

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5965

**Der Einfluß magnetischer
Felder auf eine von unten
beheizte Schicht aus
elektrisch leitender
Flüssigkeit**

U. Burr, U. Müller

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

November 1997

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5965

Der Einfluß magnetischer Felder auf eine von unten beheizte Schicht aus elektrisch leitender Flüssigkeit

U. Burr, U. Müller

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1997

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor
Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe
Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)
ISSN 0947-8620

Der Einfluß magnetischer Felder auf eine von unten beheizte Schicht aus elektrisch leitender Flüssigkeit

Zusammenfassung

Die Beschreibung von Naturkonvektionsströmungen flüssiger Metalle unter dem Einfluß äußerer Magnetfelder erfolgt anhand der Maxwell-Gleichungen zusammen mit den Grundgleichungen der Thermo- und Fluidodynamik.

Mit diesen magnetohydrodynamischen (MHD) Gleichungen wird eine lineare Stabilitätsanalyse für die in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnte Schicht durchgeführt. Es ergibt sich hierbei ein mit wachsender vertikaler Magnetfeldkomponente verzögertes Einsetzen der Konvektionsbewegung bei gleichzeitiger Verkleinerung der Konvektionsstrukturen.

Besitzt das Magnetfeld dagegen ausschließlich eine horizontale Komponente, so führt dies zu einer Ausrichtung der Konvektionswalzen in Magnetfeldrichtung, eine stabilisierende Wirkung tritt hier nicht auf.

Eine Untersuchung des zeitlichen Verhaltens der Lösung am Interferenzpunkt der primären Instabilität zeigt, daß im für praktische Anwendungen relevanten Parameterbereich die thermische Konvektion als stationäre Bewegung einsetzt. Die Rückwirkung der induzierten Magnetfelder auf die Strömung kann daher vernachlässigt werden, so daß weiterführende Betrachtungen anhand der induktionsfreien MHD-Gleichungen erfolgen können.

Ist die Fluidschicht dagegen bei horizontalem Feld in Magnetfeldrichtung begrenzt, so ergeben sich an den magnetfeldsenkrechten Hartmannwänden zusätzliche Rückflußmöglichkeiten für die im Strömungskern induzierten, elektrischen Ströme.

Unter Annahme einer quasi-zweidimensionalen Strömung im Strömungskern kann eine analytische Behandlung der Gleichungen in Magnetfeldrichtung erfolgen. Das Problem ist dann in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld formulierbar.

Aus der linearen Stabilitätsanalyse ergibt sich nun ebenfalls eine stabilisierende Wirkung des horizontalen Magnetfeldes auf das Einsetzen der Konvektion. Anders als für das vertikale Magnetfeld bleibt die Größe der Konvektionsstrukturen hierbei nahezu unverändert.

Die Erfüllung der Bilanzgleichungen in einer vertikalen Ebene ist auch für den Fall eines vertikalen Magnetfeldes möglich. Das Problem der Rayleigh-Bénard Konvektion kann also anhand zweidimensionaler Gleichungen sowohl für ein vertikales als auch für ein horizontales Magnetfeld untersucht werden.

Eine numerische Lösung der dann vorliegenden Gleichungen gewährt Einblick in die wesentlichen physikalischen Phänomene wie die Reduktion des Wärmetransports, die Beeinflussung der Konvektionsstrukturen sowie das zeitliche Verhalten der Lösung.

Die hierfür durchgeführten Rechnungen liegen im Parameterbereich eines geplanten Experimentes, so daß die Ergebnisse miteinander verglichen werden können. Die sich derzeit im Bau befindliche Versuchseinrichtung wird vorgestellt.

The influence of magnetic fields on a layer of electrically conducting fluid heated from below

Abstract

Natural convection of liquid metals under the influence of an external magnetic field are described by the Maxwell-equations together with the basic equations of thermo and fluid dynamics.

Using these magnetohydrodynamic (MHD) equations, a linear stability analysis is performed for an infinite layer. It turns out, that the onset of convection is shifted and the convective structures become smaller with growing vertical component of the magnetic field.

If the magnetic field has only a horizontal component, it does not change the range of stability but leads to an alignment of the convective rolls with the direction of the magnetic field.

From the investigation of the temporal behaviour of the solution at the point of marginal stability, it can be shown that in the range of practical application the onset of instability occurs as a steady motion. The influence of the induced magnetic fields on the fluid motion may be neglected and further studies can be carried out using the inductionless MHD-equations.

If the layer of fluid is limited by two walls perpendicular to a purely horizontal magnetic field, an additional path appears for the electric currents induced in the core.

Assuming two-dimensional (2D) flow in the core region an analytical solution of the equation in the direction of the magnetic field allows a 2D-formulation of the problem in a vertical plane perpendicular to the magnetic field.

From the linear stability analysis of these 2D-equations one finds a stabilizing effect of the magnetic field on the onset of convection. In contrary to the vertical magnetic field, the size of the convective structures remains nearly the same.

A 2D-formulation of the basic equations is also possible for vertical magnetic fields. Thus, Rayleigh-Bénard convection under the influence of magnetic fields can be studied by 2D equations for both, vertical and for horizontal magnetic field.

A numerical solution gives an overview of the major physical effects like the reduction of heat transport and the spatial and temporal behaviour of the solution.

The calculations have been carried out in the range of parameters of a planned experiment so that the results may be compared. A description of the test section being in production is given.

Symbolverzeichnis.....	1
1. Einleitung.....	5
1.1 Phänomenologie der Rayleigh-Bénard Konvektion.....	6
1.2 Der Einfluß magnetischer Felder.....	6
2. Physikalische Grundlagen.....	8
2.1 Hydrodynamische Gleichungen.....	8
2.2 Elektrodynamische Gleichungen.....	9
2.3 Das Ohmsche Gesetz.....	9
2.4 Vereinfachungen.....	9
2.5 Skalierung und Kennzahlen.....	10
2.6 Alternative Formulierung.....	11
2.7 Rand- und Übergangsbedingungen.....	12
2.7.1 Randbedingungen an die Geschwindigkeit.....	12
2.7.2 Randbedingungen an das Temperaturfeld.....	12
2.7.3 Elektrische Randbedingungen.....	13
3. Lineare Stabilitätsanalyse.....	15
3.1 Lineare Stabilitätsanalyse der induktionsbehafteten Gleichungen.....	15
3.1.1 Der stationäre Grundzustand.....	15
3.1.2 Die Störungsdifferentialgleichungen.....	16
3.1.3 Randbedingungen.....	16
3.1.4 Alternative Formulierung der Stördifferentialgleichungen.....	17
3.1.5 Formulierung als Stabilitäts-Eigenwertproblem.....	18
3.1.6 Lösung für stationäre Konvektion.....	19
3.1.6.1 Lösung für zwei freie, isotherme Berandungen.....	22
3.1.6.2 Lösung für zwei feste, isotherme Berandungen.....	22
3.1.6.2 Asymptotische Lösung.....	23
3.1.7 Lösung für oszillatorische Konvektion.....	24
3.2. Induktionsfreie Approximation.....	25
3.2.1. Grundgleichungen.....	25
3.2.2 Randbedingungen.....	25
3.2.3 Lineare Stabilitätsanalyse der induktionsfreien Gleichungen.....	27
4. Literatur.....	30
4.1 Theoretische Arbeiten.....	30
4.1.1 Bénard-Konvektion ohne Magnetfeld.....	30
4.1.1 Bénard-Konvektion mit Magnetfeld.....	38
4.2 Experimentelle Arbeiten.....	42
4.2.1 Experimentelle Arbeiten ohne Magnetfeld.....	42
4.2.2 Experimentelle Arbeiten mit Magnetfeld.....	43
5. Zweidimensionale Betrachtungsweisen.....	46
5.1. Zweidimensionale Approximation für starke Magnetfelder.....	46
5.1.1 Der Einfluß von Rändern senkrecht zum Magnetfeld.....	47
5.1.2 Der Einfluß von Rändern parallel zum Magnetfeld.....	48
5.1.3 Formulierung der zweidimensionalen Gleichungen.....	49
5.2 Die Möglichkeit einer zweidimensionalen Approximation für ein parallel zur Strömungsebene orientiertes Magnetfeld.....	51
5.3 Lineare Stabilitätsanalyse für starke horizontale Magnetfelder.....	53
5.3.1 Lösung für zwei freie Ränder.....	55
5.3.1 Lösung für zwei feste Ränder.....	55

5.4 Numerische Berechnungen.....	60
5.4.1 Der rein hydrodynamische Fall.....	63
5.4.2 Der Einfluß eines horizontalen Magnetfeldes.....	71
5.4.3 Der Einfluß eines vertikalen Magnetfeldes.....	76
6. Experimentelle Arbeiten	83
6.1 Auslegung und Bau der Teststrecke.....	83
6.2 Instrumentierung und Meßprogramm.....	86
6.3 Bezug der Rechenergebnisse auf die Dimensionen der Versuchseinrichtung	88
Literaturverzeichnis.....	91
Anhang	95

Symbolverzeichnis

Skalare Größen:

A	-	Gewichtungsfaktoren
a	-	Wellenzahl
B	-	Lösungsansatz in vertikaler Richtung, Komponente der magn. Induktion
b	-	halbe Breite in Magnetfeldrichtung
c	-	Lichtgeschwindigkeit
c_p	-	spezifische Wärmekapazität
D	-	Quellterm
e	-	Abstand der Termoelemente von der Fluid-Wand-Grenzfläche
f	-	Frequenz, Funktion
g	-	Betrag des Schwerevektors
$g1, g2$	-	Komponenten des Schwerevektors
f	-	Funktion
h	-	Schichthöhe, Abmessung
$i1, i2$	-	diskrete Koordinaten
p	-	Druck
q	-	Betrag des Wärmestroms
R	-	elektrischer Widerstand
s	-	Wandstärke
t	-	Zeit
u, v, w	-	Geschwindigkeitskomponenten
$u1, u2$	-	Geschwindigkeitskomponenten
x, y, z	-	kartesische Koordinaten
$x1, x2$	-	kartesische Koordinaten (Numerik)
T	-	Temperatur
α	-	Volumenausdehnungskoeffizient, Wärmeübergangskoeffizient
δ	-	Grenzschichtdicke
ϵ	-	Dielektrizitätskonstante, Gewichtungsfaktor der Störgrößen
ϕ	-	elektrisches Potential
γ	-	Variable
κ	-	Temperaturleitfähigkeit
λ	-	Wärmeleitfähigkeit, Eigenwert, Wellenlänge
μ	-	magnetische Permeabilität
ν	-	kinematische Viskosität
Θ	-	temperaturabhängige Stoffgröße
ρ	-	Dichte
σ	-	elektrische Leitfähigkeit
ω	-	komplexe Konstante, Wirbelstärke in Magnetfeldrichtung
ψ	-	Stromfunktion
ζ	-	wandnormale Koordinate

Vektoren (fett gedruckt)

<i>A, C, D</i>	-	Lösungsansätze in vertikaler Richtung
<i>e</i>	-	kartesischer Basisvektor
<i>g</i>	-	Schwerevektor
<i>j</i>	-	Stromdichtevektor
<i>n</i>	-	normaler Einheitsvektor
<i>q</i>	-	Wärmestrom
<i>t</i>	-	tangentialer Einheitsvektor
<i>U</i>	-	Lösungsvektor
<i>v</i>	-	Geschwindigkeitsvektor
<i>x</i>	-	Ortsvektor
<i>B</i>	-	magnetische Induktion
<i>E</i>	-	elektrisches Feld
<i>F</i>	-	Kraft
Ω	-	Wirbelstärke
<i>0</i>	-	Nullvektor

Indizes:

<i>c</i>	-	im Core oder Strömungskern
<i>Cu</i>	-	Kupfer
<i>el</i>	-	elektrisch
<i>F</i>	-	in der Flüssigkeit
<i>Ha</i>	-	Hartmannschicht
<i>i</i>	-	imaginär
<i>i1, i2</i>	-	diskrete Koordinaten
<i>K</i>	-	Kühlmedium
<i>krit</i>	-	neutralstabiler Zustand
<i>L</i>	-	Lorentz
<i>m</i>	-	Referenzwert, Laufvariable
<i>n</i>	-	normal, Laufvariable
<i>max</i>	-	maximal
<i>min</i>	-	minimal
<i>o</i>	-	oben
<i>r</i>	-	real
<i>S</i>	-	Seitenschicht
<i>t</i>	-	tangential
<i>u</i>	-	unten
<i>verl</i>	-	Verlust
<i>W</i>	-	an der Wand
<i>x1, x2</i>	-	kartesische Koordinaten (Numerik)
<i>x,y,z</i>	-	kartesische Koordinatenrichtung
δ	-	in der Grenzschicht
<i>0</i>	-	Bezugswerte, Grundzustand
<i>2D</i>	-	zweidimensional
<i>3D</i>	-	dreidimensional
*	-	dimensionslose Größe
∞	-	unendlich
\wedge	-	Störgrößen
$\bar{}$	-	arithmetisches Mittel

Kennzahlen:

Bi	-	Biot-Zahl
c	-	Wandleitparameter
Ha	-	Hartmann-Zahl
Nu	-	Nusselt-Zahl
Pr	-	Prandtl-Zahl
Pe	-	Peclet-Zahl
Q	-	Chandrasekhar-Zahl
R_m	-	magnetische Reynolds-Zahl
τ	-	charakteristische Zeitskala
l/τ	-	magnetische Dämpfung

Operatoren:

∇	-	Gradient
$\nabla \cdot$	-	Divergenz
∇^2	-	Laplace-Operator
$\nabla \times$	-	Rotation
$\frac{\partial}{\partial_i}$	-	partielle Ableitung in Richtung der i -ten Koordinate

1. Einleitung

Flüssige Metalle bieten aufgrund ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit und geringen Zähigkeit ideale Voraussetzungen für den konvektiv- diffusiven Wärmetransport an thermisch hochbelasteten technischen Bauteilen.

Ist die den konvektiven Wärmetransport bestimmende Geschwindigkeit die Folge eines von außen angelegten Druckgradienten so, spricht man von Zwangskonvektion. Bestimmen dagegen schwerkraftbedingte Auf- und Abtriebskräfte das Strömungsbild, so wird dies als Naturkonvektion oder auch freie Konvektion bezeichnet.

Temperatur- oder konzentrationsabhängige Stoffwerte bedingen bei den mit einem Wärmetransport zwingend verbundenen Temperaturgradienten im allgemeinen auch Dichteunterschiede, welche die Ursache für Auf- und Abtriebskräfte im Fluid bilden. Dabei kann es sich um die reine Wärmeausdehnung der Flüssigkeit handeln, aber auch Konzentrationsunterschiede eines Fluidbestandteils beeinflussen bei Mehrstoffsystemen die Dichte.

Besitzt das Fluid eine hohe elektrische Leitfähigkeit (z.B. flüssige Metalle), so können magnetische Felder das Strömungsbild beeinflussen. Man spricht dann von Magneto hydrodynamischen (MHD-) Strömungen. Das magnetische Feld setzt sich hierbei aus dem von außen angelegten Feld und dem durch die Strömung induzierten Magnetfeld zusammen. Im Extremfall kann es sogar zu einem selbstinduzierten Magnetfeld kommen.

Thermisch getriebene Naturkonvektionsströmungen von Fluiden hoher elektrischer Leitfähigkeit finden sich sowohl in der Natur als auch im technischen Bereich. So bildet die Konvektion im flüssigen Kern der Erde die Ursache für den Kontinentaldrift und gilt zudem als die Ursache für das Erdmagnetfeld (Lugt 1973, Busse und Müller 1994). In der Astrophysik führt man die Granulation der Sonnenoberfläche auf großräumige Konvektionsstrukturen zurück (Kipphan 1990), welche durch die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas der Sonne ebenfalls durch selbstinduzierte Magnetische Felder beeinflusst sind.

Im technischen Bereich findet man u.a. Naturkonvektionsströmungen flüssiger Metalle im Bereich der Fusionstechnik. Das Fusionsplasma befindet sich in einem torusförmigen Gefäß, dessen Wände vom sogenannten Blanket gebildet werden, welches innerhalb der das Plasma haltenden Magnetspulen liegt.

Das Blanket hat grundsätzlich zwei Aufgaben zu erfüllen. Zum einen muß die im Plasma erzeugte thermische Energie abgeführt werden, zum anderen muß das zum Betrieb notwendige Tritium erbrütet werden. Hierzu sind Konzepte denkbar, bei denen die Wärme durch einen Wasserkreislauf mit hohen Strömungsgeschwindigkeiten abgeführt wird, die im Plasma erzeugte Nuklearstrahlung dagegen in einem quasi ruhenden Flüssigmetall (z.B. PbLi) absorbiert wird. Durch Temperaturgradienten im Blanket können sich Naturkonvektionsströmungen einstellen, die den Wärmeübergang im Blanket mitbeeinflussen.

Ein weiteres Anwendungsgebiet stellt die gezielte Beeinflussung von Konvektionsströmungen z.B. in der Gießereitechnik oder bei der Kristallzüchtung dar. Magnetische Felder können der Strömung eine Vorzugsrichtung aufprägen, Instabilitäten verhindern oder die Konvektion teilweise oder sogar ganz unterdrücken.

Die nachfolgende Arbeit beschäftigt sich mit der sogenannten Rayleigh-Bénard Konvektion, einer Naturkonvektionsströmung, bei welcher der treibende Temperaturgradient in Richtung der Schwerkraft wirkt.

1.1 Phänomenologie der Rayleigh-Bénard Konvektion

Wir betrachten hierzu eine (theoretisch) unendlich ausgedehnte, ebene Fluidschicht, welche durch zwei horizontale Wände auf die Höhe h begrenzt ist. Durch Heizen der Unterseite sowie durch Kühlung der Oberseite wird ein parallel zum Schwerevektor g gerichteter Temperaturgradient über die Schicht aufrechterhalten. Aufgrund der Volumenausdehnung mit zunehmender Temperatur befindet sich an der Unterseite der Schicht leichteres Fluid, an der Oberseite dagegen schwereres. Übersteigt der Temperaturgradient und damit die Dichteunterschiede ein bestimmtes charakteristisches Maß, so setzt eine stationäre Konvektionsbewegung in Form zweidimensionaler horizontaler Walzen ein (vgl. Abb. 1.1).

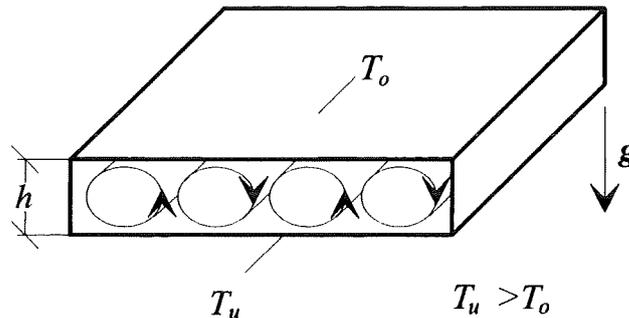


Abb. 1.1: Prinzipskizze Rayleigh-Bénard Konvektion

Durch weitere Erhöhung der Temperaturdifferenz zwischen den Wänden treten wiederum oberhalb eines hierfür kritischen Punktes dreidimensionale periodische Strömungsmuster auf, welche bei weiterer Erhöhung der Temperaturunterschiede im Fluid in eine zeitabhängige Bewegung übergehen. Dieser Punkt markiert den Übergang von laminarer zu turbulenter Konvektion.

Ist die Struktur der Strömung beim Einsetzen der Konvektion aus dem Wärmeleitungszustand heraus unabhängig von den physikalischen Eigenschaften des betrachteten Fluids, so ergibt sich doch für die Übergänge zu den zeitabhängigen Strömungsformen eine starke Abhängigkeit von diesen.

Der durch die ruhende Fluidschicht transportierte Wärmestrom entspricht dem Wärmeleitungszustand. Mit den sich einstellenden Geschwindigkeiten ist eine Erhöhung des zur Aufrechterhaltung der Temperaturdifferenz erforderlichen Wärmestromes durch die Schicht verbunden. Warmes Fluid steigt auf zur kalten Oberseite, kaltes Fluid dagegen sinkt zur warmen Unterseite hin ab. Der Anteil dieses konvektiven Wärmetransportes an der insgesamt durch die Schicht transportierten Wärmemenge ist ebenfalls von den Stoffgrößen abhängig, so daß auch hierzu keine generellen Aussagen getroffen werden können.

1.2 Der Einfluß magnetischer Felder

Neben dem die Strömung bestimmenden Gleichgewicht zwischen Impuls-, Druck-, Reibungs-, und Auftriebskräften bei rein hydrodynamischen Strömungen wirken bei magneto-hydrodynamischen Strömungen zusätzlich elektrische Kräfte auf das Fluid ein.

Zur Veranschaulichung der hierbei wirksamen Mechanismen betrachten wir in Abbildung (1.2) ein elektrisch leitendes, kugelförmiges Flüssigkeitselement, welches sich z.B. angetrieben durch seine geringere Dichte mit der konstanten Geschwindigkeit v durch eine ebenfalls elektrisch leitende Umgebung nach oben bewegt.

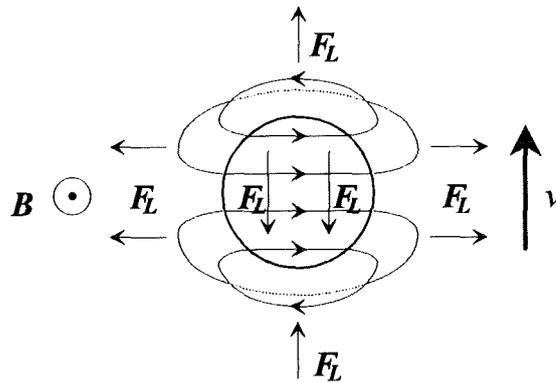


Abb. 1.2: Bewegter Fluidballen in ruhender, elektrisch leitender Umgebung

Im betrachteten Gebiet ist ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Induktion B senkrecht zur Strömungsrichtung angelegt.

Durch die Bewegung des elektrisch leitenden Fluids im Magnetfeld wird das elektrische Feld $E = v \times B$ im Fluid induziert. Dieses steht senkrecht zur Strömungsrichtung sowie senkrecht zum angelegten Magnetfeld. Seine Stärke ist dabei direkt proportional der lokalen Geschwindigkeitskomponente normal zum Magnetfeld.

Durch das elektrische Feld werden Ströme hervorgerufen, deren Richtung sich nach dem Gradient des induzierten elektrischen Feldes richtet. Die Ströme schließen sich somit in der ruhenden Umgebung des Fluidteilchens, so daß geschlossene Stromkreise entstehen, welche zwei Effekte zur Folge haben.

- I. Entsprechend der Richtung und der Stärke der Ströme wird ein Magnetfeld $\nabla \times B = j$ induziert, welches dem ursprünglich angelegten überlagert ist.
- II. Die Stromdichte j bewirkt in Wechselwirkung mit dem Magnetfeld die Lorentz-Kraft $F_L = j \times B$, welche senkrecht zur Stromrichtung und senkrecht zum anliegenden Magnetfeld gerichtet ist.

In diesem Beispiel bewirkt Effekt I, vereinfacht ausgedrückt, ein Mitreißen der magnetischen Feldlinien in Richtung der Strömung. Die durch Effekt II hervorgerufenen Lorentz-Kräfte dagegen wirken direkt auf die Kräftebilanz im Fluid ein und beeinflussen so das Strömungsbild.

Da die Stromkreise geschlossen sind, wird deutlich, daß die aus ihnen resultierenden Kräfte unterschiedliche Richtungen besitzen. Innerhalb des Fluidteilchens ist die Lorentz-Kraft der Strömungsrichtung entgegengerichtet. Sie verzögert dadurch die Auftriebsgeschwindigkeit. In der ruhenden Umgebung, in welcher die Normalkomponente des Magnetfeldes nicht verschwindet, zeigt die Lorentz-Kraft dagegen in Strömungsrichtung und beschleunigt damit das umgebende Fluid. Die Bewegungsenergie des Fluidballens zerfließt in das umgebende Fluid.

Da es sich bei realen Stoffen stets um Fluide mit endlicher elektrischer Leitfähigkeit handelt, bleibt die anfänglich im Fluid vorhandene kinetische bzw. die umgesetzte potentielle Energie nicht erhalten. Joulsche Verluste führen zu einer Dissipation der ursprünglich vorhandenen kinetischen Energie, zusätzlich zu den von der Hydrodynamik her bekannten Verlusten durch viskose Reibungskräfte.

2. Physikalische Grundlagen

Die Beschreibung der Naturkonvektion in elektrisch leitenden Fluiden unter der Einwirkung magnetischer Felder erfolgt durch die hydrodynamischen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Diese enthalten Terme zur Erfassung der elektromagnetischen Wechselwirkungen im Fluid, welche aus den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen hervorgehen. Durch diese Kopplung ergibt sich die Verbindung der Fluidmechanik mit der klassischen Elektrodynamik.

2.1 Hydrodynamische Gleichungen

Zur Formulierung der Grundgleichungen greifen wir auf die sogenannte Boussinesq Approximation zurück. Unter Annahme kleiner Dichteänderungen kann die Temperaturabhängigkeit der Massendichte ρ überall in den Bilanzgleichungen, mit Ausnahme des Auftriebsterms, vernachlässigt werden. Zudem wird eine lineare Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur T vorausgesetzt:

$$\rho(T) = \rho_m (1 - \alpha \cdot (T - T_m)). \quad (2.1)$$

α kennzeichnet den Volumenausdehnungskoeffizient, der Index m den Referenzpunkt, um welchen linearisiert wird.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich dann für ein inkompressibles Medium in folgender Form als Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

Die Impulserhaltung wird durch die Navier- Stokes- Gleichung für homogene Newtonsche Fluide mit konstanter kinematischer Viskosität ν beschrieben. Diese ist zur Berücksichtigung der elektrodynamischen Wechselwirkungen durch zusätzliche Terme erweitert.

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho_m \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho(T) \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z + \rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.3)$$

Die bereits in Abschnitt (1.1) beschriebene, elektromagnetische Wechselwirkung setzt sich zusammen aus den durch die elektrostatische Ladungsdichte ρ_{el} in dem elektrischen Feld \mathbf{E} hervorgerufenen Coulomb-Kräften und der durch die elektrische Stromdichte \mathbf{j} in dem Magnetfeld der Induktion \mathbf{B} bestimmten Lorentz-Kraft. Zusätzlich zu diesen elektrodynamischen Kräften wird der Verlauf des Druckes p durch Trägheits-, Reibungs- und Auftriebskräfte bestimmt.

Die Temperaturverteilung im Fluid kann durch die Energiegleichung für konvektiv-diffusiven Wärmetransport in einem inkompressiblen Medium bestimmt werden:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right] = \lambda \nabla^2 T + D. \quad (2.4)$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die Bilanz der konvektiven Anteile des Wärmetransportes mit der konstanten spezifischen Wärmekapazität c_p . Auf der rechten Seite der Gleichung stehen zum einen die Bilanz der diffusiven Wärmeströme, die mit der ebenfalls konstanten Wärmeleitfähigkeit λ gebildet werden. Zum anderen die unter D zusammengefaßten Quellterme, welche den Wärmeeintrag in das Fluid durch die dissipativen Prozesse Joulesche Heizung und viskose Reibung erfassen. Diese werden in den nachfolgenden Betrachtungen vernachlässigt.

2.2 Elektrodynamische Gleichungen

Die vollständige Beschreibung der elektrodynamischen Phänomene erfolgt durch die Maxwell'schen Gleichungen. Für konstante Werte der magnetischen Permeabilität μ sowie der Dielektrizitätskonstanten ε lauten diese:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left[\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right], \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

Hierbei beschreibt das Faraday-Maxwellsche Induktionsgesetz (Gl. 2.5) den Einfluß von zeitlichen Änderungen des Magnetfeldes auf den Verlauf des elektrischen Feldes. Die sich entsprechend der Divergenz des elektrischen Feldes einstellende Ladungsdichte ρ_{el} ergibt sich nach Gleichung (2.6). Aus dem Ampère-Maxwellschen Gesetz (Gl. 2.7) und aus Gleichung (2.8) geht das durch elektrische Ströme sowie durch zeitliche Änderungen des elektrischen Feldes induzierte divergenzfreie Magnetfeld hervor.

2.3 Das Ohmsche Gesetz

Da in elektrisch leitenden Medien die Ladungen frei verschiebbar sind, besteht ein definierter Zusammenhang zwischen der Stromdichte \mathbf{j} und dem elektrischen Feld \mathbf{E} . Für endliche Werte der elektrischen Leitfähigkeit σ des Mediums und für teilchenfeste, also mitbewegte Koordinaten, ist die Stromdichte direkt proportional dem elektrischen Feld \mathbf{E}^* .

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^*. \quad (2.9)$$

In diesem als Ohmsches Gesetz bekannten Zusammenhang ist das von einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Leiter verspürte elektrische Feld \mathbf{E}^* durch einen Wechsel des Bezugssystems (siehe Shercliff, S.14) aus den ortsfesten Größen \mathbf{E} und \mathbf{B} zu bilden.

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.10)$$

2.4 Vereinfachungen

Da als Fluide nur Flüssigmetalle mit hoher elektrischer Leitfähigkeit betrachtet werden, kommt es zu einem raschen Ausgleich der induzierten elektrostatischen Ladungen. Ihre Kraftwirkung im elektrischen Feld kann daher wie Chang und Lundgren 1961 gezeigt haben in der Impulsbilanz Gl.(2.3) vernachlässigt werden. Somit entfällt die Berechnung der elektrischen Ladungsdichte nach Gl.(2.6).

Nach Shercliff (1965) kann der Verschiebungsstrom $\varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ vernachlässigt werden. Der dadurch entstehende Fehler ist von der Größenordnung $(v/c)^2$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit darstellt.

2.5 Skalierung und Kennzahlen

Um zu einer dimensionslosen Darstellung des Gleichungssystems zu gelangen, werden die auftretenden physikalischen Größen mit geeigneten Bezugsgrößen skaliert. Da im betrachteten Problem keine ausgezeichnete Geschwindigkeit v_0 und keine charakteristische Zeit T_0 auftreten, werden diese aus der Temperaturleitfähigkeit $\kappa = \lambda / (\rho c_p)$ sowie der Schichthöhe h zu $v_0 = \kappa / h$ und $T_0 = h^2 / \kappa$ gebildet. Für die elektrische Stromdichte \mathbf{j} und das elektrische Feld \mathbf{E} erhalten wir so die Bezugswerte $\sigma B_0 \kappa / h$ und $\kappa B_0 / h$. Die Dimensionen x, y, z werden auf die Schichthöhe h bezogen, die magnetische Induktion \mathbf{B} auf den Betrag des von außen angelegten Feldes B_0 . Zur Bildung des dimensionslosen Druckes p^* verwenden wir den Ausdruck $p^* = h^2 (p + \rho_m g h) / (\rho_m \nu \kappa)$.

Die Skalierung der Temperatur erfolgt durch die dimensionslose Temperatur $T^* = (T - T_0) / \Delta T$. T_0 ist ein beliebiger Referenzwert, ΔT eine charakteristische Temperaturdifferenz auf deren Definition noch im Zusammenhang mit den Randbedingungen eingegangen wird.

Führt man Gleichung (2.1) in die Impulsbilanz ein und berücksichtigt die getroffenen Vereinfachungen, so erhält man das folgende, dimensionslose Gleichungssystem. Da dabei nur noch dimensionslose Größen auftreten, ist eine Verwechslung ausgeschlossen, und es können dieselben Bezeichnungen wie im dimensionsbehafteten Fall verwendet werden.

Hydrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p^* + \nabla^2 \mathbf{v} + Ra T \mathbf{e}_z + Q(\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \quad (2.12)$$

Energiegleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (2.13)$$

Elektrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = R_m \mathbf{j}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.16)$$

Ohmsches Gesetz:

$$\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

In diesen Gleichungen sind charakteristische Kennzahlen eingeführt, welche die verschiedenen physikalischen Effekte gegeneinander gewichten. Die

Rayleigh-Zahl
$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\kappa \nu} \quad (2.18)$$

beschreibt das Verhältnis von Auftriebskräften zu Reibungskräften. Die

Chandrasekhar-Zahl
$$Q = \frac{\sigma B^2 h^2}{\rho \nu} \quad (2.19)$$

entspricht dem Verhältnis von elektrodynamischen Kräften zu Reibungskräften. Sie entspricht dem Quadrat der bekannteren Hartmann-Zahl Ha .

Als Faktor vor den Impulskräften tritt bei der hier verwendeten Skalierung der Kehrwert der

Prandtl-Zahl
$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.20)$$

auf. Diese stellt das Verhältnis der Leistung des molekularen Impulstransports zur molekularen Wärmetransportleistung dar und bestimmt hier maßgeblich das zeitliche Verhalten der Strömung.

Als Parameter der elektrodynamischen Gleichungen erhalten wir die

magnetische Reynolds-Zahl
$$R_m = \mu \sigma \kappa. \quad (2.21)$$

Diese ist ein Maß für die Stärke des induzierten magnetischen Feldes, gemessen an der Stärke des von außen angelegten Feldes. Ebenso wie die Prandtl-Zahl ergibt sich die magnetische Reynolds-Zahl bei der hier verwendeten Skalierung als eine Kombination von reinen Stoffgrößen. Ihr Wert kann daher unabhängig vom betrachteten Problem angegeben werden.

Für gängige Flüssigmetalle wie z.B. Quecksilber oder Natrium ergeben sich für diese beiden Kennzahlen Werte der Größenordnung:

$$Pr \approx 0.005 - 0.025, R_m \approx 10^{-7}. \quad (2.22)$$

2.6 Alternative Formulierung

Mit Gleichung (2.15) kann der Term $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ in der Impulsgleichung Gl.(2.12) durch einen lediglich von der magnetischen Induktion \mathbf{B} abhängigen ersetzt werden.

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p^* + \nabla^2 \mathbf{v} + RaT \mathbf{e}_z + \frac{Q}{R_m} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right]. \quad (2.23)$$

Aus dem Ohmschen Gesetz Gl.(2.17) kann mit den Gleichungen (2.14, 2.15, 2.16) eine Transportgleichung für das Magnetfeld formuliert werden:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.24)$$

Die zeitliche Änderung der magnetischen Induktion wird bestimmt durch den mit dem Kehrwert der Magnetischen Reynolds-Zahl gewichteten Diffusionsterm, dem konvektiven Term sowie einem Quellterm.

Zusammen mit der Energiegleichung Gl. (2.13) bilden diese beiden Gleichungen ein System von drei partiellen Differentialgleichungen, welches das Problem der Magnetokonvektion in Abhängigkeit der Randbedingungen vollständig beschreibt.

2.7 Rand- und Übergangsbedingungen

Eine eindeutige Lösung des vorgestellten Gleichungssystems (Gl. 2.23, 2.24 und 2.13) ist erst durch die Vorgabe des aktuellen Systemzustandes an den Grenzen des betrachteten Rechengebietes gegeben. Im folgenden Fall der MHD- Strömungen kommen zu den hydrodynamischen und thermischen Randbedingungen noch die elektrischen Randbedingungen hinzu.

Zur Formulierung der einzelnen Bedingungen werden im weiteren die Indizes n für *normal* zur Wand sowie t für *tangential* zur Wand verwendet.

2.7.1 Randbedingungen an die Geschwindigkeit

Für die hier betrachteten Naturkonvektionsströmungen ist der Fluidbereich durch zeitlich und räumlich konstante, undurchdringbare Grenzflächen beschränkt. Die wandnormale Komponente der Geschwindigkeit v_n verschwindet daher an jeder Grenzfläche.

$$v_n|_W = 0. \quad (2.25)$$

Liegt eine freie Grenzfläche vor, so bedingt dies das Verschwinden der Schubspannung an der Wand.

$$\left. \frac{\partial v_t}{\partial n} \right|_W = 0. \quad (2.26)$$

n ist der Normaleneinheitsvektor an der Wand.

Ist dagegen der Fluidbereich durch eine feste Wand begrenzt, so fordert dies bei einer viskosen Strömung die Erfüllung der Haftbedingung

$$v_W = 0 \quad (2.27)$$

an der Fluid-Wand-Grenzfläche.

2.7.2 Randbedingungen an das Temperaturfeld

An den Berandungen des Fluidbereiches können Grundsätzlich zwei verschiedene Bedingungen an das Temperaturfeld gestellt werden. Die eine Randbedingung besteht darin, die Temperatur an der Fluid-Wandgrenzfläche explizit vorzugeben. Die Wärmestromdichte q_W an der Fluid-Wand-Grenzfläche wird dann von den Transporteigenschaften der Strömung bestimmt. Bei der anderen wird der wandnormale Wärmefluß q_W vorgegeben und die Wandtemperatur stellt sich ein. Da die konvektiven Anteile des Wärmetransports an der Wand verschwinden, ergibt sich der Temperaturgradient normal zur Wand aus dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz zu

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_W = -q_W \quad (2.28)$$

als Randbedingung für das Temperaturfeld.

Abhängig vom jeweils betrachteten Randproblem werden verschiedene charakteristische Temperaturdifferenzen ΔT zur Darstellung der dimensionslosen Temperatur in Abschnitt (2.5) verwendet. Bei expliziter Vorgabe der Wandtemperaturen erweist sich eine Bildung aus der maximalen und der minimalen im Fluidbereich auftretenden Temperaturen

$$\Delta T = T_{max} - T_{min} \quad (2.29)$$

als zweckmäßig.

Erfolgt der Energieeintrag in das Fluid dagegen durch einen Wandwärmestrom, so verwendet man eine charakteristische Temperaturdifferenz, welche mit dem maximalen Wandwärmestrom q_{max} gebildet wird:

$$\Delta T = \frac{q_{max} h}{\lambda}. \quad (2.30)$$

2.7.3 Elektrische Randbedingungen

Bei hydrodynamischen Strömungen endet das Rechengebiet unmittelbar an der Kanalwand. Für MHD-Strömungen in elektrisch leitenden Kanälen können die induzierten Ströme in die Kanalwand eintreten und sich im Wandmaterial schließen. Die Ladungserhaltung fordert dann an der Fluid-Wand-Grenzfläche die Stetigkeit der Normalkomponente der Strömdichte.

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_F = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_W. \quad (2.31)$$

Das Wandmaterial bestimmt dann die Stromdichten im Fluid mit und hat somit direkten Einfluß auf die Strömung.

Das zu lösende Gleichungssystem (Gl. 2.23, 2.24 und 2.13) enthält als einzige elektrische Größe die Magnetische Induktion \mathbf{B} . Daher genügt es zur vollständigen Lösung Bedingungen für das Magnetfeld an der Fluid-Wand-Grenzfläche zu formulieren. Randbedingungen an die Stromdichte \mathbf{j} sind nicht erforderlich, da diese durch Gleichung (2.15) eindeutig mit der magnetischen Induktion verknüpft ist. Dennoch kann es für Strömungen, bei denen das induzierte Feld eine untergeordnete Rolle spielt, vorteilhaft sein, die elektrischen Randbedingungen anhand der Stromdichte zu formulieren.

Es ist zweckmäßig, bei der Formulierung der Randbedingungen in zunächst zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist das Wandmaterial ein perfekter Isolator ($\sigma_W = 0$), so kann kein elektrischer Strom in die Wand eindringen, und die Normalkomponente des Stromes an der Wand verschwindet.

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}|_W = 0. \quad (2.32)$$

Durch das Ampèresche Gesetz (Gl. 2.15) kann dies unmittelbar in eine Bedingung für das magnetische Feld überführt werden:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}|_W = 0. \quad (2.33)$$

Ist das Wandmaterial dagegen ein perfekter Leiter ($\sigma_W = \infty$), so folgt aus dem Ohmschen Gesetz (Gl.2.9) das Verschwinden der elektrischen Felder im Wandmaterial

$$\mathbf{E}_W = 0. \quad (2.34)$$

Mit der Stetigkeit der Tangentialkomponente des Feldes E , über Grenzflächen hinweg erhalten wir an der Fluid-Wandgrenzfläche

$$E_t|_W = (\mathbf{E} \times \mathbf{n})|_W = \mathbf{0}, \quad (2.35)$$

und aus dem Ohmschen Gesetz folgt dann das Verschwinden der Tangentialkomponente der Stromdichte

$$\mathbf{j} \times \mathbf{n}|_W = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Mit dem Ampèreschen Gesetz (Gl. 2.15) kann diese Bedingung in das Verschwinden der Tangentialkomponente der Rotation von \mathbf{B} , als eine Randbedingung für das Magnetfeld umgewandelt werden.

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{n}|_W = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Die Annahme eines perfekt leitenden oder isolierenden Wandmaterials stellt meist einen idealisierten Grenzfall dar, welcher sich in Experimenten meist nicht realisieren läßt. Hier befindet sich ein in der Regel elektrisch gut leitendes Fluid der Leitfähigkeit σ_f in einem Metallbehälter einer elektrischen Leitfähigkeit derselben Größenordnung σ_W .

Setzt man in Relation zu den Abmessungen des Strömungsgebietes dünne Kanalwände voraus, so läßt sich auch hierfür eine Randbedingung formulieren. Auf diese als Dünne-Wand-Approximation bezeichneten Randbedingung kommen wir später zurück.

Bei magnetohydrodynamischen Strömungen hoher Chandrasekhar-Zahl besitzen die Wandgrenzschichten und die Kanalwände in abgeschlossenen Behältern oder Kanälen als Rückflußmöglichkeit für die im Fluid induzierten elektrischen Ströme einen signifikanten Einfluß, auch auf Fluidbereiche die außerhalb ihres hydrodynamischen Einflußbereiches liegen.

Es werden daher bei der Beschreibung magnetohydrodynamischer Strömungen spezielle Begriffe für die unterschiedlichen Fluidbereiche verwendet. Als *Hartmannschichten* bezeichnet man die Grenzschichten an Wänden senkrecht zum Magnetischen Feld. Ihre Dicke besitzt die Größenordnung $\delta_{Ha} \sim O(1/\sqrt{Q})$. Wände parallel zum Magnetfeld werden als *Seitenschichten* bezeichnet. In ihnen verschwindet die Normalkomponente des Magnetfeldes und ihre Dicke skaliert mit $\delta_s \sim O(1/\sqrt[4]{Q})$. Der übrige Fluidbereich wird oft als *Strömungskern* oder *Core* bezeichnet.

3. Lineare Stabilitätsanalyse

Einen Einblick in die bei Rayleigh-Bénardkonvektion auftretenden Phänomene liefert die Betrachtung des Übergangs vom reinen Wärmeleitungszustand in die Konvektionsbewegung.

Bei Vorgabe einer Rayleigh-Zahl nach Gleichung (2.18) ist die Temperaturdifferenz über die Schicht eindeutig in Form einer linearen Temperaturverteilung über die Schicht charakterisiert. Erhöht man die Rayleigh-Zahl von Null an quasistatisch, so erreicht man den Indifferenzpunkt zwischen stabiler Schichtung der Flüssigkeit und Konvektionsbewegungen.

Chandrasekhar (1961) hat die kritische Rayleigh-Zahl sowie die räumliche Struktur der einsetzenden Strömung einer unendlich ausgedehnten Schicht durch eine lineare Stabilitätsanalyse für allgemeine Magnetfeldrichtungen untersucht. Wir folgen hier, wenn auch mit anderer Darstellung, seiner Herleitung und wollen diese um den Einfluß seitlicher Berandungen im Fall eines horizontalen Magnetfeldes erweitern (Kapitel 5).

Hierzu betrachten wir zunächst die induktionsbehafteten Gleichungen in einer in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnten Schicht der dimensionslosen Höhe 1. Der Ursprung der Koordinate normal zur Schicht befinde sich in der Mitte der Schicht. Über die Schicht sei ein homogenes Magnetfeld beliebiger Orientierung mit der dimensionslosen magnetischen Induktion \underline{B}_∞ und dem Betrag $|\underline{B}_\infty| = 1$ angelegt.

3.1 Lineare Stabilitätsanalyse der induktionsbehafteten Gleichungen

3.1.1 Der stationäre Grundzustand

Der stationäre Grundzustand $v^0, \underline{B}^0, p^0, T^0$ dessen Aufrechterhaltung untersucht werden soll, kann aus den Gleichungen (Gl. 2.23, 2.24 und 2.13) bestimmt werden. Da sich das Fluid im Wärmeleitungsfall in Ruhe befindet, ergibt sich unmittelbar

$$v^0 \equiv 0 \quad (3.1)$$

für das Geschwindigkeitsfeld.

Eingesetzt in die Transportgleichung des magnetischen Feldes (Gl. 2.24) erhält man hieraus formal, daß bei ruhendem Fluid kein Feld induziert wird. Die im Fluid vorliegende magnetische Induktion entspricht daher der dem von außen angelegten konstanten Feld \underline{B}_∞ .

$$\underline{B}^0 = \underline{B}_\infty. \quad (3.2)$$

Die Energiegleichung (Gl. 2.13) vereinfacht sich durch die Bedingung 3.1 zu einem stationären Wärmeleitungsproblem

$$\nabla^2 T^0 = 0. \quad (3.3)$$

Durch Vorgabe der Temperaturen an der oberen und unteren Wand zu $T^0(x, y, z = -1/2) = 1/2, T^0(x, y, z = 1/2) = -1/2$ ergibt sich die Temperatur in der Schicht zu

$$T^0 = -z. \quad (3.4)$$

Aus den Impulsgleichungen (Gl. 2.23) in horizontaler Richtung (x, y) folgt, daß der Ruhedruck lediglich eine Funktion der Schichthöhe ist. Die z -Komponente der Impulsgleichung lautet unter Einbeziehung der übrigen Ruhezustände (Gl. 3.1, 3.2, 3.4)

$$\frac{dp^*}{dz} = -Ra \cdot z. \quad (3.5)$$

Integriert über z erhält man den Ruhedruck

$$p^0 = -\frac{1}{2} Ra \cdot z^2 + C. \quad (3.6)$$

Die Konstante C legt das Druckniveau fest. Da dieses in der Energiegleichung mit der Bousinesq-Approximation nicht mehr eingeht, kann dieses beliebig vorgegeben werden.

3.1.2 Die Störungsdifferentialgleichungen

Dem Grundzustand der Strömung v^0 , \mathbf{B}^0 , p^0 , T^0 seien beliebige, mit dem Faktor ε gegenüber dem Grundzustand gewichtete Störungen \hat{v} , $\hat{\mathbf{B}}$, \hat{p} , \hat{T} überlagert. Dieser gestörte Zustand $v = v^0 + \varepsilon \hat{v}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \varepsilon \hat{\mathbf{B}}$, $p^* = p^0 + \varepsilon \hat{p}$ und $T = T^0 + \varepsilon \hat{T}$ wird in das Gleichungssystem (Gl. 2.23, 2.24 und 2.13) eingeführt. In der Ordnung $O(\varepsilon)$ ergeben sich die linearen Störungsdifferentialgleichungen der Schichteninstabilität.

$$\nabla \cdot \hat{v} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = -\nabla \hat{p}^* + \nabla^2 \hat{v} + Ra \hat{T} e_z + \frac{Q}{R_m} (\mathbf{B}_\infty \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \hat{w} = \nabla^2 \hat{T} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \hat{\mathbf{B}} + (\mathbf{B}_\infty \cdot \nabla) \hat{v} \quad (3.10)$$

Terme der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ werden dabei vernachlässigt.

3.1.3 Randbedingungen

Zur Lösung des Störungsdifferentialgleichungssystems (3.7-3.10) des Stabilitätsproblems müssen zusätzlich zu den in Abschnitt 2.6 spezifizierten Randbedingungen entsprechende Bedingungen für die Störgrößen an der oberen und unteren Berandung formuliert werden. Die Randbedingungen für die Geschwindigkeiten und das Magnetfeld lassen sich direkt auf die Störgrößen übertragen.

Die thermischen Randbedingungen für die Temperaturstörungen müssen dagegen neu formuliert werden. An isothermen Rändern verschwinden die Temperaturstörung

$$\hat{T}_w = 0. \quad (3.11)$$

Physikalisch bedeutet dies, daß der die Berandung bildende Stoff eine große Wärmeleitung gegenüber dem Fluid besitzt. Temperaturstörungen werden sofort über die Wand ausgeglichen.

An adiabaten Wänden sind dagegen Änderungen des Wärmeflusses ausgeschlossen

$$\left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right|_w = 0. \quad (3.12)$$

Ein solches Verhalten stellt sich immer dann ein, wenn die Temperaturleitfähigkeit des Begrenzungsmediums klein gegenüber der des Fluides ist.

3.1.4 Alternative Formulierung der Stördifferentialgleichungen

Durch zweimaliges Anwenden des Rotationsoperators auf die Impulsgleichung (3.8) wird der Druck p^* eliminiert, und man erhält mit der Vektoridentität $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla - \nabla^2$ die Darstellung:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{v} = \nabla^4 \hat{v} + Ra \left[\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} \right] e_z + \frac{Q}{R_m} (\mathbf{B}_\infty \cdot \nabla) \nabla^2 \hat{\mathbf{B}}. \quad (3.13)$$

Die in der z-Komponente dieser Gleichung enthaltene Temperaturstörung \hat{T} sowie die Störungen des Magnetfeldes $\hat{\mathbf{B}}$ lassen sich nach Anwendung des zweidimensionalen horizontalen Laplaceoperators $\nabla_{xy}^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ auf die Energiegleichung (3.9) bzw. des Laplaceoperators ∇^2 auf die Transportgleichung des magnetischen Feldes eliminieren. Man erhält so:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \left(1 + \frac{1}{R_m} \right) + \frac{1}{R_m} \nabla^4 \right] \nabla^2 \hat{w} = \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \left(1 + \frac{1}{R_m} \right) + \frac{1}{R_m} \nabla^4 \right] \nabla^4 \hat{w} + Ra \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R_m} \nabla^2 \right] \nabla_{xy}^2 \\ + \frac{Q}{R_m} (\mathbf{B}_\infty \cdot \nabla)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \hat{w}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die so entstandene Differentialgleichung achter Ordnung enthält als Unbekannte nur noch die Zeit und die Vertikalgeschwindigkeit \hat{w} . Zu ihrer Lösung sind zusätzliche Randbedingungen erforderlich, die mit den bereits gestellten Randbedingungen aus den ursprünglichen Gleichungen formuliert werden können.

An freien Rändern kann die Randbedingung (2.26) in die nach z-differenzierte Kontinuitätsgleichung eingesetzt werden und man erhält

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right|_{\mathcal{W}} = 0. \quad (3.15)$$

An isothermen, elektrisch perfekt leitenden Kanalwänden ergibt sich $\nabla_{xy}^2 \hat{T}|_{\mathcal{W}} = 0$ und $\nabla_{xy}^2 \hat{\mathbf{B}}|_{\mathcal{W}} = 0$. Aus Gleichung (3.13) erhält man dann

$$\left. \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial z^4} \right|_{\mathcal{W}} = 0. \quad (3.16)$$

An festen Rändern dagegen ergibt sich neben der Undurchdringbarkeitsbedingung (2.25) aus der Kontinuitätsgleichung

$$\left. \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \right|_{\mathcal{W}} = 0. \quad (3.17)$$

Entsprechende Gleichungen und Randbedingungen können auch für die Temperaturstörung und die Störung der magnetischen Induktion abgeleitet werden. Diese sind dann ebenfalls gewöhnliche homogene Differentialgleichungen achter Ordnung. Die Kopplung der einzelnen

Gleichungen besteht dann nur noch über die Randbedingungen. Sind diese definiert, so genügt es zur Lösung des Stabilitätsproblems, eine dieser Gleichungen weiterzuvolverfolgen.

3.1.5 Formulierung als Stabilitäts-Eigenwertproblem

In dem Gleichungssystem der Störungsdifferentialgleichungen (Gl. 3.8 - 3.10) ist keiner der Terme explizit von der Zeit abhängig. Die Störungen des Grundzustandes seien für alle Zeiten im System vorhanden. Betrachtet man zudem ausschließlich zeitunabhängige Randbedingungen (keine vibrierenden Wände oder keinen variierenden Wärmestrom o.ä.), so ist das Gleichungssystem bezüglich der Zeit t homogen. Die Lösung kann somit durch einen Produktansatz formuliert werden, der die Zeitabhängigkeit des Lösungsvektors U von dessen Ortsabhängigkeit multiplikativ trennt

$$U(\mathbf{x}, t) = f(t) \cdot U(\mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Die Zeitfunktion $f(t)$ ergibt sich so aus dem Differentialgleichungssystem (Gl. 3.8 - 3.10) als

$$f(t) = \exp(\lambda t), \quad (3.19)$$

mit der im allgemeinen komplexen Konstante λ . Die Lösung wird anschaulicher, wenn λ durch eine neue komplexe Konstante $\omega = i\lambda$ ersetzt wird. Der Realteil ω_r von ω ist dann interpretierbar als Kreisfrequenz, der Imaginärteil ω_i als die zeitliche Anfachungsrate der Lösung. Zu jedem gegebenen ω gehört dabei eine bestimmte räumliche Verteilung der Strömung $U(\mathbf{x}, \omega)$. Die Bedeutung des Produktansatzes nach Gleichung (3.18) für die Beurteilung der Stabilität wird durch die Bildung der Störenergie

$$\|U\| = \int_V |U(\mathbf{x}, t)|^2 dV = \exp(2\omega_i t) \|U(\omega, t)\| \quad (3.20)$$

unmittelbar deutlich. Ist $\omega_i < 0$, so klingen die Störungen exponentiell ab, man bezeichnet die Lösung dann als asymptotisch stabil. Ist dagegen $\omega_i > 0$, so liegt eine Instabilität vor und Störungen werden angefacht.

Führt man in den Störungsdifferentialgleichungen die Substitution $\partial/\partial t = -i\omega$ ein, so können diese als Eigenwertproblem interpretiert werden. Die komplexe Frequenz ω tritt hierbei als Eigenwert auf. Die Funktion $U(\omega)$ heißt Eigenfunktion zum Eigenwert ω . Findet man nur ein ω mit positivem Imaginärteil, für welches das Eigenwertproblem eine nichttriviale Lösung besitzt, so ist die Strömung instabil, andernfalls ist sie asymptotisch stabil.

Der Realteil ω_r des Eigenwerts bestimmt eine zeitperiodische Schwankung der Lösung um einen entsprechend des Wertes von ω_i gegebenenfalls ändernden Mittelwert. Ist $\omega_r > 0$, so oszilliert die Lösung mit der Kreisfrequenz ω_r . Man bezeichnet dies im Fall $\omega_i < 0$ als oszillatorisch stabil bzw. für $\omega_i > 0$ als oszillatorisch instabil. Ist dagegen $\omega_r \leq 0$, so liegt kein periodisches Verhalten der Lösung vor.

In dem hier behandelten Fall der Magnetokonvektion kann es durch die Kopplung der zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeiten und des Magnetfeldes zu einem oszillatorischen Verhalten der Lösung kommen. Es genügt daher nicht, allein Werte für ω_i zu bestimmen, für die ein Abklingen der Störungen erreicht wird. Für die Stabilität der Schicht muß zusätzlich gewährleistet sein, daß keine oszillatorischen Lösung, bei welcher die Strömungsgrößen im Mittel verschwinden, vorliegt.

3.1.6 Lösung für stationäre Konvektion

Betrachtet wird hierzu der Grenzfall zwischen Stabilität und Instabilität ($\omega_i = 0$), also der Zustand, bei welchem die im System vorhandenen Störungen weder auf- noch abklingen. Setzt man zudem voraus, daß sich beim Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl eine stationäre Strömung einstellt, so ist $\omega_r = 0$. Die Zeitableitungen in den Störungsdifferentialgleichungen können daher unberücksichtigt bleiben $\partial/\partial t = 0$. Gleichung (3.14) vereinfacht sich hierdurch zu

$$\nabla^6 \hat{w} - Q(\mathbf{B}_\infty \cdot \nabla)^2 \nabla^2 \hat{w} = -Ra \nabla_{xy}^2 \hat{w}. \quad (3.21)$$

Das stationäre Problem ist offensichtlich nicht mehr von der Prandtl-Zahl und der magnetischen Reynolds-Zahl, also nicht mehr von den Stoffwerten ansich abhängig.

Da eine in horizontaler Richtung unendliche Schicht vorliegt, sind in der (x,y) -Ebene keine expliziten Randbedingungen gefordert. Entsprechend der Vorgehensweise bei rein hydrodynamischen Strömungen werden nun Lösungsansätze eingeführt, bei denen die Abhängigkeit der Strömungsgrößen von der vertikalen Koordinate multiplikativ von denen der horizontalen Koordinaten getrennt ist:

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, y, z) &= F(x, y) \cdot A(z), \\ \hat{T}(x, y, z) &= F(x, y) \cdot B(z), \\ \hat{\mathbf{B}}(x, y, z) &= F(x, y) \cdot \mathbf{C}(z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Darstellbarkeit der Lösung des Differentialgleichungssystem der Störgrößen (Gl. 3.21, 3.9, 3.10) mittels solcher Separationsansätze muß nun anhand der einzelnen Gleichungen nachgewiesen werden.

Hierzu setzen wir den Ansatz für die Temperatur \hat{T} in die stationäre Energiegleichung (Gl. 3.9) ein

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + A_z = - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = a^2. \quad (3.23)$$

Es ergibt sich der Zusammenhang der Funktion $F(x, y)$ mit dem zunächst frei wählbaren Separationsparameter a^2 und somit die uneingeschränkte Gültigkeit der gewählten Darstellung der Lösung.

Für die Transportgleichung des magnetischen Feldes erhält man dagegen

$$\frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{Rm}{F \cdot C} \left[B_\infty^x \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{A} + B_\infty^y \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{A} + B_\infty^z F \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right] = - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = a^2 \mathbf{e}. \quad (3.24)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nur dann unabhängig von F , wenn

$$B_\infty^x \frac{\partial F}{\partial x} + B_\infty^y \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

gilt.

Ansonsten ist das Problem nicht separierbar und damit mit dem Ansatz (Gl. 3.23) für eine beliebige Richtung des Magnetfeldes nicht lösbar. Die Bedingung (Gl. 3.25) ist trivialerweise dann erfüllt, wenn das angelegte Feld ausschließlich eine Komponente in vertikaler Richtung

besitzt ($B_\infty^x = B_\infty^y = 0, B_\infty^z = 1$). Weist das Magnetfeld dagegen ebenfalls eine Komponente in horizontaler Richtung auf, so ergeben sich hieraus Konsequenzen für die horizontale Struktur der Strömung.

Durch Einführen neuer horizontaler Koordinaten ξ, η , bei welchen die horizontale Komponente des von außen angelegten Magnetfeldes B_{xy}^∞ mit der ξ -Koordinatenachse zusammenfällt, kann Gleichung (3.25) mit nur einer horizontalen Komponente des Magnetfeldes B_∞^ξ

$$B_\infty^\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 \quad (3.26)$$

dargestellt werden. Die beiden für die Gültigkeit der Separationsansätze hinreichenden Bedingungen ergeben sich dann zu

$$B_\infty^\xi = 0 \quad (3.27)$$

und
$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0. \quad (3.28)$$

Da die beliebige Orientierung der horizontalen Komponente des Magnetfeldes zu den horizontalen Koordinatenachsen jederzeit durch Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse hergestellt werden kann, genügt es für die weiteren Betrachtungen, nur noch ein Magnetfeld in der (x,z) -Ebene zuzulassen ($B_\infty^y = 0$). Die alten Bezeichnungen der Koordinaten können so ohne Einschränkung der Allgemeinheit beibehalten werden.

Durch Einsetzen des Separationsansatzes in Gleichung (3.21) erhält man mit den dann identischen Gleichungen (3.23 und 3.24) ein neues Gleichungssystem zur Beschreibung der primären Stabilität der Schicht.

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right]^3 A_z - Q \left[\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right] \left[B_\infty^{x^2} \frac{A_z}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{A_z}{F} B_\infty^x \cdot B_\infty^z \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dA_z}{dz} + B_\infty^{z^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] = \quad (3.29)$$

$$-Ra a^2 A_z$$

$$-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{F} = a^2 \quad (3.30)$$

Die die (x,y) -Struktur der Lösung kennzeichnende Gleichung (3.30) wird auch als Helmholtz-Gleichung bezeichnet. Die Lösung von Gleichung (3.29) in Abhängigkeit der jeweiligen Randbedingungen ergibt Wertepaare (Ra, a^2) , und Gleichung (3.30) liefert hierzu bei gleichzeitiger Erfüllung der Bedingung (Gl. 3.26) die horizontale Struktur der Lösung.

Für ein vertikales Magnetfeld ($B_\infty^x = 0, B_\infty^z = 1$) ist Bedingung (Gl. 3.25) generell erfüllt. Da das Problem dann in Wandparallelenrichtung homogen ist, d.h. keine horizontale Vorzugsrichtung aufweist, kann ein weiterer Produktansatz zur Trennung der x - von der y -Richtung eingeführt werden. Gemäß den experimentellen Beobachtungen setzt man hierfür in beiden Richtungen räumlich periodische, ebene Wellen mit den Teilwellenzahlen $\alpha_x = 2\pi/\lambda_x$ und $\alpha_y = 2\pi/\lambda_y$ an.

$$F(x, y) = \exp[i \alpha_x x + i \alpha_y y] \quad (3.31)$$

Aus der Helmholtz-Gleichung (3.30) folgt dann

$$a^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 \quad (3.32)$$

Der Separationsparameter a hat die Bedeutung einer charakteristischen Wellenzahl. Das Stabilitätsproblem wird bei vertikalem Magnetfeld nur durch die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/a$ bestimmt, nicht aber durch die Orientierung der Welle in der (x, y) -Ebene.

Läßt man nun zusätzlich eine horizontale Komponente des Magnetfeldes zu ($B_\infty^x = \sqrt{1 - B_\infty^{z^2}} \neq 0$), so fordert die Bedingung (Gl. 3.26) $\partial F / \partial x = 0$. Änderungen der Funktion F und damit der Strömungsgrößen in x - bzw. Magnetfeldrichtungen sind dann nicht zulässig. Die Lösung ist in den wandparallelen Richtungen inhomogen. Der Lösungsansatz

$$F(x, y) = F(y) = \exp[i a_y y] \quad (3.33)$$

für F besitzt keine Abhängigkeit von der x -Koordinate und erfüllt die Helmholtz-Gleichung (Gl. 3.30) mit $a_y = a$.

Hieran wird deutlich, daß sobald ein horizontaler Magnetfeldanteil vorhanden ist, die primäre Instabilität in Form von senkrecht zum Magnetfeld orientierter zweidimensionaler Konvektionswalzen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/a$ einsetzt. Der Einfluß des Magnetfeldes auf das Einsetzen der Konvektion reduziert sich in Gleichung (3.25) auf den seines vertikalen Anteils

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right]^3 A_z - Q \cdot B_\infty^{z^2} \left[\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right] \frac{d^2}{dz^2} A_z = -Ra a^2 A_z. \quad (3.34)$$

Ausgehend von der Annahme, daß sich das System in einem Zustand befindet, in welchem Störungen weder auf- noch abklingen, noch daß es periodische Schwankungen der Strömungsgrößen gibt, können die Zeitabhängigkeiten der Lösung unberücksichtigt bleiben.

Da keine seitlichen Ränder existieren, kann eine periodische Fortsetzbarkeit der Lösung in der horizontalen Richtung postuliert werden. Die räumliche Struktur der Lösung kann daher in eine horizontale Funktion F und eine lediglich von z abhängige getrennt werden. Man erhält so eine Gleichung, welche nur noch die z -Abhängigkeit der Vertikalgeschwindigkeit $A_z(z)$ sowie einen konstanten Faktor a^2 enthält. Dieser repräsentiert den Einfluß der horizontalen Lösung auf die Lösung der Vertikalkomponente. Ist a^2 bekannt, so ergibt die Helmholtz-Gleichung (3.30) unter Erfüllung der Bedingung (Gl. 3.26) die horizontale Struktur der Lösung für den durch das Wertepaare (Ra, a^2) gekennzeichneten neutralstabilen Zustand.

Um nun endgültig Werte für Ra in Abhängigkeit von a^2 angeben zu können, muß ein Lösungsansatz für die z -Abhängigkeit $A(z)$ formuliert werden. Die Funktion $A_z(z)$ muß hierzu noch die Randbedingungen an der oberen und unteren Wand erfüllen.

3.1.6.1 Lösung für zwei freie, isotherme Berandungen

Sind beide horizontale Ränder schubspannungsfrei, so lauten die Randbedingungen gemäß Abschnitt (3.1.4) übertragen auf die Funktion $A_z(z)$:

$$\begin{aligned} A_z(z = \pm 1/2) &= 0, \\ \frac{d^2 A_z}{dz^2}(z = \pm 1/2) &= 0, \\ \frac{d^4 A_z}{dz^4}(z = \pm 1/2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Funktionen die diese Randbedingungen erfüllen, sind zum einen die geraden Funktionen

$$A_z^g(z) = \cos[(2n+1)\pi z], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

sowie die ungeraden

$$A_z^u(z) = \sin[2n\pi z], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.37)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.34) ergibt sich die Interferenzkurve mit den kleinsten Werten für Ra aus dem Grundmod ($n=0$) der geraden Funktionen (Gl. 3.36):

$$Ra(a) = \frac{(\pi^2 + a^2)^3 + Q B_\infty^z \pi^2 (\pi^2 + a^2)}{a^2}. \quad (3.38)$$

Zu jedem Wert der Chandrasekhar-Zahl besitzt diese Kurve einen Minimalwert, der als kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit} bezeichnet wird und bei einer kritischen Wellenzahl a_{krit} auftritt. Im hydrodynamischen Fall ($Q=0$) können diese unmittelbar aus der Bedingung $\partial Ra / \partial a = 0$ zu $Ra_{krit} = 27\pi^4/4$ und $a_{krit} = \pi/\sqrt{2}$ abgeleitet werden.

3.1.6.2 Lösung für zwei feste, isotherme Berandungen

Für zwei feste, isotherme horizontale Ränder erhält man die Randbedingungen

$$\begin{aligned} A_z(z = \pm 1/2) &= 0, \\ \frac{dA_z}{dz}(z = \pm 1/2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

und eingesetzt in Gleichung (3.34)

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right]^2 A_z - Q \cdot B_\infty^{z^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0, \quad \text{für } z = \pm 1/2. \quad (3.40)$$

Eine einfache Funktion $A_z(z)$, die die Randbedingungen (3.38, 3.39) erfüllt, läßt sich nicht mehr angeben.

Chandrasekhar hat die Stabilitätsbedingung für diese beiden Fälle und auch noch für den Fall eines einseitig festen Randes ausgewertet. Die Ergebnisse sind in den nachfolgenden Diagrammen zusammengefaßt.

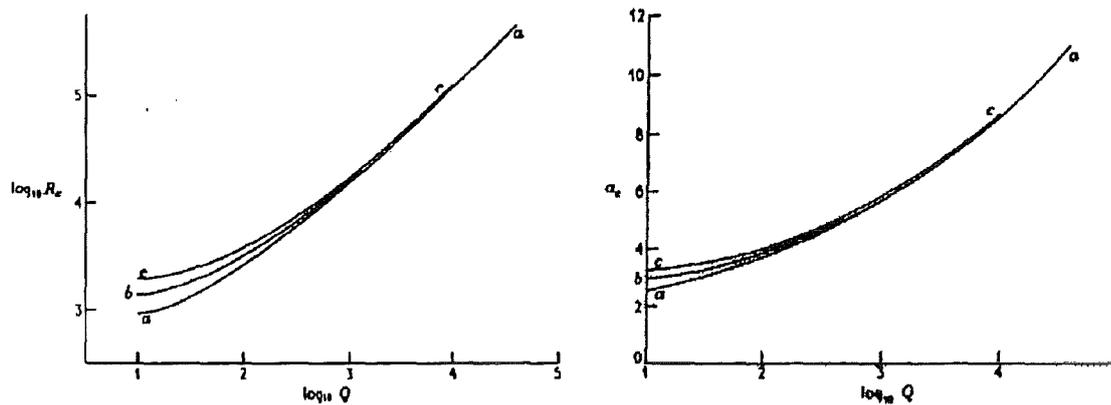


Abb 3.1: Die Abhängigkeit der kritischen Rayleigh- und Wellenzahl als Funktion der Chandrasekhar-Zahl (Chandrasekhar 1961). Verschiedene Randbedingungen an die Geschwindigkeit: a) beide Berandungen frei, b) eine frei, die andere fest und c) beide fest.

Die kritische Rayleigh-Zahl steigt für alle Randbedingungen monoton mit der Chandrasekhar-Zahl an. Für geringe Magnetfeldstärken wird das Abklingen von Störungen hauptsächlich durch die viskosen Reibungskräfte bestimmt. Für genügend starke Magnetfelder treten diese in den Hintergrund und die Stabilitätsgrenze geht in ein durch elektrodynamische Kräfte bestimmtes asymptotisches Gesetz über.

Die Art der kinematischen Randbedingungen spielt in diesem Bereich keine Rolle mehr, da diese lediglich einen Einfluß auf die viskosen Verluste haben.

Ebenso steigt die kritische Wellenzahl monoton mit der Chandrasekhar-Zahl. Die Wellenlängen der Konvektionsstrukturen werden somit immer kleiner. Ist die Wellenlänge für kleine Magnetfeldstärken noch von den viskosen Termen bestimmt, so verschwinden die Unterschiede für die unterschiedlichen Randbedingungen ebenso wie bei den kritischen Rayleigh-Zahlen. Die Lösung geht dann ebenfalls in ein asymptotisches Gesetz über.

3.1.6.2 Asymptotische Lösung

Für sehr starke Magnetfelder treten die viskosen Reibungskräfte gegenüber den elektrodynamischen Kräften in den Hintergrund. Das Stabilitätsproblem ist dann ausschließlich durch das Verhältnis von Auftriebskräften und Lorentz-Kräften bestimmt. Durch Streichung des viskosen Terms in Gleichung (3.34) erhält man

$$Q \cdot B_\infty^2 \left[\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right] \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -Ra a^2 A_z. \quad (3.41)$$

Da bei Vernachlässigung der viskosen Kräfte die Haftbedingung an Wänden nicht mehr erfüllt werden kann, wird der Lösungsansatz für freie Ränder (3.36) direkt angewendet:

$$Ra(a) = \frac{Q B_\infty^2 \pi^2 (\pi^2 + a^2)}{a^2}. \quad (3.42)$$

Mit der notwendigen Bedingung für die minimale Rayleigh-Zahl $\partial Ra / \partial a = 0$ ergibt sich daraus die kritische Rayleigh-Zahl und die dazugehörige kritische Wellenzahl

$$\begin{aligned} Ra_{krit} &= \pi^2 Q, \\ a_{krit} &= \left(\frac{\pi^4}{2} Q \right)^{\frac{1}{6}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Diese Bedingungen sind unabhängig von den kinematischen Randbedingungen.

3.1.7 Lösung für oszillatorische Konvektion

Bei der Lösung des Stabilitätsproblems im vorherigen Abschnitt wurde vorausgesetzt, daß die Konvektionsbewegung in Form stationärer Strukturen einsetzt. Die zeitliche Anfachungsrate ω_i und die Kreisfrequenz ω_r der Lösung nach Abschnitt (3.1.6) sind dann null, und sämtliche Zeitableitungen in der nach der Vertikalgeschwindigkeit separierten Gleichung (3.14) verschwinden.

Nimmt man dagegen an, daß die Instabilität als ein Oszillieren von Strömungsgrößen einsetzt, so liegt der Zustand vor, den Chandrasekhar (1961) als *overstability* bezeichnet. Die zeitliche Anfachungsrate ist hierbei ebenfalls null, da immer der neutralstabile Zustand vorausgesetzt wird. Diesem ist nun jedoch eine zeitperiodische Störung überlagert, welche mit $\omega_r \neq 0$ in die Lösung eingeht.

Mit der Zeitfunktion (Gl. 3.19) können die Zeitableitungen in Gleichung (3.14) durch die komplexe Konstante λ bzw. durch die in diesem Fall reelle Frequenz $\omega = \omega_r = i \lambda$ ersetzt werden. Die horizontale Struktur der Lösung wird weiterhin durch die Helmholtzgleichung (Gl. 3.30) beschrieben und an freien isothermen Rändern kann weiterhin $\nabla^2 \hat{w} = -(\pi^2 + a^2) \hat{w}$ bzw. $\nabla_{xy}^2 F = -a^2 F$ gesetzt werden. Es ergibt sich so eine komplexe Gleichung

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega(\pi^2 + a^2)}{i Pr} \left[-\omega^2 - \frac{\omega}{i}(\pi^2 + a^2) \left(1 + \frac{1}{R_m} \right) + \frac{1}{R_m}(\pi^2 + a^2)^2 \right] = \\ & \left[-\omega^2 + \frac{\omega}{i}(\pi^2 + a^2) \left(1 + \frac{1}{R_m} \right) + \frac{1}{R_m}(\pi^2 + a^2)^2 \right] (\pi^2 + a^2)^2 - Ra \left[\frac{\omega}{i} + \frac{1}{R_m}(\pi^2 + a^2) \right] a^2 \\ & + \frac{QB_\infty^i}{R_m} \pi^2 \left(\frac{\omega}{i} + \pi^2 + a^2 \right) (\pi^2 + a^2), \end{aligned} \quad (3.44)$$

die das Problem der oszillatorischen Stabilität beschreibt.

Aus dem Realteil dieser Gleichung kann nun eine Bedingung für das Auftreten eines von null verschiedenen Wertes für ω abgeleitet werden. Nach einiger Rechnung erhält man

$$\frac{R_m^2}{\pi^4} \omega^2 = \frac{Q}{\pi^2} \frac{Pr(R_m - 1)}{Pr + 1} - \left(1 + \frac{a^2}{\pi^2} \right)^2. \quad (3.45)$$

Da die Kreisfrequenz ω eine reelle Zahl sein muß, ist ω^2 stets positiv. Da ω^2 und a^2 an dieser Stelle nicht bestimmbar sind, kann keine exakte Bedingung für das Auftreten der *overstability* angegeben werden. Es kann jedoch generell nur dann Lösungen geben, wenn $R_m - 1$ positiv ist.

Das Einsetzen der Konvektion in Form von oszillierenden Strömungsgrößen mit konstanter Amplitude kann also nur dann auftreten, wenn $R_m > 1$ ist. Ansonsten findet man im neutralstabilen Bereich eine stationäre Konvektionsbewegung.

Aus der Abschätzung (2.22) erkennt man, daß dieser Effekt bei Flüssigmetallen (unabhängig von ihrer räumlichen Erstreckung) nicht auftritt. Das durch die Geschwindigkeitsstörungen induzierte Magnetfeld wirkt sich bei dem hier betrachteten Stabilitätsproblem nicht auf die Stabilitätsbedingung aus.

Generell erlaubt eine kleine magnetische Reynolds-Zahl eine Modellierung magneto-hydrodynamischer Strömungen bei denen das durch die Strömung induzierte Magnetfeld gegenüber dem von außen angelegten vernachlässigt wird (Induktionsfreie Approximation).

3.2. Induktionsfreie Approximation

3.2.1. Grundgleichungen

Für praktisch alle im Labor (flüssige Metalle endlicher Leitfähigkeit) realisierbaren MHD-Strömungen ergeben sich sehr kleine Werte für die magnetische Reynolds-Zahl R_m . Damit sind die gemäß dem Ampère-Maxwellschen-Gesetz (Gl. 2.15) durch elektrische Ströme im Fluid induzierten Felder klein gegenüber dem von außen angelegten Feld B_∞ .

Vernachlässigt man diesen Anteil des Magnetfeldes ganz, was dem Grenzfall $R_m \rightarrow 0$ entspricht, so verschwindet die rechte Seite der Gleichung 2.15 und die magnetische Induktion wird einzig durch das von außen angelegte Magnetfeld bestimmt, das dann divergenz- und wirbelfrei sein muß.

Die Stärke der magnetischen Induktion ist damit auch innerhalb des Fluides eine fest vorgegebene Größe, auf die die Strömung keinen Einfluß mehr hat. Die nichtlinearen Terme $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ in den Gleichungen Gl.(2.12) und Gl.(2.17) werden durch diese Approximation linearisiert. Es ergibt sich so ein neues, vollständiges Gleichungssystem zur Beschreibung magneto-hydrodynamischer Strömungen, bestehend aus den unveränderten Erhaltungsgleichungen der Masse Gl.(2.11), des Impulses Gl.(2.12) und der Energie Gl.(2.13).

Durch Anwendung des Divergenzoperators auf Gl.(2.15) erhält man die Gleichung der Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3.46)$$

Diese bildet ein Analogon zur hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung und ersetzt die Gleichungen Gl.(2.14) und Gl.(2.15) bei vorgegebenem Magnetfeld.

Für verschwindende, zeitliche Änderungen des magnetischen Feldes ergibt sich aus Gleichung Gl.(2.14) das elektrische Feld E als Gradient eines skalaren elektrischen Potentials $E = -\nabla\phi$. Das Ohmsche Gesetz lautet dann:

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.47)$$

3.2.2 Randbedingungen

Da die Impulsgleichung und die Energiegleichung des induktionsbehafteten Falls unverändert übernommen werden, behalten die kinematischen und die thermischen Randbedingungen Gl.(2.25-2.28) ihre Gültigkeit bei. Das Magnetfeld ist nun insbesondere auch an den Gebietsrändern eine feste Größe. Die Erfassung unterschiedlicher Charakteristiken des Wandmaterials ist daher nicht mehr durch Forderungen an das Magnetfeld, entsprechend den Gleichungen Gl.(2.30) und (2.34), zu realisieren. Anstelle des Magnetfeldes treten nun Bedingungen an die Stromdichte und das elektrische Potential an der Fluid- Wandgrenzfläche.

Wie zuvor fordert man hierzu die Stetigkeit der Normalkomponente des elektrischen Stromes Gl.(2.28). Zusammen mit der Haftbedingung des Fluides ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz Gl.(3.47) für das elektrische Potential

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_W = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_F. \quad (3.48)$$

Sofern Kontaktwiderstände zwischen dem Fluid und der Wand vernachlässigt werden, ist das elektrische Potential über die Grenzfläche hinweg stetig.

$$\phi_W = \phi_F \quad (3.49)$$

Für gleiche magnetische Permeabilität der Kanalwand und des Fluids sind alle Komponenten der magnetischen Induktion B über die Grenzfläche hinweg konstant, sofern keine elektrischen Grenzflächenströme auftreten

$$\mathbf{B}_W = \mathbf{B}_F. \quad (3.50)$$

Unter diesen Voraussetzungen können die Bedingungen für die beiden Extremfälle elektrisch *nicht leitende* Kanalwand und *perfekt leitende* Kanalwand formuliert werden.

An nichtleitenden Wänden verschwindet wie in Abschn. (2.6.2) die Normalkomponente des Stromes an der Wand Gl.(2.29). Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich zusammen mit der Haftbedingung die korrespondierende Randbedingung für das elektrische Potential

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_W = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_W = 0. \quad (3.51)$$

Für perfekt leitende Wände erhalten wir entsprechend aus dem Verschwinden der Tangentialkomponente des Stromes an der Wand Gl.(2.33)

$$\mathbf{j} \times \mathbf{n} \Big|_W = \phi \Big|_W = 0. \quad (3.52)$$

Ist die Dicke t_w eines elektrisch gut leitenden Wandmaterials klein im Vergleich zur charakteristischen Abmessung des Strömungsgebietes und der auftretenden Strömungsstrukturen ($t_w/a \ll 1$), so ergeben sich nur geringe Potentialdifferenzen über die Dicke der Kanalwand. Vernachlässigt man diese ganz, so kann der Stromfluß im Wandmaterial und die mit ihm verbundene Potentialdifferenz durch einen über die Dicke der Wand integralen Ansatz erfaßt werden. Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potential in der Wand und dem tangential im Wandmaterial fließenden elektrischen Strom j_t kann daher mit dem Wandtangentialen Gradientenvektor ∇_t anhand des ohmschen Gesetzes (Gl. 3.47) formuliert werden.

$$\mathbf{j}_t = -c \nabla_t \phi_w. \quad (3.53)$$

c ist der dimensionslose Wandleitparameter. Er gewichtet den elektrischen Widerstand des Fluids gegenüber dem der Wand und ist definiert als:

$$c = \frac{\sigma_w s}{\sigma_f h}. \quad (3.54)$$

σ_w kennzeichnet die elektrische Leitfähigkeit des Wandmaterials der Dicke s .

Die Formulierung der Ladungsbilanz in der Kanalwand liefert die als 'Dünne-Wand-Approximation' bekannte Beziehung (Walker 1981):

$$-c \nabla^2_t \phi = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.55)$$

In diese geht der vom Fluid in die Wand fließende elektrische Strom als Quellterm ein.

Eine weitere Grenzfläche bildet der Übergang von der elektrisch leitenden Kanalwand zur nichtleitenden Umgebung.

Als Rand und Übergangsbedingungen ergeben sich hier generell:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0. \quad (3.56)$$

3.2.3 Lineare Stabilitätsanalyse der induktionsfreien Gleichungen

Das System der induktionsfreien Gleichungen Gl.(2.11), Gl.(2.12), Gl.(2.13), Gl.(3.46) und Gl.(3.47) beschreibt zusammen mit den Randbedingungen in Abschnitt (3.2.2) das Problem der Magnetokonvektion vollständig. Es soll nun gezeigt werden, inwiefern die zu ihrer Formulierung getroffenen Vereinfachungen das Einsetzen der Konvektion aus dem reinen Wärmeleit-zustand beeinflussen.

Entsprechend der Vorgehensweise für die vollständigen Gleichungen (Abs. 3) wird zunächst wieder der stationäre Wärmeleitungszustand ermittelt. Es liegen wiederum die Bedingungen Gl.(3.1), Gl.(3.4) und Gl.(3.6) vor. Da das Magnetfeld als eine feste Größe betrachtet wird, gilt unabhängig von einer Gleichung die das Magnetfeld beschreibt

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{B}. \quad (3.57)$$

Anstelle des Magnetfeldes treten die Stromdichte \mathbf{j} und das elektrische Potential ϕ als die die Elektrodynamik beschreibenden Größen auf. Ohne äußere Ladungsquellen besitzt das Ohmsche Gesetz Gl.(3.46) mit $\nu^0 = 0$ nur die triviale Lösung, so daß

$$\mathbf{j}^0 = 0, \quad \phi^0 = 0 \quad (3.58)$$

ist.

Durch Einsetzen dieses Grundzustandes mit überlagerten Störungen, entsprechend Abschnitt (3.1.2), sowie mit $\mathbf{j} = \mathbf{j}^0 + \varepsilon \hat{\mathbf{j}}$ und $\phi = \phi^0 + \varepsilon \hat{\phi}$ in die induktionsfreien Grundgleichungen ergeben sich unter Vernachlässigung von Termen der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ die linearen, induktionsfreien Störungsdifferentialgleichungen der Schichteninstabilität.

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\nabla \hat{p}^* + \nabla^2 \hat{\mathbf{v}} + Ra \hat{T} \mathbf{e}_z + Q(\hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}), \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \hat{\mathbf{w}} = \nabla^2 \hat{T}, \quad (3.61)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0, \quad (3.62)$$

$$\hat{\mathbf{j}} = -\nabla \hat{\phi} + \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}. \quad (3.63)$$

Die Randbedingungen entsprechen denen des induktionsbehafteten Falls. Zusätzlich verschwinden an den hier betrachteten, oberen und unteren elektrisch und thermisch perfekt leitenden Wänden die Störungen des elektrischen Potentials sowie der elektrischen Stromdichte.

Wieder kann durch zweimalige Anwendung des Rotationsoperators auf die Impulsgleichung der Druck eliminiert werden und die Temperaturstörung sowie die Stromdichte durch aus der Energiegleichung und dem Ohmschen Gesetz gewonnene Terme ersetzt werden. Es ergibt sich so die alternative Formulierung des Problems als eine nur von der Geschwindigkeitsstörung abhängige Bedingung für die Vertikalgeschwindigkeitsstörung \hat{w} .

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \hat{w} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^4 \hat{w} + Ra \nabla_{xy}^2 \hat{w} - Q \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) (\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \hat{w}. \quad (3.64)$$

Durch einmalige Anwendung der Rotation auf das Ohmsche Gesetz verschwindet das elektrische Potential:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{j}} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.65)$$

Das Gleichungssystem der Störungsdifferentialgleichungen ist bezüglich der Zeit ebenfalls homogen. Die Zeitabhängigkeit der Lösung kann daher entsprechend Gl.(3.18) durch einen Produktansatz formuliert werden. Betrachtet man den Interferenzpunkt zwischen Stabilität und Instabilität, so verschwinden die Zeitableitungen in Gl.(3.64) und man erhält:

$$\nabla^6 \hat{w} - Q (\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2 \hat{w} = -Ra \nabla_{xy}^2 \hat{w}. \quad (3.66)$$

Diese Beziehung ist identisch mit der für den induktionsbehafteten Fall gewonnenen Gleichung (Gl. 3.21). Die für die vollen Gleichungen gewonnenen Lösungen für die kritische Rayleigh-Zahl und die kritische Wellenzahl sind daher direkt auf den induktionsfreien Fall übertragbar. Eine weitere Betrachtung der Gleichung kann daher entfallen. Allerdings muß noch die Gültigkeit der Separationsansätze zur Trennung der horizontalen Richtungen von der vertikalen gezeigt werden.

Führt man die Lösungsansätze Gl.(3.22) gemeinsam mit einem entsprechenden für die Stromdichte

$$\hat{\mathbf{j}} = F(x, y) \cdot \mathbf{D}(z) \quad (3.67)$$

ein, so ergibt sich aus der Energiegleichung wiederum die horizontale Struktur der Lösung bestimmende Helmholtz-Gleichung Gl.(3.30). Aus Gleichung (3.65) erhält man drei Gleichungen, die alle separierbar sind und mit $\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$ bzw. $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ebenfalls zur Helmholtz-Gleichung zusammengefaßt werden können. Es ergeben sich anders als beim induktionsbehafteten Fall keine Einschränkungen für die Gültigkeit des Separationsansatzes. Die Anisotropie beim Einsetzen der Konvektion wird ausschließlich an der Stabilitätsbedingung deutlich. Maßgebend für den verzögerten Einsatz der Konvektionsbewegung ist auch hier der vertikale Anteil des Magnetfeldes. Der horizontale Anteil bestimmt lediglich die Struktur der Strömung dahingehend, daß die Achsen der Konvektionswalzen parallel zur horizontalen Komponente des Magnetfeldes orientiert werden.

Betrachtet man die zeitabhängige Gleichung Gl.(3.64), so kann diese, entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt (3.1.7), auf das Auftreten oszillatorischer Instabilitäten untersucht werden. Durch Ersetzen der Zeitableitungen durch die komplexe Konstante λ bzw. durch die reelle Frequenz $\omega = \omega_r + i \lambda$ erhält man nach einiger Rechnung für den Imaginärteil von Gl.(3.64)

$$\frac{1}{Pr} \left(1 + \frac{a^2}{\pi^2}\right)^2 \omega + \left(1 + \frac{a^2}{\pi^2}\right) \omega + \frac{Q}{\pi^2} \omega = 0. \quad (3.68)$$

Diese Gleichung besitzt lediglich die Trivallösung $\omega = 0$. Dies bedeutet, daß bei Betrachtung der induktionsfreien Gleichungen der Wärmeleitungszustand stets in eine stationäre Konvektionslösung übergeht. Dies stellt keine Einschränkung der Anwendbarkeit der induktionsfreien Gleichungen auf Naturkonvektionsströmungen dar, da die Stoffwerte von technisch relevanten Fluiden stets kleine magnetische Reynolds-Zahlen ergeben (vgl. Abschnitt 3.1.7). Andere instationäre Phänomene, die aus den Trägheitstermen der Impulsgleichung stammen oder Aufheizvorgänge, werden durch das Modell vollständig wiedergegeben, da lediglich die nichtlinearen Terme der elektrodynamischen Gleichungen linearisiert wurden.

4. Literatur

Zu dem hier behandelten Themenkreis liegt ein weites Spektrum an Arbeiten vor. Um den Einfluß des Magnetfeldes verstehen zu können, werden zunächst Arbeiten genannt, die die von unten beheizte Schicht ohne Magnetfeld zum Thema haben. Diese beschreiben den Einfluß der Rayleigh-Zahl, der Stoffwerte sowie unterschiedlicher Randbedingungen und Geometrien im rein hydrodynamischen Fall.

Danach kann der Effekt des Magnetfeldes auf die hier beschriebenen Phänomene anhand der wichtigsten Arbeiten erörtert werden. Bei den experimentellen Arbeiten werden wir uns im wesentlichen auf Arbeiten mit Flüssigmetallen, also Flüssigkeiten kleiner Prandtl-Zahl, beschränken.

4.1 Theoretische Arbeiten

4.1.1 Bénard-Konvektion ohne Magnetfeld

Das Einsetzen der Konvektionsbewegung aus dem reinen Wärmeleitungszustand wird ausführlich von Chandrasekhar (1961) behandelt. Durch eine lineare Stabilitätsanalyse bestimmt er kritische Rayleigh-Zahlen sowie die Struktur der Strömung beim Einsetzen der Konvektion in einer in den horizontalen Richtungen unendlichen Schicht. Die wesentlichen Ergebnisse für unterschiedliche kinematische Randbedingungen sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt. Als thermische Randbedingung nimmt er stets isotherme obere und untere Kanalwände an.

kinetische Randbedingung	Ra_{krit}	a_{krit}	λ_{krit}
frei - frei	657.511	2.2214	2.828
fest - fest	1707.762	3.117	2.016
fest - frei	1100.65	2.682	2.342

Tab. 4.1: Kritische Rayleigh- und Wellenzahlen, Chandrasekhar (1961)

Wesentlich ist hierbei, daß die kritischen Werte der primären Instabilität nicht von den Stoffwerten bzw. der Prandtl-Zahl abhängen. Die Zellmuster sind durch die kritische Wellenzahl nicht eindeutig bestimmt (vgl. Absch. 3.1.6). Im Allgemeinen treten zweidimensionale Rollen immer dann auf wenn an oberer und unterer Wand die selben Randbedingungen gefordert sind. Die z-Abhängigkeit des Lösungsansatzes ist dann durch eine symmetrische Funktion darstellbar. Werden dagegen an den horizontalen Berandungen unterschiedliche Randbedingungen formuliert (fest-frei), kommt es zu einer Symmetriebrechung und es bilden sich hexagonale Konvektionszellen.

Sparrow, Goldstein und Jonsson (1964) untersuchen den Einfluß unterschiedlicher thermischer Randbedingungen auf das Einsetzen der Konvektion aus dem linearen Wärmeleitungszustand. Hierzu führen sie die als Biot-Zahl bezeichnete Größe

$$Bi = \frac{\alpha h}{\lambda} \quad (4.1)$$

zur Berücksichtigung des Wärmeübergangskoeffizienten α an den Rändern ein. h ist die Schichthöhe und λ die Wärmeleitfähigkeit des Fluides.

Für $Bi \rightarrow \infty$ und $Bi \rightarrow 0$ ergeben sich die beiden Grenzfälle feste Temperatur und konstanter Wärmestrom an der jeweiligen Grenzfläche. Abbildung 4.1a und 4.1.b zeigen die kritischen Rayleigh-Zahlen für verschiedene thermische Randbedingungen.

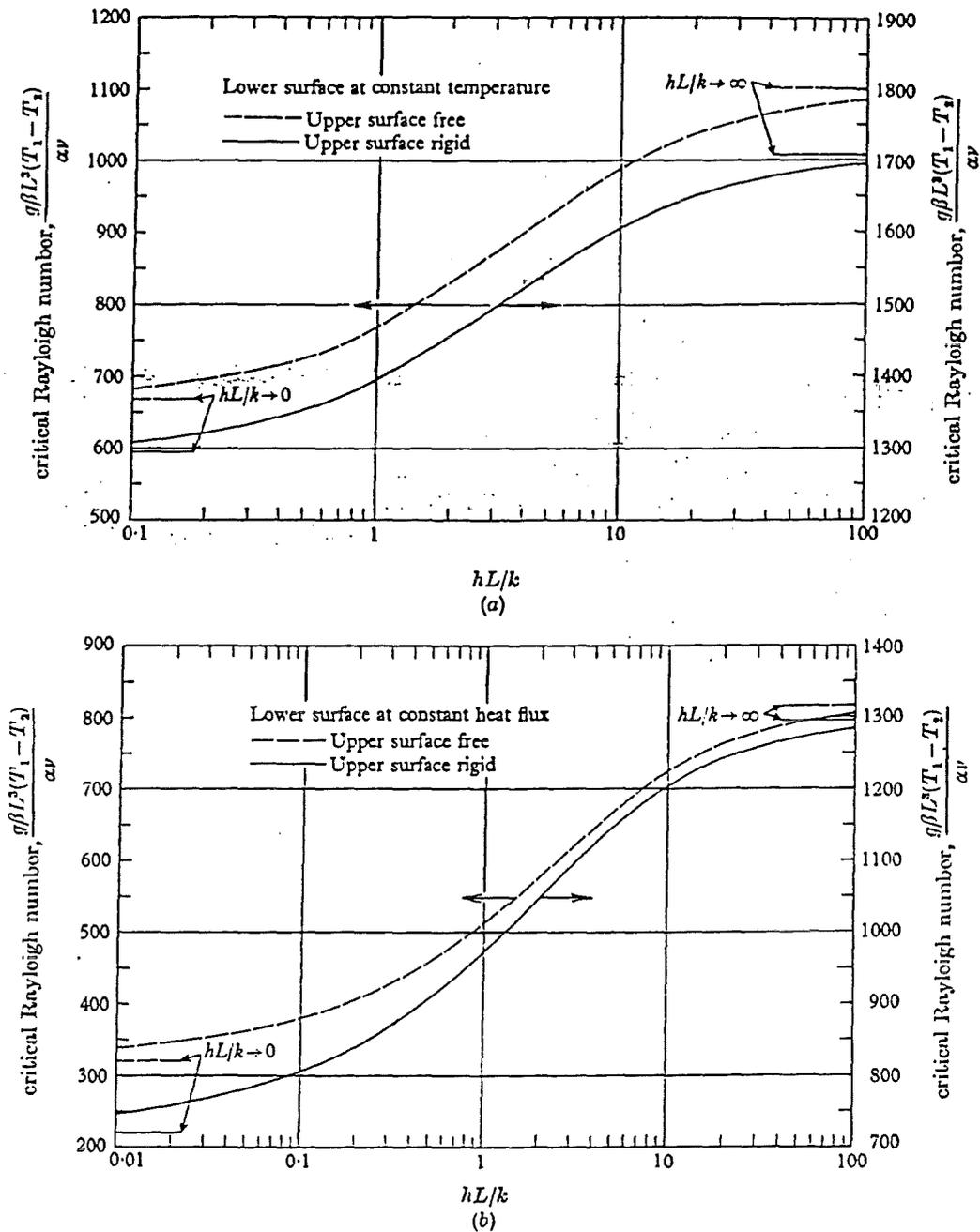


Abb. 4.1: Kritische Rayleigh-Zahlen. (a) Konstante Temperatur an der unteren Wand; (b) konstanter Wärmestrom an der unteren Wand.

Man erkennt unmittelbar, daß bei Vorgabe eines Wärmestromes im Vergleich zu den bisher behandelten isothermen Rändern die kritische Rayleigh-Zahl generell kleiner ist. In Tabelle (4.2) sind die kritischen Rayleigh- und Wellenzahlen für die asymptotischen Grenzfälle $Bi \rightarrow \infty$ ($T = konst$) und $Bi \rightarrow 0$ ($q = konst$) zusammengestellt.

Thermische Randbedingungen		obere Wand frei		obere Wand fest	
untere Wand	obere Wand	Ra_{krit}	a_{krit}	Ra_{krit}	a_{krit}
$T = konst$	$T = konst$	1100.657	2.68	1707.765	3.12
$T = konst$	$q = konst$	669.001	2.09	1295.781	2.55
$q = konst$	$T = konst$	816.748	2.21	1295.781	2.55
$q = konst$	$q = konst$	320	$\rightarrow 0$	720	$\rightarrow 0$

Tab. 4.2: Kritische Rayleigh- und Wellenzahlen für unterschiedliche thermische Randbedingungen

Die Diskussion endlicher Biot-Zahlen ist insbesondere im Zusammenhang mit Experimenten wichtig, da hier stets eine endliche Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials den Wärmeübergangskoeffizient an der Wand begrenzt. Da dieser von mehreren Faktoren abhängig ist, kann die Biot-Zahl nur abgeschätzt werden.

Oertel (1979) bestimmt die Eigenwerte beim Einsetzen der Konvektion näherungsweise durch ein Galerkinverfahren. Hierzu wird die Lösung als eine Überlagerung von endlich vielen Basisfunktionen dargestellt. Die Lösung des Systems von partiellen Differentialgleichungen wird hierdurch auf die Lösung eines algebraischen Gleichungssystems für die Entwicklungskoeffizienten reduziert. Durch eine geeignete Wahl der Basisfunktionen gelingt die Bestimmung kritischer Rayleighzahlen in Behältern mit vertikalen Seitenrändern. Abbildung 4.2 zeigt die Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl von der Länge eines Behälters der dimensionslosen Breite $h_y/h_z = 4$.

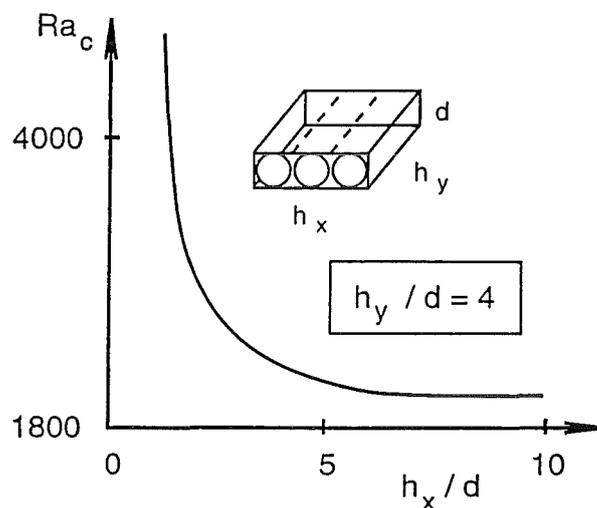


Abb. 4.2: Abhängigkeit der kritischen Ra-Zahl von den horizontalen Abmessungen.

Die kritische Rayleigh-Zahl nimmt mit abnehmender Behälterlänge h_y/h_z zu. Die Erfüllung der Haftbedingung an den seitlichen Rändern erzeugt zusätzliche Reibung, die stabilisierend auf die Schicht wirkt. Als Beispiel gibt Oertel eine kritische Rayleigh-Zahl von 1815 für die 10:4:1-Geometrie an.

Zusätzlich fixiert die Form des Behälters die Orientierung und die Anzahl der Walzen für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen. In rechteckigen Behältern führt dies zu einer Orientierung der Walzenachsen parallel zur kürzeren Seite.

In der Impulsgleichung Gl.(2.12) geht die Prandtl-Zahl als Gewichtungsfaktor der Impulskräfte ein. Damit ist das zeitliche Verhalten der Strömung für überkritische Rayleigh-Zahlen entscheidend von den Stoffwerten geprägt.

Krishnamurti (1973) untersucht das Verhalten der Konvektionsbewegung bei überkritischen Rayleigh-Zahlen für verschiedene Prandtl-Zahlen. Über die in diversen Fluiden aus Experimenten gewonnenen Abhängigkeiten gibt Abbildung 4.3 einen Überblick über die möglichen Strömungsformen.

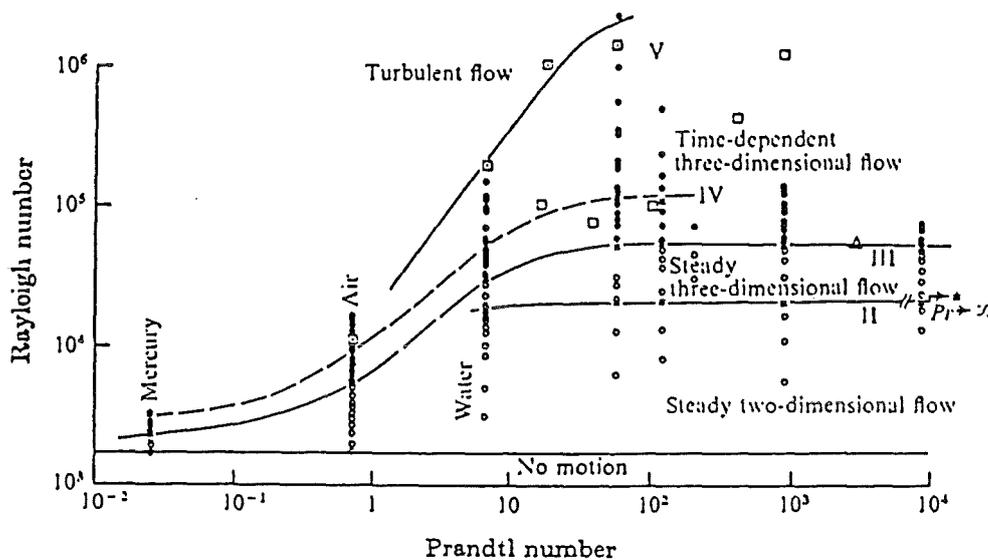
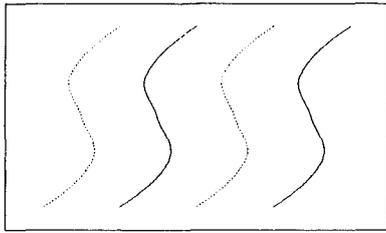


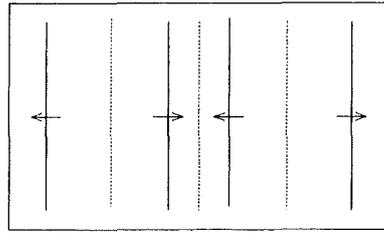
Abb. 4.3: Rayleigh-Prandtl-Zahl-Diagramm, Krishnamurti (1973).

Oberhalb der für alle Prandtl-Zahlen gleichen kritischen Rayleigh-Zahl liegt eine stationäre Konvektion in Form zweidimensionaler Rollen vor. Mit steigender Rayleigh-Zahl kann der Wärmestrom nicht mehr durch eine zweidimensionale Struktur aufrecht erhalten werden und die nachwievor stationäre Strömung wird dreidimensional. Steigert man die Rayleigh-Zahl weiter, so schließt sich der Bereich zeitabhängiger, dreidimensionaler Konvektionsstrukturen und schließlich der turbulente Konvektionsbereich an. Letzterer ist gekennzeichnet durch Strömungsmuster, die sich unabhängig von den Abmessungen der Schicht entwickeln.

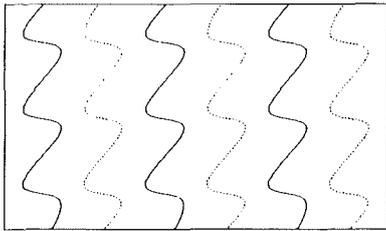
Die zeitabhängige Stabilität von Konvektionsrollen unterschiedlicher Zellgröße wurde von Clever und Busse (1974) untersucht. Hierzu überlagern diese Autoren eine hinsichtlich der Strömungsgrößen und der Wellenzahlen genau definierte Zellstruktur einer thermisch instabilen Schicht und untersuchen dann die Stabilität dieser Strukturen in Abhängigkeit unterschiedlicher Kennzahlen. Abb. 4.4 veranschaulicht die auftretenden Zellstrukturen.



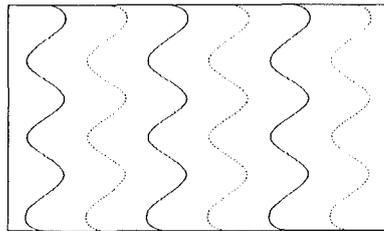
Zig-zag-Instabilität



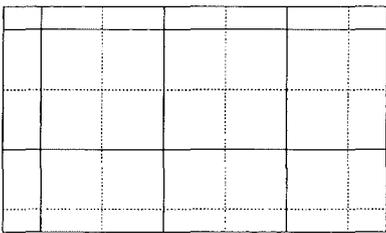
Eckhaus-Instabilität



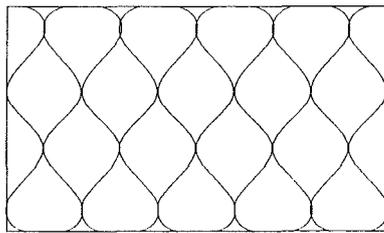
Skew-varicose-Instabilität



Oszillatorische-Instabilität



Cross-roll-Instabilität



Knot-Instabilität

Abb. 4.4: Strömungsstrukturen bei Bénard-Konvektion

Zig-Zag-Instabilität: Diese äußert sich in einer wellenförmigen Deformation der Walzen.

Eckhaus-Instabilität: Erfasst die Reduzierung der zugelassenen Bandbreite der instabilen zweidimensionalen Walzen für eine bestimmte überkritische Rayleigh-Zahl. Durch nichtlineare Wechselwirkungen zwischen den Walzen verschiedener Wellenlängen kommt es zu einem periodische Anschwellen und Schrumpfen der Rollenstrukturen. Diese kann auch in zweidimensionalen Betrachtungen auftreten.

Skew-varicose-Instabilität: Diese bimodale Instabilität entsteht, wenn die thermischen Grenzschichten ihrerseits instabil werden. Sie äußert sich in einer periodischen Verdickung und Verdünnung der Rollen. Für hohe und geringe Prandtl-Zahlen verschwindet diese Strömungsform.

Oszillatorische-Instabilität: Diese Instabilität ist besonders wichtig, da mit ihr die Strömungsmuster zeitabhängig werden. Die Rollen oszillieren entlang ihrer Achsen mit einer charakteristischen Frequenz. Es treten Wellenförmige Bewegungen auf, wobei sich die Wellen entlang der Walzenachsen ausbreiten.

Cross-roll-Instabilität: Bezeichnet das Auftreten von Rollen senkrecht zur ursprünglichen Rollenstruktur. Für kleine Prandtl-Zahlen tritt diese praktisch nicht auf.

Knot-Instabilität: Bei dieser speziellen Form der Cross-roll-Instabilität haben die einzelnen Strömungsstrukturen die Form eines Knotens.

In Abbildung 4.5 sind die Stabilitätsgrenzen der einzelnen Konvektionsformen in Abhängigkeit der Rayleigh- und der Wellenzahl aufgetragen. Es werden so Bereiche aufgezeigt, in denen charakteristische Strömungsformen in Abhängigkeit der Rayleigh-, Prandtl- und der Wellenzahl auftreten.

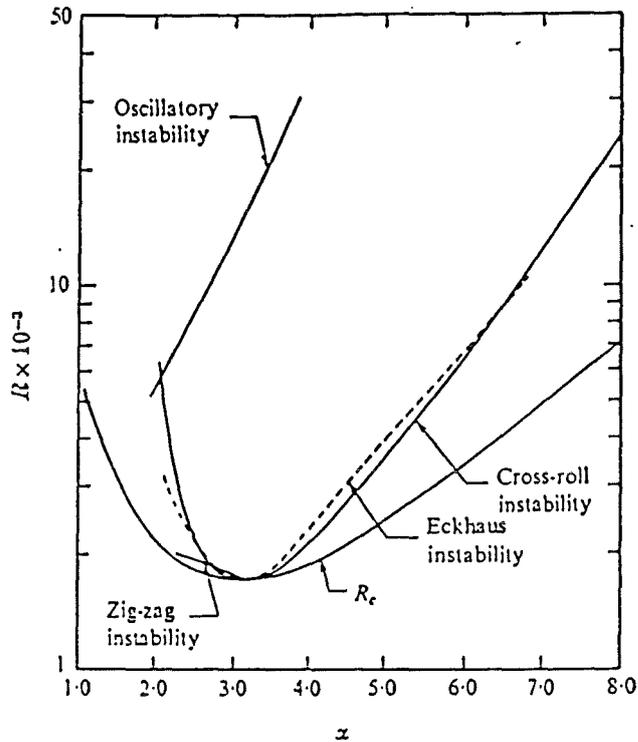


Abb. 4.5: Konvektionsstrukturen in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl(R) und der Wellenzahl(α) $Pr = 0.71$ nach Busse(1974).

Durch eine Zusammenfassung vieler solcher berechneter Diagramme für unterschiedliche Prandtl-Zahlen gelangt Busse (1978) zu einem detaillierten Rayleigh-Prandtl-Zahl-Diagramm (Abbildung 4.6).

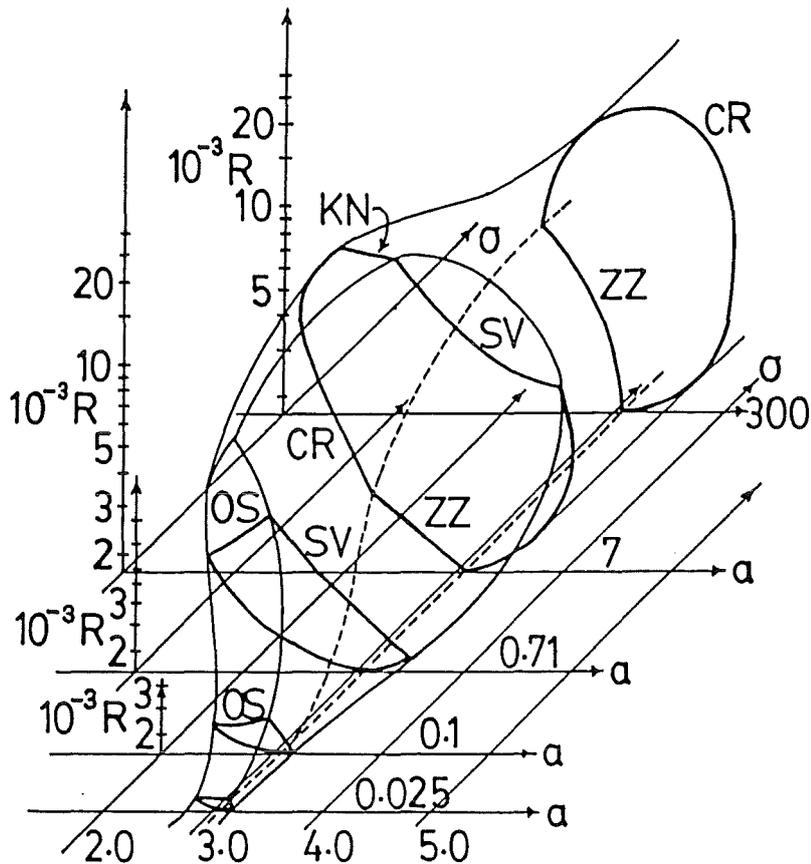


Abb. 4.6: Rayleigh(R)-Prandtl(σ)-Zahl-Diagramm, Busse (1978).

Die Charakteristik des Wärmetransports durch die Schicht wird durch die Nusselt-Zahl ausgedrückt:

$$Nu = \frac{q \cdot h}{\lambda \cdot \Delta T} \quad (4.2)$$

Diese gibt das Verhältnis des insgesamt durch die Schicht fließenden Wärmestromes q zu dem Wärmestrom an, welcher bei der anliegenden Temperaturdifferenz durch reine Wärmeleitung durch die Schicht fließen würde. Der Wärmeleitungsfall ist so durch $Nu = 1$ gekennzeichnet. Je größer die Nusselt-Zahl ist, desto höher ist der Anteil des konvektiven Wärmetransports.

Genauer betrachtet ist die Nusselt-Zahl für die Bénard-Konvektion eine lokale Größe. Ihr integraler Wert muß daher durch eine räumliche und gegebenenfalls auch zeitliche Mittelwertbildung der Größen q und ΔT gewonnen werden.

Den prinzipiellen Verlauf von Nusselt-Zahlen über der Rayleigh-Zahl zeigt Abbildung 4.7 für verschieden Prandtl-Zahlen.

Wie aus der Stabilitätstheorie bekannt, setzt die Konvektion unabhängig vom Wert der Prandtl-Zahl bei einer Rayleigh-Zahl von $Ra \approx 1700$ ein. Danach wächst die Nusselt-Zahl vom Wert 1 auf immer größere Werte an. Die Prandtl-Zahl bestimmt in diesem überkritischen Bereich entscheidend den Anstieg des Wärmetransports und die Transitionsbereiche, an denen sich die Strömungsstrukturen ändern. Dies wird anhand der wechselnden Steigung der Kurven deutlich.

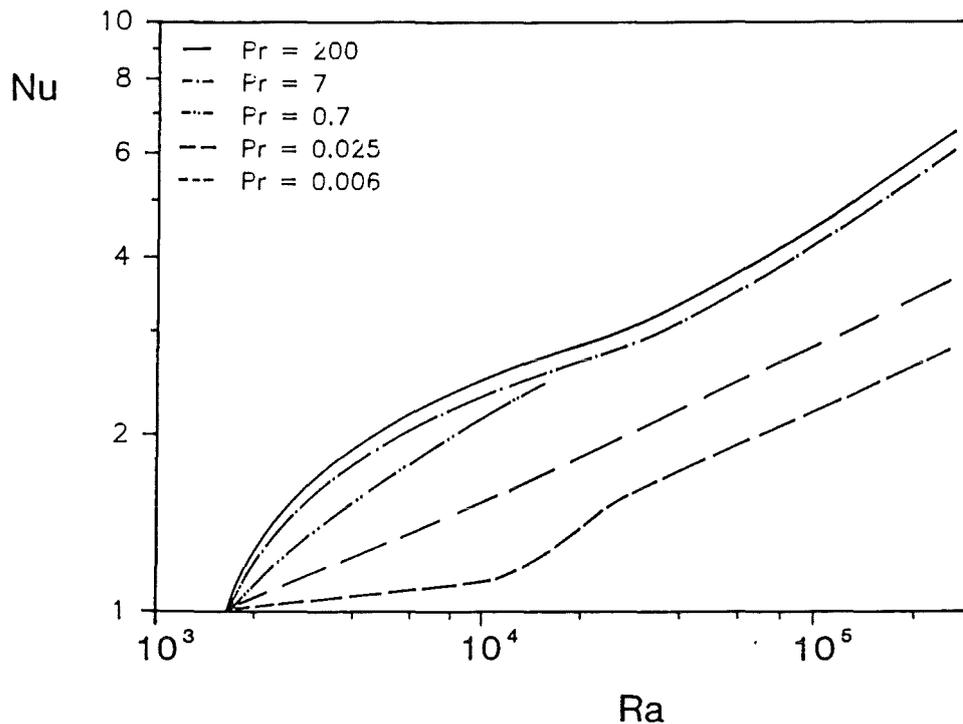


Abb. 4.7: Abhängigkeit der Nusselt-Zahl von der Rayleigh-Zahl für verschiedene Prandtl-Zahlen nach Kek (1989).

Die numerische Simulation der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist insbesondere bei kleinen Prandtl-Zahlen mit enormem numerischen Aufwand verbunden. Die Strömungszustände sind in der Regel dreidimensional instationär, und es müssen sehr dünne, kinematische und thermische Grenzschichten sowie kleine Strömungsstrukturen wie Turbulenzwirbel aufgelöst werden. Zweidimensionale, numerische Rechnungen erfüllen zwar die Bilanzgleichungen auf sinnvolle Art und Weise, die errechneten Nusselt-Zahlen überschätzen jedoch den Wärmetransport im Vergleich zu dreidimensionalen Rechnungen (Clever und Busse 1987). Die dritte Geschwindigkeitskomponente erhöht die dissipativen Verluste in der Fluidschicht, ohne daß ein stärkerer Antriebsmechanismus geschaffen wird. Die geringeren Geschwindigkeiten reduzieren dabei den konvektiven Wärmetransport und somit die Nusselt-Zahl.

Wörner (1994) gelingt die direkte numerische Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium für Rayleigh-Zahlen bis $Ra \approx 24000$. Er untersucht die Strukturen und Mechanismen der Konvektion und ermittelt aus seinen instationären Rechnungen die statistischen Eigenschaften der Turbulenz.

4.1.1 Bénard-Konvektion mit Magnetfeld

Eine lineare Stabilitätsanalyse der Bénard-Konvektion unter Magnetfeldeinfluß in der unendlich ausgedehnten Schicht wurde von Chandrasekhar (1961) durchgeführt. Für ein vertikales Magnetfeld findet er ein starkes Ansteigen der kritischen Rayleigh-Zahl sowie der kritischen Wellenzahlen, was einer Verkleinerung der auftretenden Konvektionsstrukturen entspricht (vgl. Abschnitt 3.1.6). Besitzt das Magnetfeld zusätzlich eine horizontale Komponente, so erfolgt das Einsetzen der Konvektion in Form von in Magnetfeldrichtung orientierter Walzen.

Busse und Clever behandeln mit derselben Vorgehensweise wie im hydrodynamischen Fall in zahlreichen Arbeiten den Einfluß magnetischer Felder auf das räumliche und zeitliche Verhalten der Konvektion. Sie gehen hierbei ausschließlich von einer unendlichen Flüssigkeitsschicht aus, was sie durch periodische Ränder bei ihren Rechnungen realisieren. Hierdurch können keine zusätzlichen Strompfade in vertikalen Wänden auftreten. Die induzierten Ströme müssen sich also im Fluid selbst schließen. Ferner wird die magnetische Diffusivität $1/\mu\sigma$ viel größer angenommen als die thermische Diffusivität. Dadurch ist die magnetische Reynolds-Zahl vernachlässigbar klein, was den Gegebenheiten bei flüssigen Metallen entspricht. Es ist zweckmäßig, die auftretenden Effekte für horizontale und vertikale Magnetfelder getrennt zu betrachten.

In einer ersten Arbeit finden Busse und Clever 1982 für ein vertikales Magnetfeld eine Verschiebung der Stabilitätsgrenzen zu höheren Rayleigh(R)- und Wellenzahlen(α). In Abbildung 4.8 sind die Stabilitätsbereiche der Konvektionsrollen mit und ohne Magnetfeld aufgetragen. Die Prandtl-Zahl von 0.025 entspricht der von Quecksilber.

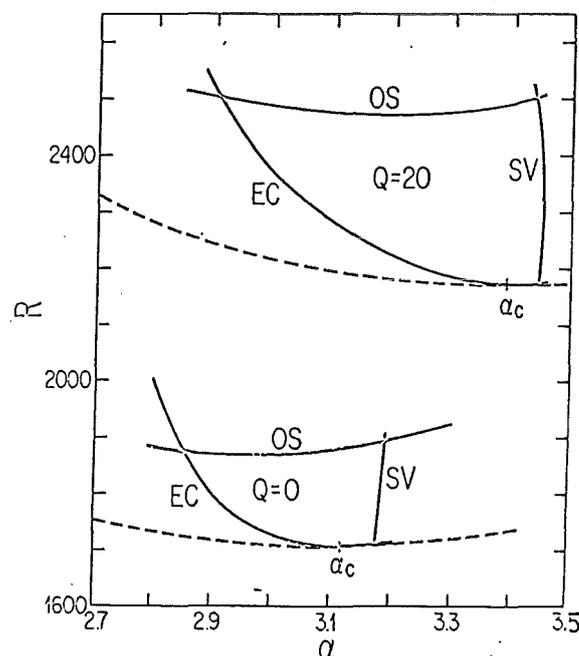


Abb. 4.8: Bereiche stabiler Konvektionsrollen in Quecksilber ($Pr = 0.025$) für $Q = 0$ und $Q = 20$. Die eingezeichneten Linien entsprechen dem Einsetzen oszillatorischer (OS)-, der skewed varicose (SV)- und der Eckhaus (EC)-Instabilität. Die gestrichelten Linien kennzeichnen den Beginn der Konvektion nach der linearen Theorie (vgl. Absch. 3).

Die Grenzen der oszillatorischen Instabilitäten werden vom Magnetfeld stärker beeinflusst, als die der stationären. Dies führt zu einem vergrößerten Bereich stationärer Konvektionsrollen als im nichtmagnetischen Fall. In einer weiteren, aufbauenden Arbeit dehnen die beiden Autoren (Clever und Busse 1989) ihre Untersuchungen auf den Einfluß der Prandtl-Zahl auf die instationären Konvektionsmuster aus. Es ergibt sich hierbei, daß das Magnetfeld einen ähnlichen Einfluß auf die instationären, dreidimensionalen Strömungsstrukturen hat, wie eine Vergrößerung der kinematischen Viskosität. Insbesondere wird von den Autoren auf die Erhöhung der Nusselt-Zahlen durch die Laminarisierung der Strömungsstruktur hingewiesen.

In einer aktuellen Arbeit (Busse und Clever 1996) wird schließlich der Einfluß starker vertikaler Magnetfelder auf die Konvektion untersucht. Dabei kommt es durch die mit dem Magnetfeld immer größer werdenden Wellenzahlen zu großen Unterschieden zwischen den horizontalen und vertikalen Längenskalen. Dies führt zu einem neuen Strömungsphänomen beim Übergang von zweidimensionalen Rollen zu dreidimensionalen Strömungsstrukturen. Die Autoren bezeichnen dieses als 'Knot instability'.

Das Einsetzen dreidimensionaler Instabilitäten unter dem Einfluß eines horizontalen Magnetfeldes wird von Busse und Clever (1983) untersucht. Die Lösung für in Magnetfeldrichtung orientierte, zweidimensionale Konvektionswalzen ist identisch mit dem hydrodynamischen Fall. Daher sind weder die kritische Rayleigh-Zahl (R) noch die kritische Wellenzahl (α) durch das Magnetfeld beeinflusst. Abbildung 4.9 zeigt die Verschiebung der Stabilitätsgrenzen unter dem Einfluß des Magnetfeldes.

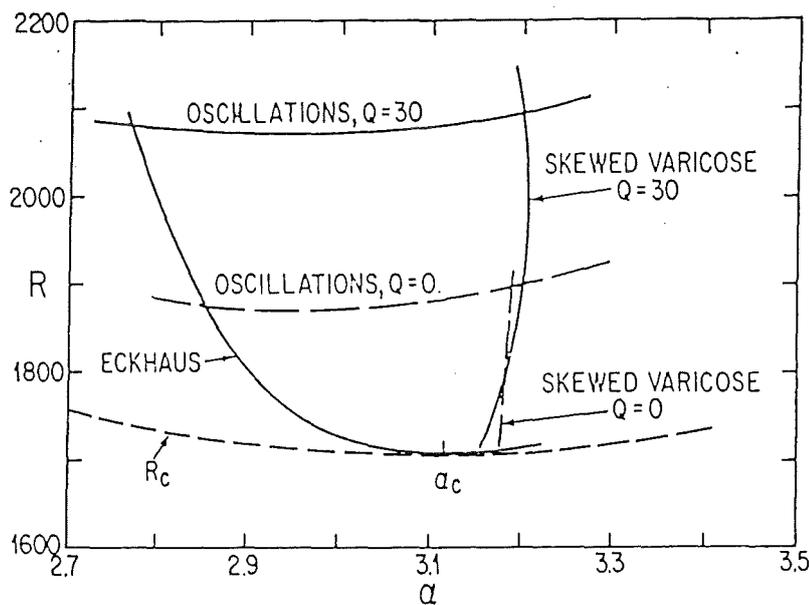


Abb.4.9: Einfluß eines horizontalen Magnetfeldes auf das Einsetzen dreidimensionaler Instabilitäten, Busse und Clever (1983).

Die Eckhaus-Instabilität ist, wie bereits dargelegt, ein zweidimensionaler Effekt und bleibt daher unbeeinflusst. Die Skewed-Varicose-Instabilitätsgrenze grenzt den Bereich stabiler Konvektionswalzen gegenüber höheren Wellenzahlen ab. Sie bleibt durch das Magnetfeld nahezu unverändert. Die Grenze für das Auftreten oszillatorischer Instabilitäten wird dagegen bei nahezu unveränderter kritischer Wellenzahl zu höheren Rayleigh-Zahlen verschoben. Die Frequenz der bei genügend hoher Rayleigh-Zahl auftretenden Oszillationen wird dabei, bedingt durch die zusätzliche "Rückstellkraft" des Magnetfeldes, größer als im hydrodynamischen Fall.

In einer weiteren Arbeit (Busse und Clever 1989) wird der Einfluß eines horizontalen Feldes auf instationäre, dreidimensionale Strömungsstrukturen (traveling-wave-convection) betrachtet. Neben der auch hier auftretenden Ausrichtung der Konvektionsstrukturen in Magnetfeldrichtung ist der bemerkenswerteste Effekt die Verbesserung des Wärmetransportes durch die Laminarisierung der Geschwindigkeitsverteilung. Das Magnetfeld zwingt die Strömung in Richtung zweidimensionaler Rollen, da so Joulesche Verluste minimiert werden.

Die im hydrodynamischen Fall durch die dritte Geschwindigkeitskomponente verursachte Dissipation verschwindet, und es treten höhere Strömungsgeschwindigkeiten auf, die den konvektiven Wärmetransport verbessern. Es ist fraglich, ob dieser Effekt auch auftritt, wenn der Fluidbereich durch Seitenwände begrenzt ist, da dann zusätzliche Schließungsmöglichkeiten für die induzierten Ströme vorhanden sind.

Der allgemeine Fall eines beliebig geneigten Magnetfeldes wird von Busse und Clever 1990 in einer weiteren Arbeit behandelt. Die früheren Ergebnisse werden zusammengefaßt und um den Einfluß verschiedener elektrischer Randbedingungen an der oberen und unteren Wand erweitert. Die Stabilitätsbedingungen für zweidimensionale Konvektionsformen hängen lediglich von der vertikalen Komponente des Magnetfeldes ab.

Während die für das Einsetzen der Konvektion erforderliche Rayleigh-Zahl unabhängig von der Prandtl-Zahl ist, so sind andere Eigenschaften wie der konvektive Wärmetransport stark von dieser abhängig. Für Prandtl-Zahlen flüssiger Metalle ($Pr \ll 1$) tritt der als Trägheitskonvektion bezeichnete Effekt eines wie ein Starrkörper rotierenden Walzenkerns auf.

Unter den verschiedensten Orientierungsmöglichkeiten eines magnetischen Feldes unterdrückt ein horizontales Magnetfeld die oszillatorischen Instabilitäten am stärksten. Ein Einfluß auf zweidimensionale Strömungszustände ist dagegen nicht vorhanden.

Ein rein vertikales Magnetfeld dagegen verschiebt die charakteristischen Stabilitätsgrenzen hin zu höheren Rayleigh- und Wellenzahlen. Die mit dem Magnetfeld immer größer werdenden Unterschiede zwischen den horizontalen und vertikalen Längenskalen führen zu neuen dreidimensionalen Strömungsmustern, z.B. der Knot-Instabilität, die im nichtmagnetischen Fall nicht auftreten.

Ganz allgemein ist der Effekt magnetischer Felder vergleichbar mit einer Erhöhung der Prandtl-Zahl, durch welche sich auch die Bereiche stabiler Konvektionsformen sowie der konvektive Wärmetransport vergrößern lassen. Elektrisch perfekt leitende Wände vergrößern, verglichen mit elektrisch isolierten Wänden, die stabilisierende Wirkung vor allem bei vertikalen Feldern.

Van der Borgh et al (1972) untersuchen das Verhalten der Konvektion für stark überkritische Rayleigh-Zahlen und starke vertikale Magnetfelder. Durch die zum Teil stark vereinfachenden Annahmen können keine Aussagen hinsichtlich der dreidimensionalen Struktur der Strömung getroffen werden. Vielmehr werden Beziehungen für die Bestimmung von Nusselt-Zahlen in Abhängigkeit der Rayleigh- und der Chandrasekhar-Zahl durch analytische und numerische Verfahren abgeleitet. Abbildung 4.10 faßt die Ergebnisse verschiedener Ansätze zusammen.

Die Nusselt-Zahlen fallen monoton mit wachsender Magnetfeldstärke auf den Wert eins ab, der die Stabilitätsgrenze markiert. Für eine Konstante Rayleighzahl ergibt sich mit der Erhöhung der Chandrasekharzahl stets eine Verringerung des konvektiven Wärmestroms.

Bei vorgegebener Rayleigh - und Chandrasekhar-Zahl wird der Wärmetransport auch durch die Wellenzahl bestimmt. Es treten hierbei von der Chandrasekhar-Zahl abhängige Wellenzahlen auf für die die Nusselt-Zahl maximal wird.

Da die Ergebnisse in einem durch Experimente abgedeckten Bereich liegen, können die Ergebnisse zu Vergleichen herangezogen werden. Leider bleibt die Prandtl-Zahl bei der Bildung der Näherungsbeziehungen unberücksichtigt, was ihre Gültigkeit für Flüssigmetalle ($Pr \ll 1$) fraglich erscheinen läßt.

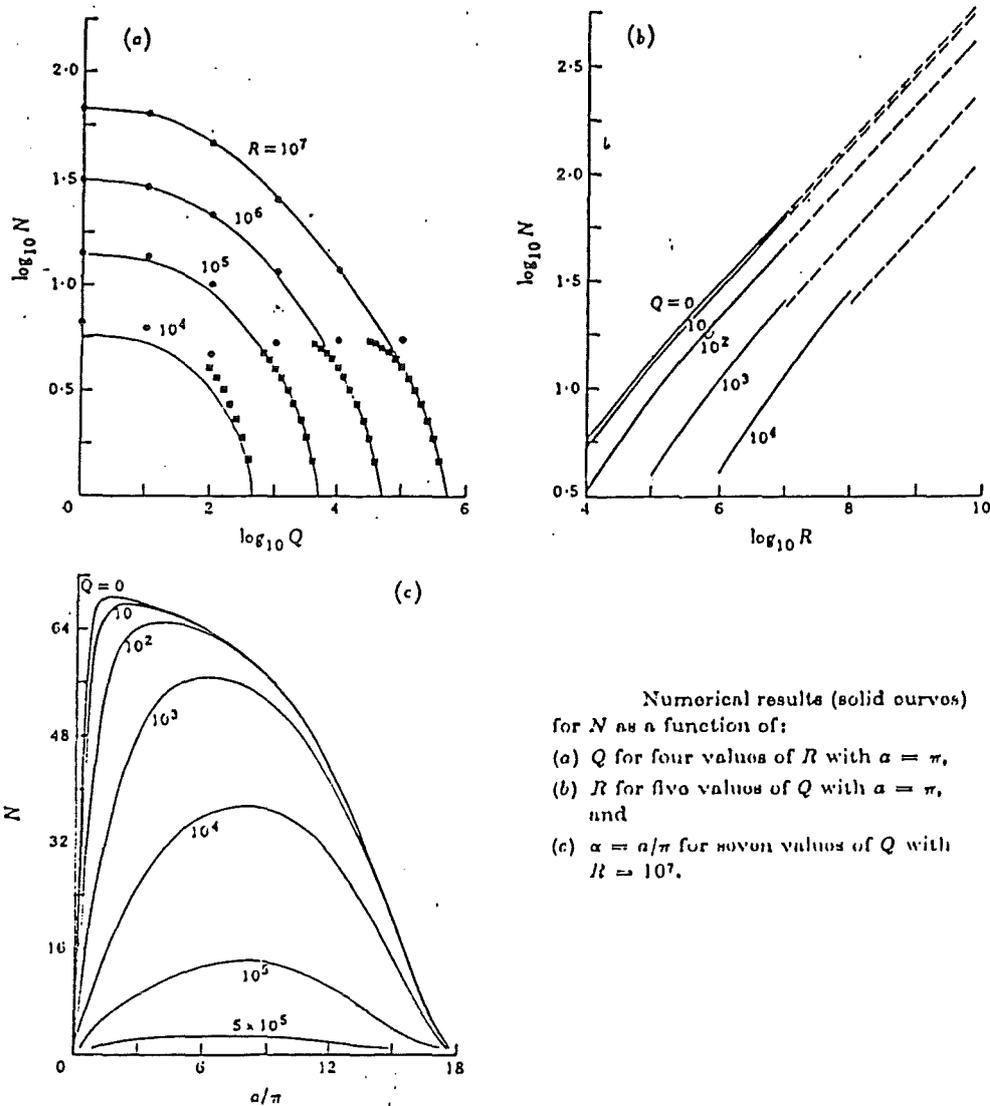


Abb 4.10: Nusselt(N)-, Wellenzahlen(α) als Funktion der Rayleigh(R)- und der Chandrasekhar-Zahl(Q).

Der in Experimenten unvermeidliche Einfluß vertikaler Berandungen des Fluidbereiches auf die Strömung ist in theoretischen wie auch in numerischen Arbeiten für Bénard-Konvektion unter dem Einfluß von Magnetfeldern kaum untersucht. Durch die Erfüllung der kinematischen Haftbedingung entstehen an den Seitenwänden Grenzschichten geringerer Dicke. Diese bilden zusammen mit der gegebenenfalls elektrischen Leitfähigkeit des Wandmaterials zusätzliche Schließungsmöglichkeiten für die durch die Konvektionsbewegung induzierten Ströme.

Die Stromdichte im Fluid kann sich dadurch im Gegensatz zur unendlich ausgedehnten Schicht erhöhen. Die daraus resultierenden größeren Lorentz-Kräfte dämpfen die Konvektionsbewegung auch für den Fall in Magnetfeldrichtung orientierter Rollen.

Die räumliche Struktur der Strömung für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen wird von Tabelling (1982) mittels einer schwach nichtlinearen Theorie untersucht. Ein vertikales Magnetfeld beeinflusst lediglich die lokalen Strömungsstrukturen (kleinere Wellenlängen). Die vom Behälter aufgeprägten Strömungsstrukturen, wie z.B. zur kürzeren Seite hin orientierte Walzen, werden dagegen nicht verändert.

Im Gegensatz hierzu kann die Umorientierung der dreidimensionalen Strömungsstrukturen hin zu in Magnetfeldrichtung orientierten Walzen bei horizontalem Magnetfeld beobachtet werden. Dieser Effekt tritt bereits für sehr schwache Werte der magnetischen Induktion auf.

4.2 Experimentelle Arbeiten

Neben den in der Natur beobachtbaren Phänomenen der thermischen Zellularkonvektion existiert eine Vielzahl experimenteller Arbeiten, welche mit dem Experiment von Bénard (1900) beginnen. Experimentell einsetzbare Fluide weisen verbunden mit der für die Untersuchung der Magnetokonvektion notwendigen, elektrischen Leitfähigkeit, immer eine sehr kleine Prandtl-Zahl auf. Daher werden auch zur Diskussion des rein hydrodynamischen Falls ausschließlich Experimente mit Flüssigmetallen als Medium herangezogen.

4.2.1 Experimentelle Arbeiten ohne Magnetfeld

Sobermann führt Messungen ($Pr = 0.025$) für Rayleigh-Zahlen bis $4 \cdot 10^4$ durch. Für die Rayleigh- Nusselt-Zahl-Beziehung gibt er den Zusammenhang

$$Ra = 90.7 \cdot (Ra \cdot Nu)^{0.394}. \quad (4.2)$$

Rossby (1969) führt ebenfalls in einer runden Quecksilberschicht Messungen im Bereich $10^3 < Ra < 5 \cdot 10^5$ durch. Aus der relativ großen Streuung der Temperaturmeßwerte beim Einsetzen der Konvektion im Vergleich zu Fluiden höherer Prandtl-Zahl folgert er, daß die Konvektion stets turbulent ist. Aus den Meßwerten leitet er die Korrelation

$$Nu = 0.147 \cdot Ra^{0.257} \quad (4.3)$$

ab.

Wesentlich höhere Rayleigh-Zahlen realisieren Globe und Dropkin (1959) in verschiedenen Fluiden. Für Quecksilber geben sie im Rayleigh-Zahlbereich von $2 \cdot 10^5 < Ra < 2 \cdot 10^7$ die auch für höhere Prandtl-Zahlen $0.02 < Pr < 8750$ gültige Beziehung

$$Nu = 0.069 \cdot Ra^{0.33} \cdot Pr^{0.074} \quad (4.4)$$

an.

Neuere Experimente zu Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber werden von Cioni, Ciliberto und Someria (1996) durchgeführt. Sie erreichen Rayleigh-Zahlen im Bereich von $4.6 \cdot 10^6 < Ra < 6.3 \cdot 10^9$ in einem Behälter mit dem Breiten- Höhenverhältnis von eins. Für die Nusselt-Zahl-Korrelationen geben sie drei Bereiche an:

$$Nu = (0.14 \pm 0.005) \cdot Ra^{(0.26 \pm 0.02)} \quad 4.6 \cdot 10^6 < Ra < 4.5 \cdot 10^8, \quad (4.5)$$

$$Nu = (0.44 \pm 0.015) \cdot Ra^{(0.20 \pm 0.02)} \quad 4.5 \cdot 10^8 < Ra < 2.1 \cdot 10^9. \quad (4.6)$$

Ab einer Rayleigh-Zahl von $Ra > 2.1 \cdot 10^9$ kommt es zu einem starken Anstieg der Nusselt-Zahl. Eine Korrelation kann hier nicht angegeben werden, da der Parameterbereich der Versuchseinrichtung hier endet.

Flüssiges Natrium weist gegenüber dem in den bisherigen Versuchen beschriebenen Quecksilber eine noch geringere Prandtl-Zahl von $Pr \approx 0.006$ auf. Die Durchführung von Experimenten ist jedoch wegen der hohen chemischen Reaktivität sowie der höheren Schmelztemperatur und der sehr hohen Wärmeleitfähigkeit von Natrium erheblich aufwendiger als bei Quecksilber.

Kek (1989) untersucht die Rayleigh-Bénard-Konvektion in einem zylindrischen Behälter von 500 mm Durchmesser und einer Schichthöhe von 15.5 bzw. 46.5 mm Höhe (siehe auch Kek et al. (1990), Kek und Müller (1993)). Mit dieser Anordnung erschließt er sich den Rayleigh-Zahl-Bereich von $1.5 \cdot 10^3 < Ra < 2.5 \cdot 10^5$. Aus den gemessenen Nusselt-Zahlen leitet er die folgenden, empirischen Beziehungen ab:

$$Nu = 0.59 \cdot Ra^{0.072} \quad 1.5 \cdot 10^3 < Ra < 8 \cdot 10^3, \quad (4.7)$$

$$Nu = 0.059 \cdot Ra^{0.32} \quad 1.2 \cdot 10^4 < Ra < 2.5 \cdot 10^4, \quad (4.8)$$

$$Nu = 0.117 \cdot Ra^{0.25} \quad 4 \cdot 10^4 < Ra < 2.5 \cdot 10^5. \quad (4.9)$$

Vergleicht man die Korrelationen der verschiedenen Autoren, so wird deutlich, daß die Bestimmung des Wärmeübergangs bei Rayleigh-Bénard-Konvektion bei sehr kleinen Prandtl-Zahlen mit großen Unsicherheiten verbunden ist. Bei der angestrebten Realisierung hoher Rayleigh-Zahlen fordert die hohe Wärmeleitfähigkeit flüssiger Metalle bei den im Labormaßstab realisierbaren Abmessungen extrem hohe Wärmeströme durch die Schicht. Diese müssen zur Schaffung definierter Randbedingungen möglichst homogen aufgebracht und wieder abgeführt werden. Die Vorgabe einer konstanten Temperatur an der oberen und unteren Berandung durch Wahl eines Wandmaterials mit viel größerer Wärmeleitfähigkeit als das Fluid (z.B. Kupfer) ist nicht realisierbar, da kein Material existiert, welches die Wärmeleitfähigkeit von flüssigen Metallen um Größenordnungen übersteigt. Die thermischen Eigenschaften des Wandmaterials gehen daher unweigerlich in die Messungen ein. Hinzu kommt noch die starke Variation der Stoffeigenschaften flüssiger Metalle mit der Temperatur.

An den Exponenten der Rayleigh-Nusselt-Zahl-Korrelationen tritt meist ein $1/3$ -Potenzgesetz auf, welches dem turbulenten Charakter der Konvektion Rechnung trägt. Demgegenüber treten jedoch auch Exponenten der Größenordnung $1/4$ auf, welche eher einen laminare Charakter der Konvektion andeuten (vgl. Kutadelaze et al. (1958)).

4.2.2 Experimentelle Arbeiten mit Magnetfeld

Erste Experimente zur Rayleigh-Bénard-Konvektion unter Magnetfeldeinfluß werden von Nakagawa (1955) durchgeführt. Das Testfluid Quecksilber befindet sich in einem kreisrunden, von unten beheizten Behälter. Die obere Grenzfläche bleibt frei und wird durch einen Gasstrom gekühlt. Die Anordnung befindet sich in einem Permanentmagneten konstanter Feldstärke, der der Schicht ein vertikales Magnetfeld aufträgt. Verschiedene Chandrasekhar-Zahlen können daher nur über die Schichthöhe eingestellt werden.

Anhand des Verlaufs des Temperaturgradienten über die Schicht bei steigender Heizleistung kann die für das Einsetzen der Konvektion kritische Rayleigh-Zahl bestimmt werden. Unter Verwendung eines Magneten mit variabler Feldstärke dehnt Nakagawa (1956) den Bereich der Chandrasekhar-Zahlen bei verschiedenen Schichthöhen auf nahezu den gesamten relevanten

Bereich aus. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der kritischen Rayleigh-Zahlen mit den von Chandrasekhar (1961) mit einer linearen Theorie gefundenen.

Durch die visuelle Zugänglichkeit der freien, oberen Grenzfläche kann die Größe der Strukturen ermittelt werden (Nakagawa 1959). In Übereinstimmung mit der linearen Theorie wird eine Verkleinerung der Konvektionsstrukturen beobachtet. Bemerkenswert ist dabei, daß trotz einer freien Quecksilberoberfläche die Werte der festen Randbedingungen gefunden werden. Dies führt der Autor auf die Bildung einer Oxidschicht an der Grenzfläche zurück.

Lehnert und Little (1956) untersuchen in einer ähnlichen Anordnung die Konvektion unter dem Einfluß eines inhomogenen vertikalen Magnetfeldes. Sie finden, daß die für Konvektion kritische Feldstärke unabhängig von deren räumlicher Verteilung ist. In einem weiteren Versuch legen sie ein homogenes Magnetfeld an, welches gegenüber der Vertikalen beliebig geneigt werden kann und bestätigen, daß für die Stabilität der Schicht lediglich der horizontale Anteil des Feldes wesentlich ist.

Für ein rein horizontales Feld ergibt sich keine Verlagerung der kritischen Rayleigh-Zahl zu höheren Werten. Es bilden sich schmale horizontale Zellen, die sich in Magnetfeldrichtung über den gesamten Behälter erstrecken. Das Fluid strömt entlang magnetischer Feldlinien in horizontaler Richtung, und nicht wie in der linearen Theorie beschrieben in Ebenen senkrecht zum Magnetfeld. Eine Erklärung hierfür kann bislang nicht gegeben werden.

Fauve, Laroche und Libchaber (1981) bestimmen das zeitliche Verhalten einer von unten beheizten Quecksilberschicht im Bereich oszillatorischer Instabilitäten. Ihre Messungen führen sie in relativ kleinen schmalen Geometrien durch. Ein Einfluß der vertikalen Behälterwände auf die Konvektionsbewegung ist daher nicht auszuschließen. Für ein vertikales Magnetfeld finden sie eine starke Dämpfung der Oszillationen bei leicht zurückgehender Frequenz. Bei einem horizontalen Feld ist die Dämpfung der Oszillationen mit einem Anstieg ihrer Frequenzen verbunden.

In nachfolgenden Arbeiten (Libchaber, Laroche und Fauve 1982 sowie Libchaber, Fauve und Laroche 1983) wird das Auftreten weiterer Frequenzen und der Übergang zu unregelmäßigen, chaotischen Zeitsignalen untersucht. Die Ergebnisse müssen immer auch im Zusammenhang mit der relativ kleinen Breite der Experimentiereinrichtung gesehen werden.

Fauve, Laroche, Libchaber und Perrin (1984) untersuchen die Rayleigh-Bénard-Konvektion in einem kreisrunden Behälter bei homogenem horizontalen Magnetfeld. Bei einem Radius von 18 mm beträgt die Schichthöhe 6 mm. Sie beobachten ohne Magnetfeld im Gegensatz zu kleinen rechteckigen Behältern einen direkten Übergang des Wärmeleitungs Zustands in eine zeitchaotische Konvektionsströmung. Wird das horizontale Magnetfeld angelegt, so ergeben sich in Magnetfeldrichtung orientierte Konvektionsrollen, und die Strömung wird stationär. Abbildung 4.11.a faßt die Beobachtungen in einem Stabilitätsdiagramm in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl(R) und der Chandrasekhar-Zahl(Q) zusammen wobei R_c die kritische Rayleigh-Zahl des hydrodynamischen Falles darstellt.

Im Stabilitätsdiagramm grenzen die gestrichelten Linien die verschiedenen charakteristischen Bereiche der Konvektionsströmung gegeneinander ab. Die Kurve $R_1(Q)$ markiert den Übergang von stationärer Konvektion zu instationären Mustern. Oberhalb der Kurve $Q_0(R)$ liegen sich periodisch ändernde einfache Muster vor. Unterhalb finden sich chaotische Zeitabhängigkeiten an welche sich der durch $R_2(Q)$ begrenzte Bereich der turbulenten Konvektion anschließt.

Abbildung 4.9.b zeigt die gemessenen Nusselt-Zahlen(N) über der Rayleigh-Zahl für verschiedene Magnetfeldstärken. Es zeigt sich deutlich eine Verbesserung des Wärmetransportes mit

der Vergrößerung der Chandrasekhar-Zahl. Dieser Effekt kann mit der Relaminarisierung der Konvektionsbewegung durch das Magnetfeld erklärt werden. Wechsel in den Steigungen der Kurven deuten auf Veränderungen der Strömungsstrukturen hin.

Ist die Rayleigh-Zahl genügend hoch, so geht die räumliche Ordnung verloren, und der Wärmetransport wird dann unabhängig vom Magnetfeld.

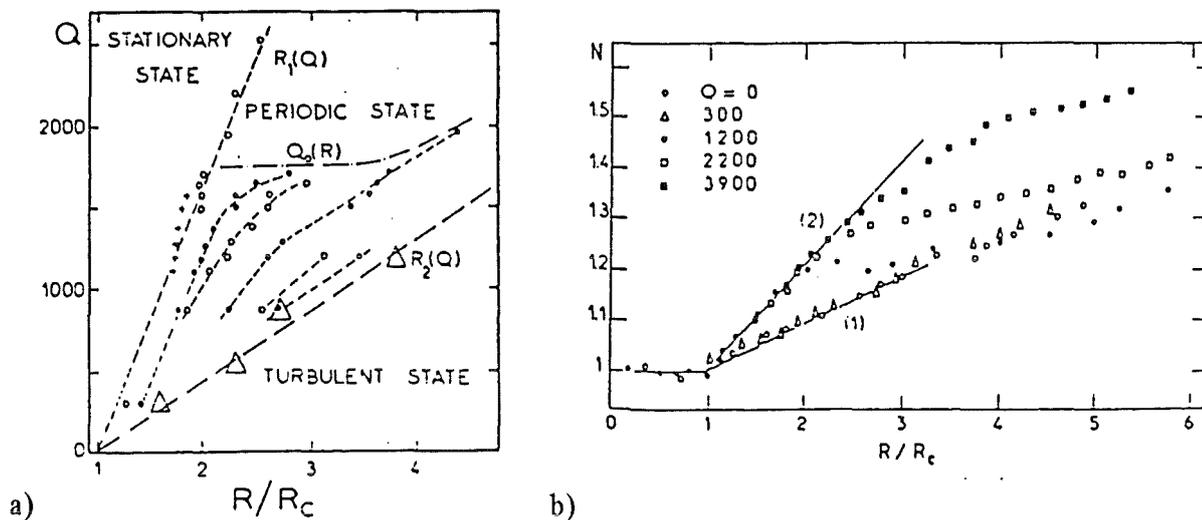


Abb.4.11: a) Stabilitätsdiagramm
b) Nusselt-Rayleigh-Zahl-Beziehungen für verschiedene Chandrasekhar-Zahlen

Bei den bisher genannten Experimenten bleibt der Kennzahlbereich auf geringfügig überkritische Rayleigh- und Chandrasekhar-Zahlen, die schwachen Magnetfeldern entsprechen, begrenzt. Dieser Kennzahlbereich ist jedoch weit von praktischen Anwendungen entfernt, bei denen wesentlich höhere Kennzahlen auftreten.

Kishida und Takeda (1994) untersuchen die Konvektion in einer $40\text{mm} \times 40\text{mm} \times 20\text{mm}$ großen, mit Quecksilber gefüllten Zelle. Bei einer Rayleigh-Zahl der Größenordnung $4 \cdot 10^5$ variiert die Chandrasekhar-Zahl bei rein horizontalem Feld von 0 bis $4 \cdot 10^6$. Die Visualisierung der Strömungsstruktur erfolgt durch einen Flüssigkristallfilm der Temperaturunterschiede auf allen vier Seitenwänden sichtbar macht. Ohne Magnetfeld gibt es keine qualitativen Unterschiede in den sich zeitlich ändernden Temperaturprofilen auf den einzelnen Seiten. Die Konvektion ist somit isotrop und turbulent.

Ab einer Chandrasekhar-Zahl von $2.8 \cdot 10^3$ verschwinden die Geschwindigkeiten in Magnetfeldrichtung und es entsteht ein quasi zweidimensionaler, instationärer Strömungszustand aus zwei in Magnetfeldrichtung orientierter Walzen.

Erhöht man die Stärke des Magnetfeldes weiter, so verschwinden ab einer Chandrasekhar-Zahl von $3.1 \cdot 10^5$ die Temperaturfluktuationen, und die Strömung wird vollständig zweidimensional und laminar. Dieser Strömungszustand bleibt bis zu den maximal erreichbaren Magnetfeldstärken erhalten, es gibt jedoch Anzeichen für eine Dämpfung der Geschwindigkeiten.

Anhand der Temperatur-Zeitsignale in der oberen Wand kann die Struktur der Konvektionsströmung objektiv ermittelt werden. Es ergeben sich hierbei, ebenso wie bei schwach überkritischen Rayleigh-Zahlen und schwachen Magnetfeldern, charakteristische Strömungsbereiche. Die Autoren unterteilen diese in Turbulenz, chaotische Bewegungen, oszillatorische Konvektion und schließlich zweidimensionale, laminare Konvektion.

5. Zweidimensionale Betrachtungsweisen

5.1. Zweidimensionale Approximation für starke Magnetfelder

Die Experimente zeigen, daß Strömungsmuster, bei denen die Wirbel bzw. Konvektionswalzen um die Magnetfeldrichtung drehen, gegenüber solchen mit zur Magnetfeldrichtung geneigter Achse bevorzugt auftreten. Diese für magnetohydrodynamische Strömungen generell zu beobachtende Unterdrückung von Geschwindigkeitskomponenten in Magnetfeldrichtung kann anhand der Grundgleichungen zunächst unabhängig von den Randbedingungen bzw. der Problemstellung diskutiert werden. Hierzu nehmen wir an, daß das Magnetfeld lediglich eine Komponente parallel zur x-Achse besitzt. Durch Anwendung der Rotation auf die Impulsgleichung (Gl. 2.12) erhält man die Wirbeltransportgleichung

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla^2 \Omega + Ra \cdot \nabla \times (T \cdot \mathbf{e}_z) + Q(\mathbf{e}_x \cdot \nabla) j, \quad (5.1)$$

mit der Wirbelstärke $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$. Nach nochmaliger Anwendung der Rotation auf die Wirbeltransportgleichung kann der Strom im elektrodynamischen Term mit der aus der Anwendung der Rotation auf das Ohmsche Gesetz gewonnenen Beziehung (Gl. 3.65) eliminiert werden.

$$\frac{1}{Pr} \nabla \times \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla^2 [\nabla \times \Omega] + Ra \cdot \nabla \times [\nabla \times (T \mathbf{e}_z)] + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{v}. \quad (5.2)$$

Mit der zweimaligen Anwendung des Rotationsoperators auf die Impulsgleichung gelangt man zu unterschiedlichen Formulierungen derselben Bilanzgleichung. Die Bedeutung der einzelnen Terme in der Kräftebilanz ändert sich dabei nicht. Die an einer der Gleichungen getroffenen Schlüsse sind daher auch auf die anderen Darstellungsformen übertragbar.

Der Einfluß des Magnetfeldes in Gleichung (5.2) verschwindet, wenn die zweiten Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten in Magnetfeldrichtung null sind, was gleichbedeutend mit identischen Geschwindigkeiten in Magnetfeldrichtung ist. Besitzt das Geschwindigkeitsfeld dagegen zweite Ableitungen in Magnetfeldrichtung, so treten in den Bewegungsgleichungen zusätzliche Kräfte auf, die über die induzierten Ströme gekoppelt sind. Wegen der endlichen elektrischen Leitfähigkeit flüssiger Metalle treten dabei Joulsche Verluste auf, so daß sich insgesamt ein zusätzlicher dissipativer Einfluß auf die Bewegungsgleichungen einstellt.

Da Strömungszustände mit erhöhter Dissipation der Strömungsenergie nur dann eingenommen werden, wenn stabilisierend wirkende Kräfteverhältnisse überschritten werden, können dreidimensionale Strömungszustände durch eine genügend große Chandrasekhar-Zahl unterdrückt werden. Die Wirbelstärke besitzt dann lediglich die Komponente in Magnetfeldrichtung, die keinem Einfluß durch magnetische Kräfte unterliegt.

Nach Einführung der skalaren Stromfunktion ψ mit $v = -\partial\psi/\partial z$ und $w = \partial\psi/\partial y$ kann das zweidimensionale Strömungsproblem in der (y,z)-Ebene durch die Wirbeltransportgleichung für die Wirbelstärke in Magnetfeldrichtung $\omega = \partial w/\partial y - \partial v/\partial z$ in x-Richtung beschrieben werden.

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial}{\partial z} \omega - \frac{\partial}{\partial z} \psi \frac{\partial}{\partial y} \omega \right] = \nabla^2 \omega + Ra \cdot \frac{\partial}{\partial y} T + Q \frac{\partial}{\partial x} j_x. \quad (5.3)$$

Die Strömungsgrößen ω und ψ sowie die Temperatur T sind in dieser Gleichung lediglich von den y,z-Koordinaten abhängig. Im elektrodynamischen Term tritt dagegen die Ableitung des Stromes normal zur Strömungsebene auf. Ein Einfluß des elektrodynamischen Terms auf die

Bewegungsgleichung tritt daher nur im Fall von Änderungen der Stromdichte entlang magnetischer Feldlinien auf.

5.1.1 Der Einfluß von Rändern senkrecht zum Magnetfeld

Ist der Fluidbereich in Magnetfeldrichtung begrenzt, so ist eine zweidimensionale Beschreibung der Strömung nicht mehr möglich; die Erfüllung der Haftbedingung fordert ein Abklingen der Wirbelstärke an den magnetfeldnormalen Hartmannwänden. Es entsteht dort ein dreidimensionaler Strömungszustand, der prinzipiell die Lösung der vollen, dreidimensionalen Gleichungen erforderlich macht.

Wie aus MHD-Kanalströmungen bekannt, besitzen die Hartmannschichten lediglich eine Dicke der Größenordnung $O(1/\sqrt{Q})$. Ihr Einflußbereich auf die Strömung ist daher selbst für moderate Chandrasekhar-Zahlen auf sehr dünne Wandgrenzschichten begrenzt. Im Strömungskern kann daher ein zweidimensionaler Strömungszustand vorausgesetzt werden, der mit Gleichung 5.3 beschreibbar ist.

Betrachtet man den elektrodynamischen Term in Gleichung 5.3, so erkennt man, daß elektrodynamische Wechselwirkungen nur dann auftreten, wenn die Ableitung des Stroms in Magnetfeldrichtung einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

Es muß nun geklärt werden, ob die Hartmannschicht neben ihrer begrenzten Wirkung auf die Geschwindigkeitsverteilung dreidimensionale Ströme ermöglicht, die bei unendlicher Ausdehnung der zweidimensionalen Strömungsstruktur nicht auftreten können. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 5.1 eine Wirbelröhre zwischen zwei magnetfeldsenkrechten Hartmannwänden.

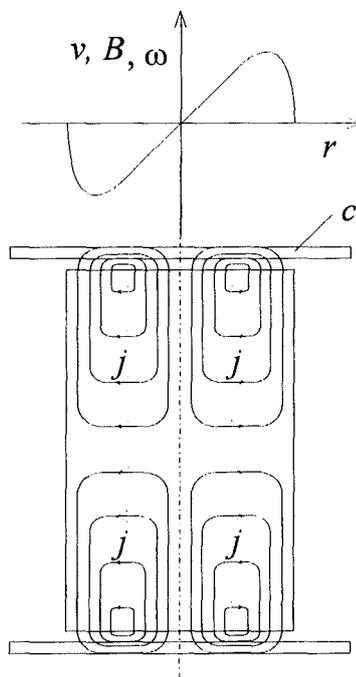


Abb. 5.1: Magnetfeldparallele Wirbelröhre begrenzt durch Hartmannwände.

Da eine rotationssymmetrische Geschwindigkeitsverteilung vorliegt, wird um den gesamten Umfang verteilt dieselbe radiale Potentialdifferenz zwischen Wirbelkern und Außenseite induziert. Mit der Annahme zweidimensionaler Strömung im Strömungskern variiert das elektrische Potential nur schwach mit der Höhe.

In den Hartmannschichten führen die geringeren Geschwindigkeiten zu geringeren radialen Potentialdifferenzen, so daß elektrisch Ströme entlang dieses Potentialgefälles fließen.

Es treten dadurch sich in Magnetfeldrichtung ändernde Komponenten der normal zur Strömungsebene fließenden Stromdichte auf. Der elektrodynamische Term in der Wirbeltransportgleichung (Gl. 5.3) ist von null verschieden, und es kommt zu einer zusätzlichen, elektrodynamischen Kraftwirkung, welche die Wirbelstärke im Strömungskern beeinflusst.

Im Wirbelkern werden die Ströme induziert, die Lorentz-Kraft wirkt hier der Bewegung entgegen und dämpft dadurch die Wirbelstärke. Im Übergangsbereich zur ruhenden Umgebung treiben die Ströme das Fluid entgegen den viskosen Kräften an. Dadurch minimieren sie die Dicke des Übergangsbereiches zum ruhenden Fluid und verursachen so eine lineare Geschwindigkeitsverteilung im Wirbelkern.

In der Hartmannschicht wirken die Lorentz-Kräfte entgegen den viskosen Reibungskräften und verkleinern dadurch die Dicke der Reibungsgrenzschicht. Die Hartmannschichten bilden so die die Stromdichten und somit die Stärke der Effekte im gesamten Gebiet bestimmenden, elektrischen Widerstände der Stromkreise.

Sind die Hartmannwände zudem elektrisch leitend, so finden die induzierten Ströme eine zusätzliche Schließungsmöglichkeit. Die Stromdichte im Fluid und damit die Dämpfung des Geschwindigkeitsfeldes wird dadurch zusätzlich erhöht.

5.1.2 Der Einfluß von Rändern parallel zum Magnetfeld

Bei einem Wirbel in einem unendlich ausgedehnten Fluid steht den radial induzierten Strömen ein unbegrenzter Bereich auf ihrem Weg zur Hartmannwand zur Verfügung.

Wird der Fluidbereich neben den magnetfeldsenkrechten Hartmann-Wänden noch durch magnetfeldparallele Seitenwände begrenzt, so kann sich der Wirbel nicht mehr auf die ruhende Umgebung ausbreiten. Es entstehen so unter Umständen an den Seitenwänden ebenfalls dünne Grenzschichten, die neben den Hartmannschichten einen zusätzlichen elektrischen Widerstand für die zu den Hartmannwänden fließenden Ströme bilden. Dies führt zu Potentialdifferenzen in Magnetfeldrichtung, die in einer zweidimensionalen Betrachtung nicht erfaßt werden können.

Dieser Effekt kann vermieden werden, indem elektrisch perfekt leitende Seitenwände vorausgesetzt werden, in welchen Potentialdifferenzen verschwinden (vgl. Abb. 5.2).

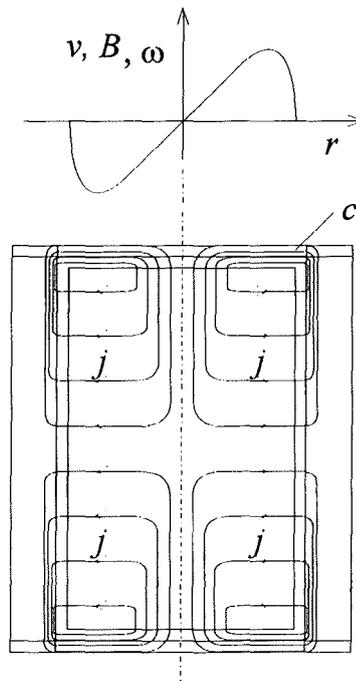


Abb. 5.2: Magnetfeldparallele Wirbelröhre begrenzt durch Hartmannwände und elektrisch perfekt leitende, magnetfeldparallele Seitenwände.

Die Hartmannschichten bilden dann nachwievor, zusammen mit einem gegebenenfalls elektrisch leitenden Wandmaterial, die einzigen, relevanten elektrischen Widerstände der Stromkreise.

Die Annahme elektrisch perfekt leitender Kanalwände bietet sich auch im Hinblick auf Experimente an, da zur Realisierung isothermer Wände ein Wandmaterial hoher Wärmeleitfähigkeit verwendet werden muß. Materialien hoher Wärmeleitfähigkeit besitzen ausnahmslos auch eine hohe elektrische Leitfähigkeit.

5.1.3 Formulierung der zweidimensionalen Gleichungen

Bei dem hier betrachteten Problem ist dem als zweidimensional angenommenen Strömungszustand eine dreidimensionale Stromdichteverteilung überlagert. Will man die Lösung des Gesamtproblems auf die zwei Dimensionen des Strömungsproblems beschränken, so muß ein analytischer Ansatz für die Änderung der magnetfeldparallelen Stromdichte in Gleichung (5.3) gefunden werden, der neben dem aktuellen Strömungszustand auch den Strompfad durch die Hartmannschicht berücksichtigt.

Bühler (1995) leitet die zweidimensionalen Gleichungen für die Berechnung einer Scherströmungsinstabilität her. Mit derselben Vorgehensweise können auch Gleichungen zur Berechnung von Naturkonvektionsströmungen hergeleitet werden.

Durch Anwendung der Divergenz auf das Ohmsche Gesetz (Gl. 3.46) ergibt sich mit $\nabla \cdot j = 0$ der Zusammenhang

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nabla_{yz}^2 \right) \phi = \omega . \quad (5.4)$$

∇_{yz}^2 ist der horizontale Laplaceoperator in der Strömungsebene.

Der Induktionsterm ($\nu \times \mathbf{B}$) des Ohmschen Gesetzes besitzt keine Komponente in Magnetfeldrichtung. Durch Differenzieren der x-Komponente des Ohmschen Gesetzes nach x kann daher der elektrodynamische Term in der Wirbeltransportgleichung (5.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} j_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi \quad (5.5)$$

im Strömungskern durch einen ausschließlich von Größen der Strömungsebene abhängigen ersetzt werden

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \psi \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] = \nabla^2 \omega + Ra \cdot \frac{\partial}{\partial y} T + Q \left[\nabla_{yz}^2 \phi - \omega \right]. \quad (5.6)$$

In den viskosen Hartmannschichten stehen im wesentlichen viskose Reibungskräfte mit elektrodynamischen Kräften im Gleichgewicht. Nach Einführung einer auf die Grenzschichtdicke δ bezogenen, wandnormalen Koordinate $\zeta = x/\delta$ erhält man eine vereinfachte Wirbeltransportgleichung

$$\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \omega_\delta + Q \omega_\delta = 0 \quad (5.7)$$

für die Beschreibung der Wirbelstärke ω_δ in der Wandgrenzschicht. Ist die so formulierte Kräftebilanz erfüllt, so nimmt die Grenzschichtdicke δ die Größenordnung $O(\sqrt{Q})$ an. Die Formulierung der Kräftebilanz an der Wand ist unabhängig von den y und z-Koordinaten. Die Anpassung der Strömungszustände im Strömungskern an die Haftbedingung an den senkrechten Wänden kann daher durch eine lediglich von der Magnetfeldrichtung abhängige Formfunktion erfolgen:

$$\omega = \omega_c \cdot f(x), \quad \psi = \psi_c \cdot f(x). \quad (5.8)$$

Da die Grenzschichten an den magnetfeldsenkrechten Wänden sehr dünn sind, kann der Mittelwert der Formfunktion zu Eins angenommen werden.

$$\frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx = 1. \quad (5.9)$$

Für hohe Chandrasekhar-Zahlen hat f unter der Voraussetzung exakt magnetfeldsenkrechter Wände bei $x = \pm b$ die asymptotische Lösung

$$f(x) = 1 - e^{\sqrt{Q}(x-b)}. \quad (5.10)$$

Durch Einführen der Ansätze (Gl. 5.8 -5.10) in die Wirbeltransportgleichung (Gl. 5.6) und in das Ohmsche Gesetz (Gl. 3.46) ergeben sich durch die Integration entlang der x-Koordinate von 0 bis b mit der Symmetriebedingung der Ströme $j_x(x=0) = 0$ sowie der Dünne-Wand-Approximation (Gl. 3.55) an der Hartmannwand die zweidimensionalen Gleichungen zur Bestimmung des elektrischen Potentials

$$\nabla_{yz}^2 \phi = \frac{b}{b+c} \omega \quad (5.11)$$

und der Wirbelstärke

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial}{\partial z} \omega - \frac{\partial}{\partial z} \psi \frac{\partial}{\partial y} \omega \right] = \nabla^2 \omega + Ra \cdot \frac{\partial}{\partial y} T - \frac{\omega}{\tau}. \quad (5.12)$$

Der Einfluß des Magnetfeldes tritt in diesen Gleichungen nur noch als ein der Wirbelstärke proportionaler Term auf. Der dimensionslose Ähnlichkeitsparameter τ stellt eine charakteristische Zeitskala für die Dämpfung der Wirbelstärke, verursacht durch Joulsche Dissipation dar. Er verknüpft die Einflüsse der Chandrasekhar-Zahl Q , der dimensionslosen Kanalabmessung $2b$ in Magnetfeldrichtung sowie der elektrischen Leitfähigkeit c des Wandmaterials so, daß diese ineinander überführbar sind. Die sich aus der Formulierung der Wirbeltransportgleichung ergebende Definition lautet:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{Q}}{b} + \frac{Q \cdot c}{b+c}. \quad (5.13)$$

Eine starke Wirbeldämpfung kann daher durch ein starkes Magnetfeld ebenso verursacht werden wie durch eine hohe Wandleitfähigkeit oder einen schmalen Kanal.

Für elektrisch isolierte Hartmannwände ($c = 0$) erkennt man die Proportionalität $1/\tau \sim \sqrt{Q}$, für elektrisch sehr gut leitende Wände ($c \rightarrow \infty$) hingegen dominiert der Anteil $1/\tau \sim Q$ den Wirbelzerfall.

Die zweidimensionale Wirbeltransportgleichung (Gl. 5.12) bildet zusammen mit der zweidimensionalen Energiegleichung ein vollständiges Gleichungssystem zur Berechnung von Naturkonvektionsströmungen in durch zwei magnetfeldsenkrechte Wände begrenzten Rechengebieten. Die im Fluid auftretenden Wärmeströme müssen dabei in der magnetfeldsenkrechten Ebene liegen. Das elektrische Potential in der Strömungsebene kann zusätzlich aus Gleichung (5.11) berechnet werden. Eine explizite Lösung des Ohmschen Gesetzes ist dagegen nicht mehr erforderlich.

Da bisher keine Einschränkungen bezüglich der Geometrie getroffen wurden, können anhand der zweidimensionalen Gleichungen, durch Vorgabe unterschiedlicher Randbedingungen, eine Vielzahl von Naturkonvektionsströmungen, wie z.B. eine von unten beheizte Schicht oder eine Kavität mit horizontalem Temperaturgradient, beschrieben werden.

5.2 Die Möglichkeit einer zweidimensionalen Approximation für ein parallel zur Strömungsebene orientiertes Magnetfeld

An den Betrachtungen in Abschnitt (5.2) wurde gezeigt, daß sich die Strömungsstruktur immer dahingehend orientiert, daß Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung des magnetischen Feldes vermieden werden. Eine zweidimensionale Beschreibung einer Strömungsstruktur in einer Ebene, die parallel zur Richtung des magnetischen Feldes verläuft, ist prinzipiell nicht sinnvoll, da sich diese stets dahingehend umorientiert, daß sie in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld beschrieben werden kann.

Eine Ausnahme hiervon bilden Strömungen, bei denen die treibenden Kräfte ausschließlich parallel zur Magnetfeldrichtung wirken. Das Fluid ist dann gezwungen auch in die ansonsten gemiedene Richtung zu fließen. Ein Beispiel für eine solche Strömungsform stellt die Bénard-Konvektion unter dem Einfluß eines vertikalen Magnetfeldes dar. Es entstehen dort zwangsläufig Wirbel in den Ebenen parallel zum Magnetfeld.

Wie aus der linearen Stabilitätsanalyse ersichtlich wurde (Absch. 3.1.6), besitzt die Konvektionsbewegung in den horizontalen Richtungen keine Vorzugsrichtung. Dennoch erfüllt eine zweidimensionale Beschreibung in einer beliebigen, vertikalen Ebene die Kräfte- und Energiebilanzen auf sinnvolle Art und Weise. Integrale Größen, wie z.B. der Wärmetransport durch die Schicht oder die Stabilität der nichtlinearen Gleichungen, können daher auch durch eine zweidimensionale Betrachtung abgeschätzt werden. Für die Bestimmung von Strömungsstrukturen ist ein solches Verfahren allerdings ungeeignet.

Die Bestimmung der Strömungsgrößen kann wieder anhand der Wirbeltransportgleichung (Gl. 5.1) erfolgen. Da nun ein rein vertikales Magnetfeld in z-Richtung angenommen wird, treten im elektrodynamischen Term nun ausschließlich Ableitungen in z-Richtung auf.

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega \right] = \nabla^2 \Omega + Ra \cdot \nabla \times (T \mathbf{e}_z) + Q(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) j. \quad (5.14)$$

Setzen wir nun willkürlich eine zweidimensionale Strömung in der (y,z)-Ebene voraus, so besitzt die Wirbelstärke lediglich eine Komponente in x-Richtung. Entsprechend Gleichung (5.3) kann diese mit der skalaren Stromfunktion ψ formuliert werden:

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial}{\partial z} \omega - \frac{\partial}{\partial z} \psi \frac{\partial}{\partial y} \omega \right] = \nabla^2 \omega + Ra \cdot \frac{\partial}{\partial y} T + Q \frac{\partial}{\partial z} j_x. \quad (5.15)$$

Definitionsgemäß liegt nun ein zweidimensionaler Strömungszustand vor, welcher durch eine dreidimensionale Stromdichteverteilung geprägt sein kann.

Der elektrodynamische Term ist durch die Änderung der zur Strömungsebene senkrechten Stromdichte in Magnetfeldrichtung bestimmt. Soll die Wirbeltransportgleichung entlang der Rollenachse identisch erfüllt sein, so darf sich diese Komponente der Stromdichte in Wirbelachsenrichtung nicht ändern. ($\partial j_x / \partial x = 0$). Die Ladungserhaltung (Gl. 3.45) ist dann auch in der Strömungsebene selbst erfüllt, so daß die x-Ableitungen sämtlicher Stromdichtekomponenten verschwinden.

Durch Anwendung des Rotationsoperators auf das Ohmsche Gesetz (Gl. 3.46) kann die Stromdichte in der Wirbeltransportgleichung durch die Horizontalgeschwindigkeit v ersetzt werden ($\partial j_x / \partial z = \partial v / \partial z$). Gemeinsam mit der Definition der Stromfunktion $v = -\partial \psi / \partial z$ ergibt sich die nur noch von Strömungsgrößen und der Temperatur abhängige Wirbeltransportgleichung:

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial}{\partial z} \omega - \frac{\partial}{\partial z} \psi \frac{\partial}{\partial y} \omega \right] = \nabla^2 \omega + Ra \cdot \frac{\partial}{\partial y} T - Q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi. \quad (5.16)$$

Da sich bei dieser Betrachtungsweise die induzierten Ströme ausschließlich im Fluid schließen, müssen keine elektrischen Randbedingungen mehr berücksichtigt werden.

Das magnetische Feld bewirkt eine Dämpfung der Geschwindigkeiten senkrecht zum Magnetfeld mit der Gewichtung durch die Chandrasekhar-Zahl. Daraus ergibt sich die bereits in der linearen Stabilitätsanalyse zu beobachtende Stauchung der Konvektionsstrukturen in horizontaler Richtung. Das Fluid minimiert die horizontalen Strömungsgeschwindigkeiten in dem ihm zur Verfügung stehenden Raum.

5.3 Lineare Stabilitätsanalyse für starke horizontale Magnetfelder

In Abschnitt 3 wurde unter der Voraussetzung einer in den horizontalen Richtungen unendlichen Schicht das Einsetzen der Konvektion aus dem Wärmeleitungszustand untersucht. Dabei zeigt sich, daß bei einem rein horizontalen Magnetfeld weder die kritische Rayleigh-Zahl noch die dazugehörige Wellenzahl von der Stärke des magnetischen Feldes abhängig ist.

Begrenzt man die Fluidschicht in Magnetfeldrichtung, so gelangt man in den Gültigkeitsbereich der in Abschnitt 5.1.3 abgeleiteten Gleichungen (5.11, 5.12). Gemeinsam mit der auf zwei Dimensionen beschränkten Energiegleichung (Gl. 2.12) sowie den Randbedingungen (vgl. 3.2.2) kann mit diesen eine neue Stabilitätsbedingung abgeleitet werden.

Abbildung 5.3 zeigt die von unten beheizte Flüssigmetallschicht der Höhe h , die von einem mit der Chandrasekhar-Zahl gegenüber den Reibungskräften gewichteten horizontalen Magnetfeld durchdrungen wird. In Magnetfeldrichtung ist der Fluidbereich durch zwei vertikale, adiabate Wände mit der elektrischen Leitfähigkeit c und dem Abstand $2 \cdot b$ begrenzt. Senkrecht zur Magnetfeldrichtung wird die Schicht weiterhin als unendlich ausgedehnt betrachtet. Die vertikalen Berandungen werden wiederum als isotherm und elektrisch perfekt leitend angenommen. Der über die Schicht angelegte Temperaturgradient wird durch die Rayleigh-Zahl beschrieben, ferner bestimmen die Stoffwerte des Fluides die Prandtl-Zahl.

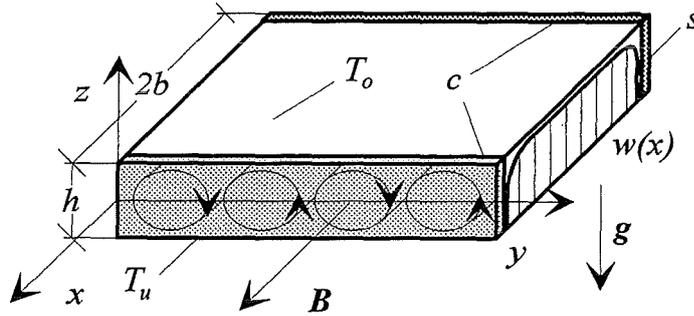


Abb. 5.3: Prinzipskizze zur Stabilitätsanalyse bei horizontalem Magnetfeld

Entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt 3 bestimmt man den Grundzustand $\omega_0 = \psi_0 = 0$, $\phi_0 = 0$, $T_0 = -z$ und überlagert diesem kleine Störungen der Größenordnung $O(\varepsilon)$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon \hat{\omega}$, $\psi = \psi_0 + \varepsilon \hat{\psi}$, $\phi = \phi_0 + \varepsilon \hat{\phi}$ und $T = T_0 + \varepsilon \hat{T}$. Eingesetzt in die Wirbeltransportgleichung (Gl. 5.12) und die Energiegleichung (Gl. 2.12) erhält man in der Ordnung $O(\varepsilon)$ unter Vernachlässigung von Termen der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ die linearen Störungsdifferentialgleichungen:

$$0 = \nabla^2 \hat{\omega} + Ra \cdot \frac{\partial}{\partial y} \hat{T} - \frac{\hat{\omega}}{\tau}, \quad (5.17)$$

$$-\hat{\omega} = \nabla^2 \hat{T}, \quad (5.18)$$

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \frac{b}{b+c} \hat{\omega}. \quad (5.19)$$

Da das Einsetzen der Konvektion in Form von zeitlich periodischer Strömung bei Betrachtung der induktionsfreien Gleichungen nicht auftritt (vgl. Abschn. 3.2.3), können die Zeitableitungen unberücksichtigt bleiben. Die Temperatur in Gleichung (5.17) wird wiederum mit der

Energiegleichung (Gl. 5.18) eliminiert. Man erhält so eine nach der Störung der Stromfunktion $\hat{\psi}$ separierte Störgleichung, die das Stabilitätsproblem vollständig beschreibt:

$$0 = \nabla^6 \hat{\psi} - Ra \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{\psi} - \frac{1}{\tau} \nabla^4 \hat{\psi}. \quad (5.20)$$

Die aus Abschnitt 3.1.3 bekannten Randbedingungen an die Geschwindigkeit müssen in Bedingungen für die Stromfunktion umformuliert werden. Für zweidimensionale Rechengebiete werden undurchlässige Wände zur Stromlinie

$$\hat{\psi}_W = konst. = 0. \quad (5.21)$$

Schubspannungsfreie Ränder (Gl. 2.26) sind gekennzeichnet durch das Verschwinden der zweiten Ableitung der Stromfunktion normal zur Wand.

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial n^2} \right|_W = 0. \quad (5.22)$$

An Wänden, an denen die Haftbedingung gelten soll (Gl. 2.27), muß dagegen die erste Ableitung der Stromfunktion normal zur Wand verschwinden.

$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n} \right|_W = 0. \quad (5.23)$$

Beschränkt man sich weiterhin auf isotherme Ränder, so führt Gleichung (5.17) auf die zusätzliche Randbedingung

$$\left. \nabla^4 \hat{\psi} - \frac{1}{\tau} \nabla^2 \hat{\psi} \right|_W = 0. \quad (5.24)$$

Da in der verbleibenden, horizontalen Richtung eine unendliche Ausdehnung angenommen wurde, werden hier keine expliziten Randbedingungen gefordert. Es können daher wiederum Lösungsansätze eingeführt werden, die die Lösung der horizontalen Koordinate multiplikativ von der vertikalen Koordinate trennen:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= F(y) \cdot \psi(z), \\ \hat{\omega} &= F(y) \cdot \omega(z), \\ \hat{T} &= F(y) \cdot T(z), \\ \hat{\phi} &= F(y) \cdot \phi(z). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Gültigkeit dieser Ansätze für die Lösung zeigt sich durch Einsetzen in alle drei Gleichungen (5.17-5.19). Unter Verwendung des Wellenansatzes

$$F(y) = \exp[iay] \quad (5.26)$$

kann der horizontale Laplaceoperator in Gleichung (5.20) durch den Ausdruck $\partial^2/\partial z^2 - a^2$ ersetzt werden:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right)^3 \psi(z) - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right)^2 \psi(z) = -Ra \cdot a^2 \psi(z). \quad (5.27)$$

Um aus dieser Gleichung Werte für die Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit der Wellenzahl und der Wirbelzerfallszeit gewinnen zu können, müssen Lösungsansätze für $\psi(z)$ gefunden werden, die die Randbedingungen an den horizontalen Wänden erfüllen.

5.3.1 Lösung für zwei freie Ränder

Sind beide Wände schubspannungsfrei, so kann gemäß Abschnitt 3.1.6.1 der Grundmod der geraden Funktionen (Gl. 3.35) angesetzt werden

$$\psi(z) = \cos(\pi z). \quad (5.28)$$

Die Interferenzkurve der primären Stabilität ergibt sich hiermit zu

$$Ra(a, \tau) = \frac{(\pi^2 + a^2)^3 + \frac{1}{\tau}(\pi^2 + a^2)^2}{a^2}. \quad (5.29)$$

Der erste Term repräsentiert wieder den rein hydrodynamischen Anteil, der zweite den mit $1/\tau$ gewichteten der elektrischen Dämpfung. Die kritische Wellenzahl für das Einsetzen der Konvektion erhält man mit dem Ansatz $\partial Ra/\partial a = 0$ zu:

$$a_{krit} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\pi^2 \tau}\right)^2 + 8\left(1 + \frac{1}{\pi^2 \tau}\right)} - \left(1 + \frac{1}{\pi^2 \tau}\right)}. \quad (5.30)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (5.29) ist die dazugehörige, kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit} explizit bestimmt. Der Verlauf in Abhängigkeit der magnetischen Dämpfung ist in Abbildung 5.5 aufgetragen.

Die kritische Wellenzahl steigt vom hydrodynamischen Wert $a_{krit}(\tau \rightarrow 0) = \pi/\sqrt{2}$ kontinuierlich auf den asymptotischen Wert $a_{krit}(\tau \rightarrow \infty) = \pi$. Ebenso steigt die kritische Rayleigh-Zahl von dem hydrodynamischen Wert $Ra_{krit}(\tau \rightarrow 0) = 27\pi^4/4$ monoton an und geht dabei in ein lineares, asymptotisches Gesetz über. Dieses findet man durch Nichtberücksichtigung des viskosen Terms in Gleichung (5.29) zu

$$\begin{aligned} Ra_{krit} &= 4\pi^2/\tau, \\ a_{krit} &= \pi. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Es ergibt sich also auch für ein rein horizontales Magnetfeld eine Verschiebung der kritischen Rayleigh-Zahl hin zu höheren Werten, wenn der Fluidbereich in Magnetfeldrichtung begrenzt ist. Es ist bemerkenswert, daß dabei die kritische Wellenzahl nicht wie bei einem vertikalen Magnetfeld mit der Chandrasekhar-Zahl immer kleiner wird, sondern einen asymptotischen Wert annimmt, der dem hydrodynamischen entspricht.

5.3.1 Lösung für zwei feste Ränder

An festen Rändern kann keine einfache Funktion zur Erfassung der Abhängigkeit der Lösung von der vertikalen Richtung gewählt werden. Die gleichzeitige Erfüllung der Undurchdringbarkeitsbedingung (Gl. 5.21) und der Haftbedingung (Gl. 5.23) erfordert eine Lösung des Problems nach der von Chandrasekhar (1961 s.166 f) beschriebenen Variationsmethode. Die hier für das vertikale Magnetfeld abgeleitete Methode kann sinngemäß auf das hier vorliegende Problem übertragen werden.

Ebenso wie bei schubspannungsfreien Rändern können zur Lösung Separationsansätze entsprechend (Gl. 5.25) angesetzt werden, wobei die horizontale Richtung wiederum durch den Wellenansatz (Gl. 5.26) beschreibbar ist.

Mit der prinzipiell der thermischen Randbedingung (Gl. 5.24) entsprechenden Funktion F kann das Problem neu formuliert werden:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right)^2 F = -Ra \cdot a^2 \hat{\psi}, \quad (5.32)$$

$$F = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right)^2 - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right) \right] \hat{\psi}. \quad (5.33)$$

Die für das Einsetzen der Konvektion minimale Rayleigh-Zahl ergibt sich dann als das absolute Minimum der rechten Seite der Funktion

$$Ra = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \left[\left(\frac{d}{dz} \cdot F\right)^2 + a^2 F^2 \right] dz}{a^2 \int_{-0.5}^{0.5} \left\{ \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2\right) \hat{\psi} \right]^2 + \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{d}{dz} \cdot \hat{\psi}\right)^2 + a^2 \hat{\psi}^2 \right] \right\} dz}. \quad (5.34)$$

Es müssen nun Lösungen der Gleichungen (5.32 und 5.33) gefunden werden, die die Randbedingungen

$$F = \hat{\psi} = \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} = 0 \quad (5.35)$$

erfüllen. Anhand der Gleichungen und der Randbedingungen wird deutlich, daß die exakte Lösung des Problems nur durch zwei sich gegenseitig ausschließende Gruppen von geraden und ungeraden Funktionen darstellbar ist.

Anhand der Betrachtung schubspannungsfreier Ränder wird deutlich, daß die kleinsten Werte der kritischen Rayleigh-Zahlen für die geraden Funktionen (Gl. 3.35) gefunden werden. Da das Problem zudem symmetrisch zur y -Achse ist, kann die Funktion F in eine Cosinusreihe entwickelt werden

$$F = \sum_m A_m \cdot \cos[(2m+1)\pi z], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.36)$$

Die Basisfunktionen sind hierbei so gewählt, daß jede von ihnen die Randbedingung (Gl. 5.24) unabhängig von den anderen erfüllt. Jede beliebige Summe aus ihnen leistet so automatisch dasselbe, ohne Rücksicht auf die Gewichtungsfaktoren A_m der Teillösungen.

Mit dieser Darstellung der Funktion F ergibt sich aus Gleichung (5.33) eine Bestimmungsgleichung für die Abhängigkeit der Stromfunktion von der vertikalen Koordinate.

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right)^2 - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right) \right] \hat{\psi} = \sum_m A_m \cdot \cos[(2m+1)\pi z], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

Drückt man die Stromfunktion ebenfalls als eine Summe mit der Darstellung

$$\hat{\psi} = \sum_m A_m \cdot \psi_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

aus, so ergibt Gleichung (5.37) eine inhomogene Differentialgleichung für die Bestimmung der Koeffizienten ψ_m

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right)^2 - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \right] \psi_m = \cos[(2m+1)\pi z]. \quad (5.39)$$

Mit den Randbedingungen für die einzelnen Komponenten

$$\psi_m = \frac{\partial}{\partial z} \psi_m = 0, \quad (5.40)$$

besitzt diese die allgemeine Lösung:

$$\psi_m = \gamma_{2m+1} \cos[(2m+1)\pi z] + \sum_{j=1}^2 B_j^m \cosh[q_j \cdot z], \quad (5.41.a)$$

$$\gamma_{2m+1} = \frac{1}{\left[((2m+1)\pi)^2 + a^2 \right]^2 + \frac{1}{\tau} \left[((2m+1)\pi)^2 + a^2 \right]}, \quad (5.41.b)$$

$$q_1 = a, \quad q_2 = \sqrt{a^2 - 1/\tau}, \quad (5.41.c)$$

$$\begin{aligned} B_1^m &= +(-1)^m (2m+1) \gamma_{2m+1} \Xi \operatorname{sech}[q_1/2], \\ B_2^m &= -(-1)^m (2m+1) \gamma_{2m+1} \Xi \operatorname{sech}[q_2/2], \\ \Xi &= \frac{1}{q_1} \tanh[q_1/2] - \frac{1}{q_2} \tanh[q_2/2]. \end{aligned} \quad (5.41.d)$$

Setzt man diese gemeinsam mit der Funktion F und ψ entsprechend Gl. 5.36 und Gl. 5.38 in Gleichung (5.32) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_m A_m c_{2m+1} \cos[(2m+1)\pi z] \\ &= Ra \cdot a^2 \sum_m A_m \left\{ \gamma_{2m+1} \cos[(2m+1)\pi z] + \sum_{j=1}^2 B_j^m \cosh[q_j \cdot z] \right\}, \end{aligned} \quad (5.42.a)$$

$$c_{2m+1} = [(2m+1)\pi]^2 + a^2. \quad (5.42.b)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\cos[(2n+1)\pi z]$ und integriert über die Schichthöhe z , so erhält man ein lineares, homogenes System von n Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten A_m :

$$\frac{1}{2} c_{2n+1} A_n = Ra \cdot a^2 \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{2n+1} A_n + \sum_m \Gamma_{nm} A_m \right\}, \quad (5.43.a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{nm} &= \sum_{j=1}^2 B_j^m \int_{-1/2}^{1/2} \cosh[q_j z] \cos[(2n+1)\pi z] dz \\ &= 2(2n+1)\pi (-1)^n \sum_{j=1}^2 \frac{B_j^m \cosh\left[\frac{1}{2} q_j\right]}{[(2n+1)\pi]^2 q_j^2}. \end{aligned} \quad (5.43.b)$$

Diese garantieren, daß die nach Gleichung (5.34) bestimmte Rayleigh-Zahl für alle A_m , die gleichzeitig die Randbedingung (Gl. 5.24) bzw. (Gl. 5.33) erfüllen, den kleinsten Wert annimmt.

Das Verschwinden der Determinante des Gleichungssystems (5.43)

$$D = \left\| \left(\frac{c_{2n+1}}{Ra \cdot a^2} \right) \delta_{mm} - 2\Gamma_{mm} \right\| = 0 \quad (5.44)$$

liefert die Lösbarkeitsbedingung des Gleichungssystems, ohne die Werte für A_m explizit zu berechnen. Die bei gegebenem Dämpfungsparameter $1/\tau$ zu einer Wellenzahl a gehörige Rayleigh-Zahl ergibt sich so aus der Bedingung $D(Ra) = 0$.

Bei einer numerischen Auswertung der Determinante kann die Genauigkeit des Verfahrens beliebig gesteigert werden. Die gesuchten Nullstellen der Funktion $D(1/\tau, a, Ra)$ können dadurch mit einem Newtonverfahren hinreichend genau bestimmt werden. Abbildung 5.4 zeigt für verschiedene Dämpfungsparameter die jeweiligen kritischen Rayleigh-Zahlen in Abhängigkeit der Wellenzahl.

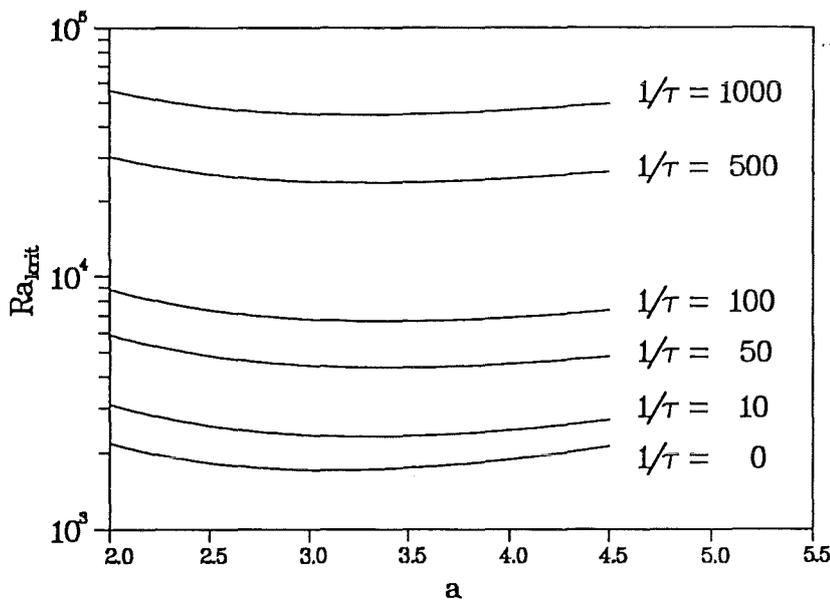


Abb. 5.4: Rayleigh-Wellen-Zahl Zusammenhänge für unterschiedliche Dämpfungsparameter.

Die Minimalwerte dieser Kurven ergeben die für das Einsetzen der Konvektion aus dem reinen Wärmeleitungszustand kritischen Rayleigh-Zahlen und die dazugehörigen kritischen Wellenzahlen. Diese lassen sich wiederum numerisch aus der Bedingung $dRa(a, 1/\tau)/da = 0$ bestimmen. In Abbildung 5.5 sind die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse für das horizontale Feld zusammengefaßt.

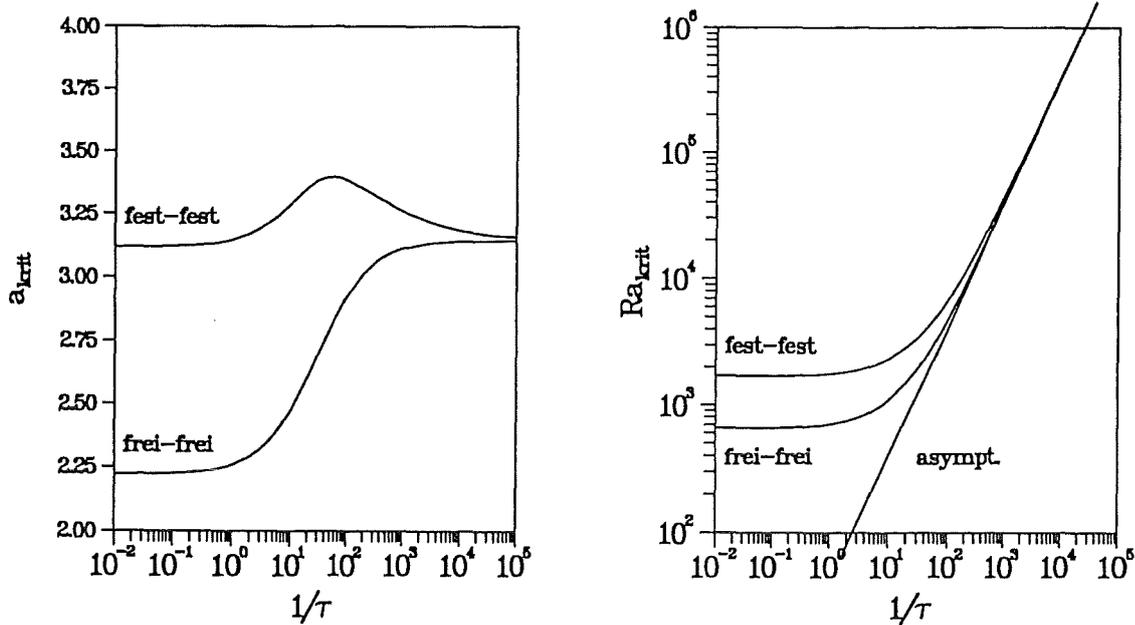


Abb. 5.5: Kritische Rayleigh- und Wellenzahlen für horizontales Magnetfeld.

Die kritischen Rayleighzahlen steigen vom hydrodynamischen Wert $Ra_{krit} = 1708$ mit steigendem $1/\tau$ kontinuierlich an und gehen in das asymptotische Gesetz (Gl. 5.31) über. Ebenso wie beim vertikalen Magnetfeld ist der Einflußbereich der viskosen Reibung gegenüber den freien Rändern ausgedehnt.

Die kritischen Wellenzahlen zeigen dagegen ein ungewöhnliches Verhalten. Für verschwindendes $1/\tau$ ergibt sich wiederum der hydrodynamische Grenzfall. Steigert man die magnetische Dämpfung, so steigen die Wellenzahlen ebenso wie für schubspannungsfreie Ränder an, fallen dann aber wieder auf den asymptotischen Wert π ab.

Die elektrodynamischen Kräfte beeinflussen die Geschwindigkeitsverteilung dahingehend, daß die Dämpfung durch viskose Reibung für kleinere Wellenlängen geringer wird. Die Verringerung der viskosen Verluste überwiegt in diesem Bereich die durch die kleineren Wellenlängen verursachte Erhöhung der magnetischen Dämpfung.

Es gibt somit einen begrenzten Bereich der magnetischen Dämpfung, für den die Konvektion in Form von etwas kleineren Walzen einsetzt.

5.4 Numerische Berechnungen

Die in den Abschnitten 5.1 und 5.2 abgeleiteten zweidimensionalen Gleichungen (Gl. 5.11, 5.12, 5.16) sowie die zweidimensionale Energiegleichung (Gl. 2.12) können durch ein numerisches Rechenverfahren in einem endlichen Gebiet unter Vorgabe verschiedener Randbedingungen gelöst werden. Abbildung 5.6 zeigt das rechteckige, ebene Rechengebiet und veranschaulicht die zur Verfügung stehenden Randbedingungen.

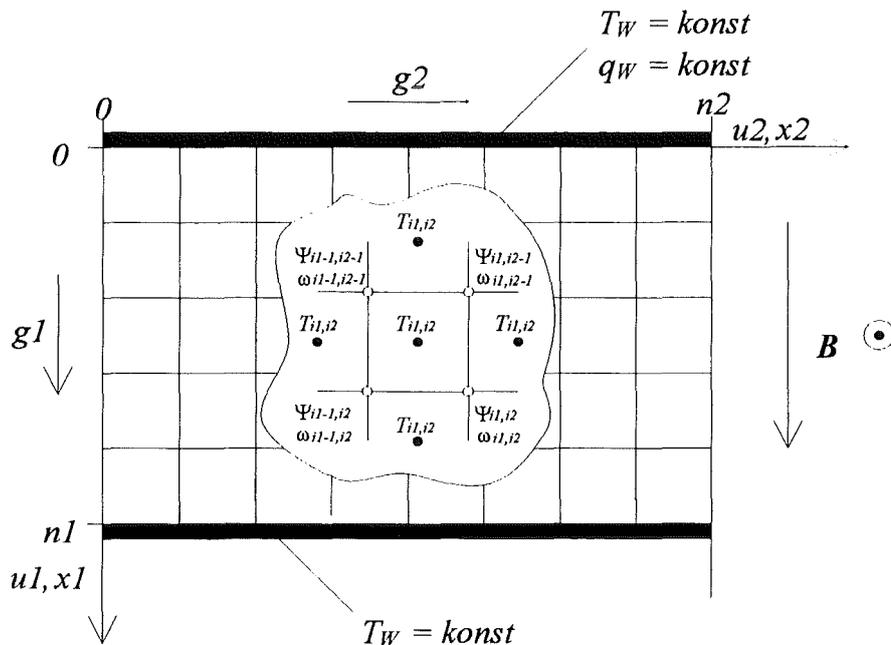


Abb. 5.6: Rechengebiet für 2D-Rechenprogramm.

Die Erhaltungssätze für Masse, Ladung und Energie werden für ein diskretes Kontrollvolumen endlicher Abmessungen formuliert. Die allgemeine Lösung des Problems ist hierdurch auf die Lösung an diskreten Punkten des Rechengebietes begrenzt.

An den zur x_2 -Achse parallelen Wänden werden die thermischen Randbedingungen vorgegeben. Durch geeignete Wahl des Schwerevektors $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ ist die Realisierung von horizontalen sowie auch vertikalen Wärmeströmen möglich. Diese Vorgehensweise bietet sich deshalb an, da nur in x_2 -Richtung eine nichtäquidistante Gitterteilung zulässig ist. Die an den beheizten Wänden dünneren Grenzschichten können so unabhängig von der Richtung des Wärmestromes zum Schwerevektor besser aufgelöst werden.

An den zur x_1 -Achse parallelen Wänden kann entweder eine feste, adiabate Wand vorgegeben werden oder es können periodische Ränder gewählt werden. Die Strömungsgrößen an der linken Wand werden dann gleich denen an der rechten Wand gesetzt.

Das Magnetfeld kann entweder senkrecht auf der Strömungsebene stehen oder aber parallel zur x_1 -Achse orientiert sein. Eine Kombination aus beiden Fällen ist nach Abschnitt 5.2 nicht sinnvoll.

Die Formulierung der hier gelösten Gleichung erfolgt in x_1, x_2 -Koordinaten. Man erhält mit dem neuen Koordinatensystem folgende Gleichungen zur Bestimmung des elektrischen Potentials (nur für horizontale Magnetfelder)

$$\nabla_{x_1, x_2}^2 \phi = \frac{b}{b+c} \omega, \quad (5.45)$$

der Wirbelstärke

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \psi \frac{\partial}{\partial x_2} \omega - \frac{\partial}{\partial x_2} \psi \frac{\partial}{\partial x_1} \omega \right] = \nabla_{x_1, x_2}^2 \omega + \frac{Ra}{Pr} \left[g_2 \frac{\partial}{\partial x_1} T - g_1 \frac{\partial}{\partial x_2} T \right]$$

$$- \frac{\omega}{\tau} \quad (\text{horizontales Feld}) \quad (5.46)$$

$$- Q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \quad (\text{vertikales Feld}),$$

und der Energie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla_{x_1, x_2}^2 T. \quad (5.47)$$

Die Definition der Stromfunktion lautet

$$u_1 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (5.48)$$

so daß die Wirbelstärke aus

$$\omega = \nabla_{x_1, x_2}^2 \psi \quad (5.49)$$

berechenbar wird.

Bei der Formulierung dieser Gleichungen wurde eine von der in den vorigen Abschnitten verwendeten abweichende Skalierung eingeführt. Die charakteristische Geschwindigkeit v_0 und die charakteristische Zeit t_0 werden mit der kinematischen Viskosität ν anstelle der Temperaturleitfähigkeit κ gebildet. Mit $v_0 = \nu/h$ und $T_0 = h^2/\nu$ tritt die Prandtl-Zahl an anderen Stellen in den Gleichungen auf.

Die Potentialgleichung (Gl. 5.45) sowie die Gleichung der Stromfunktion (Gl. 5.49) können mit einem schnellen Poissongleichungslöser gelöst werden. Hierzu werden an festen Wänden die Bedingungen

$$\psi_W = 0 \quad \text{und} \quad \phi_W = 0 \quad (5.50)$$

formuliert.

Die Lösung der Wirbeltransportgleichung erfolgt durch ein Differenzenverfahren. Die konvektiven Terme der Wirbeltransportgleichung werden hierbei mit dem Verfahren von Arakawa (1966) approximiert.

Die Auftriebskräfte sowie die elektrodynamischen Kräfte gehen in die Lösung der Wirbeltransportgleichung als Quellterme ein, die aus den Größen des vorhergehenden Zeitschrittes berechnet werden. Die Wirbelstärke an festen Rändern ω_W muß aus den Werten der Stromfunktion an der Wand ψ_W und dem wandnächsten Punkt ψ_{W+1} berechnet werden:

$$\omega_W = \frac{2(\psi_{W+1} - \psi_W)}{(\Delta x_n)^2}. \quad (5.51)$$

Eine Bilanz der konvektiven und diffusiven Wärmeströme an den diskreten Kontrollvolumen löst die Energiegleichung (5.47) auf einem zu den Werten der Stromfunktion und der Wirbel-

stärke versetzten Maschengitter. Als Randbedingung kann entweder die Temperatur an beiden Wänden vorgegeben werden oder aber ein definierter Wärmestrom an einer Wand, verbunden mit einer konstanten Temperatur an der anderen Wand.

Die Integration in der Zeit erfolgt für beide Gleichungen durch ein explizites Zeitschrittverfahren zweiter Ordnung nach Adams-Bashforth. Der Wert einer Transportgröße wird dabei aus den gewichteten Werten der zwei vorhergehenden gewonnen.

Trotz der einfachen Rechteckgeometrie kann mit dem Programm eine Vielzahl von Naturkonvektionsströmungen unter Magnetfeldeinfluß, wie auch rein hydrodynamische Strömungen berechnet werden.

In den nachfolgenden Abschnitten werden grundlegende Eigenschaften der Bénard-Konvektion mit und ohne Magnetfeldeinfluß durch numerische Rechnungen nach dem oben beschriebenen Verfahren aufgezeigt.

Um den Bedarf an Rechenzeit bei hinreichender räumlicher Auflösung des Rechengebietes begrenzt zu halten, wurde eine Schicht mit einem Höhe- zu Breitenverhältnis von 1:6 betrachtet. Die horizontalen Wände sind als isotherm angenommen und erhalten die dimensionslosen Temperaturen $T_o = -0.5$ an der oberen, gekühlten Wand sowie $T_u = 0.5$ an der unteren, beheizten Wand. An den vertikalen Berandungen werden periodische Randbedingungen vorgegeben. Die Strömungsgrößen am linken Rand sind dann identisch denen am rechten Rand.

Bei den einzelnen Rechnungen wurde die Rayleigh-Zahl, die Chandrasekhar-Zahl sowie die magnetische Dämpfung variiert. Die die Stoffeigenschaften charakterisierende Prandtl-Zahl wurde in Anlehnung an geplante Experimente (s. Absch. 6) stets zu $Pr = 0.018$ gewählt.

Bis zu einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 10^5$ erwies sich eine räumliche Auflösung von 240 Zellen in horizontaler Richtung und 40 in vertikaler Richtung als hinreichend genau. Bei höheren Rayleigh-Zahlen wurde zur besseren Auflösung der Grenzschichten die Auflösung auf 400×100 Zellen erhöht.

Die Berechnung eines stationären Endzustandes, ausgehend von einer ruhenden Fluidschicht, erfordert lange Rechenzeiten. Daher wurden für alle Rechnungen ein sinnvolles Temperatur- und Stromfeld als Startwert vorgegeben.

Die Zeitschrittweite wurde so klein gewählt ($\Delta t \approx 10^{-6}$), daß das zeitliche Verhalten der Lösung exakt wiedergegeben wird.

Zuerst wird der Einfluß einer steigenden Rayleigh-Zahl auf die charakteristischen Strömungsgrößen im rein hydrodynamischen Fall aufgezeigt. Dies verdeutlicht die prinzipiellen Effekte dieser Konvektionsform. In einem weiteren Schritt kann dann der Einfluß der Stärke und der Orientierung eines Magnetfeldes auf die Strömung untersucht werden.

5.4.1 Der rein hydrodynamische Fall

Aus der linearen Stabilitätsanalyse ist bekannt, daß die Konvektion im rein hydrodynamischen Fall beim Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl von 1708 als stationäre Konvektionswalzen der Wellenlänge $\lambda = 2.02$ einsetzt. Abbildung 5.7 zeigt als erstes Beispiel die wichtigsten Strömungsgrößen in der Schicht, wenn ohne die Wirkung eines Magnetfeldes eine leicht überkritische Rayleigh-Zahl von 2000 angelegt wird.

Die räumliche Struktur der Strömung erkennt man am deutlichsten im ersten Diagramm dieser Abbildung, in welchem Isolinien der Stromfunktion ψ aufgetragen sind. Es haben sich sechs Wirbel gebildet, deren Wellenlänge der linearen Theorie für das Einsetzen der Konvektion entspricht. Diese Struktur der Strömung prägt trotz der geringen Prandtl-Zahl auch die Lage der Isothermen in der nächsten Abbildung. Man erkennt deutlich die Zonen aufsteigenden Fluids und die, in denen kaltes Fluid nach unten sinkt.

Weitere Charakteristiken der Strömung können anhand der Wirbelstärkeverteilung aufgezeigt werden. An den horizontalen Wänden liegen starke Gradienten vor. Hier ist die Strömung wesentlich durch viskose Kräfte bestimmt. Die geringeren Gradienten über die einzelnen Wirbel zeigen, daß im Kernbereich der Strömung eher Trägheitskräfte das Geschwindigkeitsfeld bestimmen.

Allgemein besitzt ein Wirbel bei linearer Verteilung der Wirbelstärke über dem Radius die Charakteristik eines Potentialwirbels. Ist die Wirbelstärke dagegen über die Wirbelstruktur hinweg konstant, so rotiert dieser wie ein Starrkörper. Man spricht dann von einer Trägheitskonvektion.

Betrachtet man die mit ihrem Maximalwert normierten Vertikalgeschwindigkeiten (durchgezogene Linie) und die Temperaturen (gestrichelte Linie) in der Mitte der Schicht ($x_1=0$), so erkennt man nahezu sinusförmige Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen. In den Abtriebszonen ($v > 0$) wird kaltes Fluid nach unten transportiert und in den Auftriebszonen ($v < 0$) warmes nach oben.

Im letzten Bild sind Temperaturwerte an verschiedenen Positionen im Fluid über der Zeit aufgetragen. Die Wahl einer eindeutigen Position für ein charakteristisches Zeitsignal ist unmöglich, da die Vorgabe periodischer Ränder die Position der Wirbel nicht eindeutig fixiert. Es werden daher willkürlich fünf Positionen in der Mittelebene $T_1 = T(0,2,0)$, $T_2 = T(0,2,5)$, $T_3 = T(0,3,0)$, $T_4 = T(0,3,5)$, und $T_5 = T(0,4,0)$ aufgetragen, die über den Bereich einer Wellenlänge verteilt sind, so daß man sowohl Gebiete mit Aufwärtsströmung als auch solche mit Abwärtsbewegung erfaßt.

Die konstanten Temperaturwerte über der Zeit zeigen, daß die Konvektion bei dieser Kombination von Rayleigh- und Prandtl-Zahl stationär ist.

Erhöht man den Wert der Rayleigh-Zahl auf 10^4 , so ergibt sich der in Abbildung 5.8 aufgetragene Strömungszustand.

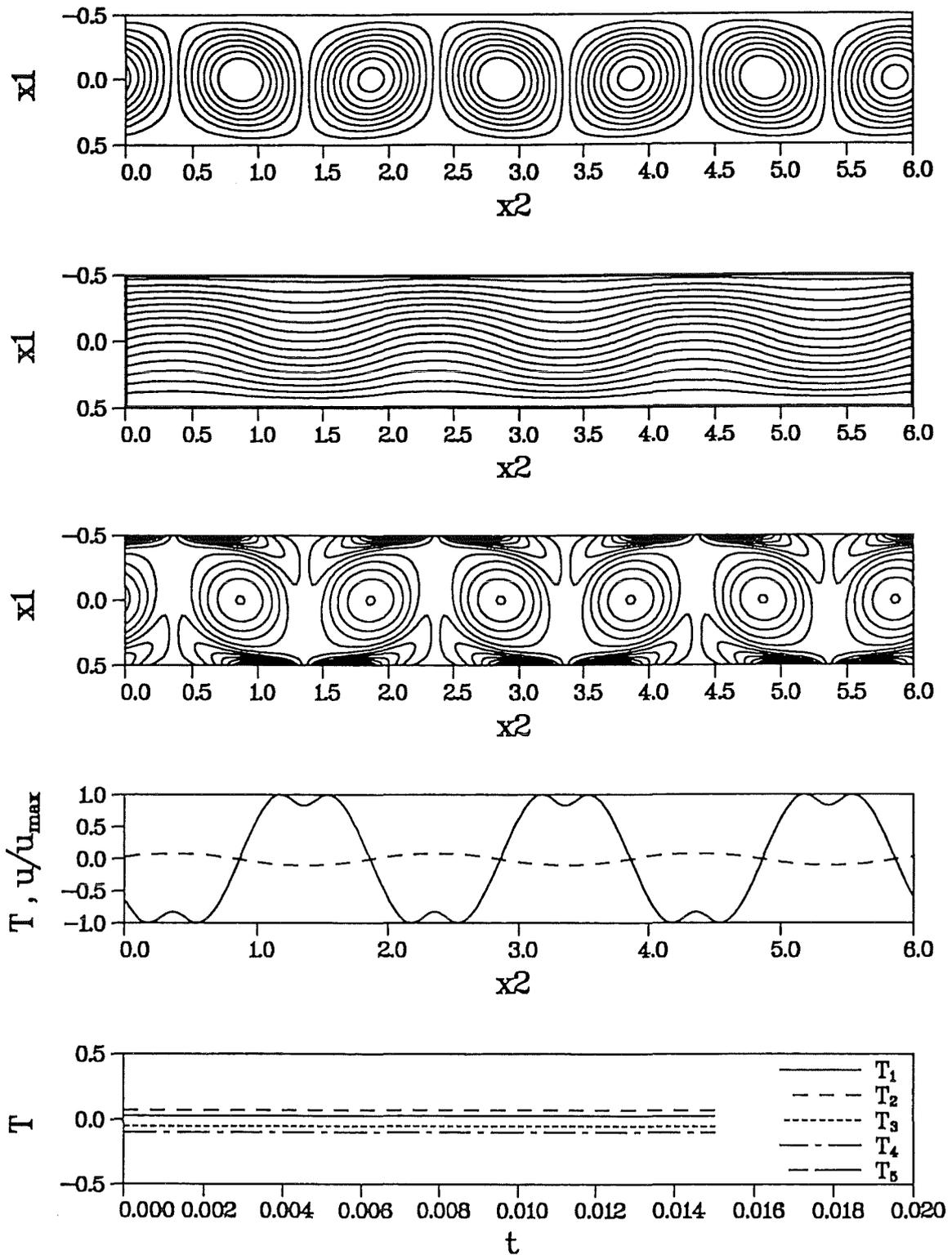


Abb. 5.7: Stromfunktion, Temperaturverteilung, Wirbelstärke, Vertikalgeschwindigkeit, Temperaturverteilung in der Mittelebene ($x_1 = 0$) und Temperatur-Zeitsignal für $Ra = 2000$, $Pr = 0.018$; $Nu = 1.04$, $v_{max} = 105.7$.

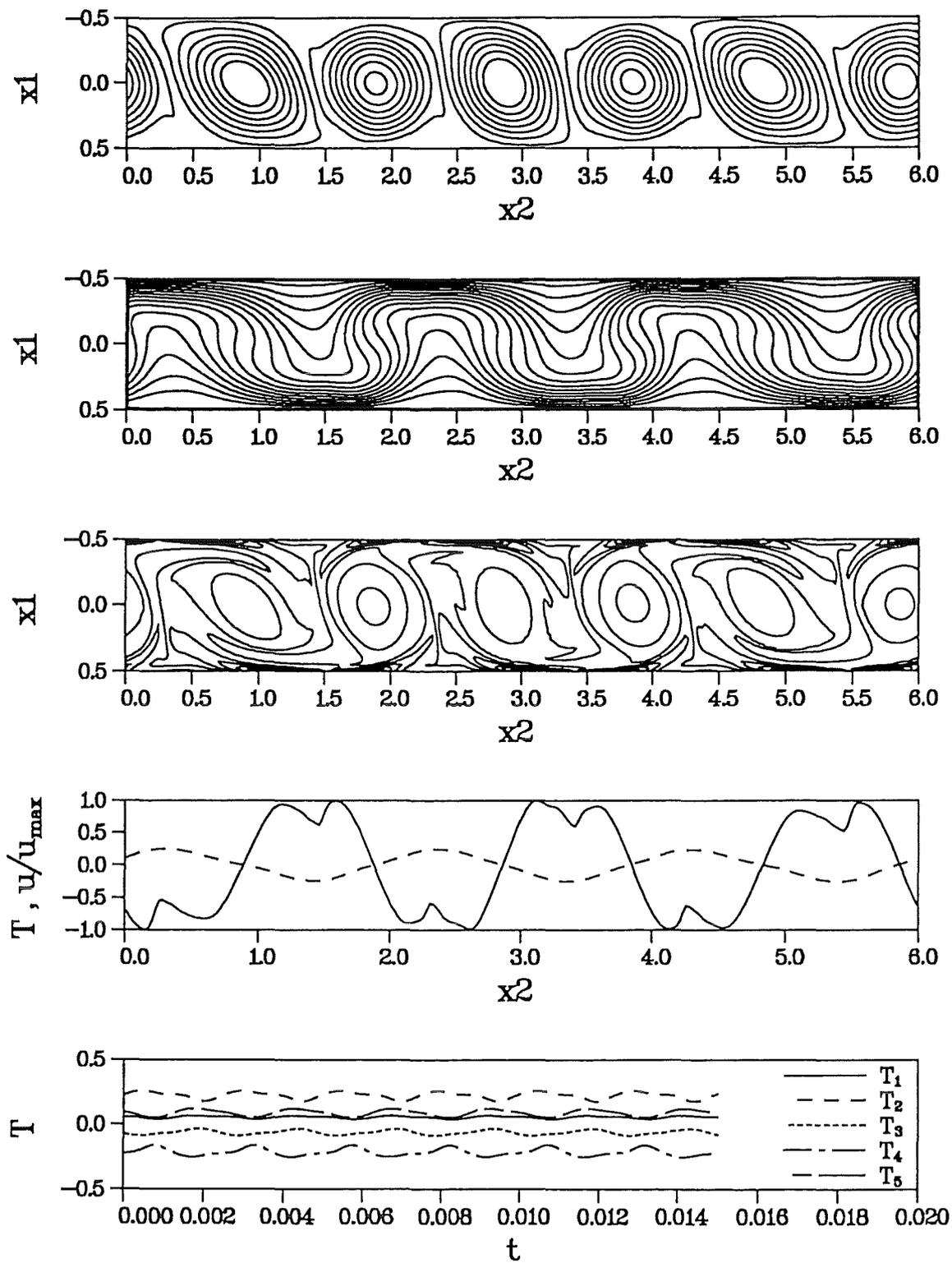


Abb. 5.8: Stromfunktion, Temperaturverteilung, Wirbelstärke, Vertikalgeschwindigkeit, Temperaturverteilung in der Mittelebene ($x_1 = 0$) und Temperatur-Zeitsignal für $Ra = 10^4$, $Pr = 0.018$; $Nu = 2.23$, $v_{max} = 1074$.

An den Temperaturverläufen über der Zeit erkennt man sofort, daß die Konvektion für diese Rayleigh-Zahl instationär ist. Die Temperaturwerte schwanken periodisch um ihre Mittelwerte, wobei eine charakteristische Frequenz vorherrscht.

Die Stromlinien und Isothermenbilder sowie die Geschwindigkeits- und Temperaturwerte im Mittelschnitt stellen nur noch Momentanwerte dar. Die Konvektionswirbel schwingen hin und her und verändern dabei ihre Größe.

Das gegenüber dem vorigen Beispiel ausgeprägtere Temperaturprofil folgt diesen Schwankungen. Über die Wirbel liegen nur noch geringe Gradienten der Wirbelstärke vor. Die Strömung ist maßgeblich trägheitsbestimmt und die an den Wänden produzierte Wirbelstärke wird im Fluidkern nur noch konvektiv transportiert.

Die Extrema der Vertikalgeschwindigkeiten weisen signifikante Eindellungen auf, die zwischen zwei Wirbeln liegen. D.h. zwischen zwei Wirbeln existiert ein Bereich geringerer Strömungsgeschwindigkeit. Die mehr und mehr von Trägheitskräften bestimmten Wirbel drehen quasi unabhängig von dem sie umgebenden Außenbereich, saugen jedoch ruhendes Fluid aus den Zonen stagnierenden Fluids und transportieren dieses mit geringerer Geschwindigkeit um sich herum.

Bei einer Rayleigh-Zahl von 10^5 geht das periodische Zeitverhalten in ein zunehmend chaotisches über. Die Temperatur-Zeitsignale in Abbildung 5.9 enthalten mehrere überlagerte Frequenzen.

Die Wirbel verändern ihre Größe und bewegen sich regellos hin und her. Es bilden sich vereinzelt kleinere Wirbel, die von den vorherrschenden größeren wieder aufgenommen werden. Die Temperaturverteilung ist stark durchmischt; einzelne Bereiche konstanter Temperatur bewegen sich mit der Strömung zur anderen Berandung. Der Wärmetransport durch die Schicht wird zunehmend durch den konvektiven Transport bestimmt. Die Anzahl der ständig vorhandenen Rollen bleibt jedoch nachwievor erhalten.

Eine Darstellung der Wirbelstärke ist nicht mehr sinnvoll, da die außerordentlich starken Gradienten an der Wand eine sinnvolle Auflösung der geringen Variationen im Kernbereich der Wirbel unmöglich machen.

Mit einer Rayleigh-Zahl von 10^7 wird schließlich ein weitgehend chaotisches Verhalten der Strömung (Abb. 5.10) erreicht.

Die Temperatur-Zeitsignale sind nicht mehr durch charakteristische Frequenzen geprägt, sondern schwanken regellos um die jeweiligen Mittelwerte. Trotz der vermehrten Bildung neuer Wirbelstrukturen beherrschen die sechs großen Wirbel weiterhin das Strömungsgeschehen.

Da der Wärmetransport durch die Schicht maßgeblich durch die Konvektion bestimmt ist, treten über die einzelnen Wirbel nur noch geringe Temperaturgradienten auf. Dies zeigt sich auch in der nahezu homogenen Temperaturverteilung in der Mittelebene.

Da nun offenbar der turbulente Bereich erreicht ist, ist es fraglich, ob hier die zweidimensionale Rechnung noch in der Lage ist, das Strömungsgeschehen richtig zu erfassen. Ein Vergleich mit einer dreidimensionalen Rechnung kann dies zeigen.

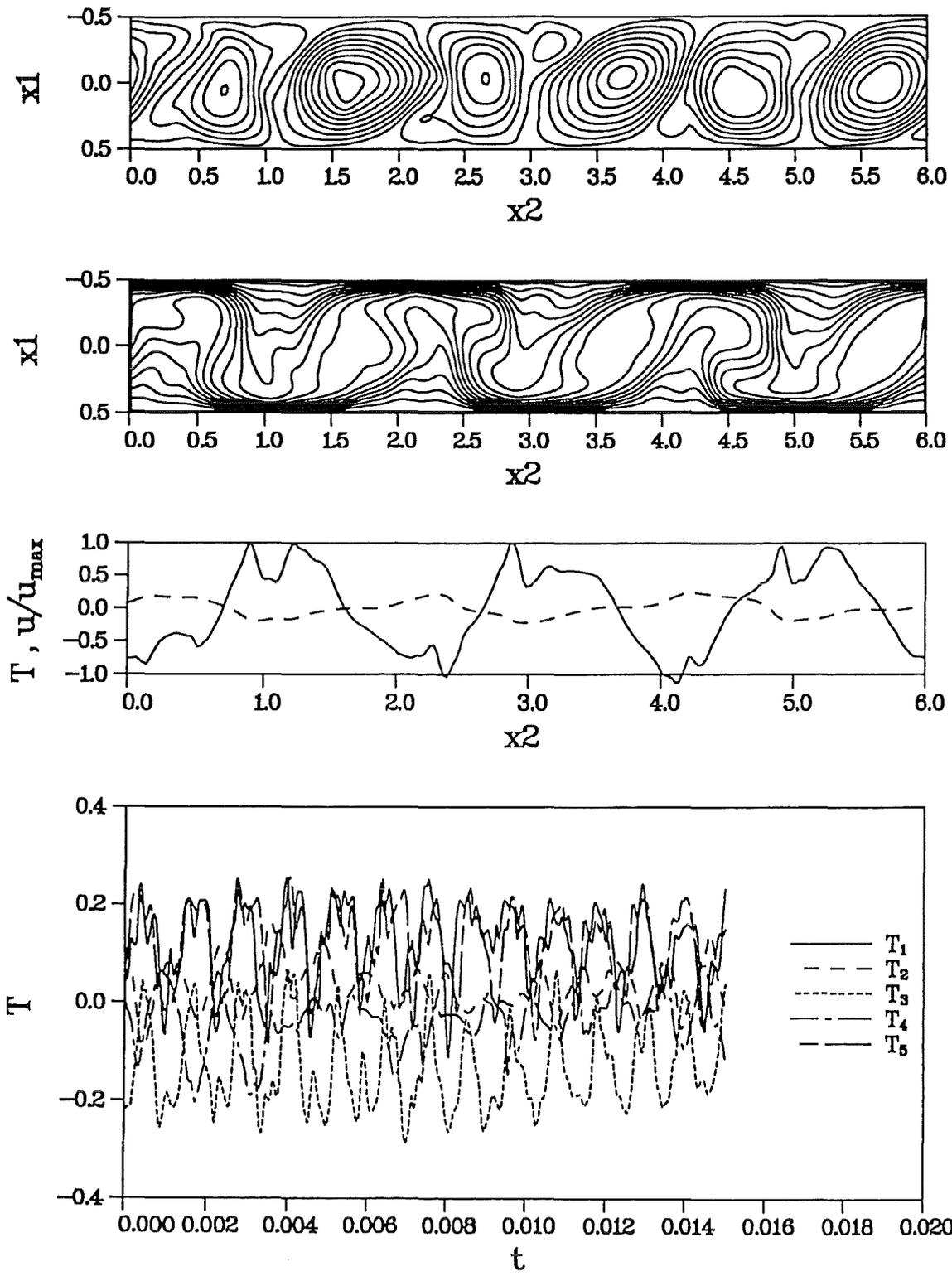


Abb. 5.9: Stromfunktion, Temperaturverteilung, Vertikalgeschwindigkeit, Temperaturverteilung in der Mittelebene ($x_1 = 0$) und Temperatur-Zeitsignal für $Ra = 10^5$ und $Pr = 0.018$; $Nu = 3.72$, $v_{max} = 3665$.

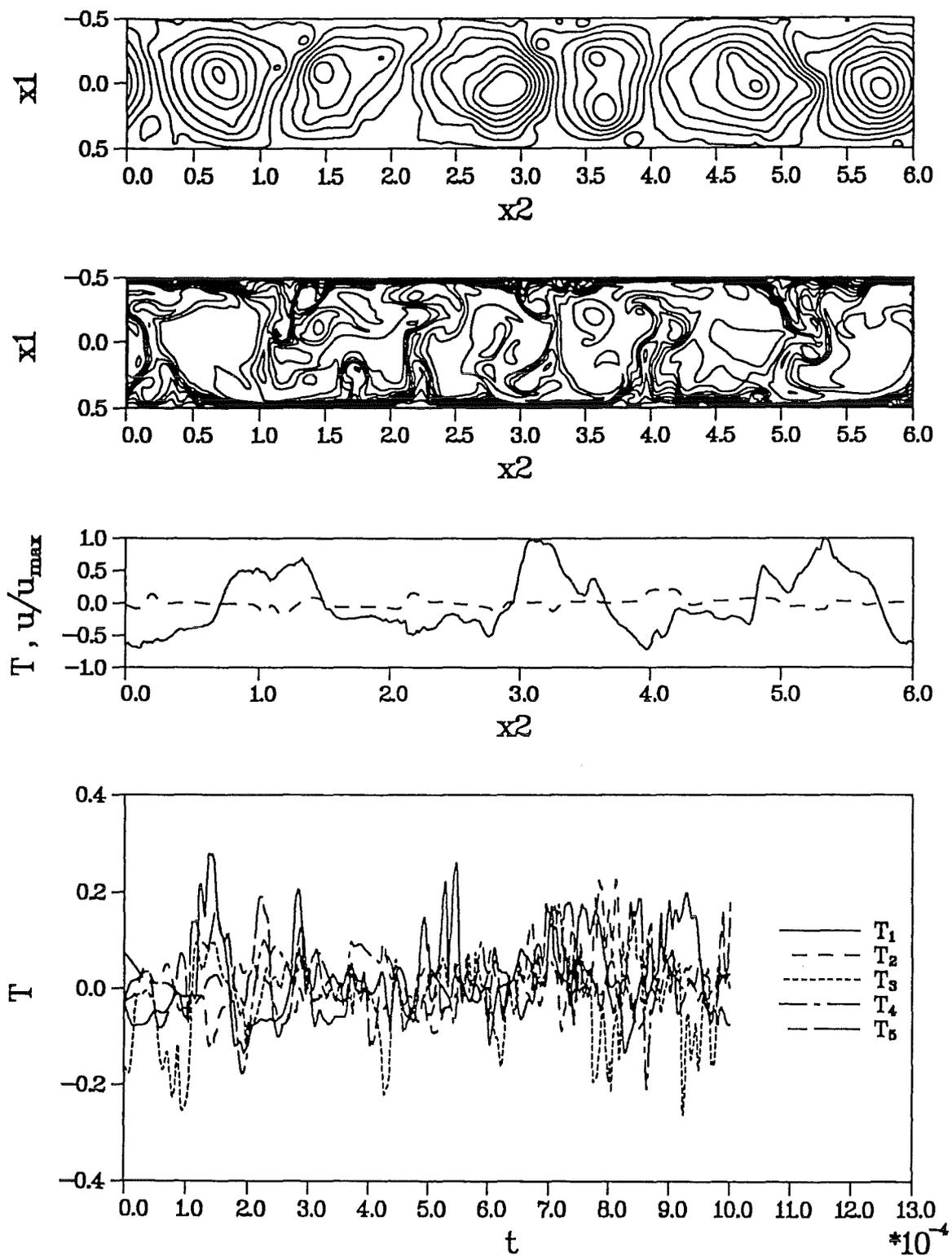


Abb. 5.10: Stromfunktion, Temperaturverteilung, Vertikalgeschwindigkeit und Temperaturverteilung in der Mittelebene ($x_1 = 0$) und Temperatur-Zeitsignal für $Ra = 10^7$ und $Pr = 0.018$; $Nu = 10.4$, $v_{max} = 4348$.

Eine objektive Beurteilung des Zeitverhaltens der Konvektionsströmung ist durch die Bildung von Autoleistungsdichtespektren (ALDS) aus den Zeitsignalen möglich. Anstelle der Auftragung der Temperatursignale im Zeitbereich erfolgt hierzu eine spektrale Darstellung im Frequenzbereich. Es werden so die charakteristischen Frequenzen des Signals sowie deren Intensitäten aufgezeigt. In Abbildung 5.11 sind den Temperatur-Zeitsignalen für unterschiedliche Rayleigh-Zahlen Autoleistungsdichtespektren gegenübergestellt. Entsprechend des dimensionslosen Zeitmaßstabes erfolgt hierbei die Auftragung über der dimensionslosen Frequenz $f^* = f/f_0$ mit $f_0 = 1/T_0$.

Bei der noch relativ geringen Rayleigh-Zahl von 5000 wird das Zeitverhalten der Konvektion im wesentlichen von einer Frequenz geprägt. Dieser ist schwach ein Anteil mit doppelter Frequenz überlagert. Mit der Steigerung der Rayleigh-Zahl erhöht sich die Frequenz dieses Grundmodes und es treten weitere, zunächst harmonische Frequenzen auf.

Für genügend hohe Rayleigh-Zahlen bilden die neu auftretenden Frequenzen kein vielfaches des Grundmodes mehr und der Übergang zu einem chaotischen Zeitverhalten zeichnet sich ab. Es treten hier neben dem generellen Trend zu immer höheren Frequenzen niedrige Frequenzen auf, welche durch langsam ablaufende Umorientierungsprozesse der Strömungsstruktur hervorgerufen werden.

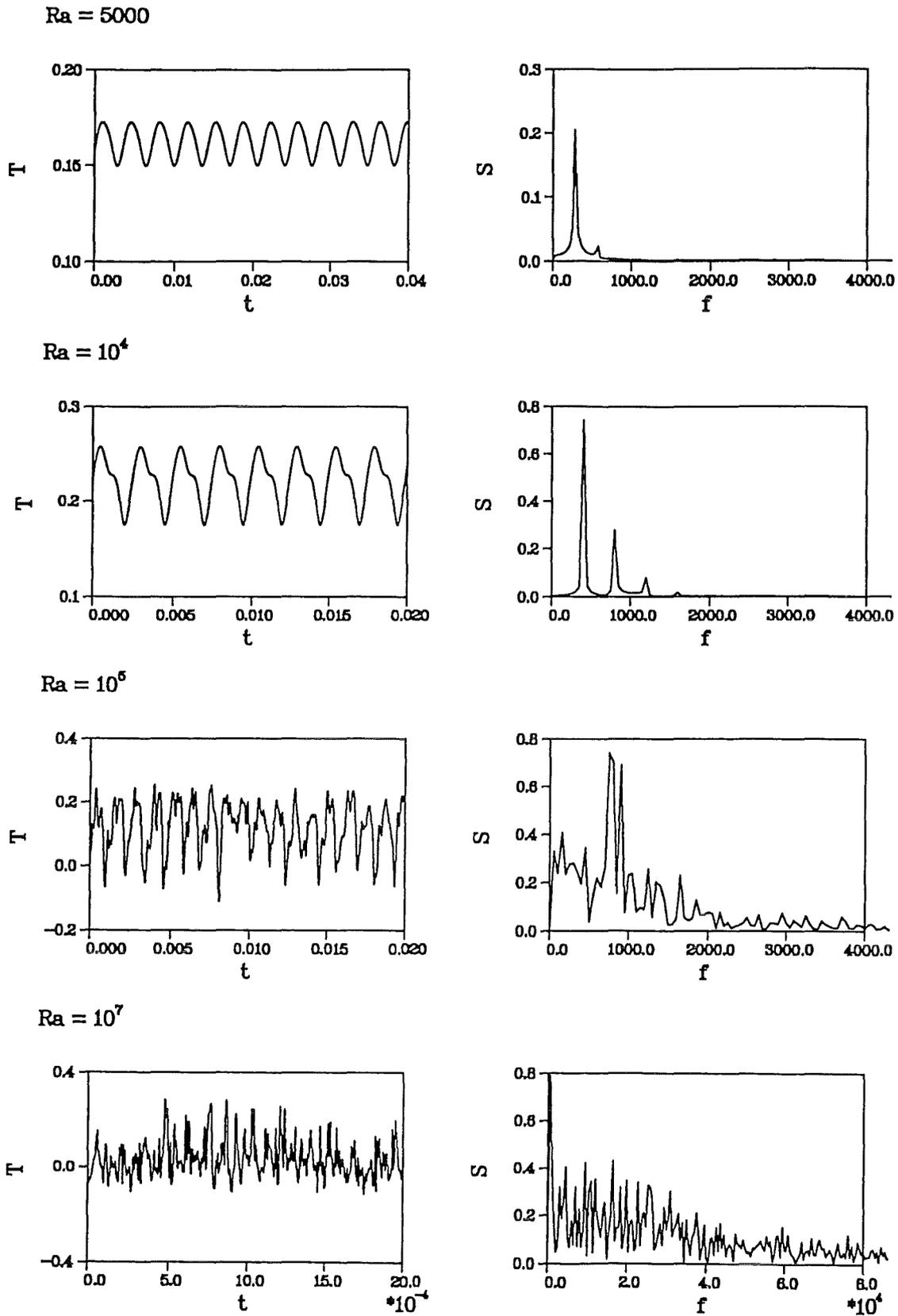


Abb. 5.11: Temperatur- Zeitverläufe und Autoleistungsdichtespektren für $Ra = 5000$, $Ra = 10^4$, $Ra = 10^5$ sowie $Ra = 10^7$ für $Pr = 0.018$.

5.4.2 Der Einfluß eines horizontalen Magnetfeldes

Bei den hierzu durchgeführten Rechnungen wird bei unveränderter Geometrie den hydrodynamischen Ergebnissen die für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 10^4$, $Ra = 5 \cdot 10^4$, und $Ra = 10^5$ gefunden wurden, sukzessive ein immer stärkeres Magnetfeld aufgeprägt. Der magnetische Dämpfungsparameter $1/\tau$ (Gl. 5.13) wird soweit erhöht bis die Nusselt-Zahl einen Wert unwesentlich über eins annimmt. Auf diese Weise gelangt man in die Nähe der Stabilitätsgrenze für die gewählten Parameter.

Eine Bestimmung des Punktes, an welchem die Konvektionsbewegungen abgeklungen sind, ist anhand der kinetischen Energie im System zwar anschaulicher beschreibbar, die Nusselt-Zahl stellt jedoch einen Wert dar, der experimentell einfacher zu verifizieren ist.

Abbildung 5.12 zeigt die so gewonnenen Nusselt-Zahlen über der magnetischen Dämpfung.

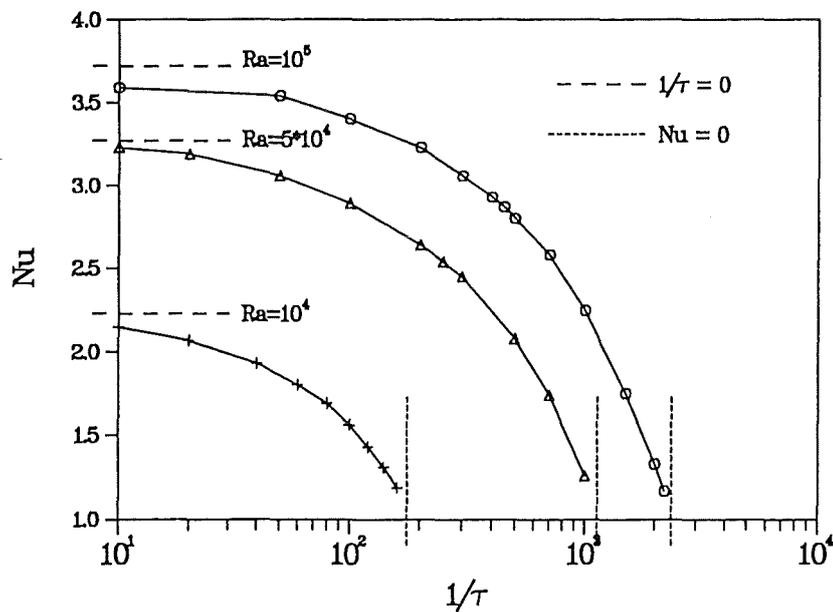


Abb. 5.12: Nusselt-Zahlen bei horizontalem Magnetfeld $Ra = 10^4$, $Ra = 5 \cdot 10^4$, $Ra = 10^5$ und $Pr = 0.018$.

Die in diesen Diagrammen eingetragenen horizontalen Linien markieren die Werte ohne Magnetfeld. Die Nusselt-Zahlen fallen von diesen an kontinuierlich auf den Wert eins ab. Die vertikalen Linien entsprechen der Stabilitätsgrenze nach der linearen Theorie. Da Rechnungen in der Nähe dieser sehr aufwendig sind, reichen die Ergebnisse nicht unmittelbar an diese heran. Dennoch wird die lineare Theorie durch die vorgestellten nichtlinearen Rechnungen bestätigt.

Wie aus der linearen Stabilitätsanalyse ersichtlich wird, ist die Wellenlänge der größten Anfachungsrate durch das Magnetfeld nahezu unbeeinflusst. Es ergeben sich somit auch bei den Rechnungen immer sechs Walzen. Die leichte Überhöhung der kritischen Wellenzahlen kann nicht gefunden werden, da das relativ kleine Rechengebiet ein vielfaches der Wellenlänge aufprägt. Die Veränderung der Struktur der Strömung gegenüber dem hydrodynamischen Fall kann an einem Beispiel gezeigt werden. Abbildung 5.13 entspricht prinzipiell der Darstellung in Abb. 5.9 mit $Ra = 10^5$. Die magnetische Dämpfung ist zu $1/\tau = 1000$ gewählt.

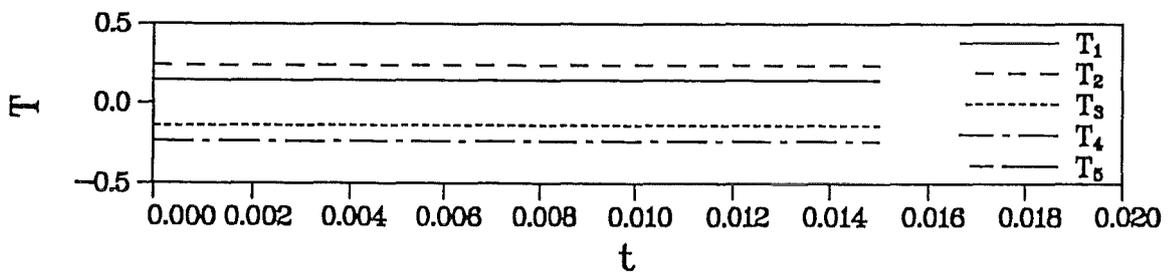
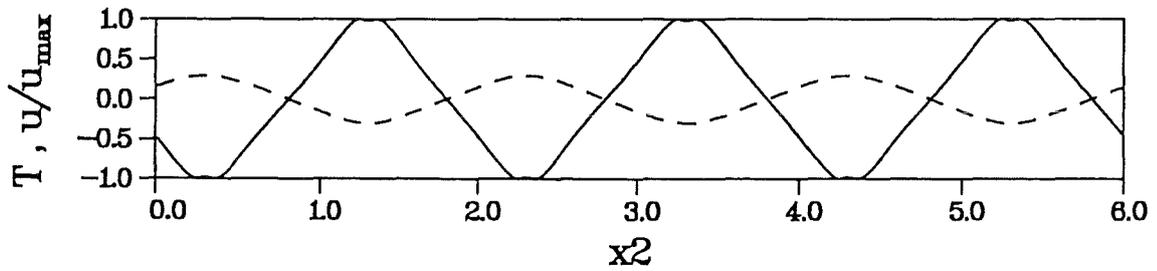
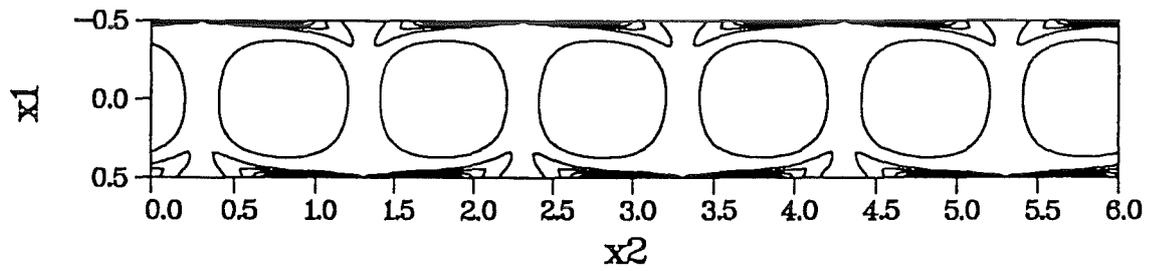
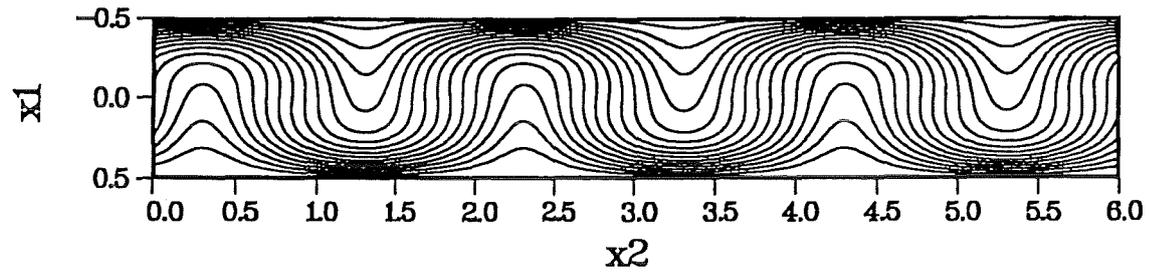
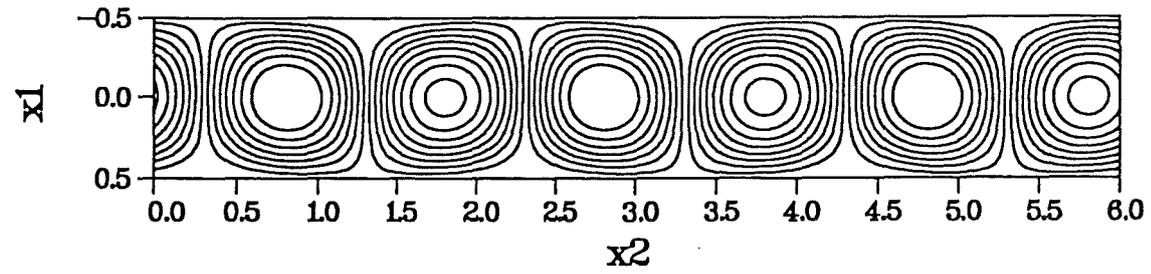


Abb. 5.13: Stromfunktion, Temperaturverteilung, Wirbelstärke, Vertikalgeschwindigkeit
 Temperaturverteilung und Temperatur-Zeitsignal in der Mittelebene ($x_1 = 0$)
 für $Ra = 10^5$, $1/\tau = 1000$, $Pr = 0.018$; $Nu = 2.25$, $v_{max} = 887$.

Anhand der Stromfunktion erkennt man, daß nachwievor sechs Wirbel vorliegen. Diese sind bestrebt, den gesamten Fluidbereich einzunehmen, die Stromlinien sind jedoch im Wirbelzentrum nahezu kreisförmig. Die Wirbelstärke ist über die einzelnen Wirbel weitestgehend konstant, lediglich in den sehr dünnen Reibungsgrenzschichten an den Wänden ändert sich die Wirbelstärke signifikant. Am deutlichsten wird dies anhand der Vertikalgeschwindigkeiten. Diese weisen eine lineare Geschwindigkeitsverteilung über den Durchmessern der Wirbel auf.

Betrachtet man Wirbel, bei denen dieselbe Wirbelstärke über dem Radius unterschiedlich verteilt ist, so weisen diejenigen mit konstanter Wirbelstärke die geringsten Joulschen Verluste auf.

Die Zeitsignale der Temperatur zeigen, daß die Strömung trotz der hohen Rayleigh-Zahl stationär ist. Anhand der relativ hohen Nusselt-Zahl von 2.25 liegt der Vergleich mit der rein hydrodynamischen Rechnung für $Ra = 10^4$ (Abb. 5.8) nahe, für die sich eine instationäre Strömung bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten einstellt.

Der Einfluß des horizontalen Feldes auf das Zeitverhalten der Konvektionsbewegung ist demnach größer als sein Einfluß auf den integralen Wärmetransport.

Zur Klärung dieses Sachverhaltes zeigt Abb. 5.15 typische Temperatur-Zeitsignale in einer Auftriebszone für verschiedene magnetische Dämpfungen und einer Rayleigh-Zahl von $5 \cdot 10^4$. Diesen sind wiederum die Autoleistungsdichtespektren gegenübergestellt.

Aus dem im hydrodynamischen Fall chaotischen Zeitsignal werden mit stärker werdender magnetischer Dämpfung immer mehr Frequenzen ausgeblendet, so daß schließlich nur noch ein sinusförmiges Signal einer Frequenz übrigbleibt. Die das Zeitsignal dominierende, charakteristische Frequenz wird hierbei immer kleiner.

Ein horizontales Magnetfeld stellt somit einen zusätzlichen Parameter für die Beeinflussung des zeitlichen Verhaltens der Konvektionsbewegung dar. Der Transitionsprozes von der laminaren zur turbulenten Konvektion kann somit durch Aufprägung eines horizontalen Magnetfeldes gesteuert werden.

Die in Experimenten bei horizontalem Magnetfeld beschriebenen grundlegenden Phänomene wie die Laminarisierung der Strömung sowie die Verringerung des Wärmetransportes (vgl. Absch. 4.2) werden somit auch durch eine numerische Lösung der zweidimensionalen Gleichungen wiedergegeben.

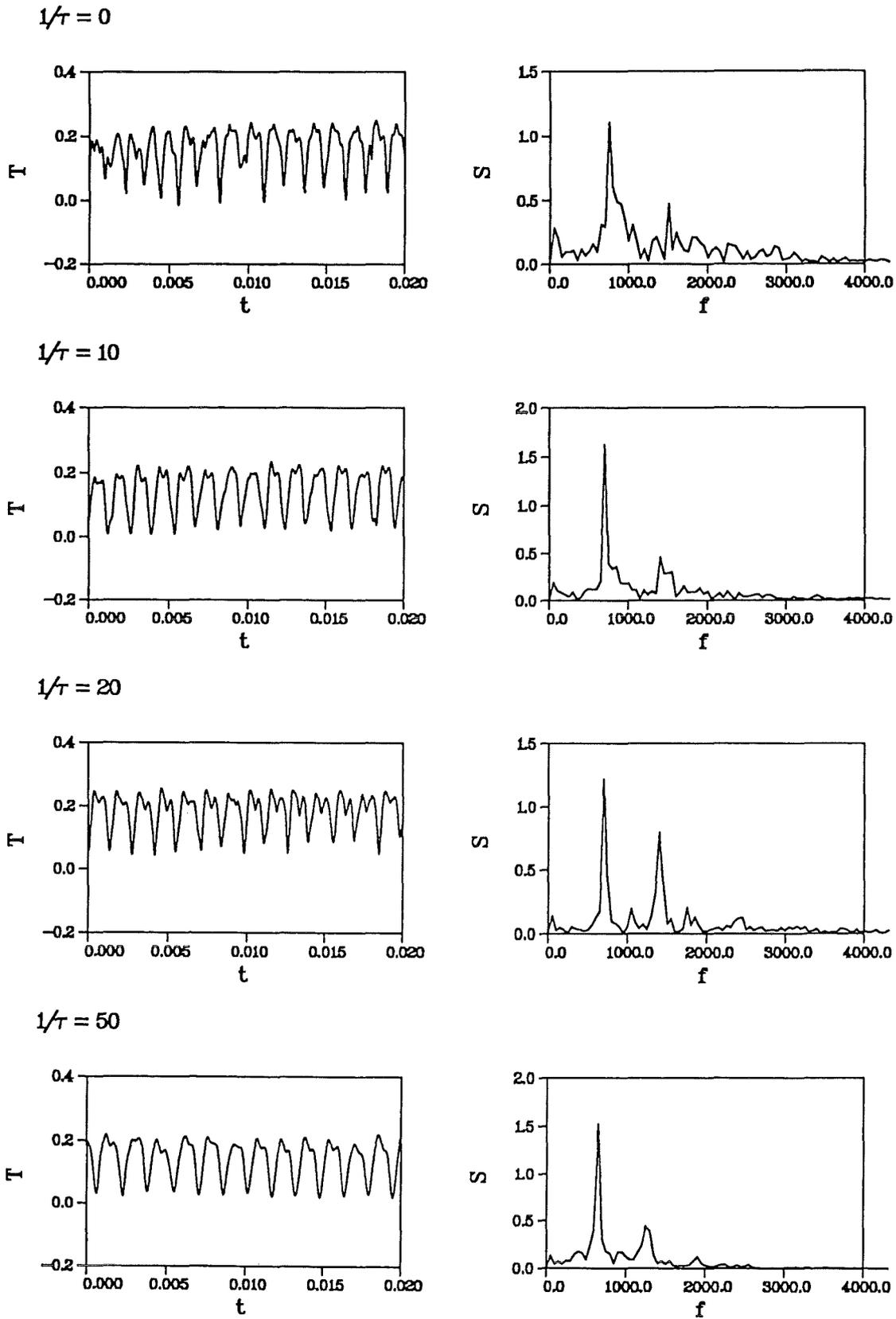
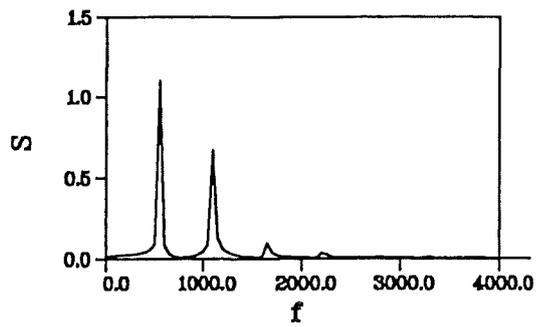
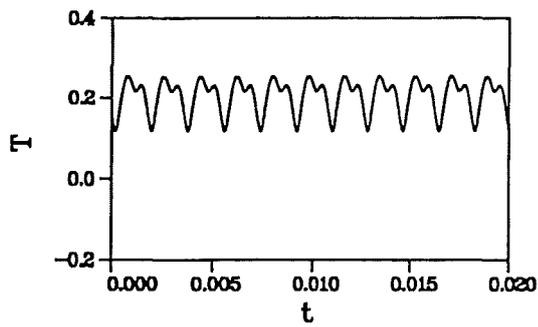
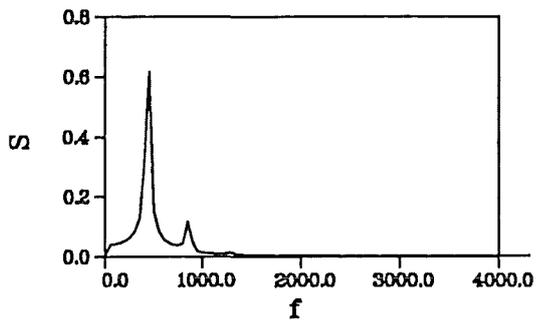
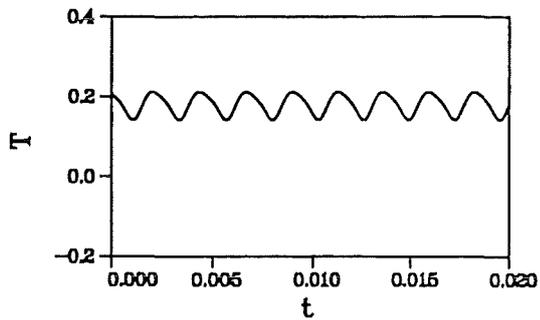


Abb. 5.14.a: Temperatur- Zeitverläufe und Autoleistungsdichtespektren für $Ra = 5 \cdot 10^4$, $Pr = 0.018$ bei zunehmender magnetischen Dämpfung.

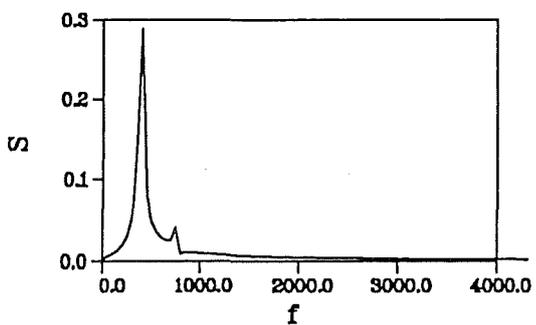
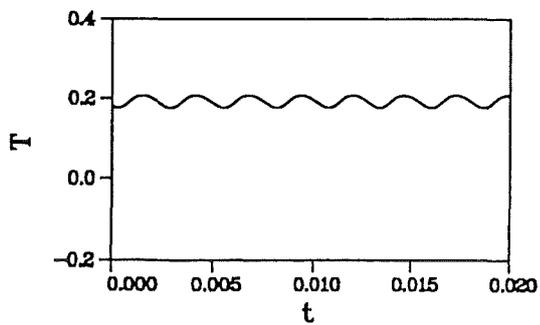
$$1/\tau = 100$$



$$1/\tau = 200$$



$$1/\tau = 250$$



$$1/\tau = 300$$

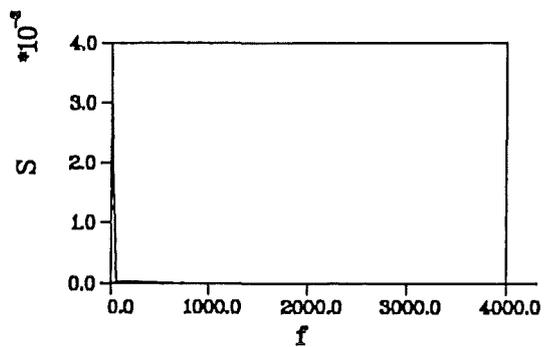
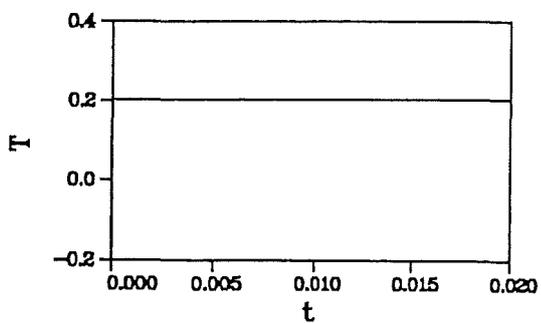


Abb. 5.14.b: Temperatur- Zeitverläufe und Autoleistungsdichtespektren für $Ra = 5 \cdot 10^4$, $Pr = 0.018$ bei zunehmender magnetischen Dämpfung.

5.4.3 Der Einfluß eines vertikalen Magnetfeldes

Im Fall der zweidimensionalen Approximation für horizontale Magnetfelder besitzen die elektrodynamischen Kräfte keine Vorzugsrichtung. Daher sind die auftretenden Wellenlängen unabhängig von der magnetischen Dämpfung. Ein vertikales Magnetfeld besitzt dagegen ausschließlich dämpfende Wirkung auf horizontale Geschwindigkeitskomponenten, die horizontalen Wellenlängen der Konvektionsstruktur werden daher mit wachsender Chandrasekhar-Zahl kleiner. Für numerische Berechnungen ergibt sich daraus ein Problem bei der Wahl des Rechengebietes. Behält man dessen Größe bei, so ist nicht gewährleistet daß die horizontale Länge ein Vielfaches der charakteristischen Wellenlänge bei der jeweiligen Chandrasekhar-Zahl darstellt.

Eine Anpassung des Rechengebietes auf ein Vielfaches der Wellenlänge aus der linearen Theorie beseitigt dieses Problem nur unvollständig, da diese Wellenlänge nur bedingt mit der bei stark überkritischen Rayleigh-Zahlen übereinstimmt.

Für die nachfolgenden Rechnungen wurde daher das 1:6 Rechengebiet beibehalten. Die Ergebnisse sind so direkt mit denen der Abschnitte 5.4.1 und 5.4.2 vergleichbar, und es kann untersucht werden, ob ein Übergang zu höheren Rollenzahlen mit wachsendem Magnetfeld erfolgt.

Nach der linearen Stabilitätstheorie (vgl. 3.1) erfolgt bei einer Chandrasekhar-Zahl von 2000 das Einsetzen der Konvektion bei einer kritischen Rayleigh-Zahl von $Ra_{krit} = 30139$ mit ca. der doppelten Wellenzahl als im hydrodynamischen Fall. Abbildung 5.15 zeigt das Ergebnis einer Rechnung mit einer gering überkritischen Rayleigh-Zahl von $Ra = 35000$. Das Ergebnis dieser Rechnung kann daher mit Abbildung 5.7 verglichen werden.

Es haben sich 12 stationäre Konvektionsrollen gebildet. Ihre Form ist gegenüber dem schwach überkritischen, hydrodynamischen Beispiel eher rechteckförmig, was auf die Minimierung der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten zurückzuführen ist. Eine Tendenz zu kreisförmigen Strukturen mit linearer Geschwindigkeitsverteilung über dem Radius ist nicht zu beobachten. Die Konvektionsstrukturen füllen den ihnen zur Verfügung stehenden Raum vollständig aus, so daß auch die "Eindellungen" in den horizontalen Geschwindigkeitsverteilungen verschwinden.

Die Temperatur-Zeitverläufe zeigen auf, daß die Strömung in dem hier gezeigten Parameterbereich trotz der hohen Rayleigh-Zahl stationär ist.

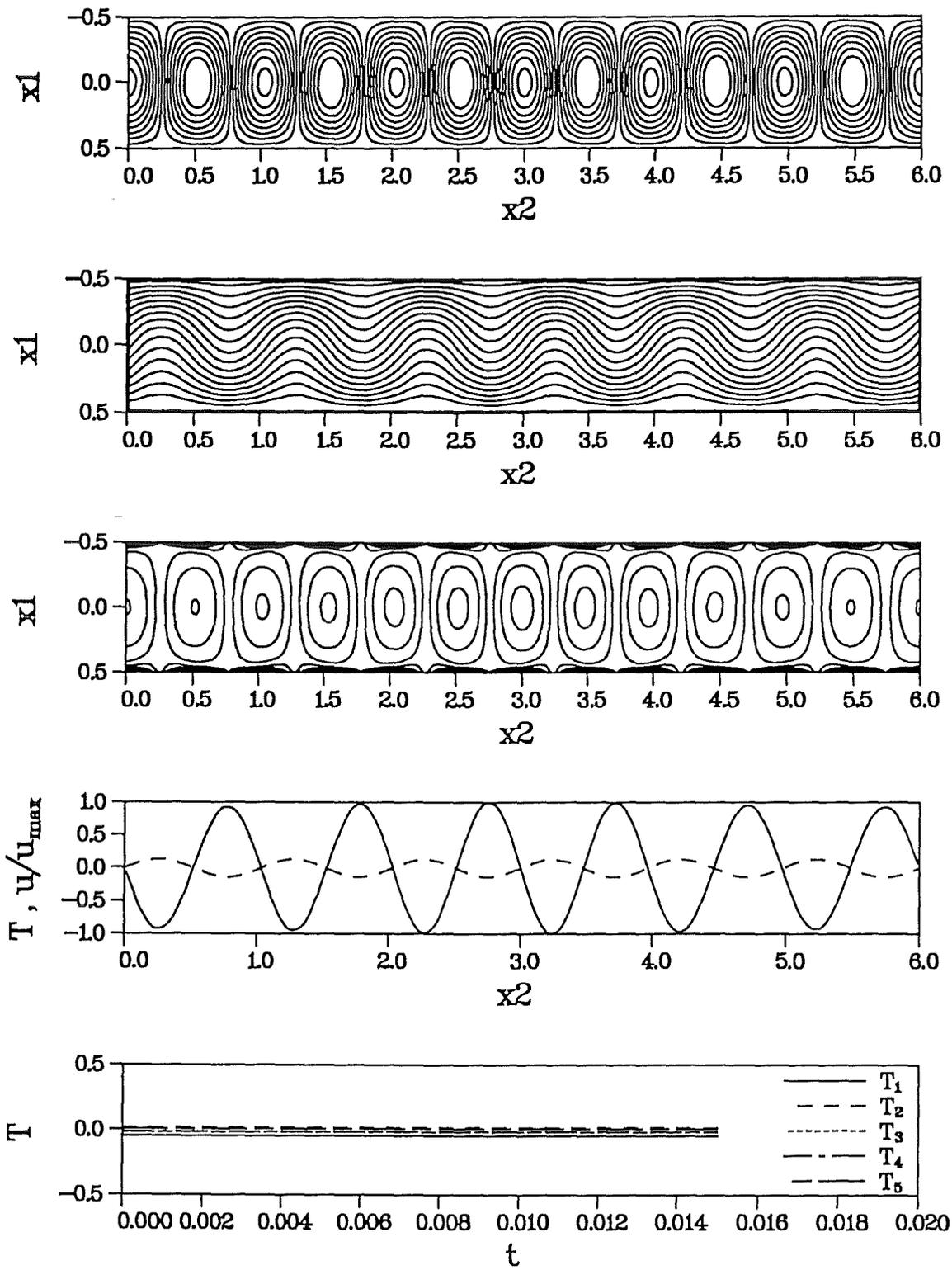


Abb. 5.15: Stromfunktion, Temperaturverteilung, Wirbelstärke, Vertikalgeschwindigkeit
 Temperaturverteilung und Temperatur-Zeitsignal in der Mittelebene ($x_1 = 0$)
 für $Ra = 3.5 \cdot 10^4$, $Q = 2000$, $Pr = 0.018$; $Nu = 1.28$, $v_{max} = 469$.

Zur Bestimmung von Nusselt-Zahlen wurde ebenso wie für die Berechnungen mit horizontalem Magnetfeld der hydrodynamischen Lösung ein immer stärkeres Magnetfeld aufgeprägt.

Abbildung 5.16 zeigt die so gewonnenen Verläufe über der Chandrasekhar-Zahl entsprechend Abbildung 5.13 bei horizontalem Feld.

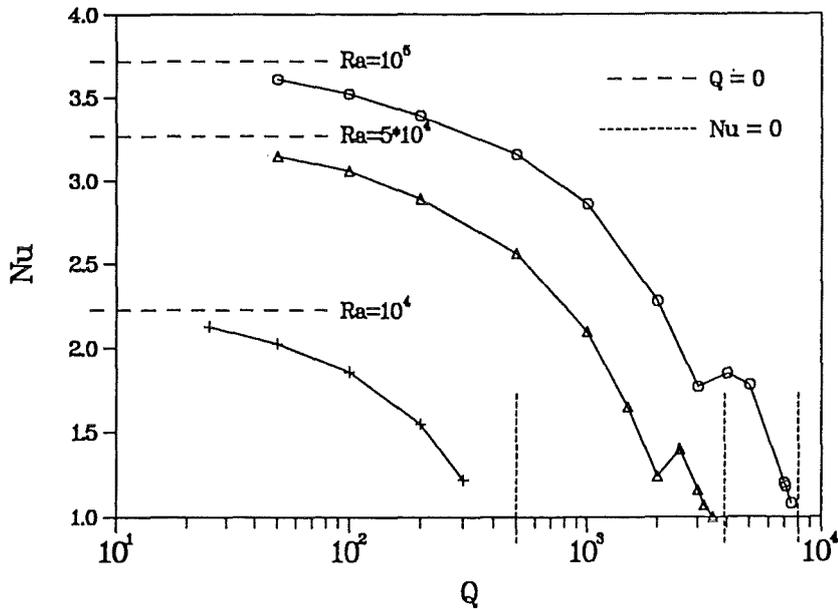


Abb. 5.16: Nusselt-Zahlen bei vertikalem Magnetfeld $Ra = 10^4$, $Ra = 5 \cdot 10^4$, $Ra = 10^5$, $Pr = 0.018$.

Die Nusselt-Zahlen fallen vom hydrodynamischen Wert zunächst monoton ab. Ab einer bestimmten Chandrasekhar-Zahl springen die Werte zunächst auf einen höheren Wert und klingen dann entgültig auf den Wert eins ab. Den Grund für diesen nicht monotonen Verlauf der Rayleigh- Nusselt-Zahl-Beziehung erkennt man aus den Stromlinienbildern der Abbildung 5.17.

Das Ansteigen der Nusselt-Zahl ist verbunden mit einer Umorientierung der Strömungsstruktur bei höheren Magnetfeldstärken. Bei einer Chandrasekhar-Zahl von $Q = 4000$ liegt ein periodisches Muster von vier großen und zwei kleinen Wirbeln vor. Oberhalb dieser Kennzahl bilden sich in der 1:6 Geometrie 18 gleich große Wirbel, wobei deren Wellenlänge nicht der linearen Theorie entspricht. Offensichtlich ist das System in der Lage, Wirbel verschiedener Wellenlängen durch deren positive Anfachungsraten bei stark überkritischen Rayleigh-Zahlen aufrechtzuerhalten, so daß mehrere Strömungsformen möglich sind.

Die in horizontaler Richtung schmäleren Wirbeln verstärken den horizontalen Wärmefluß zwischen den heißen Auftriebszonen und den kalten Abtriebszonen. Dadurch weisen die Strömungsmuster mit größerer Anzahl an Wirbeln auf einer bestimmten horizontalen Länge die größeren Nusselt-Zahlen auf. Der Dämpfung der Konvektionsbewegung durch das Magnetfeld steht somit eine Verbesserung des Wärmetransportes durch die horizontale Stauchung der Konvektionsstrukturen gegenüber. Aus dem Zusammenwirken dieser beiden Effekte ergibt sich der unstetige Verlauf der Nusselt-Zahlen in Abbildung 5.16.

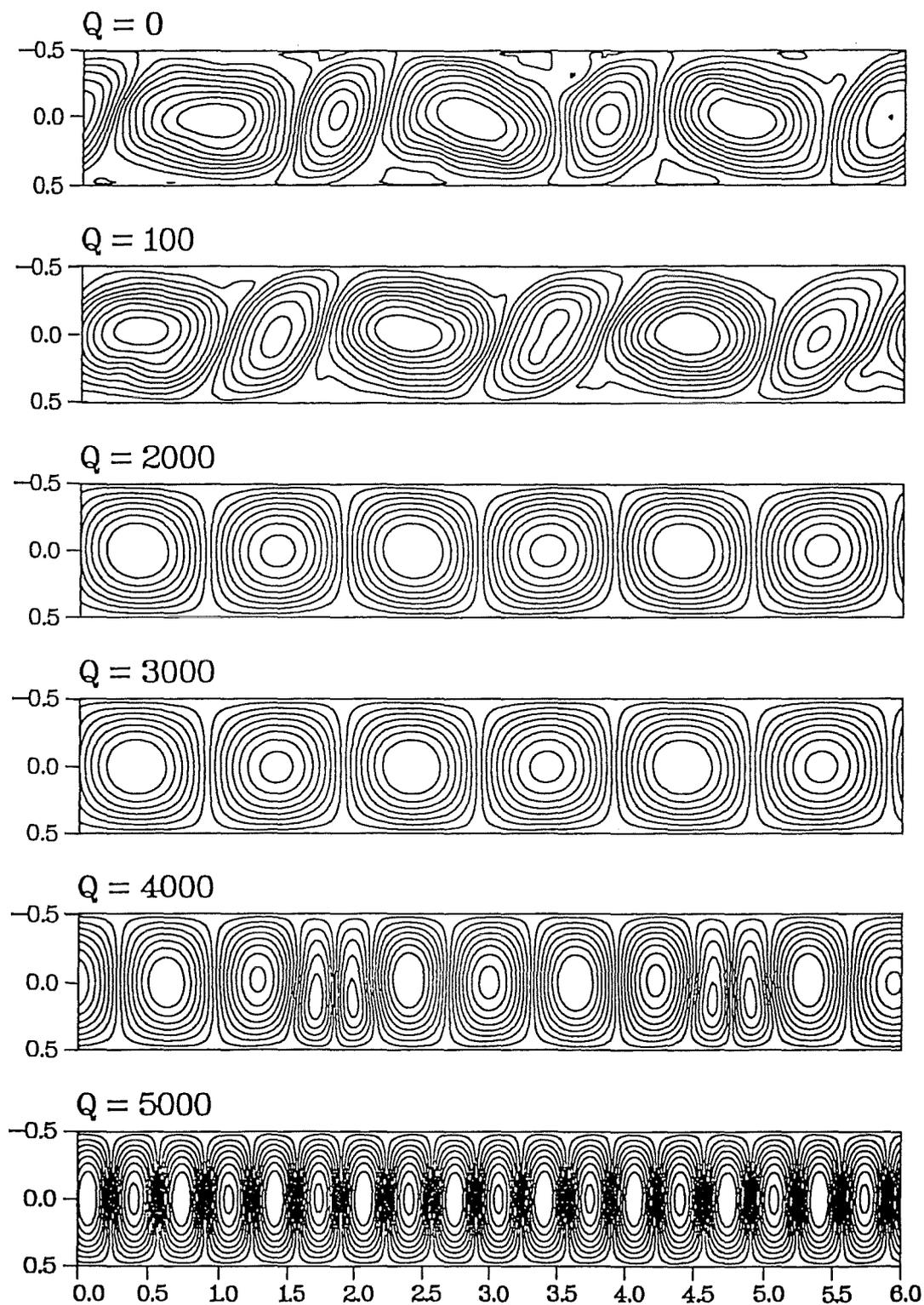


Abb. 5.17: Stromfunktion bei verschiedenen Chandrasekhar-Zahlen für $Ra = 10^5$ und $Pr = 0.018$. Die Rechnung erfolgt von hydrodynamischen Fall zu höheren Chandrasekharzahlen.

Durch die Vorgabe der Kennzahlen ist die Anzahl der Konvektionswirbel im Rechengbiet offenbar nicht eindeutig bestimmt. Die Lösung kann somit zusätzlich von anderen Faktoren, wie der Vorgeschichte der Rechnungen, abhängig sein.

Bisher wurde das Ergebnis der Rechnung mit einer geringeren Chandrasekhar-Zahl als Startwert der Rechnung der jeweils höheren vorgegeben und solange in der Zeit integriert, bis ein im Mittel stationärer Zustand vorlag. Für hohe Magnetfeldstärken waren die so erhaltenen Ergebnisse sogar laminar, d.h. ohne zeitliche Variation der Strömungsgrößen. Wählt man die Lösung für $Q = 7000$ als Startwert für eine Rechnung mit $Q = 5000$ und dieses Ergebnis wiederum für die nächst kleinere Chandrasekhar-Zahl, so ergeben sich die in Bild 5.18 gezeigten Strömungsstrukturen.

Es ergeben sich nun aus den 18 Konvektionswirbeln Muster mit gegenüber den Rechnungen vom hydrodynamischen Fall aus größeren Rollenzahlen. Sogar im hydrodynamischen Fall liegen nun acht Wirbel vor. Die auf diese Weise gewonnenen Strukturen sind wiederum stabil und gehen auch bei längerer Rechnung nicht in die Strukturen der vorigen Rechnung über.

Es sind demnach für identische Randbedingungen und Kennzahlen mehrere stabile Strömungsformen möglich, die ohne eine äußere Störung nicht ineinander übergehen. Welche der möglichen Lösungen eingenommen wird, ist von den Anfangsbedingungen der Rechnungen abhängig.

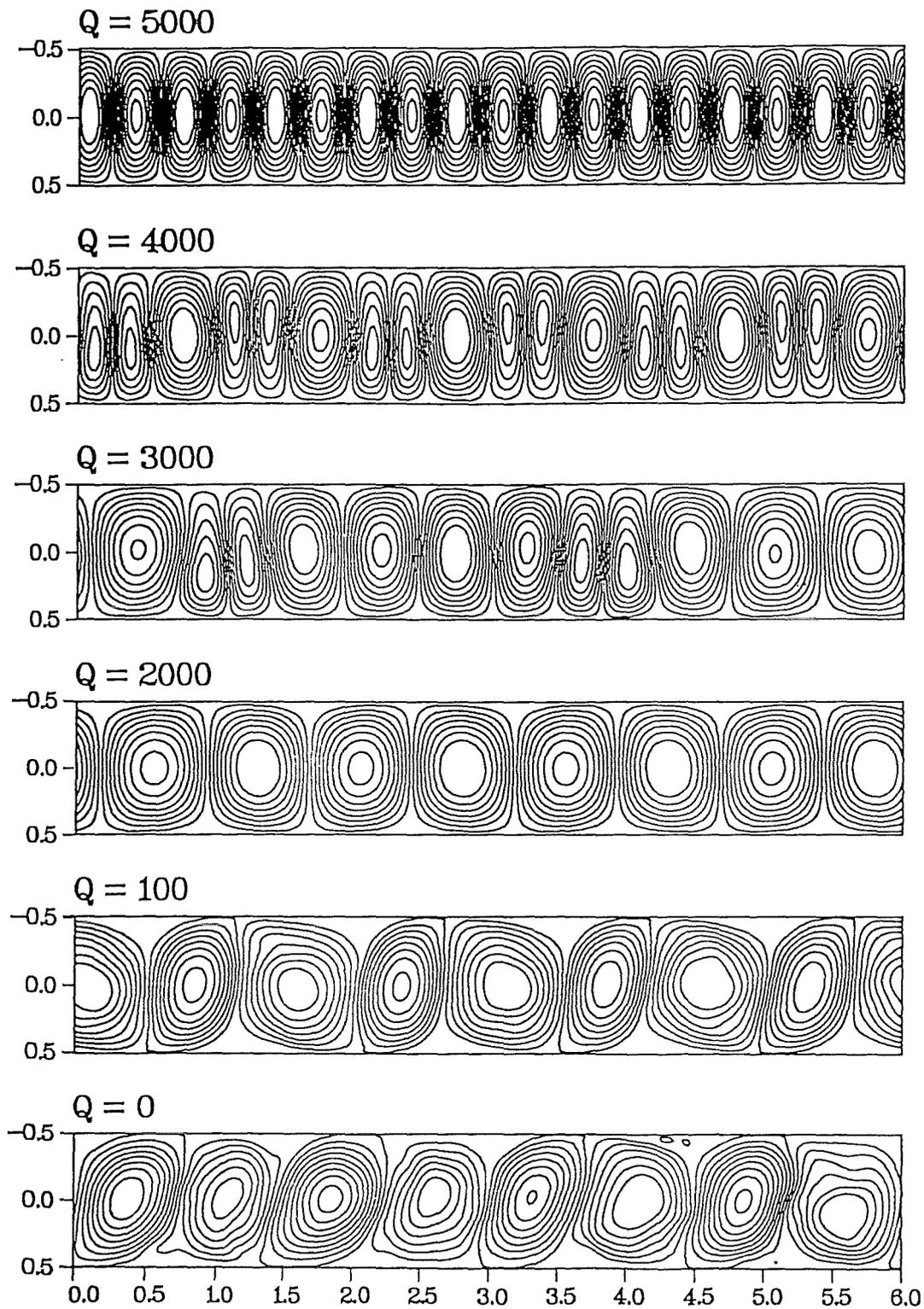


Abb. 5.18: Stromfunktion bei verschiedenen Chandrasekhar-Zahlen für $Ra = 10^5$ und $Pr = 0.018$. Die Rechnung erfolgt von $Q = 7000$ zu niedrigeren Chandrasekhar-Zahlen.

Die veränderten Strömungsmuster schlagen sich auch im Wärmetransport nieder. Abbildung 5.19 vergleicht die Nusselt-Zahlen der beiden Rechenläufe:

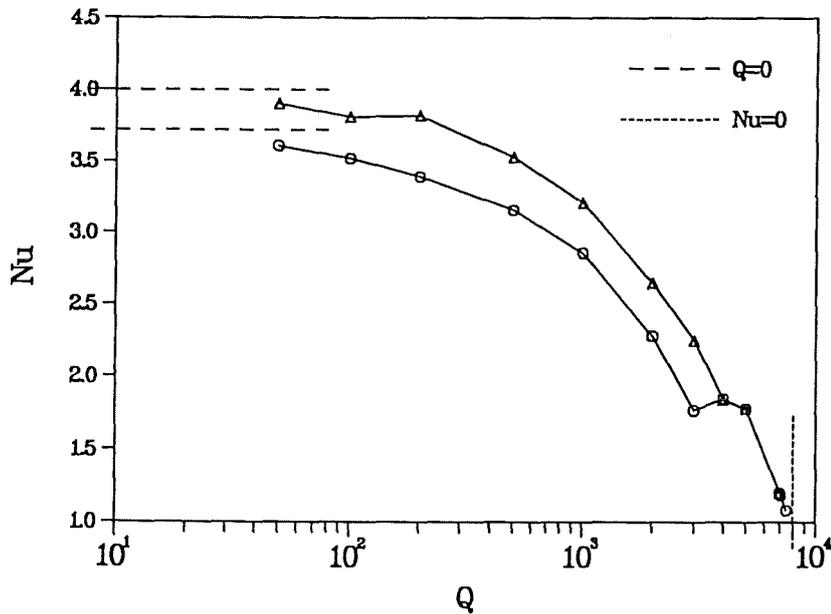


Abb. 5.19: Abhängigkeit der Nusselt-Zahlen von der Rechnungsdurchführung zur Variation der Chandrasekhar-Zahl für $Ra = 10^5$ und $Pr = 0.018$.

Die höheren Anzahlen von Konvektionswirbeln ergeben bei identischer Chandrasekhar- und Rayleigh-Zahl die höheren Nusselt-Zahlen. Dieser Effekt kann auch bei Experimenten auftreten, so daß diese nur dann reproduzierbar sind, wenn die Anfangsbedingungen eines zu messenden Zustandes identisch sind.

Für weitere Rechnungen kann diese Verzweigung der Lösungen vermieden werden, indem man ein Rechengebiet vorgibt, welches die Anzahl der Strukturen festlegt. Dies kann zum Beispiel durch eine Begrenzung des Rechengebietes auf die jeweils kritische Wellenlänge erfolgen.

Da die zweidimensionale Rechnung für vertikale Magnetfelder ohnehin nur eine Näherung darstellt, sind weitere Untersuchungen hierzu nur bedingt sinnvoll. Die dritte Dimension ermöglicht zusätzliche Verzweigungen der Lösung, die ohnehin nicht erfaßt werden.

Die vorgestellten Rechnungen zeigen die Anwendbarkeit des Programmes auf die numerische Berechnung einer von unten beheizten Flüssigmetallschicht unter dem Einfluß eines von außen angelegten Magnetfeldes.

Dabei ist die Annahme zweidimensionaler Konvektionsstrukturen im Fall eines starken horizontalen Magnetfeldes gerechtfertigt (vgl. Abschn. 5.1). Die im Programm implizierte zweidimensionale Approximation erfaßt damit neben den integralen Strömungsgrößen auch die räumliche Struktur sowie das zeitliche Verhalten der Lösung hinreichend genau.

Bei vertikalem Magnetfeld oder ganz ohne Magnetfeld liegen dagegen meist dreidimensionale Strömungszustände vor, die durch die Rechnung nicht erfaßt werden. Es können daher nur integrale Strömungsgrößen, wie z.B. die Nusselt-Zahl, abgeschätzt werden.

Andererseits vergrößert sich der Rechenaufwand durch die dritte Dimension derart, daß er selbst mit leistungsfähigen Rechenanlagen für den experimentell relevanten Parameterbereich bei vertretbarem Aufwand in absehbarer Zeit kaum realisierbar ist.

6. Experimentelle Arbeiten

Die in den vorigen Abschnitten dargestellten Arbeiten stehen im Zusammenhang mit einem geplanten Experiment zur Untersuchung der Naturkonvektion in einer von unten beheizten Flüssigmetallschicht unter dem Einfluß starker äußerer Magnetfelder. Die Experimente werden in der MEKKA-Anlage (Magneto-Hydrodynamik-Experimente in Natrium- Kalium Karlsruhe) am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik des Forschungszentrums Karlsruhe durchgeführt. Die Spulenöffnungen der dort zur Verfügung stehenden Magnete legen somit die äußeren Abmessungen der Versuchseinrichtung fest.

6.1 Auslegung und Bau der Teststrecke

Die Erzeugung des vertikalen Magnetfeldes erfolgt in einem normalleitenden Dipolmagnet, der eine Feldstärke von bis zu 2.2 Tesla erreicht. Sein Öffnungsquerschnitt (Polabstand) beträgt 168mm wodurch die Höhe der Teststrecke begrenzt wird. Bei einer Magnetspaltbreite von 483mm beträgt die Länge des homogenen Feldes 800mm.

Für die Messungen mit horizontalem Magnetfeld steht ein flüssigheliumgekühlter Solenoidmagnet CELLO zur Verfügung. Er besitzt eine maximale Feldstärke von 3.6 Tesla, einen Durchmesser von 400mm und eine Länge von 1100mm. Abbildung 6.1 zeigt die zylindersymmetrische Verteilung der Magnetfeldstärke.

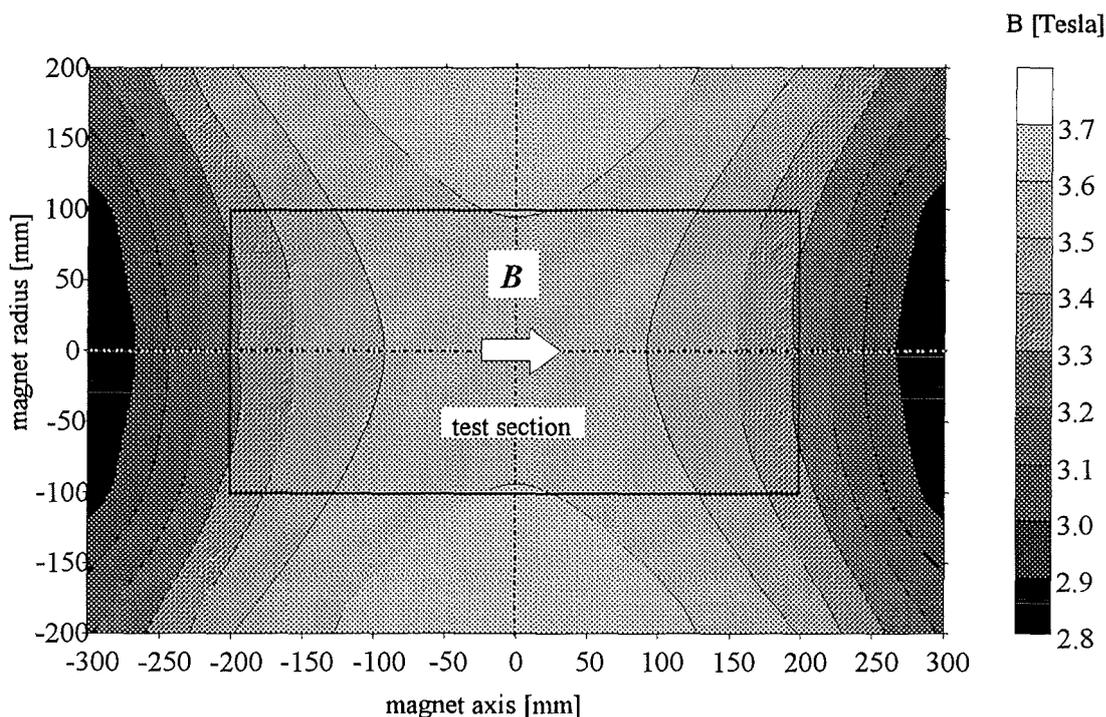


Abb. 6.1: Magnetfeldstärkeverteilung im CELLO-Magnet

Betrachtet man den Bereich, in dem die Feldstärke bezogen auf die Werte im geometrischen Zentrum des Magneten um weniger als 10% abweichen, als homogenen Bereich, so reduziert sich der nutzbare Feldbereich auf einen Zylinder von 400mm Durchmesser und einer Länge von 400mm. Für ein hohes Aspekt-Verhältnis sind damit die Abmessungen der Fluidschicht weitgehend festgelegt.

Als Testfluid wird eine eutektische Natrium-Kaliumlegierung (NaK) eingesetzt, welche in der MEKKA-Anlage in einem Kreislauf zur Verfügung steht. Die temperaturabhängigen Stoffwerte dieser oberhalb -11°C flüssigen Legierung sind im Anhang zusammengefaßt. Da sich Alkalimetalle im allgemeinen chemisch neutral gegenüber technischen Werkstoffen verhalten, kann die Teststrecke in gängigen Metallwerkstoffen ausgeführt werden.

Die Abbildungen 6.1 a-c zeigen verschiedene Ansichten der zur Zeit im Bau befindlichen Versuchseinrichtung.

Die Flüssigmetallschicht besitzt die Abmessungen $40 \times 20 \times 2 \text{ cm}$, was einem Längen-Seiten-Höhen-Verhältnis von 20:10:1 entspricht.

Um möglichst isotherme Randbedingungen an der oberen und unteren Wand zu erreichen, bestehen die horizontalen Wände aus Kupferplatten von jeweils ca. 2 cm Dicke.

Die vertikalen Wände sind aus 1,5mm dickem Edelstahl gefertigt. Die durch sie transportierte Wärmemenge ist aufgrund der niedrigen Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl ($\lambda_{\text{ES}} = 15 \text{ W}/(\text{mK})$) gering, so daß diese Berandungen des Fluidbereiches als adiabatisch betrachtet werden können.

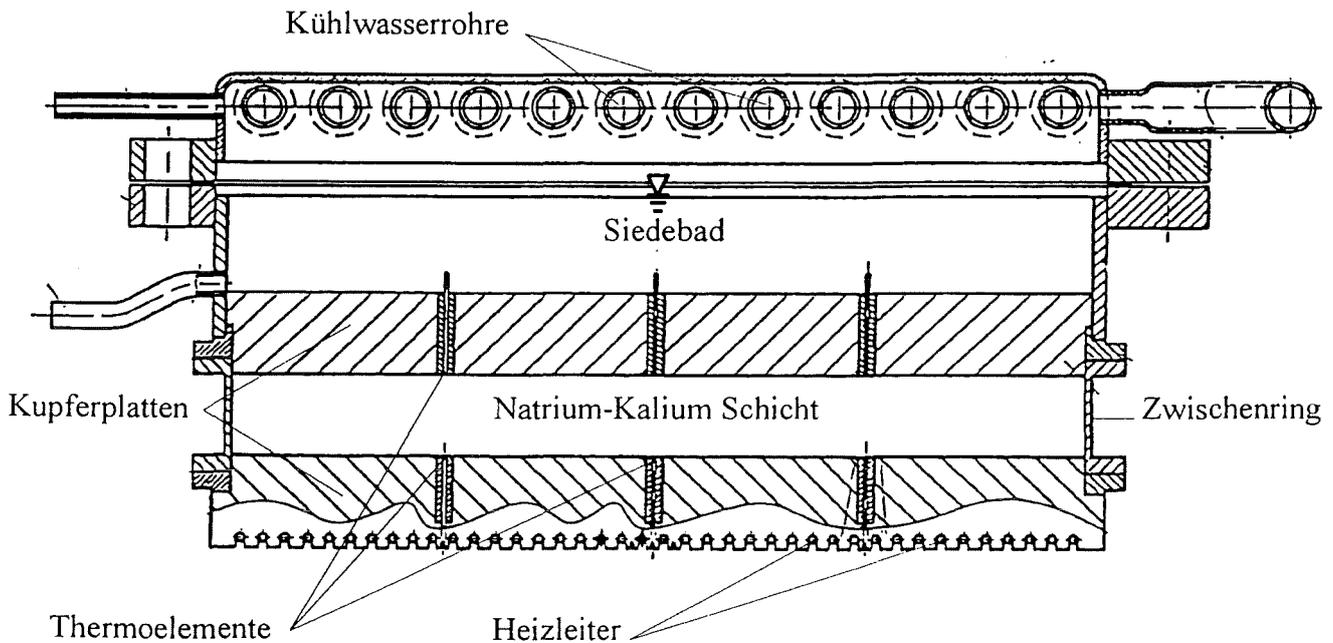


Abb. 6.2.a: Querschnitt der Versuchseinrichtung zur Untersuchung von Bénard-Konvektion unter Magnetfeldeinfluß

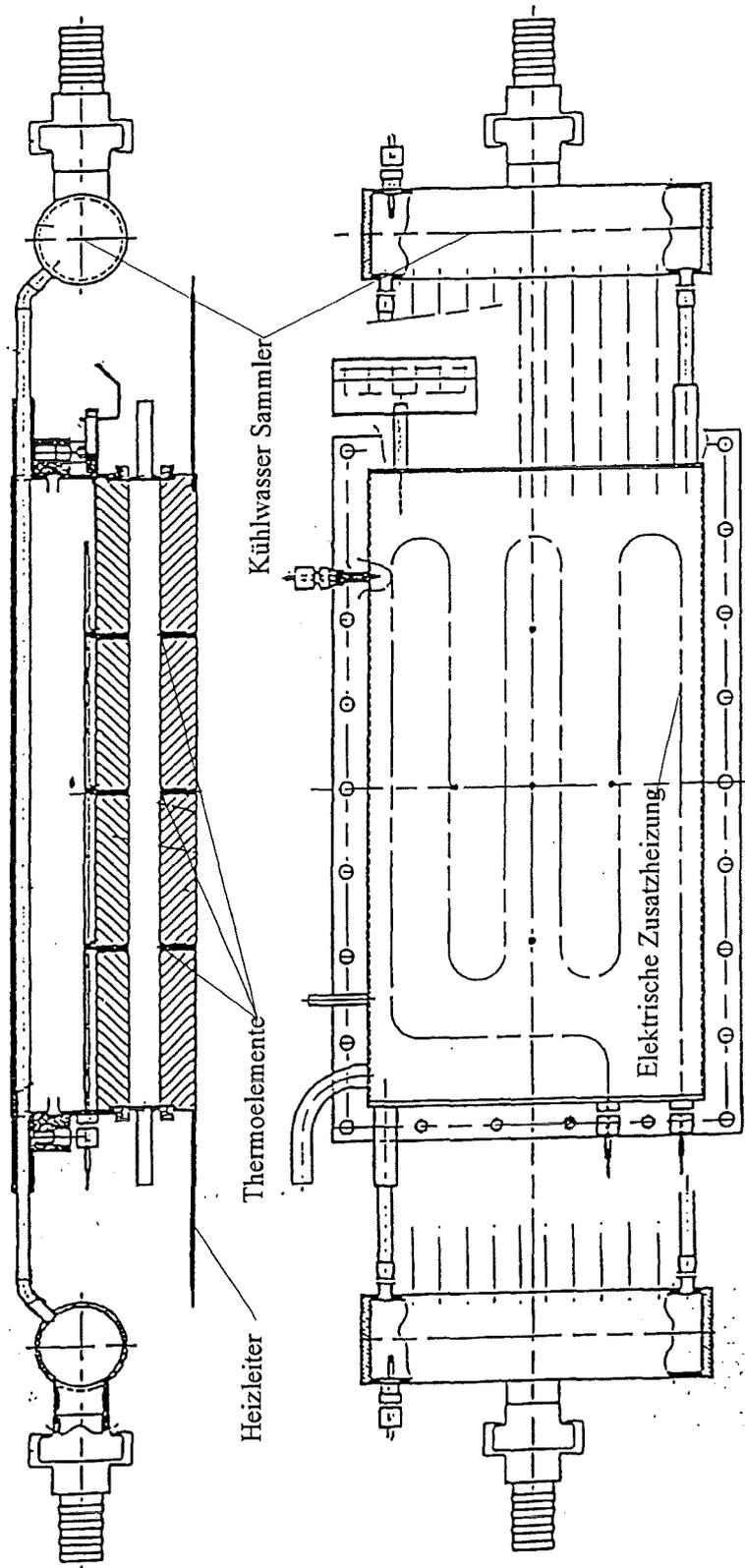


Abb. 6.2.b,c: Längsschnitt und Draufsicht der Versuchseinrichtung zur Untersuchung von Bénard-Konvektion unter Magnetfeldeinfluß

Die Beheizung der unteren Platte erfolgt durch 40 elektrische Heizleiter, die in Nuten in die Heizplatte eingelötet sind. Diese haben bei einer an die in der MEKKA-Anlage verfügbaren Gleichstromnetzgeräten angepaßten Verschaltung eine Leistung von ca. $11kW$ und können somit der Schicht einen Wärmestrom \dot{q} von ca. $13 W/cm^2$ aufprägen. Liegt lediglich Wärmeleitung durch die Fluidschicht vor, so entspricht dies einer Rayleigh-Zahl von $1.4 \cdot 10^5$. Dieser Wert wird, wenn eine Konvektionsbewegung vorliegt, um den Faktor der Nusselt-Zahl kleiner.

Kann das elektrische Beheizen der unteren Platte als unproblematisch angesehen werden, so läßt die Abfuhr eines derart großen Wärmestromes von der oberen Platte erhebliche Probleme erwarten.

Kupfer besitzt gegenüber NaK lediglich eine ca. 17 mal größere Wärmeleitfähigkeit. Ein Ausgleich von Temperaturunterschieden über die zu kühlende Länge der oberen Platte kann bei den hier gewählten Abmessungen nicht durch Wärmeleitung innerhalb der Kupferplatte erfolgen. Die von der Flüssigmetallschicht an die Kühlplatte übertragene Wärme muß daher auch an deren Oberseite bei möglichst konstanter Temperatur abgeführt werden.

Bei einem Kühlkonzept, bei welchem die Wärme durch Überströmen der Kupferplatte mit einem Kühlmedium erfolgt (Konvektionskühlung), ergeben sich im thermischen Einlauf der Strömung wesentlich höhere Wärmeübergangszahlen α als im thermisch ausgebildeten Bereich. Aus der Definition des Wärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha = \frac{q}{T_w - \bar{T}_k} \quad (6.1)$$

ergibt sich, daß bei konstantem Wärmestrom q die Differenz zwischen der Wandtemperatur T_w und der mittleren Kühlwassertemperatur \bar{T}_k mit der überströmten Länge immer größer wird.

Die Temperatur am Kühlwassereintritt ist daher selbst bei geringer Aufheizung des Kühlwassers ($\bar{T}_w \approx konst$) immer geringer als am Kühlwasseraustritt, so daß eine Realisierung der isothermen Randbedingung an der oberen Wand praktisch unmöglich ist.

Es wurde daher ein Kühlkonzept gewählt, bei dem eine siedende Flüssigkeit (z.B. Wasser) über der Kühlplatte die Wärme lediglich über ihre Verdampfungsenthalpie abführt (Siedekühlung).

Die Temperaturdifferenz zwischen zu kühlender Fläche und siedendem Kühlmedium ist lediglich vom lokalen Wärmestrom abhängig, welcher als weitgehend konstant angesehen werden kann. Der gesamten Oberseite der Kühlplatte wird so die Siedetemperatur des Kühlmediums plus einer vom Wärmestrom abhängigen Temperaturdifferenz aufgeprägt.

Über der Kühlplatte befindet sich eine ca. $25mm$ hohe Schicht aus bei atmosphärischem Druck siedendem Wasser. Der erzeugte Dampf kondensiert direkt über dieser an 12 durch einen externen Kreislauf gekühlten Kupferrohren. Diese müssen die Wärme nun nicht mehr homogen abführen, da die hier entstehenden Temperaturunterschiede über die siedende Flüssigkeit ausgeglichen werden.

6.2 Instrumentierung und Meßprogramm

Die Temperatur an der oberen und der unteren Kupferplatte kann durch jeweils fünf gegenüberliegende Kupfer-Konstantan-Thermoelemente erfaßt werden. Die Meßspitzen befinden sich in einem Abstand $e = 1mm$ von der Fluid-Wandgrenzfläche entfernt, so daß mit ihnen auch das Zeitverhalten der Temperaturwerte erfaßt werden kann.

Der tatsächliche Temperaturwert an der Fluid-Wandgrenzfläche kann bei bekanntem Wärmestrom durch Berücksichtigung der durch Wärmeleitung im Kupfer verursachten Temperaturdifferenz gewonnen werden. Es ergibt sich mit der Wärmeleitfähigkeit des Kupfers λ_{Cu} aus dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz der Korrekturwert

$$\Delta\hat{T} = \frac{q \cdot e}{\lambda_{Cu}}. \quad (6.2)$$

Dieser muß von den gemessenen Werten der unteren Platte abgezogen und zu denen an der oberen Platte addiert werden.

Im Gegensatz zur Vorgehensweise bei den in Abschnitt 5 vorgestellten Rechnungen können im Experiment die Temperaturen an der oberen und der unteren Wand nicht explizit vorgegeben werden.

Durch Regelung des Stromes und der Spannung der Heizleiter gibt man im Experiment einen Wärmestrom vor und bestimmt hierzu die sich über die Schicht einstellende Temperaturdifferenz. Bei der Bildung der Nusselt-Zahl nach Gleichung (4.2) müssen die Verluste an der Heizplatte und an den Seitenwänden der Schicht berücksichtigt werden.

Durch Anlegen eines genügend starken Magnetfeldes kann der reine Wärmeleitungszustand für beliebig hohe Heizleistungen und den damit verbundenen Rayleigh-Zahlen aufrecht erhalten werden (vgl. Abschnitt 3). Die nicht durch die Schicht fließende Verlustwärme Q_{vert} ergibt sich dann aus der Differenz zwischen zugeführter elektrischer Leistung Q_{el} und dem aus der gemessenen Temperaturdifferenz ΔT gebildeten, theoretischen Wärmestrom durch Wärmeleitung:

$$Q_{vert} = Q_{el} - A \cdot \lambda(\bar{T}) \cdot \Delta T. \quad (6.3)$$

Die Wärmeleitfähigkeit des Fluides wird in dieser Beziehung auf die mittlere Fluidtemperatur \bar{T} bezogen, wobei eine lineare Temperaturabhängigkeit vorausgesetzt wird.

Es ist anzunehmen, daß die Verluste entscheidend von der Temperatur der Heizplatte geprägt werden. Diese wird neben der zugeführten elektrischen Leistung auch durch die Konvektionsbewegungen im Fluid bestimmt. Es bietet sich daher an, die Verluste im Experiment nicht auf die Heizleistung, sondern auf die gemessene Temperatur an der Heizplatte T_u zu beziehen.

Man erhält dann folgende Auswertebeziehung für die Nusselt-Zahl:

$$Nu = \frac{(Q_{el} - Q_{vert}(T_u)) \cdot h}{\lambda(\bar{T}) \cdot \Delta T}. \quad (6.4)$$

Als erste Versuchsreihe sind Messungen in einem vertikalen Magnetfeld vorgesehen. In erster Linie sollen hier Rayleigh-Nusselt-Zahl-Beziehungen bei verschiedenen Magnetfeldstärken ermittelt werden. Mit diesen kann auch die Gültigkeit der linearen Stabilitätstheorie (Abschn. 3) überprüft werden. Durch Auswertung der Temperatur-Zeitsignale kann ferner der Übergang zu instationären Konvektionsmustern untersucht werden.

Bei erfolgreichem Arbeiten der Versuchseinrichtung sollen die Messungen im horizontalen Magnetfeld wiederholt werden. Von besonderem Interesse ist hierbei die Bestätigung der in Abschnitt 5.3 hergeleiteten Stabilitätsgrenze für das Einsetzen der primären Instabilität sowie eine Validierung der Rechnungen in Abschnitt 5.4.

6.3 Bezug der Rechenergebnisse auf die Dimensionen der Versuchseinrichtung

Der Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Rechenergebnissen in Abschnitt 5.4 und der Versuchseinrichtung kann hergestellt werden, indem man die dimensionslosen Strömungsgrößen mit den physikalischen Dimensionen der Versuchseinrichtung in Beziehung setzt.

Neben den Abmessungen der Schicht spielen hierbei die bei der Stoffwerte der Natrium-Kaliumlegierung eine entscheidende Rolle. Diese werden aus den Stoffgesetzen im Anhang bei einer mittleren Fluidtemperatur gebildet. Da das Temperaturniveau der Versuchseinrichtung vorab nicht exakt bestimmbar ist, wird der Wert der mittleren Fluidtemperatur zu $\bar{T} = 135^\circ C$ angenommen.

In Tabelle 6.1 sind die dimensionsbehafteten geometrischen Größen und die Stoffwerte zusammengefaßt.

Höhe	h	20	mm
Länge	l	400	mm
Dicke der Seitenwand	s	1.5	mm
Massendichte	ρ	846.28	kg/m^3
Volumenausdehnungskoeffizient	α	$2.7851 \cdot 10^{-4}$	-
Kinematische Viskosität	ν	$5.4217 \cdot 10^{-7}$	m^2/s
Wärmeleitfähigkeit	λ	24.595	$W/(mK)$
Temperaturleitfähigkeit	κ	$3.0235 \cdot 10^{-5}$	m^2/s
Elektrische Leitfähigkeit (Fluid)	σ_w	$1.3698 \cdot 10^6$	$1/(\Omega m)$
Elektrische Leitfähigkeit (Fluid)	σ	$2.3762 \cdot 10^6$	$1/(\Omega m)$

Tab. 6.1 Geometrische Größen und Stoffwerte für $\bar{T} = 135^\circ C$

Hieraus ergeben sich die in Tabelle 6.2 zusammengestellten, für alle Rechnungen gültigen Bezugsgrößen.

Dimensionslose Abmessung in Magnetfeldrichtung	$2b = l/h$	20	-
Wandleitverhältnis	$c = (\sigma_w s)/(\sigma h)$	0.0433	-
Prandtl-Zahl	$Pr = \nu/\kappa$	0.18	-
Bezugsgeschwindigkeit	$v_0 = \nu/h$	$2.7109 \cdot 10^{-5}$	m/s
Charakteristische Zeit	$t_0 = h^2/\nu$	737.78	s
Charakteristische Frequenz	$f_0 = 1/t_0$	$1.3554 \cdot 10^{-3}$	1/s

Tab 6.2: Für alle Rechnungen gültige Bezugsgrößen

Für eine feste Prandtl-Zahl liefert das Programm unter Vorgabe der Rayleigh-Zahl und der Chandrasekhar-Zahl bei vertikaalem Magnetfeld bzw. der magnetischen Dämpfung bei horizontalem Feld die dimensionslosen Werte der Nusselt-Zahl und der maximalen Strömungsgeschwindigkeit. Diese können mit den Werten aus den Tabellen 6.1 und 6.2 in physikalische Größen umgerechnet werden.

Aus der Definition der Rayleigh-Zahl (Gl. 2.18) ergibt sich direkt die über die Schicht angelegte Temperaturdifferenz ΔT zu

$$\Delta T = \frac{\nu \kappa}{\alpha g h^3} Ra. \quad (6.5)$$

Der zu ihrer Aufrechterhaltung nötige, mittlere Wärmestrom q ergibt sich aus der Definition der Nusselt-Zahl (Gl. 4.2) als

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{h} Nu. \quad (6.6)$$

Die Stärke der magnetischen Induktion kann im Fall des vertikalen Magnetfeldes aus der Definition der Chandrasekhar-Zahl (Gl. 2.20) bestimmt werden:

$$B = \sqrt{\frac{Q \rho \nu}{\sigma h^2}}. \quad (6.7)$$

Bei Vorgabe der magnetischen Dämpfung für horizontale Magnetfelder ergibt sich die Magnetfeldstärke aus den Definitionen der magnetischen Dämpfung und der Chandrasekhar-zahl zu

$$B = \sqrt{\frac{\rho \nu}{\sigma h^2}} \left[\frac{\sqrt{b^{-2} + 4 c \tau^{-1} (b+c)^{-1}}}{2 c (b+c)^{-1}} \right]. \quad (6.8)$$

In Tabelle 6.3 sind die dimensionsbehafteten Rechenergebnisse zusammengefaßt.

Vorgabe				Dimensionslose Ergebnisse		Dimensionsbehaftete Ergebnisse			
Abb.	Ra	Q	$1/\tau$	Nu	v_{max}	ΔT	q	v_{max}	B
	-	-	-	-	-	K	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{m}{s}$	<i>Tesla</i>
5.7	2000	0	0	1.04	105.7	1.5	$1.93 \cdot 10^3$	$2.87 \cdot 10^{-3}$	0
5.8	10^4	0	0	2.23	1074	7.5	$2.567 \cdot 10^4$	$2.91 \cdot 10^{-2}$	0
5.9	10^5	0	0	3.72	3665	75	$3.431 \cdot 10^5$	$9.935 \cdot 10^{-2}$	0
5.10	10^7	0	0	10.4	4348	7500	$9.591 \cdot 10^7$	$1.18 \cdot 10^{-1}$	0
5.13	10^5	0	1000	2.25	887	75	$2.075 \cdot 10^5$	$2.405 \cdot 10^{-2}$	0.327
5.15	$3.5 \cdot 10^4$	2000	0	1.28	469	26.3	$4.132 \cdot 10^4$	$1.271 \cdot 10^{-2}$	$3.107 \cdot 10^{-2}$

Tab. 6.3: Dimensionsbehaftete Rechenergebnisse

Literaturverzeichnis

- Arakawa, A. 1966;
"Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion . Two-dimensional incompressible flow. Part I; J. Comp. Phys 1, p. 119-143.
- Bénard, H. 1900;
"Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide"; Revue générale des Sciences pures et appliquées, 11, p. 1261-71 et p. 1309-28.
- Bühler, L. 1994;
"Instabilities in 2D MHD Flows"; Proceedings of the Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows; September 26-30, 1994 Aussois, France, p. 463-472.
- Busse F. H., Müller U. 1994;
"The Homogeneous Dynamo: an Analytical Model and a Planned Experimental Demonstration"; Proceedings of the Second International Conference on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows; September 26-30, 1994 Aussois, France, p. 149-163.
- Busse F. H. 1978;
"Non-linear properties of thermal convection";
Rep. Prog. Phys., Vol. 41, 1978, p. 1929-1967.
- Busse F. H., Clever R. M. 1982;
"Stability of convection rolls in the presence of a vertical magnetic field";
Phys. Fluids 25(6), June 1982, p. 931-935.
- Busse F. H., Clever R. M. 1983;
"Stability of convection rolls in the presence of a horizontal magnetic field";
Journal de Mécanique et Appliquée Vol. 2, N° 4, 1983, p. 495-502.
- Busse F. H., Clever R. M. 1989;
"Traveling-wave convection in the presence of a horizontal magnetic field";
Physical Review A, Volume 40 Number 4 August 15, p. 1954-1961.
- Busse F. H., Clever R. M. 1990;
"Finite amplitude convection in the presence of an inclined magnetic field";
Eur. J. Mechanics B 9, p. 225-238.
- Busse F. H., Clever R. M. 1996;
"Three-Dimensional Convection in the presence of Strong Vertical Magnetic Fields";
European Journal of Mechanics - Fluid Series, 1996, Band 15, Heft 1.
- Chandrasekhar S. 1961;
"Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability";
Copyright 1961 Oxford University Press; Dover Publications, Inc. New York.

- Clever R. M., Busse F. H. 1974;
 "Transition to time-dependent convection";
 J. Fluid Mech, vol. 65, part 4, p. 625-645.
- Clever R. M., Busse F. H. 1987;
 "Nonlinear oscillatory convection";
 J. Fluid Mech, vol. 176, p. 403-417.
- Clever R. M., Busse F. H. 1989;
 "Nonlinear oscillatory convection in the presence of a vertical magnetic field";
 J. Fluid Mech, vol. 201, p. 507-523.
- Chang, C., Lundgren, S. 1961;
 "Duct flow in Magneto hydrodynamics"; ZAMP Vol. XII, p. 100-114.
- Cioni, S., Ciliberto S., Someria J. 1996;
 "Experimental Study of High-Rayleigh-Number Convection in Mercury and Water";
 Dynamics of Atmospheres and Oceans, 1996, Band 24 Heft 1- 4.
- Fauve S., Laroche C., Libchaber A. 1981;
 "Effect of a horizontal magnetic field on convective instabilities in mercury";
 J. Physique-Lettres 42, L-455 - L-457.
- Fauve S., Laroche C., Libchaber A., Perrin B. 1984;
 "Chaotic Phases and Magnetic Order in a Convective Fluid";
 Physical Review Letters, Volume 52, Number 20, 14 May 1984, L-211 - L-216.
- Foust O. J. 1972;
 "Sodium-NaK Engineering Handbook";
 Gordon & Breach Publishers, Inc..
- Globe S., Dropkin D. 1959;
 "Natural convection heat transfer in liquids confined by two horizontal plates and heated from below"; ASME J. Heat Transfer, February 1959, p. 24-28.
- Kek V. 1989;
 "Bénard-Konvektion in flüssigen Natriumschichten";
 Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK-4611.
- Kek V., Krebs L., Müller U. 1990;
 "Bénard convection in liquid sodium layers"; Proc. 9th Int. Heat Transfer Conf. ,
 August 19-24, Jerusalem, Israel, Vol. 2; p. 235-239; Ed.: G. Hetsroni.
- Kek V., Müller U. 1993;
 "Low Prandtl number convection in layers heated from below";
 Int. J. Heat and Mass Transfer 36, p. 2795-2804.
- Kutateladze S. S. et al 1958;
 "Liquid metal coolants";
 Atomizdat, Moskau, 1958.

- Kishida Y., Takeda K. 1994;
 "Suppression of turbulent Bénard convection by horizontal D.C. magnetic field";
 Proc. Int. Symp. on Electromagnetic Processing of Materials, p. 80-85,
 October 25-28, 1994, Nagoya, Japan, ISIJ.
- Kippenhan R. 1990;
 Der Stern von dem wir leben";
 Deutsche Verlags-Anstalt GmbH, Stuttgart, 1990.
- Krishnamurti R. 1973;
 "Some further studies on the transition to turbulent convection";
 J. Fluid Mech. 60, p. 285-303.
- Lehnert B., Little N. C. 1957;
 "Experiments on the Effect of Inhomogeneity and Obliquity of a Magnetic Field in
 Inhibiting Convection"; Tellus, 9, p. 97-103.
- Libchaber A., Laroche C., Fauve S. 1982;
 "Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement";
 J. Physique-Lettres 43, L-211 - L-216.
- Libchaber A., Fauve S., Laroche C. 1983;
 "Two-parameter study of the routes to chaos";
 Physica 7D, p. 73-84.
- Lugt H. J. 1979;
 "Wirbelströmungen in Natur und Technik";
 Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1979.
- Nakagawa Y. 1955;
 "An experiment on the inhibition of thermal convection by a magnetic field";
 Nature, London, 175, p. 417-419.
- Nakagawa Y. 1956;
 "Experiments on the inhibition of thermal convection by a magnetic field";
 J. Sci. Earth, 4, p. 108-113.
- Nakagawa Y. 1959;
 "Experiments on the stability of a layer of mercury heated from below and subject
 to the simultaneous action of a magnetic field and rotation";
 Proc. Roy. Soc. (London) A, 249, p. 138-45; 1959.
- Oertel H. 1979;
 "Thermische Zellularkonvektion";
 Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe 1979.
- Rossby H. T. 1969;
 "A study of Bénard convection with and without rotation";
 IAHR-publication, Delft, 1969.

Sparrow E. M., Goldsein R.J., Jonnson V.K. 1964;
J. Fluid Mech. 18, p. 513-528; 1964.

Tabelling P. 1982;
"Convective flow patterns in rectangular boxes of finite extend under an external magnetic field"; J. Physique 43, p.1295-1303.

Van der Borcht R., Murphy J. O., Spiegel E. A. 1972;
"On magnetic inhibition of thermal convection";
Aust. J. Phys., 1972, 25, p.703-718.

Shercliff, J. A. 1965;
"A Textbook of Magnetohydrodynamics";
Pergamon Press, Oxford.

Walker, J. S. 1981;
"Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls.
Part I: Constant area and variable area ducts with strong uniform magnetic fields";
J. de Mécanique 20, p. 79-112.

Wörner M. 1994;
Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium.
Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK-5228.

Anhang

A) Stoffwerte für eutektische Natrium-Kalium Legierung ($Na^{22}K^{78}$)

Schmelztemperatur: $T_s = -11^\circ C$

Aus den in Foust (1972) angegebenen Werten wurden Polynome zweiter Ordnung ermittelt. Die Temperaturabhängige Stoffgröße $\Theta(T)$ wird damit als Polynom der Form

$$\Theta(T) = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2$$

dargestellt. Die Koeffizienten a_{0-2} der einzelnen Stoffwerte sind in Tabelle A zusammengefasst.

Stoffwert	a_0	a_1	a_2
Kinematische Viskosität ν [m^2/s]	$9.439 \cdot 10^{-7}$	$-3.865 \cdot 10^{-9}$	$6.5867 \cdot 10^{-12}$
Wärmeleitfähigkeit λ [$W/(mK)$]	-21.4	$2.07 \cdot 10^{-2}$	$2.20 \cdot 10^{-5}$
Temperaturleitfähigkeit κ [m^2/s]	$2.498 \cdot 10^{-5}$	$4.199 \cdot 10^{-8}$	$-2.277 \cdot 10^{-11}$
Elektrischer Widerstand R [$\Omega \cdot m$]	$3.766 \cdot 10^{-7}$	$2.307 \cdot 10^{-10}$	$7.187 \cdot 10^{-13}$
Massendichte ρ [kg/m^3]	878.1	-0.233	$-2.00 \cdot 10^{-5}$

Tabelle A: Koeffizienten der Stoffwertpolynome im Gültigkeitsbereich $50^\circ - 400^\circ C$; nach Foust (1972).

Hieraus können weitere Stoffwerte sowie die Prandtl-Zahl abgeleitet werden:

Spezifische Wärmekapazität:
$$c_p = \frac{\lambda}{\rho \kappa}$$

Elektrische Leitfähigkeit:
$$\sigma = \frac{1}{R}$$

Prandtl-Zahl:
$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient α ergibt sich am gewünschten Linearisierungspunkt zu:

$$\alpha = \frac{1}{\rho(T)} \cdot \frac{d\rho(T)}{dT} = \frac{a_1 + 2a_2 T}{a_0 + a_1 T + a_2 T^2}$$