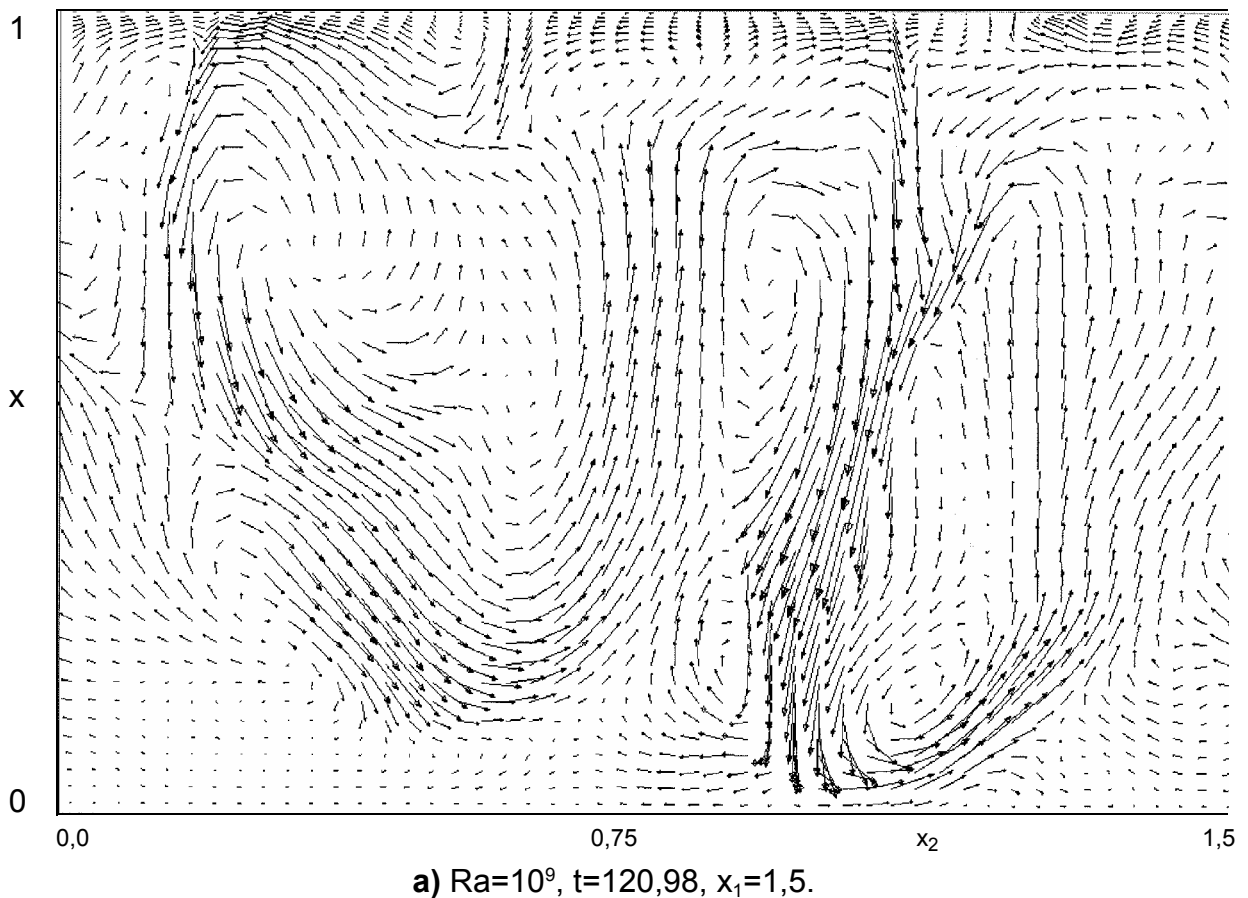
c)  $Ra=10^7$ ,  $t=110,28$ ,  $x_1=2,5$ .



d)  $Ra=10^8$ ,  $t=258,58$ ,  $x_1=2,0$ .

**Abb. 5.10:** Vertikalschnitte mit Vektordarstellungen des Geschwindigkeitsfelds für verschiedene Rayleigh-Zahlen. Bei  $Ra=10^7$  und  $Ra=10^8$  ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für jede vierte Masche ein Vektorpfeil dargestellt.





**Abb. 5.11:** Vertikalschnitt mit Vektordarstellung des Geschwindigkeitsfelds für  $Ra=10^9$ . Die Abbildung umfaßt nur den Bereich  $0 \leq x_2 \leq 1,5$ . Es ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für jede vierte Masche ein Vektorpfeil dargestellt.

gefundenen Ergebnisse passen sich in die in diesem Abschnitt für einen großen Bereich der Rayleigh-Zahl diskutierten Phänomene ein.

## 5.4 Auswertung statistischer Strömungsgrößen

### 5.4.1 Temperaturfeld

Abb. 5.12 zeigt die auf  $\Delta T_{\max}=1$  normierten Profile der mittleren Temperatur über  $x_3$ . Für  $Ra=10^5$  ist die Abweichung vom parabelförmigen Profil der Wärmeleitung noch sehr gering. Der Wärmetransport wird von der Konduktion dominiert. Bei  $Ra=10^6$  ist die Abweichung vom Wärmeleitungsprofil bereits deutlich zu erkennen. Die Kurve ist aufgrund konvektiver Wärmeleitung im Kanalinneren abgeflacht, und die thermischen

Grenzschichten werden dünner. Dieser Effekt wird bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl immer ausgeprägter, so daß die Temperatur bei  $Ra=10^9$  im Kernbereich der Strömung fast konstant bei eins liegt und an den Wänden steil abfällt. Man kann weiterhin gut erkennen, daß die Grenzschicht mit mindestens vier Maschen aufgelöst ist.

Die Lage des Temperaturmaximums verschiebt sich mit zunehmender Rayleigh-Zahl näher an die obere Wand. Nach Abb. 5.5 wird mehr Wärme nach oben abgeführt als nach unten. Da die Wärmequelle im Fluid homogen ist folgt, daß auch Wärme aus Bereichen weit unterhalb der Höhe des Temperaturmaximums nach oben transportiert wird, also entgegen den Temperaturgradienten. Tatsächlich konnte schon mit den ersten Simulationen für diese Konvektionsart gezeigt werden, daß z.B. bei der Rayleigh-Zahl von  $Ra=4 \cdot 10^6$  über etwa die halbe Schichthöhe der turbulente Wärmetransport gegen den Temperaturgradienten gerichtet ist (Grötzbach, 1982, 1987).

Abb. 5.13 zeigt die Profile der Temperatur-RMS-Werte. Man erkennt deutlich, daß sich die Lage des Maximums für steigende Rayleigh-Zahlen immer mehr zur oberen Wand verschiebt. Dem Betrag nach ergeben sich keine großen Änderungen, sodaß der Maximalwert stets knapp über 15% von  $\Delta T_{\max}$  liegt. Das Minimum liegt nahezu immer an der gleichen Stelle in der unteren Hälfte des Kanals und ändert seinen Wert ebenfalls kaum. In der oberen Kanalhälfte sinken die RMS-Werte abseits der Wand für wachsende Rayleigh-Zahl ab, während sie an der unteren Wand ansteigen. Eine weitere charakteristische Größe ist die Schiefe ("Skewness"). Sie ist das zentrale Moment 3. Ordnung der turbulenten Schwankungsgröße, normiert mit der 3. Potenz der Standardabweichung. Sie ist definiert als:

$$S_{\Phi} = \frac{\langle \Phi'^3 \rangle}{\langle \Phi'^2 \rangle^{3/2}} \quad (5.5)$$

Die Schiefe charakterisiert die Symmetrie der Verteilungsfunktion von  $\Phi$ . Bei einer symmetrischen Funktion ist die Schiefe gleich Null. Bei häufigen positiven (negativen) Schwankungen mit kleiner Amplitude und seltenen negativen (positiven) Schwankungen mit großer Amplitude ist sie negativ (positiv), siehe Abb. 5.14.

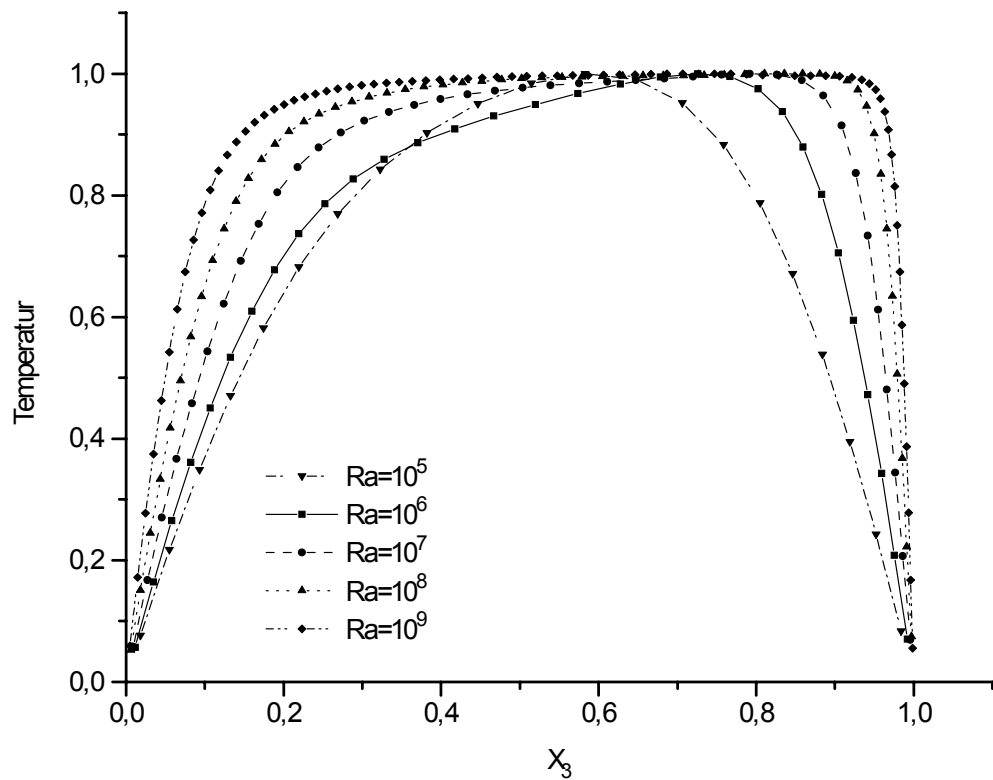


Abb. 5.12: Auf  $\Delta T_{\max}=1$  normierte vertikale Profile der mittleren Temperatur.

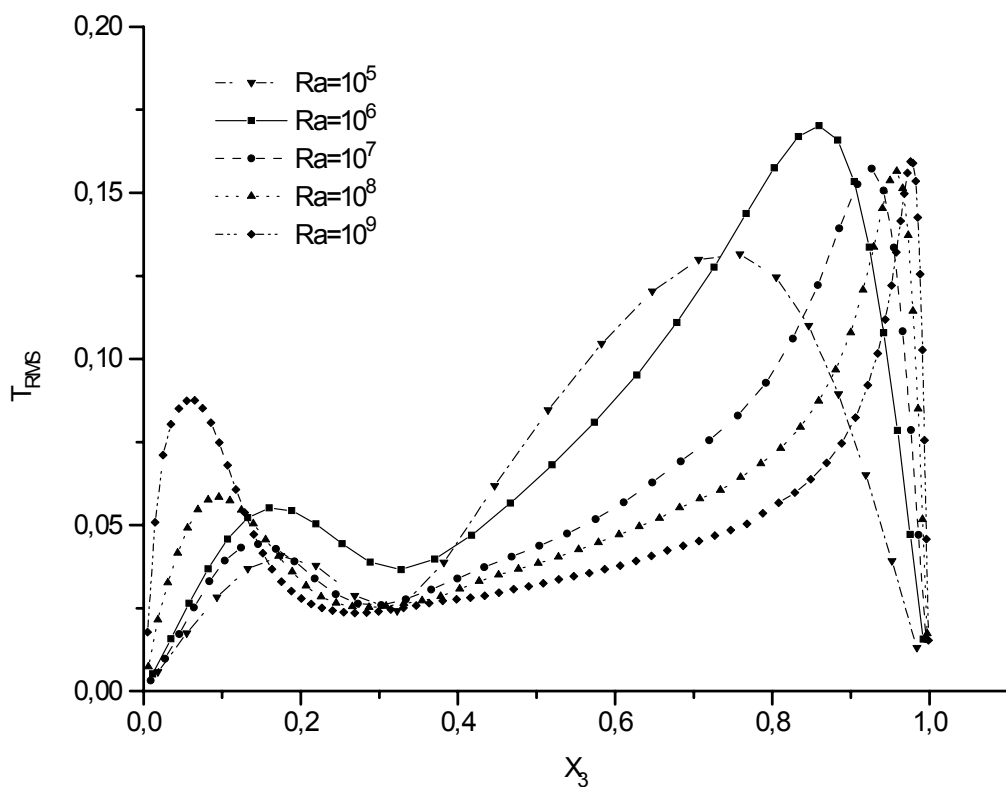
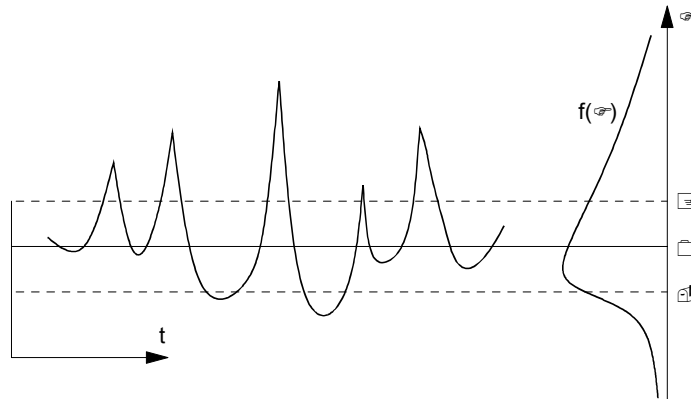


Abb. 5.13: Temperatur-RMS-Werte für verschiedene Rayleigh-Zahlen.



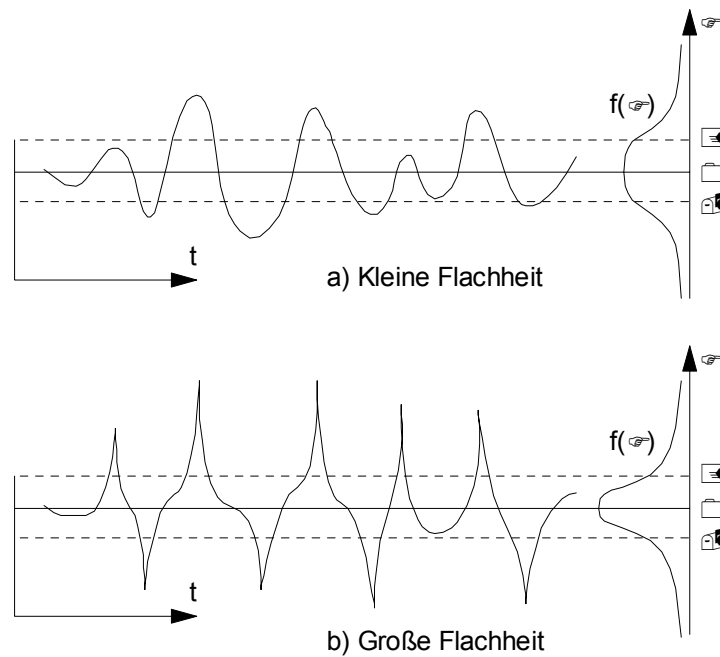
**Abb. 5.14:** Signal und Wahrscheinlichkeitsdichte einer Funktion mit positiver Schiefe.

Das mit der 4. Potenz der Standardabweichung normierte, zentrale Moment 4. Ordnung der turbulenten Schwankungsgröße wird als Flachheit ("Flatness", "Kurtosis") bezeichnet:

$$F_{\Phi} = \frac{\langle \Phi'^4 \rangle}{\langle \Phi'^2 \rangle^2} \quad (5.6)$$

Bei einem hohen Wert der Flachheit besteht das Signal aus vielen schmalen Abweichungen vom Mittelwert mit großer Amplitude und wenigen breiten Abweichungen mit niedriger Amplitude. Im entgegengesetzten Fall hat die Flachheit einen kleinen Wert, siehe Abb. 5.15 Für eine Gaußsche Normalverteilung hat die Flachheit den Wert 3, für ein Sinussignal den Wert 1,5.

Abb. 5.16 zeigt die Schiefen der Temperaturfluktuationen für die simulierten Rayleigh-Zahlen. Der negative Wert im oberen Bereich deutet auf seltene negative Abweichungen mit großen Amplituden. Hier befindet sich der heiße Kernbereich des Kanals, der tatsächlich durch wenige kalte Ablösungen von der oberen Wand durchdrungen wird. Im unteren Drittel kehrt sich der Effekt um. Der positive Wert ist ein Indiz dafür, daß sich die von der oberen Wand fallenden Abstromfahnen oder Ablösungen im Kern der Strömung aufheizen und als heiße Tropfen in die untere Grenzschicht eindringen. Bemerkenswert ist der annähernd gleiche Verlauf der Schiefe bei allen simulierten Rayleigh-Zahlen.



**Abb. 5.15:** Signal und Wahrscheinlichkeitsdichte von Funktionen mit a) kleiner Flachheit und b) großer Flachheit.

Abb 5.17 zeigt die Flachheit der Temperaturfluktuationen über der Kanalhöhe. Fast im gesamten Bereich ergibt sich ein sehr hoher Wert, was auf Temperaturfluktuationen großer Amplituden schließen läßt. Die Lage des Maximums verschiebt sich bei steigender Rayleigh-Zahl hin zur oberen, die des Minimums hin zur unteren Wand. An der unteren Kanalwand und im oberen Bereich der Strömung wächst die Flachheit mit der Rayleigh-Zahl an, was die zunehmend turbulenteren Strömung widerspiegelt.

Schiefe und Flachheit hängen als höhere Momente sehr stark von einer ausreichenden statistischen Mitteilung ab. Die hier gegebenen Daten für die Schiefe erscheinen ausreichend systematisch, die der Flachheit zeigen jedoch, daß für deren genaue Ermittlung über noch mehr Zeitpunkte gemittelt werden sollte.

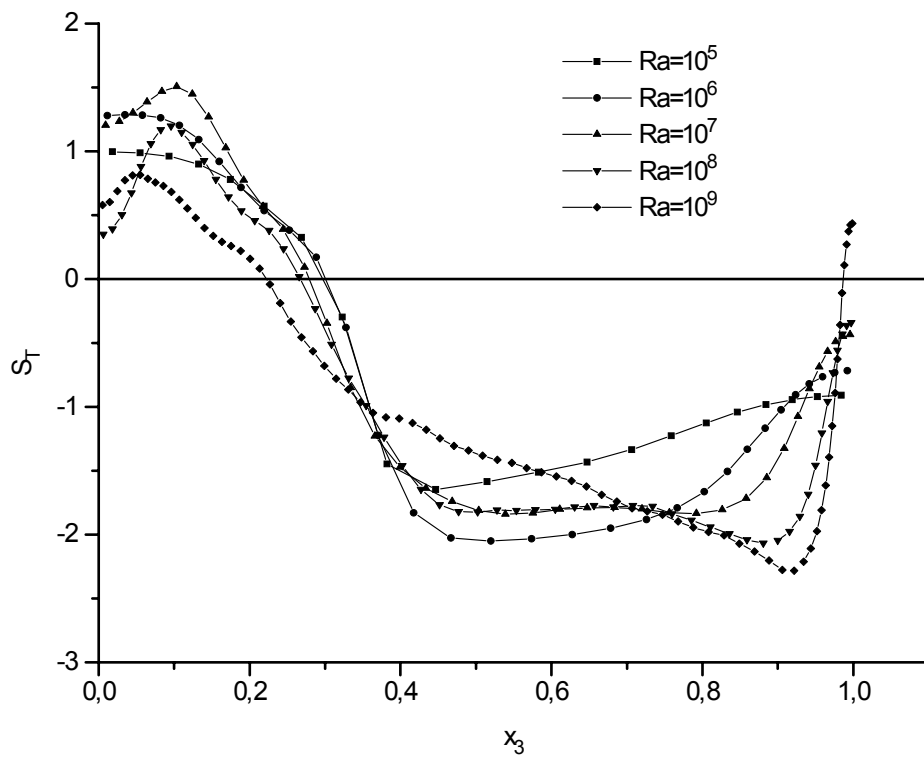


Abb 5.16: Vertikales Profil der Schiefe der Temperaturfluktuationen.

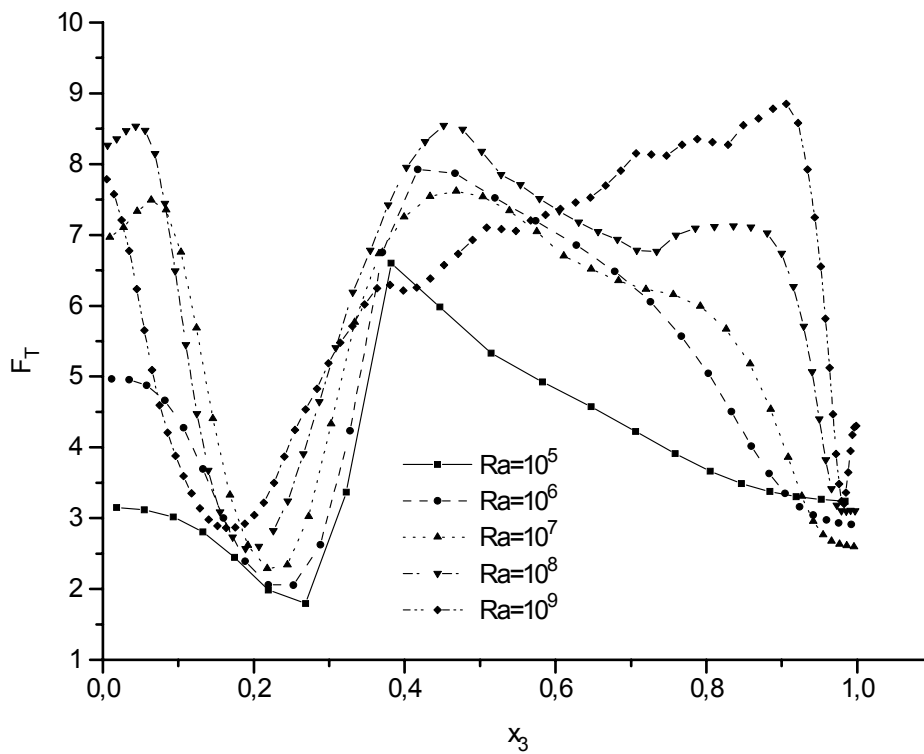


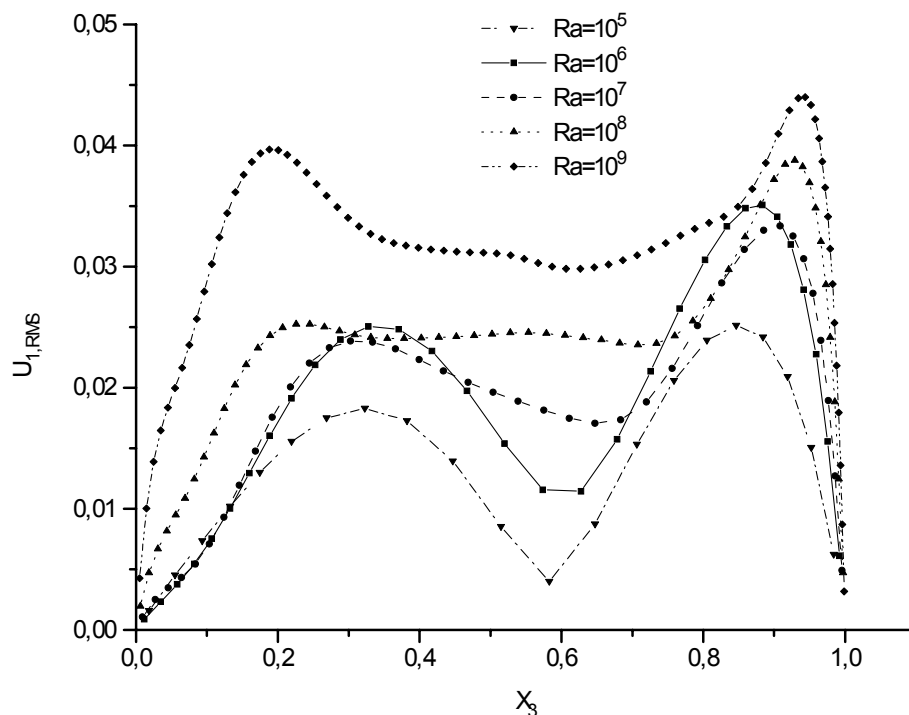
Abb 5.17: Vertikales Profil der Flachheit der Temperaturfluktuationen.

### 5.4.2 Geschwindigkeitsfeld

Für die in dieser Arbeit betrachtete Prandtl-Zahl von Sieben ist die thermische Grenzschicht wesentlich dünner als die viskose. Deutlich wird dies beim Vergleich der Temperatur-RMS-Werte von Abb. 5.13 mit den RMS-Werten der  $u_1$ -Geschwindigkeitskomponente in Abb. 5.18. Die Temperatur-RMS-Werte erreichen ihr Maximum wesentlich näher an der Wand. Auffallend ist bei den  $u_1$ -Geschwindigkeits-RMS-Profilen ein starkes Ansteigen der Werte in Kanalmitte und, wie bei den Temperatur-RMS-Werten, an der unteren Wand bei hohen Rayleigh-Zahlen. Das Profil nähert sich seiner Form nach dem symmetrischen, wannenförmigen Profil der Rayleigh-Benard-Konvektion an (vergl. Wörner, 1994).

Für die  $u_2$ -RMS-Werte ergeben sich bei allen Rayleigh-Zahlen ähnliche Verläufe wie bei der  $u_1$ -Komponente. Dies ist ein Indiz dafür, daß es keine horizontale Vorzugsrichtung im Strömungsfeld gibt.

Die  $u_3$ -RMS-Werte haben in dem betrachteten Bereich der Rayleigh-Zahl nur ein Maximum, das in der oberen Hälfte des Kanals liegt. Die Verteilungen fallen zu den Wänden hin auf Null ab, siehe Abb. 5.19. Ist die Grenzschicht ausreichend aufgelöst, zeigt sich dort eine waagerechte Tangente. Diese wird bei den beiden höchsten Rayleigh-Zahlen nur andeutungsweise erreicht.



**Abb. 5.18:** Profile der RMS-Werte der  $u_1$ -Geschwindigkeitskomponente.

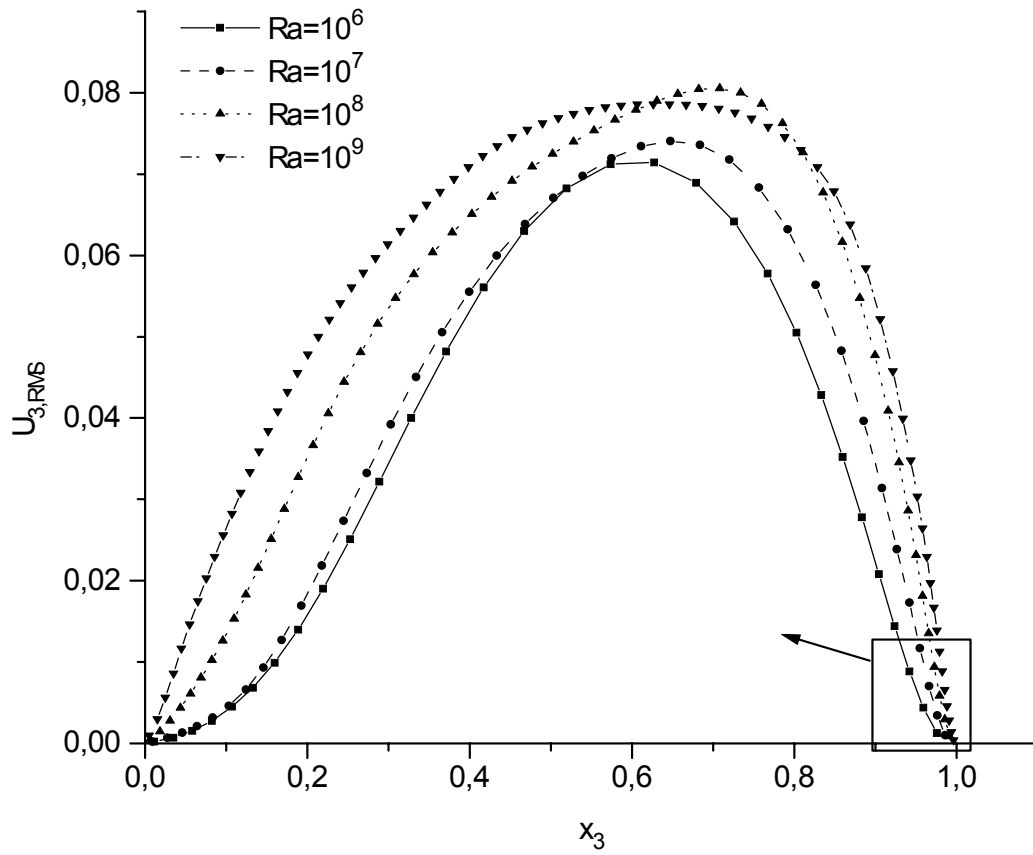


Abb. 5.19: Profile der RMS-Werte der Vertikalgeschwindigkeit  $u_3$ .

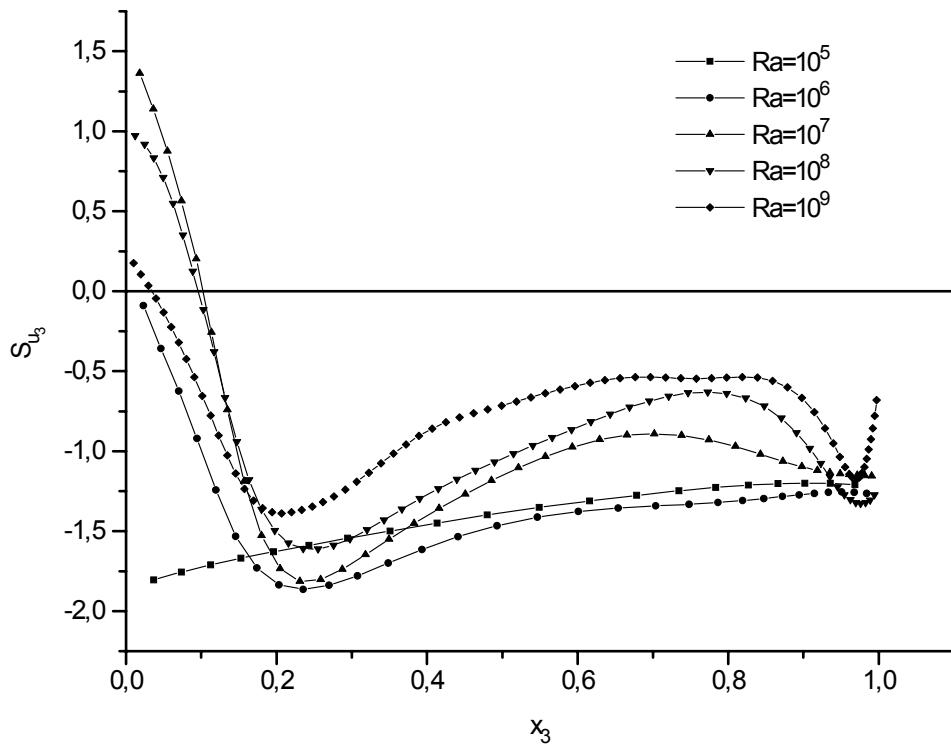
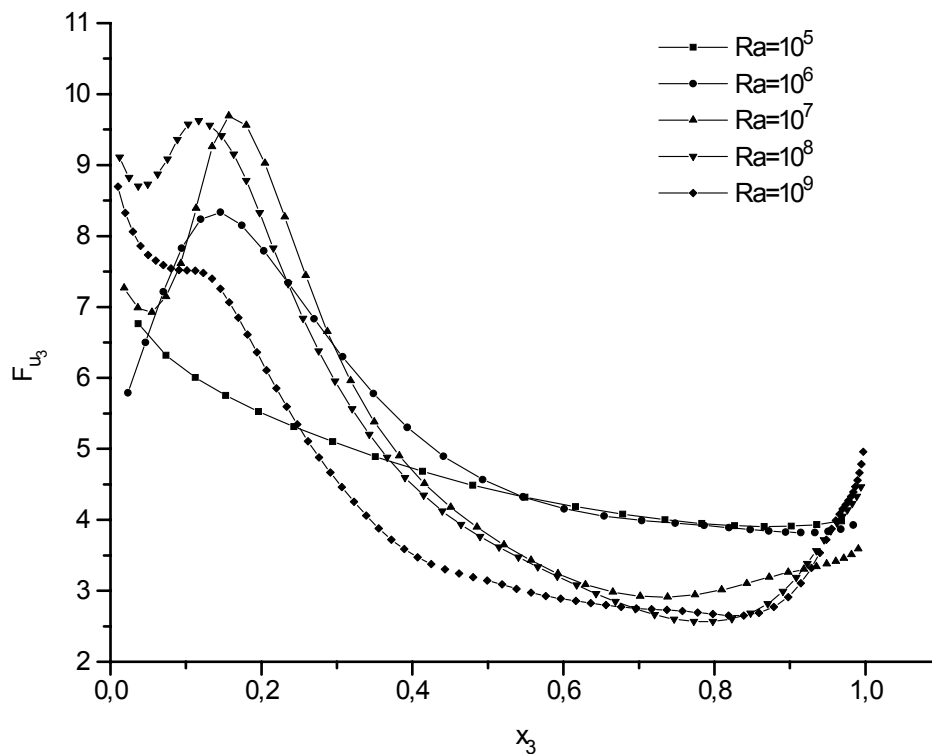


Abb. 5.20: Vertikale Profile der Schiefe der  $u_3$ -Geschwindigkeitskomponente.





**Abb. 5.21:** Vertikale Profile der Flachheit der  $u_3$ -Geschwindigkeitskomponente.

Der Maximalwert des RMS-Wertes der Vertikalgeschwindigkeit ist für alle hier betrachteten Rayleigh-Zahlen größer als der der Horizontalgeschwindigkeiten. Dies spiegelt wider, daß die Konvektion ausschließlich über den in vertikaler Richtung wirkenden Auftrieb angetrieben wird.

Vergleicht man die hier gegebenen Profile der RMS-Werte für die Rayleigh-Zahlen  $Ra = 10^6$  und  $10^7$  mit denen der Simulation für  $Ra = 4 \cdot 10^6$  (Grötzbach, 1989), so erkennt man den großen Effekt der Mittelwertbildung über die homogenen horizontalen Ebenen. Die dort verwendete Periodenlänge von 7,2 erfaßt gegenüber der hier verwendeten von 5 eine mehr als doppelt so große Fläche und liefert bei der Mittelung über dieselbe Anzahl an Zeitpunkten wesentlich glattere Profile.

Die Profile der Schiefe von  $u_3$  in Abb. 5.20 weisen für  $Ra=10^5$  und  $Ra=10^6$  im gesamten Kanal negative Werte auf. Erst ab  $Ra=10^7$  ergeben sich an der unteren Wand positive Werte. Fast im gesamten Kanal überwiegen also die positiven Abweichungen mit kleiner Amplitude (d.h. großflächige langsame Aufwärtsbewegung), die nur selten von negativen Abweichungen mit großer Amplitude unterbrochen werden. Es handelt sich hier wieder um die von der oberen Wand kommenden schnellen Abstromfahnen oder Ablösungen. An der unteren Wand ergeben sich bei hohen Ray-

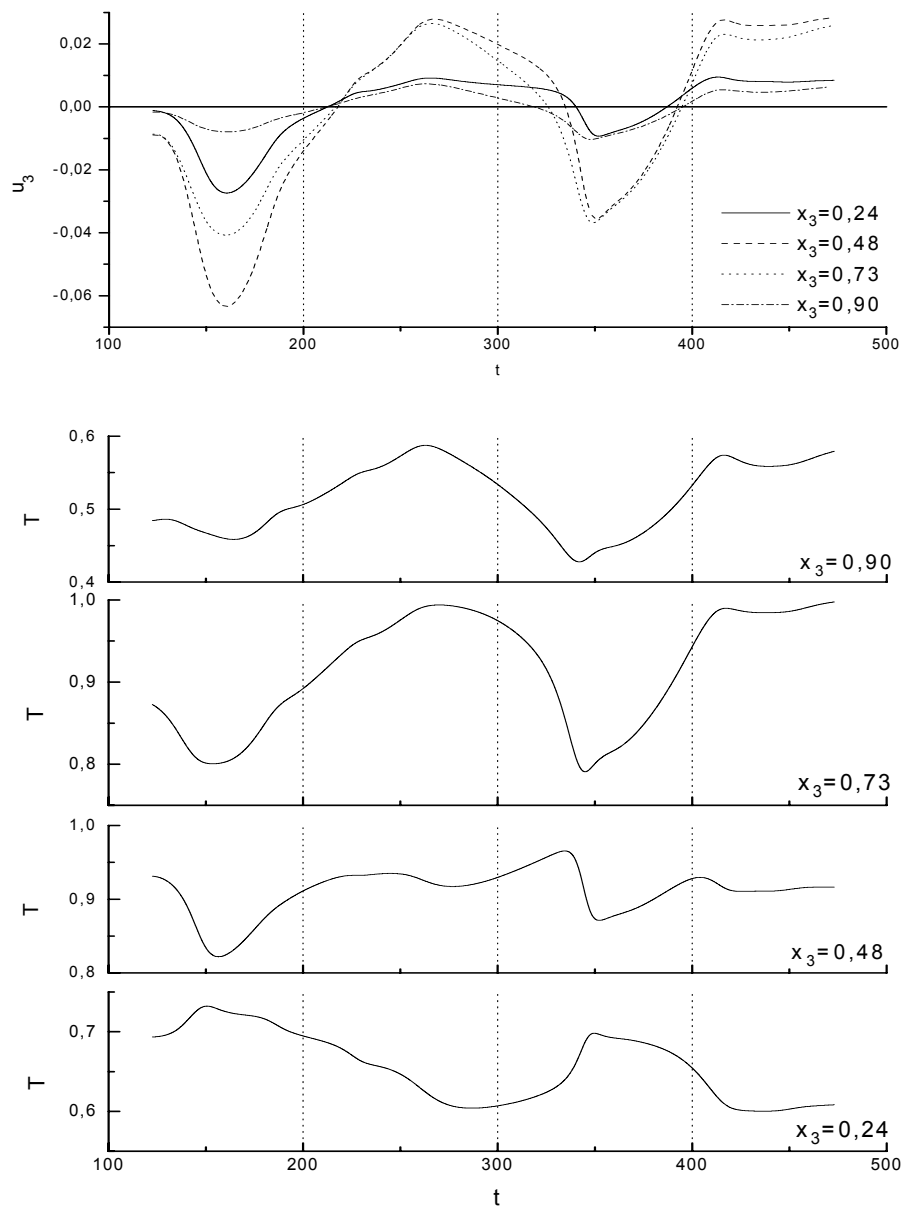
leigh-Zahlen positive Schiefen, was bedeutet, daß vereinzelt aufwärts nun größere Geschwindigkeiten auftreten als abwärts. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, daß die mit hoher kinetischer Energie in die untere Grenzschicht hineinfallenden Ablösungen aus Gründen der Impulserhaltung ein Herausschleudern von kleineren Fluidballen aus der Grenzschicht in den Zentralbereich des Kanals zur Folge haben.

Für die Flachheit von  $u_3$  ergibt sich besonders an der unteren Kanalwand bei allen Simulationen ein hoher Wert, während im oberen Bereich annähernd der Wert der Gauß-Verteilung erreicht wird (Abb. 5.21). Dies deutet auf die, von den herabfallenden Ablösungen stark gestörte, untere Grenzschicht hin.

Die Ergebnisse der statistischen Analyse der Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen und die daraus gezogenen Schlußfolgerungen für die Strukturen und Dynamik der Konvektion stehen in Einklang mit den in Abschnitt 5.3 und den zugehörigen Filmen gezogenen, wie auch mit den Beobachtungen in den Filmen zu den holographischen Experimenten (Jahn, 1975) und in den Simulationen von Grötzbach (1987, 1989).

## 5.5 Zeitsignale

TURBIT bietet die Möglichkeit, nach jedem Integrationsschritt momentane Geschwindigkeits-, Temperatur- und Druckdaten an der Position  $x_{1,2}=1/2 \cdot X_{1,2}$  für  $0 \leq x_3 \leq 1$  in einer Datei mitzuschreiben. Abb. 5.22 zeigt oben den Verlauf der  $u_3$ -Geschwindigkeitskomponente und unten den Temperaturverlauf für  $x_3=0,24, 0,48, 0,73$  und  $0,90$  über der Zeit für  $Ra=10^5$ . Der Bereich von  $t_{TURBIT}=120$  bis  $t_{TURBIT}=470$  entspricht nach Gleichung (A.3) in Anhang A bei den Stoffwerten für Wasser von  $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  und  $Pr=7$  und einer angenommenen Kanalhöhe von  $5,5 \text{ mm}$  (Jahn, 1975) einer realen Zeitspanne von  $t_{real}=273 \text{ s}$ . Man erkennt bei  $t \approx 160$  und  $t \approx 350$  jeweils einen einzelnen, sich von der oberen Wand ablösenden kalten Tropfen, der mit hoher Geschwindigkeit nach unten fällt. Seine Maximalgeschwindigkeit erreicht er bei  $x_3=0,48$ . Durch ihn fällt die Temperatur bei  $x_3=0,73$  zunächst stark ab. Bei  $x_3=0,48$  ist dieser Effekt schon weniger ausgeprägt und bei  $x_3=0,24$  hat sich der Tropfen im heißen Kernbereich der Strömung so weit aufgeheizt, daß er dort im kälteren Umfeld ein Ansteigen der Temperatur bewirkt und weiter abgebremst wird. Er dringt daher nur noch langsam in die untere Grenzschicht ein. Zwischen den Ablösungen bei  $t=160$  und  $t=350$  liegt ein langer Zeitraum mit einer langsamen Aufwärtsbewegung vor. Hier kehrt sich der Effekt um. Heißes Fluid wird aus dem Kernbereich an die obere Grenzschicht transportiert und bewirkt dort ein Ansteigen der Temperatur, während an der unteren Grenzschicht kaltes Fluid von der Wand in innere Bereiche aufsteigt.



**Abb. 5.22:** Zeitsignale der vertikalen Geschwindigkeitskomponente und der Temperatur bei  $x_{1,2}=3$  für verschiedene  $x_3$ -Koordinaten,  $Ra=10^5$ .

## 5.6 Analyse von Turbulenzmodellansätzen

### 5.6.1 Zu statistischen Turbulenzmodellen

Um turbulente Strömungen mit Hilfe der Gleichungen (2.6) bis (2.8) numerisch beschreiben zu können, müssen alle Längenmaßstäbe des Stromfeldes im Rechengitter erfaßt werden. Mit zunehmender Intensität der Turbulenz treten aber immer kleinere Wirbel auf, sodaß immer feinere Gitter benötigt werden. Die für eine direkte numerische Simulation notwendige Maschenanzahl kann daher schnell so groß werden, daß die Kapazität der heutigen Computer an ihre Grenzen stößt. Für technische Strömungsprobleme interessieren im allgemeinen nicht die Details der Turbulenz, sondern im Wesentlichen die mittleren Strömungsgrößen. Da das Feld der zeitlich gemittelten Strömungsgrößen wesentlich glatter ist als das der momentanen Größen, reichen für die Berechnung der mittleren Felder wesentlich gröbere Gitter aus. Eine solche statistische Betrachtungsweise bringt allerdings den Nachteil mit sich, daß nun die auf die turbulente Schwankungsbewegung zurückzuführenden Transportvorgänge durch empirische Ansätze modelliert werden müssen.

Zur Herleitung der Gleichungen für die mittleren Strömungsgrößen erfolgt zunächst eine Aufspaltung in einen Mittelwert (gekennzeichnet durch  $\langle \rangle$ ), der über ein Zeitintervall  $t_2-t_1$  gebildet wird, und einen Schwankungswert (gekennzeichnet durch  $'$ ):

$$\Phi(x, y, z, t) = \langle \Phi(x, y, z) \rangle + \Phi'(x, y, z, t) \quad (5.7)$$

mit

$$\langle \Phi(x, y, z) \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, y, z, t) dt \quad (5.8)$$

Der zeitliche Mittelwert der Schwankungsgrößen ist wegen (5.7) Null.

Setzt man diesen Ansatz in die Grundgleichungen für die momentanen Größen ein, so folgt für die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla(\langle \bar{u} \rangle + \bar{u}') = \nabla \langle \bar{u} \rangle + \nabla \bar{u}' = 0 \quad (5.9)$$

d.h., die Kontinuitätsgleichung gilt in gleicher Weise für die Momentanwerte, die zeitlichen Mittelwerte und die Schwankungswerte der Strömungsgeschwindigkeit.

Aus der Impulsgleichung der Momentanwerte wird mit (5.7)

$$\rho \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial t} + \rho \langle \bar{u} \rangle \nabla \langle \bar{u} \rangle = -\nabla \langle p \rangle + \nabla \cdot \langle \tau_{ik} \rangle - \rho \langle u_i' u_k' \rangle + \rho \bar{f} \quad (5.10)$$

und aus der Energiegleichung

$$\rho c_p \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \rho c_p \langle \bar{u} \rangle \nabla \langle T \rangle = -\nabla \cdot \langle \bar{q} \rangle + \rho c_p \langle u_i' T' \rangle + \dot{q}_{in} \quad (5.11)$$

In diesen sogenannten Reynoldsschen Gleichungen treten neben dem mittleren Spannungstensor  $\langle \tau_{ik} \rangle$  und dem mittleren Wärmestromdichtevektor  $\langle \bar{q} \rangle$  zusätzliche Größen auf, und zwar der Reynoldssche Schubspannungstensor

$$\langle \tau_{ik} \rangle_{turb} = -\rho \langle u_i' u_k' \rangle \quad (5.12)$$

und der Reynoldssche Wärmestromvektor (turbulenter Wärmestrom)

$$\langle \bar{q} \rangle_{turb} = -\rho c_p \langle u_i' T' \rangle \quad (5.13)$$

Sie stellen den zusätzlichen Impuls- und Wärmetransport aufgrund turbulenter Fluktuationsbewegung dar. Sie sind zunächst unbekannt und verhindern dadurch ein Lösen der Erhaltungsgleichungen (5.9) bis (5.11).

Statistische Turbulenzmodelle haben die Aufgabe, diese Unbekannten zu bestimmen und das Gleichungssystem damit lösbar zu machen. Durch entsprechende Umformungen der Erhaltungsgleichungen lassen sich Transportgleichungen für den Reynoldsschen Spannungstensor und den Reynoldsschen Wärmestromvektor ableiten. Diese enthalten jedoch wiederum neue unbekannte Korrelationen, für die sich wieder Transportgleichungen mit weiteren neuen unbekanntenen Korrelationen herleiten lassen. Dieses Verfahren lässt sich im Prinzip beliebig fortsetzen, es fehlen jedoch stets Gleichungen, um alle Unbekannten berechnen zu können. Dieses Schließungsproblem lässt sich daher nur mit Hilfe sogenannter halbempirischer Ansätze lösen.

Das bekannteste und in Rechenprogrammen am häufigsten verwendete Modell ist das  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (Launder und Spalding, 1974). Es basiert auf dem Prinzip der Wirbelviskosität und der Wirbeldiffusivität. Dabei erfolgt die Modellierung der Reynoldsschen Spannungen analog zum molekularen Impulstransport über Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten:

$$-\langle u_i' u_k' \rangle = \nu_t \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} k \quad (5.14)$$

mit der turbulenten (oder Wirbel-) Viskosität  $\nu_t$  und der kinetischen Energie der Schwankungswerte (kinetische Turbulenzenergie)  $k$ :

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle \quad (5.15)$$

Entsprechend wird für die turbulenten Wärmeströme ein Fourier-Ansatz

$$-\langle u_i' T' \rangle = a_t \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} \quad (5.16)$$

gemacht, wobei  $a_t$  die Wirbelleitfähigkeit (Wirbelkonduktivität) ist. Diese neuen Größen  $\nu_t$  und  $a_t$  sind keine Stoffkoeffizienten, sondern vom lokalen instantanen Zustand der Turbulenz, also von Ort und Zeit abhängig. Analog zur molekularen Prandtl-Zahl kann die turbulente Prandtl-Zahl  $Pr_t$  definiert werden als:

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t} \quad (5.17)$$

Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  wird entsprechend ihrer Dimension  $L^2/t$  als Produkt eines charakteristischen Geschwindigkeits- und Längenmaßstabes dargestellt. Als Geschwindigkeitsmaß wird die Wurzel der kinetischen Turbulenzenergie ( $u \sim \sqrt{k}$ ) verwendet. Das Längenmaß wird aus  $k$  und der Dissipationsrate  $\varepsilon$  abgeleitet zu  $L \sim k^{3/2}/\varepsilon$ . Mit dem Proportionalitätsfaktor  $C_\mu$  ergibt sich für die Wirbelviskosität:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.18)$$

Mit Hilfe der turbulenten Prandtl-Zahl, deren Wert häufig als  $Pr_t = 1$  angenommen wird, kann die Wirbelkonduktivität  $a_t$  bestimmt werden. Zur Bestimmung von  $k$  und  $\varepsilon$  werden aus den Grundgleichungen Transportgleichungen abgeleitet, die wiederum unbekannte Terme enthalten. Durch entsprechende Modellansätze lassen sich diese Terme auf bekannte Ausdrücke zurückführen.

Die Bestimmung der zahlreichen Konstanten (z.B.  $C_{\mu}$ ,  $Pr_t$ ) erfolgt im allgemeinen anhand experimenteller Daten. Korrelationen zweiter und dritter Ordnung, die in den Transportgleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  vorkommen, können jedoch nur sehr ungenau oder überhaupt nicht experimentell bestimmt werden. Hier liegt der entscheidende Vorteil der direkten numerischen Simulation, da bei ihr die exakten Erhaltungsgleichungen ohne weitere Modellannahmen gelöst werden. Aus den Ergebnissen können also alle benötigten Korrelationen der verschiedenen Schwankungsgrößen direkt ausgewertet werden und die Qualität des Turbulenzmodells damit verifiziert werden.

### 5.6.2 Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie

Unter Verwendung der zeitlich gemittelten und der zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichung kann für die kinetische Turbulenzenergie  $k$  eine exakte Transportgleichung hergeleitet werden (Hinze, 1975). Mit der in TURBIT verwendeten Normierung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial k}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ - \left\langle u'_k \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + p' \right) \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] - \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \\
 &+ \langle u'_i T' \rangle \delta_{i3} - \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Änderungs-  
rate
Konvektiver  
Transport
D  
Diffusiver Transport
P<sub>S</sub>  
Produktion durch  
Schubspannung

P<sub>a</sub>  
Produktion/Vernichtung  
durch Auftriebseffekte
ε  
Dissipation

Die Konvektion mit innerer Wärmequelle ist in den horizontalen Richtungen im statistischen Sinne homogen. Daraus folgt, daß Ableitungen zeitlich gemittelter Größen in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung gleich Null werden. Gradienten der mittleren Größen existieren also nur in  $x_3$ -Richtung. Mittelt man die Größen über einen ausreichend langen Zeitraum, so treten bei intern beheizter Konvektion keine mittleren Geschwindigkeiten auf, d.h.  $\langle u_i \rangle = 0$ . Damit verschwinden auch Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten, so daß der Produktionsterm durch Schubspannung und der konvektive Transport ebenfalls zu Null wird. Geht man weiterhin von einer im statistischen Sinne eingelaufenen Strömung aus, so verschwindet die Änderungsrate und die Transportgleichung für  $k$  vereinfacht sich zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \underbrace{-\left\langle u'_3 \frac{u'_i u'_i}{2} \right\rangle - \langle u'_3 p' \rangle + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial k}{\partial x_3}}_D \right] + \underbrace{\langle u'_3 T' \rangle}_{P_a} - \frac{1}{\sqrt{Gr}} \underbrace{\left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle}_{\varepsilon} \quad (5.20)$$

D  
Diffusiver Transport

P<sub>a</sub>  
Produktion/Vernichtung  
durch Auftriebseffekte

ε  
Dissipation

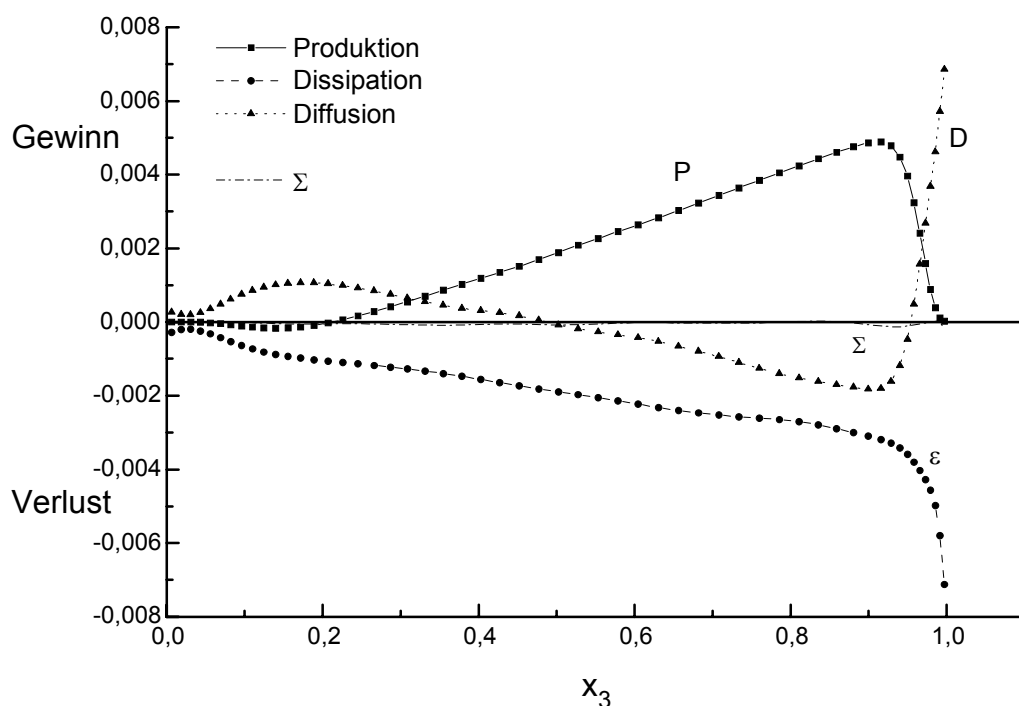
Die Erhaltungsgleichung für die kinetische Turbulenzenergie besteht in diesem Fall also nur noch aus dem diffusiven Transport, der Produktion/Vernichtung durch Auftriebseffekte (das ist der vertikale turbulente Wärmestrom) und der Dissipation.

Das  $k$ - $\varepsilon$ -Modell wurde für Strömungen mit hohem Turbulenzgrad entwickelt. Für die Analyse der Terme dieser Gleichung sollten also die Ergebnisse der Simulation für die höchste Rayleigh-Zahl benutzt werden. Da die Simulation mit  $Ra=10^9$  aber noch keinen quasistationären Zustand erreicht hat, werden im folgenden die Daten der Simulation mit  $Ra=10^8$  verwendet, um Terme auszuwerten und Modellansätze zu verifizieren.

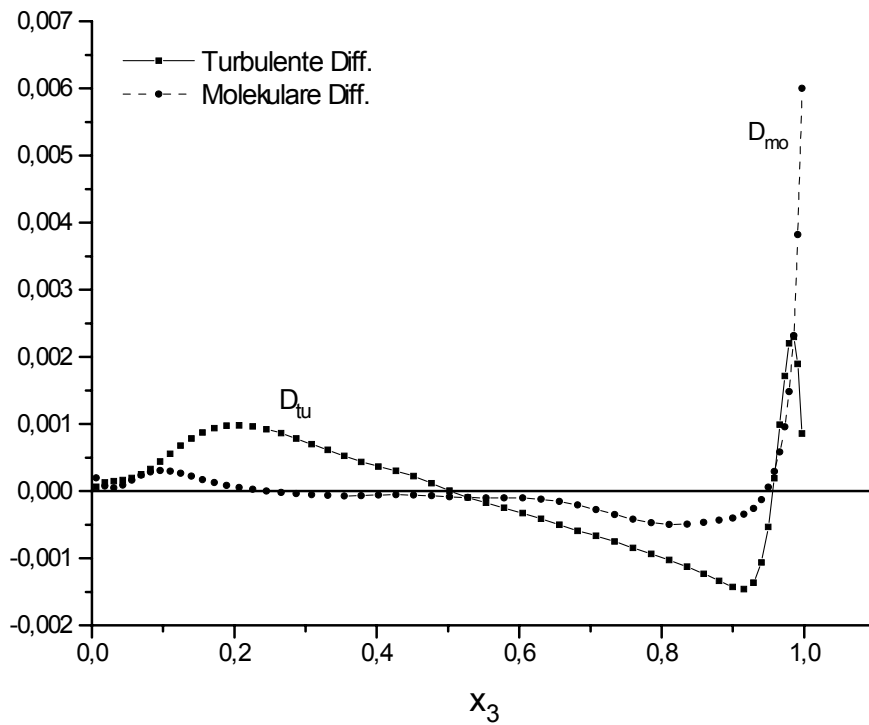
Die einzelnen Terme der Transportgleichung (5.20) sind für  $Ra=10^8$  in Abb. 5.23 über der Kanalhöhe dargestellt. Der Produktionsterm, der bei der hier verwendeten Normierung gleich dem turbulenten Wärmestrom ist, ist an den Wänden Null, wächst an der oberen Wand bis zum Maximum am unteren Rand der dortigen Grenzschicht stark an und fällt dann zur unteren Wand hin linear ab, bis er im unteren Viertel des Kanals negativ wird. Die Dissipation fällt vom Maximalwert an der oberen Wand zunächst stark, dann schwach linear zur unteren Wand hin ab. Nur an zwei vertikalen Positionen im Kanal existiert ein lokales Gleichgewicht zwischen der Produktion und der Dissipation, nämlich dort, wo die Diffusion Null ist. Die Diffusion muß als Umverteilungsterm, der integral über den Kanal keinen Beitrag leistet, das lokale Ungleichgewicht ausgleichen. Das vertikale Profil der Diffusion hat daher an der oberen Wand einen großen positiven Wert, der beim Maximum der Produktion negativ wird, linear ansteigt und in der unteren Kanalhälfte wieder positiv wird. Die mit  $\Sigma$  gekennzeichnete Bilanz aller Terme entspricht über der ganzen Kanalhöhe in etwa dem Wert Null, sodaß man von der Richtigkeit der gemachten Vereinfachung ausgehen kann.



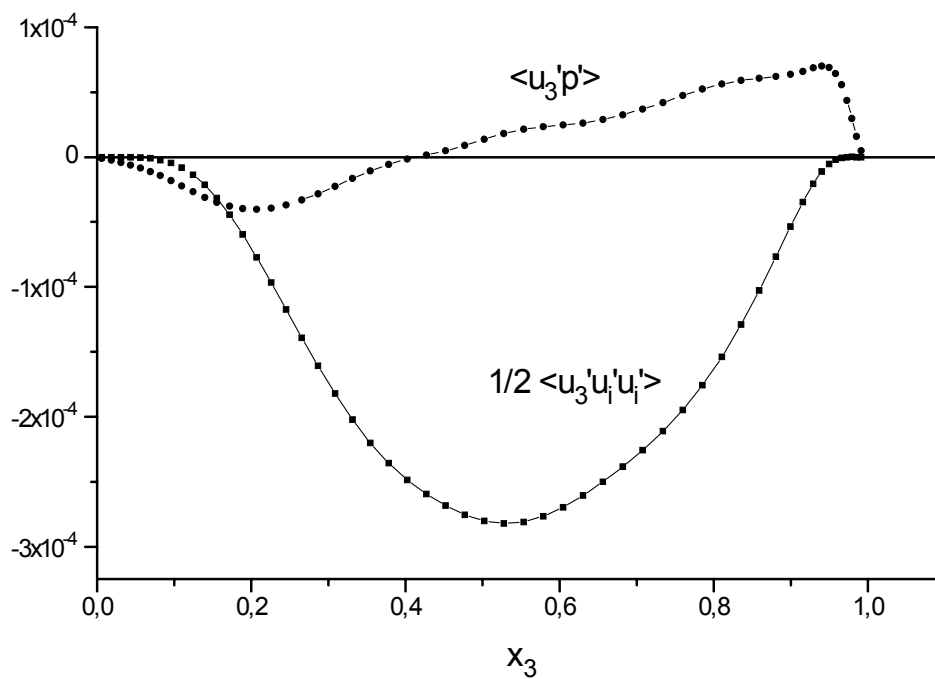
Der Diffusionsterm spielt also eine entscheidende Rolle bei der Umverteilung der kinetischen Turbulenzenergie. Diese wird vom Bereich hoher Produktion unterhalb der oberen Grenzschicht nach oben und unten abtransportiert und dort durch Dissipation in Wärme umgewandelt. Turbulenzmodelle, die die Diffusion in der  $k$ -Gleichung nicht in geeigneter Weise berücksichtigen, sind daher nicht in der Lage, Vorgänge innerhalb der Naturkonvektionsströmung mit innerer Wärmequelle richtig zu beschreiben. Der Diffusionsterm besteht aus drei Anteilen. Die ersten beiden Terme setzen sich aus turbulenten Fluktuationen im Geschwindigkeits- und Druckfeld zusammen und werden daher turbulente Diffusion  $D_{tu}$  genannt. Der dritte Term ist die molekulare Diffusion  $D_{mo}$ .



**Abb. 5.23:** Vertikale Profile der Terme der  $k$ -Gleichung,  $Ra=10^8$ .



**Abb. 5.24:** Vertikale Profile der molekularen und turbulenten Diffusion in der k-Gleichung,  $Ra=10^8$ .



**Abb. 5.25:** Vertikale Profile der Korrelationen für die turbulente Diffusion in der k-Gleichung,  $Ra=10^8$ .

$$D_{\text{mo}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \frac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} \quad (5.21)$$

$$D_{\text{tu}} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \left\langle u'_3 \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + p' \right) \right\rangle \right] \quad (5.22)$$

In Turbulenzmodellen wird die molekulare Diffusion im allgemeinen vernachlässigt (Rodi, 1980). Abb. 5.24 zeigt jedoch, daß sie im Kanallinneren zwar fast verschwindet, im oberen Drittel des Kanals aber eine bedeutende Größe hat und in unmittelbarer Nähe der oberen Wand sogar zum dominierenden Term wird.

Die turbulente Diffusion setzt sich nach Gleichung (5.20) aus den Ableitungen einer Dreifachkorrelation von Geschwindigkeitsfluktuationen und einer Druck-Geschwindigkeits-Korrelation zusammen. Beide Korrelationen sind im  $k$ - $\varepsilon$ -Modell unbekannt und müssen demzufolge modelliert werden. Dabei wird die Druck-Geschwindigkeits-Korrelation im allgemeinen direkt oder indirekt vernachlässigt. Indirekt heißt, daß sich der gemeinsame Modellierungsansatz für beide Terme ausschließlich an der Dreifachkorrelation orientiert. Das üblicherweise verwendete Modell benutzt dazu einen Gradientenansatz und das Wirbelviskositätsprinzip (Launder und Spalding, 1974):

$$\left\langle -u'_3 \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + p' \right) \right\rangle = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_3} \quad (5.23)$$

wobei  $\sigma_k$  eine turbulente Prandtl-Zahl für die kinetische Turbulenzenergie darstellt (üblicherweise wird  $\sigma_k=1$  angenommen). Abb. 5.25 zeigt die vertikalen Profile der beiden Korrelationen auf der linken Seite von Gleichung (5.23) mit umgekehrten Vorzeichen. Im Gegensatz zur Rayleigh-Benard-Konvektion (siehe Wörner, 1994), bei der die Druck-Geschwindigkeits-Korrelation den Diffusionsterm dominiert, spielt sie hier bei der intern beheizten Konvektion nur eine untergeordnete Rolle. Ein allgemeingültiger Modellansatz für die turbulente Diffusion bei Naturkonvektion scheint bei diesem unterschiedlichen Verhalten nicht ohne weiteres möglich.

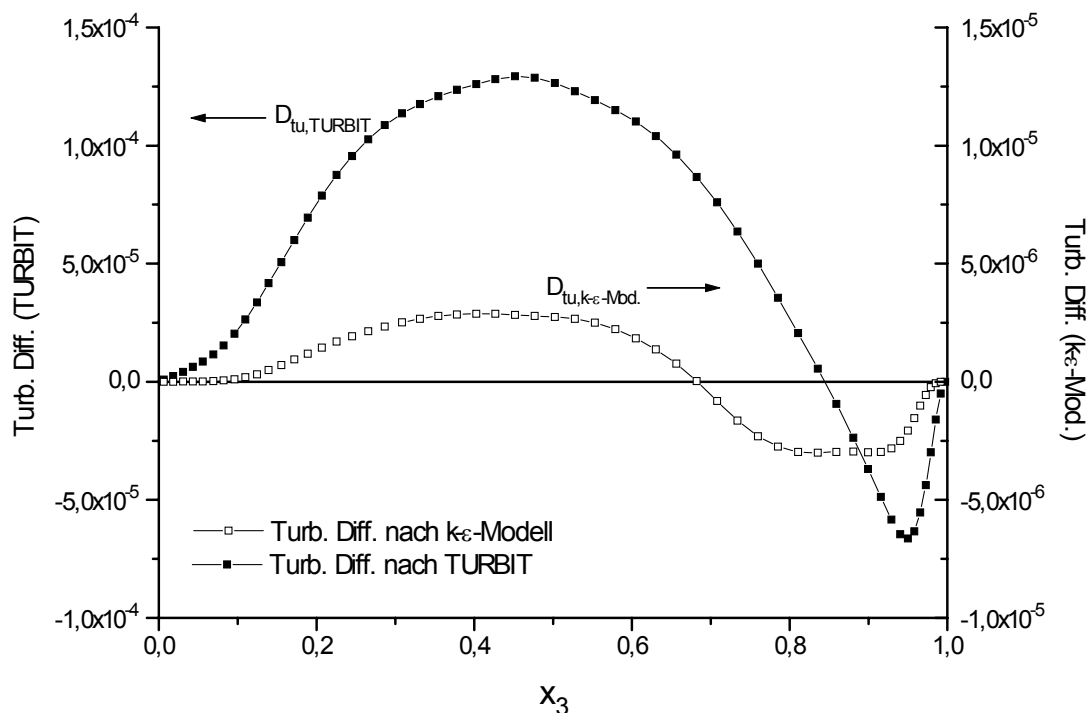
Die turbulente Prandtl-Zahl für die kinetische Turbulenzenergie  $\sigma_k$  und die turbulente Prandtl-Zahl  $Pr_t$  in TURBIT auszuwerten, ist nicht unmittelbar möglich. Da bei Konvektion mit innerer Wärmequelle die mittleren Geschwindigkeitsprofile verschwinden und damit die Wirbelviskosität  $\nu_t$  eigentlich nicht definiert ist, wird diese hier mit Hilfe des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells und dem Standardwert  $C_\mu=0,09$  in Gleichung (5.18) aus den Simulationsergebnissen für  $k$  und  $\varepsilon$  berechnet.

Um den Modellierungsansatz (5.23) für die turbulente Diffusion analysieren zu können, wird in Abb. 5.26 der aus den DNS-Daten ausgewertete Wert für die Summe der Korrelationen im turbulenten Diffusionsterm (5.22) zusammen mit dem Wert des Modells für den Standardwert  $\sigma_k=1,0$  dargestellt. Der Maßstab für  $D_{tu,k-\varepsilon-Mod.}$  wurde dabei um den Faktor 10 kleiner gewählt, um den Verlauf des Profils besser darstellen zu können.

$$D_{tu,TURBIT} = -\langle u'_3 p' \rangle - \frac{1}{2} \langle u'_3 u'_i u'_i \rangle \quad (5.24)$$

$$D_{tu,k-\varepsilon-Mod.} = \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_3} \quad (5.25)$$

Zunächst läßt sich feststellen, daß die durch das Modell aus den DNS-Daten nach Gleichung (5.25) berechneten Werte ca. um den Faktor 50 zu klein sind. Der qualitative Verlauf des Modellergebnisses stimmt hingegen recht gut mit dem für die analytischen Terme (5.24) ausgewerteten überein. Nur unterhalb der oberen Grenzschicht wird durch das Modell ein negativer Wert vorhergesagt, während der tatsächliche noch positiv ist.



**Abb. 5.26:** Gegenüberstellung der ausgewerteten Korrelationen im Diffusionsterm und der Werte nach Ansatz (5.23) mit  $\sigma_k=1$ ,  $Ra=10^8$ . Der Maßstab für  $D_{tu,k-\varepsilon-Mod.}$  ist um den Faktor 10 kleiner.

Hier müssen also noch Verbesserungen des Modells vorgenommen werden, um zumindest die Größenordnung der Modellterme mit der der tatsächlichen Werte in Übereinstimmung zu bringen.

Um die turbulente Diffusion mit Ansatz (5.23) richtig wiederzugeben, müßte  $\sigma_k$  entsprechend der Gleichung

$$\sigma_k = \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_3} \left\langle -u'_3 \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + p' \right) \right\rangle^{-1} \quad (5.26)$$

angepaßt werden. Abb. 5.27 zeigt das vertikale Profil von  $\sigma_k$  nach Gleichung (5.26) aufgetragen über der Kanalhöhe für  $Ra=10^8$ . Die Singularität bei  $x_3=0,9$  entsteht durch den Nulldurchgang der Summe der beiden Korrelationen. Im restlichen Kanalbereich ist  $\sigma_k \approx 0,02$ , was wesentlich kleiner als der normalerweise verwendete Wert von  $\sigma_k=1$  ist. Im Bereich zwischen  $x_3=0,68$ , das ist der Ort des Energiemaximums, und  $x_3=0,9$  ist  $\sigma_k$  negativ. In diesem transportiert die Diffusion kinetische Energie entgegen dem Gradienten der kinetischen Energie. Dafür ist jedoch der Gradientenansatz (5.25) nicht geeignet.

Um die Relevanz der hier festgestellten Probleme mit den Modellansätzen des  $k-\varepsilon$  Modells zu untersuchen, werden die vorgestellten Ergebnisse für  $Ra = 10^8$  verglichen mit denen früherer Simulationen für  $Ra = 4 \cdot 10^6$  (Grötzbach, 1981, 1982, 1987, 1989). Es kann nämlich erwartet werden, daß einige der diskutierten Probleme bei höheren Rayleigh-Zahlen verschwinden,

Zunächst muß man feststellen, daß alle hier für  $Ra=10^8$  diskutierten Phänomene ebenso bei  $Ra=4 \cdot 10^6$  gefunden wurden. Lokales Gleichgewicht zwischen Produktion von  $k$  und Dissipation liegt nur an zwei vertikalen Positionen vor. Dennoch wird deutlich, daß die Bedeutung der Diffusion als Umverteilungsterm mit steigender Rayleigh-Zahl abnimmt. Dies legt nahe, daß für sehr hohe Rayleigh-Zahlen tatsächlich nahezu ein lokales Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation erwartet werden kann. Bei der turbulenten Diffusion hat bei der höheren Rayleigh-Zahl die Tripelkorrelation gegenüber der Druck-Geschwindigkeitskorrelation im Vergleich zur Simulation mit  $Ra = 4 \cdot 10^6$  erheblich an Einfluß gewonnen. Dagegen ist die Ausdehnung des Bereiches, in dem diffusiver Transport entgegen dem Gradienten erfolgt, in dem also der nach Gleichung (5.26) ausgewertete Wert von  $\sigma_k$  negativ ist, bei  $Ra = 10^8$  im Vergleich zu  $Ra = 4 \cdot 10^6$  kaum geschrumpft. Damit ist erst bei um viele Größenordnungen

höheren Rayleigh-Zahlen eine deutliche Minderung der Relevanz der aufgezeigten Probleme zu erwarten. Eine Quantifizierung dieser Aussage ist jedoch nicht möglich, da die für ausreichend genaue Analysen von Termen der k-Gleichung notwendigen Daten für höhere Rayleigh-Zahlen zur Zeit nicht durch Simulationen erzeugt werden können und geeignete experimentelle Daten bis jetzt nicht verfügbar sind. Wegen des generellen Problems mit der Messung von Druckkorrelationen und der Dissipation können solche Daten aus Experimenten in absehbarer Zukunft auch nicht erwartet werden.

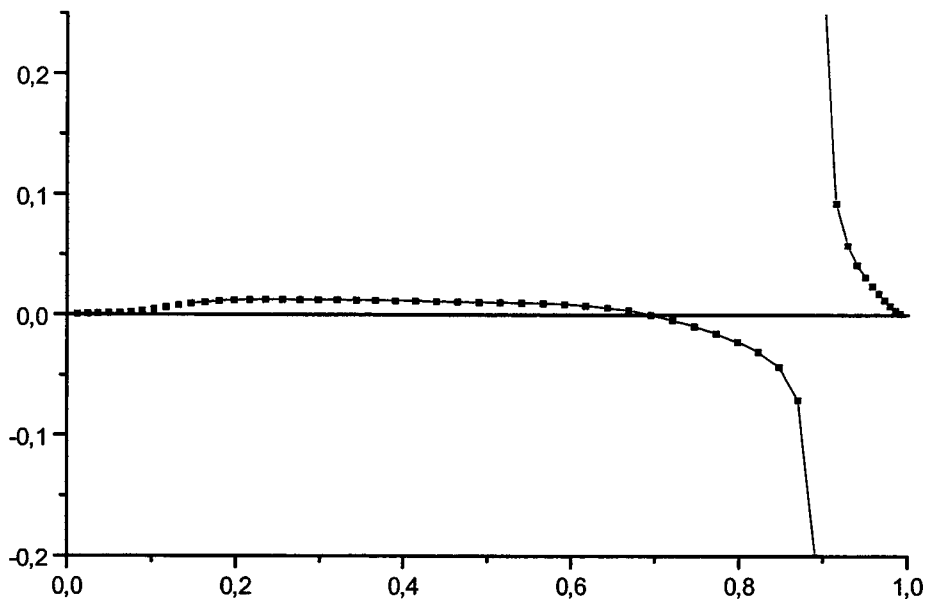


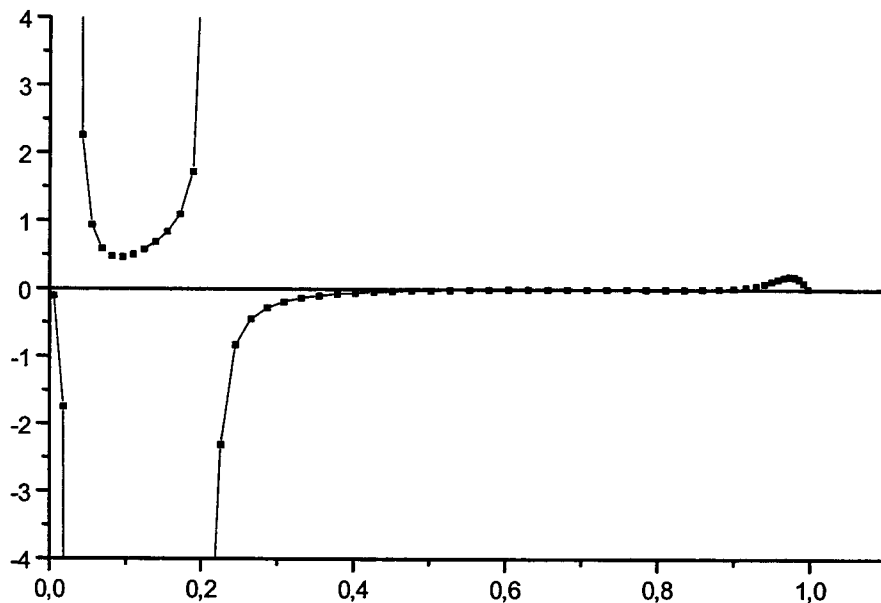
Abb. 5.27: Profil von  $\sigma_k$  ausgewertet nach Gl. (5.26),  $Ra=10^8$ .

### 5.6.3 Turbulente Prandtl-Zahl

Abb. 5.28 zeigt das vertikale Profil der turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t$  nach Gleichung (5.17). Die Wirbelviskosität wurde dabei wieder nach Gleichung (5.18) berechnet, während sich die Wirbelkonduktivität  $a_t$  direkt aus den Simulationsergebnissen ermitteln lässt:

$$a_t = \frac{-\langle u'_3 T' \rangle}{\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_3}} \quad (5.27)$$

Die Darstellung wurde auf den Bereich  $|Pr_t| < 4$  beschränkt, um die wichtigen Bereiche besser aufzulösen. An den beiden vertikalen Positionen, an denen das Profil des turbulenten Wärmestroms einen Nulldurchgang hat (siehe Term P in Abb. 5.23) wird  $Pr_t$  singularär. Es ist allerdings zu vermuten, daß der Nulldurchgang des turbulenten Wärmestroms nahe der unteren Wand bei längerer Zeitmittelung verschwindet. Im Bereich zwischen den beiden Singularitäten und nahe der oberen Wand ist  $Pr_t$  positiv. Im Bereich  $0,2 < x_3 < 0,7$  ist  $Pr_t$  negativ, da hier der turbulente Wärmetransport entgegen dem Temperaturgradienten erfolgt (vergleiche Abschnitt 5.4.1). Generell ist der Wert von  $Pr_t$  im Bereich  $0,4 < x_3 < 0,9$  sehr klein und nahezu Null. Dies liegt daran, daß bei hohen Rayleigh-Zahlen der Kernbereich der Strömung nahezu isotherm ist, sodaß  $a_t$  nach Gleichung (5.27) sehr groß wird. Diese Ergebnisse zeigen, daß eine konstante turbulente Prandtl-Zahl zur Modellierung des turbulenten Wärmestroms in Konvektion mit innerer Wärmequelle nicht geeignet ist. Eine wesentlich bessere Lösung ist deshalb, im Rahmen der Turbulenzmodelle eine weitere Transportgleichung für den turbulenten Wärmestrom aufzustellen. So hat z.B. Carteciano (1996) ein Turbulenzmodell für Auftriebsströmungen entwickelt, das für den turbulenten Impulstransport ein  $k$ - $\varepsilon$ -Modell verwendet und für den turbulenten Wärmetransport ein Wärmestrommodell zweiter Ordnung.



**Abb. 5.28:** Vertikales Profil der ausgewerteten turbulenten Prandtl-Zahl,  $Ra=10^8$ .

## 6 Schlußbetrachtung

### 6.1 Zusammenfassung

Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Konvektion mit innerer Wärmequelle in einem horizontalen Kanal mit isothermen Randbedingungen an der oberen und unteren Wand. Zur Untersuchung wird die Methode der direkten numerischen Simulation verwendet, bei der das Gitternetz ausreichend fein gewählt werden muß, um sämtliche Wirbel des Stromfelds aufzulösen. Es sind dadurch keine Modellannahmen in den Erhaltungsgleichungen nötig. Um einen unendlich ausgedehnten Kanal zu simulieren, werden in horizontaler Richtung periodische Randbedingungen vorgegeben. Mit dieser Methode werden bei einer Prandtl-Zahl von  $Pr=7$  die Rayleigh-Zahlen  $Ra=10^5$ ,  $Ra=5 \cdot 10^5$ ,  $Ra=10^6$ ,  $Ra=5 \cdot 10^6$ ,  $Ra=10^7$ ,  $Ra=10^8$  und  $Ra=10^9$  simuliert und analysiert. Mit 3 Millionen Maschen für die Simulation mit  $Ra=10^9$  wird dabei die Grenze für die direkte numerische Simulation mit annehmbaren Speicher- und Rechenzeitanforderungen auf den im Sommer 1996 verfügbaren Rechnern des Forschungszentrums Karlsruhe erreicht.

Die numerischen Ergebnisse weisen für den Wärmeübergang bis  $Ra=10^9$  eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten an der oberen Wand auf. An der unteren Wand wird für  $Ra=10^9$  eine etwas zu hohe Nußelt-Zahl errechnet. Aus diesen und anderen statistischen Ergebnissen dieser einen Simulation folgt, daß die simulierte Naturkonvektion innerhalb der investierten CPU-Zeit noch nicht voll eingelaufen ist. Ansonsten zeigen die Ergebnisse gute Übereinstimmung mit den wenigen verfügbaren experimentellen Daten und den theoretischen Anforderungen an die direkte numerische Simulation.

Bei der Auswertung der statistischen Strömungsgrößen zeigt sich ein mittleres Temperaturprofil, das bei hohen Rayleigh-Zahlen eine sehr dünne thermische Grenzschicht an der oberen Wand, eine deutlich dickere Grenzschicht an der unteren Wand und einen breiten, annähernd isothermen Bereich in Kanalmitte aufweist. Das Temperaturmaximum verschiebt sich dabei für steigende Rayleigh-Zahl in Richtung der oberen Wand.

Bei der Analyse der Konvektionsmuster zeigen sich bei  $Ra=10^5$  einzelne kalte Abwindfahnen an der oberen Wand. Diese vereinigen sich in der zeitlichen Entwicklung und schaffen dadurch Platz für die Ausbildung neuer Abwindfahnen. Ab  $Ra=5 \cdot 10^5$  bilden sich einzelne Speichen, die aber noch kein geschlossenes Netzwerk bilden. Dies zeigt sich erst ab Rayleigh-Zahlen von  $Ra=10^7$ . Für steigende Rayleigh-

---



Zahl werden die Zellen des Netzes kleiner und die Abwindfahnen gehen in Ablösungen über. Die Ablösungen der oberen Wand fallen dabei unterhalb der Kreuzungspunkte der Speichen als Tropfen durch den Kanal bis in die untere Grenzschicht. Die Aufwärtsbewegung im Zelleninneren besitzt bei allen Rayleigh-Zahlen ihre höchsten Geschwindigkeiten direkt neben den Ablösungen. Für keine der simulierten Rayleigh-Zahlen bildet sich ein zweidimensionaler oder stationärer Strömungszustand aus. Das Konvektionsmuster ist auch bei der kleinsten hier betrachteten Rayleigh-Zahl bereits dreidimensional und instationär.

Im Hinblick auf die Validierung und Weiterentwicklung von statistischen Turbulenzmodellen für die Konvektion mit innerer Wärmequelle wurde die Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie  $k$  untersucht. Hierzu wurde die Simulation mit  $Ra=10^8$  herangezogen. Die Analyse der einzelnen Terme der Transportgleichung zeigt, daß die Produktion von  $k$  und die Dissipation  $\varepsilon$  nicht in lokalem Gleichgewicht sind. Der Diffusionsterm spielt eine wichtige Rolle, um lokale Ungleichgewichte auszugleichen. Ein Überschuß an Produktion von Turbulenzenergie unterhalb der oberen Grenzschicht wird zu den Wänden hin abtransportiert und dort dissipiert.

Betrachtet man den turbulenten und den molekularen Anteil der Diffusion, so zeigt sich, daß die molekulare Diffusion im Kanalinneren nur eine geringe Rolle spielt, an der oberen Wand aber zum dominierenden Term wird. Von den beiden Termen der turbulenten Diffusion ist die Dreifachkorrelation der Geschwindigkeitsfluktuationen fast über die gesamte Kanalhöhe der dominierende Term. Dies steht im Gegensatz zu den Ergebnissen für die Rayleigh-Bénard-Konvektion, bei der die turbulente Diffusion von der Druck-Geschwindigkeits-Korrelation dominiert wird (Wörner, 1994). Dieses Ergebnis widerlegt damit Vermutungen, daß in Naturkonvektion allgemein der turbulente diffusive Transport von kinetischer Turbulenzenergie hauptsächlich auf die Wirkung von Druckfluktuationen zurückzuführen ist (Wörner und Grötzbach, 1997).

Eine Analyse der im  $k$ - $\varepsilon$ -Modell verwendeten turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t$  und der Prandtl-Zahl für die kinetische Turbulenzenergie  $\sigma_k$  zeigt, daß die üblicherweise getroffene Annahme von konstanten Werten für diese Größen bei einer Konvektion mit innerer Wärmequelle nicht gerechtfertigt ist. Die aus den Ergebnissen der direkten numerischen Simulationen gewonnenen vertikalen Profile dieser Koeffizienten variieren vielmehr sehr stark über der Kanalhöhe. Im Zentralbereich des Kanals existiert weiterhin ein turbulenter Wärmetransport entgegen dem Temperaturgradienten, der mit dem Konzept eines Gradientenansatzes und turbulenter Prandtl-Zahl nicht sinnvoll zu modellieren ist. Um den turbulenten Wärmetransport mit Hilfe von Turbulenzmodellen zu beschreiben, müssen daher andere Ansätze gemacht

werden. Es bietet sich hier an, für den turbulenten Wärmetransport eine eigene Transportgleichung zu lösen.

## 6.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit bestätigt für  $Ra=10^8$  das früher für die Rayleigh-Zahl  $Ra=4 \cdot 10^6$  gewonnene Ergebnis, daß das Standard  $k-\varepsilon-Pr_t$ -Modell zur Beschreibung der Konvektion mit interner Wärmequelle nicht geeignet ist. Die darin gemachten Modellannahmen sind nicht in der Lage, die physikalischen Vorgänge adäquat zu beschreiben. Vielversprechender erscheinen Turbulenzmodelle zweiter Ordnung, die die turbulenten Wärmeströme über die Lösung der entsprechenden Transportgleichungen bestimmen. Die mit dieser Arbeit erzeugte Datenbasis kann zur Validierung und Weiterentwicklung von Schließungsansätzen dieses Modellierungskonzeptes verwendet werden.

Daneben bietet es sich an, mit weiteren direkten numerischen Simulationen den Einfluß der Fluid-Prandtl-Zahl auf die Konvektion mit innerer Wärmequelle zu untersuchen. Die in dieser Arbeit verwendete Prandtl-Zahl von  $Pr=7$  entspricht in etwa der von Wasser.

Mit der Rayleigh-Zahl von  $Ra=10^9$  wurde die Grenze der Möglichkeiten der direkten numerischen Simulation bei der zum Zeitpunkt der Durchführung dieser Simulationen im Forschungszentrum Karlsruhe verfügbaren Rechnerleistung erreicht. Höhere Rayleigh-Zahlen und damit auch praxisrelevante, höhere Turbulenzintensitäten werden in Zukunft nur durch schnellere Computer berechnet werden können. Als Alternative bietet sich die Grobstruktursimulation an, bei der der Einfluß der kleinsten Wirbel über ein Feinstrukturmodell simuliert wird. Bei solchen Simulationen wird jedoch der kleinskalige Bereich der Turbulenz modelliert, was u.a. eine genaue Analyse der Dissipationsterme verhindert.

---

---

## 7 Literaturverzeichnis

**Agrawal, A.K.; Peckover, R.S. (1980):** Nonuniform grid generation for boundary-layer problems, *Computer Physics Communications* 19, pp. 171-178.

**Arpaci, V.S. (1995):** Buoyant turbulent flow driven by internal energy generation, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 2761-2770.

**Baker, L.; Faw, R.E.; Kulacki, F.A. (1976):** Postaccident heat removal-Part 1: Heat transfer within an internally heated, nonboiling liquid layer, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 61, pp. 222-230.

**Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N. (1960):** *Transport Phenomena*, Wiley, New York.

**Carteciano, L.N. (1996):** Entwicklung eines Turbulenzmodells für Auftriebsströmungen, Dissertation, Universität Karlsruhe, FZKA 5775.

**Catton, I.; Suo-Anttila, A.J. (1974):** Heat transfer from a volumetrically heated horizontal fluid layer, 5th International Heat Transfer Conference, Tokyo, paper NC2.7.

**Cheung, F.B. (1977):** Natural convection in a volumetrically heated fluid layer at high Rayleigh numbers, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 499-506.

**Cheung, F.B. (1980):** Heat source-driven thermal convection at arbitrary Prandtl number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 97, part 4, pp. 743-758.

**Cheung, F.B.; Shiah, S.W.; Cho, D.H.; Baker, L. (1991):** Turbulent natural convection in a horizontal layer of small Prandtl number fluid, *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 919-925.

**Dinh, T.N.; Nourgaliev, R.R. (1996):** Prediction of turbulent characteristics in a fluid layer with internal energy sources, *Proc. 2nd European Thermal-Sciences Conference*, Rome, Italy, pp. 843-850.

---

**Dinh, T.H.; Nourgaliev, R.R. (1997):** On turbulence modeling for large volumetrically heated liquid pools, *Int. Journal of Nuclear Engineering and Design*, Accepted for publication.

**Emara, A.A.; Kulacki, F.A. (1980):** A numerical Investigation of thermal convection in a heat-generating fluid layer, *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 531-537.

**Farouk, B. (1988):** Turbulent thermal convection in an enclosure with internal heat generation, *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 126-132.

**Fusegi, T.; Hyun, J.M.; Kuwahara, K. (1992):** Numerical study of natural convection in a differentially heated cavity with internal heat generation: Effects of the aspect ratio, *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 773-777.

**Grötzbach, G. (1977):** Direkte numerische Simulation turbulenter Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder bei Kanalströmungen, Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 2426.

**Grötzbach, G. (1981):** Spatial resolution requirements for numerical simulation of internally heated fluid layers, in: „Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow“, Eds.: Taylor, C. and Schrefler, B.A., Pineridge Press, pp. 593-604.

**Grötzbach, G. (1982):** Direct numerical simulation of the turbulent momentum and heat transfer in an internally heated fluid layer, *Proceedings of the seventh International Heat Transfer Conference*, München, pp. 141-146.

**Grötzbach, G. (1987):** Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows, in: „Encyclopedia of Fluid Mechanics“, Vol. 6, Ed.: Cheremisinoff, N.P., Gulf Publ., Houston, pp. 1337-1391.

**Grötzbach, G. (1989):** Turbulent Heat Transfer in an internally heated fluid layer, *Proc. 3rd Int. Symp. Refined Flow Modelling and Measurements*, Tokyo, pp. 267-275.

**Hinze, J.O. (1975):** *Turbulence*, Mc. Graw-Hill Series in Mechanical Engineering, 2nd Edition.

---

---

**Jahn, M.; Reineke, H.H. (1974):** Free convection heat transfer with internal heat sources; Calculations and measurements, 5th International Heat Transfer Conference, Tokyo, paper NC2.8.

**Jahn, M. (1975):** Holographische Untersuchung der freien Konvektion in einer Kernschmelze, Dissertation, T.U. Hannover.

**Janßen, G. (1995):** unveröffentlicher Bericht.

**Kikuchi, Y.; Kawasaki, T.; Shioyama, T. (1982):** Thermal convection in a horizontal fluid layer heated internally and from below, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 25, pp. 363-370.

**Kikuchi, Y.; Shioyama, T.; Kawara, Z. (1986):** Turbulent heat transport in a horizontal fluid layer heated internally and from below, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 29, pp. 451-461.

**Kulacki, F.A. (1982):** Persönliche Mitteilung.

**Kulacki, F.A.; Goldstein, R.J. (1972):** Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 55, part 2, pp. 271-287.

**Kulacki, F.A.; Goldstein, R.J. (1974):** Eddy heat transport in thermal convection with volumetric energy sources, 5th International Heat Transfer Conference, Tokyo, paper NC2.6.

**Kulacki, F.A.; Emara, A.A. (1977):** Steady and transient thermal convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 83, part 2, pp. 375-395.

**Kulacki, F.A.; Nagle M.E. (1975):** Natural convection in a horizontal fluid layer with volumetric energy sources, Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 97, pp. 204-211.

---

**Kulacki, F.A.; Richards, D.E. (1985):** Natural convection in plane layers and cavities with volumetric energy sources, in: "Natural Convection: Fundamentals and Applications", Ed.: Kakaç, S., Aung, W. and Viskanta, R., Springer-Verlag, pp. 179-255.

**Launder, B.E.; Spalding, D.B. (1974):** Numerical computation of turbulent flows, Comp. Appl. Mech. Eng. 3, pp. 269-289.

**Nourgaliev, R.R.; Dinh, T.N. (1997):** Effect of fluid Prandtl number on heat transfer characteristics in internally heated liquid pools with Rayleigh numbers up to  $10^{12}$ , Nucl. Eng. Design, to appear.

**Peckover, R.S.; Hutchinson, I.H. (1974):** Convective rolls driven by internal heat sources, The Physics of Fluids, Vol. 17, No. 7, pp. 1369-1371.

**Ralph, J.C.; Mc Greevy, R.; Peckover, R.S. (1976):** Experiments in turbulent thermal convection driven by internal heat sources, in: "Heat Transfer and turbulent buoyant Convection", Eds.: Spalding, D.B. and Afgan, N., Vol. 2, pp. 587-599.

**Roberts, P.H. (1967):** Convection in horizontal layers with internal heat generation. Theory, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 30, part 1, pp. 33-49.

**Rodi, W. (1980):** Turbulence models and their application in hydraulics - a state of the art review, IAHR-publication, Delft.

**Schumann, U. (1973):** Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen, Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 1854.

**Schwiderski, E.W. (1972):** Current dependence of convection in electrolytically heated fluid layers, Physics of Fluids, Vol. 15, pp. 1189-1196.

**Schwiderski, E.W.; Schwab, H.J.A. (1971):** Convection experiments with electrolytically heated fluid layers, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 48, part 4, pp. 703-719.

---

---

**Seiter, C. (1995):** Numerische Simulation turbulenter Auftriebsströmungen in horizontalen Kanälen, Dissertation, Universität Karlsruhe, FZKA 5505.

**Sparrow, E.M.; Goldstein, R.J.; Jonsson, V.K. (1964):** Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18, pp. 513-528.

**Steinberner, U.; Reineke, H.H. (1978):** Turbulent buoyancy convection heat transfer with internal heat sources, 6th International Heat Transfer Conference, Toronto, Vol. 2, paper NC-21, pp. 305-310.

**Thirlby, R. (1970):** Convection in an internally heated layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 44, part 4, pp. 673-693.

**Tritton, D.J.; Zarraga, M.N. (1967):** Convection in horizontal layers with internal heat generation. Experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 30, part 1, pp. 21-31.

**Tveitereid, M. (1978):** Thermal convection in a horizontal fluid layer with internal heat sources, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 335-339.

**Tveitereid, M.; Palm, E. (1976):** Convection due to internal heat sources, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 76, part 3, pp. 481-499.

**Wörner, M. (1994):** Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Benard-Konvektion in flüssigem Natrium, Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 5228.

**Wörner, M., Grötzbach, G. (1997):** Pressure transport in DNS of turbulent natural convection in horizontal fluid layers, in: „Turbulence, Heat and Mass Transfer 2“, Eds.: Hanjalic, K. and Peeters, T.W.J., Delf University Press, pp. 351-360.

**Zierep, J. (1991):** Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre, Verlag G. Braun, Karlsruhe.

---

## Anhang A: Zeitnormierung in TURBIT

Die Zeit wird in TURBIT nach der Beziehung

$$\hat{t} = \frac{t_{\text{real}} u_0}{D} \quad \text{mit} \quad u_0 = (g\beta\Delta T_{\text{max}} D)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

dimensionslos gemacht. Die Geschwindigkeit  $u_0$  lässt sich durch die maßgebenden Kennzahlen ausdrücken als

$$u_0 = \frac{v}{D} \left( \frac{\text{Ra}}{\text{Pr} \cdot \text{Da}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

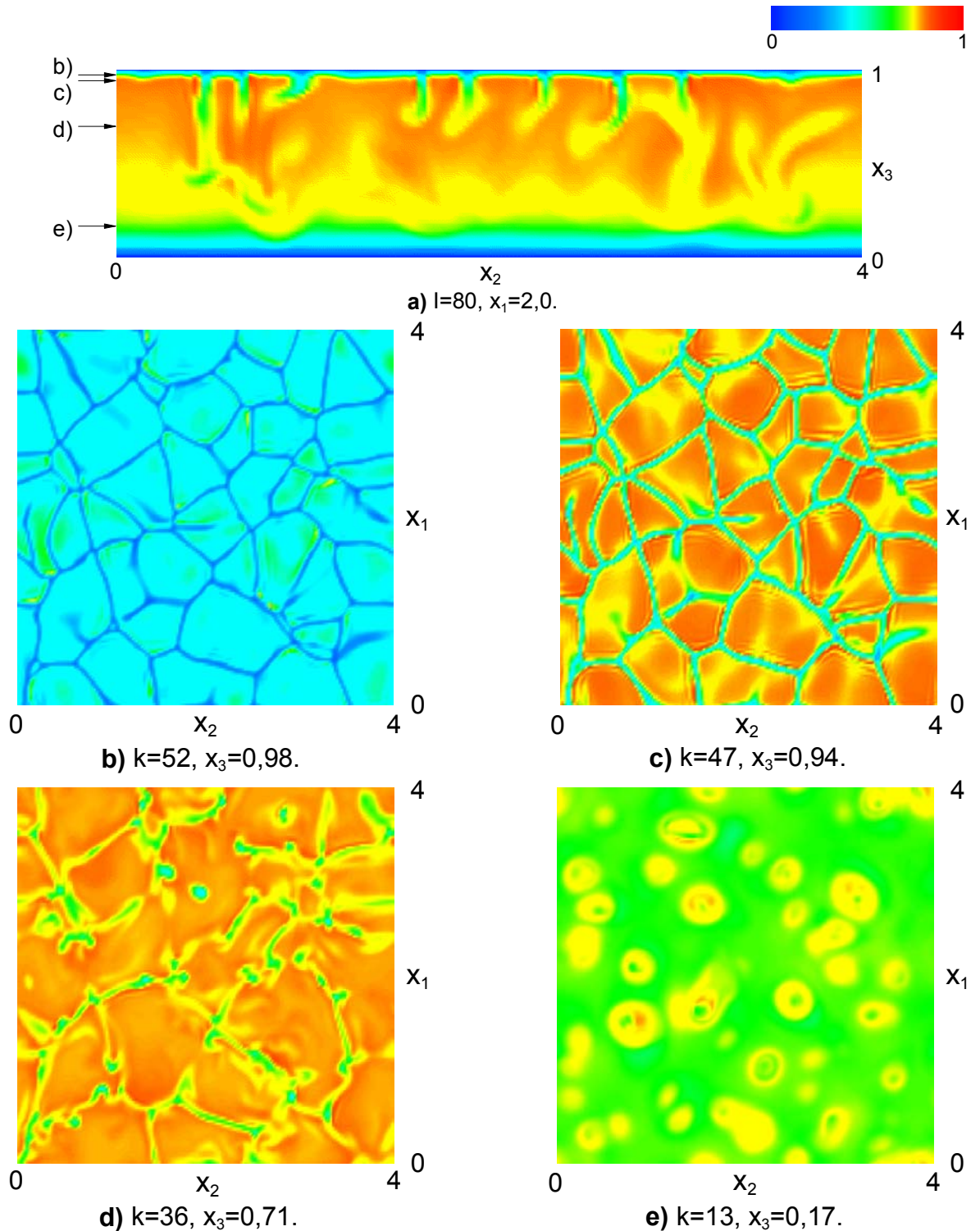
Die dimensionslosen TURBIT-Zeiteinheiten  $\hat{t}$  werden daher mit der Beziehung

$$t_{\text{real}} = \hat{t} \frac{D}{u_0} = \hat{t} \frac{D^2}{v} \left( \frac{\text{Pr} \cdot \text{Da}}{\text{Ra}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

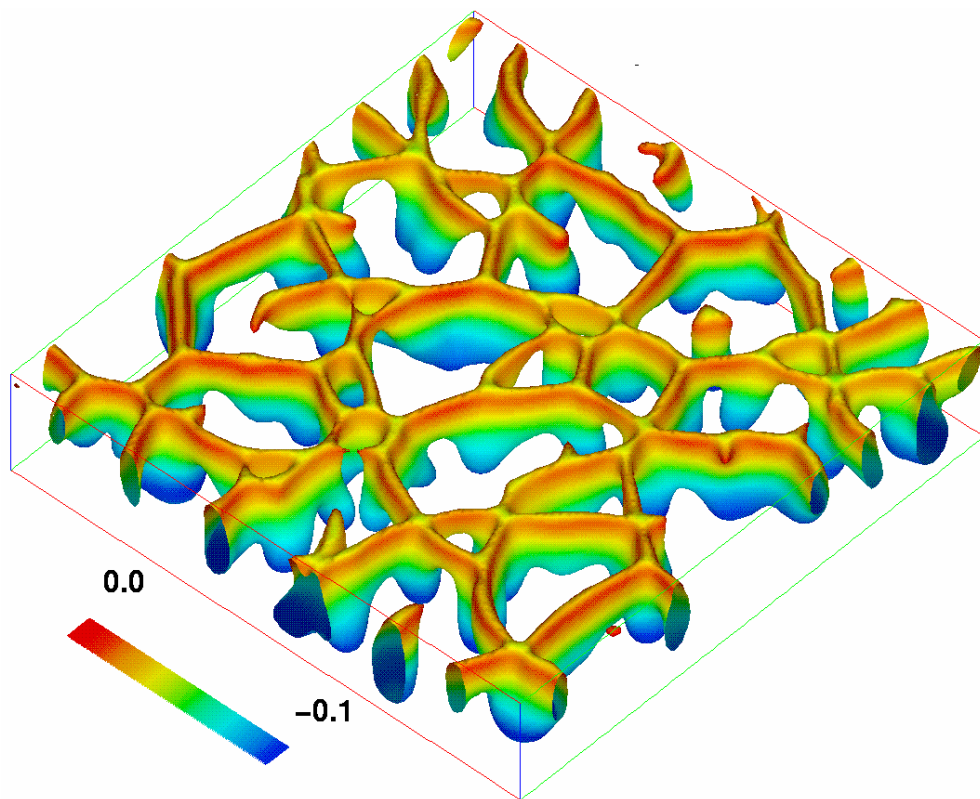
in reale Zeiteinheiten umgerechnet.



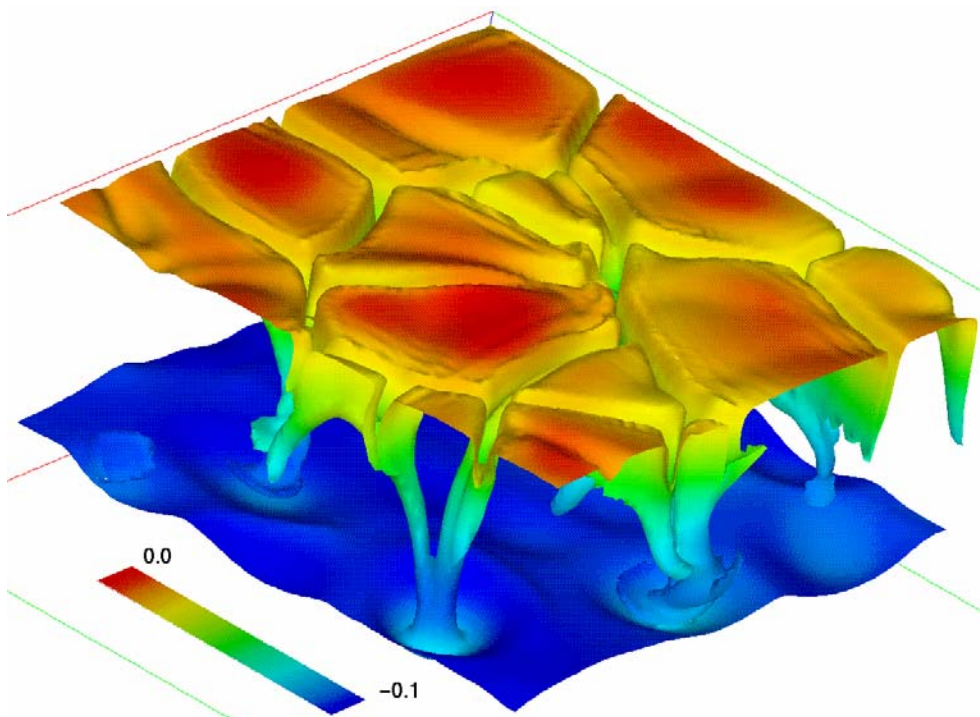
## Anhang B: Farb-Abbildungen



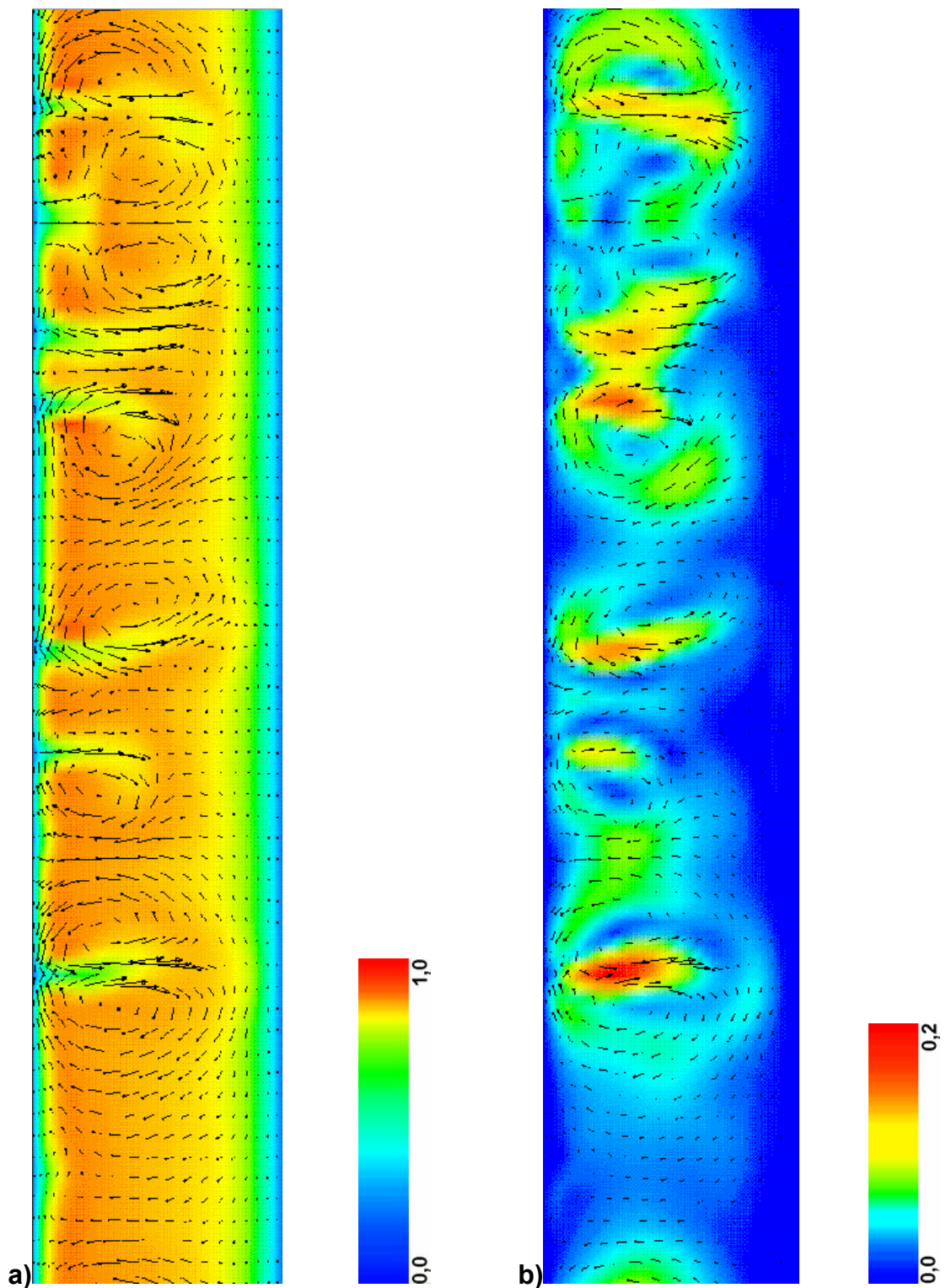
**Abb. B.1:** Schnitte durch das Temperaturfeld,  $Ra=10^8$ . a) Vertikalschnitt bei  $x_1=2,0$ , b)-e) Horizontalschnitte bei  $x_3=0,98, 0,94, 0,71$  und  $0,17$ .



**Abb. B.2:** Isofläche der Vertikalgeschwindigkeit mit  $u_3=-0,02$  und dem Druck als Farbinformation (hydrostatisches Druckprofil ist abgezogen),  $Ra=10^7$ ,  $t_{\text{TURBIT}}=111,26$ .



**Abb. B.3:** Isofläche der Temperatur mit  $T=0,88$  und dem Druck als Farbinformation (hydrostatisches Druckprofil ist abgezogen),  $2 < x_{1,2} < 4$ ,  $Ra=10^8$ ,  $t_{\text{TURBIT}}=258,59$ .



**Abb. B.4:** a) Vertikalschnitt mit Vektordarstellung der Geschwindigkeit und der Temperatur als Farbinformation, b) Vertikalschnitt mit Vektordarstellung der Geschwindigkeit und der Vektorlänge als Farbinformation,  $Ra=10^7$ ,  $x_2=2,5$  (Bei beiden Bildern nur jeder zweite Vektor dargestellt).