

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 6001

# **Wärmeübertragung in dreidimensionalen, magnetohydrodynamischen Strömungen**

**U. Burr, L. Bühler**

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Kernfusion

November 1997

---



**Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6001

**Wärmeübertragung in dreidimensionalen,  
magnetohydrodynamischen Strömungen**

U. Burr, L. Bühler

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Kernfusion

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1997

**Als Manuskript gedruckt**  
**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**  
**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH**  
**Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**  
**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft**  
**Deutscher Forschungszentren (HGF)**  
**ISSN 0947-8620**

# **Wärmeübertragung in dreidimensionalen, magnetohydrodynamischen Strömungen**

## **Zusammenfassung**

Bei der technischen Anwendung einer Flüssigmetall-Kühlung im Einflußbereich der starken Magnetfelder eines Fusionsreaktors kommt es zu elektrodynamischen Wechselwirkungen zwischen dem bewegten, elektrisch leitenden Fluid und dem Magnetfeld.

Im ersten Teil des Berichtes werden MHD- Strömungen in Kanälen mit variierenden Querschnitten hinsichtlich Geschwindigkeitsverteilung und Druckverlust numerisch untersucht.

Im zweiten Teil erfolgt die Erweiterung eines bestehenden Rechenprogramms zur Bestimmung der Temperaturverteilung im Fluid. Damit kann die Wärmeübertragung in allgemeinen dreidimensionalen Koordinaten für blanket- relevante MHD- Strömungen berechnet werden.

# **Heat transfer in three-dimensional, magnetohydrodynamic flows**

## **Abstract**

If liquid-metall is used as coolant in fusion-applications, the magnetic field confining the plasma exerts a strong electrodynamic interaction on the motion of the electrically conducting fluid.

In the first part of the present report the MHD-flow in ducts with varying cross-section is investigated numerically.

In the second part the code is extended to the calculation of the temperature distribution in the fluid. This enables the calculation of heat-transport in arbitrary three-dimensional geometries for blanket-relevant MHD-flows.

Inhalt	Seite
Symbolverzeichnis	1
1 Einleitung	5
1.1 Beschreibung magnetohydrodynamischer Kanalströmungen	8
2 Physikalische Grundlagen	10
2.1 Hydrodynamische Gleichungen	10
2.2 Elektrodynamische Gleichungen	10
2.3 Das Ohmsche Gesetz	11
2.4 Vereinfachungen	11
2.5 Skalierung und Kennzahlen	12
2.6 Rand- und Übergangsbedingungen	13
3 Lösungsansätze für MHD- Kanalströmungen	15
3.1 Eindimensionale MHD- Strömungen	15
3.1.1 Hartmann- Strömung	15
3.2 Zweidimensionale MHD- Strömungen	16
3.2.1 MHD- Strömungen in Kreisrohren	16
3.2.2 MHD- Strömungen in Rechteckkanälen	17
3.3 Dreidimensionale MHD- Strömungen	17
3.3.1 MHD- Strömungen in expandierenden Kanälen	18
4 Numerische Lösung	20
4.1 Vereinfachungen	20
4.1.1 Induktionsfreie Approximation	20
4.1.2 Linearisierung der Impulsgleichung	20
4.1.3 Approximation für große Hartmann- Zahlen	20
4.2 Koordinatensysteme	21
4.2.1 Transformation für die Lösung nach den Core- Variablen	22
4.2.2 Transformation für die Lösung der Grenzschichtgleichungen	23
4.3 Integration der Gleichungen	24
4.3.1 Bestimmung der Core- Variablen	24
4.3.2 Bestimmung der Grenzschicht- Variablen	25
4.4 Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen	26
5 Numerische Berechnung von MHD- Strömungen in expandierenden Kanälen	28
5.1 Diffusor mit kreisförmigem Querschnitt	28
5.1.1 Modellierung der Geometrie	28
5.1.2 Durchgeführte Rechnungen	30
5.1.3 Ergebnisse	30
5.2 Diffusoren mit rechteckförmigen Querschnitten	36
5.2.1 Rechteckdiffusor mit Expansion in Magnetfeldrichtung	36
5.2.2 Rechteckdiffusor mit Expansion quer zur Magnetfeldrichtung	39

<b>6 Konvektiv- diffusiver Wärmetransport in laminaren MHD- Strömungen</b>	<b>41</b>
6.1 Die Energiegleichung	41
6.2 Skalierung und Kennzahlen	41
6.3 Rand- und Eintrittsbedingungen	42
6.4 Lösungsansätze für den Wärmetransport in strömenden Flüssigkeiten	43
6.4.1 Grundlagen des Wärmetransportes in Fluiden	44
6.4.2 Abschätzungen für den Wärmeübergang in einem Fusionsblanket	48
<b>7 Numerische Berechnung des Wärmeübergangs in dreidimensionalen MHD- Strömungen</b>	<b>49</b>
7.1 Transformation der Energiegleichung und ihrer Randbedingungen	49
7.2 Diskretisierung der transformierten Energiegleichung	50
<b>8 Konvektiv- diffusiver Wärmeübergang in zweidimensionalen MHD- Strömungen</b>	<b>54</b>
8.1 Wärmetransport in Kreisrohren	54
8.2 Wärmetransport in Rechteckrohren	58
<b>9 Konvektiv- diffusiver Wärmeübergang in dreidimensionalen MHD- Strömungen</b>	<b>63</b>
9.1 Energieeintrag durch Wandwärmestrom	63
9.1.1 Konstanter wandnormaler Wärmestrom	66
9.1.2 Konstanter einseitiger Wärmestrom	81
9.2 Energieeintrag durch volumetrische Heizung	85
9.2.1 Rechteckdiffusor mit konstanter volumetrischer Heizung	85
9.2.2 Krümmer mit nicht konstanter volumetrischer Heizung	87
<b>10 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>91</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

## Symbolverzeichnis

### Skalare Größen:

$a$	-	charakteristische Länge
$b$	-	Breite, Magnetfeldkomponente
$c$	-	Lichtgeschwindigkeit
$c_p$	-	spezifische Wärmekapazität
$d$	-	Grenzschichtkoordinate der Hartmann- Grenzschicht
$e$	-	elliptische Deformation; Expansionsverhältnis
$f$	-	Funktion
$g$	-	Determinante bzw. Komponente des metrischen Tensors
$h$	-	Höhe, halbe Kanalabmessung in Magnetfeldrichtung
$i, k, l$	-	diskrete Koordinaten
$i1, i2, i3$	-	diskrete Koordinaten der Energiegleichung
$j$	-	Komponente der elektrischen Stromdichte
$p$	-	Druck
$q$	-	Wärmestromkomponente
$r$	-	Koordinate in radialer Richtung
$s$	-	Koordinate innerhalb der Seitenschicht von Rechteckkanälen
$t$	-	Wandstärke; Zeit; Lauflänge entlang der Kanalwand
$u$	-	Koordinate innerhalb des Strömungskerns; axiale Geschwindigkeitskomponente bei Temperaturrechnung
$v$	-	Geschwindigkeitskomponente
$x, y, z$	-	kartesische Koordinaten
$A$	-	Flächenelement
$L$	-	Längenabmessung
$Q$	-	Quellterm der Energiegleichung
$R$	-	Radius
$T$	-	Temperatur
$V$	-	Volumenelement; speziell normierte Geschwindigkeit
$Y$	-	Funktion der Wandkontur
$\alpha$	-	Koeffizient; Winkel; Radienverhältnis
$\beta$	-	Koeffizient
$\chi$	-	Temperaturleitfähigkeit
$\delta$	-	Grenzschichtdicke
$\varepsilon$	-	Dielektrizitätskonstante
$\varphi$	-	Winkel
$\eta$	-	dimensionslose Koordinate in Wandnormalenrichtung
$\phi$	-	elektrisches Potential
$\mu$	-	magnetische Permeabilität
$\nu$	-	kinematische Viskosität
$\rho$	-	Dichte
$\sigma$	-	elektrische Leitfähigkeit
$\zeta$	-	dimensionslose Breite der charakteristischen Oberflächen; dimensionslose Lauflänge bei Temperaturrechnung
$\lambda$	-	Wärmeleitfähigkeit

Vektoren (fett gedruckt), Tensoren, Matrizen:

$a$	-	allgemeiner Basisvektor
$b_{ik}$	-	Magnetfeldtensor
$e$	-	kartesischer Basisvektor
$g_{ik}$	-	metrischer Tensor
$h$	-	Vektor in Magnetfeldrichtung (halbe Kanalhöhe)
$j$	-	Stromdichtevektor
$n$	-	normaler Einheitsvektor
$q$	-	Wärmestrom
$t$	-	tangentialer Einheitsvektor
$v$	-	Geschwindigkeitsvektor
$x$	-	Ortsvektor
$B$	-	Vektor der magnetischen Induktion
$E$	-	elektrisches Feld
$F$	-	Kraft

Indizes:

$ax$	-	axial
$C$	-	im Core oder Strömungskern
$D$	-	Diffusor
$e$	-	Einlauf, Entfernung von der Strahlungsquelle
$el$	-	elektrisch
$i, j, k$	-	bezeichnen Vektor- und Tensorkomponenten
$L$	-	Lorentz
$m$	-	gemittelt
$max$	-	maximal
$min$	-	minimal
$o$	-	oben
$S$	-	Seitenwand, in der Seitenwandgrenzschicht
$t$	-	tangential
$u$	-	unten
$w$	-	an der Wand
$\delta$	-	in der Grenzschicht
$0$	-	Bezugswerte
$1$	-	Einlaufstrecke
$2$	-	Nachlaufstrecke
$2D$	-	zweidimensional
$3D$	-	dreidimensional
$*$	-	dimensionsbehaftet

**Kennzahlen:**

$c$	-	<b>Wandleitparameter</b>
$M$	-	<b>Hartmann- Zahl</b>
$N$	-	<b>Interaktionsparameter</b>
$Nu$	-	<b>Nusselt- Zahl</b>
$Pr$	-	<b>Prandtl- Zahl</b>
$Pe$	-	<b>Peclet- Zahl</b>
$R_m$	-	<b>magnetische Reynolds- Zahl</b>

**Operatoren:**

$\nabla$	-	<b>Gradient</b>
$\partial_i$	-	<b>partielle Ableitung in Richtung der <math>i</math>- ten Koordinate</b>



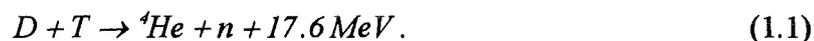
## 1 Einleitung

Die wirtschaftliche Entwicklung der Menschheit war schon immer eng mit der Versorgung mit Energie verbunden. So war der Übergang von der Agrargesellschaft zur modernen Industriegesellschaft nur durch mehrfache Substitution der Hauptenergiequelle durch eine neue, leistungsfähigere möglich.

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts deckte neben Wind- und Wasserkraft hauptsächlich Brennholz den damals noch relativ geringen Energiebedarf. Bei dessen extensiver Nutzung (z. B. Salzsieden und Eisenverhüttung) zeigte sich bald die begrenzte Verfügbarkeit dieses Energieträgers. Die industrielle Revolution war nur möglich durch zunehmende Substitution von Holz durch die in vielen Teilen Europas vorhandene Steinkohle. Diese bildete von nun an bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts die Hauptenergiequelle der Industriestaaten. Im 20. Jahrhundert ging man zur vermehrten Nutzung eines weiteren fossilen Brennstoffes, dem Erdöl, über welches die Kohle in vielen Bereichen ersetzte. Das Erdöl ist im Vergleich zur Kohle wesentlich einfacher verfügbar und ermöglicht wegen seiner einfachen Handhabbarkeit den Bau von Kraftmaschinen hoher Leistungsdichte, wie sie zum Betrieb von Verkehrsmitteln erforderlich sind.

Die begrenzten Vorkommen an fossilen Brennstoffen sowie die sich verschärfenden Umweltprobleme bei ihrer Nutzung machen heute die Entwicklung alternativer Energiekonzepte unumgänglich. Regenerative Energiequellen können aufgrund ihrer geringen Leistungsdichten hierzu nur einen geringen Beitrag leisten.

Neben der konventionellen Kernenergie kommt die Kernfusion als mögliche Energiequelle der Zukunft in Betracht. Der für eine technische Nutzung aussichtsreichste Fusionsprozess ist die Deuterium- Tritium- Reaktion.



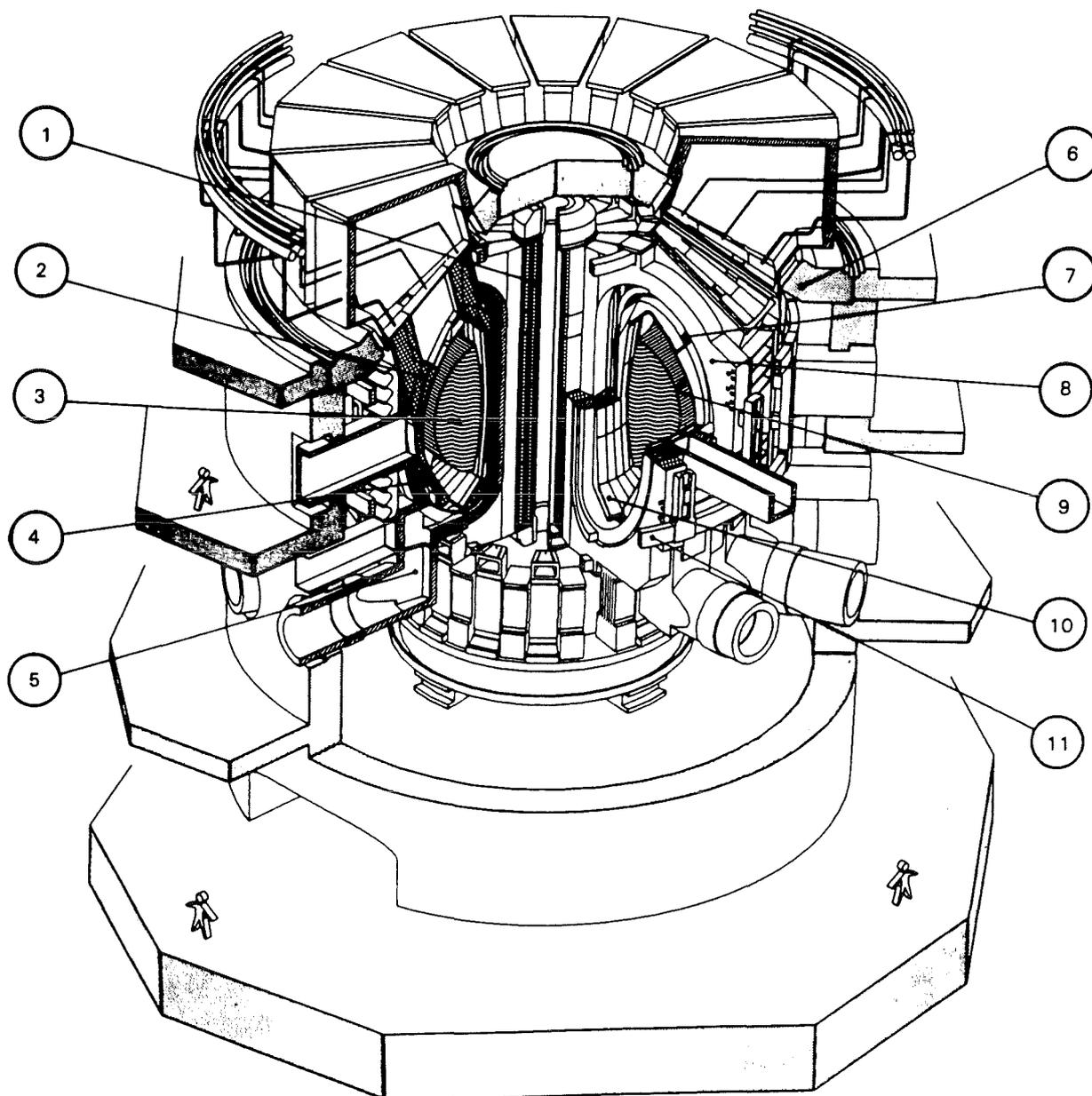
Bei den zu dieser Reaktion benötigten sehr hohen Temperaturen liegen die Fusionspartner als Plasma im ionisierten Zustand vor, so daß ihr kontrollierter Einschluß durch magnetische Felder möglich ist. Ein magnetischer Plasmaeinschluß in einem kompakt gebauten Reaktor kann in einem toroidalen Magnetfeld erfolgen. In Abb. 1.1 ist der Aufbau eines solchen Fusionsreaktors skizziert.

Das Plasma befindet sich in einem torusförmigen Gefäß, dessen Wände vom sogenannten Blanket gebildet werden. Das Blanket ist eine Struktur, die zwischen dem heißen Plasma und den supraleitenden Magnetfeldspulen angeordnet ist, die den Torus umschließen.

Dieses Blanket hat die folgenden Aufgaben zu erfüllen:

- Abschirmung der supraleitenden Magnete von Strahlungsverlusten des Plasmas
- Sichere Kühlung der "ersten Wand" des Reaktors
- Erbrüten des erforderlichen Tritiums
- Abfuhr der thermischen Leistung sowie des erbrüteten Tritiums aus dem Reaktorbereich.

Zur Erfüllung dieser Aufgaben sind unterschiedliche Blanketkonzepte denkbar. Besonders geeignet erscheint dabei das selbstgekühlte Flüssigmetall- Blanket. Durch Verwendung von Li oder PbLi als Fluid werden alle zuvor genannten Anforderungen bei nur einem Fluidkreislauf erfüllt.



- 1 Innere Poloidalfeldspule
- 2 Blanket
- 3 Plasma
- 4 Vakuumgefäß und Abschirmung
- 5 Abgaskanal
- 6 Kryostat und biologische Abschirmung

- 7 Steuerspulen
- 8 Hauptfeldspulen
- 9 Erste Wand
- 10 Divertor
- 11 Äußere Poloidalfeldspulen

Abb. 1.1 Ansicht eines Fusionsreaktors (Toschi et al. 1988)

Das in selbstgekühlten Blankets eingesetzte Fluid ist aufgrund seiner elektrischen Leitfähigkeit während der Durchströmung des magnetfelddurchsetzten Reaktorbereichs starken elektromagnetischen Wechselwirkungen ausgesetzt. Diese bestimmen die Druckverluste und die Geschwindigkeitsverteilungen in den Blanketkanälen. Entlang der thermisch hochbelasteten ersten Wand erscheint eine in Magnetfeldrichtung orientierte toroidale Strömungsführung sinnvoll, da so selbst bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten zusätzliche Druckverluste durch elektromagnetische Effekte vermieden werden. Einzelne Blanketelemente können jedoch konstruktiv bedingt nur poloidal (von oben nach unten) mit Flüssigmetall versorgt werden. Daher sind Strömungen mit einer Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld unvermeidbar.

Aus einer Strömungsführung mit zahlreichen Querschnittsänderungen und Strömungsumlenkungen ergibt sich die Notwendigkeit, dreidimensionale magnetohydrodynamische Strömungen für allgemeine beliebige Kanalformen und Orientierungen bezüglich des magnetischen Feldes berechnen zu können. Neben der Kanalgeometrie geht hierbei die elektrische Leitfähigkeit des verwendeten Wandmaterials sowie die Stärke des magnetischen Feldes in die Rechnung ein.

Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Auslegung des Blankets stellt die Abführung der vom Plasma freigesetzten Energie dar. Auch hierfür bieten Flüssigmetalle wegen ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität die idealen Voraussetzungen.

Das Plasma gibt Energie in Form von Wärme- und Nuklearstrahlung ab, die an der Kanalwand bzw. im Fluid absorbiert werden. Zusätzlich kommt es zu einem Energieeintrag in das das Blanket durchströmende Fluid durch Dissipationsprozesse, Joulsche Heizung aufgrund elektrischer Ströme im Fluid und in der Kanalwand sowie durch chemische Reaktionen.

Ziel der Auslegung des Blankets ist es, die Wärmeübertragung an das Kühlmedium so zu gestalten, daß die Temperatur an der thermisch am stärksten beanspruchten plasmanahen Wand in einem durch die Werkstoffeigenschaften begrenzten Bereich bleibt.

In den nachfolgenden Abschnitten werden zunächst die Grundlagen magnetohydrodynamischer Strömungen beschrieben. Mit einem vorhandenen numerischen Rechenprogramm werden dreidimensionale magnetohydrodynamische Strömungszustände in Querschnittserweiterungen hinsichtlich Geschwindigkeitsverteilung und Druckverlust untersucht.

Im zweiten Teil der Arbeit erfolgt eine Erweiterung des Rechenprogramms zur Erfassung des konvektiv- diffusiven Wärmetransportes. Nach Darstellung allgemeiner Grundlagen des Wärmetransportes in Flüssigkeiten erfolgt hierzu die Transformation der Energiegleichung in allgemeine dreidimensionale Koordinaten. Durch die Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation kann jeder beliebige Strömungskanal auf ein Standardvolumen abgebildet werden, so daß eine einheitliche Behandlung des Wärmetransportes für unterschiedliche Geometrien möglich wird.

Das hieraus abgeleitete numerische Rechenprogramm wird anhand bekannter analytischer und numerischer Lösungen für den Wärmeübergang in zweidimensionalen MHD- Strömungen auf seine Richtigkeit und seinen Gültigkeitsbereich überprüft.

In einem weiteren Schritt erfolgt eine Anwendung des Rechenprogramms zur Bestimmung der Fluidtemperatur für einige charakteristische, dreidimensionale, magnetohydrodynamische Strömungsfälle. Die gewonnenen Ergebnisse werden hinsichtlich der Temperaturverteilung im Fluid sowie an der Kanalwand diskutiert.

## 1.1 Beschreibung magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

Die Strömungen von elektrisch leitenden Fluiden in starken Magnetfeldern unterscheiden sich erheblich von "gewöhnlichen" hydrodynamischen Strömungen. Die wichtigsten physikalischen Effekte, die hierbei eine Rolle spielen, sollen anhand der Prinzipskizze 2.1 erläutert werden.

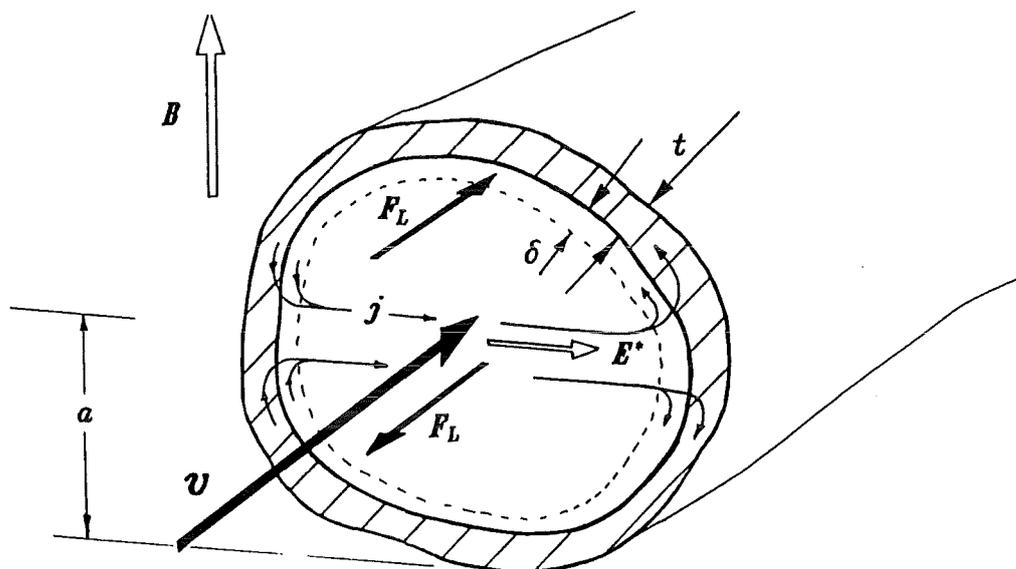


Abb.(1.2) Prinzipskizze magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

Betrachtet wird die Strömung eines elektrisch leitenden Fluides in einem Magnetfeld der magnetischen Induktion  $B$ . Das durchströmte Rohr besitzt die Wandstärke  $t$  sowie die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_w$ . Die Hauptströmungsrichtung ist durch den Geschwindigkeitsvektor  $v$  skizziert.

Durch die Bewegung des elektrisch leitenden Fluids im  $B$ - Feld wird das elektrische Feld  $E' = v \times B$  im Fluid induziert. Dieses steht senkrecht zur Strömungsrichtung sowie senkrecht zum angelegten Magnetfeld. Seine Stärke ist dabei direkt proportional der lokalen Geschwindigkeitskomponente normal zum  $B$ - Feld.

Durch das elektrische Feld werden Ströme hervorgerufen, deren Richtung sich nach dem Gradient des induzierten  $E$ - Feldes richtet. In der Wandgrenzschicht, in der das Fluid gegenüber der Kernströmung verzögert wird, finden die elektrischen Ströme eine Rückflußmöglichkeit, wodurch die Stromkreise geschlossen werden.

Die Stromdichte  $j$  verursacht in Wechselwirkung mit dem Magnetfeld die Lorentz- Kraft  $F_L = j \times B$ , die senkrecht zur Stromrichtung und senkrecht zum anliegenden Magnetfeld gerichtet ist. Da die Stromkreise geschlossen sind, wird deutlich, daß die aus ihnen resultierenden Kräfte unterschiedliche Richtungen besitzen. Im Kernbereich ist die Lorentz- Kraft der Strömungsrichtung entgegengesetzt. Sie verursacht dadurch erhebliche Druckverluste, proportional der Stromdichte. In den Wandgrenzschichten, in welchen die Normalkomponente von  $B$  nicht verschwindet, zeigt die Lorentz- Kraft dagegen in Strömungsrichtung und steht mit viskosen Kräften im Gleichgewicht. Durch die hohen Stromdichten in diesen Bereichen verringert sich die Dicke der Wandgrenzschicht erheblich. In der leitenden Kanal-

wand ist die Richtung der Lorentz- Kraft prinzipiell gleich wie in den Grenzschichten, ihre Wirkung äußert sich jedoch lediglich in der Haltekraft des Rohres und hat keinen Einfluß auf das Strömungsgeschehen.

Nun wird deutlich, welchen Einfluß die Leitfähigkeit der Kanalwand auf den Druckverlust und die Geschwindigkeitsverteilung besitzt. Wird das Rückfließen der Ströme in der Kanalwand vermindert oder gar ganz unterbunden (isolierte Kanalwand), was z.B. durch sehr dünne Wandstärken oder entsprechendes Material erreicht werden kann, so können die induzierten Ströme sich nur innerhalb des Fluids schließen. Dies führt zu einer Reduktion der Stromdichte im Kern und schließlich zu einer Absenkung des Druckverlustes. Anders dagegen stellt sich der Grenzfall mit perfekt leitenden Kanalwänden dar. Die zurückfließenden Ströme finden innerhalb der Kanalwand keinen Widerstand. Dies führt zur maximalen Stromdichte im Fluid, woraus sich ein maximaler Druckverlust ergibt.

## 2 Physikalische Grundlagen

Die Beschreibung des Strömungsverhaltens elektrisch leitender Fluide unter der Einwirkung magnetischer Felder erfolgt durch die hydrodynamischen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Diese enthalten Terme zur Erfassung der elektromagnetischen Wechselwirkungen im Fluid, welche aus den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen hervorgehen. Magneto-hydrodynamische (MHD)- Strömungen stellen somit eine Verbindung der Fluidmechanik mit der klassischen Elektrodynamik dar.

### 2.1 Hydrodynamische Gleichungen

Für inkompressible Fluide mit konstanter Massendichte  $\rho$  läßt sich die Kontinuitätsgleichung in folgender Form als Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  schreiben:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.1)$$

Die Impulserhaltung wird durch die Navier- Stokes- Gleichung für Newtonsche Fluide mit konstanter kinematischer Viskosität  $\nu$  beschrieben. Diese muß jedoch zur Berücksichtigung der elektrodynamischen Wechselwirkungen durch zusätzliche Terme erweitert werden. Unter Vernachlässigung der Schwerkraft ergibt sich

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Die bereits in (1.1) beschriebene elektromagnetische Wechselwirkung durch Lorentz- Kräfte wird einerseits durch die elektrostatische Ladungsdichte  $\rho_{el}$  in dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  hervorgerufen, andererseits durch die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$  in dem Magnetfeld der Induktion  $\mathbf{B}$ . Zusätzlich zu diesen elektrodynamischen Kräften wird der Verlauf des Druckes  $p$  durch Trägheitskräfte und Reibungskräfte bestimmt.

Mit den für die hydrodynamischen Gleichungen getroffenen Vereinfachungen ist die Impulsbilanz von der Bilanzgleichung für die Energie entkoppelt, da  $\rho$  und  $\nu$  konstant angenommen sind, insbesondere aber keine Funktion der Temperatur darstellen. Durch die Energiebilanz wird lediglich der Verlauf der Temperatur im Strömungsgebiet beschrieben. Ein Einfluß auf die Erhaltungssätze für Masse sowie Impuls besteht damit nicht, so daß diese unabhängig von der Energiegleichung gelöst werden können. Eine weitere Behandlung der Energiegleichung erfolgt daher erst in Kapitel 6.

### 2.2 Elektrodynamische Gleichungen

Die vollständige Beschreibung der elektrodynamischen Phänomene erfolgt durch die sogenannten Maxwell'schen Gleichungen. Für konstante Werte der magnetischen Permeabilität  $\mu$  sowie der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  lauten diese:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left( \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

Hierbei beschreibt Gleichung (2.3) den Einfluß von zeitlichen Änderungen des Magnetfeldes auf den Verlauf des elektrischen Feldes. Die sich entsprechend dem elektrischen Felde einstellende Ladungsdichte  $\rho_e$  ergibt sich aus Gl.(2.4). Aus Gl.(2.5) und Gl. (2.6) geht das durch elektrische Ströme sowie durch zeitliche Änderungen des elektrischen Feldes induzierte divergenzfreie Magnetfeld hervor.

### 2.3 Das Ohmsche Gesetz

Da in elektrisch leitenden Medien die Ladungen frei verschiebbar sind, besteht ein Zusammenhang zwischen der Stromdichte  $\mathbf{j}$  und dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ . Für endliche Werte der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  des Mediums und für teilchenfeste, also mitbewegte Koordinaten, ist die Stromdichte direkt proportional dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}'$ .

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'. \quad (2.7)$$

In diesem als Ohmsches Gesetz bekannten Zusammenhang ist das von einem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Leiter verspürte elektrische Feld  $\mathbf{E}'$  durch einen Wechsel des Bezugssystems (siehe Shercliff, S.14) aus den ortsfesten Größen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  zu bilden.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

### 2.4 Vereinfachungen

Da als Fluide nur Flüssigmetalle mit hoher Leitfähigkeit betrachtet werden, kommt es zu einem raschen Ausgleich der induzierten elektrostatischen Ladungen. Ihre Kraftwirkung im elektrischen Feld kann daher in der Impulsbilanz Gl.(2.2) vernachlässigt werden (Chang und Lundgren 1961). Somit entfällt die Berechnung der elektrischen Ladungsdichte nach Gl.(2.4).

Nach Shercliff (1965) kann der Verschiebungsstrom  $\varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$  vernachlässigt werden. Der dadurch entstehende Fehler ist von der Größenordnung  $(v/c)^2$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit darstellt. Beschränkt man sich auf verschwindende zeitliche Änderungen der magnetischen Induktion ( $\partial \mathbf{B} / \partial t \rightarrow 0$ ), so ergibt sich das elektrische Feld als Gradient des skalaren elektrischen Potentials  $\phi$ .

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (2.9)$$

Diese Gleichung ersetzt im stationären Fall die Gleichung (2.3).

## 2.5 Skalierung und Kennzahlen

Um zu einer dimensionslosen Darstellung des Gleichungssystems zu gelangen, werden die Geschwindigkeit  $v$ , die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$ , der Druck  $p$  sowie die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$  und das elektrische Potential  $\phi$  mit ihren jeweiligen Bezugswerten  $v_0$ ,  $B_0$ ,  $a$ ,  $\sigma v_0 B_0^2$ ,  $\sigma v_0 B_0$ ,  $a v_0 B_0$  skaliert. Hierbei ist  $v_0$  die mittlere Geschwindigkeit,  $B_0$  der Maximalbetrag der magnetischen Induktion und  $a$  eine charakteristische Abmessung des Kanalquerschnitts.

Da im folgenden nur noch dimensionslose Größen auftreten, ist eine Verwechslung ausgeschlossen, und es können die selben Bezeichnungen wie im dimensionsbehafteten Fall verwendet werden. Das dimensionslose Gleichungssystem schreibt sich somit mit den eingeführten Vereinfachungen wie folgt:

Hydrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{N} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{M^2} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.11)$$

Elektrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = R_m \mathbf{j}. \quad (2.13)$$

Ohmsches Gesetz:

$$\mathbf{j} = -\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.14)$$

In diesen Gleichungen sind charakteristische Kennzahlen eingeführt, welche die verschiedenen physikalischen Effekte gegeneinander gewichten. Für die Impulsgleichung sind dies der

Interaktionsparameter 
$$N = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho v_0}, \quad (2.15)$$

welcher das Verhältnis von elektrodynamischen Kräften zu Trägheitskräften beschreibt. Dieser wird auch als Steward- Zahl bezeichnet. Das Quadrat der

Hartmann- Zahl 
$$M = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho v}} \quad (2.16)$$

beschreibt die Größe von elektrodynamischen Kräften in Relation zu Reibungskräften. Als Parameter der elektrodynamischen Gleichungen verwendet man die

Magnetische Reynolds- Zahl 
$$R_m = \mu \sigma v_0 a, \quad (2.17)$$

welche ein Maß für die Stärke des induzierten magnetischen Feldes gemessen an der Stärke des von außen angelegten Feldes ist.

Für die betrachteten Flüssigmetallströmungen in einem Fusionsblanket nehmen die oben genannten Kennzahlen folgende Werte an (siehe Holroyd und Mitchel 1984):

$$M \approx 10^4, N \approx 10^5, R_m \approx 0.07. \quad (2.18)$$

Für diese sehr großen Werte der Hartmann- Zahl  $M$  und des Interaktionsparameters  $N$  sowie der sehr kleinen magnetischen Reynolds- Zahl  $R_m$  ergeben sich wesentliche Vereinfachungen, die später im Zusammenhang mit der numerischen Lösung diskutiert werden.

## 2.6 Rand- und Übergangsbedingungen

Eine eindeutige Lösung des vorgestellten Gleichungssystems (Gl. 2.10- 2.14) ist erst durch die Vorgabe des aktuellen Systemzustandes an den Grenzen des betrachteten Rechengebietes gegeben. Im folgenden Fall der MHD- Strömungen lassen sich für starke Magnetfelder folgende Rand- und Übergangsbedingungen formulieren:

Bei einer viskosen Strömung wird an der Rohrwand (Fluid- Wand- Grenzfläche) die Haftbedingung

$$v = 0 \quad (2.19)$$

gefordert. Am Ein- und Austritt der Strömung aus dem betrachteten Rechengebiet müssen definierte Strömungszustände angenommen werden. Dies können entweder aus Experimenten bekannte Geschwindigkeitsprofile sein oder voll ausgebildete Strömungszustände in genügend großer Entfernung von dreidimensionalen Effekten. Eine von außen zwischen den beiden Rohrenden aufgeprägte Druckdifferenz  $\Delta p$  hält das Fluid in Bewegung.

Bei hydrodynamischen Strömungen endet das Rechengebiet unmittelbar an der Kanalwand. Für MHD- Strömungen in elektrisch leitenden Kanälen können die induzierten Ströme in die Kanalwand eintreten und sich im Wandmaterial schließen. Die Ladungserhaltung fordert dann an der Fluid- Wand- Grenzfläche die Stetigkeit der Normalkomponente der Stromdichte.

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_{\text{Fluid}} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_{\text{Wand}}. \quad (2.20)$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor der betrachteten Grenzfläche.

Sofern Kontaktwiderstände zwischen dem Fluid und der Wand vernachlässigt werden, ist das elektrische Potential über die Grenzfläche hinweg stetig.

$$\phi_{\text{Wand}} = \phi_{\text{Fluid}}. \quad (2.21)$$

Für gleiche magnetische Permeabilität der Kanalwand und des Fluids sind alle Komponenten der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  über die Grenzfläche hinweg konstant, sofern keine elektrischen Grenzflächenströme auftreten.

$$\mathbf{B}_{\text{Fluid}} = \mathbf{B}_{\text{Wand}}. \quad (2.22)$$

Eine weitere Grenzfläche bildet der Übergang von der elektrisch leitenden Kanalwand zur nichtleitenden Umgebung.

Als Rand und Übergangsbedingungen ergeben sich hier unmittelbar:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad (2.23)$$

Hierin ist  $\mathbf{B}_0$  das von außen angelegte magnetische Feld. Für elektrisch isolierte Rohre gilt Gl.(2.23) bereits an der Fluid- Wand- Grenzfläche.

### 3 Lösungsansätze für MHD- Kanalströmungen

Zur Lösung des vorgestellten Strömungsproblems existieren analytische und empirische Lösungsansätze. Da sich aus ihnen wichtige Eigenschaften magnetohydrodynamischer Strömungen ableiten lassen, werden an dieser Stelle die wesentlichsten vorgestellt.

#### 3.1 Eindimensionale MHD Strömungen

##### 3.1.1 Hartmann- Strömung

Als Hartmann- Strömung bezeichnet man eine ebene Strömung in einem durch zwei elektrisch isolierte parallele Platten begrenzten Kanal konstanter Breite. Senkrecht zur Strömungsrichtung und senkrecht zu den Platten ist Magnetfeld konstanter Stärke  $B_0$  angelegt. Die Betrachtung erfolgt in genügend großer Entfernung vom Eintritt des Fluids in den Kanal, so daß ausgebildete Zustände vorausgesetzt werden können.

Die von Hartmann gefundene Lösung für den isolierten Plattenkanal wurde durch Chang und Lundgren (1961) zu einer Lösung für einen Kanal mit elektrisch leitenden Platten, die im Abstand  $2a$  angeordnet sind, erweitert. Nach Einführung des sogenannten Wandleitparameters (dünne Wandapproximation)

$$c = \frac{\sigma_w t}{\sigma a}, \quad (3.1)$$

mit der Leitfähigkeit der Kanalwand  $\sigma_w$  und der Wandstärke  $t$  finden Chang und Lundgren bei gegebenem Druckgradient  $dp/dz$  die folgende Beziehung für die normierte Geschwindigkeit  $V$ :

$$V = \frac{1}{M} \frac{c+1}{M c + \tanh M} \left[ 1 - \frac{\cosh My}{\cosh M} \right], \quad (3.2)$$

$$V = \frac{v}{(a^2/\rho\nu)(-dp/dz)}.$$

Für große Hartmann- Zahlen strebt dieser Ausdruck gegen

$$V = \frac{1}{M} \frac{c+1}{M c + 1} \left[ 1 - e^{-M(1-|y|)} \right], \quad M \gg 1, \quad (3.3)$$

für kleine  $M$  dagegen gelangt man zu der bekannten hydrodynamischen Poiseuille- Strömung

$$V = \frac{1}{2} (1 - y^2), \quad M \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

An Gl.(3.3) erkennt man unmittelbar die wichtigsten charakteristischen Eigenschaften von MHD- Strömungen bei großen Hartmann- Zahlen:

- Die Geschwindigkeit ist für große Werte von  $M$  nahezu über den gesamten Querschnitt konstant.
- Das Abfallen der Geschwindigkeit auf den Wert  $v = 0$  an den Kanalwänden erfolgt in einer sehr dünnen Grenzschicht der Größenordnung  $\delta = 1/M$ . Diese wird als **Hartmann- Grenzschicht** bezeichnet.
- Bei gegebenem Volumenstrom kann der Druckverlust in Abhängigkeit der Hartmann- Zahl und der Wandleitfähigkeit bestimmt werden. Aus Gl. (3.3) folgt, daß für isolierte Kanäle ( $c = 0$ ) der Druckverlust direkt proportional der Hartmann- Zahl ist. Für perfekt leitende Kanäle ( $c \rightarrow \infty$ ) dagegen ist dieser proportional dem Quadrat der Hartmann- Zahl.

### 3.2 Zweidimensionale MHD- Strömungen

Die Strömung von Flüssigmetallen in Rohren senkrecht zu einem Magnetfeld bildet eine für technische Anwendungen wichtige Klasse von MHD- Strömungen. Läßt man den Einlaufbereich außer acht, so können diese durch eine zweidimensionale Betrachtung erfaßt werden. Von besonderem Interesse sind hierbei der Druckgradient  $\nabla p$  sowie im Hinblick auf den Wärmeübergang an der Kanalwand die Geschwindigkeitsverteilung. Chang und Lundgren (1961) zeigen, daß für perfekt leitende Kanalwände, unabhängig von der Kanalform, die Geschwindigkeit außerhalb der Wandgrenzschicht einen konstanten Wert annimmt. Für isolierte Kanäle finden sie eine Geschwindigkeitsverteilung quer zur Magnetfeldrichtung ( $x$ - Richtung), die zur Kanalabmessung  $Y(x)$  in Magnetfeldrichtung proportional ist. Zwei technisch wichtige Kanalformen sind das Kreisrohr und der Rechteckkanal. Für beide existieren Lösungen, die nachfolgend aufgeführt sind.

#### 3.2.1 MHD- Strömungen in Kreisrohren

Für voll ausgebildete MHD-Strömungen in Kreisrohren geben Chang und Lundgren (1961), als Erweiterung der von Shercliff (1956) für große Hartmann- Zahlen gefundenen asymptotischen Lösung, folgende Verteilung der Geschwindigkeit  $V_c$  im Kernbereich der Strömung an:

$$V_c = \frac{1}{M} \frac{(c+1)Y(x)}{1+McY(x)}, \quad (3.5)$$

mit

$$V_c = \frac{v}{(a^2/\rho\nu)(-dp/dz)}$$

$Y(x) = \sqrt{1-x^2}$  kennzeichnet die Position der Kanalwand in Magnetfeldrichtung als Funktion der zur Magnetfeldrichtung senkrechten Koordinate  $x$ . Für elektrisch nicht leitende Rohre

( $c \rightarrow 0$ ) führt Gl. (3.5) zu dem entsprechend Kapitel 2.5 normierten dimensionslosen Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{3\pi}{8M}, M \gg 1. \quad (3.6)$$

Eine weitere Näherungsbeziehung kann für elektrisch gut leitende Rohrwände angegeben werden (Hua und Walker 1989). Der normierte Druckverlust ist hierbei lediglich eine Funktion des Wandleitparameters.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{c}{1+c}. \quad (3.7)$$

### 3.2.2 MHD- Strömungen in Rechteckkanälen

Bei der Beschreibung voll eingelaufener MHD- Strömungen wird die Orientierung des Rechteckrohres im Magnetfeld so gewählt, daß sich jeweils zwei magnetfeldparallele Seitenwände und zwei Wände senkrecht zum Magnetfeld ergeben. Damit tritt neben den bereits in der eindimensionalen Theorie erwähnten Hartmann- Grenzschichten der Dicke  $\delta_H = 1/M$  an den Wänden senkrecht zum Magnetfeld, ein weiterer Grenzschichttyp auf, der sich an den magnetfeldparallelen Kanalwänden mit einer Dicke von  $\delta_s = 1/\sqrt{M}$  ausbildet. In diesem als Seitenwandgrenzschicht bezeichneten Gebiet können starke Geschwindigkeitserhöhungen vorliegen. Gleichzeitig können aber auch Rückströmungen auftreten (Hunt 1965).

Exakte Lösungen sind nur für bestimmte Kombinationen der Wandleitparameter  $c_s$ , der Seitenwände und der Hartmann- Wände  $c_H$  bekannt. Tillak (1990) gibt auf der Grundlage anderer Arbeiten die folgende einfache Druckverlustbeziehung an:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\left[ \frac{a}{3b} \frac{\sqrt{M}}{1+c_s\sqrt{M}} + \frac{c_H+1}{c_H+1/M} \right]^{-1}. \quad (3.8)$$

### 3.3 Dreidimensionale MHD- Strömungen

In dreidimensionalen MHD- Strömungen schließen sich die induzierten Ströme nicht ausschließlich in den Ebenen senkrecht zur Strömungsrichtung, sondern auch in Bereichen stromauf und stromab. Ursache hierfür sind entlang des Kanalverlaufs sich ändernde elektrische Einflußgrößen wie Magnetfeld oder Wandleitfähigkeit sowie sich ändernde Geschwindigkeitskomponenten in Krümmern und variierenden Querschnitten.

Bei allen dreidimensionalen Strömungszuständen beobachtet man eine starke Umverteilung des Volumenstromes im Kanalquerschnitt, welche mit einem erheblichen Druckverlust verbunden ist. Die Berechnung dieser Strömungszustände erweist sich als äußerst schwierig, da alle nicht-linearen Kopplungen in den Gleichungen wirksam werden.

Holroyd und Walker (1978) beschreiben die MHD- Strömung in einem isolierten Kreisrohr unter dem Einfluß eines an einer bestimmten Stelle des Kanals sprungartig halbierten Magnetfeldes. Sie finden im Bereich der Unstetigkeit Geschwindigkeitsüberhöhungen in Magnetfeldparallelen Seitenschichten, welche im weiteren Kanalverlauf wieder abklingen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll die Strömung in expandierenden Kanälen näher untersucht werden, so daß hier nur die Grundlagen dieser geschildert werden.

### 3.3.1 MHD- Strömungen in expandierenden Kanälen

MHD- Strömungen in expandierenden isolierten Kreisrohren werden von Walker und Ludford (1974) behandelt. Diese geben auch eine auf den Bereich leitender Kanalwände erweiterte Lösung an.

Betrachtet wird hierbei die Expansion zwischen zwei halbusendlichen Rohren mit konstanten, jedoch unterschiedlichen Radien.

$$r = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e, & x \geq 0 \end{cases}$$

Die Rohrwand sei über die gesamte Rohrlänge elektrisch nicht leitend. Mit der Voraussetzung für das Integral von einer Kanalwand zur anderen entlang der Fluidbahn

$$\int_0^u \frac{ds}{B} = konst = 2 \cdot \zeta \quad (3.9)$$

führen die Autoren eine Betrachtung anhand charakteristischer Oberflächen durch. Bei konstanter Magnetfeldstärke ( $B = 1$ ) entspricht der Betrag des Integrals 3.9 dem Abstand der beiden Kanalwände (oben und unten), gemessen in B- Feldrichtung. Linien  $\zeta = konst$  bilden die sogenannten charakteristischen Oberflächen, entlang derer sich das Fluid bewegt. Die Fläche  $\zeta = 1$  teilt den Fluidbereich in zwei Teile (vgl. Abb. 3.1). Der gesamte Volumenstrom fließt im Bereich  $0 \leq \zeta \leq 1$ , der sich von  $-\infty \leq x \leq \infty$  erstreckt. Im Bereich  $1 < \zeta < e$  ergeben sich relativ kleine Geschwindigkeiten und lokale Rückströmgebiete.

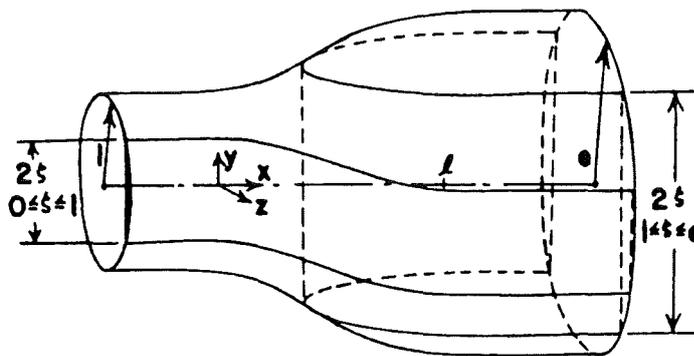


Abb. 3.1 Charakteristische Oberflächen (Walker u. Ludford 1974)

Im Verlauf der Expansion wird demnach der gesamte Massenstrom, der im Einlaufrohr fließt, in die beiden magnetfeldparallelen Seitenschichten  $(e^2 - 1)^{1/2} < |z| < e$  gedrängt. Im Kernbereich der Strömung  $[|z| < (e^2 - 1)^{1/2}]$  dagegen liegt nahezu stagnierendes bzw. rückströmendes Fluid vor. Abb. 3.2 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung im Verlauf der Expansion.

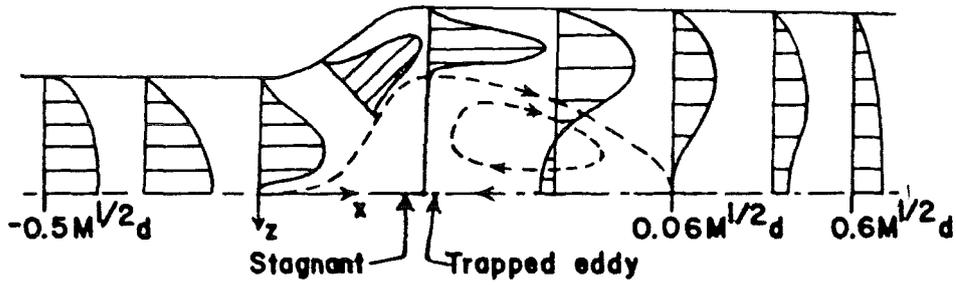


Abb. (3.2) Geschwindigkeitsverteilung im Kreisdiffusor (Walker u. Ludford 1974)

Man erkennt, daß die Störung des Geschwindigkeitsfeldes in weite Bereiche stromauf und stromab der Querschnittserweiterung einwirkt. Die dimensionslosen Einlaufängen bis zum Erreichen voll entwickelter Strömungszustände betragen im Fall isolierter Kreisrohre  $l_e \sim \sqrt{M}$ . Für elektrisch leitende Rohrwände sind diese Einlaufängen jedoch erheblich kürzer und betragen  $l_e \sim 1/\sqrt{c}$ . Von besonderem Interesse ist bei diesen Expansionen der erhebliche Druckverlust durch dreidimensionale Effekte sowie der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung auf den Wärmeübergang an der Rohrwand. In Abschnitt 5 werden daher mit einem numerischen Verfahren Strömungen in solchen Expansionen berechnet.

## 4 Numerische Lösung

Die allgemeine Lösung der vollen magnetohydrodynamischen Grundgleichungen durch numerische Methoden ist wegen begrenzter Rechenkapazität in absehbarer Zeit nicht möglich. Beschränkt man sich jedoch auf die wesentlichsten physikalischen Effekte, so ist eine Modellierung auch für dreidimensionale Geometrien möglich.

Am Institut für angewandte Thermo- und Fluidodynamik des Kernforschungszentrums Karlsruhe wurde ein Rechenprogramm entwickelt, welches MHD- Strömungen in allgemeinen dreidimensionalen Geometrien für große Hartmann- Zahlen simuliert. Eine genaue Beschreibung dieses Programms findet sich in der Arbeit von Bühler (1993). Nachfolgend werden nur die zur Lösung nötigen Vereinfachungen wiedergegeben.

### 4.1 Vereinfachungen

#### 4.1.1 Induktionsfreie Approximation

In praktisch allen technischen MHD- Kanalströmungen ergeben sich kleine Werte für die magnetische Reynoldszahl  $R_m$ . Damit sind die durch die elektrischen Ströme im Fluid induzierten Magnetfelder gegenüber dem von außen angelegten Feld gering und die rechte Seite von Gleichung (2.13) kann vernachlässigt werden. Dadurch wird das Magnetfeld eine einzig durch das von außen angelegte Magnetfeld  $B_0$  bestimmte Größe, die dann divergenz- und wirbelfrei sein muß. Die Geschwindigkeit des Fluids hat somit keinen Einfluß mehr auf die lokale Stärke des Magnetfeldes. Durch diese Approximation werden die nichtlinearen Terme  $j \times B$  und  $v \times B$  in den Gleichungen Gl. (2.11) und Gl. (2.14) linearisiert. Wendet man den Divergenzoperator auf Gl. (2.13) an, so erhält man die Gleichung der Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (4.1)$$

die ein Analogon zur hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung bildet. Bei gegebenem Magnetfeld ersetzt diese die Gleichungen (2.12 und 2.13).

#### 4.1.2 Linearisierung der Impulsgleichung

Beschränkt man sich des weiteren auf MHD- Strömungen mit großen Interaktionsparametern  $N \gg 1$ , was einem Überwiegen der elektrodynamischen Kräfte gegenüber den Trägheitskräften gleichkommt, so läßt sich die Impulsgleichung Gl. (2.11) durch Vernachlässigen der Beschleunigungsterme linearisieren.

#### 4.1.3 Approximation für große Hartmann- Zahlen

Wie bereits bei der eindimensionalen Hartmann- Strömung deutlich wurde, beschränkt sich der Reibungseinfluß auf sehr dünne Wandgrenzschichten. In Magnetfeldrichtung orientierte Grenzschichten weisen eine Dicke der Größenordnung  $\delta_S \sim O(1/\sqrt{M})$  auf. Grenzschichten, in denen die Normalkomponente des Magnetfeldes nicht verschwindet, dagegen eine Dicke der Größenordnung  $\delta_S \sim O(1/M)$ . Vernachlässigt man den Reibungsterm in der Impulsgleichung Gl. (2.11), so erhält man eine recht gute Approximation der unbekanntenen Strömungsgrößen

$v_c$ ,  $j_c$ ,  $p_c$  und  $\phi_c$  im Strömungskern, der auch als Core bezeichnet wird (magnetostatische Approximation).

Aufgrund dieser Vereinfachung kann die kinematische Randbedingung Gl. (2.19) nur für die Normalkomponente der Geschwindigkeit  $v$  erfüllt werden.

$$v_c \cdot n = 0. \quad (4.2)$$

Die vollständige Erfüllung aller physikalischen Randbedingungen liefert eine Grenzschichtbetrachtung. An der Kanalwand muß eine Korrektur der Kernströmungsvariablen unter Berücksichtigung aller in der Wandgrenzschicht wichtigen physikalischen Effekte insbesondere der Reibung erfolgen. Die gesuchten Größen ergeben sich damit im gesamten Strömungsgebiet zu

$$(v, j, p, \phi) = (v, j, p, \phi)_c + (v, j, p, \phi)_\delta. \quad (4.3)$$

Die Grenzschichtvariablen  $(v, j, p, \phi)_\delta$  erfüllen zusammen mit den Core-Variablen  $(v, j, p, \phi)_c$  des reibungsfreien Strömungskerns die exakten Randbedingungen. Sie verschwinden in genügend großem Abstand von der Kanalwand (vgl. Abb. 4.1).

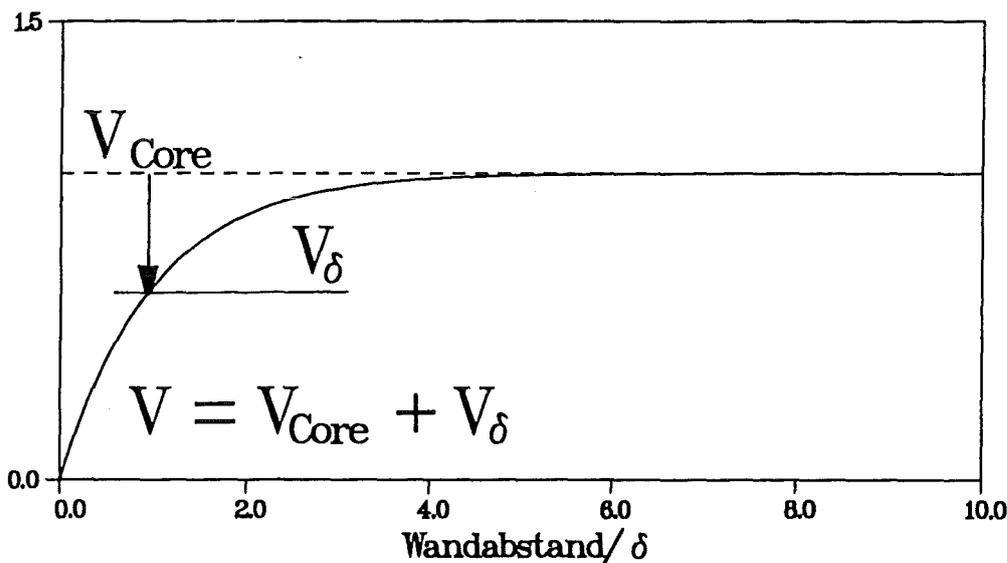


Abb. 4.1 Geschwindigkeit in der viskosen Wandgrenzschicht (Bühler 1993)

## 4.2 Koordinatensysteme

Um die physikalischen Randbedingungen sowie die Gleichungen möglichst einfach formulieren zu können, werden zwei unterschiedliche Koordinatentransformationen eingeführt. Die eine beschreibt den gesamten Strömungsbereich und dient damit zur Bestimmung der Core-Variablen, die andere Transformation gilt lediglich in den als dünn vorausgesetzten wandnahen Grenzschichten.

#### 4.2.1 Transformation für die Lösung nach den Core- Variablen

In dem vom Fluid eingenommenen Volumen werden allgemeine krummlinige Koordinaten  $u^i$  eingeführt. Wählt man die Koordinatenrichtung  $u^3$  parallel zu den Magnetfeldlinien, so können charakteristische Eigenschaften von MHD- Strömungen ausgenutzt werden. Obwohl eine Berechnung für allgemeine Magnetfelder möglich wäre, beschränken wir uns im folgenden auf ebene Magnetfelder. Damit werden alle magnetischen Feldlinien im Fluid näherungsweise parallel, und die Koordinatenrichtung  $u^3$  kann mit der kartesischen Koordinatenrichtung  $x^3$  zusammenfallen. Mit der Einführung der Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(u^1, u^2) + \mathbf{h}(u^1, u^2)u^3 \quad (4.4)$$

(Bühler 1991) ergibt sich eine einfache Beschreibung der geometrischen Randbedingungen beliebig geformter Strömungskanäle. Abb. 4.2 zeigt die geometrischen Verhältnisse die zu dieser Transformation führen.

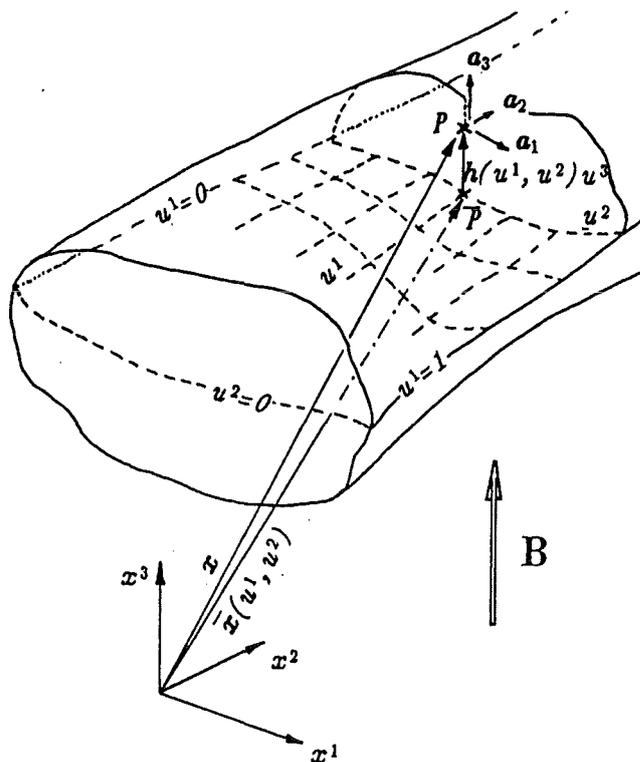


Abb. 4.2 Koordinatensysteme (Bühler 1993)

Eine Magnetfeldlinie schneidet den Kanal in zwei Punkten, die im Abstand  $2h$  voneinander entfernt liegen,  $h$  ist deshalb ein Vektor, der in Magnetfeldrichtung zeigt. Die mittlere Fläche  $\bar{\mathbf{x}}$  wird aus den Mittelpunkten dieser Verbindungslinien gebildet.  $u^1$  und  $u^2$  sind die Gaußschen Flächenkoordinaten der Fläche  $\bar{\mathbf{x}}$  (Klingbeil 1966). Die Gleichung der Kanalwand erhält hiermit die einfache Form  $u^3 = \pm 1$ . Durch eine Transformation nach Gleichung (4.4) kann jeder beliebig geformte Strömungsbereich auf ein Standardvolumen  $0 < u^1, u^2 < 1$ ,  $-1 < u^3 < 1$  abgebildet werden.

Bei diesen Transformationen ergibt sich eine differentielle Verschiebung  $d\mathbf{x}$  im Raum aus dem totalen Differential des Ortsvektors  $\mathbf{x}$ .

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^3} du^3. \quad (4.5)$$

Die partiellen Ableitungen des Ortsvektors nach den Koordinaten  $u^i$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} = \partial_i \mathbf{x} = \mathbf{a}_i \quad (4.6)$$

können als neue Basisvektoren  $\mathbf{a}_i$  interpretiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \partial_1 \mathbf{x} = \partial_1 \bar{\mathbf{x}} + u^3 \partial_1 \mathbf{h}, \\ \mathbf{a}_2 &= \partial_2 \mathbf{x} = \partial_2 \bar{\mathbf{x}} + u^3 \partial_2 \mathbf{h}, \\ \mathbf{a}_3 &= \partial_3 \mathbf{x} = \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Skalarprodukte

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k = g_{ik} = g_{ki} \quad (4.8)$$

bilden die Komponenten des metrischen Tensors. Sowohl  $g_{33}$  als auch das von der Basis aufgespannte Volumen  $V = \sqrt{g}$  sind von  $u^3$  unabhängig.

#### 4.2.2 Transformation für die Lösung der Grenzschichtgleichungen

Im Bereich der Kanalwände werden durch eine etwas abgeänderte Koordinatentransformation die Grenzschichtkoordinaten  $d^i$  eingeführt.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_w(d^1, d^2) + \mathbf{n}(d^1, d^2) \delta d^3. \quad (4.9)$$

Hierin ist  $\mathbf{n}$  der in das Innere des Strömungsbereiches zeigende Normaleneinheitsvektor auf die Fluid- Wand- Grenzfläche.  $\delta$  bezeichnet die Dicke der sich an dieser Fläche ausbildenden Reibungsgrenzschicht. Ein Punkt  $\mathbf{x}_w$  der Grenzfläche ergibt sich aus Gl.(4.4) für die Koordinaten  $u^1 = d^1$ ,  $u^2 = d^2$  und  $u^3 = \pm 1$ . Die Basisvektoren der so definierten Grenzschichttransformationen ergeben sich entsprechend Gl.(4.7) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \partial_1 \mathbf{x} = \partial_1(\mathbf{x}_w + \mathbf{n} \delta d^3) \approx \partial_1 \mathbf{x}_w, \\ \mathbf{a}_2 &= \partial_2 \mathbf{x} = \partial_2(\mathbf{x}_w + \mathbf{n} \delta d^3) \approx \partial_2 \mathbf{x}_w, \\ \mathbf{a}_3 &= \partial_3 \mathbf{x} = \mathbf{n} \delta = \mathbf{n} \delta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Approximation Gl.(4.11) gilt nur für dünne Grenzschichten an glatten Kanalwänden. Der Metrische Tensor der Grenzschichttransformation besitzt folgende einfache Form:

$$[g_{ij}]_{\delta} \approx \begin{bmatrix} \partial_1 x_w & \partial_1 x_w & \partial_1 x_w & \partial_2 x_w & 0 \\ \partial_2 x_w & \partial_1 x_w & \partial_2 x_w & \partial_2 x_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \cdot \delta \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Wegen der Orthogonalität der drei Basisvektoren  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3 = n\delta$  verschwinden in Gl.(4.12) vier Tensorkomponenten. Alle verbleibenden Elemente des metrischen Tensors sind von der dritten Koordinatenrichtung  $d^3$  unabhängig. Die Komponenten  $g_{ik}$  mit  $i, k=1, 2$  sind für beide Transformationen Gl.(4.4) und Gl.(4.9) identisch und repräsentieren die Größe und Orientierung eines Wandflächenelementes  $A$ . Das von der Basis aufgespannte Volumenelement ergibt sich aus den Basisvektoren der Grenzschichttransformation  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  zu

$$V = A \delta. \quad (4.12)$$

### 4.3 Integration der Gleichungen

Die Lösung der Gleichungen in den beiden Koordinatensystemen kann nicht unabhängig voneinander erfolgen. So geht die Lösung des Grenzschichtproblems als Randbedingung in die Lösung der Gleichungen für die Core- Variablen ein. Für nicht leitende Wände ist dieser Kopplungseffekt besonders wichtig, da in diesem Fall die viskosen Randschichten mit ihren geringeren Strömungsgeschwindigkeiten die einzige Rückflußmöglichkeit für die im Kernbereich induzierten Ströme darstellen. Dadurch beeinflussen diese alle Core- Größen direkt. Mit zunehmender Wandleitfähigkeit nimmt der Einfluß der Grenzschichtvariablen auf die Lösung im reibungsfreien Strömungskern jedoch stark ab.

#### 4.3.1 Bestimmung der Core- Variablen

Unter der Voraussetzung reibungs- und trägheitsfreier Strömung im Kernbereich ( $M \gg 1$ ,  $N \gg 1$ ) kann die Impulsgleichung Gl. (2.11) stark vereinfacht als

$$\nabla p = j \times B \quad (4.13)$$

geschrieben werden. Multipliziert man diese skalar mit dem Magnetfeldvektor, so erhält man

$$B \cdot \nabla p = 0 \quad (4.14)$$

oder

$$\partial_3 p = 0. \quad (4.15)$$

Hieraus kann unmittelbar die wichtige Aussage für den reibungsfreien Kern der MHD- Strömung formuliert werden:

→ Der Druck ist entlang von Magnetfeldlinien konstant.

Die Impulsgleichung Gl.(4.14) kann direkt nach den Stromdichtekomponenten  $j^1$  und  $j^2$  aufgelöst werden. Die unbekannte Komponente  $j^3$  ergibt sich aus der Ladungserhaltung Gl. (4.1) mit Gl. (4.15) durch eine Integration entlang der Koordinate  $u^3$ . Eine weitere analytische Integration des Ohmschen Gesetzes Gl. (2.14) entlang der magnetischen Feldlinien führt zur

Bestimmung des elektrischen Potentials. Als zunächst unbekannte Integrationskonstanten werden die beiden Potentialwerte an der Kanaloberseite  $\phi_o$  und an der Kanalunterseite  $\phi_u$  eingeführt. Ihre Berechnung erfolgt später durch die Grenzschichtbetrachtung, womit sich die Kopplung zwischen den beiden Lösungsbereichen ergibt.

Durch die Integrationen entlang magnetischer Feldlinien wird das allgemeine dreidimensionale MHD- Problem auf die Kanalwand projiziert und kann dort zusammen mit den reibungsbehafteten Grenzschichtgleichungen als zweidimensionales Problem numerisch gelöst werden. Diese Lösung gestaltet sich so, daß sämtliche elektrische Größen durch die drei Skalare  $p$ ,  $\phi_o$  und  $\phi_u$  beschrieben werden können. Der physikalische Zusammenhang ist alleine durch den Betrag der magnetischen Induktion und der Geometrie  $g_{ij}$  gegeben.

#### 4.3.2 Bestimmung der Grenzschicht- Variablen

Bei genauerer Betrachtung der physikalischen Verhältnisse innerhalb der viskosen Wandgrenschichten findet man die folgenden Zusammenhänge:

- Der Druck ist über die Grenzschicht hinweg näherungsweise konstant. Er wird der Grenzschicht durch die Kernströmung aufgeprägt.
- Das elektrische Potential ist über die Grenzschichtdicke hinweg näherungsweise konstant und somit identisch mit den Potentialwerten der Kernströmung  $\phi_o$  und  $\phi_u$ .
- Der Verlauf der Geschwindigkeit über die Grenzschicht ergibt sich zu

$$v_i = v_{i,core} (1 - e^{-d^3}), \quad i = 1, 2. \quad (4.16)$$

- Die elektrische Stromdichte in der Grenzschicht ist gegeben durch

$$j_i = j_{i,core} - (j_{i,core} + \partial_i \phi) \cdot e^{-d^3}, \quad i = 1, 2. \quad (4.17)$$

Eine Integration von Gleichung (4.1) unter Berücksichtigung von Gl. (4.17) liefert schließlich die Bestimmungsgleichung für die bisher noch unbekanntenen Potentialwerte  $\phi_o$  und  $\phi_u$ .

$$(V j^3)_{core} = \sum_{i=1}^2 \partial_i \sum_{k=1}^2 (c + \delta) A g^{ik} \partial_k \phi_{o,u}. \quad (4.18)$$

$\delta$  ist hier die effektive Dicke der elektrisch leitenden Grenzschicht.

$$\delta = \frac{1}{(B \cdot n) M}. \quad (4.19)$$

Da diese Beziehung an magnetfeldparallelen Wänden versagt, wird dort die Grenzschichtdicke entsprechend

$$\delta = \delta_s \approx \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (4.20)$$

abgeschätzt.

#### 4.4 Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen

Mit den in den vorigen Abschnitten vorgestellten Gleichungen ist nun die Lösung für allgemeine dreidimensionale MHD-Strömungen auf die Lösung gekoppelter zweidimensionaler Differentialgleichungen zweiter Ordnung für den Druck  $p$  sowie für die Oberflächenpotentiale  $\phi_o$  und  $\phi_u$  reduziert. Die Lösung dieser kann für allgemeine Problemstellungen nur numerisch erfolgen.

Die Erhaltungssätze für Masse und Ladung werden hierzu für ein diskretes Kontrollvolumen (vgl. Abb. 4.3)

$$\Delta V = V \Delta u^1 \Delta u^2 \Delta u^3 \quad (4.21)$$

endlicher Abmessung gefordert. Die allgemeine Lösung wird auf die Lösung an diskreten Punkten des Rechengebietes begrenzt.

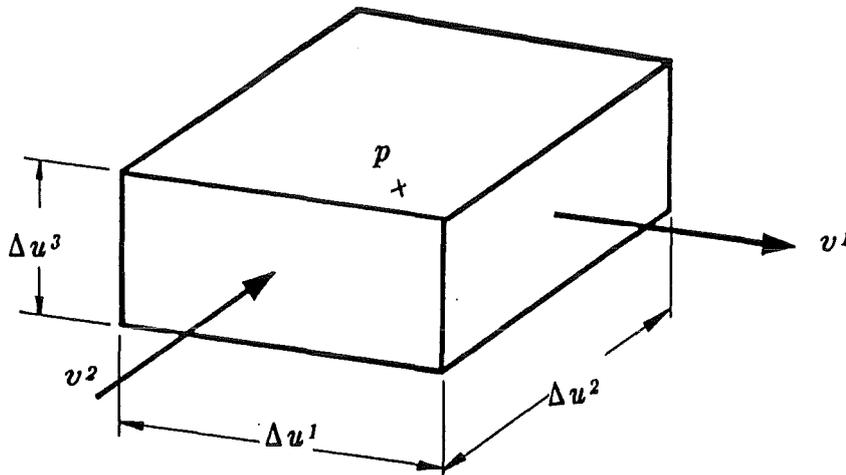


Abb. 4.3 Diskretes Kontrollvolumenelement

Die partiellen Ableitungen  $\partial_i f$  einer Funktion  $f$  werden durch zentrale partielle Differenzen  $\Delta_i f$  approximiert.

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \approx \frac{f\left(u^i + \frac{1}{2} \Delta u^i\right) - f\left(u^i - \frac{1}{2} \Delta u^i\right)}{\Delta u^i} = \frac{\Delta f}{\Delta u^i} = \Delta_i f. \quad (4.22)$$

Nach einer Integration vom unteren bis zum oberen Rand des Kontrollvolumens lautet die Gleichung der diskreten Massenerhaltung:

$$\Delta_3 (V v^3) = - \frac{1}{\Delta u^3} \int_{u^3 - \frac{1}{2} \Delta u^3}^{u^3 + \frac{1}{2} \Delta u^3} \sum_{i=1}^2 \Delta_i (V v^i) d u^3. \quad (4.23)$$

Die in das Volumenelement  $\Delta V$  über die Fläche  $u^1 = \text{konst}$  eintretende (bzw. austretende) Volumenstromdichte errechnet sich als Produkt der kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten  $v^1$  mit dem von der Basis aufgespannten Volumen  $V$ . Die Summe der Volumenstromänderungen in den Richtungen  $u^1$  und  $u^2$  über die Grenzflächen des Volumenelements ist gleich der Änderung der Volumenstromdichte in der Richtung  $u^3$ . Die Volumenstromdichten der ersten beiden Komponenten ergeben sich hierbei aus dem Ohmschen Gesetz in Abhängigkeit der Stromdichten und des elektrischen Potentials. Diese Größen lassen sich aus Druckwerten und Oberflächenpotentialen ableiten. Es kann gezeigt werden, daß alle Koeffizienten des Integrals höchstens quadratische Funktionen  $q(u^3)$  der in Magnetfeldrichtung orientierten Koordinate bilden. Deshalb kann eine analytisch exakte Berechnung des Integrals mit drei Stützstellen der Simpsonschen Regel erfolgen, die Polynome bis zur Ordnung 3 exakt integriert.

$$\int_a^b q(u) du = \frac{1}{6} \left[ q(a) + 4q\left(\frac{a+b}{2}\right) + q(b) \right] (b-a). \quad (4.24)$$

Integriert man Gl. (4.23) vom unteren bis zum oberen Kanalrand, so ergibt sich bei verschwindender linker Gleichungsseite eine algebraische Gleichung zur Bestimmung des Druckwertes im Innern des betrachteten Volumenelementes in Abhängigkeit aller Nachbardruckwerte und Potentialgradienten. Die Auswertung der Ladungserhaltung in diskreter Form führt gleichfalls auf algebraische Gleichungen zur Bestimmung der Oberflächenpotentiale  $\phi_o$  und  $\phi_u$  im Zentrum des betrachteten Wand- Grenzsichtvolumenelements. Dabei sind Druck und Potentialwerte auf versetzten Maschengittern angeordnet.

Sämtliche Druck- und Potentialgleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem, welches dank der großen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit moderner Großrechenanlagen direkt gelöst werden kann. Als Ergebnis erhält man das Druckfeld sowie die Wandpotentiale, aus denen sich die dreidimensionalen Strömungszustände (u.a. Geschwindigkeiten) im gesamten Rechengbiet bestimmen lassen.

Aus den in den vorigen Abschnitten geschilderten Zusammenhängen wurde von Bühler (1993) ein Rechenprogramm entwickelt. Dieses liefert unter Vorgabe der Kanalgeometrie, der Hartmann- Zahl sowie unterschiedlichen Randbedingungen (Wandleitfähigkeit und magnetische Induktion) die Lösung der charakteristischen Strömungsgrößen.

## 5 Numerische Berechnung von MHD- Strömungen in expandierenden Kanälen

Einen einfachen Fall dreidimensionaler MHD- Strömungen bildet die Strömung in einem Diffusor, bei welchem die Hauptströmungsrichtung senkrecht zu einem konstanten Magnetfeld verläuft und dessen Wand eine konstante elektrische Leitfähigkeit besitzt. Somit ergibt sich die in Abschnitt 3.3 beschriebene Umverteilung der Geschwindigkeit lediglich aufgrund der Zunahme der Querschnittsfläche. Mit dem Kernströmungsprogramm werden im folgenden unterschiedliche Querschnittserweiterungen sowie deren Einlauf- und Nachlaufbereich untersucht. Die interessierenden Strömungsgrößen wie Druckverlust und Geschwindigkeitsverteilung werden für verschiedene Leitfähigkeiten der Kanalwand ermittelt.

### 5.1 Diffusor mit kreisförmigem Querschnitt

#### 5.1.1 Modellierung der Geometrie

Gegenstand der Betrachtung sei ein Kreisdiffusor, dessen Radius vom Wert  $R_1 = 1$  auf den Wert  $R_2 > R_1$  ansteigt. Da in dem vorliegenden Rechenprogramm die Trägheitsterme der Impulsgleichung vernachlässigt werden (vgl. Abs.4.1.2), muß ein stetiger Übergang zwischen den Radien erfolgen. Die Aufteilung des Rechengebietes erfolgt daher in drei Bereiche (vgl. Abb. 5.1).

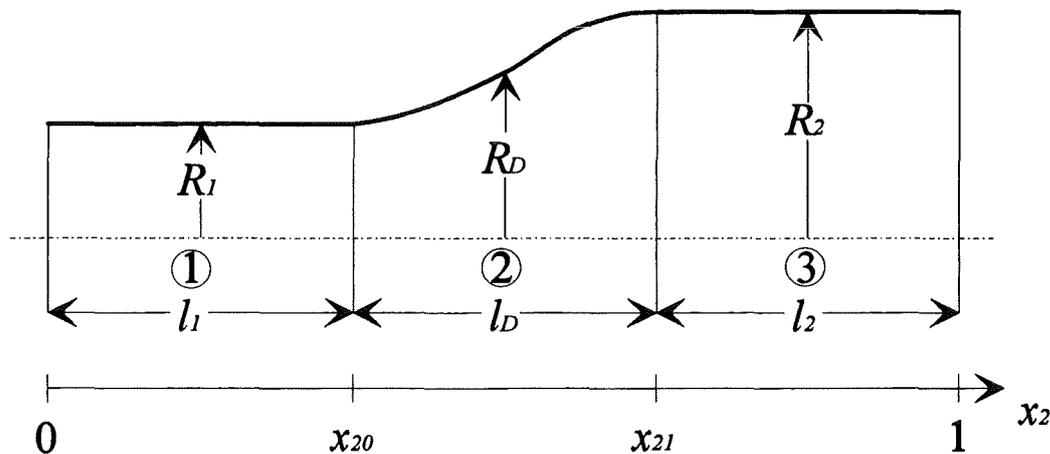


Abb. 5.1 Aufteilung des Rechengebietes.

- Bereich ① Einlaufstrecke mit konstantem Radius  $R_1 = 1$  und der Einlauflänge  $l_1$ ,
- Bereich ② Diffusor mit  $R_D = f(x_2)$  und der Diffusorlänge  $l_D$ ,
- Bereich ③ Nachlaufstrecke mit konstantem Radius  $R_2$  sowie der Nachlauflänge  $l_2$ .

Dabei werden sämtliche Längenangaben mit der charakteristischen Abmessung der Einlaufstrecke normiert. Das Radienverhältnis der Querschnittserweiterung ergibt sich somit zu

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1} = R_2. \quad (5.1)$$

Als Kontur des Diffusors wurde, wegen der oben geforderten Stetigkeit, eine Kosinus-Funktion gewählt.

$$R_D(x_2) = 1 + \frac{\alpha - 1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \pi \frac{x_2 - x_{20}}{l_D} \right) \right], \quad (5.2)$$

$$x_{20} < x_2 < x_{21}.$$

Die in dieser Gleichung noch offene Diffusorlänge  $l_D = x_{21} - x_{20}$  wird mit vier charakteristischen Längen angenommen.

Wie bereits in Abschn. 3.3.1 angedeutet bleiben die dreidimensionalen Strömungseffekte nicht auf den Diffusor begrenzt, sondern wirken sich insbesondere bei isolierten Rohren bis weit in die Ein- und Nachlaufstrecke aus. Walker und Ludford (1974) geben für elektrisch vollständig isolierte Rohre Ein- und Nachlaufängen der Größenordnung  $O(M^{1/2})$  an. Für eine Hartmannzahl von  $M=1000$  ergibt sich für die Einlaufänge der Wert  $l_1 \approx \sqrt{M} = 31.62$ .

In die Bestimmung dieses Wertes geht die Kontur der Querschnittserweiterung nicht ein. Proberechnungen bestätigen, daß mit den gewählten Größen  $l_1 = 30$  und  $l_2 = 60$  am Ein- und Austritt des Rechengebietes eingelaufene Strömungszustände erreicht werden können.

Für elektrisch leitende Kanalwände ergeben sich im allgemeinen kürzere Einlaufstrecken. Rechnungen unter Variation des Wandleitparameters können daher mit derselben Aufteilung des Rechengebiets behandelt werden.

Die Gesamtlänge des Rechengebietes beträgt damit 94 charakteristische Längen, bei einer maximalen Breite von lediglich vier. Der eigentlich interessanteste Teil, die Querschnittserweiterung, findet auf der kurzen Strecke von vier charakteristischen Längen statt. Um den Rechenaufwand zu begrenzen und dennoch zu einer in den relevanten Bereichen detaillierten Lösung zu gelangen, ist daher eine nicht äquidistante Teilung des Rechengebietes von Vorteil. Hierbei sollen auf jeden der drei Bereiche gleich viele Gitterebenen entfallen. Dies entspricht einer Aufteilung der Koordinate  $u_2$  in folgende Bereiche:

$$\text{Bereich ①} \quad 0 \leq u_2 \leq 1/3,$$

$$\text{Bereich ②} \quad 1/3 < u_2 < 2/3,$$

$$\text{Bereich ③} \quad 2/3 \leq u_2 \leq 1.$$

Die Aufteilung im Diffusor selbst erfolgt äquidistant, in den Rohren dagegen wird eine zum Diffusor hin dichtere Diskretisierung gewählt. Dabei wird ein stetiger Übergang auf den Gitterabstand des Diffusors erreicht. Bild 5.1 zeigt den Mittelteil des verwendeten Gitters.

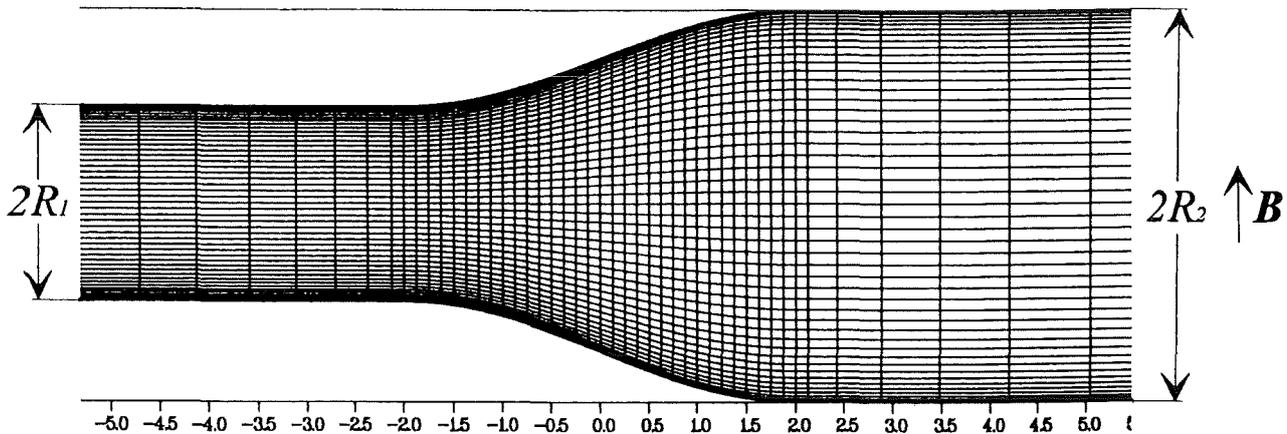


Abb. 5.2 Rechengitter für Kreisrohrdiffusor.

### 5.1.2 Durchgeführte Rechnungen

Bei einer Hartmann-Zahl von  $M = 1000$  wurden für die vorliegende Geometrie Rechnungen unter Variation des Wandleitparameters  $c$  durchgeführt. Die jeweilige Größe der Wandleitfähigkeit sowie die Stärke des magnetischen Feldes waren über die gesamte Länge des Rechengebietes als konstant gewählt. Die Normierung der Geschwindigkeit erfolgt im Querschnitt des Einlaufrohres.

Die bei den Rechnungen erzielte Genauigkeit nimmt mit der Anzahl der gewählten Gitterlinien zu. Demgegenüber erhöht sich die erforderliche Rechenzeit in etwa mit der Dritten Potenz der Gitterpunktzahl. Zudem ist die Rechenzeit für kleine Wandleitparameter höher. Die Berechnung der Lösung in nur einer Hälfte des symmetrischen Kanals reduziert den Rechenaufwand erheblich.

Unter Berücksichtigung der oben genannten Einschränkungen wurde zunächst eine Diskretisierung von 48 Punkten in Umfangsrichtung und 96 in axialer Richtung gewählt. Da die Rechenzeiten für höhere Wandleitparameter deutlich geringer ausfallen, konnten ab  $c=0.03$  in Umfangsrichtung 96 Punkte gewählt werden.

### 5.1.3 Ergebnisse

Die signifikantesten dreidimensionalen Strömungseffekte ergeben sich für isolierte Kanalwände, da hier die Stromkreise ausschließlich innerhalb des Fluides geschlossen werden. Abb. 5.3 zeigt die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils an ausgezeichneten Stellen des Kanals für  $c=0$ .

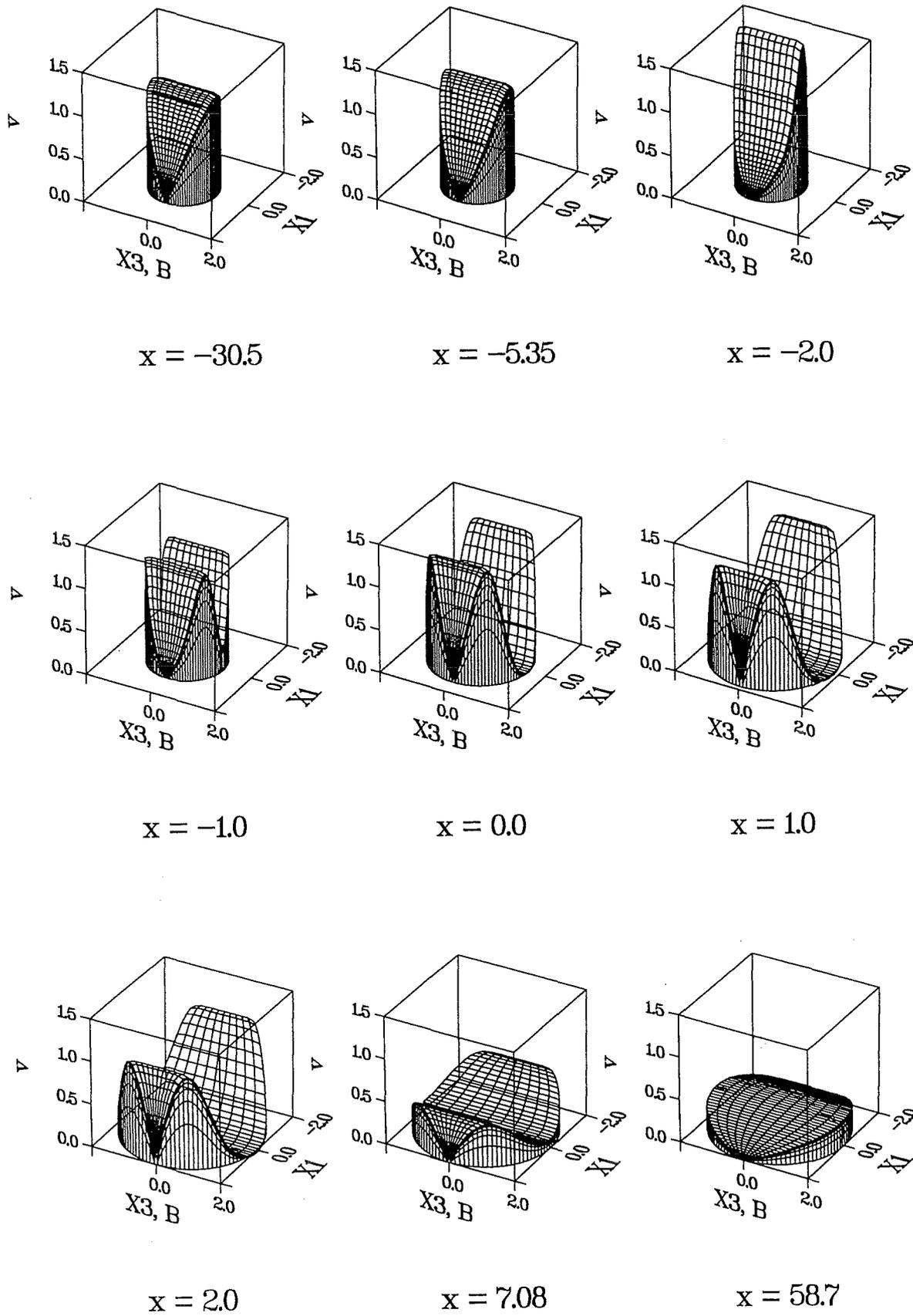


Abb. 5.3 Axiale Geschwindigkeitsprofile ( $c=0$ ,  $M=1000$ )

Im Einlauf zeigt sich ein für Kreisrohre mit geringer Wandleitfähigkeit typisches Strömungsbild. In Magnetfeldrichtung liegt ein kolbenförmiges Profil mit starken Wandgradienten vor. Quer zur Magnetfeldrichtung dagegen erkennt man ein elliptisches Profil (vgl. Gleichung (3.5) für  $c \rightarrow 0$ ).

Beim Eintritt in den Diffusor kommt es zu einer Erhöhung der Geschwindigkeiten in Kanalmitte. Im Diffusor selbst fließt der gesamte Massenstrom durch seitliche Schichten. Im Kernbereich liegt nahezu stagnierendes Fluid vor. Es ergeben sich dort sogar lokale Rückströmgebiete. Im Nachlaufrohr klingen die dreidimensionalen Strömungseffekte ab, und man erhält wieder das Profil einer ausgebildeten MHD-Rohrströmung. Im Vergleich zu einer Abschätzung (vgl. Abschnitt 3.3.1) ergeben sich jedoch geringere Geschwindigkeiten in den Seitenschichten und somit dickere Seitenschichten. Auch ist das Geschwindigkeitsmaximum nicht am Diffusoraustritt, sondern in etwa in Diffusormitte in der Nähe der größten Querschnittsänderung.

Die Ursache für die Umverteilung des Fluids bilden dreidimensionale Ströme, die entlang der Strömungsrichtung fließen. Ihr Auftreten kann an einem Längsschnitt quer zur Magnetfeldrichtung (Abb. 5.4) qualitativ beschrieben werden.

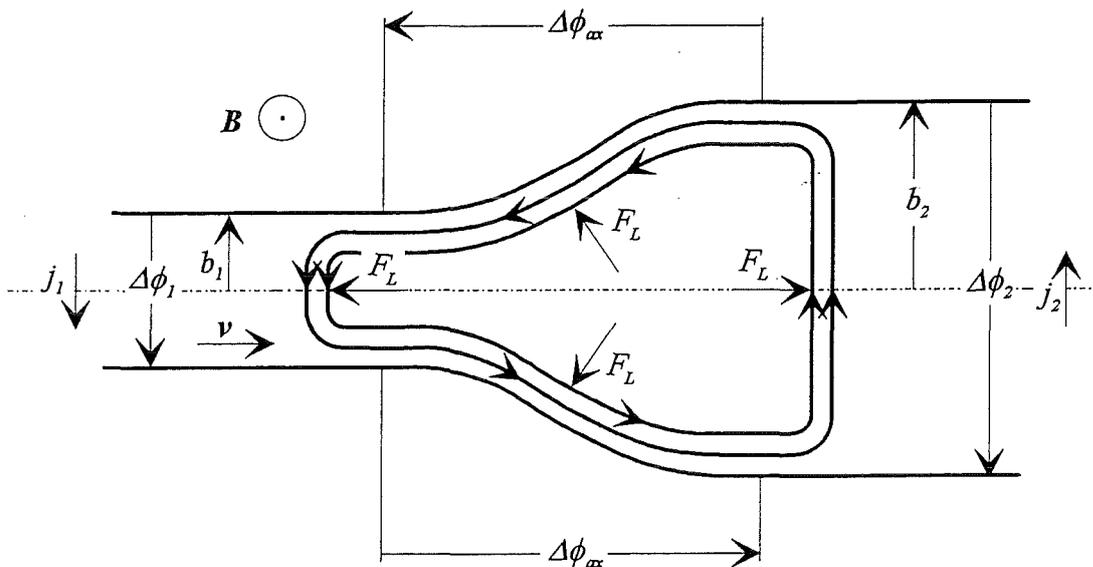


Abb. 5.4 Dreidimensionale Ströme in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld.

Für voll ausgebildete zweidimensionale MHD-Strömungen finden induzierte elektrische Ströme lediglich in der Kanalwand und in den viskosen Grenzschichten eine Rückfließmöglichkeit. Der hohe elektrische Widerstand dieser Schichten und der Wand begrenzt diese Ströme und die durch sie verursachten Druckverluste auf ein relativ niedriges Niveau.

$$j_{2D} \sim \nabla p \sim \left( c + \frac{I}{M} \right). \quad (5.3)$$

Die Potentialdifferenz zwischen der Symmetrieebene  $x_1 = 0$  und den Kanalseiten  $x_1 = b$  ist dabei proportional dem Rohrdurchmesser und der mittleren Geschwindigkeit ( $\bar{u} \sim I/A$ )

$$\Delta\phi \sim \frac{b}{A}. \quad (5.4)$$

Im Diffusorbereich ist die Querschnittsfläche  $A$  variabel. Für kreisförmige Querschnitte ist  $A \sim I/R^2$  und  $b = R$ . Deshalb ergibt sich zusätzlich zu Potentialdifferenzen in den Querschnitten

$$\Delta\phi_{1,2} \sim \frac{I}{R_{1,2}} \quad (5.5)$$

eine axiale Potentialdifferenz der Größenordnung

$$\Delta\phi_{ax} \sim \left(1 - \frac{I}{R_2}\right). \quad (5.6)$$

Im Einlaufbereich induzierte Ströme finden somit einen zusätzlichen Strompfad im Fluid, der entlang der Seitenwand axial in den Expansionsbereich führt, dort entgegen der eigentlich induzierten Stromrichtung den Kanal durchquert und sich entlang der anderen Seitenwand symmetrisch schließt.

Der zusätzliche Strompfad erlaubt im Einlaufbereich größere Stromdichten. Dies verursacht erhebliche Druckverluste, die nur teilweise durch die Pumpwirkung im Expansionsbereich ausgeglichen werden (vgl. Abb. 5.5). Es verbleibt ein irreversibler zusätzlicher Druckverlust  $\Delta p_{3D}$ .

Um den starken, der Strömung entgegengesetzten Lorenzkraften auszuweichen, verlagert sich der Hauptvolumenstrom in die Seitenschichten, in denen die Lorentzkraft lediglich einen Beitrag in Wandnormalenrichtung liefert, jedoch entgegen der Strömungsrichtung.

In Abb. 5.5 ist der Druckverlauf entlang der Kanalachse dargestellt. An dem linearen Verlauf der Kurve für  $x_2 \rightarrow \pm\infty$  erkennt man, daß die Strömung an diesen Stellen voll ausgebildet ist. Dreidimensionale Effekte sind für  $x_2 < -10$  bzw.  $x_2 > 30$  abgeklungen.

Für die Bestimmung des irreversiblen zusätzlichen Druckverlustes  $\Delta p_{3D}$  bieten sich zwei Möglichkeiten an. Zum einen eine graphische Methode, bei welcher zunächst die Tangenten an die Druckverlustkurve in den beiden Bereichen ausgebildeter Strömung angetragen werden. Der Druckverlust  $\Delta p_{3D}$  ergibt sich dann aus Abb. 5.5 als Abstand der Tangenten im Punkt  $x_0 = 0$ .

Zum anderen kann der Druckverlauf mit dem einer lokal voll ausgebildeten MHD- Strömung verglichen werden (Abb. 5.6).

Der Referenzdruckgradient der lokal voll entwickelten Strömung entsprechend Gleichung (3.7) wird entlang der Kanalachse integriert (gestrichelte Kurve). Ein Vergleich mit dem Druckverlauf der numerischen Lösung (durchgezogene Kurve) liefert für  $x_2 \rightarrow \infty$  den irreversiblen Anteil  $\Delta p_{3D}$ .

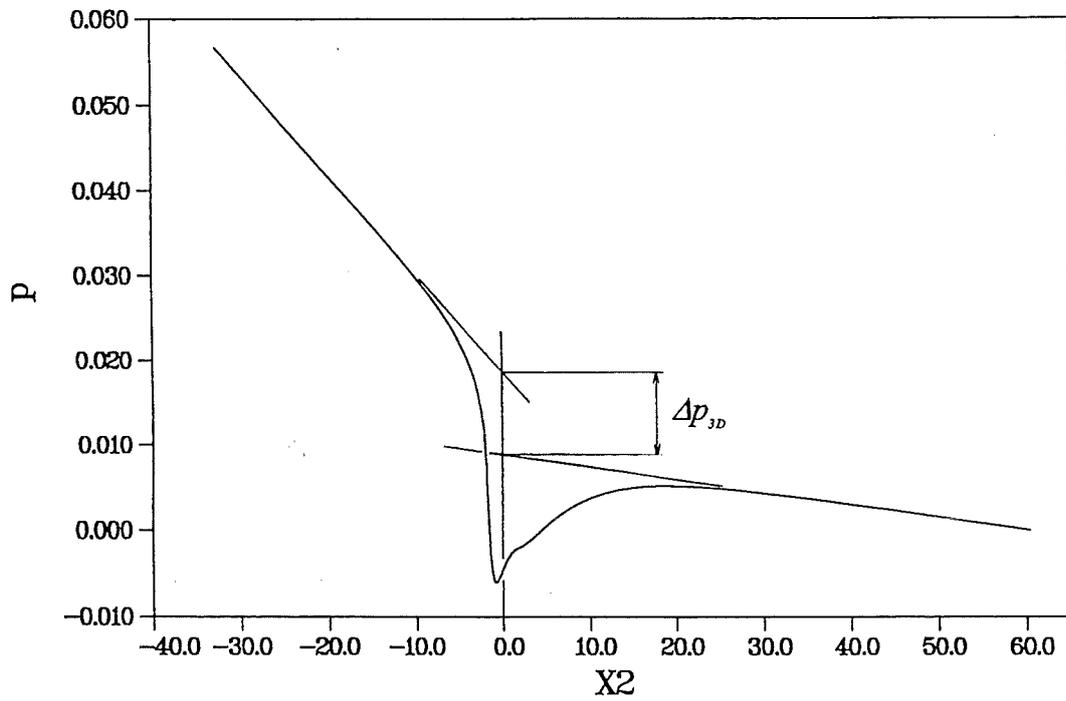


Abb. 5.5 Druckverlauf in einem isolierten Diffusor.

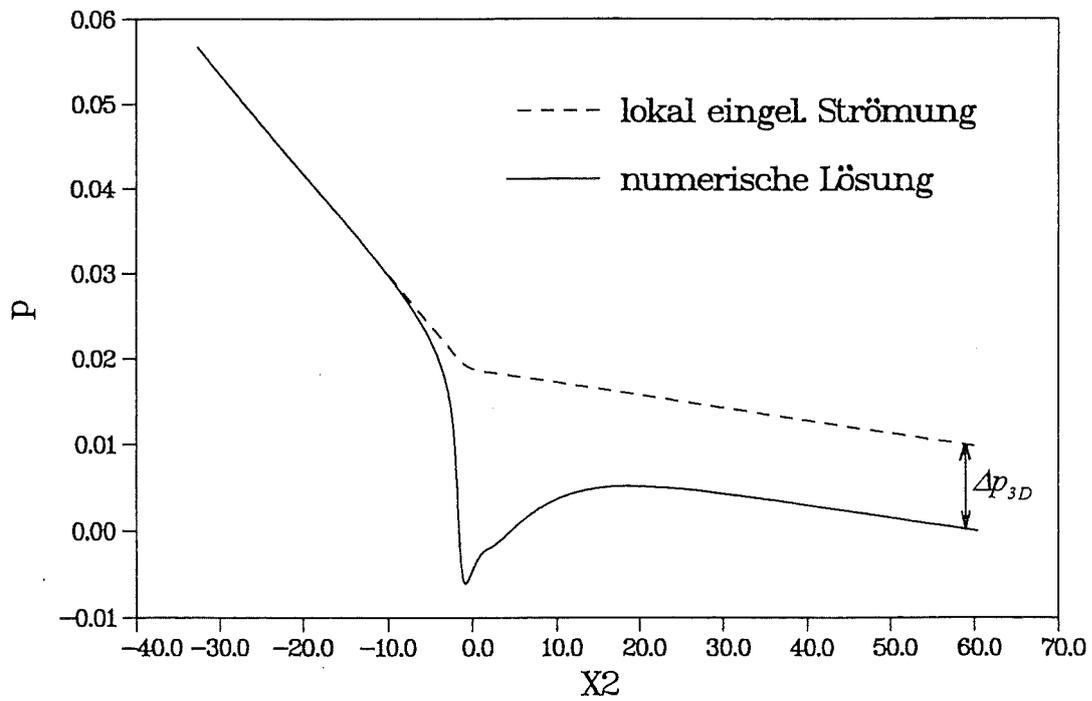


Abb. 5.6 Druckverlauf in einem isolierten Diffusor, Vergleich mit lokal eingelaufener Strömung.

Die Methode der linearen Extrapolation der Druckverläufe der voll eingelaufenen Strömung zum Punkt  $x_2 = 0$  erlaubt eine schnelle ingenieurmäßige Abschätzung des Diffusor- Druckverlustes. Der Druckverlust im Diffusor setzt sich einfach zusammen aus dem Druckverlust zweier gerader Rohre mit unterschiedlichen Durchmessern plus dem irreversiblen Anteil  $\Delta p_{3D}$ . Will man jedoch mit  $\Delta p_{3D}$  ausschließlich die zusätzlichen Effekte aufgrund von dreidimensional fließenden Strömen beschreiben, so erscheint die zweite Methode sinnvoller.

Für die weitere Diskussion der Ergebnisse erweist sich eine Skalierung des irreversiblen Druckverlustes  $\Delta p_{3D}$  mit einem charakteristischen Druckgradienten als vorteilhaft. Als charakteristischer Druckgradient wird der des Einlaufbereichs ( $\partial p / \partial x_2$  für  $x_2 \rightarrow -\infty$ ) gewählt. Der irreversible Druckverlust wird somit verglichen mit demjenigen einer voll ausgebildeten Strömung im Einlaufquerschnitt über eine zusätzliche Länge

$$L_{3D} = \frac{\Delta p_{3D}}{\partial p / \partial x_2 \Big|_{x_2 \rightarrow -\infty}} \quad (5.7)$$

Abbildung 5.7 zeigt den Verlauf von  $L_{3D}$  nach beiden Verfahren in Abhängigkeit von der Wandleitfähigkeit  $c$ .

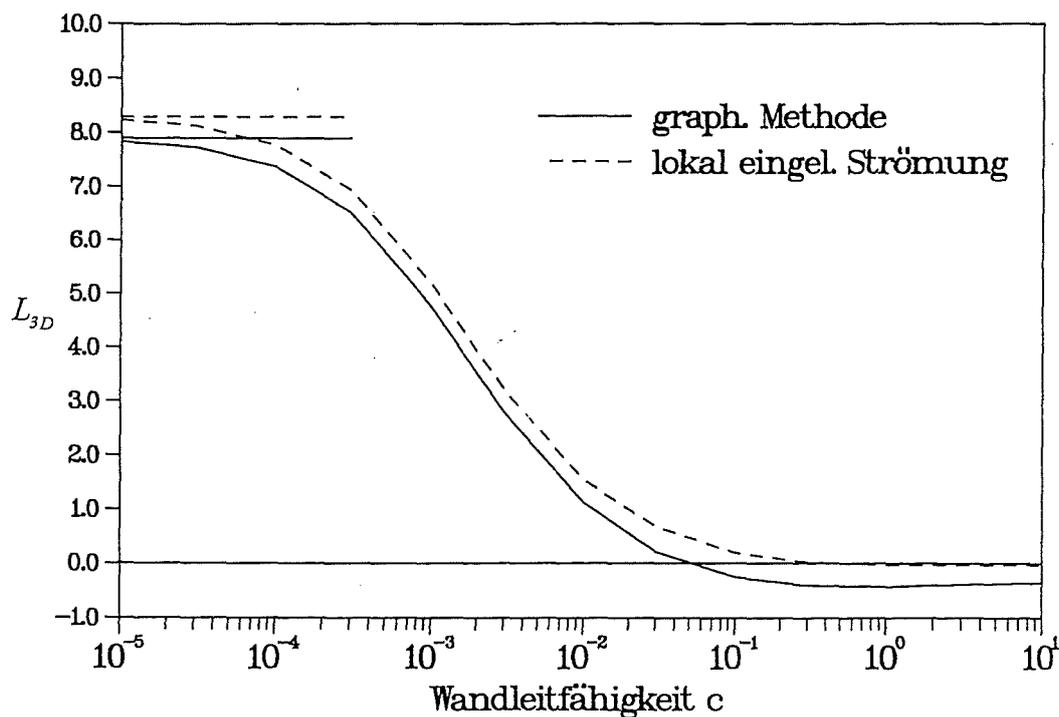


Abb. 5.7  $L_{3D}$  des Kreisdiffusors als Funktion des Wandleitparameters  $c$  ( $M = 1000$ )

Die eingetragenen Tangenten entsprechen dem Wert für  $c=0$ . Beide Kurven zeigen das erwartete asymptotische Verhalten der Lösung. Für perfekt isolierte Kanalwände besitzt  $L_{3D}$  ein Maximum. Für perfekt leitende Kanäle  $c \rightarrow \infty$  schließen sich die elektrischen Ströme unmittelbar in der Kanalwand. Zusätzliche axiale Ströme und somit 3D- Effekte treten nicht auf. Ein Vergleich mit der lokal voll ausgebildeten Strömung zeigt dieses Verhalten bereits für  $c \geq 1$ . Da die graphische Betrachtungsweise diesen Zusammenhang nur unzureichend wiedergibt, wird im folgenden auf deren Darstellung verzichtet.

## 5.2 Diffusoren mit rechteckförmigen Querschnitten

### 5.2.1 Rechteckdiffusor mit Expansion in Magnetfeldrichtung

Analog zur Geometrie des Kreisdiffusors wurde ein Rechteckdiffusor modelliert. Die Einlaufstrecke bildet ein Rohr mit quadratischem Querschnitt der dimensionslosen halben Seitenlänge  $d_1 = 1$ . Im Diffusor erfolgt innerhalb von ebenfalls vier charakteristischen Längen die Expansion in Magnetfeldrichtung auf den Wert  $d_2 = 2$ . Die Breite des Kanals quer zu Magnetfeldrichtung besitzt den konstanten Wert  $b=1$ .

Für einen stetigen Übergang sorgt hier ebenfalls eine Diffusorkontur nach Gl. (5.2). Voruntersuchungen ergaben, daß für das Abklingen der dreidimensionalen Strömungseffekte eine Einlauflänge von 6 charakteristischen Längen und eine Nachlauflänge von 12 charakteristischen Längen ausreichend sind. Abb.5.8 zeigt das für die Rechnungen verwendete Rechengitter.

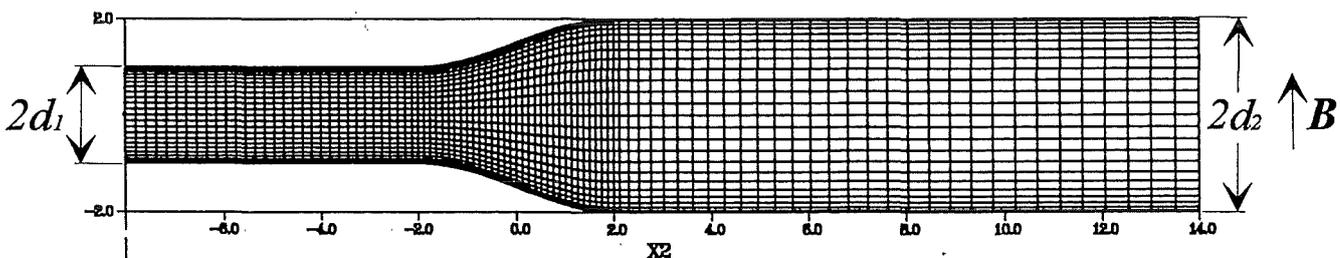


Abb. 5.8 Gitter des Rechteckdiffusors

Die Aufteilung der Gitterpunkte auf die Teilgebiete sowie die nichtäquidistante Teilung in der Koordinatenrichtung  $x_2$  werden entsprechend beibehalten. Wegen Singularitäten der Koordinatentransformation an exakt magnetfeldparallelen Seitenwänden werden diese leicht elliptisch ausgebeult (Bühler 1993). Für kleine elliptische Deformationen erhält man so eine recht gute Approximation des Strömungsverhaltens in einem Rechteckkanal.

Da die Rechenzeiten insgesamt geringer ausfallen als beim Kreisrohrdiffusor, kann eine feinere Diskretisierung von 96 Linien in Umfangsrichtung und 96 in axialer Richtung gewählt werden. Die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils entlang der Kanalachse für  $c=0$  zeigt Abbildung 5.9.

Sowohl im Einlaufbereich als auch im Diffusornachlauf ergibt sich an den Grenzen des Rechengebiets ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil, das für voll entwickelte MHD-Strömungen in isolierten Rechteckkanälen typisch ist. Dadurch werden die ausreichenden Längen der gewählten Ein- und Nachlaufstrecken der numerischen Rechnung bestätigt.

Im Bereich des Diffusors kommt es zu starken Geschwindigkeitserhöhungen in den magnetfeldparallelen Seitenschichten, die im Nachlauf wieder abklingen.

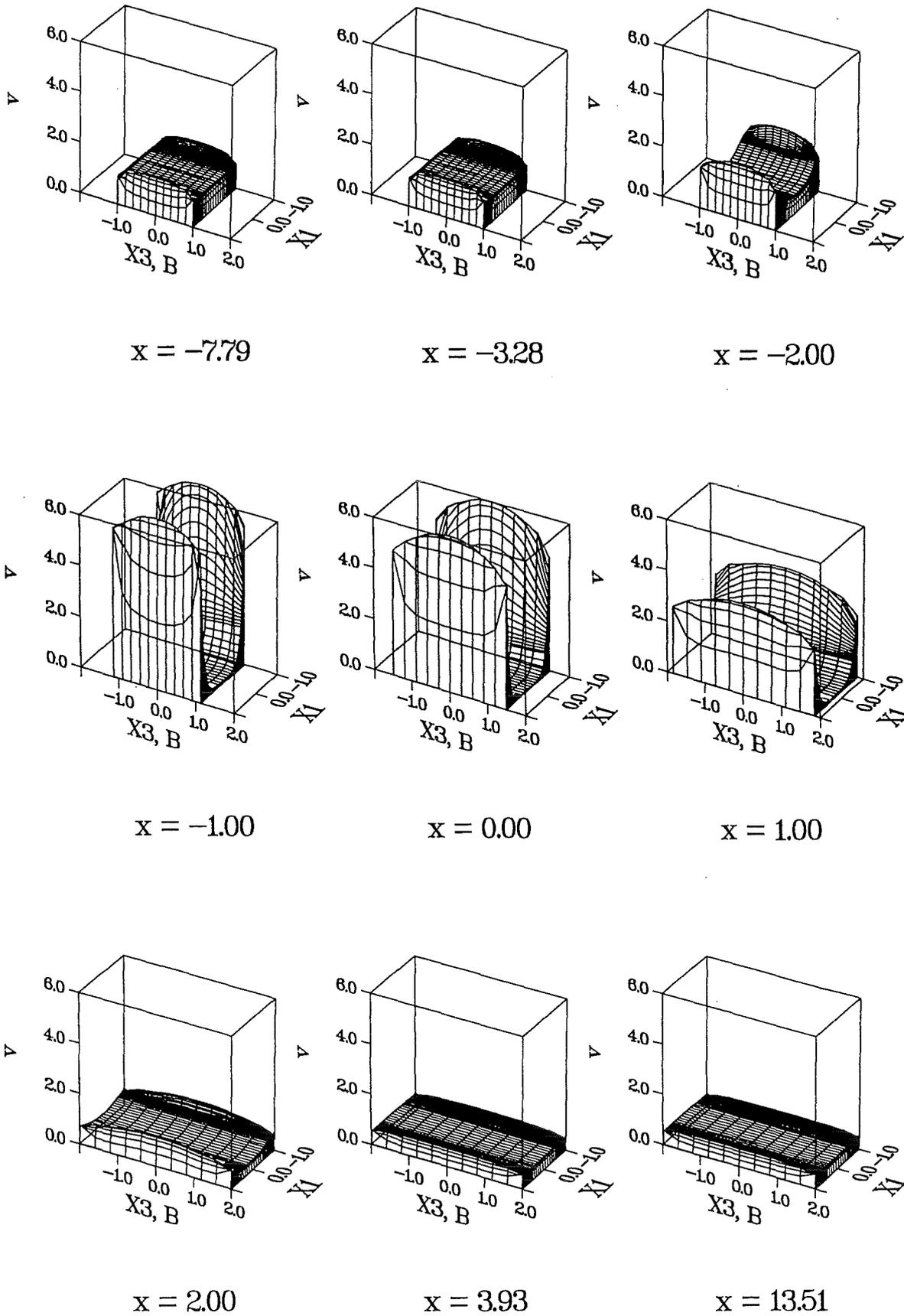


Abb. 5.9 Axiale Geschwindigkeitsprofile im Rechteckdiffusor ( $c=0.0, M=1000$ )

Entsprechend der gewählten Diffusorgeometrie ergeben sich nach Gl. (5.4) zwischen der Symmetriefläche  $x_1 = 0$  und der Seitenwand  $x_1 = b$  im eingelaufenen Fall die Potentialdifferenzen

$$\Delta\phi_{1,2} \sim \frac{l}{d_{1,2}} \quad (5.8)$$

und daraus das axiale Potentialgefälle

$$\Delta\phi_{ax} \sim \left(1 - \frac{l}{d_2}\right). \quad (5.9)$$

Damit ist auch für diese Geometrie die Grundlage für dreidimensionale Ströme mit denselben Auswirkungen wie beim Kreisdiffusor gegeben.

Den Verlauf der gemäß Gl. (5.7) gebildeten normierten Druckverluste aufgrund dreidimensionaler Effekte zeigt Abb. 5.10:

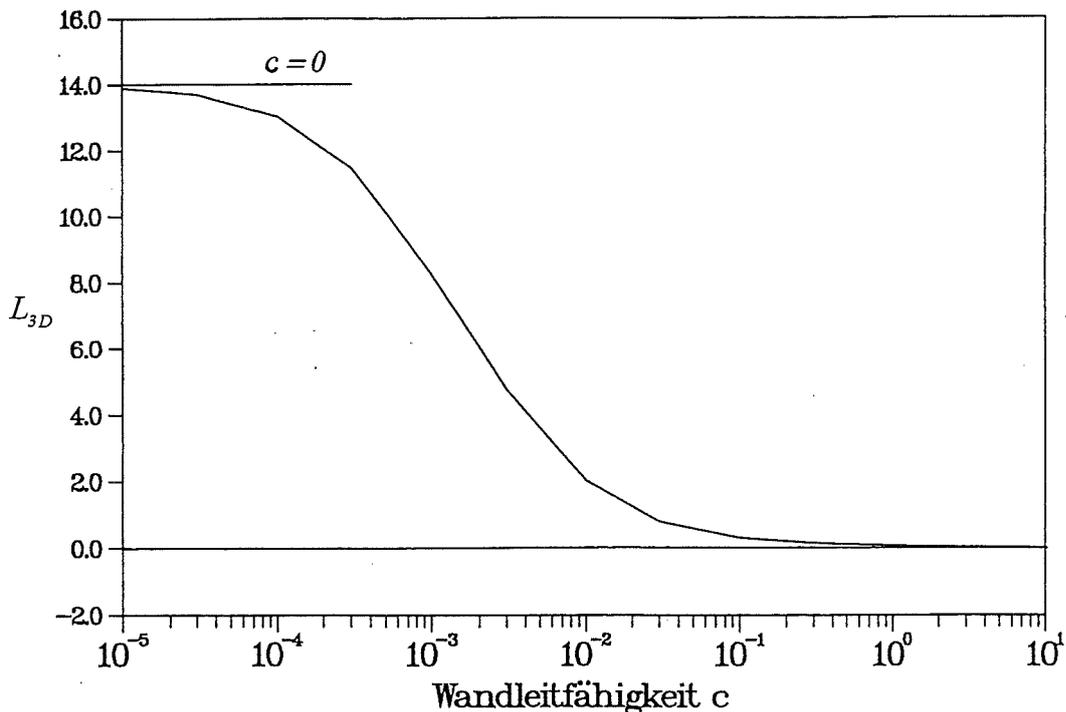


Abb. 5.10  $L_{3D}$  im Rechteckdiffusor als Funktion des Wandleitparameters  $c$

Es ergibt sich ein dem Ergebnis für den Kreisdiffusor entsprechendes Resultat. Die auftretenden Druckverluste für  $c \rightarrow 0$  sind jedoch insgesamt größer.

### 5.2.2 Rechteckdiffusor mit Expansion quer zur Magnetfeldrichtung

Erfolgt in einem Rechteckdiffusor die Querschnittserweiterung ausschließlich in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld, so ergibt bereits eine Abschätzung nach Gleichung (5.4) das überraschende Ergebnis

$$\Delta\phi \sim 1. \quad (5.10)$$

Die Potentialdifferenz zwischen der Symmetrieebene  $x_1 = 0$  und der Seitenwand  $x_1 = b$  ist dabei unabhängig von der variablen Kanalbreite. Axiale Potentialdifferenzen und somit signifikante dreidimensionale Effekte treten praktisch nicht auf. Eine Auswertung der zusätzlichen 3D- Druckverluste für Expansionen quer zur Magnetfeldrichtung ist daher uninteressant.

In Abb. 5.11.a ist der Druckverlauf entlang der Diffusorachse dargestellt. Ein Vergleich mit dem Verlauf einer lokal voll entwickelten Strömung ergibt selbst für isolierte Kanalwände ( $c = 0$ ) nahezu identische Werte. Starke dreidimensionale Effekte, wie sie im Fall der Expansion in Magnetfeldrichtung auftreten (Abb. 5.11.b), gibt es nicht.

Bei der Entwicklung flüssigmetallgekühlter Fusionsblankets ist somit darauf zu achten, daß Querschnittsänderungen möglichst in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld erfolgen. Falls die Kanalabmessung in Magnetfeldrichtung konstant bleibt, verschwinden dreidimensionale Effekte fast vollständig, so daß der Druckverlust minimal bleibt.

Alle gewonnenen Erkenntnisse über MHD- Strömungen in Diffusoren gelten wegen der Vernachlässigung der nichtlinearen Impulsterme  $(\nu \cdot \nabla) \nu$  selbstverständlich auch für die umgekehrte Strömungsrichtung (MHD- Strömung in Düsen).

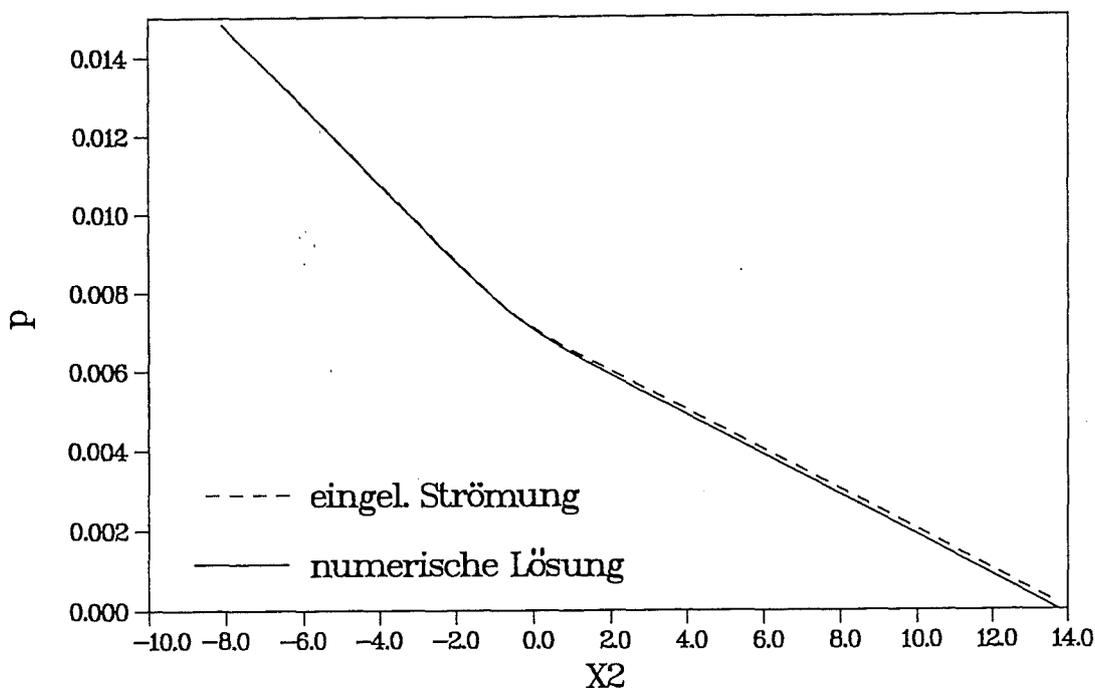


Abb. 5.11.a Druckverlauf entlang der Kanalachse beim Rechteckdiffusor mit Querschnittserweiterung senkrecht zur Magnetfeldrichtung ( $M = 1000$ ,  $c = 0$ ).

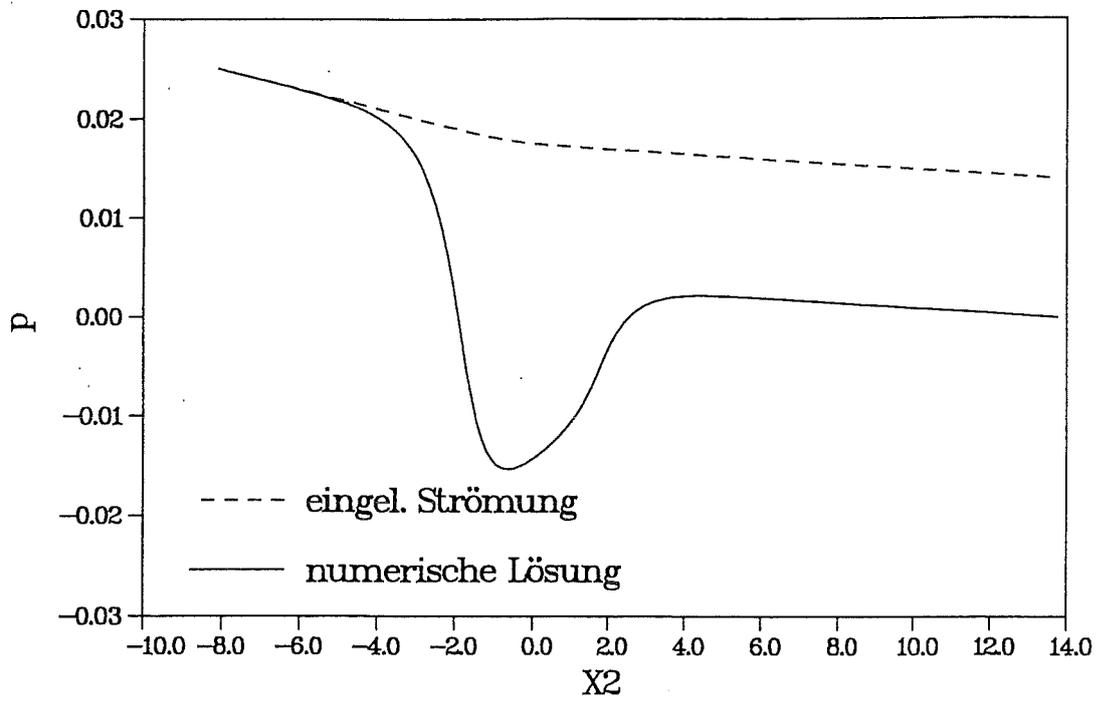


Abb. 5.11.b Druckverlauf entlang der Kanalachse beim Rechteckdiffusor mit Querschnittserweiterung in Magnetfeldrichtung ( $M = 1000$ ,  $c = 0$ ).

## 6 Konvektiv- diffusiver Wärmetransport in laminaren MHD- Strömungen

Bei der Auslegung eines Fusionsblankets ist darauf zu achten, daß die Wärmeübertragung an das Kühlmedium ausreicht, um die Temperatur der plasmanahen Wand in einem durch die Werkstoffeigenschaften begrenzten Bereich zu halten. Die Wärmeübertragung vom Fusionsplasma an das Blanket erfolgt wegen der enormen Temperaturdifferenz im wesentlichen durch Wärmestrahlung. Die Temperaturverteilung im Kühlmedium wird aber auch durch direkt im Medium auftretende Energiequellen beeinflusst. Dies können Dissipationsprozesse, Joulsche Heizung durch elektrische Ströme im Medium sowie die im Blanket absorbierte Nuklearstrahlung oder chemische Reaktionen sein.

Die Temperaturverteilung im Kühlmedium wird durch die Geschwindigkeitsverteilung im Strömungskanal und durch den Wärmeübergang an der Kanalwand sowie durch die Wärmeleitfähigkeit des verwendeten Kühlmittels bestimmt. Dieser Zusammenhang wird durch die sogenannte Energiegleichung beschrieben.

### 6.1 Die Energiegleichung

Für stationären konvektiv- diffusiven Wärmetransport kann die Temperatur  $T^*$  in einem strömenden Medium durch die folgende dimensionsbehaftete Energiegleichung bestimmt werden:

$$\rho c_p (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) T^* = - \nabla \cdot \mathbf{q}^* + Q^* \quad (6.1)$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die Bilanz der konvektiven Anteile des Wärmetransportes mit der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$ . Auf der rechten Seite der Gleichung stehen zum einen die Bilanz der diffusiven Wärmeströme, welche aus dem Fourierschen Ansatz für Wärmeleitung

$$\mathbf{q}^* = - \lambda \nabla T^* \quad (6.2)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  gebildet werden. Zum anderen die unter  $Q^*$  zusammengefaßten Quelltherme, welche den Wärmeeintrag in das Fluid durch volumetrische Heizung erfassen.

Unter der Voraussetzung einer konstanten, temperaturunabhängigen Dichte  $\rho$  treten keine Auftriebsterme in der Impulsgleichung Gl.(2.2) auf, so daß diese unabhängig von der Energiegleichung gelöst werden kann. Die Impulsgleichung bestimmt die Volumenstromverteilung und somit die konvektiven Terme der Energiegleichung.

### 6.2 Skalierung und Kennzahlen

Durch eine Skalierung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^*$  mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $v_0$  und der Kanalabmessungen mit einer charakteristischen Kanalabmessung  $a$  sowie durch Einführung einer dimensionslosen Temperatur  $T = (T^* - T_0^*) / \Delta T^*$  kann die Energiegleichung für konstantes  $\lambda$  in dimensionsloser Form geschrieben werden:

$$Pe (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = Pe \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot T) = - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q, \quad (6.3)$$

mit

$$q = - \nabla T \quad (6.4)$$

und

$$Q = \frac{Q^* a^2}{\lambda \Delta T^*}. \quad (6.5)$$

Dabei ist  $\Delta T^*$  eine charakteristische Temperaturdifferenz, auf deren Definition noch im Zusammenhang mit den Randbedingungen eingegangen wird.  $T_0^*$  kennzeichnet eine Referenztemperatur, z. B. die Temperatur beim Eintritt in das Rechengebiet.

Da es an diesem Punkt der Betrachtung noch nicht möglich ist, ganz auf dimensionsbehaftete Größen zu verzichten sind diese hier sowie im folgenden mit dem Index '\*' gekennzeichnet.

Die nun auftretende dimensionslose Kennzahl ist die sogenannte

Peclet- Zahl: 
$$Pe = \frac{v_0 a}{\chi} \quad (6.6)$$

mit

$$\chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}.$$

Diese beschreibt das Verhältnis von Wärmetransport durch erzwungene Konvektion zu Wärmeleitung (Diffusion) im Fluid. Die in der Definition auftretende Konstante  $\chi$  wird als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet.

### 6.3 Rand- und Eintrittsbedingungen

Eine eindeutige Lösung der vorgestellten Energiegleichung Gl.(6.3) ist erst durch die Vorgabe des Systemzustandes an den Rechenfeldgrenzen gegeben. Als erste Randbedingung tritt hierbei die Temperatur des Fluides beim Eintritt in das Rechengebiet auf. Hier kann entweder eine konstante Temperatur (z. B.  $T=0$ ) oder aber eine bekannte Temperaturverteilung angenommen werden.

An der Fluid- Wandgrenzfläche können grundsätzlich zwei verschiedene Randbedingungen angenommen werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Temperatur an der Kanalwand fest vorzugeben (perfekt wärmeleitende Wand). Der in das Fluid eindringende Wandwärmestrom ergibt sich dann aus der wandnormalen Komponente des Temperaturgradienten.

Die andere Möglichkeit besteht darin, den Wandwärmestrom an der Kanalwand explizit vorzugeben. Der Energieeintrag in das Fluid über die Fluid- Wandgrenzfläche ist dadurch eine fest vorgegebene Größe. Die Temperatur an der Kanalwand stellt sich dann in Abhängigkeit des Wärmetransportes im Strömungsmedium ein.

Abhängig vom jeweils betrachteten Randproblem werden verschiedene charakteristische Temperaturdifferenzen  $\Delta T^*$  zur Darstellung der dimensionslosen Temperatur verwendet. Bei expliziter Vorgabe der Wandtemperatur erweist sich die Darstellung

$$\Delta T^* = T_{w,max}^* - T_{min}^* \quad (6.7.a)$$

als zweckmäßig.

Überwiegt der Energieeintrag des Wandwärmestromes den Wärmegewinn durch die volumetrische Heizung, so verwendet man eine charakteristische Temperaturdifferenz, welche mit dem maximalen Wandwärmestrom  $q_{max}^*$  gebildet wird:

$$\Delta T^* = \frac{q_{max}^* a}{\lambda}. \quad (6.7.b)$$

$a$  ist in dieser Gleichung eine charakteristische Abmessung des Kanalquerschnitts.

Überwiegt dagegen die Aufheizung des Fluides durch volumetrische Heizung die übrigen Anteile, so wird die charakteristische Temperaturdifferenz mit der maximalen Quellstärke  $Q_{max}^*$  gebildet:

$$\Delta T^* = \frac{Q_{max}^* a^2}{\lambda}. \quad (6.7.c)$$

#### 6.4 Lösungsansätze für den Wärmetransport in strömenden Flüssigkeiten

Zur Beschreibung des Wärmetransportes in strömenden Flüssigkeiten existieren insbesondere für hydrodynamische Kreisrohr- und Kanalströmungen zahlreiche Lösungsansätze (vgl. z.B. Jischa 1982). Dabei ist grundsätzlich zu unterscheiden, ob die Strömung thermisch ausgebildet ist oder ob die Temperaturerhöhung auf den Randbereich begrenzt ist, also Grenzschichtcharakter aufweist. Als thermisch ausgebildet kann eine Kanalströmung dann bezeichnet werden, wenn die Differenz zwischen Wandtemperatur und mittlerer Fluidtemperatur einen konstanten Wert einnimmt, also unabhängig von der Lauflänge wird.

Die für hydrodynamische Strömungen gewonnenen Lösungen lassen sich jedoch nur bedingt auf den Wärmetransport in MHD- Strömungen übertragen. So treten - wie bereits in den Abschnitten 3 bis 5 gezeigt - von hydrodynamischen Strömungsprofilen stark abweichende Geschwindigkeitsverteilungen auf. Für Strömungen mit Grenzschichtcharakter kann nach Jischa (1982) das Verhältnis der Dicken von Temperatur- und Strömungsgrenzschicht abgeschätzt werden.

$$\frac{\delta_T}{\delta_s} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}. \quad (6.8)$$

Unterschiedliche Stoffeigenschaften werden durch die dimensionslose Prandtl- Zahl charakterisiert. Diese besitzt mit der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der Temperaturleitfähigkeit  $\chi$  die Darstellung  $Pr = \nu/\chi$ . Sie beschreibt das Verhältnis von Impulsdiffusion zu diffusivem Wärmetransport. Da die Prandtl- Zahl eine reine Stoffgröße ist, kann diese unabhängig vom betrachteten Kanal ermittelt werden. Für flüssige Metalle erhält man sehr kleine Prandtl- Zahlen der Größenordnung  $Pr \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ , für Wasser dagegen der Größenordnung  $Pr \approx 1 - 10$ . Hieraus wird eine für die weitere Betrachtung wichtige Eigenschaft des Wärmetransports in Flüssigmetallströmungen deutlich: Die Strömungsgrenzschicht ist erheblich

dünnere als die Temperaturgrenzschicht; ihr Einfluß auf die Wärmeübertragung von der Wand in das Fluid kann daher häufig vernachlässigt werden.

#### 6.4.1 Grundlagen des Wärmetransportes in Fluiden

Den einfachsten Fall einer Wärmeübertragung an ein strömendes Fluid bildet der Wärmeübergang an einer ebenen Platte in ein Fluid von halbbunendlicher Ausdehnung ohne innere Wärmequellen und konstanter Strömungsgeschwindigkeit  $v^*$ . Für hohe Peclet-Zahlen kann die Wärmeleitung in Strömungsrichtung gegenüber dem konvektiven Transport vernachlässigt werden (Grenzschichtlösung). Da für diesen Fall keine charakteristische Längenabmessung im Rechengelände ausgezeichnet ist, kann zur Skalierung der Energiegleichung und ihrer Randbedingungen prinzipiell eine beliebige Bezugsgröße  $a$  gewählt werden.

Führt man die Skalierung der Energiegleichung (Gl. 6.1) mit der aus der Temperaturleitfähigkeit  $\chi$  und der Strömungsgeschwindigkeit  $v^*$  gebildeten charakteristischen Längenabmessung  $a = \chi/v^*$  durch, so erhält man folgende Darstellung der Energiegleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}. \quad (6.9)$$

$\zeta$  und  $\eta$  sind die mit  $a$  gebildeten dimensionslosen Längenkoordinaten in Strömungsrichtung bzw. normal zur Wand. Bei dieser Skalierung erhält man für die Peclet-Zahl nach Gleichung (6.6) den Wert  $Pe = 1$ . Sie tritt daher in der Energiegleichung Gl.(6.9) nicht mehr auf.

Als Randbedingung an der Platte wird zunächst eine konstante Temperatur  $T_w(\zeta, \eta = 0) = 1$  angenommen. Die Temperatur des Fluides beim Eintritt in das Rechengelände sei als  $T(\zeta = 0, \eta) = 0$  vorgegeben. Da die Temperaturentbreitung in einen halbbunendlichen Raum untersucht werden soll, erhält man für die Temperatur in großer Entfernung von der Platte:  $T(\zeta, \eta \rightarrow \infty) = 0$ .

Mit einem Ansatz der Form

$$s = \frac{\eta}{2\sqrt{\zeta}} \quad (6.10)$$

kann die zweidimensionale Energiegleichung Gl.(6.9) in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung überführt werden

$$\frac{d^2 T}{ds^2} = -2s \frac{dT}{ds}. \quad (6.11)$$

Diese besitzt für eine konstante Wandtemperatur die Lösung für die dimensionslose Temperatur im Fluid:

$$T = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-s^2) ds. \quad (6.12)$$

Für den für ein Fusionsblanket relevanteren Fall eines konstanten Wandwärmestromes kann auf ähnliche Weise eine Lösung für die Temperaturgrenzschicht gefunden werden. Die Randbedingung an der Wand lautet hierfür:  $q_\eta(\zeta, \eta=0) = -\partial T/\partial \eta = 1$ . Wegen dieser veränderten Randbedingung ist eine direkte Lösung für die Temperatur nicht möglich. Mit dem Ansatz  $q_\eta = -dT/d\eta$  kann durch Differentiation die Energiegleichung Gl. (6.9) in eine Bestimmungsgleichung für den lokalen Wärmestrom umgewandelt werden. Die übrigen Randbedingungen lauten dabei  $q_\eta(\zeta=0, \eta) = 0$  und  $q_\eta(\zeta, \eta \rightarrow \infty) = 0$ . Die Lösung lautet analog zu Gl. (6.12)

$$q_\eta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-s^2) ds \quad (6.13.a)$$

bzw. nach Carslaw und Jaeger (1959):

$$q_\eta = 1 - \operatorname{erf}(s) = \operatorname{erfc}(s). \quad (6.13.b)$$

Nach Einführung von  $q_\eta = -\partial T/\partial \eta$  in diese Gleichung erhält man für ein beliebiges aber festes  $\zeta$  durch eine partielle Integration von  $\infty$  bis  $\eta$  die gesuchte Temperaturverteilung im Fluid:

$$T(\zeta, \eta) = 2 \left[ \sqrt{\frac{\zeta}{\pi}} \cdot e^{-\eta^2/4\zeta} - \frac{\eta}{2} \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2\sqrt{\zeta}} \right]. \quad (6.14)$$

Ein interessantes Ergebnis ist hierbei, daß die Temperatur an der Wand  $T_w(\zeta, \eta=0)$  durch den einfachen Zusammenhang

$$T_w = 2 \sqrt{\frac{\zeta}{\pi}} \quad (6.15)$$

gegeben ist.

Diese Lösung (Gl. 6.14, Gl. 6.15) verliert ihre Gültigkeit, wenn in einem Strömungskanal die Grenzschichtdicke mit der Kanalabmessung vergleichbar wird. Die Randbedingung  $q_\eta(\zeta, \eta \rightarrow \infty) = 0$  ist dann nicht mehr zu erfüllen. Betrachtet man zwei parallele Platten im Abstand  $\pm a$  von der Symmetrieebene  $\eta=0$ , durch welche auf beiden Seiten der konstante Wärmestrom  $q_w$  in das mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  strömende Fluid eindringt. Aus Symmetriegründen kann die Bedingung  $q_\eta(\eta=0) = 0$  in der Mitte des Kanals formuliert werden.

Für Kanalströmungen tritt nun der Kanaldurchmesser als eine ausgezeichnete Längenabmessung des Kanals auf. Die Skalierung der Energiegleichung erfolgt daher im weiteren Verlauf der Arbeit mit dem halben Kanaldurchmesser  $a$ . Durch eine zusätzliche Skalierung der dimensionslosen Koordinate in Hauptströmungsrichtung als:

$$\zeta = \frac{x^*}{a \cdot Pe} = \frac{x}{Pe} \quad (6.16)$$

erhält man eine in Hauptströmungsrichtung von der Peclet- Zahl unabhängige Formulierung der dimensionslosen Energiegleichung (6.3).

Nach dem Aufeinandertreffen der beiden Grenzschichten bildet sich im weiteren Strömungsverlauf ein Temperaturprofil aus, dessen Form für große Werte von  $\zeta$  von der Lauflänge unabhängig ist. Lediglich das Temperaturniveau steigt weiter an. Die Länge, die bis zum Erreichen dieses Temperaturprofils erforderlich ist, wird als thermische Einlaufstrecke bezeichnet. Nach Jischa (1982) ist für thermisch ausgebildete Kanalströmungen bei konstantem Wandwärmestrom die Temperatur an einer beliebigen Stelle im Kanalquerschnitt eine lineare Funktion der Lauflänge. Es gilt somit der Zusammenhang:

$$\partial_{\zeta} T = \partial_{\zeta} T_w = \partial_{\zeta} T_m = konst. \quad (6.17)$$

$T_m$  ist die mittlere Temperatur im Querschnitt der Fläche  $A$ .

$$T_m(\zeta) = \frac{1}{A} \int_A v \cdot T dA. \quad (6.18)$$

Diese Aussage ist unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung im Kanal. Sie gilt somit insbesondere auch für ausgebildete MHD- Strömungen.

Die Lauflänge, nach welcher die Kanalströmung als thermisch ausgebildet angesehen werden kann, ist somit durch den Übergang zu einem linearen Anstieg der Wandtemperatur zu erkennen.

Der Wärmeübergang an der Kanalwand wird häufig durch die Nusselt- Zahl  $Nu$  charakterisiert. Diese gibt im allgemeinen das Verhältnis des durch konvektiven Wärmetransport vergrößerten Wandwärmestroms zu dem bei reiner Wärmeleitung in das Rechengbiet einfließenden an. Wird jedoch der Wandwärmestrom explizit vorgegeben, so muß die Nusselt- Zahl als das Verhältnis des Wandwärmestroms zu einem aus charakteristischen Abmessungen und Temperaturdifferenzen gebildeten diffusiven Wärmestrom definiert werden. Bei Verwendung des halben Rohrdurchmessers als charakteristische Längenabmessung und der Differenz zwischen Wandtemperatur  $T_w$  und mittlerer Fluidtemperatur  $T_m$  als charakteristische Temperaturdifferenz gibt Bühler (1993) folgende Darstellung der dimensionslosen Nusselt- Zahl an

$$Nu = \frac{2}{T_w - T_m}. \quad (6.19)$$

Für thermisch ausgebildete Strömungen ist diese sowohl für konstante Wandtemperatur als auch für konstanten Wandwärmestrom entlang der Strömungsrichtung konstant. Im Bereich der thermischen Einlaufstrecke nimmt die Nusselt- Zahl bei konstantem Wandwärmestrom sehr große Werte an, da sowohl die Wandtemperatur als auch die mittlere Fluidtemperatur noch sehr gering sind. Bei der Darstellung von Ergebnissen die auch diesen Bereich umfassen ist daher eine Auftragung der Temperaturdifferenz  $T_w - T_m$  anstelle der Nusselt- Zahl sinnvoller, da diese von null bis zu einem für die jeweilige Strömung charakteristischen Grenzwert ansteigt.

Bei der Auslegung eines Fusionsblankets ist zudem der Absolutwert der Wandtemperatur von entscheidender Bedeutung. Die Auftragung der Nusselt- Zahl sowie der charakteristischen Temperaturdifferenz  $T_w - T_m$  erfolgt daher in dieser Arbeit nur zu Vergleichszwecken mit bekannten Lösungen oder zur Charakterisierung der thermischen Einlaufstrecke.

Für einen weiteren einfachen Fall können Kenngrößen zur Überprüfung von numerischen Lösungen abgeleitet werden. Für ein Kreisrohr mit konstantem wandnormalen Wärmestrom  $q_w = -e_r$  ist die Fluidtemperatur eine Funktion der Lauflänge  $\zeta$  und des Radius  $r$ . Die Energiegleichung Gl.(6.1) kann somit in der dimensionslosen Form

$$u \partial_\zeta T = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) \quad (6.20)$$

geschrieben werden. Für thermisch ausgebildete Zustände erhält man bei einem Rohrradius von  $r = 1$ , durch eine differentielle Bilanz an einem Rohrelement für die Konstante aus Gl. (6.17) den Wert

$$\partial_\zeta T = \partial_\zeta T_w = \partial_\zeta T_m = 2. \quad (6.21)$$

Für ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil  $u = 1$  kann durch zweifache Integration von Gl. (6.20) mit den Bedingungen  $\partial_r T|_{r=0} = 0$  und  $T|_{r=1} = T_w$  der Temperaturverlauf im Querschnitt zu

$$T(r) = \frac{1}{2}(r^2 - 1) + T_w \quad (6.22)$$

ermittelt werden. Die Temperatur in Kanalmitte  $T_0$  ergibt sich hieraus zu

$$T_0 = T_w - \frac{1}{2}. \quad (6.23)$$

Als Differenz zwischen der mittleren Temperatur und der Wandtemperatur erhält man so aus Gleichung (6.18)

$$T_w - T_M = \frac{1}{4}, \quad (6.24)$$

bzw. mit Gleichung (6.19) für die Nusselt- Zahl den Wert

$$Nu = 8. \quad (6.25)$$

Zur Untersuchung der Temperaturverteilung in ausgebildeten MHD- Strömungen existieren zudem mehrere Arbeiten, die zur Überprüfung des im nachfolgenden Kapitel beschriebenen Rechenprogrammes verwendet werden.

### 6.4.2 Abschätzungen für den Wärmeübergang in einem Fusionsblanket

In einem Fusionsblanket ist die maximale Wandtemperatur durch die Werkstoffeigenschaften des Wandmaterials begrenzt. Eine weitere fest vorgegebene Größe ist der Wandwärmestrom und der Energieeintrag durch die volumetrische Heizung der Nuklearstrahlung. Der Wärmetransport im Kanal muß nun so gestaltet werden, daß die zulässige Wandtemperatur an keiner Stelle der Kanalwand überschritten wird.

Für ein poloidal durchströmtes Fusionsblanket werden folgende Kenngrößen angenommen:

Eintrittstemperatur $T_{ein}^*$	°C	250
Maximale Wandtemperatur $T_{w,max}^*$	°C	450
Wandwärmestrom $q^*$	$W/m^2$	$0.25 \cdot 10^6$
Kanallänge $L^*$	m	12.5
Kanalabmessung $2a$	m	0.1
Wärmeleitfähigkeit $\lambda$ (PbLi)	$W/mK$	14.0
Temperaturleitfähigkeit $\chi$ (PbLi)	$m^2/s$	$7.8802 \cdot 10^{-6}$

Nimmt man eine konstante Geschwindigkeit im Kanal an und setzt voraus, daß der Wandwärmestrom senkrecht auf eine Fläche trifft, so kann für den Fall einer Temperaturschicht an der beheizten Wand die benötigte Strömungsgeschwindigkeit abgeschätzt werden. Man erhält aus Gl. (6.15) mit Gl. (6.7.b) in dimensionsbehafteter Form

$$v^* = \frac{4 \cdot \chi \cdot L^*}{\pi} \left( \frac{q^*}{\lambda (T_{w,max}^* - T_{ein}^*)} \right)^2 \approx 1 \frac{m}{s}. \quad (6.26)$$

Bildet man damit nach Gl. (6.6) die Peclet-Zahl bezogen auf die halbe Kanalhöhe  $a$ , so erhält man  $Pe \approx 6345$ . Die Dicke der Temperaturschicht ergibt sich mit dem Ansatz  $T/T_w = 0.01$  aus Gleichung (6.14) als  $\delta_T \approx 0.03m$ . Dies bedeutet, daß Temperaturschichten im ganzen Kühlkanal eine wichtige Rolle spielen und die Strömung in der Regel thermisch nicht ausgebildet sein wird. Dies bestätigen auch die Ergebnisse von Bühler (1993). Für ein einseitig beheiztes Rechteckrohr erhält er thermisch ausgebildete Zustände erst nach einer dimensionslosen Lauflänge von  $\zeta \approx 20 - 30$ . Für die obigen Werte ergibt sich für den Blanketkanal eine Lauflänge von  $\zeta \approx 0.04$ , also erheblich weniger.

Dennoch kann die Lösung für dreidimensionale MHD-Strömungen unter fusionsrelevanten Bedingungen nicht auf die Grenzschichten begrenzt bleiben. Wie z.B. aus den Geschwindigkeitsprofilen der MHD-Diffusorströmung Abb. 5.3 und Abb. 5.9 deutlich wird, kommt es zu einer starken Umverteilung des Massenflusses. Die Übergeschwindigkeiten in den Seitenbereichen erhöhen dort den Wärmetransport. Beim anschließenden Übergang zu einer gleichmäßigeren MHD-Strömung wird erwärmtes Fluid in das Kanalinnere transportiert. Darüber hinaus gibt es Bereiche mit stagnierendem Fluid. In diesen haben die diffusiven Anteile der Energiegleichung eine dominierende Wirkung, so daß sich das Fluid hier stark erwärmt.

Eine das ganze Rechengebiet umfassende dreidimensionale Lösung bei gleichzeitig hoher Auflösung der Wandbereiche ist daher unumgänglich.

## 7 Numerische Berechnung des Wärmeübergangs in dreidimensionalen MHD- Strömungen

### 7.1 Transformation der Energiegleichung und ihrer Randbedingungen

Zur Einbindung der Energiegleichung Gl. (6.3) in das bestehende MHD- Strömungsprogramm muß diese in einer Darstellung in dem Koordinatensystem der Core Variablen (vgl. Abschn. 4.2.1) verwendet werden. Man erhält in den transformierten Koordinaten  $u^i$  folgende Darstellung:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_i (\sqrt{g} v^i T) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} q^i) + \frac{Q}{Pe}, \quad (7.1)$$

mit

$$q^i = -\frac{1}{Pe} g^{ij} \partial_j T. \quad (7.2)$$

Die Lösung der Temperaturgleichung erfolgt nun in einem Einheitsvolumen der Größe  $u^1(0 \div 1) \times u^2(0 \div 1) \times u^3(-1 \div 1)$ . Der Energieeintrag durch den Wandwärmestrom erfolgt auf den Randflächen  $u^3 = \pm 1$ , die volumetrische Heizung dagegen ist im gesamten Volumen wirksam.

Da der Wandwärmestrom und die Quellterme zunächst in kartesischen  $x, y, z$  - Koordinaten definiert sind (anschaulichere Darstellung), müssen diese in das  $u^i$ - Koordinatensystem transformiert werden.

Der Wärmestromvektor  $q$  hat im  $x, y, z$  - Koordinatensystem die Darstellung

$$q = q_x \cdot e_x + q_y \cdot e_y + q_z \cdot e_z. \quad (7.3)$$

Transformiert in  $u^i$ - Koordinaten kann der Wärmestrom in den Basisvektoren  $a_i$  formuliert werden

$$q = q^1 \cdot a_1 + q^2 \cdot a_2 + q^3 \cdot a_3. \quad (7.4)$$

In das Fluid dringt hiervon jedoch nur die wandnormale Komponente ein. Durch skalare Multiplikation von Gl. (7.3) und Gl. (7.4) mit dem wandnormalen, reziproken Basisvektor  $a^3 = (a_1 \times a_2) / \sqrt{g}$  erhält man unter Ausnutzung von  $a^3 \perp a_1$  und  $a^3 \perp a_2$  den über die Randflächen einfließenden Wärmestrom:

$$q_w^3 = q_x (e_x \cdot a^3) + q_y (e_y \cdot a^3) + q_z (e_z \cdot a^3). \quad (7.5)$$

Die Quelltherme  $Q$  der Energiegleichung sind skalare Größen. Ihr Wert ist damit unabhängig vom Koordinatensystem in dem sie angegeben werden und eine Transformation entfällt.

## 7.2 Diskretisierung der transformierten Energiegleichung

Eine analytische Lösung der transformierten Transportgleichung Gl. (7.1) ist nur für sehr einfache Fälle möglich. Eine numerische Lösung dagegen ermöglicht die Betrachtung beliebiger Geometrien und Randbedingungen, wie z.B. eines nicht konstanten Wandwärmestromes oder einer beliebigen Temperaturverteilung am Eintritt in das Rechengebiet.

Bei einer numerischen Näherungslösung bleibt die Kenntnis über Temperaturwerte im Fluid auf eine endliche Anzahl diskreter Punkte beschränkt. Um die Geschwindigkeitswerte für die Bestimmung der konvektiven Anteile aus dem bestehenden Strömungsprogramm übernehmen zu können, wird die dort verwendete Diskretisierung beibehalten.

Die Lösung der transformierten Energiegleichung erfolgt durch eine Bilanz der konvektiven und diffusiven Wärmeströme an diskreten Kontrollvolumenelementen. In Abbildung 7.1 ist ein solches Element dargestellt. Die obere und die untere Kanalwand sind als Flächen eingezeichnet. Über diese dringt der Wandwärmestrom  $q_w^3$  in das Rechengebiet ein. Die unbekannte Temperatur wird in der Mitte der Rechenzelle definiert. Die Geschwindigkeiten  $v^i$  an den Grenzflächen sind aus der MHD- Lösung bekannt.

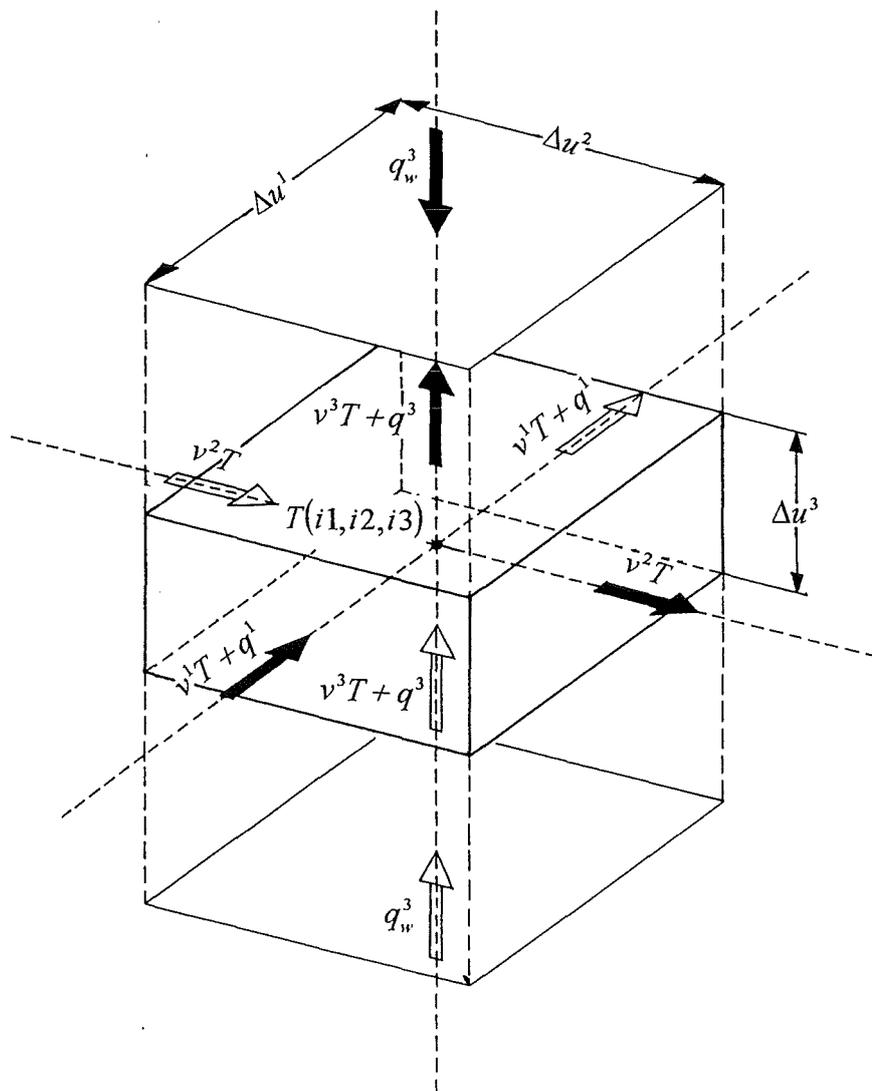


Abb. 7.1 Diskretisiertes Kontrollvolumenelement

Zur Diskretisierung der Energiegleichung wird diese in folgender Form verwendet.

$$\partial_i [\sqrt{g} (v^i T + q^i)] - \frac{\sqrt{g}}{Pe} Q = 0, \quad (7.6)$$

$$q^i = -\frac{1}{Pe} g^{ij} \partial_j T. \quad (7.7)$$

$q^i$  bezeichnet den diffusiven Wärmestrom in der jeweiligen  $u^i$ - Richtung. In dem hier vorliegenden Bereich großer Peclet- Zahlen ( $Pe \gg 1$ ) spielen die diffusiven Wärmeströme in  $u^2$ - Richtung gegenüber den Konvektiven eine untergeordnete Rolle und können daher vernachlässigt werden. Hieraus ergibt sich für die numerische Lösung eine wesentliche Vereinfachung. Gleichung (7.6) wird in Hauptströmungsrichtung parabolisch.

Die Wärmeströme über die Grenzflächen  $i2 \pm 1/2$  werden durch die konvektiven Anteile approximiert, die mit der aktuellen Geschwindigkeit und dem zurückliegenden Temperaturwert gebildet werden.

In den  $u^1$ -,  $u^3$ - Richtungen sind alle Anteile der Energieübertragung von Bedeutung. Da die Diskretisierung durch die Lösung des MHD- Problems fest vorgegeben ist, ist es angebracht für das Erreichen einer numerisch stabilen Lösung in diesen beiden Richtungen ein implizites Lösungsverfahren anzusetzen. Bei einem solchen Verfahren ist jeder Temperaturwert in einer Ebene ( $u^2 = konst$ ) von allen seinen Nachbarpunkten abhängig. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem für alle unbekannt Temperaturwerte im Querschnitt.

Die Gesamtlösung des Temperaturfeldes entsteht also durch einmaliges Durchschreiten des Rechengebietes in  $u^2$ - Richtung und nicht wie z. B. bei einem iterativen Verfahren durch mehrfachen rekursiven Aufruf des Lösungsalgorithmus.

Zur Diskretisierung der Gleichung werden die partiellen Ableitungen  $\partial_i f$  einer Funktion  $f$  durch zentrale partielle Differenzen  $\Delta_i f$  entsprechend Gl.(4.21) ersetzt. Für die einzelnen Anteile der Energiegleichung erhält man so:

$$\partial_1 [\sqrt{g} (v^1 T + q^1)] = \frac{1}{\Delta^1} \left[ (\sqrt{g} \cdot v^1)_{i1+1/2, i2, i3} \frac{T_{i1+1, i2, i3} + T_{i1, i2, i3}}{2} + (\sqrt{g} \cdot q^1)_{i1+1/2, i2, i3} - (\sqrt{g} \cdot v^1)_{i1-1/2, i2, i3} \frac{T_{i1, i2, i3} + T_{i1-1, i2, i3}}{2} - (\sqrt{g} \cdot q^1)_{i1-1/2, i2, i3} \right], \quad (7.8.a)$$

$$\partial_2 [\sqrt{g} v^2] = \frac{1}{\Delta^2} \left[ (\sqrt{g} \cdot v^2)_{i1, i2+1/2, i3} T_{i1, i2, i3} - (\sqrt{g} \cdot v^2)_{i1, i2-1/2, i3} T_{i1, i2-1, i3} \right], \quad (7.8.b)$$

$$\partial_3 [\sqrt{g} (v^3 + q^3)] = \frac{1}{\Delta^3} \left[ (\sqrt{g} \cdot v^3)_{i1, i2, i3+1/2} \frac{T_{i1, i2, i3+1} + T_{i1, i2, i3}}{2} + (\sqrt{g} \cdot q^3)_{i1, i2, i3+1/2} - (\sqrt{g} \cdot v^3)_{i1, i2, i3-1/2} \frac{T_{i1, i2, i3} + T_{i1, i2, i3-1}}{2} - (\sqrt{g} \cdot q^3)_{i1, i2, i3-1/2} \right], \quad (7.8.c)$$

mit den diffusiven Wärmeströmen:

$$\begin{aligned}
 q^1_{i1+1/2,i2,i3} = & -\frac{1}{Pe} \left[ g^{11}_{i1+1/2,i2,i3} \frac{T_{i1+1,i2,i3} - T_{i1,i2,i3}}{\Delta^1} \right. \\
 & + g^{12}_{i1+1/2,i2,i3} \frac{T_{i1+1,i2,i3} + T_{i1,i2,i3} - T_{i1+1,i2,i3-1} - T_{i1,i2-1,i3}}{2\Delta^2} \\
 & \left. + g^{13}_{i1+1/2,i2,i3} \frac{T_{i1+1,i2,i3+1} + T_{i1,i2,i3+1} - T_{i1+1,i2,i3-1} - T_{i1,i2,i3-1}}{4\Delta^3} \right] \quad (7.9.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q^1_{i1-1/2,i2,i3} = & -\frac{1}{Pe} \left[ g^{11}_{i1-1/2,i2,i3} \frac{T_{i1,i2,i3} - T_{i1-1,i2,i3}}{\Delta^1} \right. \\
 & + g^{12}_{i1-1/2,i2,i3} \frac{T_{i1,i2,i3} + T_{i1-1,i2,i3} - T_{i1,i2-1,i3} - T_{i1-1,i2-1,i3}}{2\Delta^2} \\
 & \left. + g^{13}_{i1-1/2,i2,i3} \frac{T_{i1,i2,i3+1} + T_{i1-1,i2,i3+1} - T_{i1,i2,i3-1} - T_{i1-1,i2,i3-1}}{4\Delta^3} \right] \quad (7.9.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q^3_{i1,i2,i3+1/2} = & -\frac{1}{Pe} \left[ g^{31}_{i1,i2,i3+1/2} \frac{T_{i1+1,i2,i3+1} + T_{i1+1,i2,i3} - T_{i1-1,i2,i3+1} - T_{i1-1,i2,i3}}{4\Delta^1} \right. \\
 & + g^{32}_{i1,i2,i3+1/2} \frac{T_{i1,i2,i3+1} + T_{i1,i2,i3} - T_{i1,i2-1,i3+1} - T_{i1,i2-1,i3}}{2\Delta^2} \\
 & \left. + g^{33}_{i1,i2,i3+1/2} \frac{T_{i1,i2,i3+1} - T_{i1,i2,i3}}{\Delta^3} \right] \quad (7.9.c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q^3_{i1,i2,i3-1/2} = & \frac{1}{Pe} \left[ g^{31}_{i1,i2,i3-1/2} \frac{T_{i1+1,i2,i3} + T_{i1+1,i2,i3-1} - T_{i1-1,i2,i3} - T_{i1-1,i2,i3-1}}{4\Delta^1} \right. \\
 & + g^{32}_{i1,i2,i3-1/2} \frac{T_{i1,i2,i3} + T_{i1,i2,i3-1} - T_{i1,i2-1,i3} - T_{i1,i2-1,i3-1}}{2\Delta^2} \\
 & \left. + g^{33}_{i1,i2,i3-1/2} \frac{T_{i1,i2,i3} - T_{i1,i2,i3-1}}{\Delta^3} \right] \quad (7.9.d)
 \end{aligned}$$

Wie an den Gleichungen (7.9.a - d) zu erkennen ist, können lediglich die Temperaturgradienten  $\partial_1 T_{i1\pm 1/2,i2,i3}$  bzw.  $\partial_3 T_{i1,i2,i3\pm 1/2}$  direkt als zentrale Differenzen gebildet werden. Bei allen anderen ist eine Interpolation von Temperaturwerten nötig. Durch die Verwendung eines impliziten Verfahrens in den  $u^1$ - und  $u^3$ - Richtungen werden die Temperaturgradienten  $\partial_2 T$  durch rückwärtige Differenzen approximiert, um den expliziten Charakter des Verfahrens in der  $u^2$ - Richtung zu erhalten.

An den Grenzen des Rechengebietes ist eine Bestimmung der  $q^i$  nach den Gleichungen (7.9.a-d) nicht nötig. An der oberen und der unteren Wand ( $u^3 = \pm 1$ ) tritt der Wandwärmestrom  $q_w^3$  nach Gl. (7.5) an die Stelle von Gl.(7.9.c) bzw Gl.(7.9.d). An den seitlichen Rändern ( $u^1 = 0, 1$ ) verschwinden die  $q^1$ - Anteile, da die Kanalhöhe im physikalischen Bereich hier null wird, also keinen Wärmeaustausch zuläßt ( $\sqrt{g}(u^1 = 0, 1) = 0$ ).

Für alle wandnächsten Gitterpunkte können die Differenzen zunächst nicht nach obigen Formeln gebildet werden, da ein oder in den Ecken zwei Punkte nicht definiert sind. Diese fehlenden Temperaturwerte werden durch eine lineare Extrapolation über die Rechenfeldgrenzen hinweg ersetzt, so daß die Differenzen wie gehabt gebildet werden können. Der außerhalb des Rechengebiets liegende Hilfspunkt ergibt sich, am rechten Rand des Rechengebiets ( $i1 = N1$ ) zu

$$T_{N1+1,i2,i3} = 2 T_{N1,i2,i3} - T_{N1-1,i2,i3}. \quad (7.10)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten  $v^i$  können aus der Core- Lösung des MHD- Strömungsprogramms entnommen werden. Der Geschwindigkeitsabfall in der wandnahen Hartmann-Schicht wird nach Gl. (4.17) berücksichtigt.

Nun sind alle Voraussetzungen zum Aufstellen der Lösungsmatrix gegeben. Als direkter Gleichungslöser wird die *HARWELL* Routine *MA28AD* (Harwell Subroutine Library 1984) verwendet.

## 8 Konvektiv- diffusiver Wärmeübergang in zweidimensionalen MHD- Strömungen

Zur Überprüfung des nun vorliegenden Rechenprogrammes wurden zunächst zweidimensionale Rechnungen durchgeführt, welche mit analytischen Ansätzen und den Ergebnissen von Gardner (1967) und Bühler (1993) verglichen werden.

### 8.1 Wärmetransport in Kreisrohren

Betrachtet wird ein Rohr mit konstantem Radius  $r = 1$ . Durch die Wand tritt ein konstanter Wärmestrom  $q^*$ , mit dem die charakteristische Temperaturdifferenz  $\Delta T^* = q^* a / \lambda$  gebildet wird.

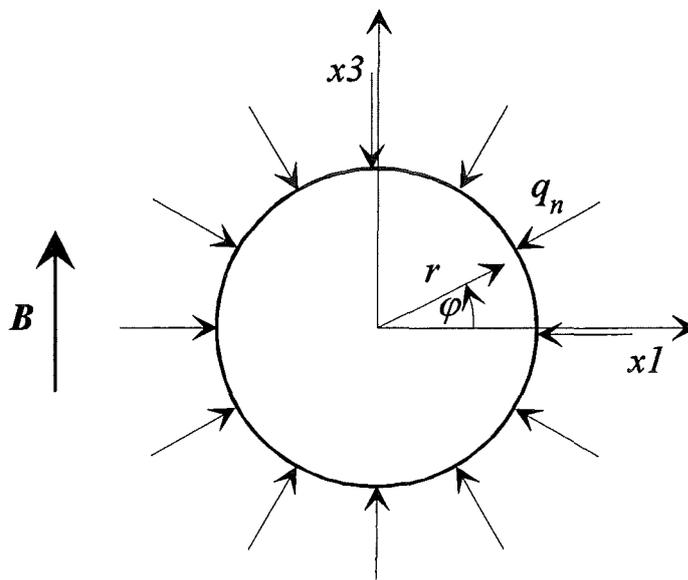


Abb. 8.1 Kreisrohr mit konstantem Wandwärmestrom  $q_n = -e_r$ .

Für eine über den gesamten Querschnitt konstante Strömungsgeschwindigkeit  $u = 1$  (MHD-Strömung in sehr gut leitenden Rohren) kann die numerische Lösung anhand von analytischen Ansätzen überprüft werden. Abbildung 8.2 zeigt den Verlauf der Wandtemperatur  $T_w$  und der mittleren Temperatur  $T_m$  sowie ihrer Differenz über der dimensionslosen Koordinate  $\zeta$ .

Da im Programm die Temperaturwerte in der Mitte einer Rechenzelle ermittelt werden, ist die Wandtemperatur aus den beiden wandnächsten Temperaturwerten linear extrapoliert.

Im Anfangsbereich des Wärmetransportes weist die Lösung des Temperaturfeldes Grenzschichtcharakter auf. Die Temperatur an der Kanalwand entspricht dem Verlauf nach Gl. (6.15). Für große Lauflängen  $\zeta$  ist die Strömung thermisch ausgebildet. Für die Differenz zwischen Wandtemperatur und mittlerer Fluidtemperatur erhält man hier den in Absch. 6.4.1 abgeleiteten Grenzwert  $T_w - T_m = 1/4$  (Gl. 6.24). Ferner gilt für die Wandtemperatur und die mittlere Temperatur  $\partial_\zeta T_w = \partial_\zeta T_m = 2$  (Gl. 6.21). Diese Vergleichswerte werden nach einer thermischen Einlaufstrecke von  $\zeta \approx 0.3$  mit dem Rechenprogramm sehr gut erreicht. Abbildung 8.3 zeigt hierzu zwei charakteristische Temperaturprofile.

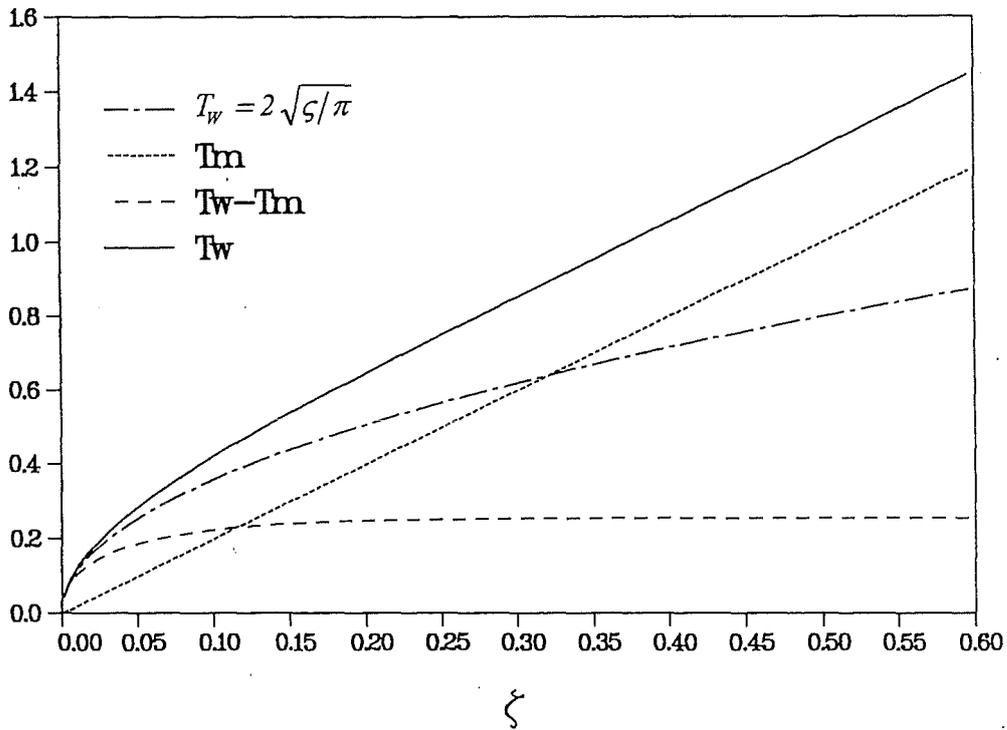


Abb. 8.2 Temperaturverläufe beim Kreisrohr für ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil ( $u=1$  für  $M \gg 1, c = \infty$ ).

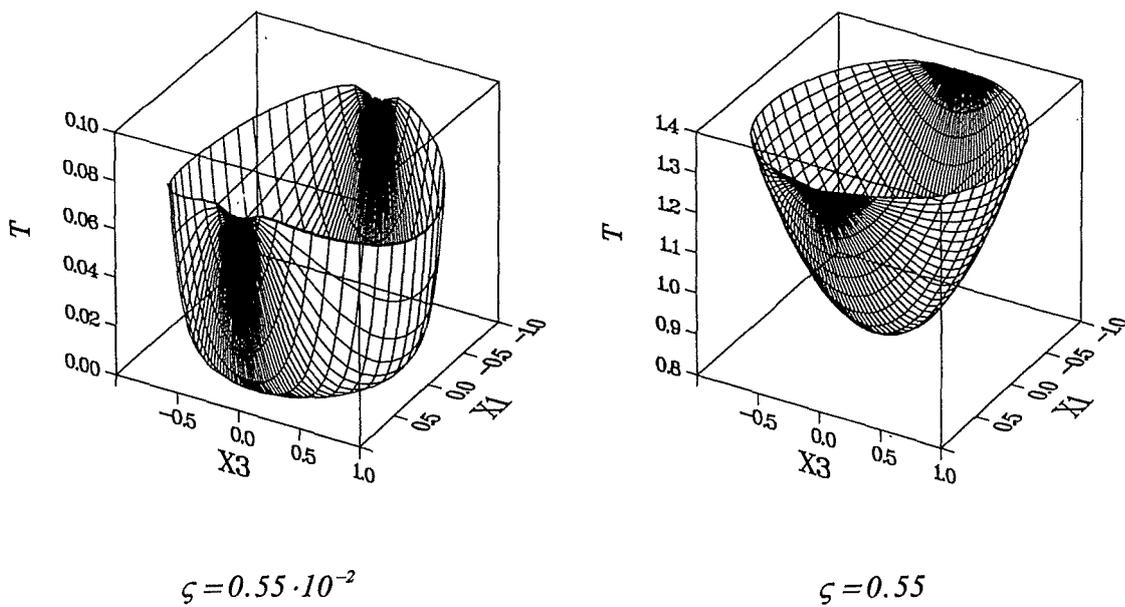
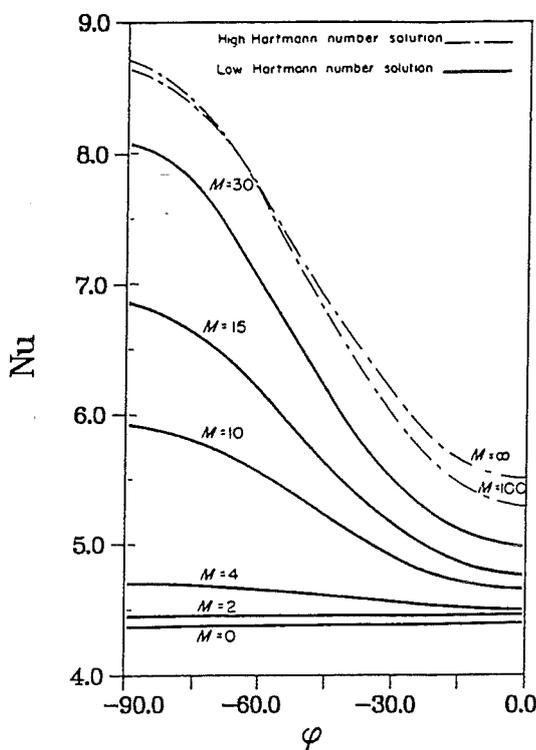


Abb. 8.3 Temperaturprofile im Kreisrohr für ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil ( $u=1$  für  $M \gg 1, c = \infty$ ).

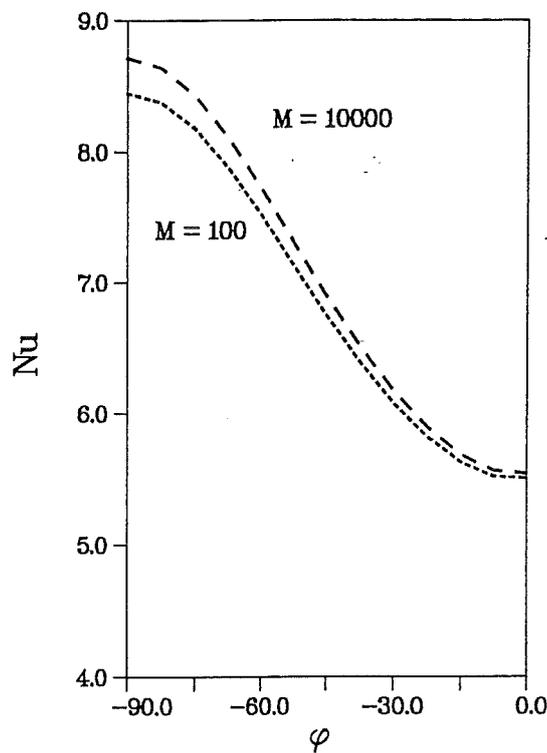
In der thermischen Einlaufstrecke reichen die Temperaturstörungen nicht bis ins Innere des Kanales, die Erwärmung des Fluides beschränkt sich daher auf Temperaturgrenzschichten an der Wand. Das thermisch ausgebildete Temperaturprofil dagegen besitzt den parabolischen Verlauf nach Gleichung (6.22).

Erweitert man die Betrachtungen auf ausgebildete MHD- Strömungen im elektrisch isolierten Kreisrohr, so können die Ergebnisse mit den analytischen Lösungen von Gardner (1967) verglichen werden.

In Abbildung 8.4.a sind die von Gardner bestimmten Nusselt- Zahlen nach Gl.(6.18) für thermisch ausgebildeten Wärmetransport wiedergegeben. Für große Hartmann- Zahlen können diese mit dem erstellten Programm gut reproduziert werden (vgl. Abb. 8.4.b).



a) Gardner (1967)



b) 3D- Programm

Abb.8.4 Vergleich von analytischen und numerischen Ergebnissen für  $Nu$  bei thermisch ausgebildeter MHD- Strömung ( $M \gg 1$ ,  $c = 0$ ).

Man erkennt, daß der Wärmeübergang an der Kanalwand erheblich von der Geschwindigkeitsverteilung der Strömung abhängt. In Bereichen hoher Strömungsgeschwindigkeiten ergeben sich hohe Nusselt- Zahlen und damit niedrige Wandtemperaturen, in den magnetfeldparallelen Seitenschichten dagegen niedrigere Nusselt- Zahlen und höhere Wandtemperaturen. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs ist in Abbildung (8.5) das ausgebildete Temperaturprofil dem ebenfalls ausgebildeten Geschwindigkeitsprofil gegenübergestellt.

Zur Darstellung des Wärmeübergangs in der thermischen Einlaufstrecke ist die Nusselt- Zahl weniger geeignet, da sich hier sehr große Werte ergeben. In Abbildung 8.6 wird daher wieder die Temperaturdifferenz  $T_w - T_m$  über der dimensionslosen Koordinate  $\zeta$  aufgetragen.

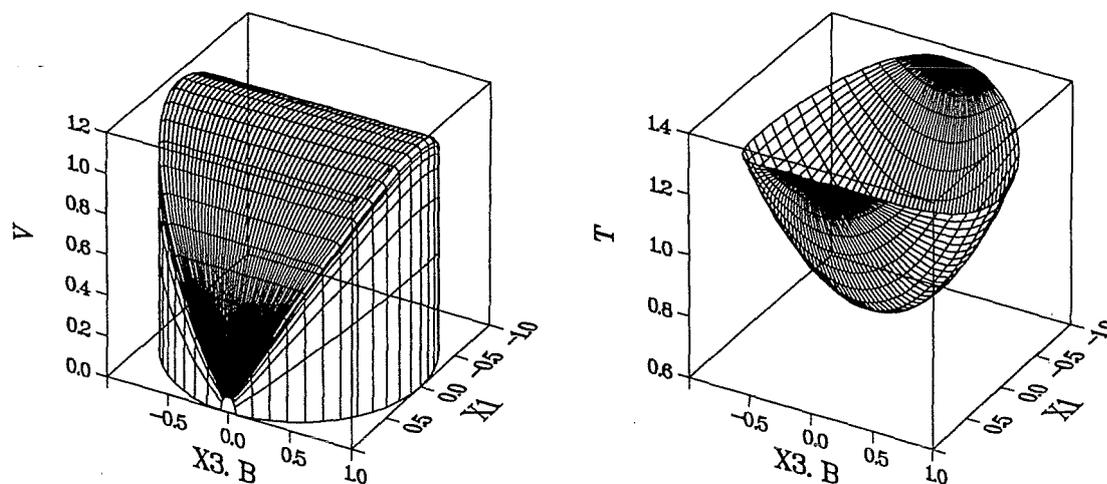


Abb.8.5 Ausgebildete Geschwindigkeits- und Temperaturprofile (Kreisrohr,  $M=1000$ ,  $c=0$ ).

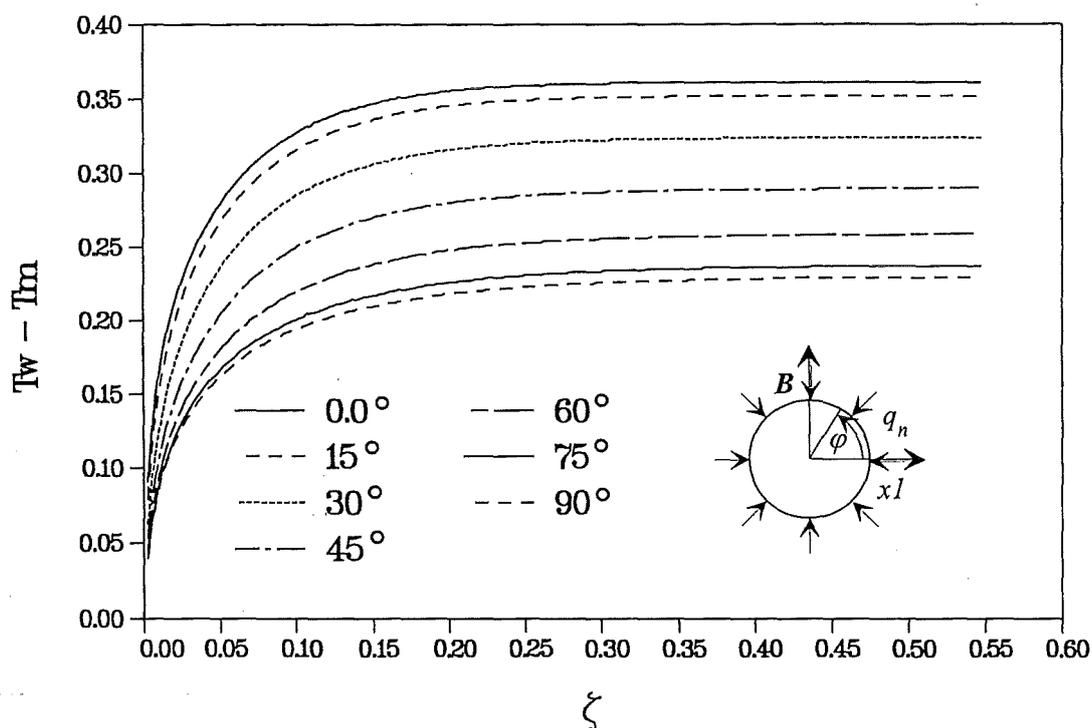


Abb.8.6 Thermischer Einlauf einer MHD- Kreisrohrströmung ( $M=1000$ ,  $c=0$ ).

In der Einlaufstrecke erhält man ein kontinuierliches Ansteigen der Temperatur in Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt. Die von der Geschwindigkeitsverteilung abhängigen unterschiedlichen Grenzwerte von  $T_w - T_m$  stellen sich nach einer Lauflänge von  $0.30 < \zeta < 0.45$  ein. Die niedrigsten Wandtemperaturen ergeben sich dort, wo das Magnetfeld senkrecht auf der Rohrwand steht, während die höchsten Temperaturen an den seitlichen, magnetfeldtangentialen Positionen auftreten.

## 8.2 Wärmetransport in Rechteckrohren

Betrachtet man das typische MHD- Geschwindigkeitsprofil in einem elektrisch leitenden Rechteckkanal (Abb. 8.7), so lassen die steilen Geschwindigkeitsgradienten an der Hartmann-Wand sowie die Übergeschwindigkeiten an den magnetfeldparallelen Seitenwänden einen guten Wärmeübergang erwarten.

Temperaturberechnungen in Rechteckkanälen können mit dem vorgestellten numerischen Rechenprogramm bisher nur näherungsweise durchgeführt werden. Dies liegt daran, daß das Programm in der aktuellen Version auf die Kerngeschwindigkeiten der MHD- Lösung zurückgreift. Die Seitenschichten werden dabei als ellipsenförmige Kernbereiche behandelt. Der Volumenstrom durch diese Bereiche wird von der MHD- Lösung korrekt berechnet. Die korrekten Geschwindigkeiten ergeben sich jedoch erst nach einer Rekonstruktion aus den Wand- und Corepotentials über Fourier- Reihen. Die vollständige Lösung ist in Abb.8.9.b dargestellt. Das Programm zur Lösung der Energiegleichung greift jedoch bisher auf die Geschwindigkeiten in den elliptischen Kernbereichen entsprechend Abb. 9.8.a zurück, die von der physikalischen Lösung etwas abweichen. Durch eine geeignete Wahl der elliptischen Deformation ist es jedoch möglich, die Abweichungen möglichst gering zu halten.

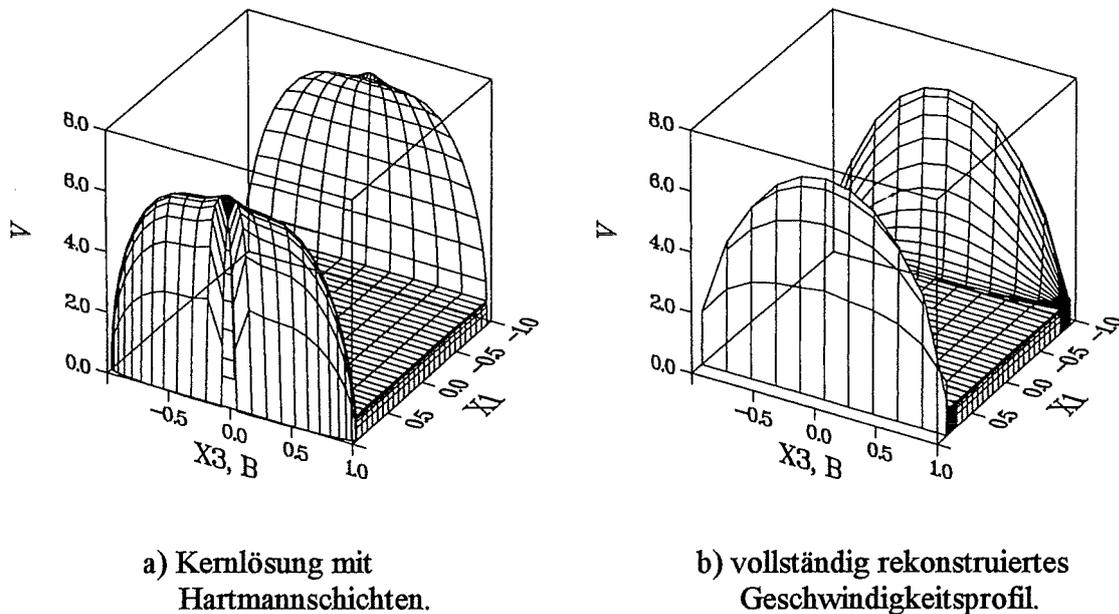


Abb. 8.7 Geschwindigkeitsprofile im Rechteckkanal ( $M = 1000$ ,  $c = 0.1$ ).

Entsprechend dem radialen Wärmestrom beim Kreisrohr kann für eine Rechteckgeometrie ein konstanter wandnormaler Wärmestrom als Randbedingung gesetzt werden. Abbildung 8.8 zeigt ein Rechteckrohr mit konstantem Wandwärmestrom  $q_n = -1$ .

Den Einfluß einer solchen Wärmezufuhr auf den Wärmeübergang bei thermisch ausgebildeter Strömung ist in Bild 8.9 wiedergegeben. Als Vergleich werden numerische Ergebnisse von Bühler (1993) herangezogen.

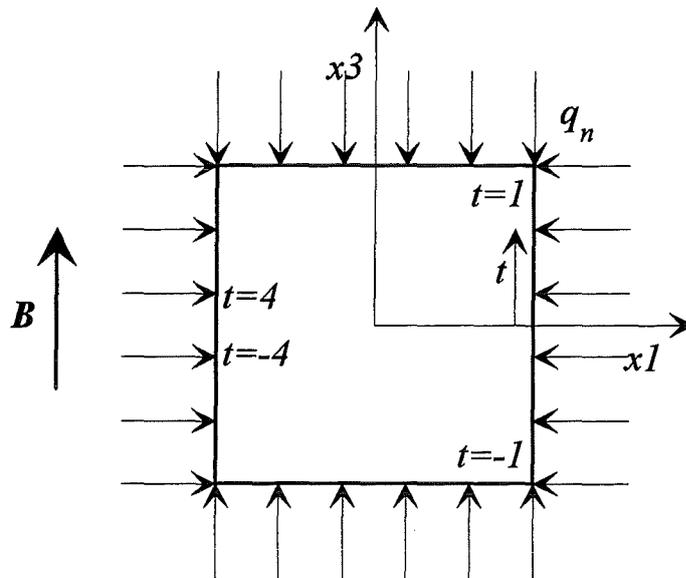


Abb. 8.8 Rechteckrohr mit konstantem Wandwärmestrom.

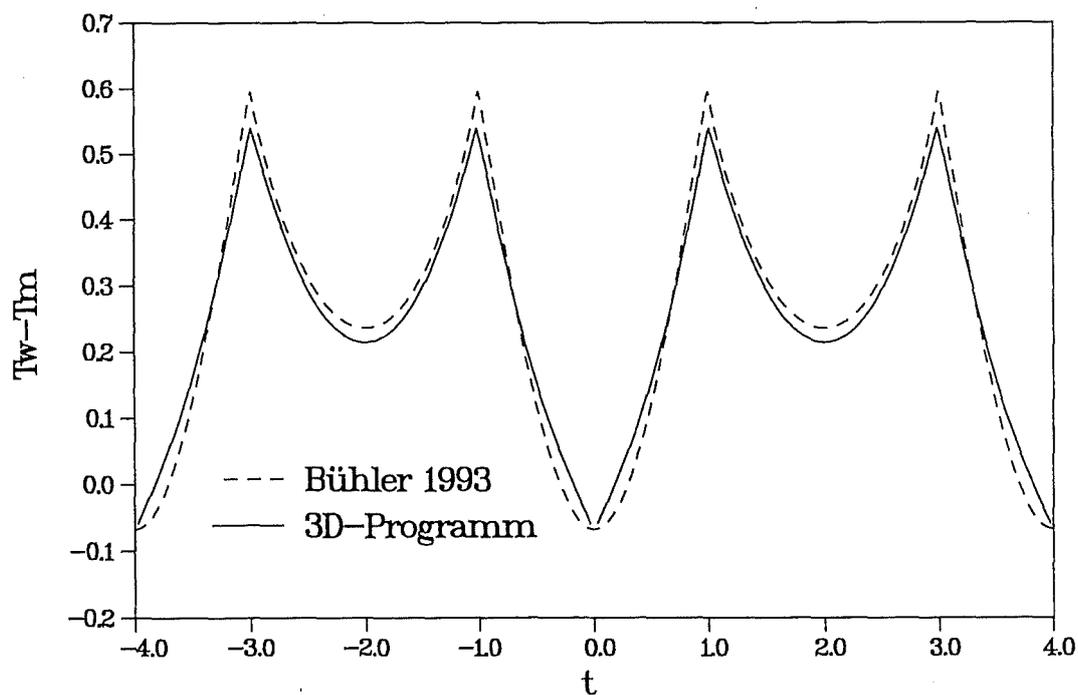


Abb. 8.9 Wärmeübergang in eine MHD- Strömung ( $M=1000$ ,  $c=0.1$ ) im Rechteckkanal bei konstantem wandnormalem Wärmestrom.

Gegenüber dem exakten MHD- Profil liegen beim approximierten in den Bereichen der Ecken des Kanals höhere Strömungsgeschwindigkeiten vor. Die Temperaturdifferenz ist daher hier etwas niedriger als bei der Vergleichsrechnung von Bühler.

Man erkennt trotz der Abweichungen der Geschwindigkeiten in den Seitenschichten doch eine zufriedenstellende Übereinstimmung beim Verlauf der Wandtemperaturen. Eine bessere

Lösung ist nur durch die Verwendung der korrekten Seitenschichtgeschwindigkeiten möglich, auf die an dieser Stelle jedoch verzichtet wurde.

Der für einen Fusionsreaktor wichtigere Fall ist der Wärmetransport unter Einfluß eines einseitigen konstanten Wärmeflusses  $q = -e_x$  auf die plasmanahen Wand (vgl. Abb. 8.10). Exemplarisch wird hier dieser Fall für ein Rechteckrohr bei voll ausgebildeter MHD-Strömung berechnet.

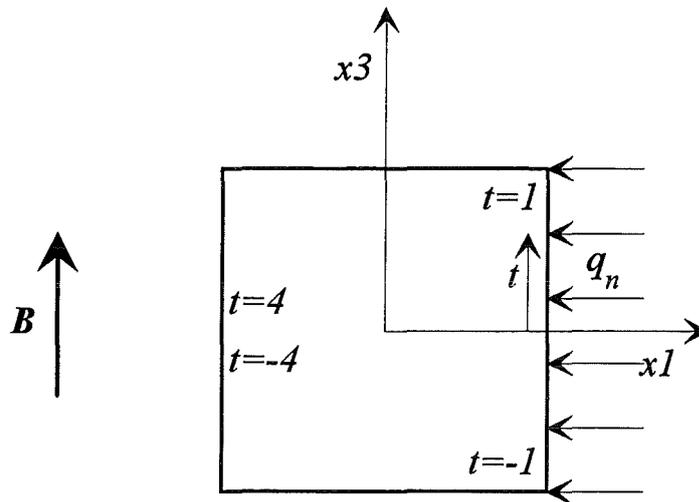


Abb. 8.10 Einseitiger konstanter Wärmestrom in einen Rechteckkanal.

Für thermisch ausgebildete Bedingungen erhält man für die Differenz von Wandtemperatur und mittlerer Temperatur den in Abb. 8.11 gezeigten Verlauf.

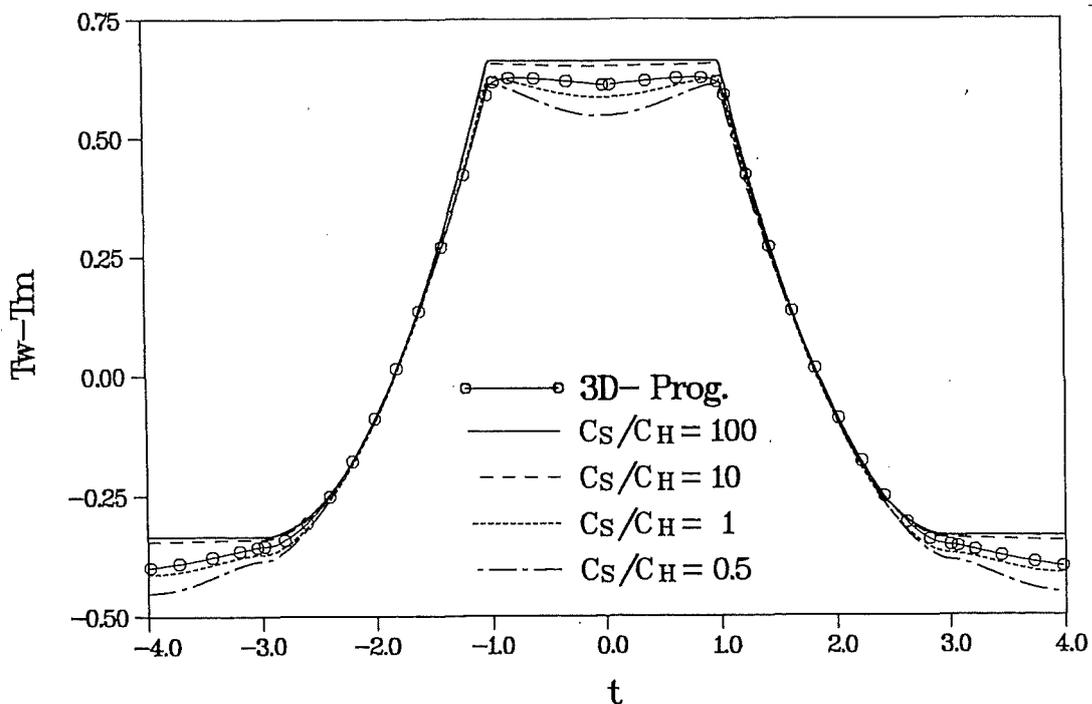


Abb. 8.11 Wärmeübergang in eine MHD-Strömung ( $M=1000$ ,  $c=0.1$ ) im Rechteckkanal bei konstantem einseitigem Wärmestrom

Auch hier bleiben die Abweichungen zu Böhlers Rechnung mit exakten Geschwindigkeitsprofilen gering. Die im vorliegenden Rechenprogramm getroffenen Vereinfachungen für das Geschwindigkeitsprofil in Rechteckkanälen sind somit gut geeignet, die Temperaturverteilung in thermisch ausgebildeten MHD- Strömungen zu erfassen.

Diese Aussage ist unabhängig von der Peclet- Zahl, da diese lediglich das Geschehen bis zum Erreichen thermisch ausgebildeter Zustände sowie das Temperaturniveau bestimmt, nicht aber die voll ausgebildete Temperaturdifferenz  $T_w - T_m$  in einem Querschnitt  $\zeta \gg 1$ .

Richtet man die Betrachtungen dagegen auf die thermische Einlaufstrecke, so besitzt die Peclet- Zahl hier einen signifikanten Einfluß auf die Genauigkeit des Rechenverfahrens. Hierfür kann die Betrachtung weiterhin anhand der dimensionslosen Lauflänge  $\zeta = x/Pe$  erfolgen. Große Peclet- Zahlen entsprechen so kleinen Werten  $\zeta$  und umgekehrt. Die Diskussion der Peclet- Zahl kann daher anhand der Lauflänge erfolgen.

Abbildung 8.8 zeigt den von Bühler (1993) gefundenen Verlauf der Wandtemperaturen an den Positionen  $t=0$  und  $t=4$  (vgl. Abb 8.10) für eine eingelaufene MHD- Strömung ( $c=0.1, M=1000$ ) sowie für ein Kolben- Profil ( $u=1$  für  $M \gg 1, c = \infty$ ).

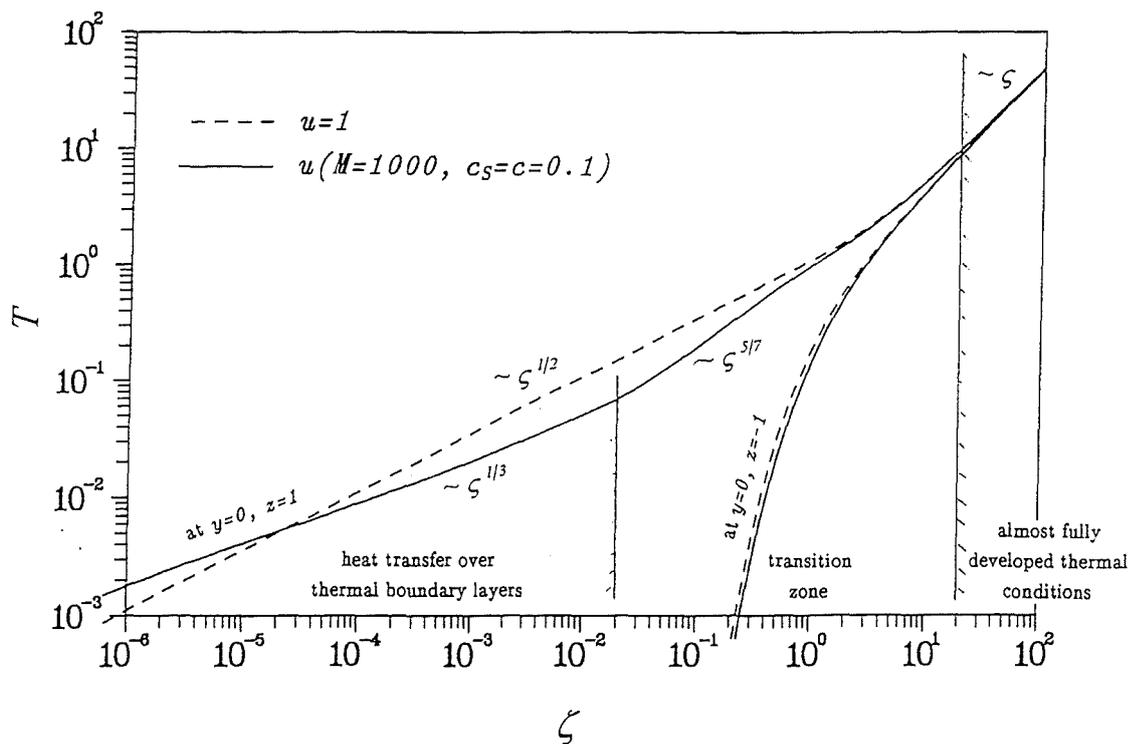


Abb. 8.12 Temperaturverläufe an der Wand (Bühler 1993)

Für sehr kleine Lauflängen  $\zeta < 10^{-2}$  ergibt sich ein Ansteigen der Wandtemperatur mit  $\zeta^{1/3}$ . Für diesen Bereich liegt die Temperaturgrenzschicht noch in dem Bereich des annähernd linearen Geschwindigkeitsanstiegs der Seitenwandschicht ( $\delta_T < 1/\sqrt{M}$ ). Reicht die Dicke der Temperaturgrenzschicht dagegen weit in den Bereich der Kernströmung hinein, so wächst die Wandtemperatur mit  $\zeta^{5/7}$  an. Durch die gegenüber dem Kolbenprofil höheren Geschwindigkeiten in den Seitenschichten bleiben die Wandtemperaturen jedoch unter denen bei Annahme eines Kolbenprofils.

Für thermisch eingelaufene Bedingungen, welche sich ab ca.  $\zeta = 20$  einstellen, erhält man den bereits beschriebenen linearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Lauflänge.

Reproduziert man die Ergebnisse von Bühler mit dem vorliegenden Rechenprogramm, so erhält man die in Bild 8.13 gezeigten Temperaturverläufe:

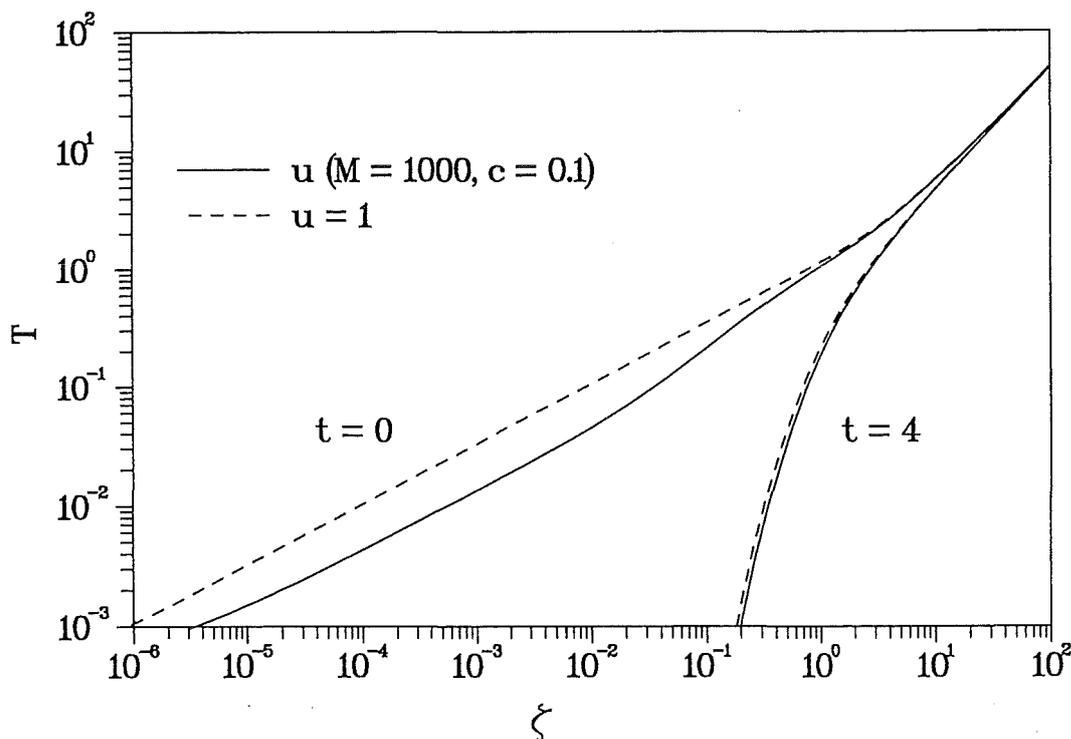


Abb. 8.13 Temperaturverläufe an der Wand (3D- Programm).

Auch hier bleiben die Wandtemperaturen für kleine  $\zeta$  unterhalb der Werte für das Kolbenprofil. Der Anstieg der Wandtemperatur mit  $\zeta^{1/3}$  im Bereich sehr kleiner Lauflängen  $\zeta < 10^{-2}$  wird jedoch nur unzureichend wiedergegeben. Hier zeigt sich bei diesem dreidimensionalen Rechenprogramm die noch fehlende Rekonstruktion der Geschwindigkeiten in den Seitenschichten. Für Werte von  $\zeta > 10^{-3}$  findet man jedoch eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden Rechnungen. Die Übereinstimmung für ein Kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil ist über die gesamte untersuchte Einlauflänge  $10^{-6} < \zeta < 10^2$  ausgezeichnet.

Die Genauigkeit des Verfahrens kann durch eine feinere Diskretisierung des Rechengebietes nahezu beliebig gesteigert werden. Hierbei sollte jedoch aufgrund des numerischen Rechenaufwands ein sinnvoller Kompromiß gefunden werden.

Unter vertretbarem Rechenaufwand können die vorgestellten zwei- und dreidimensionalen Lösungen der Energiegleichung für den konvektiv- diffusiven Wärmetransport in eingelaufenen MHD- Strömungen mit dem vorgestellten Rechenprogramm gut reproduziert werden. Die Fähigkeit des Lösungsalgorithmus, den Wärmetransport auch in dreidimensionalen Strömungsfeldern zu erfassen, bleibt dabei bisher ungenutzt.

## 9 Konvektiv- diffusiver Wärmeübergang in dreidimensionalen MHD-Strömungen

### 9.1 Energieeintrag durch Wandwärmestrom

Als einfaches Beispiel für den Wärmeübergang in dreidimensionalen MHD- Strömungsfeldern kann der Wärmeübergang in Kanälen mit veränderlichem Querschnitt (vgl. Abschnitt 5) berechnet werden. Da für das Fortschreiten der Lösung in Hauptströmungsrichtung ein explizites Rechenverfahren angewendet wird (vgl. Abschn. 7.3), ist eine Anwendung des Rechenprogrammes auf Strömungsfelder, die negative Geschwindigkeitskomponenten in  $u^2$ - Richtung enthalten nicht möglich. Durch die Wahl des Wandleitparameters zu  $c = 0.003$  werden ausgeprägte diffusortypische Strömungsformen ohne Rückströmgebiete erzeugt. Für diesen Wert des Wandleitparameters verkürzen sich auch die Ein- und Nachlaufbereiche, so daß die Berechnungen für Rechteck- und Kreisquerschnitte mit den gleichen axialen Abmessungen (siehe Abb. 5.8) durchgeführt werden können. Auf eine Untersuchung des Rechteckdiffusors mit Expansion senkrecht zur Magnetfeldrichtung wird im folgenden verzichtet, da hierbei keine ausgeprägten dreidimensionalen Strömungseffekte auftreten. Die Bilder 9.1.a und 9.2.b zeigen die axialen Geschwindigkeitsprofile für beide Querschnitte entlang der Kanalachse (vgl. Abb. 5.8).

Beim Eintritt des Fluides in das Rechengebiet liegen die für den jeweiligen Querschnitt typischen ausgebildeten Geschwindigkeitsprofile einer MHD-Kanalströmung vor (vgl. Abschn. 3.2). Im Bereich der Querschnittserweiterung kommt es zu der in Kapitel 5 beschriebenen Verdrängung des Fluides in wandnahe magnetfeldparallele Seitenschichten. Mit dem vorliegenden Rechenprogramm kann nun der Einfluß dieser Umverteilung des Fluides auf den Wärmetransport im dreidimensionalen Diffusorströmungsfeld für verschiedene Randbedingungen untersucht werden.

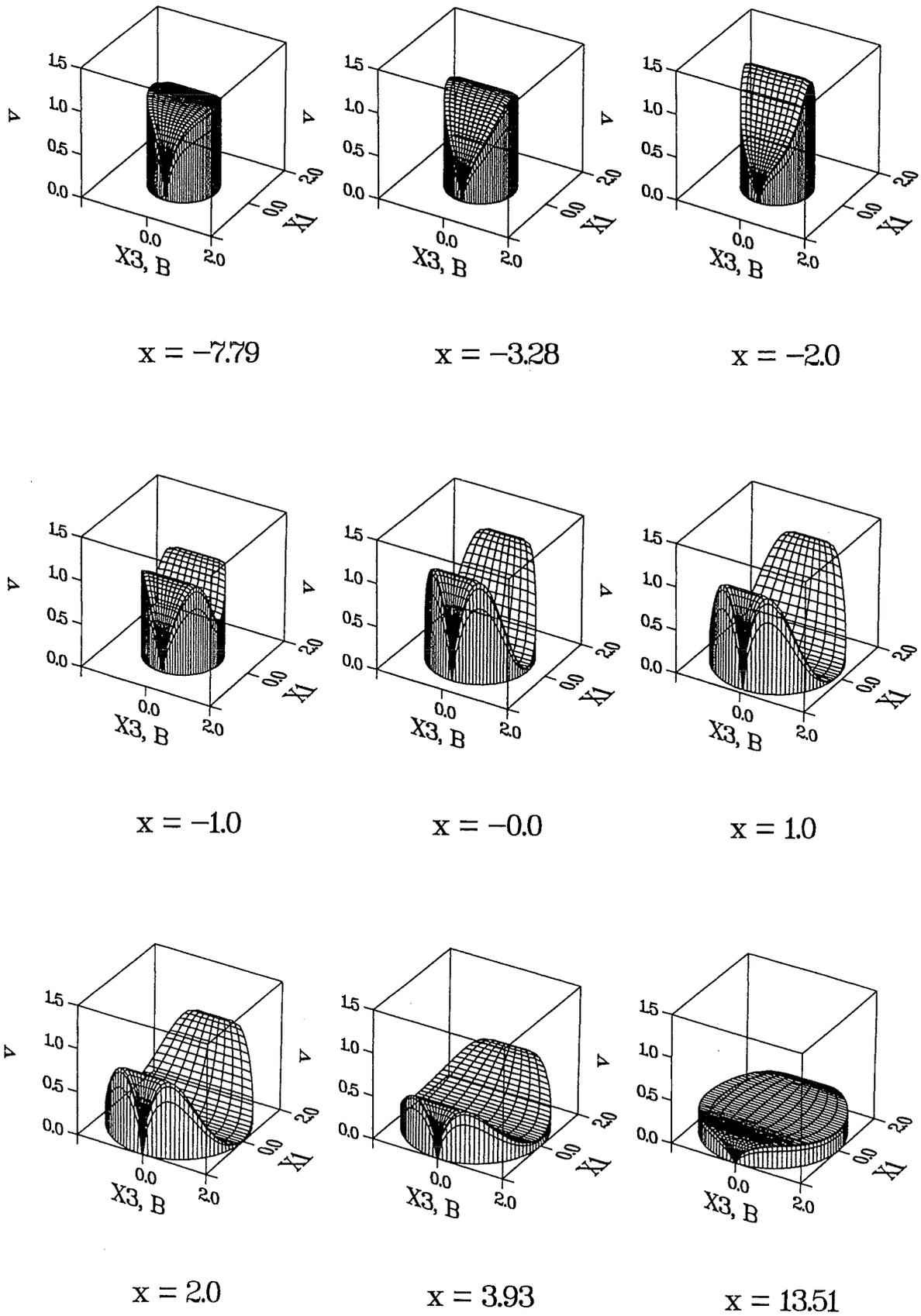
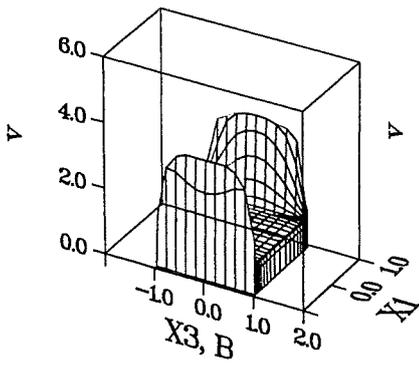
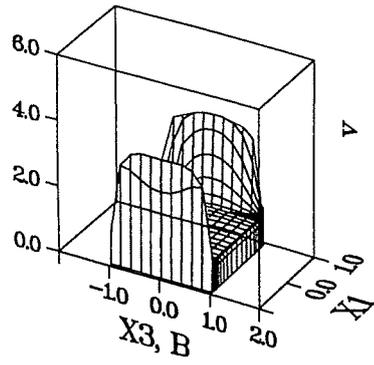


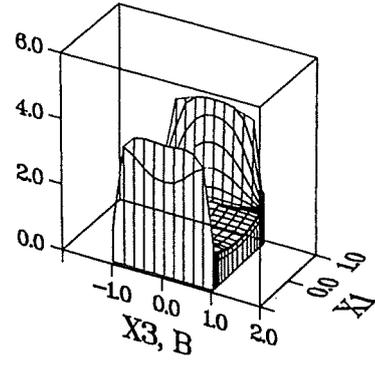
Abb. 9.1.a Axiale Geschwindigkeitsprofile im Kreisrohrdiffusor ( $c = 0.003$ ,  $M = 1000$ ).



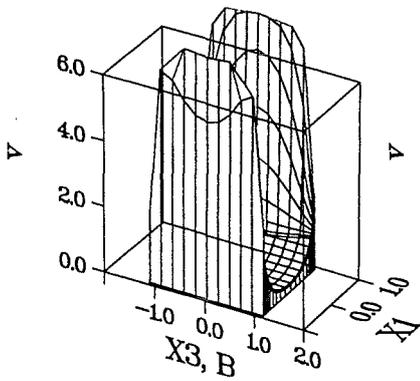
$$x = -7.79$$



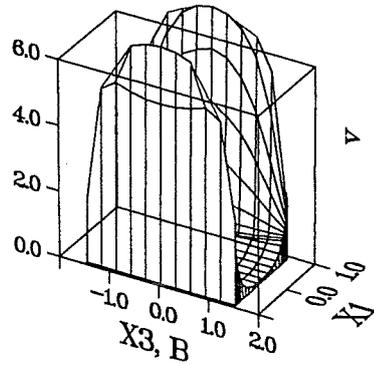
$$x = -3.28$$



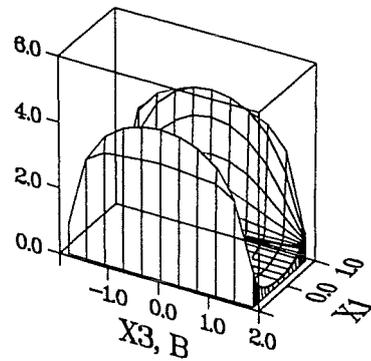
$$x = -2.00$$



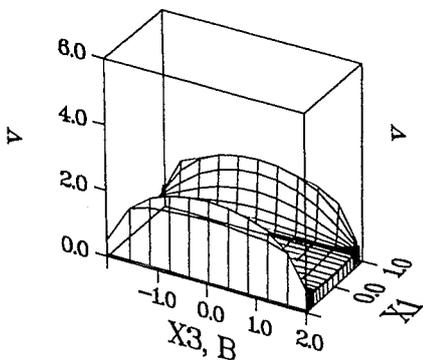
$$x = -1.00$$



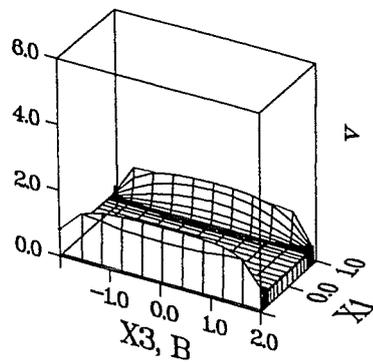
$$x = 0.00$$



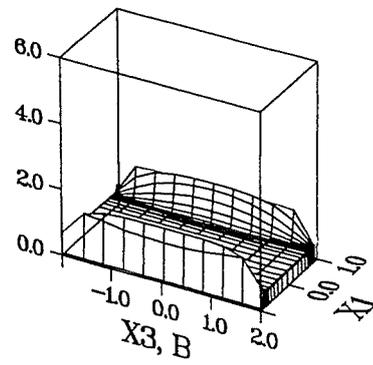
$$x = 1.00$$



$$x = 2.00$$



$$x = 3.93$$



$$x = 13.51$$

Abb. 9.1.b Axiale Geschwindigkeitsprofile im Rechteckdiffusor ( $c = 0.003$ ,  $M = 1000$ ).

### 9.1.1 Konstanter wandnormaler Wärmestrom

Der Wärmeeintrag in das Rechengebiet erfolgt für beide Querschnitte durch einen konstanten wandnormalen Wärmestrom entsprechend Abb. 8.1 bzw. Abb. 8.8. Bei den vorliegenden Kanalgeometrien wird somit dem Fluid aufgrund des größeren Kanalumfangs in der Expansion und in der Nachlaufstrecke mehr Energie pro Lauflänge zugeführt als im Einlaufbereich.

Beim Eintritt des Fluides in das Rechengebiet hat dieses die dimensionslose Temperatur  $T = 0$ . Da der Wärmeeintrag in das Fluid allein durch den Wandwärmestrom erfolgt ( $Q = 0$ ), wird die Normierung der Temperatur mit der charakteristischen Temperaturdifferenz nach Gl. (6.7.b) mit dem Wandwärmestrom gebildet.

Einen ersten Eindruck der Temperaturverteilung im Rechengebiet erhält man durch die Betrachtung von Isothermen in Querschnitten entlang der Hauptströmungsrichtung. In den Abbildungen 9.2.a bis 9.2.d sind Linien konstanter Temperatur in beiden Geometrien für die Peclet-Zahlen  $Pe = 100$  und  $Pe = 1000$  dargestellt. Die Positionen der Querschnitte auf der  $x^2$ -Achse können hierzu Tabelle 9.1 entnommen werden.

-7.79	-4.77	-3.28	-2.00
-1.00	0.00	1.00	2.00
3.93	6.82	10.21	13.51

Tabelle 9.1  $x^2$ - Positionen der einzelnen Querschnitte der Abbildungen 9.2.a - d und 9.5.a - d.

Die Temperaturdifferenz zwischen zwei Isothermen beträgt jeweils  $\Delta T = 0.05$ . Besitzen die Temperaturfelder Grenzschichtcharakter, so entspricht die erste Isotherme von der kalten Seite her dem absoluten Wert  $T = 0.05$ .

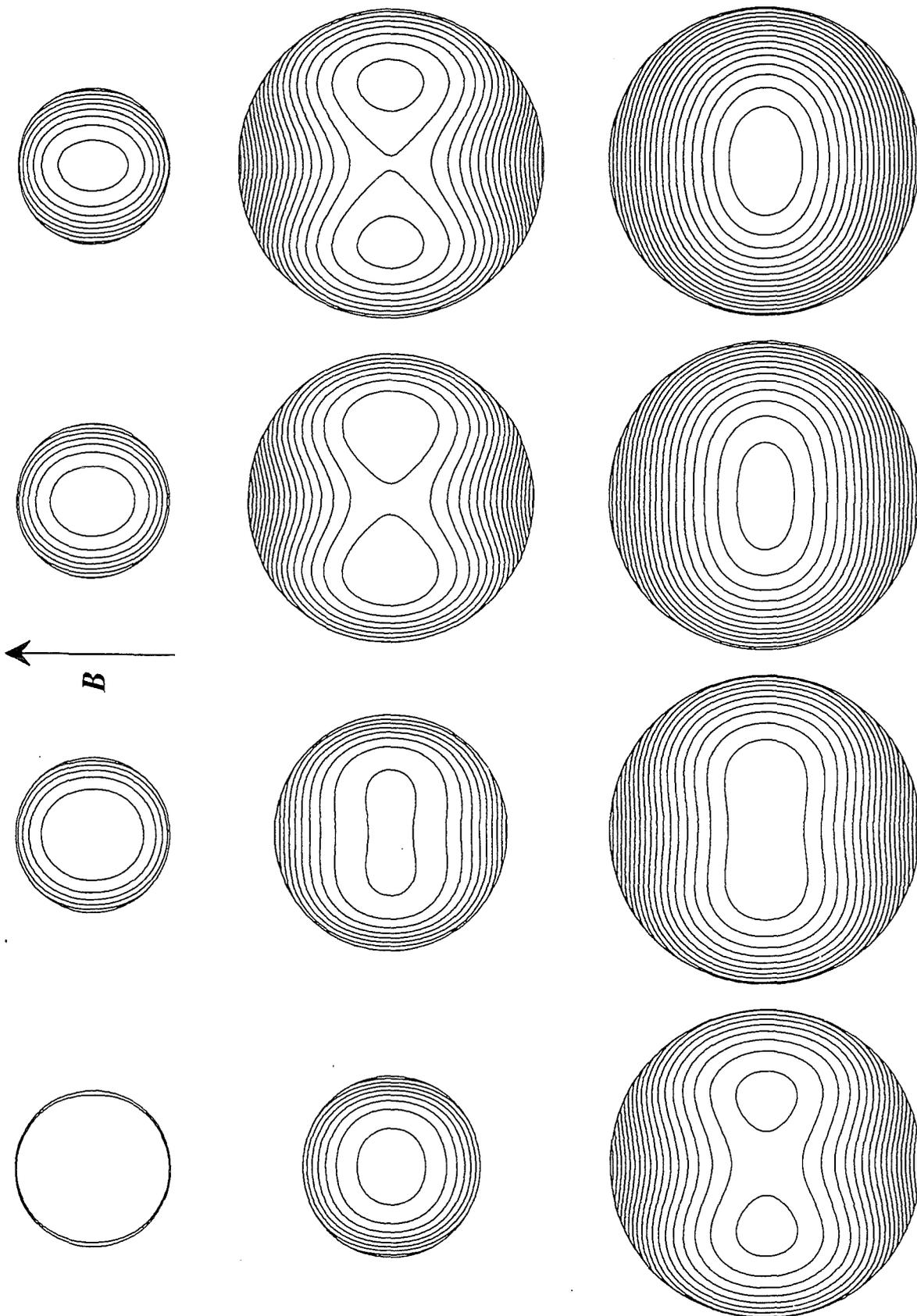


Abb. 9.2. a Isothermen im Kreisrohrdiffusor ( $Pe = 100$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

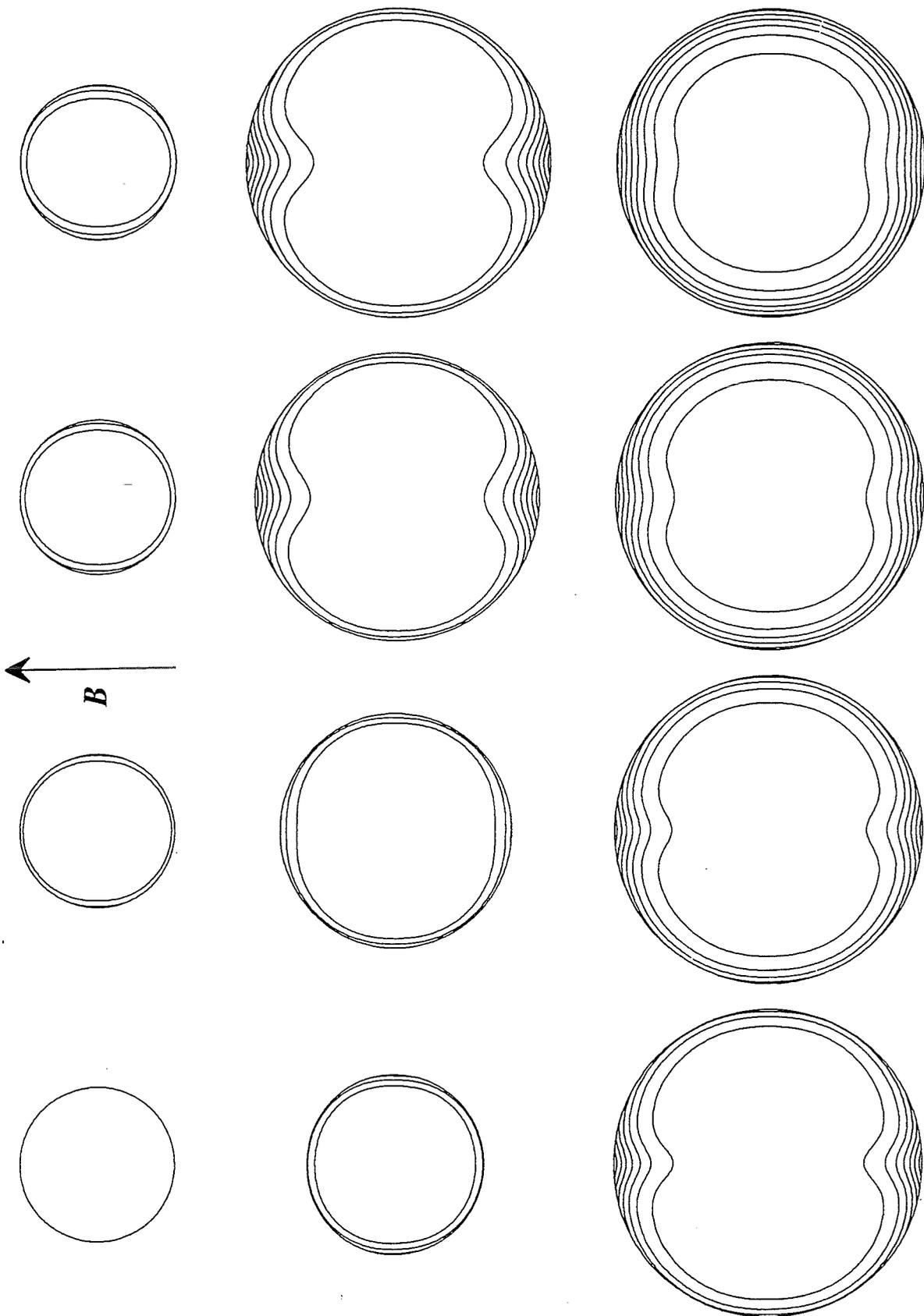


Abb. 9.2.b Isothermen im Kreisrohrdiffusor ( $Pe = 1000$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

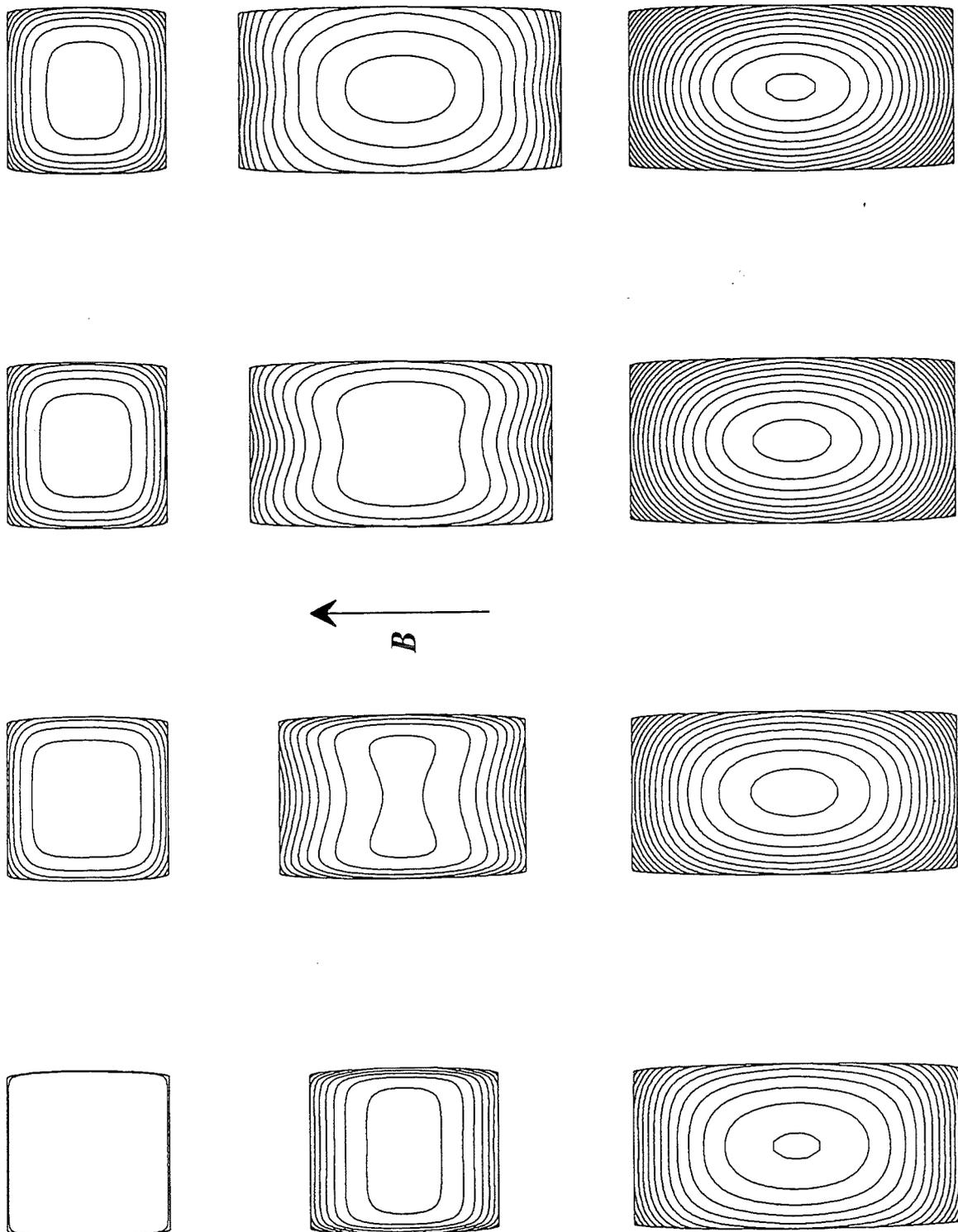


Abb. 9.2.c Isothermen im Rechteckdiffusor ( $Pe = 100$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

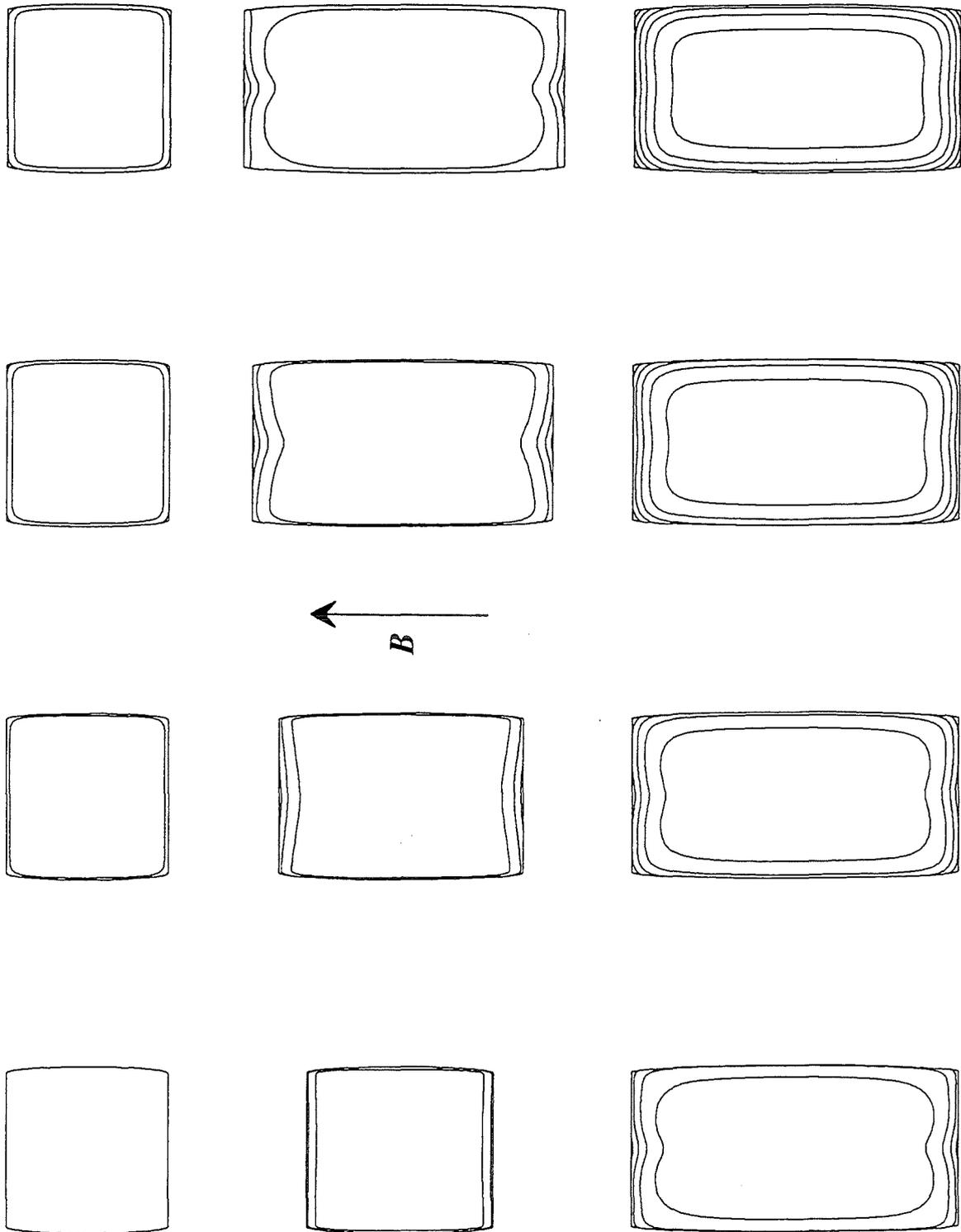


Abb. 9.2.d Isothermen im Rechteckdiffusor ( $Pe = 1000, M = 1000, c = 0.003$ ).

In den Einlaufbereichen der Rechengebiete erkennt man für diesen Bereich der Peclet- Zahlen die Ausbildung von Temperaturgrenzschichten an den Kanalwänden. Für  $Pe = 100$  zeigt sich hierbei bereits in der Einlaufstrecke der Einfluß der jeweiligen für die Querschnittsform charakteristischen MHD- Strömung. Beim Kreisrohr ergeben die geringeren Strömungsgeschwindigkeiten an den magnetfeldparallelen Seitenwänden dort höhere Temperaturen als im übrigen Querschnitt. Die Isothermen bilden daher in Magnetfeldrichtung orientierte Ovale (vgl. Abb. 9.2.a). Im Rechteckrohr dagegen kühlen die Übergeschwindigkeiten in den magnetfeldparallelen Seitenschichten die Wand stärker, so daß die Isothermen hier senkrecht zur Magnetfeldrichtung gestreckt werden (vgl. Abb. 9.2.c).

Im Diffusor selbst strömt das noch kalte Fluid aus dem Kernbereich des Kanals in die magnetfeldparallelen Seitenschichten und führt die Wärme von den Seitenwänden besonders gut ab. Die Isothermen liegen daher dicht an diesen Wänden. Außerhalb dieser Bereiche in der Nähe der Symetrieachse ( $x' = 0$ ) sind die axialen Geschwindigkeiten stark reduziert. Die konvektiven Anteile des Wärmetransportes sind hier sehr gering, so daß die in das Rechengbiet eindringende Wärme nur sehr schlecht abgeführt wird. Daher erwärmen sich diese Bereiche sehr stark.

Die kreisförmigen abgeschlossenen Isothermen in Abb. 9.2.a zeigen, daß die Wärmeleitung in den Bereichen geringer Strömungsgeschwindigkeit den Fluidkern so stark erwärmen können, daß die Wärme von hier ebenfalls durch die kälteren Seitenschichten abgeführt wird.

Verbunden mit dem Abklingen der dreidimensionalen Strömungseffekte im Diffusor kommt es in der Nachlaufstrecke wieder zu einem Ausgleich der Temperaturen. Neben dem nachwievor ins Fluid eindringenden Wandwärmestrom dringt hier heißes Fluid aus den beiden Seitenschichten in den Kernbereich des Kanals ein.

Am Ende des Rechengebietes ist die Strömung bei keinem der gezeigten Beispiele thermisch ausgebildet. Die Isothermen sind daher noch anders orientiert, als dies bei einer ausgebildeten MHD- Strömung der Fall wäre. Die gezeigten Abbildungen sollen besonders den Einfluß von dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeldern auf den Temperaturverlauf im Diffusor verdeutlichen. Die Ausbildung der thermisch voll entwickelten Strömung nach sehr großen axialen Lauflängen (von der Größenordnung der Peclet- Zahl) interessiert hier nicht.

Bei der Auslegung eines Fusionsblankets ist weniger die Temperaturverteilung im Fluid von Interesse, als die Temperatur an der Kanalwand. Einen ersten, qualitativen Eindruck der Temperaturbelastung des Wandmaterials erhält man durch Betrachtung von Isothermen auf der Diffusorkontur (Abb. 9.3.a und 9.3.b). Die gezeigten Isothermen entsprechen den Temperaturen der Fluid- Wand- Grenzfläche. Durch den Temperaturgradienten in der Wand ist die Temperatur an der Außenseite natürlich höher. Der Unterschied zwischen Wandinnen- und außentemperatur kann jedoch leicht abgeschätzt werden, wenn die Stoffeigenschaften der Wand, ihre Dicke sowie der Wandwärmestrom bekannt sind. Hierauf wird an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen.

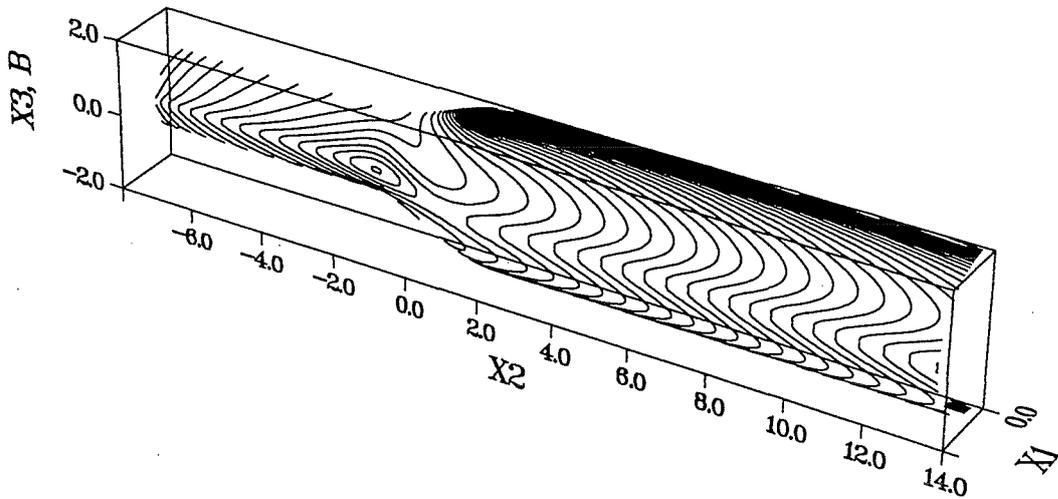


Abb. 9.3.a Isothermen auf der Kanalwand des Kreisdiffusors  
( $Pe = 1000$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

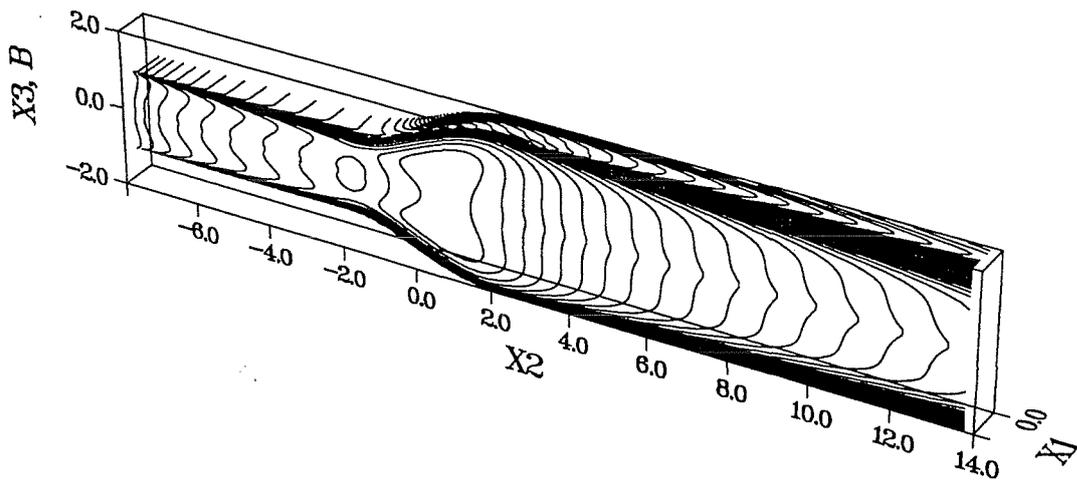


Abb. 9.3.b Isothermen auf der Kanalwand des Rechteckdiffusors  
( $Pe = 1000$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

Im Ein- und Nachlaufbereich zeigen sich hier zunächst Temperaturverteilungen, die den MHD-Strömungsprofilen entsprechen. Dies sind beim Kreisrohr höhere Temperaturen im Bereich der magnetfeldparallelen Seitenwände (rückwärts gekrümmte Isothermen). Beim Rechteckrohr dagegen bewirken die Übergeschwindigkeiten in diesen Bereichen ein Absenken der Temperaturen (vorwärts gekrümmte Isothermen). Deutlich zu erkennen ist hier auch die starke Erwärmung der Ecken des Rechteckquerschnittes.

Im Bereich der Querschnittserweiterungen erkennt man deutlich die starke Erwärmung an der oberen und unteren Kanalwand. An den magnetfeldparallelen Seitenwänden dagegen bleiben die Temperaturen auf einem geringeren Niveau. Die im Diffusorbereich geschlossenen Isothermen lassen erkennen, daß die Temperatur in diesen Bereichen wieder abfällt. Dies liegt daran, daß dort kälteres Fluid aus dem Kernbereich an die Wand geführt wird.

Der exakte Verlauf der dimensionslosen Wandtemperaturen entlang der Kanalachse ist in den Abbildungen 9.4.a und 9.4.b an charakteristischen Positionen auf der Kanalwand aufgetragen.

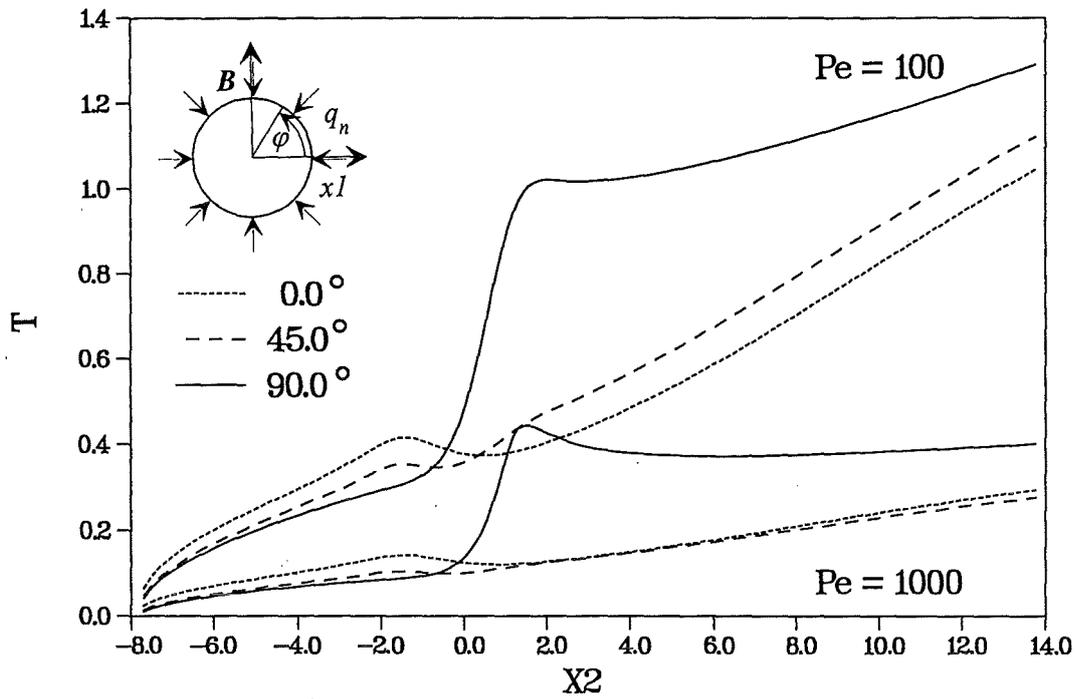


Abb. 9.4.a Wandtemperaturverläufe beim Kreisrohrdiffusor ( $M = 1000, c = 0.003$ )

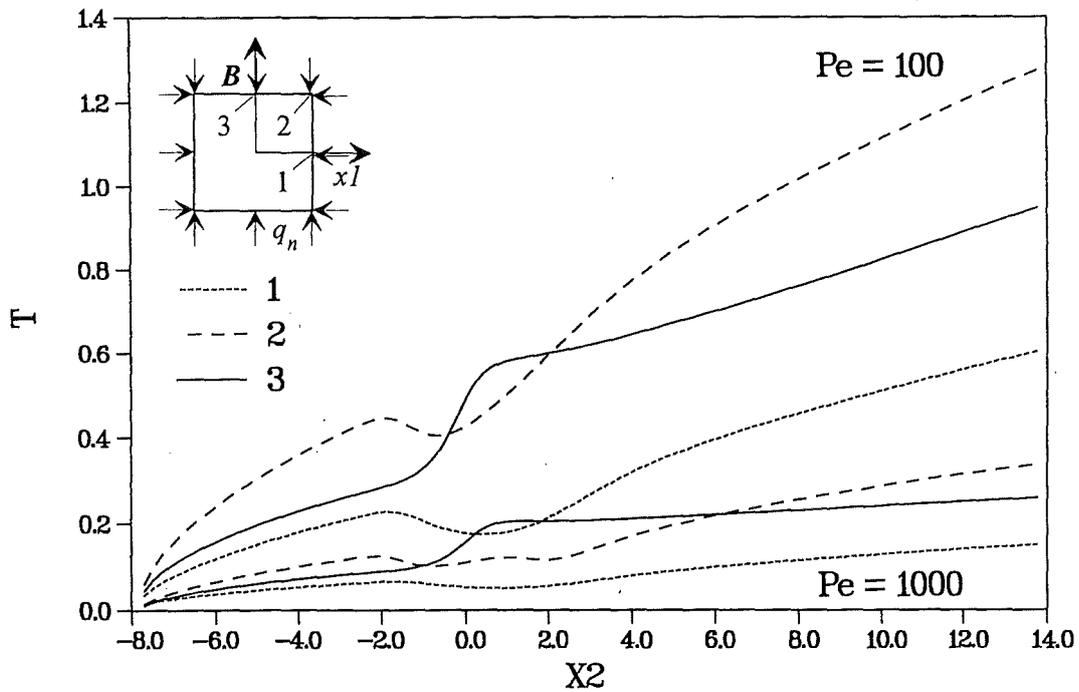


Abb. 9.4.b Wandtemperaturverläufe beim Rechteckdiffusor ( $M = 1000, c = 0.003$ )

Insbesondere beim Kreisrohrdiffusor zeigt sich die starke Erwärmung der Diffusoroberseite. Beim Rechteckrohr dagegen fällt die sehr hohe thermische Belastung der Ecken auf, deren Temperatur nur im unmittelbaren Diffusorbereich von der der magnetfeldsenkrechten Wand übertroffen wird.

Die Abbildungen 9.5.a bis 5.9.b beschreiben den Wärmetransport in einer Querschnittserweiterung im Anschluß an eine sehr lange thermische Einlaufstrecke. Als Temperaturrandbedingung wurde hier die Temperaturverteilung einer thermisch ausgebildeten MHD-Rohrströmung ( ebenfalls  $c = 0.003$  ) vorgegeben.

Deutlich zeigt sich auch hier der Einfluß der Geschwindigkeitsumverteilung im Bereich der Querschnittsänderung.

Anhand einer Auftragung der charakteristischen Temperaturdifferenz  $T_w - T_m$  an ausgezeichneten Positionen entlang der Kanalwand wird das Zerfließen des thermisch ausgebildeten Zustandes im dreidimensionalen Strömungsgebiet des Diffusors gezeigt (Abb. 9.6.a bis 9.6.d).

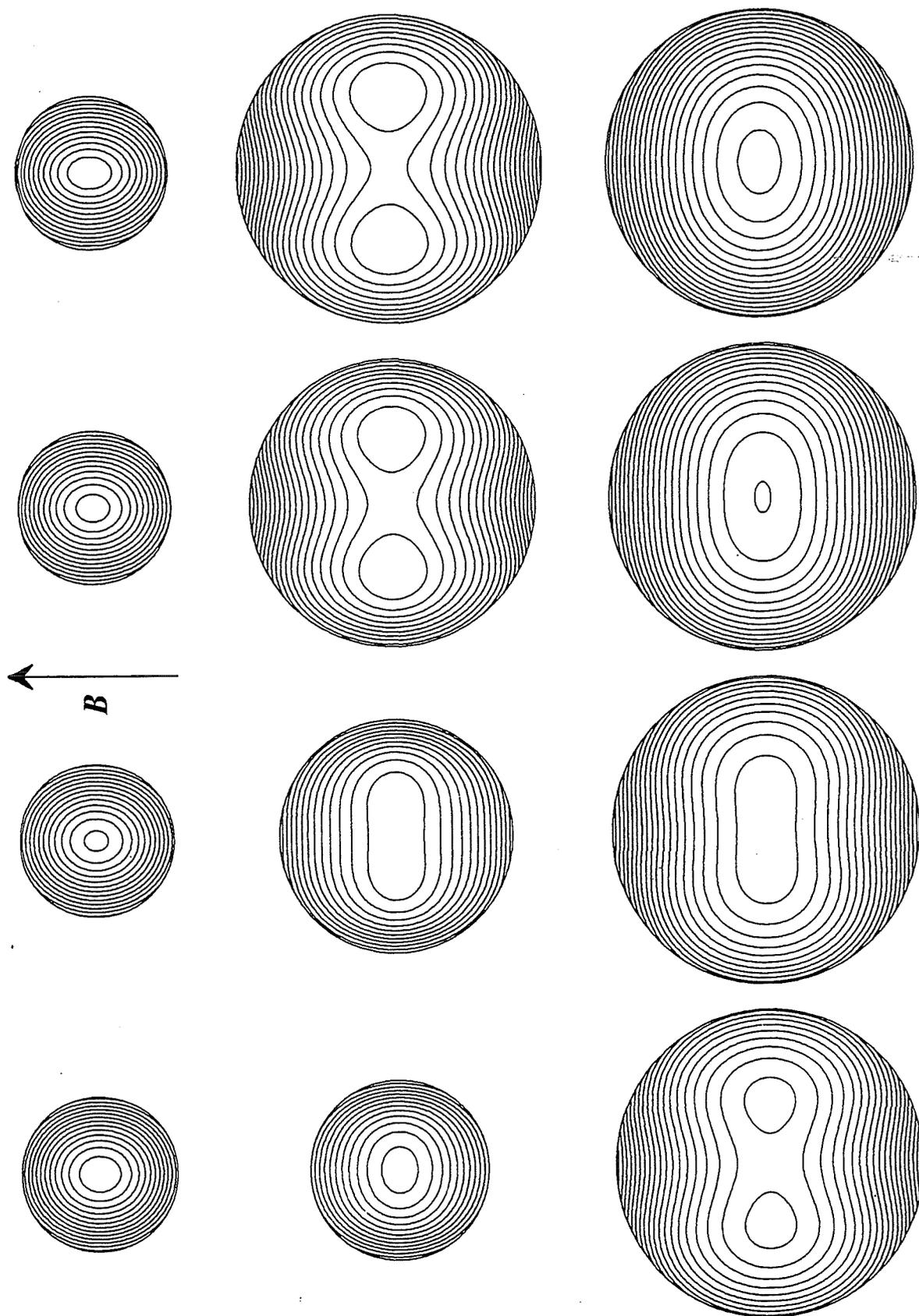


Abb. 9.5.a Dreidimensionaler Wärmetransport im Anschluß an eine sehr lange thermische Einlaufstrecke, Isothermen im Kreisrohrdiffusor ( $Pe = 100$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

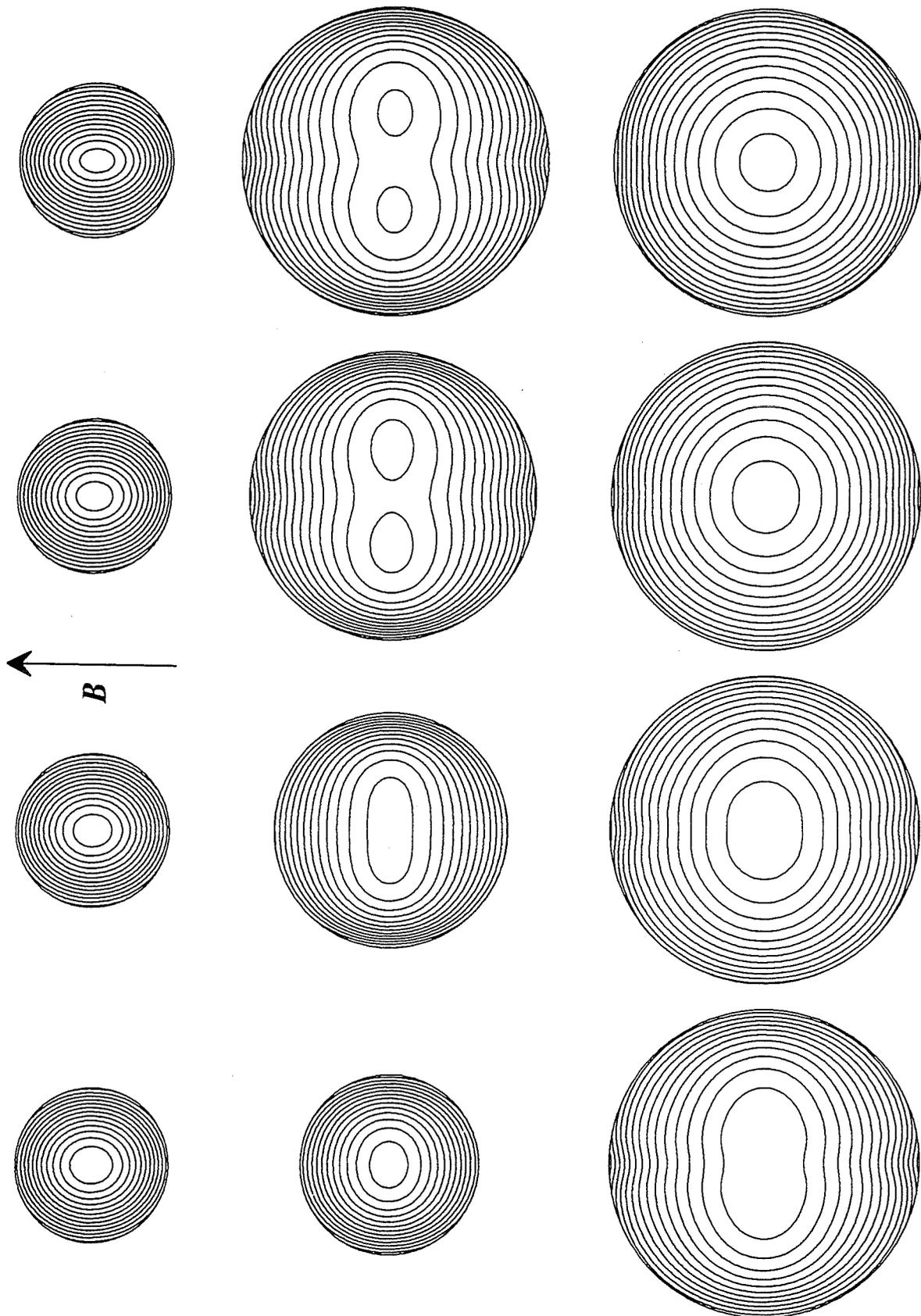


Abb. 9.5.b Dreidimensionaler Wärmetransport im Anschluß an eine sehr lange thermische Einlaufstrecke, Isothermen im Kreisrohrdiffusor ( $Pe = 1000$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

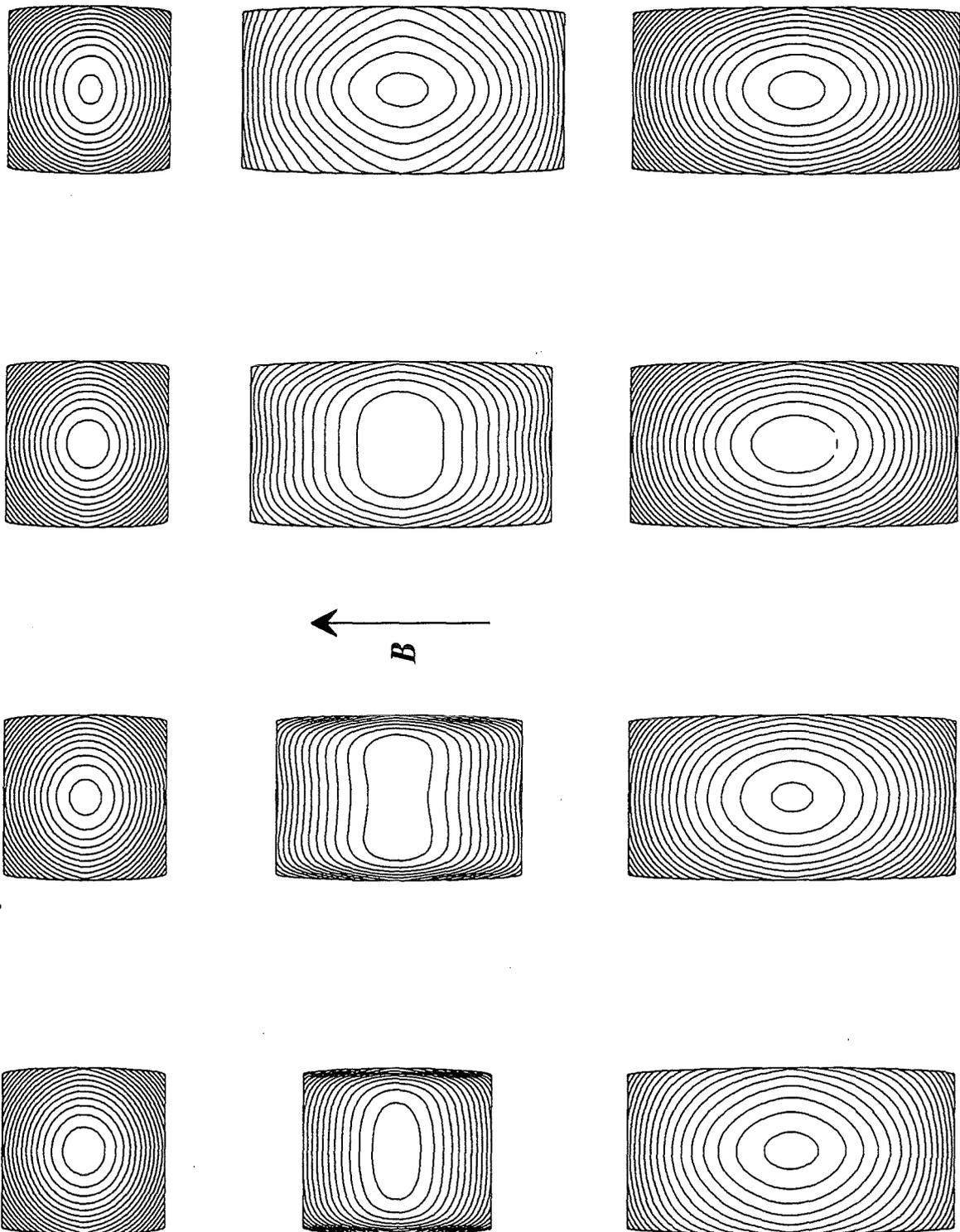


Abb. 9.5.c Dreidimensionaler Wärmetransport im Anschluß an eine sehr lange thermische Einlaufstrecke, Isothermen im Rechteckdiffusor ( $Pe = 100$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

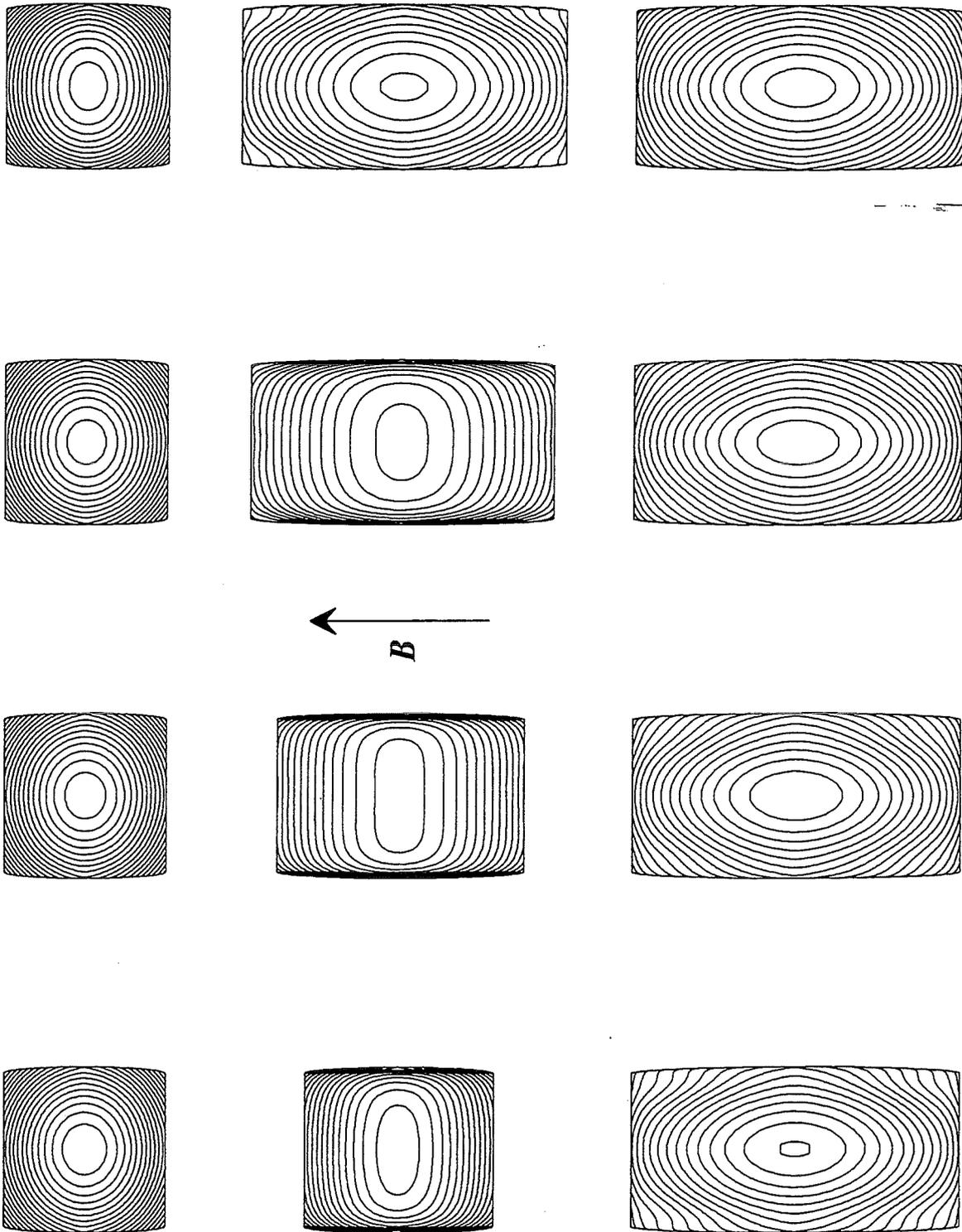


Abb. 9.5.d Dreidimensionaler Wärmetransport im Anschluß an eine sehr lange thermische Einlaufstrecke, Isothermen im Rechteckdiffusor ( $Pe = 1000$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

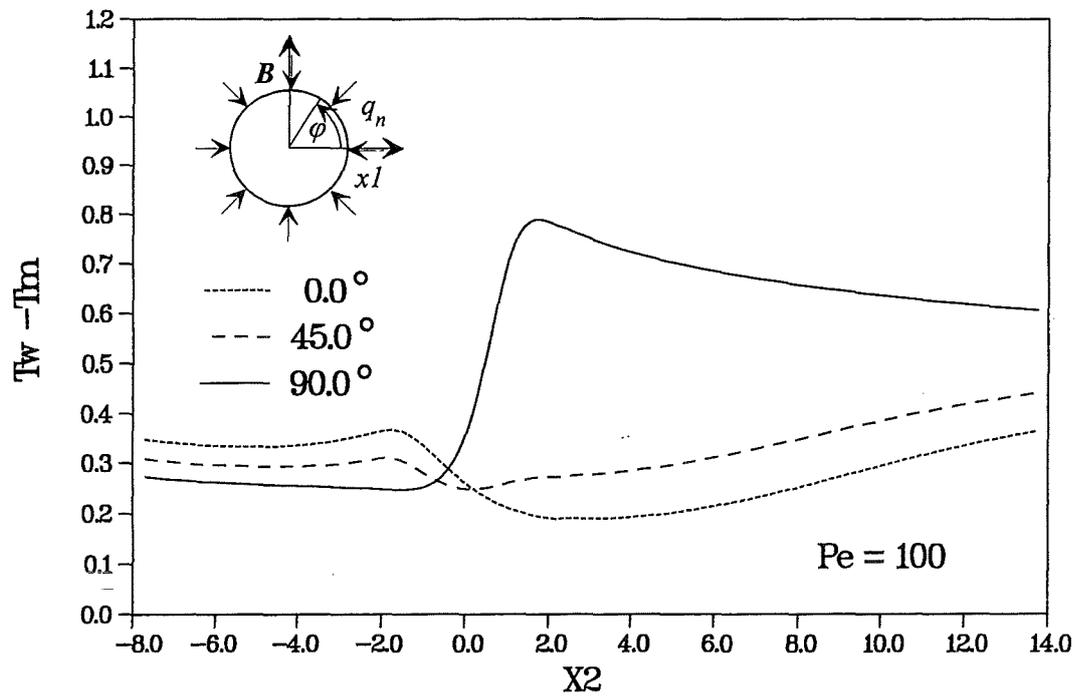


Abb. 9.6.a  $T_w - T_m$ , Kreisrohrdiffusor ( $Pe = 100, M = 1000, c = 0.003$ )

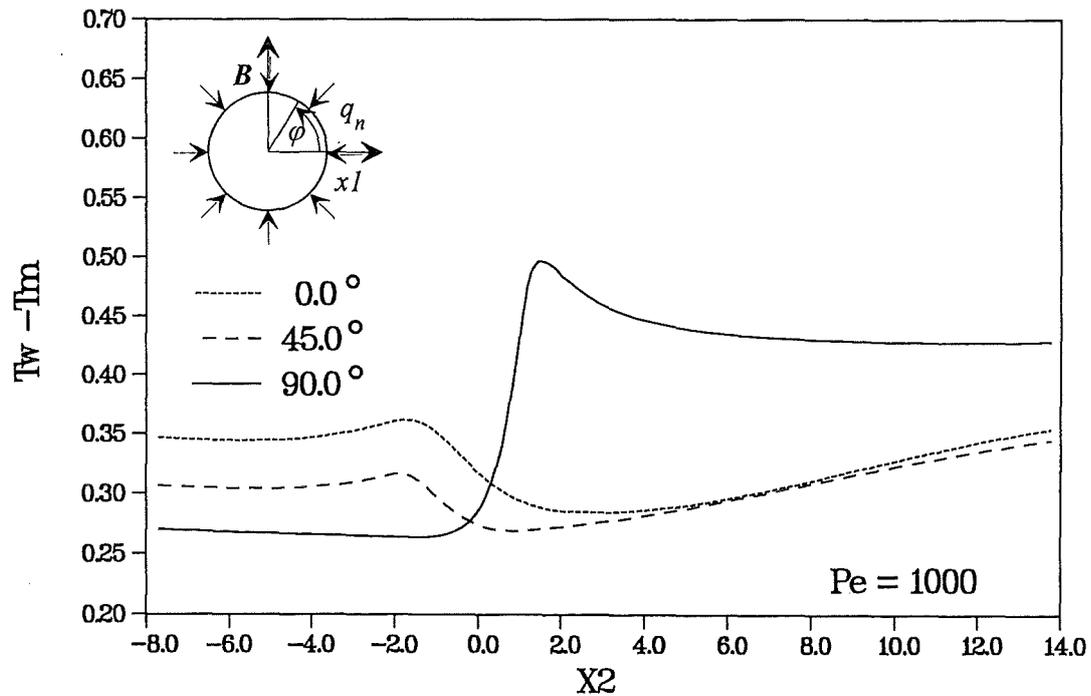


Abb. 9.6.b  $T_w - T_m$ , Kreisrohrdiffusor ( $Pe = 1000, M = 1000, c = 0.003$ )

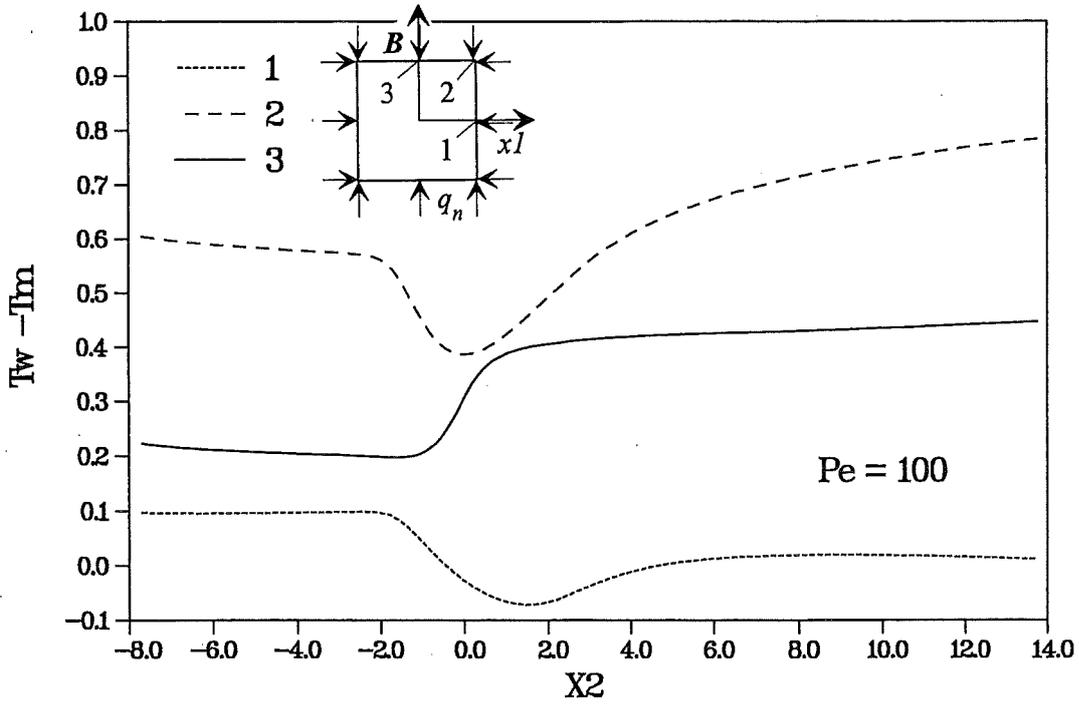


Abb. 9.6.c  $T_w - T_m$ , Rechteckdiffusor ( $Pe = 100, M = 1000, c = 0.003$ )

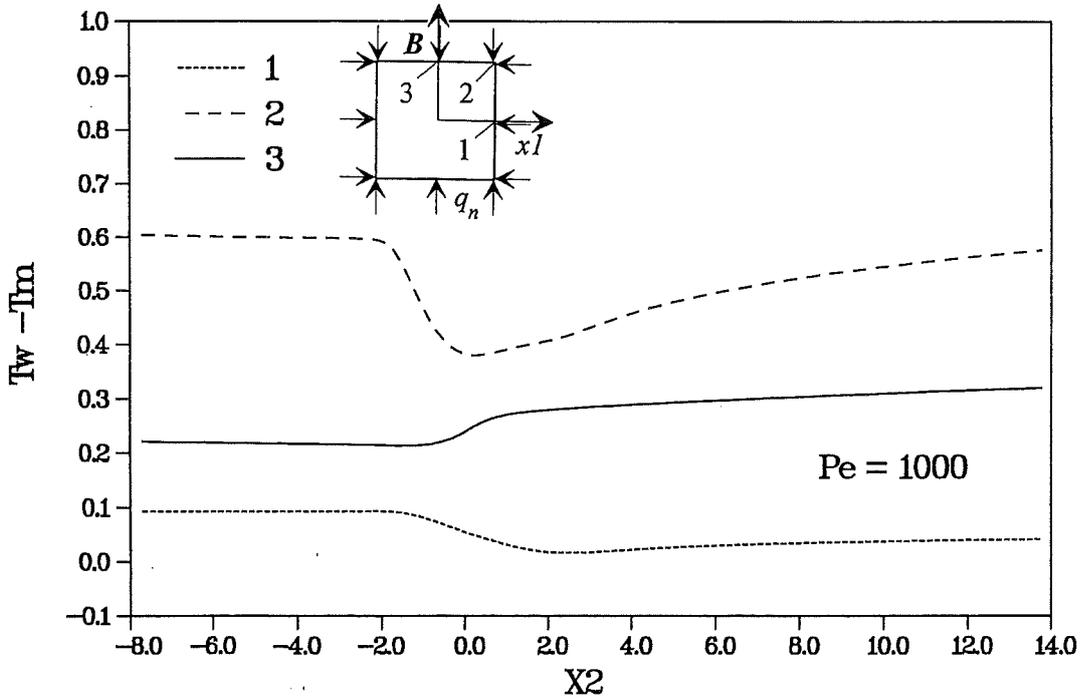


Abb. 9.6.c  $T_w - T_m$ , Rechteckdiffusor ( $Pe = 1000, M = 1000, c = 0.003$ )

Bereits in der Einlaufstrecke, insbesondere aber im Bereich der Querschnittserweiterung, zerfließt der thermisch ausgebildete Zustand, und es treten die bereits beschriebenen Bereiche höherer und niedrigerer Wandtemperatur auf. Im Nachlauf streben die Temperaturen wieder asymptotischen Grenzwerten entgegen, bei deren Erreichen wieder thermisch ausgebildete Zustände vorliegen. Diese würden erreicht, wenn das Rechengebiet genügend weit in axialer Richtung ausgedehnt wäre.

### 9.1.2 Konstanter einseitiger Wärmestrom

Der Einfluß dreidimensionaler Strömungszustände auf den Wärmetransport im Fluid mit der Randbedingung eines einseitigen Wärmestroms wird am Beispiel des Rechteckdiffusors gezeigt ( $M = 1000, c = 0.003$ ). Der Energieeintrag in das Fluid erfolgt über eine magnetfeldparallele Kanalwand;  $q_w = -\partial_n T = 1$ . Alle anderen Kanalwände werden als adiabat ( $q_w = -\partial_n T = 0$ ) angenommen.

Als Anfangsbedingung wird die Temperatur des Fluides beim Eintritt in das Rechengebiet zu  $T = 0$  angenommen. Die Ergebnisse werden einer Rechnung gegenübergestellt, die von einer im jeweiligen Querschnitt konstanten Geschwindigkeit (Kolbenprofil für  $M \gg 1, c = \infty$ ) ausgeht. In Abb. 9.7.a und 9.7.b sind Isothermen verschiedener Querschnitte für beide Rechnungen dargestellt.

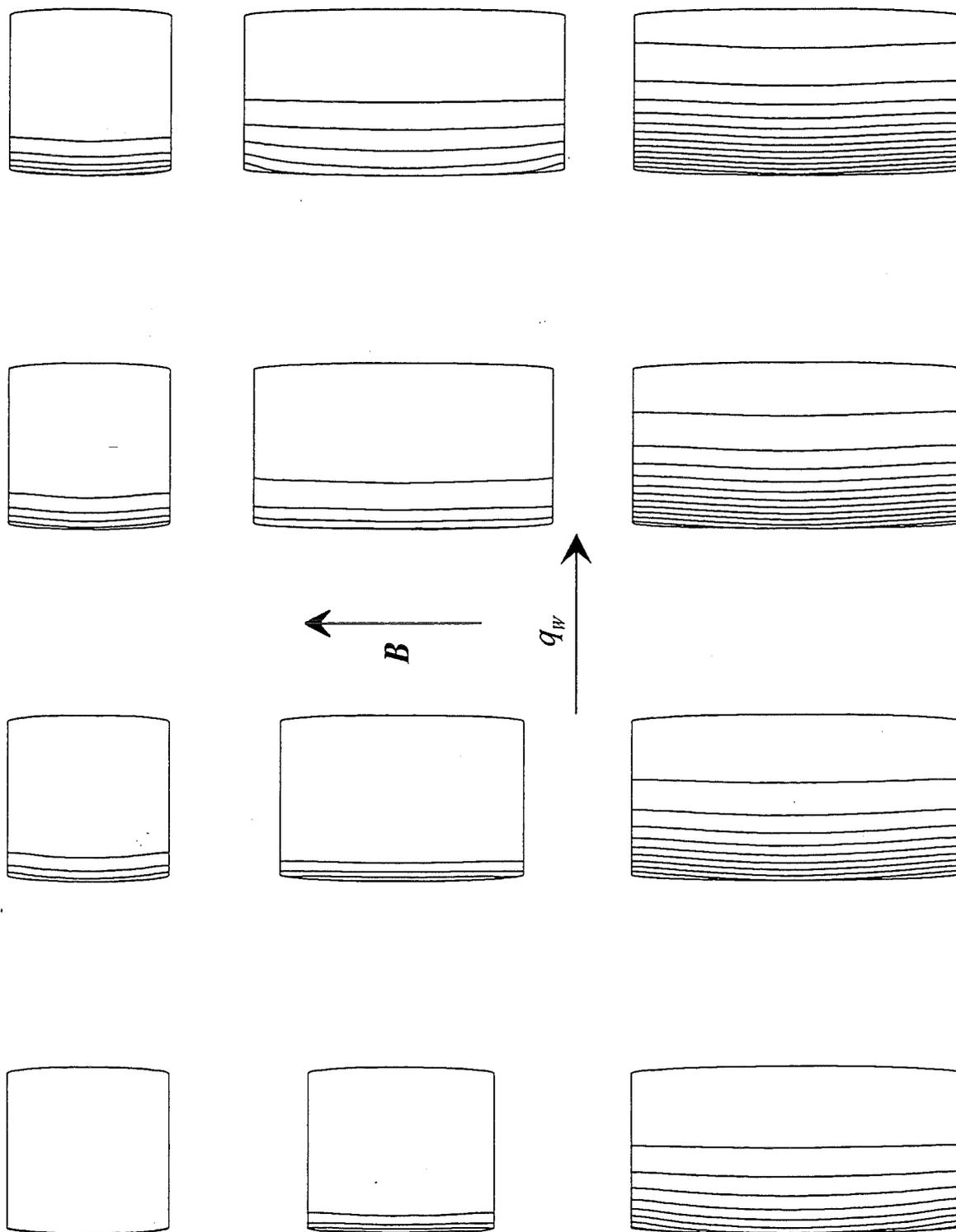


Abb. 9.7.a Isothermen im Rechteckdiffusor bei einseitigem Wandwärmestrom  
( $Pe = 100$ ,  $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ).

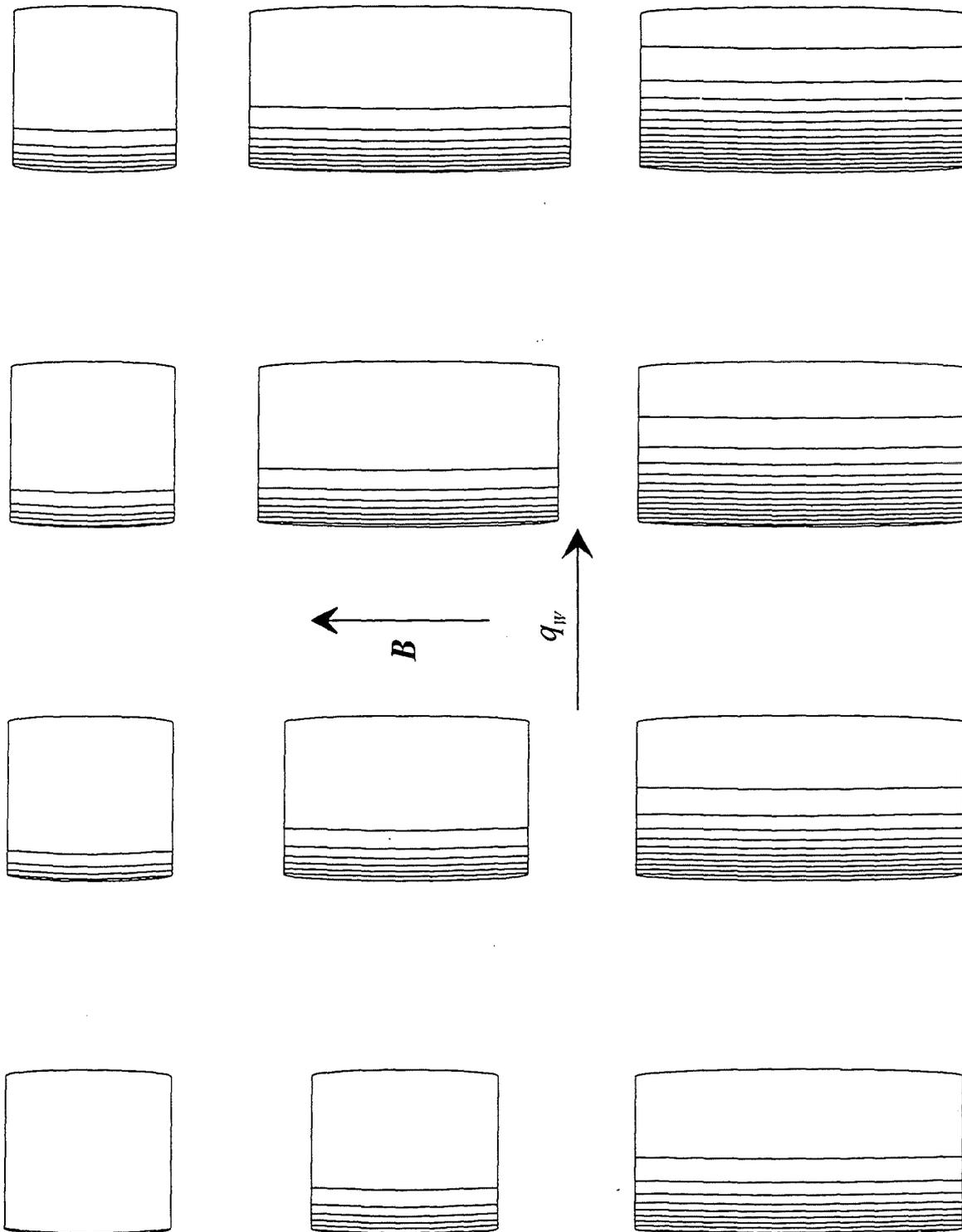


Abb. 9.7.b Isothermen im Rechteckdiffusor bei einseitigem Wandwärmestrom  
( $Pe = 100, M = \infty, c = \infty$ ).

Beim Kolbenprofil bildet sich die Temperaturgrenzschicht kontinuierlich entlang der beheizten Wand aus. Bei MHD-Strömung mit kleinem Wandleitparameter dagegen zeigt sich der Einfluß der Übergeschwindigkeiten in den magnetfeldparallelen Seitenschichten durch das Anliegen der Isothermen an die Kanalwand im Verlauf der Expansion. Noch deutlicher zeigt sich dies bei Betrachtung der Temperaturen an der Kanalwand. In Abbildung 9.8 sind diese für beide Strömungen aufgetragen.

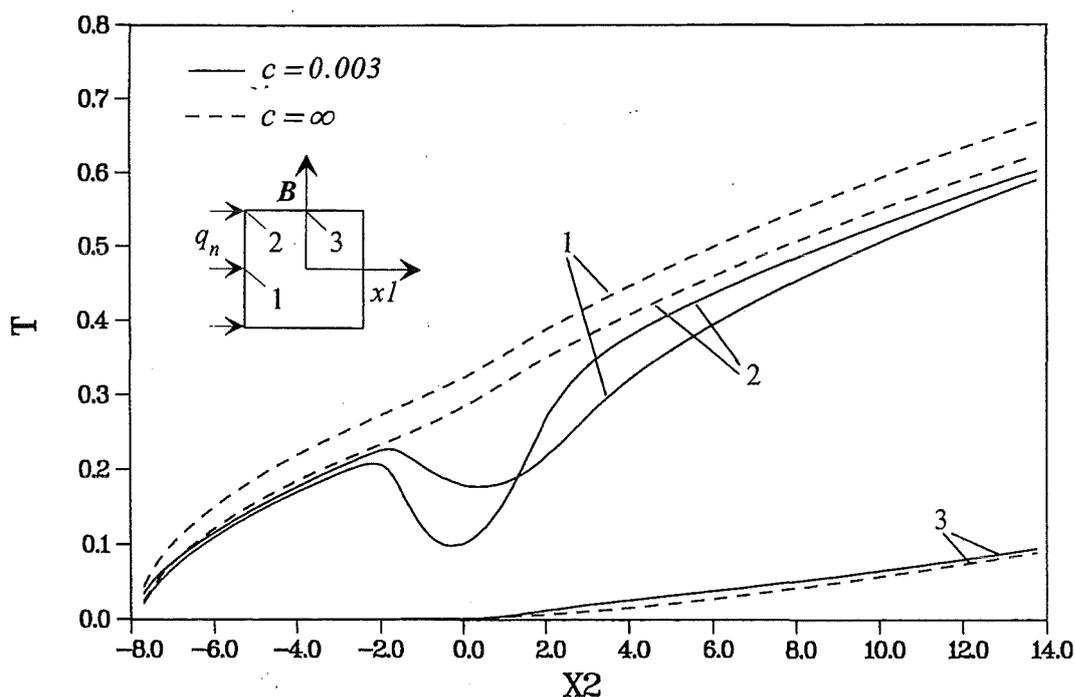


Abb. 9.8 Wandtemperaturen beim Rechteckdiffusor mit einseitigem Wandwärmestrom.

Für  $c = 0.003$  erkennt man ein starkes Abfallen der Wandtemperaturen im Diffusorbereich. Die Temperaturen im gesamten Rechenggebiet bleiben unter denen der Kolbenströmung. Die Abweichungen der Temperaturkurven des Kolbenprofils zwischen der Ecke und der Seitenwand ergeben sich durch die elliptische Approximation der Seitenwand.

Ausgehend von den axialen Geschwindigkeitsprofilen der MHD-Strömung (vgl. Abb. 9.1.b) müßten sich aufgrund der über die gesamte Lauflänge hinweg höheren Geschwindigkeiten in der Seitenschicht, dort eher geringere Temperaturen ergeben als in den Ecken.

Betrachtet man jedoch die Temperaturverläufe entlang der Kanalachse, so fällt auf, daß die Temperaturabsenkung in der Ecke zunächst größer ist als an der Seitenwand. Im Diffusoraustritt übersteigt die Temperatur in der Ecke rasch den Wert an der Seitenwand und nähert sich im weiteren Verlauf der Strömung langsam wieder an diesen an.

Diese Rechnung zeigt, daß die thermische Belastung der Blanketwand durch die Erzeugung dreidimensionaler Strömungszustände verringert werden kann. Dieser Effekt ist besonders

ausgeprägt solange die Temperaturverteilung noch Grenzschichtcharakter besitzt, da für diesen Bereich noch viel kaltes Fluid im Innern des Kanals zur Verfügung steht.

Weitere Rechnungen könnten zeigen, ob eine Aufeinanderfolge dreidimensionaler Strömungsgebiete (z. B. gebildet durch Bereiche unterschiedlicher Wandleitfähigkeit oder durch einen sich periodisch ändernden Querschnitt) in der Lage ist, die Wandtemperatur über eine längere Lauflänge hinweg geringer zu halten, als bei ausgebildeter MHD-Strömung in einem geraden Kanal.

## 9.2 Energieeintrag durch volumetrische Heizung

Neben der Wahl eines über die Kanalwand ins Fluid eindringenden Wandwärmestroms als Randbedingung stellt die volumetrische Wärmezufuhr mit dem Quellterm  $Q$  einen weiteren Anwendungsfall für Temperaturrechnungen dar. In diesem Quellterm sind zunächst alle in einem Fusionsblanket auftretenden Anteile der volumetrischen Heizung wie Dissipationsprozesse, chemische Reaktionen, Joulsche Verluste der induzierten Ströme und die Absorption der Nuklearstrahlung im Fluid zusammengefaßt.

In einem Fusionsblanket überwiegt die Wärmefreisetzung durch die im Fluid absorbierte Nuklearstrahlung die übrigen Anteile bei weitem, so daß diese vernachlässigt werden können. Damit ist der Quellterm  $Q$  vom Strömungsgeschehen unabhängig und kann für die nachfolgenden Rechnungen als fester Wert oder als Funktion der Ortskoordinaten vorgegeben werden.

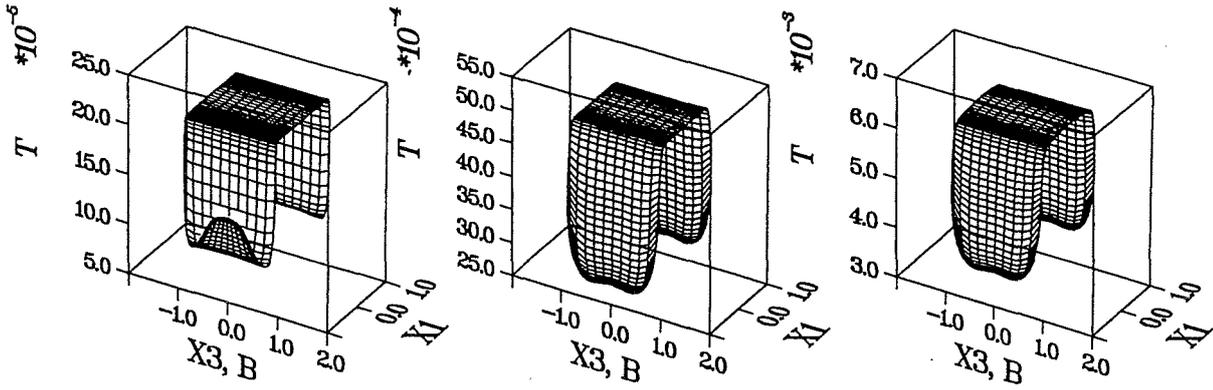
Obwohl eine Rechnung mit einem aus volumetrischer Heizung und Wandwärmestrom kombinierten Wärmeeintrag prinzipiell möglich ist, wurden die nachfolgenden Rechenbeispiele ausschließlich mit volumetrischer Heizung durchgeführt. Die Kanalwände wurden adiabatisch vorgegeben.

Dies entspricht der Berechnung eines Blanketelements, dem z.B. ein gasgekühlter Kanal zur Abfuhr des Wandwärmestroms der ersten Wand vorgelagert ist.

### 9.2.1 Rechteckdiffusor mit konstanter volumetrischer Heizung

Ein einfaches Rechenbeispiel bildet der Rechteckdiffusor (Abb. 5.8), der von einer MHD-Strömung ( $M = 1000$ ,  $c = 0.003$ ) mit den in Abb. 9.1.b gezeigten axialen Geschwindigkeitsprofilen durchströmt wird.

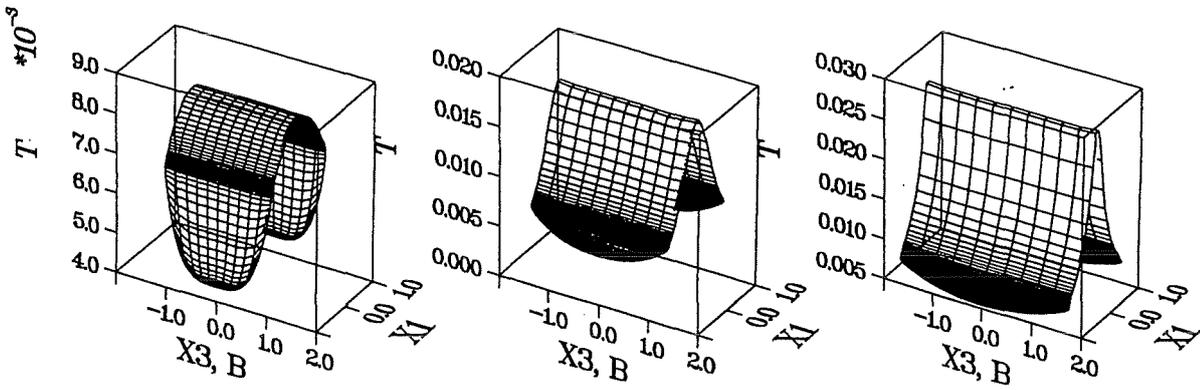
Im gesamten Rechenggebiet betrage die Quellstärke der volumetrischen Heizung  $Q = 1$ . Durch die Wahl einer hohen Peclet-Zahl ( $Pe = 1000$ ) treten die diffusiven Anteile des Wärmetransportes gegenüber den konvektiven in ihrem Einfluß auf die Temperaturverteilung zurück. Dies ergibt bei Energieeintrag durch volumetrische Heizung einen engen Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Temperatur, da sich Temperaturunterschiede im Fluid nur langsam ausgleichen. Abbildung 9.9 zeigt die dreidimensional dargestellten Temperaturprofile in den selben Querschnitten des Kanals wie die Geschwindigkeitsprofile der Abb. 9.1.b. Die Normierung der Temperaturwerte erfolgt, da ausschließlich volumetrische Heizung vorliegt, anhand Gleichung (6.7.c).



$x = -7.79$

$x = -3.28$

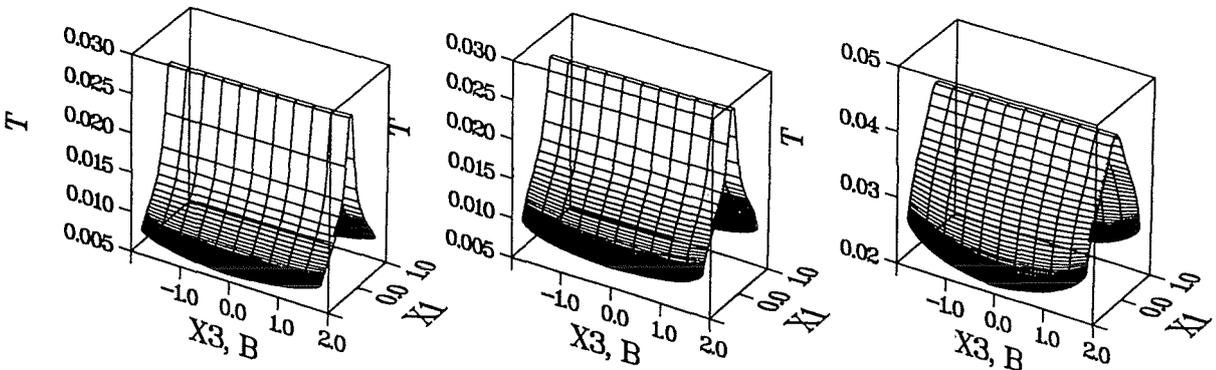
$x = -2.00$



$x = -1.00$

$x = 0.00$

$x = 1.00$



$x = 2.00$

$x = 3.93$

$x = 13.51$

Abb. 9.9 Temperaturprofile im Rechteckdiffusor ( $M = 1000, c = 0.003, Pe = 1000, Q = 1$ )

Zunächst erkennt man, daß die Temperaturwerte entlang magnetischer Feldlinien ( $x_3$ - Richtung) nahezu identisch sind. Lediglich in den Bereichen der magnetfeldparallelen Wände ergeben sich aufgrund der elliptischen Approximation dieser Bereiche gekrümmte Temperaturverteilungen.

Die Temperaturwerte in den einzelnen Querschnitten ergeben sich weitgehend entsprechend den Geschwindigkeitsverteilungen im Kanal. Allgemein erhält man für höhere Geschwindigkeiten geringere Temperaturen, in Bereichen niedrigerer Geschwindigkeit dagegen höhere. Besonders deutlich wird dies bei Betrachtung des Kernbereichs der Querschnittserweiterung, wo praktisch stagnierendes Fluid vorliegt. Dort kommt es zu starken Temperaturüberhöhungen. Für die Geschwindigkeitsjets entlang der Seitenwände ergeben sich dagegen wesentlich geringere Temperaturen. In unmittelbarer Wandnähe steigt die Temperatur wieder geringfügig an (vgl.  $T(x) = -7.79$  in Abb. 9.9). Ursache hierfür ist der Geschwindigkeitsabfall zur Wand hin in einem Bereich der Größenordnung  $O(1/\sqrt{M})$ . An den magnetfeldsenkrechten Wänden ist dies nicht zu erkennen, der Geschwindigkeitsabfall zur Wand hin erfolgt hier nur auf einer Strecke der Größenordnung  $O(1/M)$  und wird durch die verwendete Auflösung des Rechengebietes nicht erfaßt. Eine stärkere Erwärmung dieser extrem dünnen Schichten ist auch nicht zu erwarten, da Wärmeleitungsprozesse diese sofort ausgleichen würden. Ein charakteristisches Zeitmaß ist dabei die Diffusionszeit

$$\tau \sim \frac{\delta^2}{\chi} \quad (9.1)$$

mit der Dicke der Hartmanngrenzschicht  $\delta = a/M$  als charakteristisches Längenmaß.  $\tau$  ist deshalb für große  $M$  sehr klein.

### 9.2.2 Krümmer mit nicht konstanter volumetrischer Heizung

Als weiteres Beispiel wurde die Temperaturverteilung einer MHD-Strömung ( $M = 1000, c = 0$ ) in einem senkrecht zum Magnetfeld orientierten Krümmer berechnet. Der Krümmer entsprechend Abb. 9.10 ist ein typisches Bauelement des sogenannten Dual coolant Blanket Konzepts, bei dem der thermische Wärmestrom von der ersten Wand durch Helium gekühlte Kanäle abgeführt wird. Im Flüssigmetall muß hauptsächlich der Anteil der volumetrischen Heizung abgeführt werden.

Die durch die Absorption der Nuklearstrahlung ins Fluid eingebrachte Wärmemenge ist nur für eine sehr geringe Absorptionsrate näherungsweise konstant. Wird die Strahlungsdichte durch das Fluid signifikant vermindert, so erhält man eine von der Eindringtiefe abhängige Quellstärke der volumetrischen Heizung. In guter Näherung kann dieser Zusammenhang durch einen Ansatz der Form

$$Q \sim \frac{1}{x_e} \quad (9.1)$$

erfaßt werden.  $x_e$  ist dabei die Entfernung zur Strahlungsquelle. Für die Berechnung der Temperaturverteilung im Fluid wurde die Quellstärke so gewählt, daß diese vom Wert  $Q = 1$  an der plasmanahen Wand auf den Wert  $Q = 1/4$  an der Rückwand abklingt. In Abbildung 9.10 ist die Quellstärke als Funktion der Ortskoordinate aufgetragen.

Die Berechnung der Temperaturverteilung wurde bei einer Peclet- Zahl von  $Pe = 1000$  durchgeführt, wodurch sich wiederum ein enger Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Temperaturverteilung im Axialschnitt ergibt. In Abb. 9.10 sind die Temperaturprofile den jeweiligen axialen Geschwindigkeitsprofilen der MHD- Strömung an charakteristischen Kanalpositionen gegenübergestellt.

Im Ein- und Nachlaufbereich ergeben sich die für eingelaufene MHD- Strömungen in Rechteckrohren charakteristischen Strömungsprofile. Im Bereich der Umlenkung kommt es dann zu einer starken Umverteilung des Massenstromes zum Innenradius der Biegung hin. Im Bereich des Außenradius dagegen liegen nur noch sehr geringe Strömungsgeschwindigkeiten vor.

Entsprechend dieser Geschwindigkeitsverteilung entwickelt sich auch die Temperatur im Kanal. Aus der nicht konstanten Quellstärke der volumetrischen Heizung im Ein- und Nachlaufrohr ergeben sich hier zudem schiefe Temperaturprofile. In den dicksten Grenzschichten, den Seitenschichten, wird die Temperaturerhöhung in unmittelbarer Wandnähe deutlich sichtbar.

Im Bereich der Umlenkung ist die Quellstärke zwar in einem Axialschnitt annähernd gleich, jedoch bewirken die geringen Geschwindigkeiten hier am Außenradius eine sehr rasche Erwärmung dieses Bereiches. Die weitere Erwärmung des Nachlaufrohres fällt, obwohl die Quellstärke der volumetrischen Heizung am höchsten ist, aufgrund der dort hohen Strömungsgeschwindigkeiten relativ gering aus.

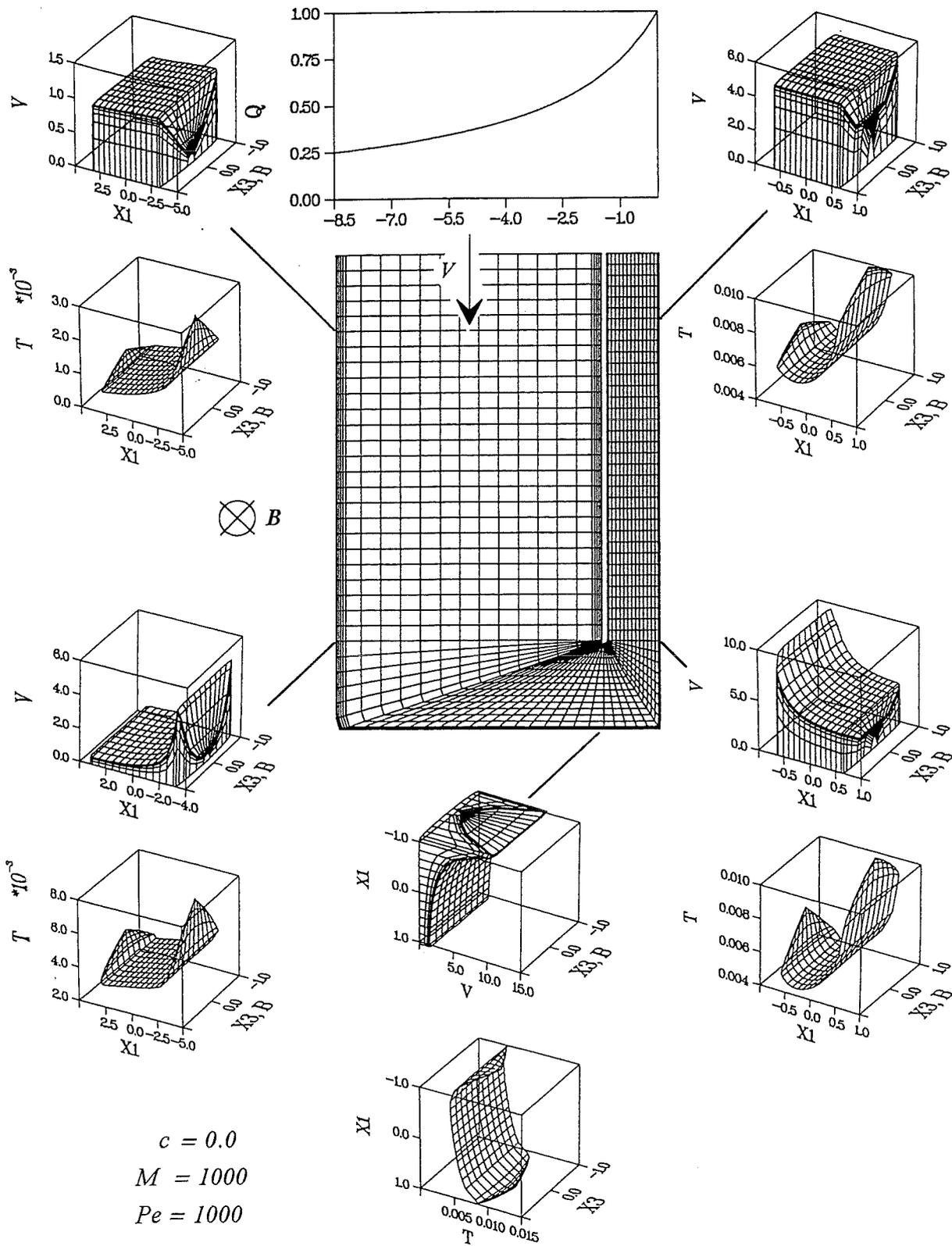
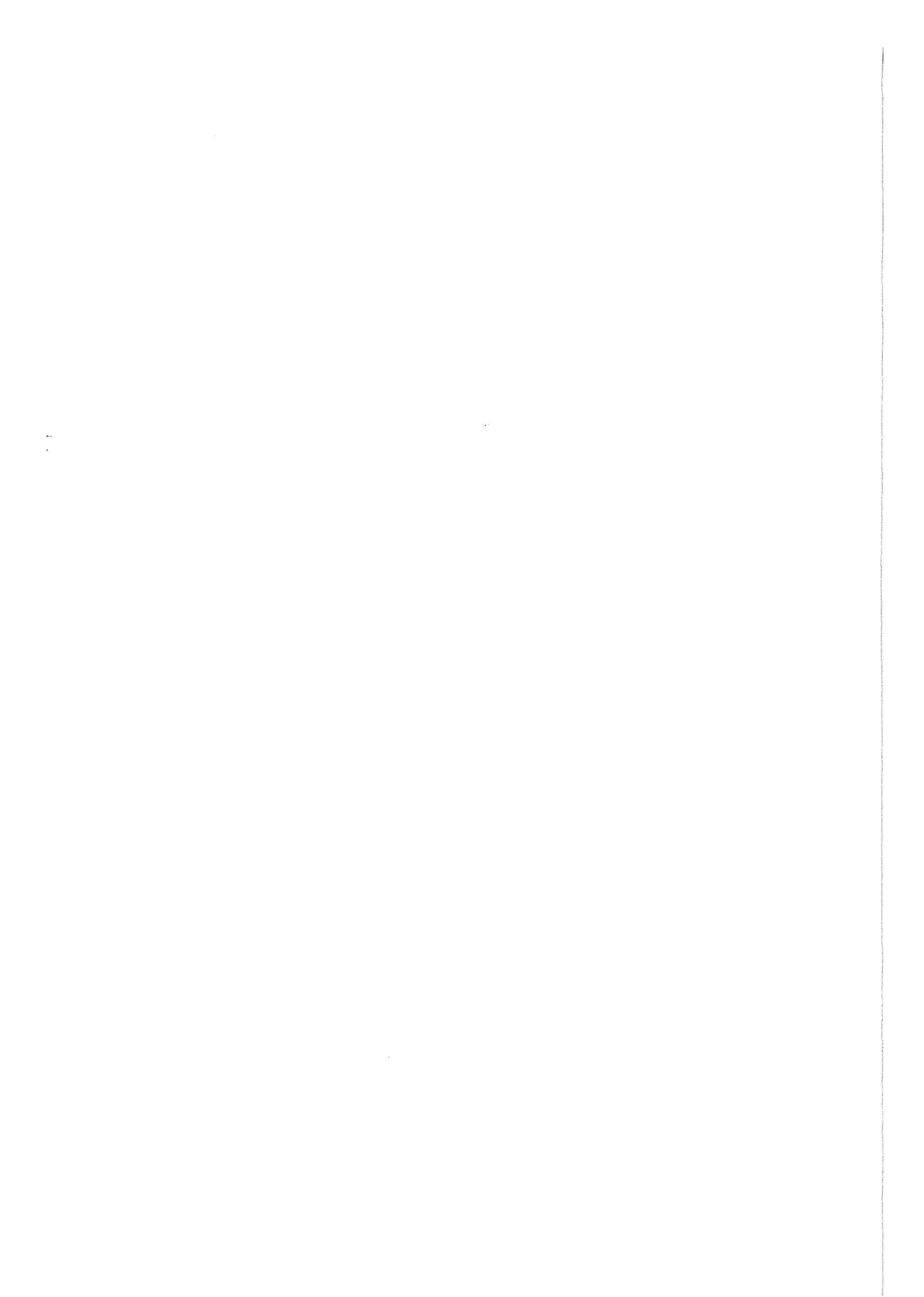


Abb. 9.10 Krümmter mit volumetrischer Heizung.



## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Für die Auslegung eines selbstgekühlten Flüssigmetallblankets ist die genaue Berechnung von MHD- Strömungen in dreidimensionalen Geometrien erforderlich. Wichtige physikalische Größen sind dabei die Geschwindigkeitsverteilung, der Druckverlust und die Temperaturverteilung im Strömungskanal.

Die Beschreibung induktionsfreier magnetohydrodynamischer Strömungen kann für große Hartmann- Zahlen durch die Aufteilung des Strömungsgebietes in einen reibungsfreien Kernbereich und in sehr dünne viskose Wandgrenzschichten erfolgen. Für große Interaktionsparameter kann die Impulsgleichung durch Vernachlässigen der Trägheitsterme linearisiert und nach Vernachlässigung von Auftriebseffekten vereinfacht werden. Die so vereinfachten allgemeinen Grundgleichungen werden durch ein numerisches Rechenverfahren in allgemeinen dreidimensionalen Geometrien gelöst. Mit einem bestehenden Rechenprogramm wurden MHD- Strömungen in expandierenden Kanälen unter Variation der Wandleitfähigkeit hinsichtlich Geschwindigkeitsverteilungen und Druckverlusten untersucht.

Im Bereich von Querschnittsänderungen kommt es, insbesondere bei elektrisch isolierten Kanälen, zu einer Verdrängung des Fluides in magnetfeldparallele Seitenschichten. Im Kernbereich der Strömung dagegen wird das Fluid stark verzögert. Mit dieser Umverteilung der Geschwindigkeiten ist ein zusätzlicher, irreversibler Druckverlust verbunden. Verglichen mit dem Druckverlust einer voll eingelaufenen MHD- Strömung nimmt sein Einfluß mit zunehmender Wandleitfähigkeit ab und verschwindet schließlich. Für Querschnittsänderungen senkrecht zum magnetischen Feld ist dieser Druckverlust wesentlich geringer als bei Expansionen, die in Magnetfeldrichtung verlaufen.

Zur Berechnung der Temperaturverteilung im Fluid wird die Energiegleichung in allgemeinen dreidimensionalen Koordinaten formuliert. Durch eine geeignete Transformation ist auch hier eine einheitliche Behandlung des konvektiv- diffusiven Wärmetransportes für unterschiedliche Geometrien möglich. Unter Vernachlässigung der diffusiven Anteile des Wärmetransportes in Hauptströmungsrichtung für große Peclet- Zahlen erfolgt die Lösung der Energiegleichung durch ein numerisches Rechenverfahren.

Nach Überprüfung dieses Rechenverfahrens anhand bekannter Lösungen für den konvektiv- diffusiven Wärmetransport in zweidimensionalen MHD- Strömungen erfolgt eine Anwendung des Programms auf charakteristische dreidimensionale Strömungsfälle mit unterschiedlichen Temperaturrandbedingungen.

Dabei zeigt sich, daß dreidimensionale Strömungseffekte die Erwärmung der Kanalwand verringern können. Dem steht jedoch die starke Erwärmung von wandnahen Bereichen in denen niedrigere Strömungsgeschwindigkeiten vorliegen gegenüber. Bei der Auslegung eines Fusionsblankets ist daher darauf zu achten, daß der Plasmawärmestrom nie direkt auf Wände trifft, an denen auch außerhalb der MHD- Grenzschichten stagnierendes Fluid vorliegt. Bei einem Energieeintrag ins Fluid durch volumetrische Heizung sollten Kernbereiche mit niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten durch eine günstige Anordnung der Geometrie vermieden werden. Querschnittsänderungen des Blanketkanals sollten stets in einer Ebene senkrecht zu magnetischen Feldlinien erfolgen.

Mit dem Abschluß dieser Arbeit steht nun ein numerisches Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem die Temperaturverteilung für blanket- relevante MHD- Strömungen in allgemeinen Kanälen berechnet werden kann. Einschränkungen in der Anwendbarkeit ergeben sich lediglich für den Fall, daß thermische Grenzschichten dünner sind, als die numerische Auflösung des Rechengebiets es erlaubt. Für solche Fälle sind jedoch analytische Grenzschichtlösungen bekannt und direkt anwendbar.

Als mögliche Erweiterung des Programms in zukünftigen Arbeiten sollte die Verwendung des vollständig rekonstruierten Geschwindigkeitsprofils in den Seitenschichten von Rechteckkanälen bei der Lösung der Energiegleichung Verwendung finden, was die Genauigkeit des Verfahrens in diesen Bereichen erheblich verbessern würde.

Temperaturverteilungen in Rückströmgebieten, aber auch in Gebieten mit extrem niedrigen Geschwindigkeiten, könnten durch die Verwendung eines iterativen (jedoch zeit- und speicherplatzintensiven) Algorithmus ermöglicht bzw. verbessert werden.

## 11 Literaturverzeichnis

Bühler, L. 1993

"Magnetohydrodynamische Strömungen flüssiger Metalle in allgemeinen dreidimensionalen Geometrien unter der Einwirkung starker, lokal variabler Magnetfelder"; Dissertation, Universität Karlsruhe (T. H.).

Bühler, L. 1993

"Convective- diffusive Transport in Laminar MHD Flows"; KfK- Report 5241.

Carslaw, H.S., Jaeger, J. C. 1959

"Conduction of heat in solids"; Oxford University Press.

Chang, C., Lundgren, S. 1961

"Duct flow in Magnetohydrodynamics"; ZAMP Vol. XII, 100-114.

Gardner, R. A. 1968

"Laminar pipe flow in a transverse magnetic field with heat transfer";  
Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 1076-1081.

HARWELL Subroutine Library 1984 Computer Science and System Division AERE

Harwell Oxfordshire.

Holroyd, R.J., Walker, J.S. 1978

"A theoretical study of the effects of wall conductivity, non- uniform magnetic fields and variable- area ducts on liquid- metal flows at high Hartmann- number"; J. Fluid Mech. 84(3), 471-495.

Holroyd, R.J., Mitchel, J.T.D. 1984

"Liquid Lithium as a coolant for tokamak reactors"; Nuclear Engineering and Design/Fusion 1, 17-38.

Hua, T.Q., Walker, J.S. 1989

"MHD flow in insulating circular ducts for fusion blankets"; Fusion Technology, Vol. 15, 699-704.

Hua, T.Q., Picologlou, B.F. 1989

"Heat transfer in a rectangular first wall coolant channels of liquid- metall- cooled Blankets"; Fusion Technology, Vol. 15, Mar. 1989.

Hunt, J.C.R. 1965

"Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts"; J. Fluid Mech. 21(4), 577-590.

Jischa, M. 1982

"Konvektiver Impuls- Wärme- und Stoffaustausch"; Vieweg 1982.

Klingbeil, E. 1966

"Tensorrechnung für Ingenieure"; Bibliographisches Institut Mannheim/ Wien/ Zürich.

Moreau, R. 1990

"Magnetohydrodynamics"; Kluwer Academic Publishers.

Müller, U. 1992

"Einführung in die Magnetohydrodynamik flüssiger Metalle"; Skriptum einer Vorlesung, SS 1992 Universität Karlsruhe.

Shercliff, J.A. 1956

"The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields"; J. Fluid Mech. 1, 644-666.

Shercliff, J.A. 1965

"A Textbook of Magnetohydrodynamics"; Pergamon Press, Oxford.

Tillack, M.S. 1990

"MHD flow in rectangular ducts. Design equations for pressure drop and flow quantity" UCLA- Report, UCLA-FNT-89-01.

Toschi, R., Chazalon, M., Engelmann, F., Nihoul, J., Reader, J., Salpietro, E. 1988

"Next european torus objectives, general requirements, and parameter choices"; Fusion Technology, Vol. 14, 19-29.

Walker, J.S. 1981

"Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls. Part I: Constant area and variable area ducts with strong uniform magnetic fields"; J. de Mécanique 20, 79-112.

Walker, J.S., Ludford, G.S.S. 1974 a)

"MHD flow in conducting circular expansions with strong transverse magnetic fields"; Int. J. Engng Sci., 1974, Vol. 12, pp. 193-204.

Walker, J.S., Ludford, G.S.S. 1974 b)

"MHD flow in insulated circular expansions with strong transverse magnetic fields"; Int. J. Engng Sci., 1974, Vol. 12, pp. 1045-1061.