



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5915

Direkte numerische Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber

M. Bunk, M. Wörner

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

April 1998

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5915

**Direkte numerische Simulation
turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion
in Quecksilber**

Michael Bunk*
Martin Wörner

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

*jetzt: Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1998

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die direkte numerische Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Quecksilber. Ziel der Untersuchungen ist es, frühere Simulationen auf dem Gebiet der turbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium und Luft zu ergänzen. Von besonderem Interesse ist dabei, ob in Quecksilber - ähnlich wie in Simulationen für Natrium - die sogenannte Trägheitskonvektion auftritt. Sie ist bezüglich der Wärmeübertragung besonders effektiv und gekennzeichnet durch großräumige zweidimensionale Wirbel, die wie Starrkörper rotieren. Die direkten numerischen Simulationen für Quecksilber (Prandtl-Zahl $Pr = 0.025$) umfassen sechs verschiedene Rayleigh-Zahlen im Bereich $2000 \leq Ra \leq 50000$.

Eine für $Ra = 2000$ durchgeführte numerische Studie zeigt, daß bei Verwendung periodischer Randbedingungen die Wahl der Größe des Rechengebiets in Form der Periodenlänge das Konvektionsmuster entscheidend beeinflussen kann. Die physikalisch realistische Abbildung der Rayleigh-Bénard-Konvektion in großen Behältern ist in der Simulation nur bei Vorgabe ausreichend großer Periodenlängen gewährleistet.

Die Trägheitskonvektion tritt für Quecksilber in den Simulationen mit $Ra = 2000$ nicht auf. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ wird über bestimmte Zeiträume lokal Trägheitskonvektion beobachtet. Gekoppelt ist das Phänomen der Trägheitskonvektion an lokal zweidimensionale Bereiche im Temperaturfeld. Anhand der Ergebnisse von Simulationen für Quecksilber, Natrium und Luft bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen werden erste Schritte zur Herleitung eines Zustandsdiagramms der Trägheitskonvektion unternommen. Der Parameterbereich, in dem Trägheitskonvektion möglich erscheint, wird durch einfache Größenordnungsbetrachtungen von Termen in den Grundgleichungen eingegrenzt.

Für $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$ werden grundlegend andere Wärmeübertragungsmechanismen als bei den niedrigen Rayleigh-Zahlen beobachtet. Die Wärmeübertragung erfolgt zunehmend durch einzelne Fluidballen, die intermittent an den Wänden ablösen. Innerhalb der viskosen Grenzschichten werden Knoten- und Speichenstrukturen beobachtet. Sie sind charakteristisch für den Übergangsbereich zur vollturbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion.

Direct numerical simulation of turbulent Rayleigh-Bénard convection in mercury

Abstract

In the present report direct numerical simulations of the Rayleigh-Bénard convection in mercury are presented. The simulations complement previous ones, performed for Rayleigh-Bénard convection in sodium and air. A particular aim of this study is to investigate if the phenomenon of inertial convection observed in simulations of liquid sodium is also present in mercury. The inertial convection is characterized by large two-dimensional vortices which rotate in a solid body like manner. It is highly efficient in transporting heat by convection. Simulations for mercury (Prandtl number $Pr = 0.025$) are performed for six distinct Rayleigh numbers in the range $2,000 \leq Ra \leq 50,000$.

For $Ra = 2,000$, in a numerical study using periodic boundary conditions the influence of the size of the computational domain on the convective pattern is investigated. It is found that physically realistic results for Rayleigh-Bénard convection in large aspect ratio containers are only obtained when the periodicity lengths used are sufficiently large.

In the simulations with $Ra = 2,000$ no inertial convection is observed. For Rayleigh numbers $Ra = 3,000$, $Ra = 6,000$, and $Ra = 12,000$ the inertial convection is identified in certain time intervals. Its appearance is coupled to regions in which the temperature field is almost two-dimensional. Using results of simulations for mercury, sodium, and air at various Rayleigh numbers, a first step has been undertaken towards the derivation of a regime map for the inertial convection. Tentative bounds for the parameter range in which inertial convection seems possible are given by order of magnitude considerations of terms in the governing equations.

At $Ra = 25,000$ and $Ra = 50,000$ the mechanism of heat transfer is no more the inertial convection, but single plumes which intermittently release from top and bottom wall. In the viscous boundary layers knots and spoke patterns are identified. These are characteristic for the transition range to fully developed turbulent Rayleigh-Bénard convection.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung der Arbeit	3
2	Rayleigh-Bénard-Konvektion	4
2.1	Geschichte	4
2.2	Geometrie	4
2.3	Dimensionslose Kennzahlen	4
2.3.1	Nusselt-Zahl	5
2.3.2	Rayleigh-Zahl	5
2.3.3	Prandtl-Zahl	6
2.3.4	Grashof-Zahl	7
2.4	Stand des Wissens	7
2.5	Mathematische Beschreibung	11
2.5.1	Grundgleichungen	11
2.5.2	Boussinesq-Approximation	12
2.5.3	Dimensionslose Gleichungen	12
2.5.4	Randbedingungen	14
2.5.5	Anfangsbedingungen	15
3	Das Rechenprogramm TURBIT	16
3.1	Simulationsmethoden	16
3.2	Numerisches Verfahren	16
3.3	Anforderungen an die Diskretisierung	18
3.3.1	Maschenweite	18
3.3.2	Periodenlänge	19
3.3.3	Wandgrenzschichten	20
3.4	Simulationsstrategie	21

4	Analyse der Simulationsergebnisse	23
4.1	Statistisches Auswerteverfahren	23
4.2	Verifikation der Simulationsergebnisse	24
4.2.1	Vergleich von Nusselt-Zahlen	25
4.2.2	Auflösung der kleinskaligen Wirbel	26
4.3	Statistische Strömungsgrößen	29
4.3.1	Mittlere Temperatur \bar{T} und T_{rms}	29
4.3.2	Rms-Werte der Geschwindigkeitskomponenten	29
4.3.3	Kinetische Turbulenzenergie	32
4.4	Konvektionsformen für $Ra = 2000$	33
4.4.1	Periodenlänge $X_1 = 2.02$ und $X_2 = 2.51$	33
4.4.2	Periodenlänge $X_1 = 8.06$ und $X_2 = 7.54$	38
4.5	Konvektionsformen für $Ra = 3000 \div 50000$	42
4.5.1	Strukturen im Temperaturfeld	42
4.5.2	Strukturen im Geschwindigkeitsfeld	47
4.5.3	Dynamik der Konvektion	55
5	Diskussion der Ergebnisse und Vergleich mit der Literatur	62
5.1	Einfluß der Periodenlänge	62
5.2	Trägheitskonvektion in Quecksilber	65
5.3	Zustandsdiagramm der Trägheitskonvektion	70
5.4	Skalierungsbeziehungen	72
5.4.1	Temperaturfeld	72
5.4.2	Geschwindigkeitsfeld	73
6	Schlußbetrachtung	75
6.1	Zusammenfassung	75
6.2	Ausblick	77
A	Zeitnormierung in TURBIT	83
A.1	Umrechnung in reale Zeiteinheiten	83
A.2	Umrechnung in viskose und thermische Zeiteinheiten	84
B	Farbabbildungen	85

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Strömungsvorgänge, die auf schwerkraftbedingte Auf- und Abtriebskräfte zurückzuführen sind, werden als Naturkonvektion oder freie Konvektion bezeichnet. Häufig wird Naturkonvektion durch Temperaturunterschiede hervorgerufen, die bei einem Fluid mit temperaturabhängiger Dichte im Schwerfeld besagte Auf- und Abtriebskräfte bewirken. In diesen Fällen ist Naturkonvektion stets mit einem konvektiven Wärmetransport verbunden.

Die Naturkonvektion ist für eine Vielzahl von technischen Anwendungsfällen von Bedeutung. Beispiele sind die Heizungs- und Klimatechnik in Gebäuden, Naturzug-Kühltürme und die Kühlung von Freilandtransformatoren. In der Reaktortechnik bieten passive Kühlsysteme, die auf Naturkonvektion aufbauen, für die Abfuhr der Nachzerfallswärme nach einer Reaktorschnellabschaltung den Vorteil inhärenter Sicherheitsmerkmale. So stellt sich nach Überschreiten einer bestimmten Temperaturdifferenz selbständig eine Konvektionsbewegung ein, die einen zusätzlichen Beitrag zur Wärmeabfuhr leistet und das System zurück in einen sicheren Zustand überführt. Um zu gewährleisten, daß die anfallende Wärmemenge durch Naturkonvektion sicher abgeführt werden kann, sind umfangreiche konstruktive Maßnahmen an der Anlage zu treffen. Hierzu ist die genaue Kenntnis der zu erwartenden Strömungsphänomene notwendig.

Eine Alternative zu konventionellen Kühlmitteln, wie Wasser oder Luft, sind aufgrund ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit Flüssigmetalle wie Natrium und Quecksilber (vergl. Tabelle 1.1). Für Flüssigmetalle ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, daß experimentelle Untersuchungen zu den Strömungsvorgängen in diesen Fluiden sehr schwierig und aufwendig sind. Zudem lassen sich moderne Meßtechniken wie die Laser-Doppler-Anemometrie bei den undurchsichtigen Flüssigmetallen nicht anwenden. So bleiben Experimente zumeist auf die Messung integraler Größen beschränkt. Eine Alter-

	Natrium	Quecksilber	Wasser	Luft
λ in $\frac{W}{mK}$	≈ 134	≈ 10.5	≈ 0.6	≈ 0.026

Tabelle 1.1: Wärmeleitfähigkeit von Natrium, Quecksilber, Luft und Wasser bei $20^{\circ}C$.

native, die notwendigen detaillierten Informationen über das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld zu erhalten, bieten Rechenprogramme. Codes für anwendungsorientierte Fragestellungen basieren auf statistischen Turbulenzmodellen und enthalten damit eine Reihe von Vereinfachungen, Annahmen und Modellansätzen. Zudem müssen im allgemeinen Koeffizienten des Turbulenzmodells dem jeweiligen Strömungsproblem angepaßt werden. Die Bestimmung dieser Modellkoeffizienten erfolgt häufig über Grundlagenexperimente.

Ein geometrisch einfaches Modellproblem, das häufig für grundlegende Untersuchungen zu Wärmeübertragungsvorgängen durch Naturkonvektion verwendet wird, ist die Rayleigh-Bénard-Konvektion. Dabei handelt es sich um eine horizontale Fluidschicht, die von unten beheizt und von oben gekühlt wird. Im Vergleich zu Fluiden wie Wasser oder Luft treten bei Flüssigmetallen besondere Effekte im Wärmeübertragungsverhalten auf. So ergaben experimentelle Untersuchungen, daß erst ab einer bestimmten Schwelle der Differenz der Wandtemperaturen ein merklicher Anstieg der übertragenen Wärmemenge festzustellen ist, obwohl schon eine Konvektionsströmung vorliegt [6] [26] [27]. Analytische Arbeiten zu diesem Thema legen nahe, daß es sich bei diesem Effekt um die sogenannte Trägheitskonvektion handelt, bei der ein Gleichgewicht zwischen Auftriebs- und Trägheitskräften besteht [4] [9] [24] [34]. Da großräumige Wirbel dabei wie Starrkörper rotieren spricht man auch von Schwungrad-Konvektion. Experimentell konnte die Existenz der Trägheitskonvektion bisher nicht direkt nachgewiesen werden, da genaue Meßmethoden zur Bestimmung lokaler Werte des Geschwindigkeitsfeldes für Flüssigmetalle nicht verfügbar sind. Während zweidimensionale numerische Untersuchungen auf die Existenz der Trägheitskonvektion hindeuten [24] [34], konnten für den dreidimensionalen Fall zunächst keine Indizien dafür gefunden werden [11]. Erst direkte numerische Simulationen der Rayleigh-Bénard Konvektion in flüssigem Natrium [44] zeigten, daß sich auch in dreidimensionaler, zeitabhängiger Konvektion Trägheitskonvektion zeit- und bereichsweise ausbilden kann.

Bei der Methode der direkten numerischen Simulation werden die exakten strömungsmechanischen Grundgleichungen ohne Vereinfachungen oder Modellannahmen numerisch gelöst. Die räumliche und zeitliche Diskretisierung wird dabei so gewählt, daß alle Längen- und Zeitskalen der turbulenten Strömung durch das Gitter aufgelöst werden. Das Spektrum der Längenskalen (Wirbel) einer turbulenten Strömung umfaßt mehrere Größenordnungen und wird mit zunehmender Intensität der Turbulenz breiter. Dies bringt für eine direkte numerische Simulation große Anforderungen an

Speicherplatz und Rechenzeit mit sich. Aus diesen Gründen bleibt die Anwendung der Methode momentan noch auf schwach turbulente Strömungen in einfachen Geometrien beschränkt. Mit der Weiterentwicklung moderner Supercomputer wird diese Beschränkung allmählich verschwinden. Dennoch ist die direkte numerischen Simulation bereits jetzt ein etabliertes Werkzeug zur detaillierten numerischen Untersuchung turbulenter Strömungen.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Am Institut für Reaktorsicherheit wurden mit dem Rechenprogramm TURBIT [20] bereits umfangreiche direkte numerische Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion durchgeführt. Bei den untersuchten Fluiden handelt es sich um Luft [18] [19] [44] und Natrium [44]. Die für die Rayleigh-Bénard-Konvektion maßgebliche Kenngröße der Stoffeigenschaften des Fluides ist die Prandtl-Zahl Pr . Sie stellt das Verhältnis von kinematischer Zähigkeit zur Temperaturleitfähigkeit des Fluides dar und ist dimensionslos. Die Prandtl-Zahl von Luft ist $Pr \approx 0.7$, die von Natrium ist $Pr \approx 0.006$. In der vorliegenden Arbeit werden mit dem TURBIT-Code direkte numerische Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber durchgeführt. Bezüglich der Prandtl-Zahl liegt Quecksilber mit $Pr \approx 0.025$ zwischen Natrium und Luft. Die Simulationen mit Quecksilber sind damit eine sinnvolle Ergänzung der früheren Untersuchungen. Sie stellen insbesondere eine breitere Datenbasis zur Rayleigh-Bénard-Konvektion im Bereich kleiner Prandtl-Zahlen bereit.

Die konkrete Zielsetzung ist es, durch Vergleich mit Ergebnissen aus direkten numerischen Simulationen für Natrium [44] den Einfluß der Prandtl-Zahl auf die sich einstellenden Konvektionsformen bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion zu untersuchen. Von besonderem Interesse ist der Übergang von laminarer zu turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion und die damit einhergehenden Veränderungen der Strukturen und Dynamik der Konvektion. Insbesondere soll untersucht werden, ob auch in Quecksilber Trägheitskonvektion auftritt. Neben statistischen Analysemethoden und der Auswertung momentaner Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder werden speziell zur Untersuchung der dynamischen Vorgänge die zeitabhängigen Simulationsergebnisse verfilmt.

Kapitel 2

Rayleigh-Bénard-Konvektion

2.1 Geschichte

Erste systematische Untersuchungen zur Konvektion in einer von unten beheizten Fluidschicht wurden von Henri Bénard [2] um 1900 durchgeführt. Lord Rayleigh [35] stellte 1916 die ersten theoretischen Untersuchungen zu Bénards Arbeit an. Zu Ehren beider Wissenschaftler wird das Phänomen der Konvektion in einer von unten beheizten, von einer festen oberen und unteren Wand begrenzten horizontal unendlich ausgedehnten Fluidschicht als Rayleigh-Bénard-Konvektion bezeichnet.

2.2 Geometrie

Die Rayleigh-Bénard-Konvektion ist eines der geometrisch einfachsten Modelle der Fluidodynamik. Abbildung 2.1 zeigt die Geometrie des Problems. In den horizontalen Richtungen ist die Fluidschicht theoretisch unendlich ausgedehnt. In der vertikalen Richtung wird sie von zwei Platten begrenzt. Die untere und obere Platte haben jeweils die konstante Temperatur T_0 bzw. T_1 . Der Abstand der beiden Platten wird mit d bezeichnet. Entsprechend den Temperaturen $T_0 > T_1$ erfolgt ein Wärmedurchgang \dot{q} von unten nach oben.

2.3 Dimensionslose Kennzahlen

Für eine in den horizontalen Richtungen unendlich ausgedehnte Fluidschicht kann man anhand einer Dimensionsbetrachtung vier dimensionslose Kennzahlen für den Wärmetransport durch die Fluidschicht herleiten (siehe z.B. [46]). Die Definition dieser Kennzahlen und ihre Bedeutung wird nachfolgend diskutiert.

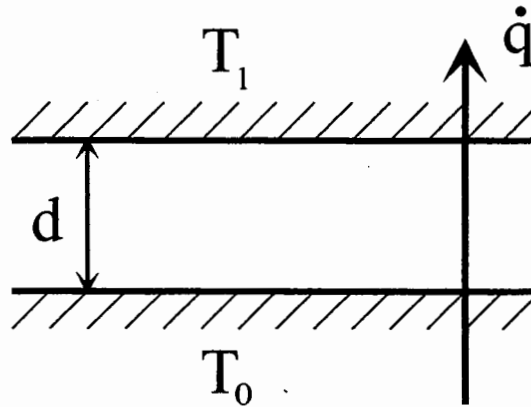


Abb. 2.1: Geometrie der Rayleigh-Bénard-Konvektion.

2.3.1 Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl stellt das Verhältnis zwischen der gesamten übertragenen Wärme und der durch reine Wärmeleitung übertragenen Wärmemenge dar. Sie ist definiert als

$$\text{Nu} = \frac{\dot{q}_{\text{gesamt}}}{\dot{q}_{\text{Leitung}}} = 1 + \frac{\dot{q}_{\text{Konvektion}}}{\dot{q}_{\text{Leitung}}}. \quad (2.1)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß für Nusselt-Zahlen $\text{Nu} > 1$ die Wärme nicht mehr ausschließlich durch Wärmeleitung, sondern zusätzlich konvektiv übertragen wird. Für den Fall der freien Konvektion ist die Nusselt-Zahl eine Funktion von Rayleigh- und Prandtl-Zahl

$$\text{Nu} = f(\text{Ra}, \text{Pr}). \quad (2.2)$$

2.3.2 Rayleigh-Zahl

Die Rayleigh-Zahl ist die ausschlaggebende Größe für den Beginn der Konvektionsbewegung. Hierbei sind drei unterschiedliche physikalische Mechanismen von Bedeutung. In Abbildung 2.2 ist ein Fluidballen dargestellt, dessen Temperatur T_i größer ist als die Temperatur T_u der Umgebung. Durch die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte wird die Dichte des Fluids hier geringer. Der Fluidballen erfährt eine Auftriebskraft. Dieser entgegen wirkt, bedingt durch die Zähigkeit des Fluids, eine Reibungskraft. Zusätzlich zur Reibung führt der Temperatenausgleich mit der Umgebung dazu, daß wieder ein lokales Gleichgewicht ($T_i = T_u$) erreicht wird. Auftriebs- und Reibungskraft verschwinden wieder. Definiert ist die Rayleigh-Zahl als

$$\text{Ra} = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa}. \quad (2.3)$$

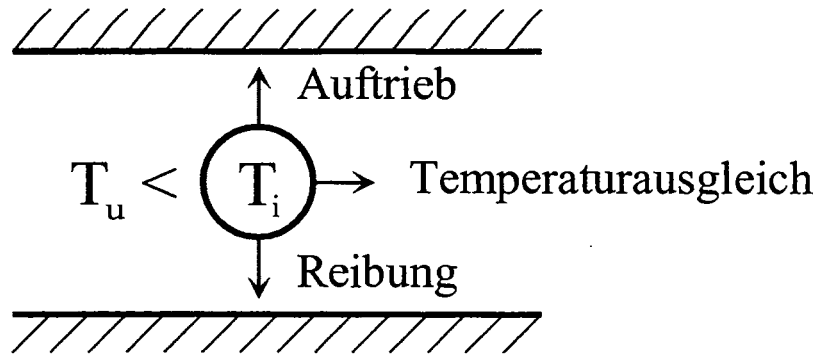


Abb. 2.2: Einflußgrößen der Rayleigh-Bénard-Konvektion.

Hierbei ist α der Volumenausdehnungskoeffizient, g die Erdbeschleunigung, $\Delta T = T_0 - T_1$ die Temperaturdifferenz zwischen unterer und oberer Platte, ν die kinematische Zähigkeit und κ die Temperaturleitfähigkeit des Fluids.

Experimente zeigen, daß sich erst nach Überschreiten einer Schwelle der Temperaturdifferenz eine Konvektionsbewegung einstellt. Solange das Fluid in Ruhe ist, wird die Wärme ausschließlich durch Wärmeleitung transportiert. Es stellt sich ein lineares Temperaturprofil ein. Wird ein Fluidteilchen, bedingt durch kleine Störungen, in eine Schicht niederer Temperatur gebracht, treten die drei beschriebenen Mechanismen Auftrieb, Reibung und Temperaturausgleich mit der Umgebung auf. Erfolgt der Temperaturausgleich schneller, als die Resultierende aus Auftriebskraft und Reibungskraft das Fluidteilchen in eine Umgebung noch niedrigerer Temperatur beschleunigt, werden Störungen gedämpft. Andernfalls wird das Fluidteilchen weiter beschleunigt, bis es die obere Wand erreicht. Entsprechendes gilt für Fluidteilchen, die in eine Schicht höherer Temperatur gelangen und anstelle von Auftriebskräften Abtriebskräfte erfahren.

2.3.3 Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl ist der Quotient aus kinematischer Viskosität und Temperaturleitfähigkeit

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.4)$$

Sie stellt somit das Verhältnis zweier molekularer Austauschkoefizienten dar. Eine anschauliche Erklärung gibt Zierep [46] am Beispiel der ebenen, überströmten und beheizten Platte. Es bildet sich eine thermische und eine viskose Grenzschicht aus, die nur für den Fall $\text{Pr} = 1$ identische Dicken haben. Wird Gleichung 2.4 mit dem Quadrat des Plattenabstandes d^2 erweitert, so kann die Prandtl-Zahl auch als Verhältnis von thermischer und viskoser Zeitskala interpretiert werden

$$\text{Pr} = \frac{d^2 \nu}{\kappa d^2} = \frac{\text{thermische Zeitskala}}{\text{viskose Zeitskala}}. \quad (2.5)$$

2.3.4 Grashof-Zahl

Die Grashof-Zahl ist eine weitere Kennzahl, die in Bezug auf die Rayleigh-Bénard-Konvektion eine wichtige Rolle spielt. Sie ist definiert als der Quotient aus Rayleigh- und Prandtl-Zahl

$$\text{Gr} = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu^2}. \quad (2.6)$$

Die Bedeutung der Grashof-Zahl wird in Kapitel 5.4.2 ausführlich diskutiert.

2.4 Stand des Wissens

Eine lineare Stabilitätsanalyse (siehe z.B. [5]) liefert als Stabilitätsgrenze der Rayleigh-Bénard-Konvektion

$$\text{Ra}^*(a) = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2 \left(1 - \frac{16a\pi^2 \cosh^2 \frac{a}{2}}{(\pi^2 + a^2)^2 (\sinh a + a)}\right)}. \quad (2.7)$$

In Abbildung 2.3 ist der Verlauf der Rayleigh-Zahl Ra^* in Abhängigkeit von der Wellenzahl a dargestellt. Beginnend bei der kritischen Rayleigh-Zahl $\text{Ra}_c = \text{Ra}^*(a_c) = 1708$ werden Störungen der kritischen Wellenzahl $a_c = 3.117$ angefacht. Für steigende Rayleigh-Zahlen wird das Problem für ein zunehmend breiteres Intervall von Wellenzahlen a instabil.

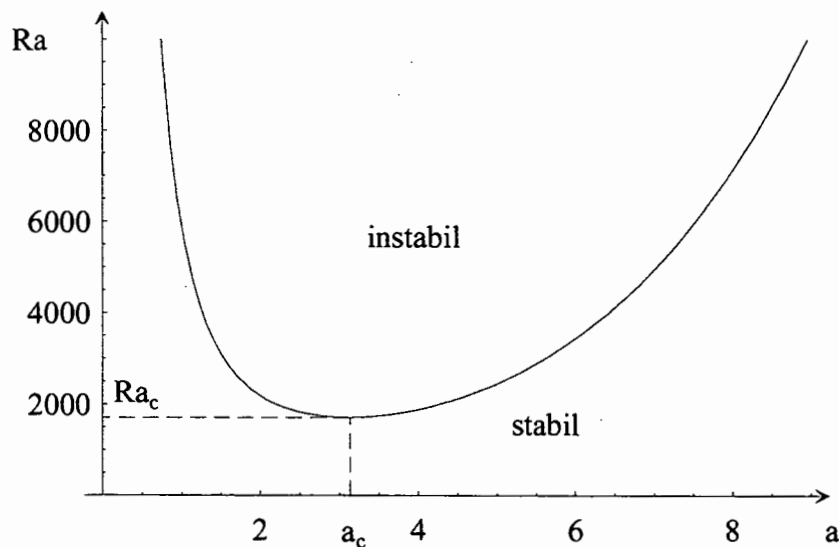


Abb. 2.3: Stabilitätsdiagramm der Rayleigh-Bénard-Konvektion.

Für kleine Werte $\frac{\text{Ra} - \text{Ra}_c}{\text{Ra}} \ll 1$ bildet sich ein zweidimensionales Konvektionsmuster in Form von Rollen der Wellenlänge $\lambda_c = \frac{2\pi d}{a_c} \approx 2.016 d$. Für höhere Rayleigh-Zahlen bilden sich, ausgehend von den zweidimensionalen Rollen, stationäre dreidimensionale

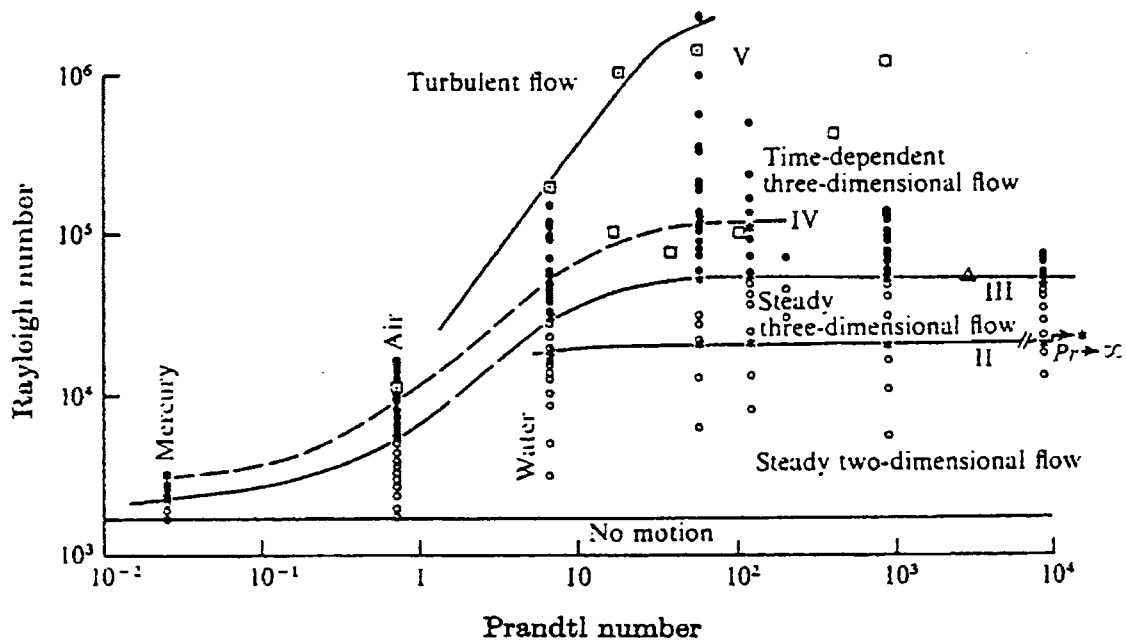


Abb. 2.4: Konvektionsformen der Rayleigh-Bénard-Konvektion nach [29].

und zeitabhängige dreidimensionale Konvektionsmuster, bis die Strömung letztendlich vollturbulent wird. Krishnamurti [29] untersucht experimentell den Einfluß von Rayleigh- und Prandtl-Zahl auf das sich einstellende Konvektionsmuster. In Abbildung 2.4 sind die Ergebnisse der Arbeit zusammengefaßt. Während für Fluide hoher Prandtl-Zahl der Übergang bis zur turbulenten Strömung mehrere Größenordnungen der Rayleigh-Zahl durchläuft, vollzieht sich für Flüssigmetalle ($Pr \ll 1$) der Übergang zur turbulenten Konvektion innerhalb einer Größenordnung. Stationäre Zustände beobachtet Krishnamurti in Quecksilber nur für Rayleigh-Zahlen $Ra < 2400$.

Globe und Dropkin [15] messen den Wärmedurchgang für Quecksilber in einem Intervall $2 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 4 \cdot 10^7$. Für die Nusselt-Zahl geben sie die Beziehung

$$Nu = 0.051 \cdot Ra^{\frac{1}{3}} \quad (2.8)$$

an. Die $\frac{1}{3}$ -Potenzabhängigkeit deutet auf einen turbulenten Strömungszustand hin, denn der Wärmedurchgangskoeffizient wird für diesen Sonderfall unabhängig von der geometrischen Länge d .

Rossby [36] führt Messungen in Quecksilber für Rayleigh-Zahlen im Bereich $10^3 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^5$ durch. Er stellt fest, daß seine Versuchsergebnisse für Quecksilber deutlich von denen für Wasser und Silikonöl abweichen. Die Steigung der Nusselt-Zahl $(\partial Nu)/(\partial Ra)$ bei Beginn der Konvektionsbewegung ist deutlich flacher als bei Fluiden höherer Prandtl-Zahl. Dieses Ergebnis wird von Krishnamurti bestätigt. Für

Rayleigh-Zahlen $Ra > 20000$ gibt Rossby die Beziehung

$$Nu = 0.147 \cdot Ra^{0.247 \pm 0.004} \quad (2.9)$$

an. Dies steht im Widerspruch zur $\frac{1}{3}$ -Potenzabhängigkeit die Globe und Dropkin ermittelt haben. Wegen der starken Fluktuationen seiner Meßwerte folgert Rossby, daß die Strömung in Quecksilber stets turbulent ist. Eine für turbulente Strömungen charakteristische $\frac{1}{3}$ -Potenzabhängigkeit konnte er aber nicht feststellen.

Fauve und Libchaber [13] [30] führen Experimente zur Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber in einem quaderförmigen Behälter durch, dessen Verhältnis von Breite zu Höhe (= Aspekt-Verhältnis Γ) $\Gamma_{B/H} = 2$ und von Tiefe zu Höhe $\Gamma_{T/H} = 1$ ist. Aus Arbeiten von Stork und Müller [41] ist bekannt, daß für sehr kleine Aspekt-Verhältnisse die Wände einen entscheidenden Einfluß auf die Strömungsvorgänge haben. Deshalb läßt das Experiment von Fauve und Libchaber [13] keine quantitativen Vergleiche mit Vorgängen in großen Behältern zu. Deutlich wird dies anhand des hohen Wertes der kritischen Rayleigh-Zahl, für den Fauve und Libchaber $Ra_c = 4950$ angeben. Ausgehend von stationären Konvektionsrollen finden sie bei $Ra \approx 2.5 \cdot Ra_c$ oszillatorische Instabilitäten in Form einer Wanderwellenkonvektion.

Chiffaudel et al. [6] untersuchen das Problem für Quecksilber für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen und Prandtl-Zahlen im Intervall $0.02 \leq Pr \leq 0.04$. Sie finden zwei Bereiche der Rayleigh-Zahl mit stationärem Konvektionsmuster. Im ersten messen sie einen sehr geringen konvektiven Wärmetransport, der sehr stark von der Prandtl-Zahl abhängt. Der zweite Bereich ist charakterisiert durch einen sehr effizienten konvektiven Wärmetransport, der nahezu unabhängig von der Prandtl-Zahl ist. Diese Beobachtung ist in Übereinstimmung mit theoretischen Überlegungen (siehe unten). Die Autoren bezeichnen die beiden Bereiche in Anlehnung an eine Arbeit von Proctor [34] als viskosen Bereich ('viscous regime') bzw. als Trägheitsbereich ('inertial regime').

Anhand der vorgestellten Experimente wird deutlich, daß das Problem der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Fluiden sehr kleiner Prandtl-Zahl sehr vielschichtig ist und eine Reihe von Fragen aufwirft, die aufgrund der meßtechnischen Schwierigkeiten in Flüssigmetallen momentan experimentell nicht zugänglich sind. Dieser Sachverhalt war die Motivation für zahlreiche theoretische Arbeiten. Nachfolgend werden wichtige Ergebnisse dieser Untersuchungen zusammengefaßt.

Eine der ersten Arbeiten stammt von Schlüter et al. [38]. Die Autoren finden mit Hilfe einer Störungsrechnung für kleine Prandtl-Zahlen den Zusammenhang

$$\frac{Nu - 1}{Ra - Ra_c} = (0.69942 - 0.00472 \frac{1}{Pr} + 0.00832 \frac{1}{Pr^2})^{-1} \sim Pr^2. \quad (2.10)$$

Dies zeigt, daß für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen zwar eine Konvektionsströmung vorliegt, der konvektive Wärmetransport für Flüssigmetalle aber nur von

untergeordneter Rolle ist und stark von der Prandtl-Zahl abhängt.

Jones et al. [24] und Proctor [34] untersuchen, ob für Fluide kleiner Prandtl-Zahlen eine zweite kritische Rayleigh-Zahl existiert, für die der konvektive Wärmetransport merklich zunimmt. Jones et al. [24] betrachten hierzu eine torusförmige Konvektionszelle, und Proctor [34] einen horizontalen Zylinder, bei dem die untere Halbschale beheizt und die obere gekühlt ist. Unter der Voraussetzung einer zweidimensionalen stationären Strömung finden beide für den Grenzfall $Pr \rightarrow 0$ eine zweite kritische Rayleigh-Zahl, oberhalb der der konvektive Wärmetransport stark zunimmt. Charakterisiert ist diese Art der Konvektion durch Starrkörperwirbel mit einer reibungsfreien Kernströmung. Damit herrscht in diesen Wirbeln ein Gleichgewicht zwischen Auftriebs- und Trägheitskräften.

Für die Geometrie der Rayleigh-Bénard-Konvektion suchen Clever & Busse [9] und Busse & Clever [4] nach ähnlichen Mechanismen, wie sie Jones et al. [24] und Proctor [34] beschrieben haben. Anhand numerischer Untersuchungen betrachten sie Prandtl-Zahlen $0.001 \leq Pr \leq 0.7$ und Rayleigh-Zahlen $1708 \leq Ra \leq 20000$. Unter der Voraussetzung zweidimensionaler Konvektionsrollen finden sie, daß der konvektive Wärmetransport für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen $(Ra - Ra_c) < 10 \div 30$ proportional zu Pr^2 ist. Dies bestätigt die früheren Untersuchungen von Schlüter et al. [38]. Für Rayleigh-Zahlen $Ra > 10^4$ wird darüber hinaus der konvektive Wärmetransport unabhängig von der Prandtl-Zahl. Busse und Clever schließen, daß Trägheitskonvektion auch bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion möglich ist, und nicht auf die speziellen Verhältnisse, wie sie den Untersuchungen von Jones et al. [24] und Proctor [34] zugrunde liegen, beschränkt ist. Unter der Voraussetzung von Konvektion in Form zweidimensionaler Rollen geben sie für den Grenzfall $Pr \rightarrow 0$ als zweite kritische Rayleigh-Zahl für den Beginn der Trägheitskonvektion den Wert $Ra_{II} = 7373$ an. Für die Nusselt-Zahl finden sie die Beziehung

$$Nu = 0.175 \cdot Ra^{0.25}. \quad (2.11)$$

Direkte Vergleiche der analytischen Arbeiten von Busse & Clever [4] und Clever & Busse [9] mit experimentellen Ergebnissen sind wegen der Voraussetzung zweidimensionaler Konvektionsrollen nur bedingt möglich. Krishnamurti [29] beobachtet schon für $Ra > 2400$ dreidimensionale zeitabhängige Konvektion. Clever & Busse [8] erhalten aus einer Stabilitätsanalyse für den Beginn oszillatorischer Instabilitäten den Wert $Ra \approx 1900$. Somit ist die Gültigkeit der Voraussetzung von zweidimensionaler Konvektion in [4] und [9], die auf das Ergebnis $Ra_{II} = 7373$ führt, als fragwürdig anzusehen. Dennoch erscheint, unabhängig von dem konkreten Zahlenwert für die zweite kritische Rayleigh-Zahl, die Trägheitskonvektion in Flüssigmetallen als sehr effizienter Mechanismus des konvektiven Wärmetransports möglich. Schlüter et al. [38] weisen z.B. darauf hin, daß die Strömung immer den Zustand anstreben wird,

bei dem die maximale Wärmemenge transportiert werden kann. Als deutliche Hinweise auf die Existenz einer Trägheitskonvektion können die verschiedenen Bereiche im Wärmeübertragungsverhalten angesehen werden, die Rossby [36], Krishnamurti [29] und Chiffaudel et al. [6] in ihren Experimenten beobachten.

In neueren Arbeiten untersuchen Clever & Busse [10] [11] dreidimensionale Rayleigh-Bénard-Konvektion für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen. Sie betrachten verschiedene Prandtl-Zahlen, darunter auch $Pr = 0.025$ und $Pr = 0.01$. Die Autoren finden allerdings keine Anzeichen für eine Trägheitskonvektion.

Wörner [44] (siehe auch [22]) untersucht die Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium ($Pr = 0.006$) mit der Methode der direkten numerischen Simulation und führt Simulationen für Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000$, $Ra = 6000$, $Ra = 12000$ und $Ra = 24000$ durch. Er führt erstmals den Nachweis, daß Trägheitskonvektion in dreidimensionalen zeitabhängigen Strömungen möglich ist. Während für $Ra = 3000$ die Trägheitskonvektion bestimmend für das Geschehen ist, tritt der Effekt für höhere Rayleigh-Zahlen nur lokal und über bestimmte Zeitintervalle auf.

Meneguzzi et al. [32] und Thual [43] haben numerische Untersuchungen in Quecksilber für verschiedene Rayleigh-Zahlen durchgeführt. Sie konnten allerdings mit den von ihnen gewählten Rechengebieten, die relativ kleine Aspekt-Verhältnisse aufweisen, keinerlei Anzeichen einer Trägheitskonvektion feststellen. Die Ergebnisse dieser Simulationen werden in Abschnitt 5.1 vorgestellt und dort in Zusammenhang mit der Bewertung von Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ausführlich diskutiert.

2.5 Mathematische Beschreibung

2.5.1 Grundgleichungen

Aus einer Bilanz an einem Kontrollvolumen lassen sich die zur Beschreibung der Konvektion notwendigen Gleichungen herleiten. Dies sind die physikalischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, die für ein inkompressibles, Newtonsches Fluid folgende Form annehmen [3]

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (T u_j)}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.14)$$

In der Energiegleichung ist dabei der Quellterm durch viskose Dissipation vernachlässigt. Die Darstellung der Gleichungen basiert auf der Einsteinschen Summenkonvention. Tritt in einem Term ein Index doppelt auf, so ist über diesen Index von 1 bis 3 zu summieren.

2.5.2 Boussinesq-Approximation

Das obige Gleichungssystem läßt sich vereinfachen, indem alle Stoffwerte als konstant angenommen werden und lediglich im Auftriebsterm der Impulsgleichung die Temperaturabhängigkeit der Dichte über eine lineare Beziehung berücksichtigt wird

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0)).$$

Die Gleichungen 2.12, 2.13 und 2.14 vereinfachen sich damit zu

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + (1 - \alpha(T - T_0)) g_i, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(T u_j)}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.17)$$

Der Gültigkeitsbereich dieser sogenannten Boussinesq-Approximation umfaßt mehrere Größenordnungen der Rayleigh-Zahl bis zu $Ra \approx 10^{17}$, solange die Temperaturdifferenz ΔT nicht zu große Werte erreicht [16]. Für Simulationen in Quecksilber im Bereich $2000 \leq Ra \leq 50000$, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt werden, ist die Gültigkeit somit gewährleistet.

2.5.3 Dimensionslose Gleichungen

Es ist sinnvoll, von den dimensionsbehafteten Gleichungen 2.15, 2.16 und 2.17 auf dimensionslose Gleichungen überzugehen. Spezifische Stoffeigenschaften, die als Koeffizienten in den Differentialgleichungen auftauchen, werden durch dimensionslose Kennzahlen ersetzt. Das Gleichungssystem gilt somit nicht mehr nur für ein bestimmtes Fluid, sondern für eine Klasse physikalisch ähnlicher Probleme [46]. Zudem ergeben sich auch numerische Vorteile. Bei geeigneter Normierung erhalten die einzelnen Terme die Größenordnung Eins. Dadurch werden bei Rechenoperationen Fehler aufgrund der beschränkten Genauigkeit der Zahlendarstellung minimiert.

Zur Normierung werden die folgenden Größen verwendet:

- Länge

$$x^* = \frac{x}{d},$$

- Geschwindigkeit

$$u^* = \frac{u}{u_0} \quad u_0 = \sqrt{\alpha g \Delta T d},$$

- Zeit

$$t^* = \frac{t}{\frac{d}{u_0}},$$

- Druck

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 u_0^2},$$

- Temperatur

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}.$$

Setzt man diese Ansätze in die Gleichungen 2.15, 2.16 und 2.17 ein und läßt \star zur Kennzeichnung der dimensionslosen Größen weg, ergibt sich das Gleichungssystem für Masse-, Impuls- und Energieerhaltung in der Form:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - (T_{ref} - T) \delta_{i3}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(T u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\sqrt{PrRa}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.20)$$

Die Gleichungen 2.18, 2.19 und 2.20 bilden ein geschlossenes System für die fünf Unbekannten \vec{u} , T und p . Für gegebene Rand- und Anfangsbedingungen kann es numerisch gelöst werden.

Auf der linken Seite der dimensionslosen Impulsgleichung 2.19 stehen lokale und konvektive Beschleunigungsanteile. Auf der rechten Seite stehen Terme, die durch Oberflächen- und Massenkkräfte hervorgerufen werden. Dabei taucht lediglich in den Diffusionstermen eine dimensionslose Kennzahl auf, die Grashof-Zahl (siehe Abschnitt 2.3.4). Dies legt nahe, daß für das Geschwindigkeitsfeld eine Skalierung mit der Grashof-Zahl vorliegt.

In der dimensionslosen Energiegleichung 2.20 stehen auf der linken Seite der lokale und konvektive Term und auf der rechten Seite der Diffusionsterm. In Entsprechung zur Impulsgleichung taucht in dem Diffusionsterm der Energiegleichung ein Produkt zweier dimensionsloser Kennzahlen auf. Für das Temperaturfeld deutet sich damit eine Skalierung mit $Pr \cdot Ra$ an. Inwieweit sich diese durch die Entdimensionierung der Differentialgleichungen andeutenden Skalierungsbeziehungen für Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld durch die Simulationsergebnisse bestätigen lassen, wird in Abschnitt 5.4 untersucht.

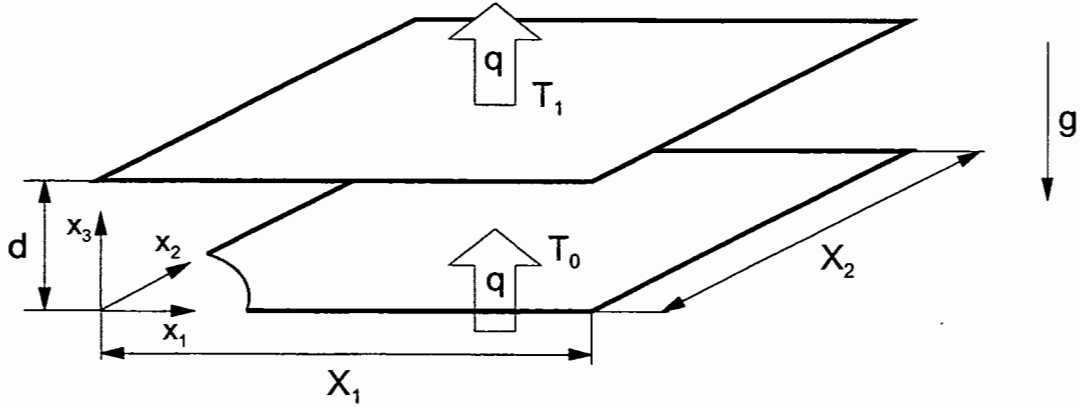


Abb. 2.5: Rechengebiet und Koordinatensystem.

2.5.4 Randbedingungen

Das Problem der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist durch spezielle Randbedingungen gekennzeichnet. Diese werden anhand von Abbildung 2.5 erläutert, in der das Rechengebiet und das Koordinatensystem skizziert ist. Die Fluidschicht ist von einer oberen und einer unteren Wand begrenzt. Die Wände sind undurchlässig und es gilt die Haftbedingung

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = \vec{u}(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = 0. \quad (2.21)$$

Beide Wände sind isotherm und haben die Temperatur

$$T(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = T_0, \quad (2.22)$$

$$T(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = T_1, \quad (2.23)$$

wobei gilt $T_0 > T_1$.

In den horizontalen Richtungen ist die Fluidschicht beim klassischen Rayleigh-Bénard Problem theoretisch unendlich ausgedehnt. Um dies in der numerischen Simulation abzubilden, werden in den horizontalen Richtungen x_1 und x_2 periodische Randbedingungen vorgegeben. Dabei ist darauf zu achten, daß die horizontalen Abmessungen des Rechengebietes ausreichend groß gewählt werden. Ansonsten können bei der numerischen Simulation Strukturen großer Wellenlänge nicht mehr abgebildet werden. Mit den Periodenlängen X_1 und X_2 ergibt sich für $\phi = \vec{u}, T, p$ als Randbedingung in den horizontalen Richtungen

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1 + m \cdot X_1, x_2 + n \cdot X_2, x_3) \quad m, n \in \mathbf{Z}. \quad (2.24)$$

Beim Vergleich von numerischen Ergebnissen, die unter Verwendung von periodischen Randbedingungen erzielt wurden, mit experimentellen Ergebnissen, die in einem Behälter gemessen wurden, der in beiden horizontalen Richtungen die gleichen

Aspekt-Verhältnisse aufweist wie sie dem numerischen Rechengebiet zugrunde liegen, ist dennoch auf wesentliche Unterschiede hinzuweisen. So sind im Experiment die seitlichen Begrenzungen undurchlässig und haben einen hemmenden Einfluß auf die Konvektionsbewegung. Zudem wird durch sie die Orientierung regelmäßiger makroskopischer Strukturen, wie sie z.B. die Konvektionswalzen darstellen, festgelegt. In der Simulation mit periodischen Randbedingungen fehlen dagegen diese seitlichen Wände und das Konvektionsmuster kann sich im Rechengebiet im Prinzip in beliebiger Richtung orientieren.

2.5.5 Anfangsbedingungen

Als Anfangsbedingung wird in den Simulationen für kleine Rayleigh-Zahlen von einem in Ruhe befindlichen Fluid ausgegangen, d.h. $\vec{u}(\vec{x}, t = 0) = (0, 0, 0)$. Für das Temperaturfeld wird ein linear mit x_3 von T_0 auf T_1 abfallendes mittleres Profil vorgegeben, dem randome Temperaturstörungen mit einer Amplitude von typischerweise 10% von $T_0 - T_1$ überlagert sind. Diese Anfangsbedingungen gewährleisten, daß der Strömung nicht bereits a priori ein bestimmtes Konvektionsmuster aufgeprägt wird.

Direkte numerische Simulationen für höhere Rayleigh-Zahlen erfordern eine sehr feine räumliche und zeitliche Diskretisierung. Um den Rechenaufwand für diese Simulationen zu verkleinern, d.h. nicht die lange Transiente von den oben genannten Anfangsbedingungen hin zu einem eingelaufenen Konvektionszustand berechnen zu müssen, wird hier eine andere Vorgehensweise gewählt. Als Anfangsbedingung dient das momentane Geschwindigkeits- und Temperaturfeld einer vorangegangenen Simulation für eine kleinere Rayleigh-Zahl. Es kann davon ausgegangen werden, daß ein solches turbulentes Geschwindigkeitsfeld genug Fluktuationsenergie enthält, um das vorgegebene Konvektionsmuster der kleineren Rayleigh-Zahl in den der erhöhten Rayleigh-Zahl entsprechenden Zustand zu überführen.

Kapitel 3

Das Rechenprogramm TURBIT

3.1 Simulationsmethoden

TURBIT ist ein am Institut für Reaktorsicherheit entwickeltes Computerprogramm zur numerischen Simulation laminarer und turbulenter Strömungen in ebenen Kanälen und Ringspalten [17] [39] [40] [44]. Zur Simulation turbulenter Strömungen stehen in TURBIT zwei Methoden zur Auswahl.

Bei der **direkten numerischen Simulation (DNS)** werden alle relevanten physikalischen Vorgänge durch das numerische Gitter erfaßt. Dies beinhaltet insbesondere die räumliche Auflösung auch der kleinsten Wirbel durch ausreichend feine Maschenweiten, die Auflösung der großskaligen Strukturen durch ausreichend große Periodenlängen und die Auflösung der viskosen und thermischen Grenzschichten nahe den Wänden.

Bei der **Grobstruktursimulation**, englisch 'large-eddy simulation' (LES), werden nur großskalige Vorgänge direkt durch das numerische Gitter aufgelöst. Physikalische Effekte, die bedingt durch die zu grobe Maschenweite herausgefiltert werden, werden durch ein sogenanntes Feinstrukturmodell berücksichtigt. Daneben werden im allgemeinen auch die viskosen und thermischen Grenzschichten nicht aufgelöst und müssen daher mit Modellen überbrückt werden. Der Einfluß des Feinstrukturmodells nimmt mit feiner werdender Diskretisierung ab. Für eine beliebig feine Auslösung geht die Grobstruktursimulation in eine direkte numerische Simulation über.

3.2 Numerisches Verfahren

An dieser Stelle soll kurz auf das dem Rechenprogramm TURBIT zugrundeliegende numerische Verfahren eingegangen werden. Für eine ausführlichere Darstellung sei insbesondere auf [20] verwiesen.

In TURBIT werden die dimensionslosen Erhaltungsgleichungen für Masse 2.18, Impuls 2.19 und Energie 2.20 in kartesischen Koordinaten (bzw. die entsprechenden Gleichungen in zylindrischen Koordinaten) mittels eines Finite-Volumen-Verfahrens gelöst. Die räumliche Diskretisierung des Rechengebietes erfolgt durch ein versetztes Maschennetz ('staggered grid'). Skalare Größen wie Temperatur und Druck werden in den Maschenmittelpunkten definiert. Die Geschwindigkeit wird jeweils um eine halbe Maschenweite in Richtung der einzelnen Komponenten versetzt auf den Maschenrändern definiert. Zur Simulation der Rayleigh-Bénard-Konvektion erlaubt TURBIT die Verwendung von periodischen Randbedingungen in den beiden horizontalen Richtungen. In diesen Richtungen wird eine äquidistante räumliche Diskretisierung vorausgesetzt, während in der vertikalen Richtungen eine nicht-äquidistante Diskretisierung vorgesehen ist. Dies ermöglicht eine sehr effiziente Auflösung der viskosen und thermischen Grenzschichten (siehe unten).

Die Lösungsstrategie für das Gleichungssystem 2.18-2.20 basiert auf einem Druck-Korrektur-Verfahren, das die Lösung einer Poisson-Gleichung für den Druck beinhaltet. Für die Zeitintegration der Impulsgleichung wird in TURBIT das explizite Euler-Leapfrog-Verfahren verwendet. Zur Integration der Energiegleichung stehen drei Verfahren zur Auswahl, siehe Tabelle 3.1. Für die direkte numerische Simulation der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Fluiden sehr kleiner Prandtl-Zahl ist die Verwendung eines halbimpliziten Zeitintegrationsverfahrens für die Energiegleichung sinnvoll. Die implizite Formulierung des Diffusionsterms in der Energiegleichung ermöglicht im Vergleich zu einem vollexplizitem Verfahren, bei dem die Zeitschrittweite aus Stabilitätsgründen durch die sehr kleine Zeitskala der thermischen Diffusionsvorgänge stark beschränkt ist, die Verwendung wesentlich größerer Zeitschrittweiten, ohne daß damit eine zeitliche Filterung von für die Konvektion relevanten Vorgängen verbunden ist [44]. Wörner [44] verwendet für seine direkten numerischen Simulationen der Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium das Leapfrog-Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung der Energiegleichung. Dieses Verfahren wird auch in der vorliegenden Arbeit eingesetzt. Für den Rechenzeitgewinn im Vergleich zur expliziten Lösung der Energiegleichung ist für Quecksilber ein Faktor $\approx 10 \div 40$ zu erwarten [44].

Verfahren	Typ	Fehlerordnung
Euler-Leapfrog-Verfahren	explizit	2
Adams-Bashforth-Crank-Nicolson-Verfahren	halbimplizit	2
Leapfrog-Crank-Nicolson-Verfahren	halbimplizit	2

Tabelle 3.1: Zeitintegrationsverfahren in TURBIT zur Lösung der Energiegleichung.

Eine Besonderheit in TURBIT ist das DCM-System (= Dynamic Core Storage Management) zur Erweiterung des Speichers durch dynamische Allokation von Plattenspeicher oder alternativ von externem schnellen Vektorspeicher auf dem Vektorrechner Siemens Fujitsu VP400. Dies ermöglicht die Realisierung von feineren Auflösungen, soweit die Kosten für Input/Output des DCM-Systems in Kauf genommen werden.

3.3 Anforderungen an die Diskretisierung

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 3.1 bereits angesprochenen speziellen Anforderungen, die bei einer direkten numerischen Simulation an die räumliche Diskretisierung des Rechengebietes zu stellen sind, ausführlich diskutiert.

3.3.1 Maschenweite

Die Maschenweiten Δx_i ($i = 1, 2, 3$) begrenzen das Auflösungsvermögen der kleinsten Strukturen. Dies sind Wirbel, die turbulente kinetische Energie in Wärme dissipieren. Die korrekte Auflösung dieser kleinsten Wirbel ist der Maßstab einer direkten numerischen Simulation. Nur wenn diese Wirbel durch das Maschennetz erfaßt werden, kann auf ein Turbulenzmodell oder ein Feinstrukturmodell verzichtet werden.

Die Notwendigkeit, in einer direkten numerischen Simulation neben den kleinsten Wirbeln auch die kleinsten Strukturen des Temperaturfeldes aufzulösen, bringt für Flüssigmetalle keine weiteren Anforderungen mit sich. Temperaturfluktuationen haben in diesen Fluiden in erster Linie langwellige Anteile. Kurzwellige Anteile werden wegen der hohen Wärmeleitfähigkeit sehr stark gedämpft. Ausschlaggebend für die Festlegung der Maschenweiten Δx_i ist somit der dissipative Bereich des Geschwindigkeitsfeldes.

Die Festlegung des Wertes der Maschenweite hängt wesentlich von der Rayleigh-Zahl ab, die mit der Simulation untersucht werden soll. Mit steigenden Rayleigh-Zahlen wird die Strömung zunehmend turbulenter. Die makroskopischen Strukturen, die bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion potentielle Energie in turbulente kinetische Energie überführen, werden zunehmend energiereicher. Bei einem Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation turbulenter kinetischer Energie werden folglich die kleinsten Wirbel, die diese Energie in Wärme dissipieren, kleiner und zahlreicher. Deshalb sind für steigende Rayleigh-Zahlen kleinere Maschenweiten notwendig, um auf ein Turbulenzmodell oder Feinstrukturmodell verzichten zu können.

Anhand des aus den Simulationsergebnissen ausgewerteten Energiespektrums der turbulenten kinetischen Energie $E(k)$ läßt sich im nachhinein überprüfen, ob die verwendeten Maschenweiten für eine direkte numerische Simulation ausreichend fein sind.

Für große Wellenzahlen gilt [37]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(k) \sim k^{-7}. \quad (3.1)$$

Fällt in einer doppelt-logarithmischen Darstellung die Steigung des Spektrums bei hohen Wellenzahlen mit $m = -7$ ab, so sind alle energiedissipierenden Wirbel aufgelöst. Zeigt das Spektrum einen Abfall mit einer Steigung $m > -3$, so ist die Feinheit der Maschenweite absolut unzureichend, da hier nicht einmal der Wellenlängenbereich der Wirbel aufgelöst wird, die am stärksten zur Dissipation beitragen [44].

3.3.2 Periodenlänge

Die Periodenlängen X_1 und X_2 legen die Größe des Rechengebietes fest. Sie können damit einen entscheidenden Einfluß auf das entstehende Konvektionsmuster haben. Aus Experimenten liegen kaum Informationen zu den Wellenlängen der makroskopischen Strukturen bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Flüssigmetallen vor, die als Anhaltswerte für die Festlegung der Periodenlängen verwendet werden können. Um in die Strömung keine unphysikalischen Wellenlängen einzukoppeln, sollten die Anforderungen an die Periodenlängen daher anhand einer Stabilitätsanalyse abgeschätzt, oder ihr Einfluß durch eine Parameterstudie überprüft werden.

Vom physikalischen Gesichtspunkt ist für die numerische Simulation die Verwendung möglichst großer Periodenlängen wünschenswert. Allerdings steigt der numerische Aufwand quadratisch mit der gewählten Periodenlänge. Die Verwendung beliebig großer Periodenlängen ist ohnehin durch die Speicherkapazität moderner Supercomputer begrenzt. Damit wird die Periodenlänge in der Praxis im allgemeinen durch einen Kompromiß auf den kleinstmöglichen Wert festgelegt, mit dem das physikalische Problem bei vertretbarem numerischen Aufwand noch korrekt abgebildet wird.

Meneguzzi [32] und Thual [43] gehen bei ihren numerischen Simulationen von der kritischen Wellenlänge $\lambda_c = 2.016d$ aus. Aus dem Stabilitätsdiagramm 2.3 läßt sich aber ablesen, daß für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen schon ein Intervall verschieden großer Wellenlängen möglich ist. Es stellt sich damit die Frage, ob die Wahl der relativ kleinen Periodenlängen in [32] und [43] gerechtfertigt ist.

Wörner [44] untersucht für Natrium bei einer Rayleigh-Zahl $Ra = 6000$ in einer numerischen Studie den Einfluß der Periodenlänge und führt dazu bei jeweils gleichen Maschenweiten Simulationen mit $X_{1,2} = 4, 6, 8, 10$ und 16 durch. Er stellt fest, daß Periodenlängen $X_{1,2} \geq 8$ ausreichend groß sind, um das entstehende Konvektionsmuster von dem Aspekt-Verhältnis des Rechengebietes zu entkoppeln. Die weiteren Simulationen in Natrium führt er deshalb mit der kleinstmöglichen Periodenlänge $X_1 = X_2 = 8$ durch. Nach den Ergebnissen von Seiter [40] wird man jedoch bei wesentlich größeren Rayleigh-Zahlen die Periodenlängen weiter vergrößern müssen.

In dieser Arbeit wird lediglich für die Rayleigh-Zahl $Ra = 2000$ der Einfluß der Periodenlänge untersucht. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000, 6000, 12000, 25000$ und 50000 werden die Periodenlängen $X_1 = X_2 = 8$ verwendet. Somit können die Simulationen für Natrium [44] und Quecksilber direkt miteinander verglichen werden.

3.3.3 Wandgrenzschichten

Die Prandtl-Zahl charakterisiert das Verhältnis der Dicken von viskoser zu thermischer Grenzschicht. Für eine Plattengrenzschicht gilt [46]

$$\frac{\delta_{viskos}}{\delta_{thermisch}} \sim \sqrt{\text{Pr}}. \quad (3.2)$$

Die Grenzschichten der Rayleigh-Bénard-Konvektion zeigen ein ähnliches Verhalten. Deshalb wird für Quecksilber mit einer Prandtl-Zahl $\text{Pr} = 0.025$ die viskose Grenzschicht wesentlich dünner sein als die thermische Grenzschicht, $\delta_{viskos} \ll \delta_{thermisch}$. Da bei der direkten numerischen Simulation keine Wandgesetze verwendet werden, ist darauf zu achten, daß die viskose Grenzschicht ausreichend fein aufgelöst wird.

Eine Abschätzung für die notwendige Wandmaschenweite gibt Grötzbach [19] an

$$\Delta x_{3,Wand} \approx 2.4 \left(\frac{Ra}{\text{Pr}} \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (3.3)$$

In Tabelle 3.2 ist die aus Gleichung 3.3 abgeschätzte notwendige Wandmaschenweite für die Prandtl-Zahl von Quecksilber $\text{Pr} = 0.025$ bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen aufgelistet. Diese Werte stellen allerdings nur eine erste Abschätzung dar. Ob die Auflösung der viskosen Grenzschicht ausreichend fein ist, läßt sich anhand des Verlaufes des aus den Simulationsergebnissen ausgewerteten vertikalen Profils des rms-Wertes der Vertikalgeschwindigkeit in Wandnähe bestimmen [44]. Dabei sollte gelten

$$\frac{\partial u_{3,rms}}{\partial x_3} \Big|_{Wand} \approx 0. \quad (3.4)$$

Rayleigh-Zahl	Wandmaschenweite $\Delta x_{3,Wand}$
2000	0.0557
3000	0.0487
6000	0.0386
12000	0.0307
25000	0.0240
50000	0.0190

Tabelle 3.2: Abschätzung für die notwendigen Wandmaschenweiten.

3.4 Simulationsstrategie

Wie in Abschnitt 2.5.5 diskutiert, wird als Anfangsbedingung für das Geschwindigkeitsfeld in den Simulationen für die Rayleigh-Zahlen $2000 \leq Ra \leq 25000$ von ruhendem Fluid ausgegangen, d.h. $\vec{u}(t = 0) = (0, 0, 0)$. Damit durchläuft die Simulation ein Anfangstransiente und erst nach einer gewissen Problemzeit wird ein, im statistischen Sinne, eingelaufener Strömungszustand erreicht. Der Zeitbereich der Transiente spielt für die Auswertung der Simulation keine Rolle. Um den Rechenaufwand zu minimieren, wird deshalb der Einlaufvorgang auf einem relativ groben Gitter simuliert, das den strengen Anforderungen einer direkten numerischen Simulation nicht genügt. Nach Erreichen eines quasistationären Strömungszustandes wird für einen Zeitpunkt das momentane Geschwindigkeits- und Temperaturfeld auf ein verfeinertes Maschennetz interpoliert. Die Simulation wird auf diesem Maschennetz fortgeführt, wobei bereits nach wenigen Zeitschritten die durch die Interpolation eingebrachten hochfrequenten unphysikalischen Störungen wieder herausgedämpft sind [44]. Wird auch auf dem verfeinerten Gitter ein eingelaufener Strömungszustand erreicht, so wird die Interpolation auf ein noch feineres Gitter und die Weiterintegration sukzessive wiederholt, bis schließlich ein Maschennetz erreicht ist, das den strengen Anforderungen, wie sie in Abschnitt 3.3.1 und 3.3.3 diskutiert wurden, genügt.

Bei der Simulation für die Rayleigh-Zahl $Ra = 50000$ ist die Simulationsstrategie ähnlich. Allerdings wird hier die Simulation nicht aus dem Ruhezustand gestartet, sondern es wird als Anfangsbedingung der eingelaufene Konvektionszustand der Simulation mit $Ra = 25000$ herangezogen, vergl. Abschnitt 2.5.5. Bereits nach einer kurzen Transiente stellt sich ein der erhöhten Rayleigh-Zahl entsprechender Strömungszustand ein. Auch hier wird das Maschennetz sukzessive verfeinert, bis die Anforderungen nach Abschnitt 3.3.1 und 3.3.3 erfüllt sind.

In Tabelle 3.3 sind die durchgeführten Simulationen zusammengefaßt. Angegeben sind die verwendeten Anfangsbedingungen, die Anzahl der bei dem jeweiligen Fall berechneten Zeitschritte und die erreichte Problemzeit in dimensionslosen Zeiteinheiten. Zur Umrechnung in reale Zeiteinheiten sei auf Tabelle A.1 im Anhang verwiesen. Die CPU-Zeit bezieht sich auf den Vektorrechner Siemens Fujitsu VP400 des Forschungszentrums Karlsruhe, auf dem die Rechnungen durchgeführt wurden. Die verwendeten Gitterparameter zeigt Tabelle 3.4. Lediglich für die Simulationen MENEA und MENEK wurde keine Gitterverfeinerung vorgenommen. Wegen der langen Integrationszeiten der Simulation MENEK wurden zur Reduzierung des numerischen Aufwands die Temperaturfluktuationen einmalig um den Faktor 10 verstärkt. Anschließend wurde die Simulation unter der Bezeichnung MENEK weitergeführt. Mit ca. $3.5 \cdot 10^6$ Gitterpunkten, entsprechend 336MB, wurde bei der Simulation für $Ra = 50000$ (Fall QS50B) die Grenze der verfügbaren Speicherkapazität erreicht.

Ra	Bezeichnung	Anfangsbed.	Zeitschritte	Problemzeit	CPU-Zeit
2000	MENEA	$\vec{u} = (0, 0, 0)$	67320	840	9.5 h
	MENEC	MENEA	97840	1868	14.0 h
2000	MENEB	$\vec{u} = (0, 0, 0)$	54080	1375	8.0 h
	MENEBF	MENEB	70320	2170	54.8 h
3000	QS3A	$\vec{u} = (0, 0, 0)$	21960	682	4.3 h
	QS3B	QS3A	31320	791	43.4 h
6000	QS6A	$\vec{u} = (0, 0, 0)$	2680	97	0.5 h
	QS6B	QS6A	2360	143	2.0 h
	QS6C	QS6B	17680	230	21.5 h
12000	QS12A	$\vec{u} = (0, 0, 0)$	2560	80	0.5 h
	QS12B	QS12A	2360	123	2.0 h
	QS12C	QS12B	17960	247	28.0 h
25000	QS25A	$\vec{u} = (0, 0, 0)$	3400	85	0.5 h
	QS25B	QS25A	3680	142	3.2 h
	QS25C	QS25B	9800	227	16.0 h
50000	QS50A	QS25C	2160	15	6.0 h
	QS50B	QS50A	12480	59	39.0 h

Tabelle 3.3: Übersicht der durchgeführten Simulationen.

Ra	Bezeichnung	Gitter	X_1	X_2	$\Delta x_{1,2}$	Δx_3
2000	MENEA	$32 \times 40 \times 29$	2.02	2.51	0.063	$0.02 \div 0.052$
	MENEC	$32 \times 40 \times 29$	2.02	2.51	0.063	$0.02 \div 0.052$
2000	MENEB	$64 \times 60 \times 19$	8.06	7.54	0.126	$0.03 \div 0.06$
	MENEBF	$128 \times 120 \times 29$	8.06	7.54	0.063	$0.02 \div 0.052$
3000	QS3A	$80 \times 80 \times 19$	8.0	8.0	0.1	$0.03 \div 0.06$
	QS3B	$128 \times 128 \times 39$	8.0	8.0	0.0625	$0.01 \div 0.04$
6000	QS6A	$80 \times 80 \times 19$	8.0	8.0	0.1	$0.03 \div 0.06$
	QS6B	$128 \times 128 \times 25$	8.0	8.0	0.0625	$0.02 \div 0.05$
	QS6C	$160 \times 160 \times 39$	8.0	8.0	0.05	$0.01 \div 0.04$
12000	QS12A	$80 \times 80 \times 19$	8.0	8.0	0.1	$0.03 \div 0.06$
	QS12B	$128 \times 128 \times 25$	8.0	8.0	0.0625	$0.02 \div 0.05$
	QS12C	$200 \times 200 \times 39$	8.0	8.0	0.04	$0.01 \div 0.04$
25000	QS25A	$80 \times 80 \times 19$	8.0	8.0	0.1	$0.03 \div 0.06$
	QS25B	$128 \times 128 \times 25$	8.0	8.0	0.0625	$0.02 \div 0.05$
	QS25C	$200 \times 200 \times 39$	8.0	8.0	0.04	$0.01 \div 0.04$
50000	QS50A	$250 \times 250 \times 49$	8.0	8.0	0.032	$0.008 \div 0.032$
	QS50B	$250 \times 250 \times 57$	8.0	8.0	0.032	$0.005 \div 0.032$

Tabelle 3.4: Gitterparameter der Simulationen.

zurückzuführen, die in x_1 -Richtung orientiert sind. Nach Abbildung 4.8 fallen für $Ra = 25000$ $u_{1,rms}$ und $u_{2,rms}$ annähernd zusammen. Für vollturbulente Konvektion ist zu erwarten, daß die statistischen Eigenschaften der Geschwindigkeitskomponenten in einer wandparallelen Ebene invariant gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems (d.h. isotrop) sind. Die annähernde Äquivalenz von $u_{1,rms}$ und $u_{2,rms}$ für $Ra = 25000$ deutet an, daß kaum noch makroskopische Strukturen mit Vorzugsrichtung existieren und der Übergangsbereich zu vollturbulenter Konvektion erreicht ist.

4.3.3 Kinetische Turbulenzenergie

In Abbildung 4.9 sind die Profile der kinetischen Turbulenzenergie $k = \overline{u_i' u_i'} / 2$ für die verschiedenen Rayleigh-Zahlen dargestellt. Die Abbildung verdeutlicht, daß die viskosen Grenzschichten für wachsende Rayleigh-Zahlen zunehmend dünner werden. Im Vergleich mit Abbildung 4.5 zeigt sich auch der Einfluß der Prandtl-Zahl auf das Verhältnis von viskoser zu thermischer Grenzschichtdicke. Zudem bestätigt sich, daß für $Ra \geq 12000$ der Maximalwert der kinetischen Turbulenzenergie nahezu unabhängig von der Rayleigh-Zahl wird [18]. Dies bedeutet, daß die in TURBIT verwendete Normierung für hohe Rayleigh-Zahlen tatsächlich eine geeignete Skalierung für die Geschwindigkeiten darstellt. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 2000$ und $Ra = 3000$ ist die kinetische Turbulenzenergie gering, d.h. hier dominieren laminare Strömungsformen. Erst ab $Ra > 6000$ kann von einem turbulenten Geschwindigkeitsfeld ausgegangen werden.

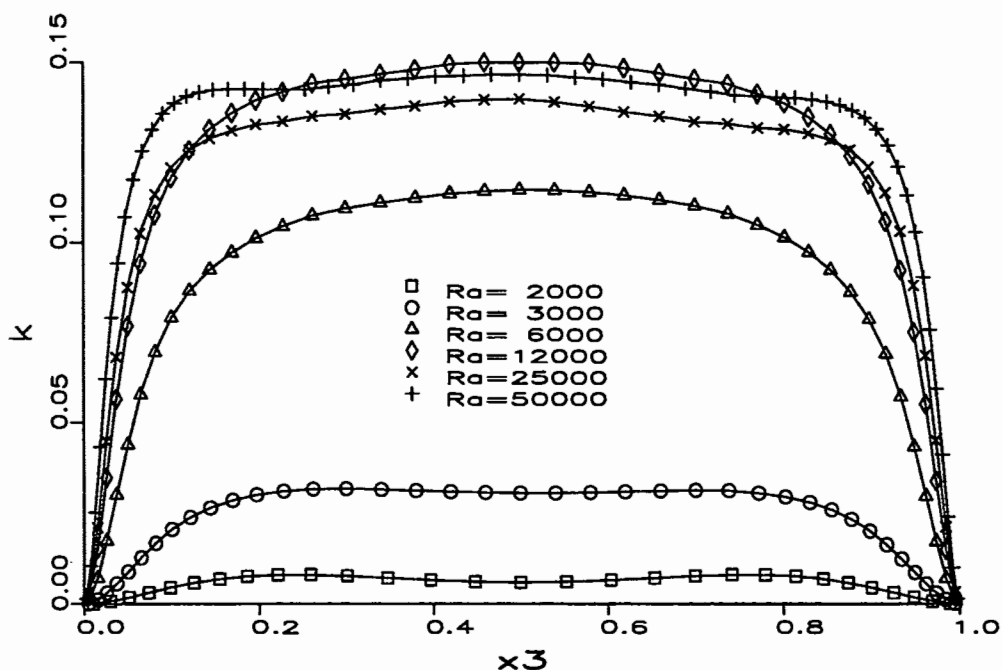


Abb. 4.9: Kinetische Turbulenzenergie k für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

Kapitel 4

Analyse der Simulationsergebnisse

4.1 Statistisches Auswerteverfahren

Die theoretische Annahme, daß sich die horizontale Ausdehnung der Fluidschicht bis ins Unendliche erstreckt, führt dazu, daß bei vollturbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion die horizontalen Richtungen im statistischen Sinne homogen sind. Für ausreichend große Mittelungszeiträume führt die statistische Auswertung der zeitabhängigen Strömungsgrößen damit zu Abhängigkeiten der Form

$$\bar{\phi} = f(x_3). \quad (4.1)$$

Eine zeitlich gemittelte Größe $\bar{\phi}$, wie z.B. die mittlere Temperatur \bar{T} , hängt also nicht von den horizontalen Koordinaten x_1 und x_2 , sondern nur von der vertikalen Koordinate x_3 ab.

Nach dem Ergodentheorem führen zeitliche und räumliche Mittelungsoperationen auf äquivalente Ergebnisse. In diesem Sinne wird bei dem statistischen Auswerteverfahren in TURBIT zuerst eine räumliche Mittelung in den horizontalen Richtungen und anschließend eine zeitliche Mittelung über typischerweise 10 ÷ 40 Zeitpunkte vorgenommen. Die räumliche Mittelung einer an diskreten Punkten vorliegenden Größe ϕ über eine horizontale Ebene mit $N_1 \cdot N_2$ Maschen erfolgt nach der Vorschrift

$$\bar{\phi}_k = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \phi_{i,j,k}. \quad (4.2)$$

Die Auswertung für alle horizontalen Ebenen $1 \leq k \leq N_3$ liefert das vertikale Profil $\bar{\phi} = f(x_3)$.

Die Auswertung von eindimensionalen Energiespektren erfolgt in TURBIT für die horizontalen Verteilungen in x_1 -Richtung für feste Werte x_2 und x_3 . Anschließend erfolgt eine Mittelung über die insgesamt N_2 auf diese Weise für $1 \leq j \leq N_2$ ermittelten und von der Wellenzahl k_1 abhängigen eindimensionalen Spektren. Die

Durchführung für alle Horizontalebene führt auf insgesamt N_3 Energiespektren für verschiedene vertikale Positionen. Zusätzlich wird auch hier über die Ergebnisse von mehreren Zeitpunkten gemittelt.

4.2 Verifikation der Simulationsergebnisse

Für eine quantitative Verifikation der Simulationsergebnisse stehen wegen der meßtechnischen Schwierigkeiten kaum experimentelle Vergleichsdaten für Quecksilber zur Verfügung. In dieser Arbeit beschränkt sich der quantitative Vergleich zwischen numerischen Simulationsergebnissen und experimentellen Ergebnissen deshalb auf den Vergleich von Nusselt-Zahlen, siehe Abschnitt 4.2.1.

Die direkte numerische Simulation basiert auf der Lösung der exakten physikalischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie und beinhaltet keine empirische Modellierung der Turbulenz. Damit beschränken sich mögliche Fehlerquellen auf wenige Stellen, z.B. die Gültigkeit der Boussinesq-Approximation, die Diskretisierung oder den verwendeten Lösungsalgorithmus. Für die hier betrachteten Rayleigh-Zahlen ist die Gültigkeit der Boussinesq-Approximation gewährleistet [16]. Die Lösungsalgorithmen sind von zweiter Ordnung genau und bieten einen guten Kompromiß zwischen Genauigkeit der Lösung und numerischem Aufwand. Somit sollte der Nachweis einer adäquaten Diskretisierung des Rechengebiets in Abschnitt 4.2.2 genügen, um die Belastbarkeit der durchgeführten direkten numerischen Simulationen zu gewährleisten.

Darüber hinaus wurde TURBIT bereits für eine Reihe verschiedener Strömungen angewandt und für diese anhand experimenteller Daten ausreichend verifiziert. Wörner [44] untersucht in direkten numerischen Simulationen mit TURBIT das Problem der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium und Luft. Zur Verifikation seiner Simulationen steht für Natrium eine umfangreiche Experimentreihe von Kek [26] zur Verfügung. Kek ermittelt neben der Nusselt-Zahl auch rms-Werte der Temperaturfluktuationen für verschiedene Rayleigh-Zahlen. Der Vergleich der entsprechenden Simulationsergebnisse von Wörner [44] mit den experimentellen Daten von Kek [26] zeigt eine gute Übereinstimmung. Dies gilt auch für die Grobstruktursimulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium, die von Seiter [40] mit TURBIT für Rayleigh-Zahlen bis $Ra = 10^7$ durchgeführt wurden. Zusätzlich zu dem Experiment von Kek [26] für Natrium werden in [44] auch Simulationsergebnisse für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft mit sehr detaillierten experimentellen Ergebnissen von Deardorff und Willis [12] verglichen. Auch hier zeigen Simulation und Experiment gute Übereinstimmung. Die nun folgende quantitative und qualitative Verifikation soll in Verbindung mit der Verifikation von TURBIT in [44] ausreichen, um die physikalische Belastbarkeit der erzielten Simulationsergebnisse zu gewährleisten.

4.2.1 Vergleich von Nusselt-Zahlen

Zum Vergleich der Nusselt-Zahlen dient das Experiment von Rossby [36]. Rossby benutzt einen rotationssymmetrischen Behälter mit Durchmesser $D = 0.22\text{m}$. Der Abstand zwischen unterer und oberer Wand beträgt je nach Rayleigh-Zahl $d = 0.0069\text{m}$, 0.01m bzw. 0.018m . Daraus ergibt sich ein Aspekt-Verhältnis des Behälters von $\Gamma = 12 \div 32$. Die relativ großen Werte für Γ gewährleisten einen geringen Einfluß der Seitenwände auf das sich einstellende Konvektionsmuster. Dies erlaubt einen Vergleich dieser Meßergebnisse mit Rechenergebnissen, die unter Verwendung periodischer Randbedingungen mit ausreichend großen Periodenlängen erzielt wurden.

In TURBIT wird die Nusselt-Zahl $Nu = f(t)$ während der Simulation in Abhängigkeit der Problemzeit t aufgezeichnet. Der unregelmäßige Charakter der turbulenten Strömung spiegelt sich in einer zeitlichen Variation der konvektiven Wärmeübertragung wider, und damit auch im Zeitverlauf der Nusselt-Zahlen (siehe z.B. Abb. 4.37). Für den Vergleich mit den experimentellen Nusselt-Zahlen von Rossby [36] wird daher in Abbildung 4.1 aus den numerischen Ergebnissen von TURBIT neben dem Langzeitmittelwert der Nusselt-Zahl jeweils auch das Band von Minimal- und Maximalwert eingezeichnet.

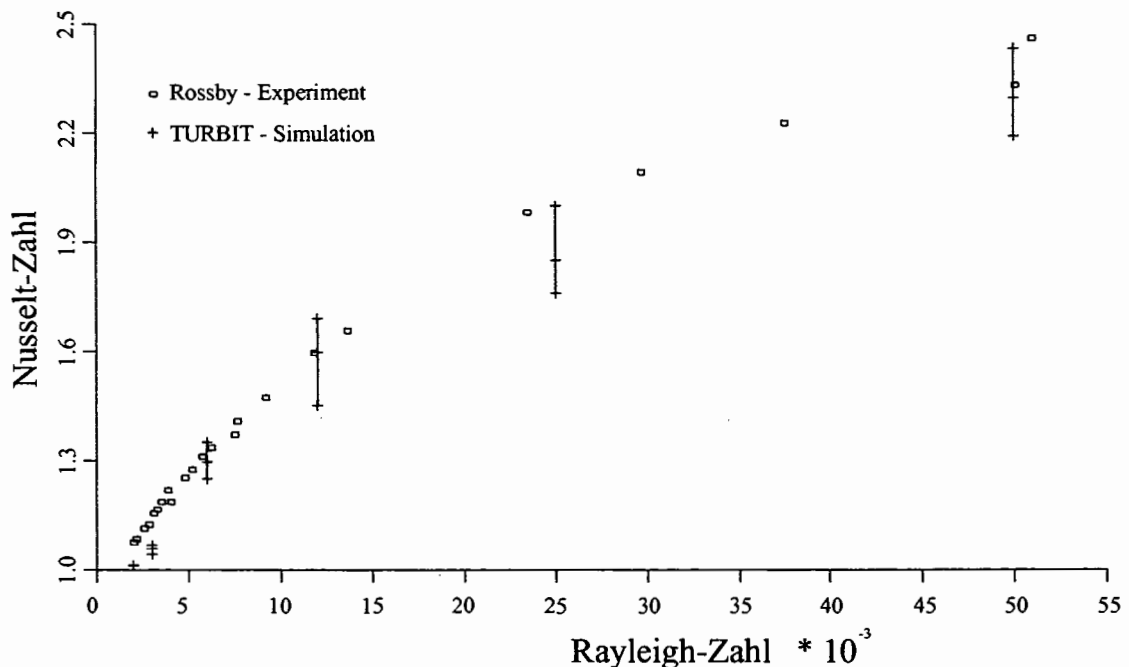


Abb. 4.1: Vergleich von Nusselt-Zahlen aus Experiment [36] und Rechnung.

Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 6000, 12000$ und 50000 ist die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten sehr gut. Für $Ra = 2000$ und 3000 liegen die berechneten Nusselt-Zahlen allerdings zu niedrig. Eine mögliche Ursache für diese Abweichung könnte in dem Einfluß der Seitenwände liegen, die in der Simulation aufgrund der

periodischen Randbedingungen nicht abgebildet werden. Im Experiment wirken sich die Seitenwände stabilisierend auf die Strömung aus und prägen der ursprünglich dreidimensionalen Strömung teilweise zweidimensionale Strukturen auf. Dadurch wird der konvektive Wärmetransport und damit auch die Nusselt-Zahl maximiert [10] [18] [44]. Ab der Rayleigh-Zahl $Ra = 6000$ ist dann die kinetische Energie der Turbulenz offensichtlich so groß, daß sich der stabilisierende Einfluß der Seitenwände in der Nusselt-Zahl nicht mehr bemerkbar macht. Allerdings ist auch für die Simulation mit $Ra = 25000$ die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment nicht voll zufriedenstellend. Über bestimmte Zeitbereiche stimmen die Werte für die Nusselt-Zahl zwar sehr gut überein, doch liegt der Mittelwert der berechneten Nusselt-Zahl deutlich unterhalb des experimentellen Wertes. Ein Grund hierfür könnte sein, daß der Mittelungszeitraum der Simulation möglicherweise zu kurz ist. Bei einer Fortführung der Integration und Mittelung über einen längeren Zeitbereich ist zu erwarten, daß die Diskrepanz zwischen Simulation und Experiment geringer wird.

4.2.2 Auflösung der kleinskaligen Wirbel

Als Kriterium für die ausreichende Auflösung der kleinskaligen Wirbel dient das Energiespektrum der kinetischen Energie, vergl. Abschnitt 3.3.1. In Abbildung 4.2 sind die aus den Simulationsergebnissen für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000 \div 50000$ ausgewerteten Spektren in Kanalmitte dargestellt. Der Vergleich der Spektren für $Ra = 3000$ und $Ra = 6000$ zeigt, daß mit dieser Erhöhung von Ra ein deutlicher Anstieg des Energieinhaltes im niederfrequenten Bereich, d.h. bei den großräumigen Strukturen, verbunden ist. Mit weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl ändert sich das Energieniveau der niederfrequenten Anteile nur unwesentlich. Ursache hierfür ist die Normierung der Geschwindigkeit mit $u_0 = \sqrt{\alpha g \Delta T d}$. Diese Normierung gewährleistet zwar, daß in turbulenten Strömungen die Größenordnung der Geschwindigkeit unabhängig von der Rayleigh-Zahl wird, im Übergangsbereich ist aber ein Einfluß von Ra vorhanden. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch bei den direkten numerischen Simulationen für Natrium [44]. In Abbildung 4.2 ist zu erkennen, daß sich das Spektrum im hochfrequenten Bereich mit wachsender Rayleigh-Zahl aufweitet. Der dissipative Bereich der Strömung wird zu größeren Wellenzahlen verschoben, d.h. die Wellenlänge der für die Dissipation relevanten Wirbel nimmt ab. Letztlich begrenzt dies den Anwendungsbereich der direkten numerischen Simulationen, da die notwendige Auflösung des dissipativen Bereichs für hochgradig turbulente Strömungen aus Gründen der Speicherkapazität nicht mehr erreicht werden kann.

Abbildung 4.2 zeigt, daß für die Rayleigh-Zahlen $Ra \leq 12000$ die Spektren im hochfrequenten Bereich proportional zu k_1^{-7} abfallen, und damit die Anforderung nach Gleichung 3.1 erfüllt ist. Bei den Rayleigh-Zahlen $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$ wird

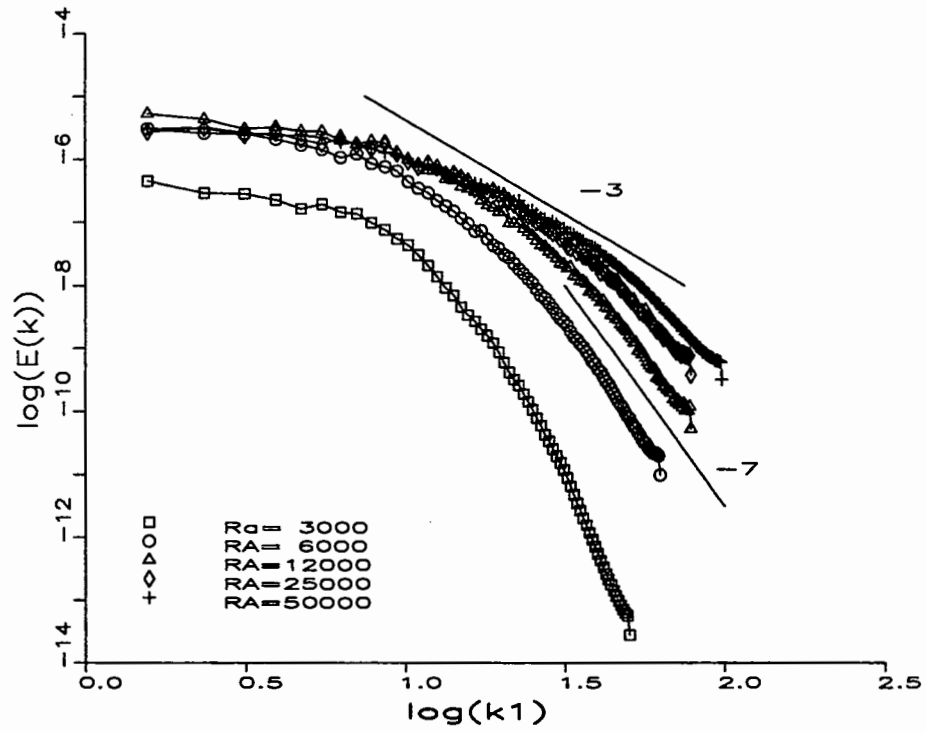


Abb. 4.2: Eindimensionale Energiespektren der kinetischen Energie in Kanalmitte für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

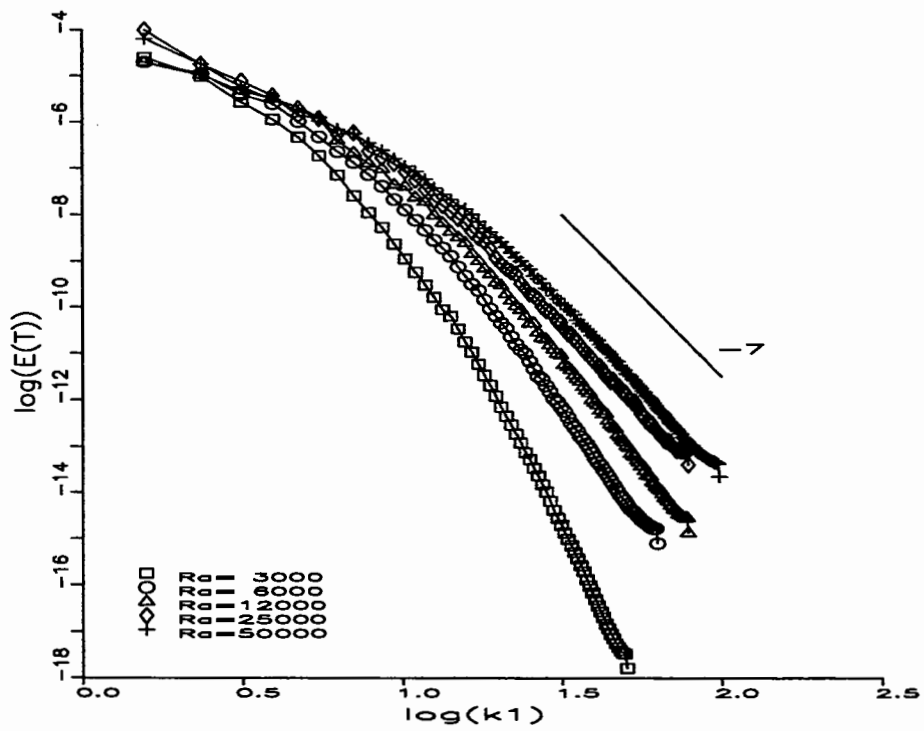


Abb. 4.3: Eindimensionale Spektren der Temperaturfluktuationen in Kanalmitte für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

noch ein Abfall der Spektren proportional zu k_1^{-5} erreicht, so daß auch hier der für die Dissipation turbulenter kinetischer Energie relevante Wellenzahlenbereich noch ausreichend gut aufgelöst ist.

Das Spektrum für die Rayleigh-Zahl $Ra = 2000$ ist in Abbildung 4.2 nicht dargestellt. Es umfaßt ca. 18 Größenordnungen und die Anforderung nach Gleichung 3.1 ist sehr gut erfüllt. Im niederfrequenten Bereich liegt das Spektrum für $Ra = 2000$ deutlich unterhalb dem für $Ra = 3000$. Der Energieinhalt der langwelligen Strukturen ist im Vergleich zu $Ra = 6000$ um ca. zwei Größenordnungen niedriger.

Die in Abbildung 4.3 dargestellten Spektren für die Temperaturfluktuationen in Kanalmitte verhalten sich wie in Abschnitt 3.3.1 diskutiert. Wegen der hohen Wärmeleitfähigkeit des Quecksilbers besitzen sie fast ausschließlich langwellige Anteile. Schon bei mittleren Wellenzahlen fallen die Spektren sehr steil ab. Kurzwellige Anteile werden fast vollständig weggedämpft.

Wie bei den Spektren der kinetischen Energie, ist auch bei der Auflösung der Wandgrenzschichten für Fluide kleiner Prandtl-Zahlen nicht das Temperaturfeld sondern das Geschwindigkeitsfeld maßgebend. Wie in Abschnitt 3.3.3 diskutiert, kann die Bewertung einer ausreichenden Auflösung der viskosen Grenzschicht anhand des Verlaufs des ausgewerteten vertikalen Profils von $u_{3,rms}$ in Wandnähe erfolgen. Abbildung 4.4 zeigt, daß die Bedingung eines horizontalen Wandgradienten nach Gleichung 3.4 bei allen durchgeführten Simulationen erfüllt ist. Damit ist eine ausreichend feine Diskretisierung in Wandnähe gewährleistet.

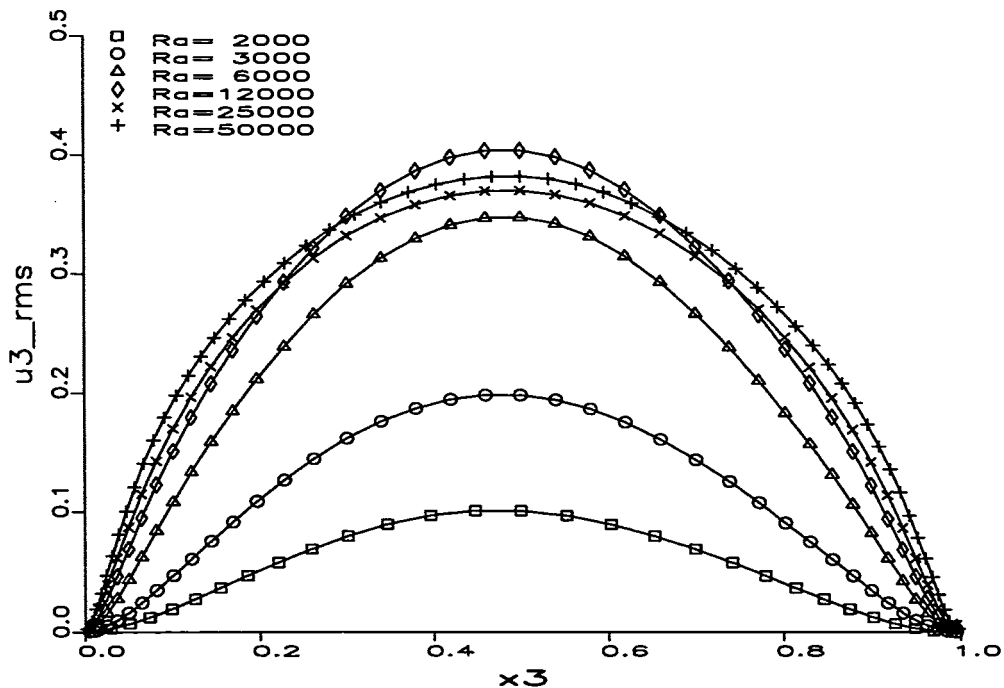


Abb. 4.4: Vertikales Profil von $u_{3,rms}$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

4.3 Statistische Strömungsgrößen

Die statistische Auswertung der Strömungsgrößen erfolgt wie in Abschnitt 4.1 beschrieben. Die Profile sind jeweils als Funktion der vertikalen Koordinate x_3 dargestellt. Dabei entspricht $x_3 = 0$ der unteren Wand und $x_3 = 1$ der oberen Wand.

4.3.1 Mittlere Temperatur \bar{T} und T_{rms}

Die vertikalen Profile der mittleren Temperatur \bar{T} sind in Abbildung 4.5 für die verschiedenen Rayleigh-Zahlen zusammengefaßt. Für $Ra = 2000$ und $Ra = 3000$ ist die Abweichung vom linearen Profil des reinen Wärmeleitzustandes nur minimal. Erst für $Ra \geq 6000$ bewirkt der konvektive Wärmetransport eine merkbliche Abweichung vom linearen Wärmeleitprofil. Für weiter steigende Rayleigh-Zahlen ist zu erwarten, daß sich eine isotherme Kernströmung mit dünnen Temperaturgrenzschichten an der oberen und unteren Wand ausbildet.

Die Profile der rms-Werte der Temperaturfluktuationen für die verschiedenen Rayleigh-Zahlen zeigt Abbildung 4.6. Aus Experimenten [12] und direkten numerischen Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft [18] [44] ist bekannt, daß bei kleinen Rayleigh-Zahlen nur ein Maximum in Kanalmitte zu finden ist, das sich aber mit zunehmender Rayleigh-Zahl in zwei lokale Maxima aufspaltet, die dann zur Wand wandern. Die beiden lokalen Maxima der rms-Werte der Temperaturfluktuationen liegen dabei gerade am Rand der thermischen Grenzschichten. Bei den vorliegenden Simulationen für Quecksilber erstrecken sich die thermischen Grenzschichten noch bis in die Mitte des Kanals, siehe Abbildung 4.5. Aus diesem Grund sind die rms-Werte der Temperaturfluktuationen in Abbildung 4.6 in Kanalmitte am größten. Für $Ra = 50000$ zeigt sich für T_{rms} im Zentralbereich des Kanals ein Plateau. Es ist zu erwarten, daß sich auch für Quecksilber für $Ra > 50000$ thermische Grenzschichten ausbilden und sich für die rms-Werte der Temperaturfluktuationen Profile ähnlich denen einstellen, wie sie Seiter [40] in Grobstruktursimulation für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium für $Ra = 10^7$ bereits vorhergesagt hat.

4.3.2 Rms-Werte der Geschwindigkeitskomponenten

Die rms-Werte der Vertikalgeschwindigkeit wurden bereits in Abschnitt 4.2.2 diskutiert. Abbildung 4.7 zeigt die rms-Werte aller drei Geschwindigkeitskomponenten für $Ra = 6000$. Wie ersichtlich ist, unterscheiden sich $u_{1,rms}$ und $u_{2,rms}$ sehr stark. Damit ist das Geschwindigkeitsfeld bei dieser Rayleigh-Zahl nicht nur bezüglich der vertikalen Richtung, in der die Auftriebskraft wirkt, anisotrop, sondern auch bezüglich der beiden horizontalen Richtungen. Wie noch gezeigt werden wird, ist diese Anisotropie bezüglich der horizontalen Richtungen auf großräumige Wirbelwalzenpaare

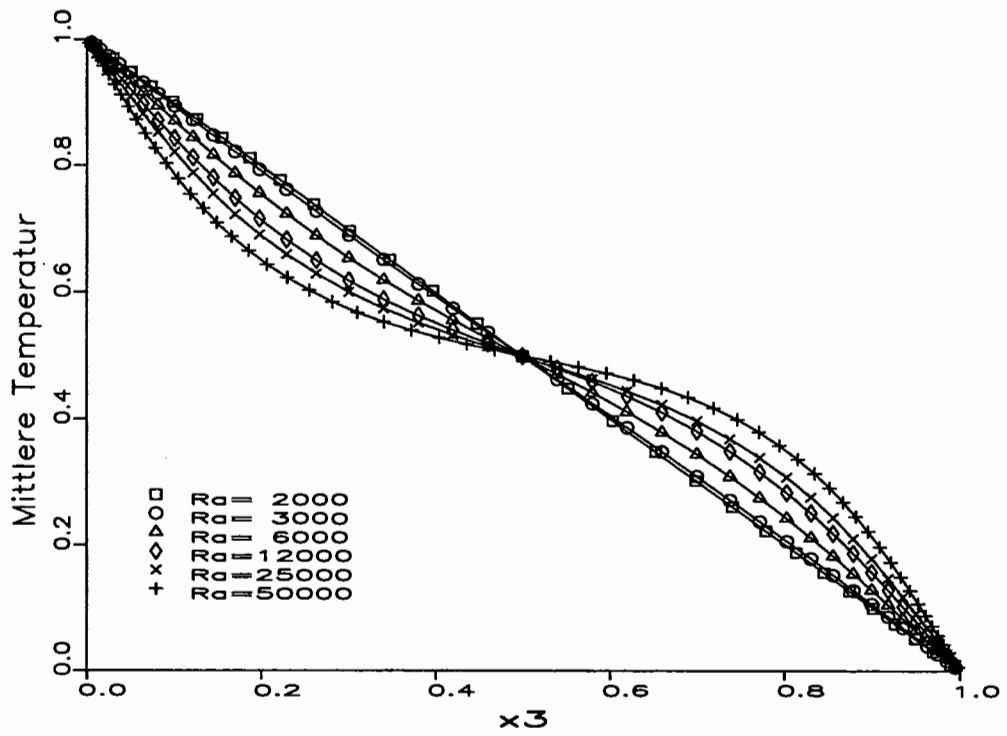


Abb. 4.5: Profile der mittleren Temperatur für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

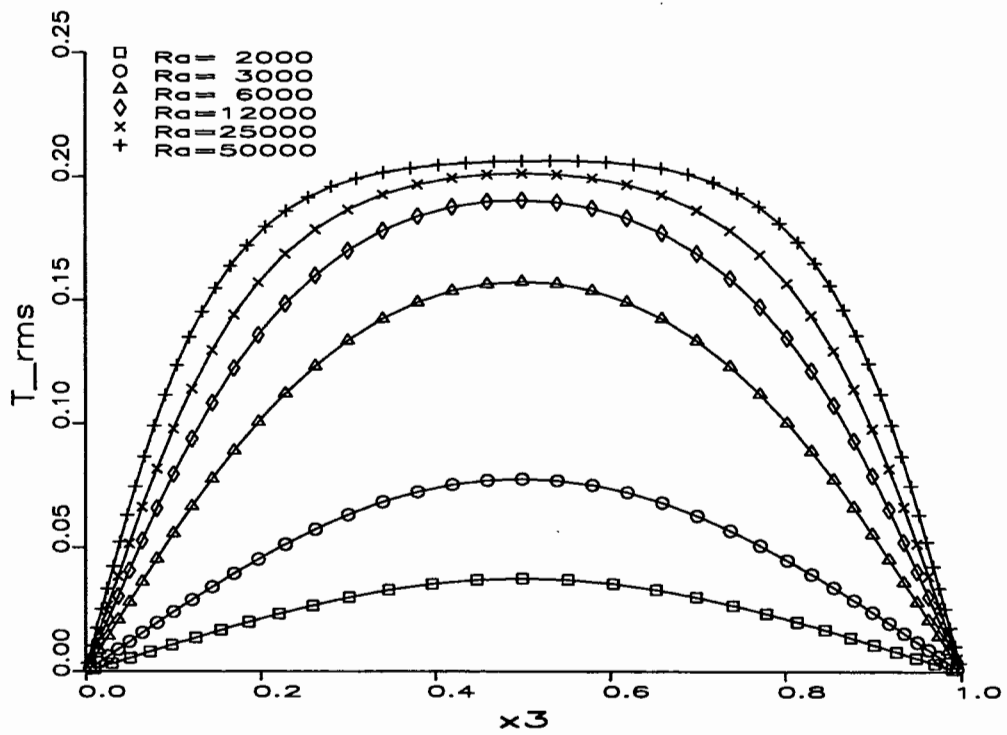


Abb. 4.6: Vertikale Profile von T_{rms} für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

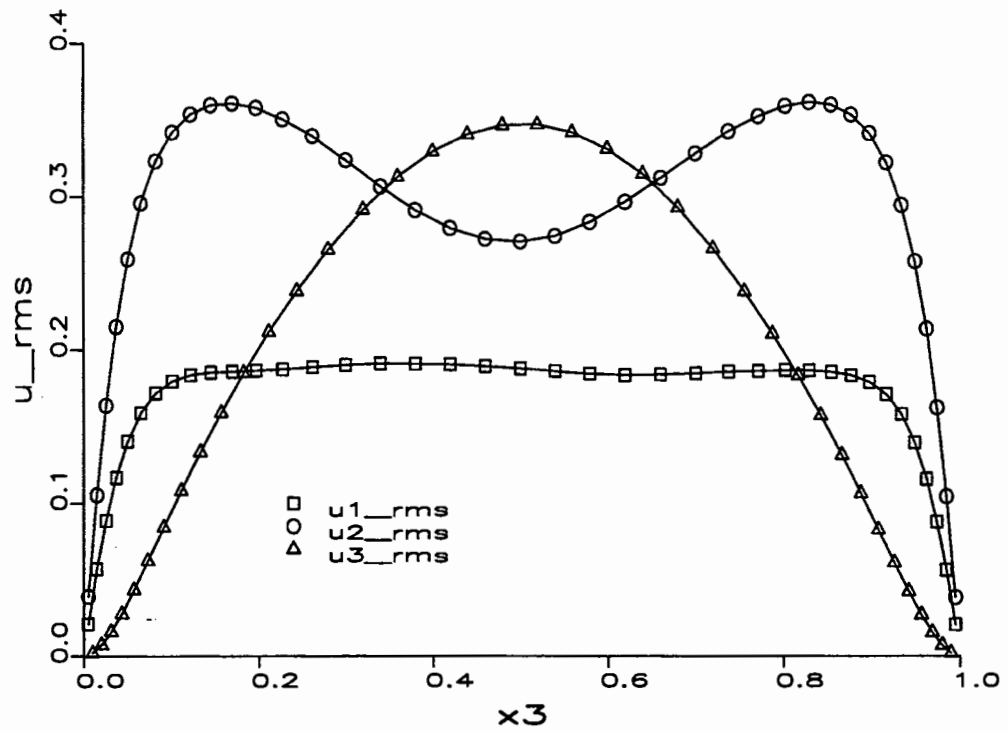


Abb. 4.7: Rms-Werte der Geschwindigkeitskomponenten, Ra = 6000.

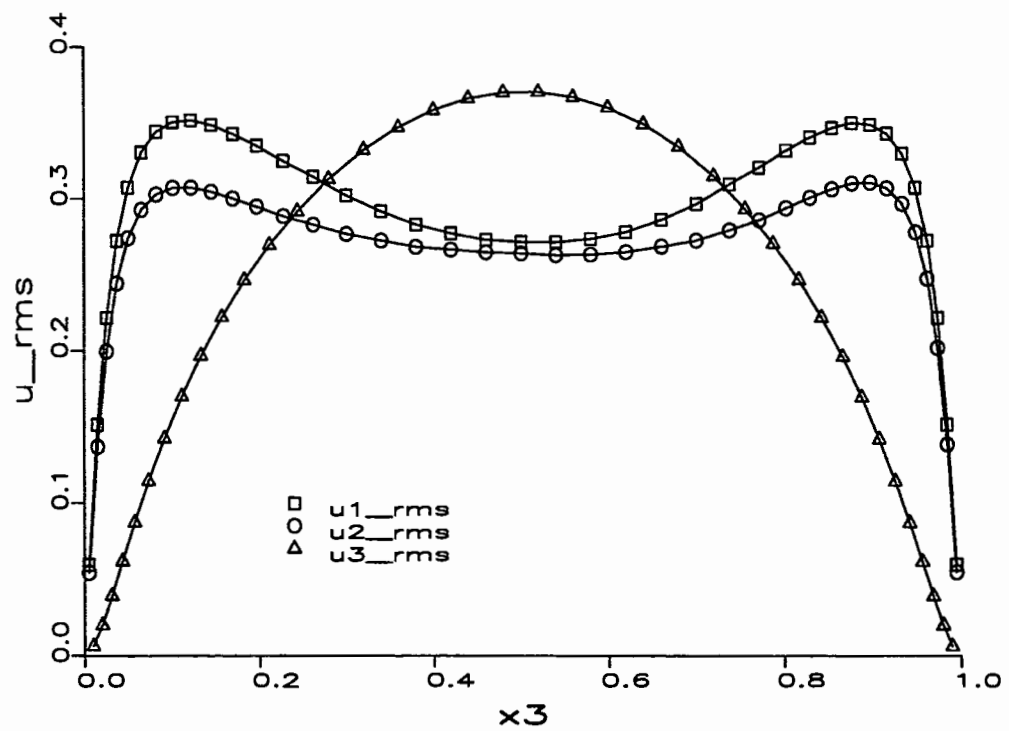


Abb. 4.8: Rms-Werte der Geschwindigkeitskomponenten, Ra = 25000.

4.4 Konvektionsformen für $Ra = 2000$

Nach Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_c = 1708$ setzt Konvektion in Form von zweidimensionalen Konvektionswalzen ein. Der Wert von Ra_c und das Konvektionsmuster sind dabei unabhängig von der Art des Fluides, d.h. unabhängig von der Prandtl-Zahl. Die Prandtl-Zahl ist aber von ganz entscheidender Bedeutung dafür, welche Konvektionsmuster mit wachsender Rayleigh-Zahl beim Übergang zu turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion auftreten. Nach Abbildung 2.4 umfaßt der Übergangsbereich von laminarer, zweidimensionaler Konvektion zu vollturbulenter Konvektion für hohe Prandtl-Zahlen mehrere Größenordnungen der Rayleigh-Zahl. Für Fluide mit sehr kleinen Prandtl-Zahlen vollzieht sich dieser Übergang dagegen innerhalb nur einer Größenordnung der Rayleigh-Zahl. Die besonderen Mechanismen, die hierbei eine Rolle spielen, sind Gegenstand zahlreicher Untersuchungen zur Rayleigh-Bénard-Konvektion und wurden in Kapitel 2.4 diskutiert.

Wegen des kleinen Intervalls der Rayleigh-Zahl, innerhalb dem unterschiedliche Konvektionsmuster auftreten können, spielt die korrekte Nachbildung der physikalischen Randbedingungen in Simulationen für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen eine besondere Rolle. In diesem Abschnitt soll daher der Einfluß der Periodenlängen X_1 und X_2 untersucht werden.

Abweichend von den späteren Simulationen für $Ra \geq 3000$ werden für $Ra = 2000$ Periodenlängen $X_1 \neq X_2 \neq 8$ benutzt. Als Vergleich dienen zwei direkte numerische Simulationen von Meneguzzi et al. [32] und Thual [43]. Beide Arbeiten untersuchen das Problem der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber für Rayleigh-Zahlen $Ra \approx 2000$. Dabei verwenden sie die relativ kleinen Periodenlängen $X_1 = 2.02$ und $X_2 \approx 2.5$. $X_1 = 2.02$ entspricht der kritischen Wellenlänge bei Einsetzen der Konvektion (vergl. Abschnitt 2.4). Inwieweit die Verwendung solcher kleiner Periodenlängen die sich ausbildenden Konvektionsmuster beeinflusst, soll nachfolgend untersucht werden.

4.4.1 Periodenlänge $X_1 = 2.02$ und $X_2 = 2.51$

Für die Periodenlängen $X_1 = 2.02$ und $X_2 = 2.51$ und mit ruhendem Fluid als Anfangsbedingung (Fall MENE in Tabelle 3.3 und 3.4) stellt sich in den direkten numerischen Simulationen mit TURBIT ab der Problemzeit $t \approx 500$ Konvektion in Form stationärer, zweidimensionaler Rollen ein. Eine Weiterintegration bis $t = 840$ zeigt, daß im zeitlichen Verlauf der kinetischen Energie und im Wert von T_{rms} in Kanalmitte ab $t \approx 750$ schwache Oszillationen auftreten. Die Amplitude dieser Oszillationen wächst mit zunehmender Problemzeit leicht, aber stetig an. Offensichtlich ist das Konvektionsmuster stationärer, zweidimensionaler Rollen bereits bei einer Rayleigh-Zahl $Ra = 2000$ in Quecksilber nicht mehr stabil.

Da die Amplitude der Oszillationen im Verlauf der Integration nur sehr langsam anwächst, konnte die immense Rechenzeit, die bei Weiterintegration für das Durchlaufen der Instabilität bis zum Erreichen des neuen Konvektionsmusters erforderlich wäre, nicht gerechtfertigt werden. Stattdessen wurde der Weg gewählt, für den Zeitpunkt $t = 760$ die Amplitude der vorhandenen Temperaturstörungen um den Faktor 10 zu vergrößern, und die Simulation mit diesen künstlichen Störungen fortzuführen (Fall MENEK). Als Ergebnis dieses Eingriffs stellt sich bereits nach kurzer weiterer Integrationszeit ein Strömungsmuster ein, das in der Literatur als stehende Welle ('standing wave') bezeichnet wird. Gekennzeichnet ist dieses durch Wirbelpaare, die Oszillationen senkrecht zur Wirbelachse ausführen. Entsprechend der vorgegebenen Periodenlänge des Rechengebietes in x_1 -Richtung $X_1 = 2.02$ ist die Wellenlänge des Wirbelpaares $\lambda = \frac{2\pi D}{a} = 2.02$, und damit gleich der kritischen Wellenlänge λ_c (vergl. Abschnitt 2.4).

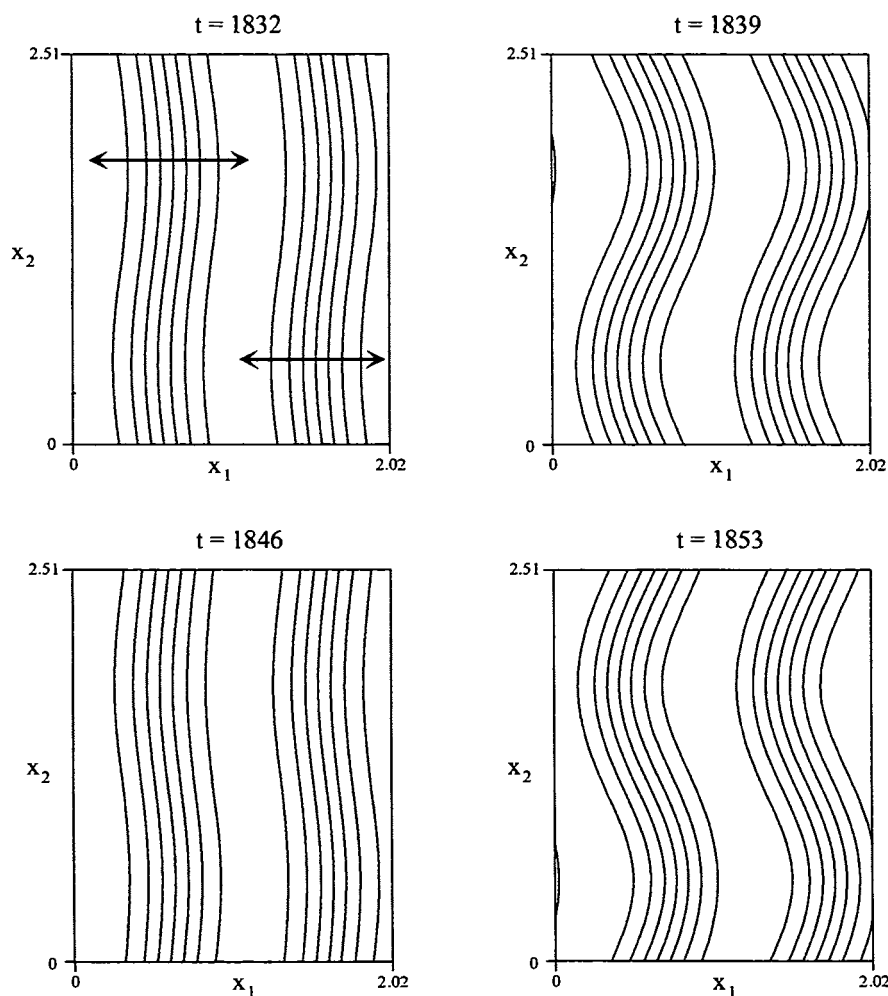


Abb. 4.10: Isolinien der Temperatur (Inkrement: 0.02) in der Ebene $x_3 = 0.5$ für vier verschiedene Zeitpunkte. $Ra = 2000$, $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$. Stehende Welle.

In Abbildung 4.10 und 4.11 sind vier typische Zeitpunkte einer Periode anhand von Isolinien des Temperaturfeldes bzw. der Vertikalgeschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene des Kanals dargestellt. Der Vergleich beider Abbildungen zeigt, daß eine starke Korrelation zwischen dem Temperaturfeld und der Vertikalgeschwindigkeit besteht.

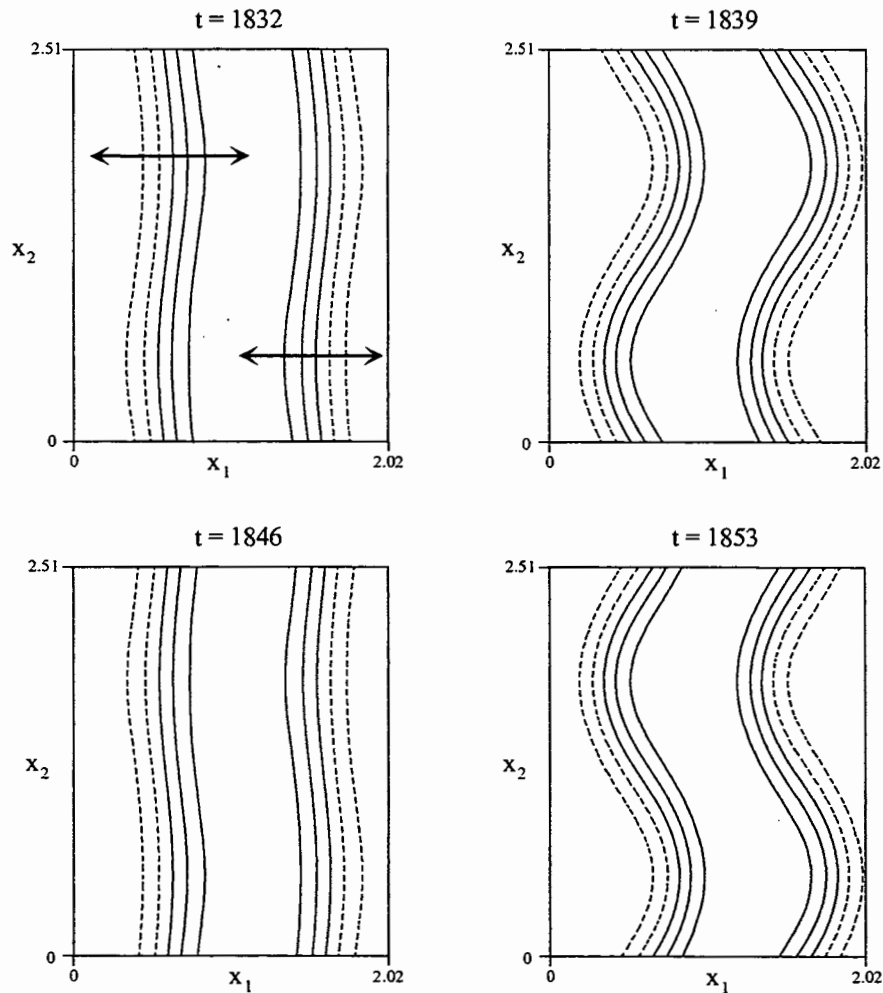


Abb. 4.11: Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit (Inkrement: 0.08) in der Ebene $x_3 = 0.5$ für vier Zeitpunkte. $Ra = 2000$, $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$. Stehende Welle.

Die Vektordarstellung des Geschwindigkeitsfeldes in einem Vertikalschnitt senkrecht zur Rollachse in Abbildung 4.12 zeigt, daß die Konvektionswalzen Oszillationen in horizontaler und vertikaler Richtung ausführen. In Richtung der Achse der Rollen findet dagegen keine Bewegung der Konvektionsrollen statt. In Ergänzung zu Abbildung 4.12 zeigt Abbildung 4.13 die lokalen Profile der Vertikalgeschwindigkeit $u_3(x_1)$ für $x_2 = 0.63$ und $x_3 = 0.5$ für die vier betrachteten Zeitpunkte. Zum Zeitpunkt $t = 1846$ ist das Wirbelpaar praktisch nicht ausgelenkt. Das Profil der Vertikalgeschwindigkeit $u_3(x_1)$ ist annähernd symmetrisch. An der Stelle $x_1 \approx 1.2$ zeigt sich

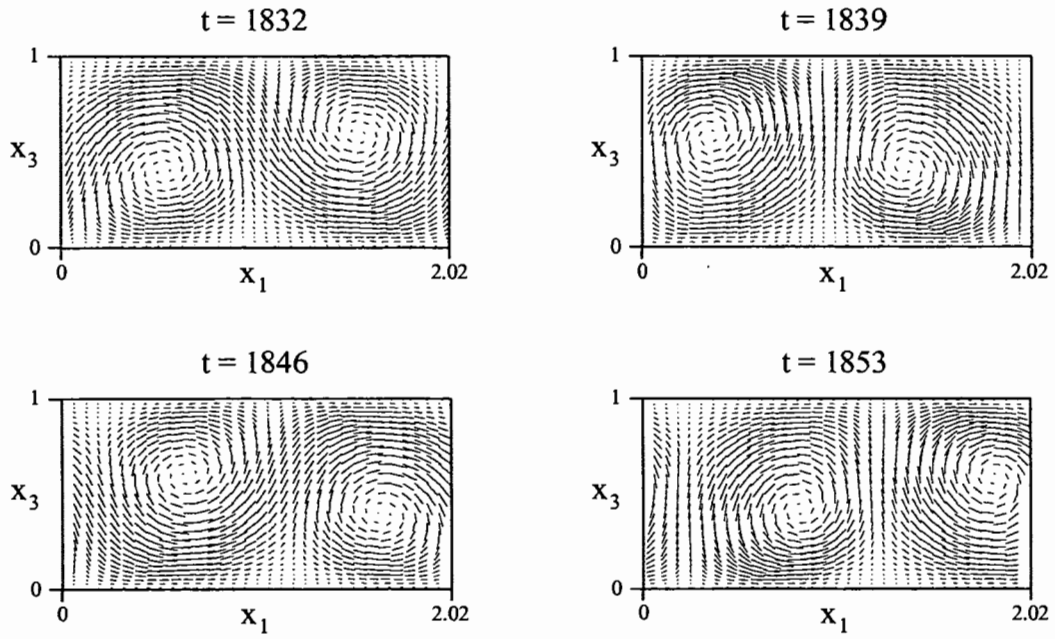


Abb. 4.12: Vektorplot des Geschwindigkeitsfeldes in der Ebene $x_2 = 0.63$ für vier verschiedene Zeitpunkte. $Ra = 2000$, $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$.

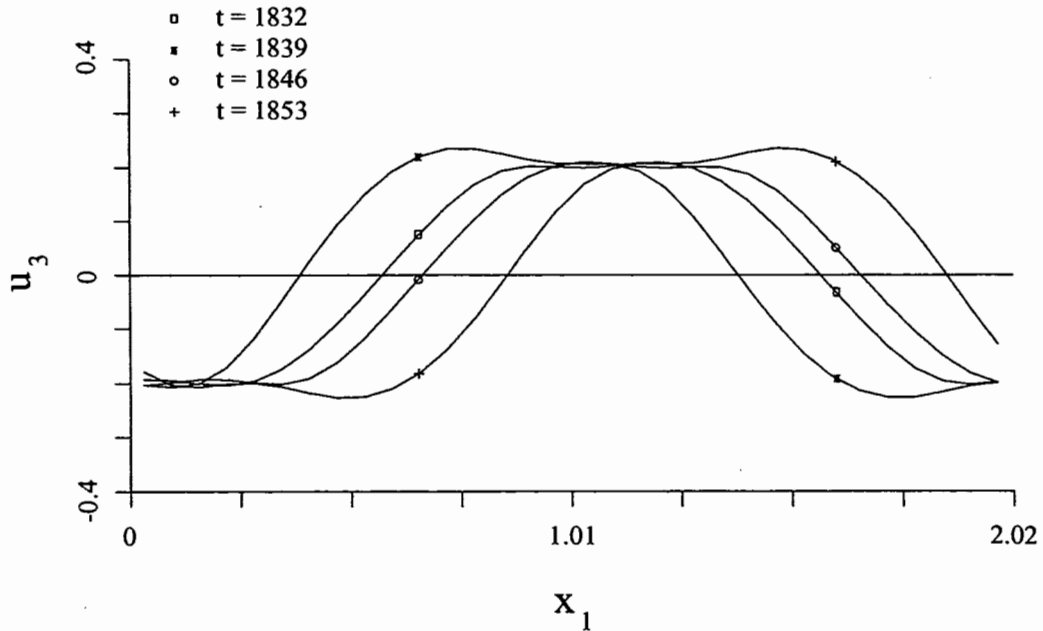


Abb. 4.13: Vertikalgeschwindigkeit $u_3(x_1)$ an der Stelle $x_2 = 0.63$, $x_3 = 0.5$ für vier verschiedene Zeitpunkte. $Ra = 2000$, $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$.

der Einfluß der oberen Wand. Das Wirbelpaar bildet hier einen Staupunkt. Im Profil der Vertikalgeschwindigkeit wird dadurch ein lokales Minimum erzeugt. Für $t = 1839$ und $t = 1853$ erreicht die Auslenkung des Wirbelpaars jeweils ihren Maximalwert. Das Geschwindigkeitsprofil wird unsymmetrisch und ist durch Extremwerte der Vertikalgeschwindigkeit an den Stellen $x_1 \approx 0.75$ bzw. $x_1 \approx 1.5$ gekennzeichnet.

Die Oszillation des Wirbelpaares wirken sich auch auf den konvektiven Wärmetransport aus. In Abbildung 4.14 ist die Nusselt-Zahl als Funktion der Zeit dargestellt. Zu Zeitpunkten, an denen das Wirbelpaar nicht ausgelenkt ist, nimmt die Nusselt-Zahl ein Minimum an. Umgekehrt ist zu Zeitpunkten, an denen die Auslenkung maximal ist, auch die Nusselt-Zahl am größten. Dies ist offensichtlich eine Folge, der zu diesen Zeitpunkten Extremwerte annehmenden Vertikalgeschwindigkeit. Die Periodendauer der Oszillationen der Nusselt-Zahl beträgt $T_{osz} \approx 14$ Problemzeiteinheiten. Dies entspricht $T_{osz,viskos} \approx 0.05$ viskosen bzw. $T_{osz,thermisch} \approx 2$ thermischen Zeiteinheiten (zur Umrechnung siehe Anhang A.1).

In Abbildung 4.14 ist andeutungsweise zu erkennen, daß die Extremwerte der Nusselt-Zahl mit der Zeit leicht abfallen. Dies deutet auf einen noch nicht abgeschlossenen transienten Vorgang hin. Aussagen über die Stabilität der stehenden Welle für Zeiten $t \rightarrow \infty$ können daher hier nicht getroffen werden.

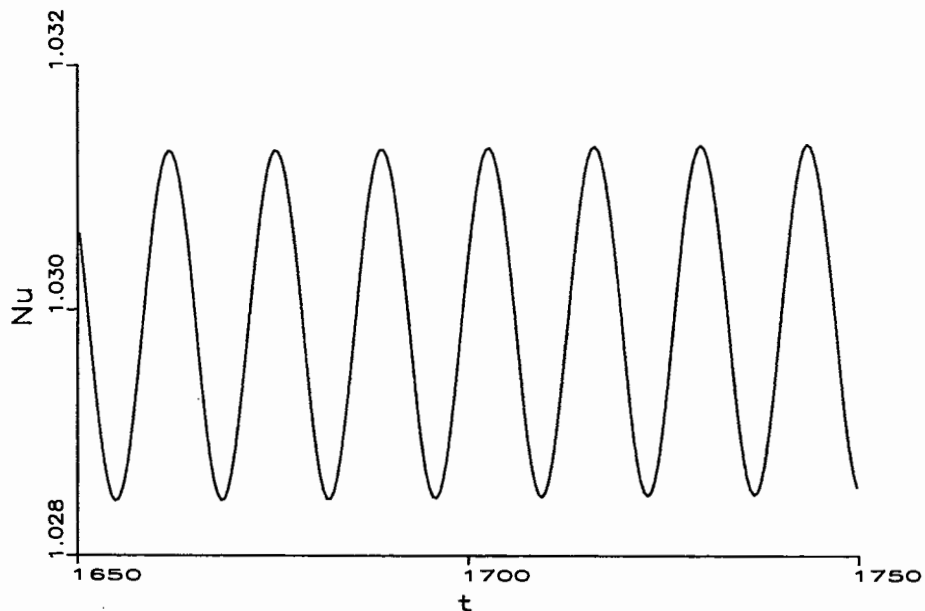


Abb. 4.14: Zeitverlauf der Nusselt-Zahl. $Ra = 2000$, $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$.

4.4.2 Periodenlänge $X_1 = 8.06$ und $X_2 = 7.54$

Um den Einfluß der Periodenlängen auf die Ergebnisse zu untersuchen, wird eine Simulation für $Ra = 2000$ bei gleichen Anfangsbedingungen aber in einem größeren Rechengebiet durchgeführt. In x_1 -Richtung wird die Periodenlänge um den Faktor vier auf den Wert $X_1 = 8.06$ vergrößert, in x_2 -Richtung um den Faktor drei auf den Wert $X_2 = 7.54$ (vergl. Abbildung 4.15). Die Transiente vom Ruhezustand aus wird zur Einsparung von Rechenzeit auf einem groben Gitter gerechnet (Fall MENE B). Dabei bilden sich zunächst wieder stationäre Rollen aus. Bei $t \approx 900$ treten aber bereits Instabilitäten vom Typ der stehenden Welle auf, ohne daß artifizielle Störungen eingebracht werden. Offensichtlich stehen der Konvektion im großen Rechengebiet mehr Freiheitsgrade zur Verfügung, so daß die stabilisierende Wirkung der periodischen Randbedingungen in einem Rechengebiet mit kleinen Periodenlängen weitgehend entfällt. Nach Interpolation von Fall MENE B zum Zeitpunkt $t = 1375$ auf ein feineres Gitter - mit identischen Maschenweiten wie im Falle des kleinen Rechengebietes - wird die Simulation bis zu $t = 2170$ fortgeführt (Fall MENE B F).

Die Abbildungen 4.16 und 4.17 zeigen Horizontalschnitte des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes gegen Ende der durchgeführten Simulation für vier verschiedene Zeitpunkte im Bereich $2090 \leq t \leq 2123$. Das Konvektionsmuster unterscheidet sich merklich vom dem in dem Rechengebiet mit $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$. So sind die Konvektionswalzen nun um ca. 17° gegenüber der x_1 -Achse geneigt. Dies ist aber unwesentlich, da es bei ausreichend großen Periodenlängen und den hier verwendeten Anfangsbedingungen keine bevorzugte horizontale Orientierung geben sollte. Von Bedeutung ist dagegen, daß die Wellenlänge im großen Rechengebiet $\lambda_{X_1=8.06, X_2=7.54} \approx 2.4$ im Vergleich zur Simulation im kleinen Rechengebiet um ca. 20% größer ist.

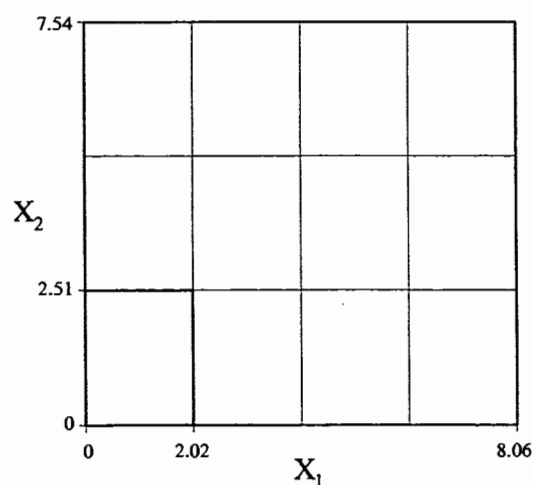


Abb. 4.15: Rechengebiet $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$ und $X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$.

Wie in Abschnitt 4.4.1 diskutiert, findet man im Rechengebiet mit $X_1 = 2.02, X_2 = 2.51$ als Konvektionsmuster stehende Wellen. Dabei führen die Konvektionswalzen periodische Oszillationen in einer Ebene senkrecht zur Wirbelachse aus. Eine Bewegung der Walzen in Richtung der Rollenachse findet nicht statt. Demgegenüber ist im Rechengebiet mit $X_1 = 8.06, X_2 = 7.54$ nun zusätzlich zu den Oszillationen in der Ebene senkrecht zur Wirbelachse eine Bewegung in axialer Richtung zu beobachten. Dies zeigt sich besonders deutlich in der Verformung der zeitabhängigen Simulationsergebnisse entsprechend den Abbildungen 4.16 und 4.17, die für die Zeitintervalle $1544 \leq t \leq 1593, 1812 \leq t \leq 1862$ und $2081 \leq t \leq 2131$ durchgeführt wurde.

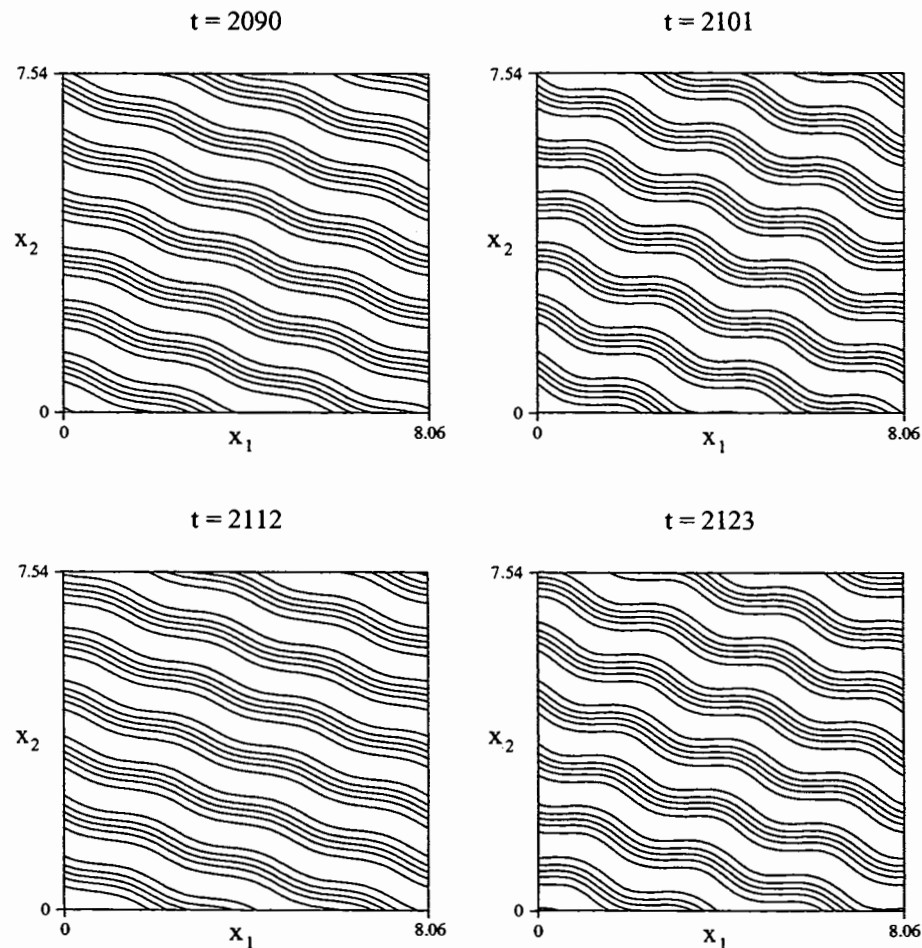


Abb. 4.16: Isolinien der Temperatur (Inkrement: 0.02) in der Ebene $x_3 = 0.5$. $Ra = 2000, X_1 = 8.06, X_2 = 7.54$. Amplitudenmodulierte Wanderwellenkonvektion.

Das Konvektionsmuster, bei dem sich wellenförmig ausgelenkte Konvektionswalzen axial in Richtung ihrer Wirbelachse bewegen, wird als Wanderwellenkonvektion ('travelling wave convection') bezeichnet. Die Amplitude der wellenförmigen Auslenkungen ändert sich dabei zeitlich nicht. Im vorliegenden Fall ist die Amplitude der Auslenkung allerdings nicht fest sondern zeitlich veränderlich. Damit soll das Kon-

vektionsmuster nach Abbildung 4.16 und 4.17 im folgenden als amplitudenmodulierte Wanderwellenkonvektion bezeichnet werden. Dieses Konvektionsmuster kann man sich anschaulich auch als eine Superposition der Konvektionsarten stehende Welle und Wanderwelle vorstellen.

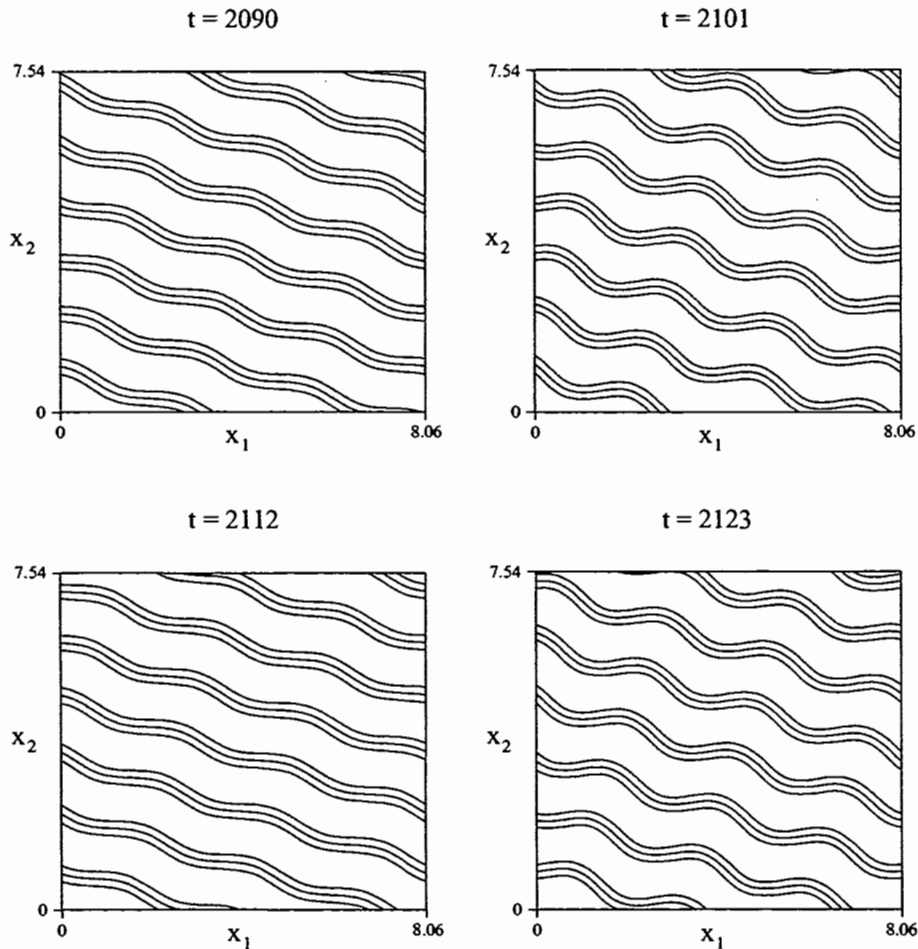


Abb. 4.17: Isolinien von u_3 (Inkrement: 0.08) in der Ebene $x_3 = 0.5$. $Ra = 2000$, $X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$. Amplitudenmodulierte Wanderwellenkonvektion.

Aus dem Zeitverlauf der Nusselt-Zahl in Abbildung 4.18 im Vergleich zu Abbildung 4.14 wird deutlich, daß sich mit Vergrößerung der Periodenlängen auch die Periodendauer der Oszillationen geändert hat. Sie beträgt jetzt $T_{osz} \approx 22$ Zeiteinheiten im Vergleich zu $T_{osz} \approx 14$ im kleinen Rechengebiet. Der Wert $T_{osz} = 14$ entspricht $T_{osz,viskos} \approx 0.08$ viskosen bzw. $T_{osz,thermisch} \approx 3$ thermischen Zeiteinheiten (siehe Anhang A). Die Nusselt-Zahl sinkt auf Werte im Bereich $1.0114 \leq Nu_{X_1=8.06, X_2=7.54} \leq 1.0123$, während sie beim kleinen Rechengebiet im Intervall $1.0283 \leq Nu_{X_1=2.02, X_2=2.51} \leq 1.0315$ liegt. Dies ist eine direkte Folge der größeren Wellenlänge im größeren Rechengebiet. Der Reibungseinfluß auf eine Konvektionswalze erstreckt sich über einen größeren Bereich, so daß die Bewegung stärker gebremst wird.

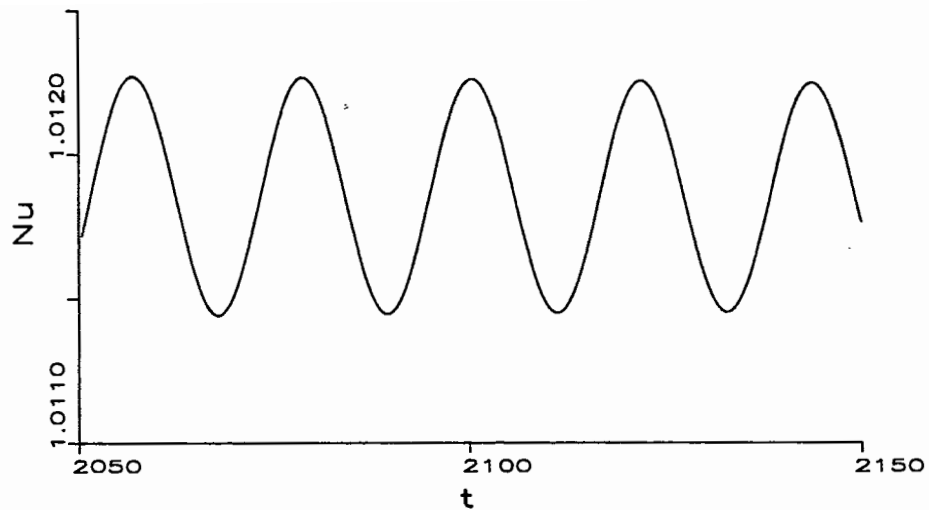


Abb. 4.18: Zeitverlauf der Nusselt-Zahl. $Ra = 2000$, $X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$.

In Abbildung 4.19 ist für die Position $\vec{x} = (4.03, 3.77, 0.5)$ der zeitliche Verlauf der momentanen Temperatur dargestellt. Es wird deutlich, daß der Konvektion eine sehr niederfrequente Oszillation überlagert ist. Für große Problemzeiten erscheint die Ausbildung von reiner Wanderwellenkonvektion als möglich. Ob dies für $t \rightarrow \infty$ tatsächlich der Fall ist, kann allerdings wegen der damit verbundenen immensen Rechenzeiten hier nicht untersucht werden.

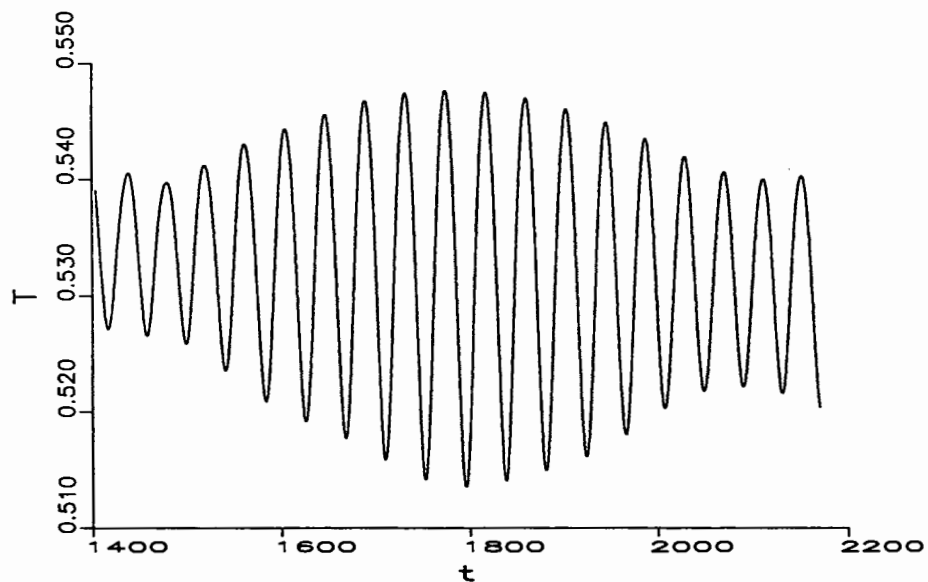


Abb. 4.19: Zeitverlauf der Temperatur an der Position $\vec{x} = (4.03, 3.77, 0.5)$. $Ra = 2000$, $X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$.

4.5 Konvektionsformen für $Ra = 3000 \div 50000$

In Abschnitt 4.5.1 und 4.5.2 werden Momentanbilder des Strömungsfeldes analysiert. Die Diskussion beschränkt sich auf Strukturen in Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld. Die zeitliche Entwicklung und die dynamischen Vorgänge werden in Abschnitt 4.5.3 diskutiert.

4.5.1 Strukturen im Temperaturfeld

In Abbildung 4.20 sind Horizontalschnitte des momentanen Temperaturfeldes zu einem jeweils typischen Zeitpunkt in der Ebene $x_3 = 0.5$ für die Rayleigh-Zahlen im Bereich $Ra = 3000 \div 50000$ dargestellt. Das Isolinien-Inkrement entspricht 10% der Differenz der Wandtemperaturen. Im Gegensatz zu den Simulationen für $Ra = 2000$, wo die Konvektionsmuster durch eine ausgesprochene Regelmäßigkeit ausgezeichnet sind, sind für Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000$ und höher nur andeutungs- und bereichsweise räumlich regelmäßige Strukturen zu erkennen.

Für $Ra = 3000$ ist, wie die geringe Anzahl der Isolinien anzeigt, die Abweichung des Temperaturfeldes vom reinen Wärmeleitzustand nur schwach ausgeprägt. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ finden sich großräumige, unregelmäßige, das gesamte Rechengebiet durchziehende Strukturen, die eine klare Vorzugsrichtung aufweisen. Aus dem Abstand benachbarter Isolinien ist ersichtlich, daß die lokalen Temperaturgradienten mit wachsender Rayleigh-Zahl zunehmend steiler werden. Für $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$ ist jede Ordnung im Temperaturfeld zerfallen, und es ist keine Vorzugsrichtung mehr zu erkennen.

Weiteren Einblick in die Strukturen der Konvektion geben die Vertikalschnitte des Temperaturfeldes in der Ebene $x_1 = 4$ bzw. $x_2 = 4$ in Abbildung 4.21. Für $Ra = 3000$ ist das Temperaturfeld des Wärmeleitzustand in Form paralleler, horizontaler, äquidistanter Isolinien nur wenig durch die Konvektionsbewegung verändert. Mit wachsender Rayleigh-Zahl sind die Isolinien zunehmend verformt. Für $Ra \geq 25000$ zeigt sich, bedingt durch die zunehmende Intensität der Konvektionsbewegung, ein stark unregelmäßiges Temperaturfeld. Am Zusammendrängen der Isolinien in bestimmten Wandbereichen ist deutlich die Tendenz zur Grenzschichtbildung zu erkennen.

Weitere Informationen über die vorherrschenden Strukturen für die verschiedenen Rayleigh-Zahlen geben dreidimensionale Analysemethoden. In den Abbildungen 4.22 bis 4.25 sind räumliche Isoflächen der Temperatur für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000 \div 25000$ dargestellt. Die Abbildungen zeigen jeweils Isoflächen der dimensionslosen Temperatur für den Wert $T = 0.75$. Als zusätzliche Farbinformation ist auf den Isoflächen die lokale Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit u_3 dargestellt.

Für $Ra = 3000$ ist die Temperatur-Isofläche sehr flach und weicht nur wenig von der

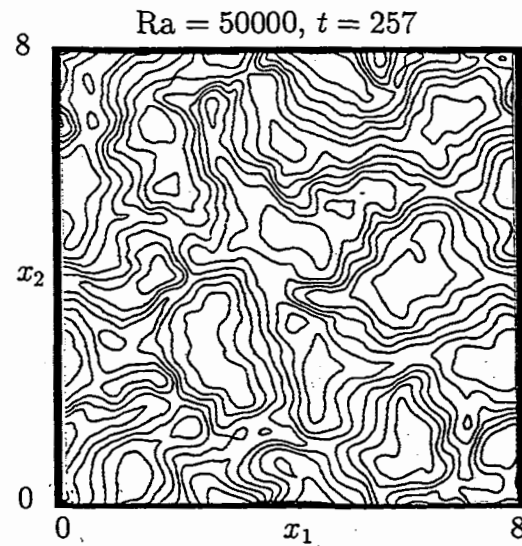
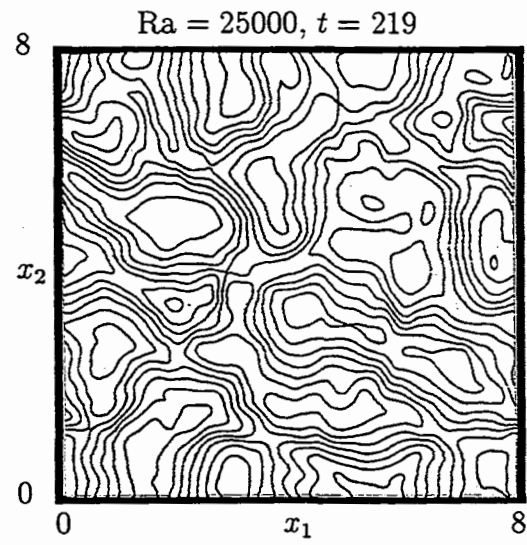
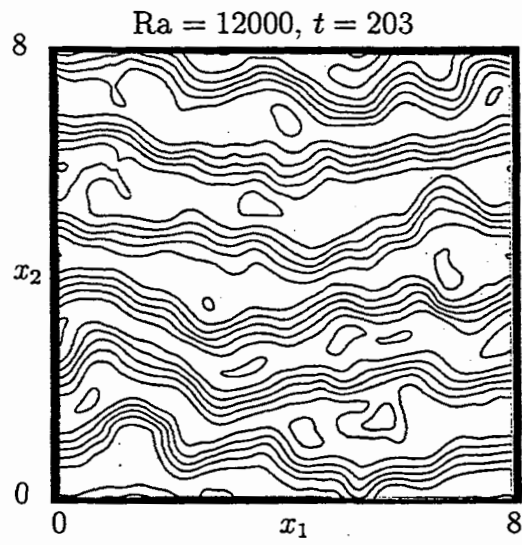
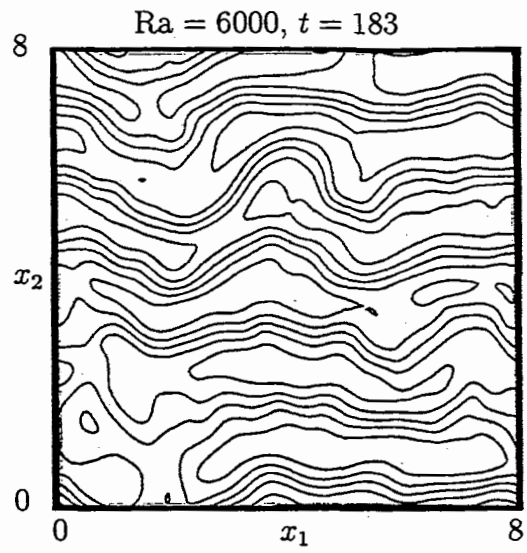
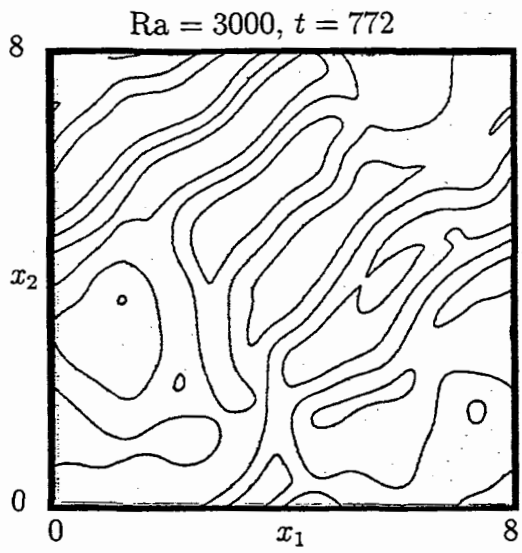


Abb. 4.20: Isolinien der Temperatur (Inkrement: 0.1) in der Ebene $x_3 = 0.5$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

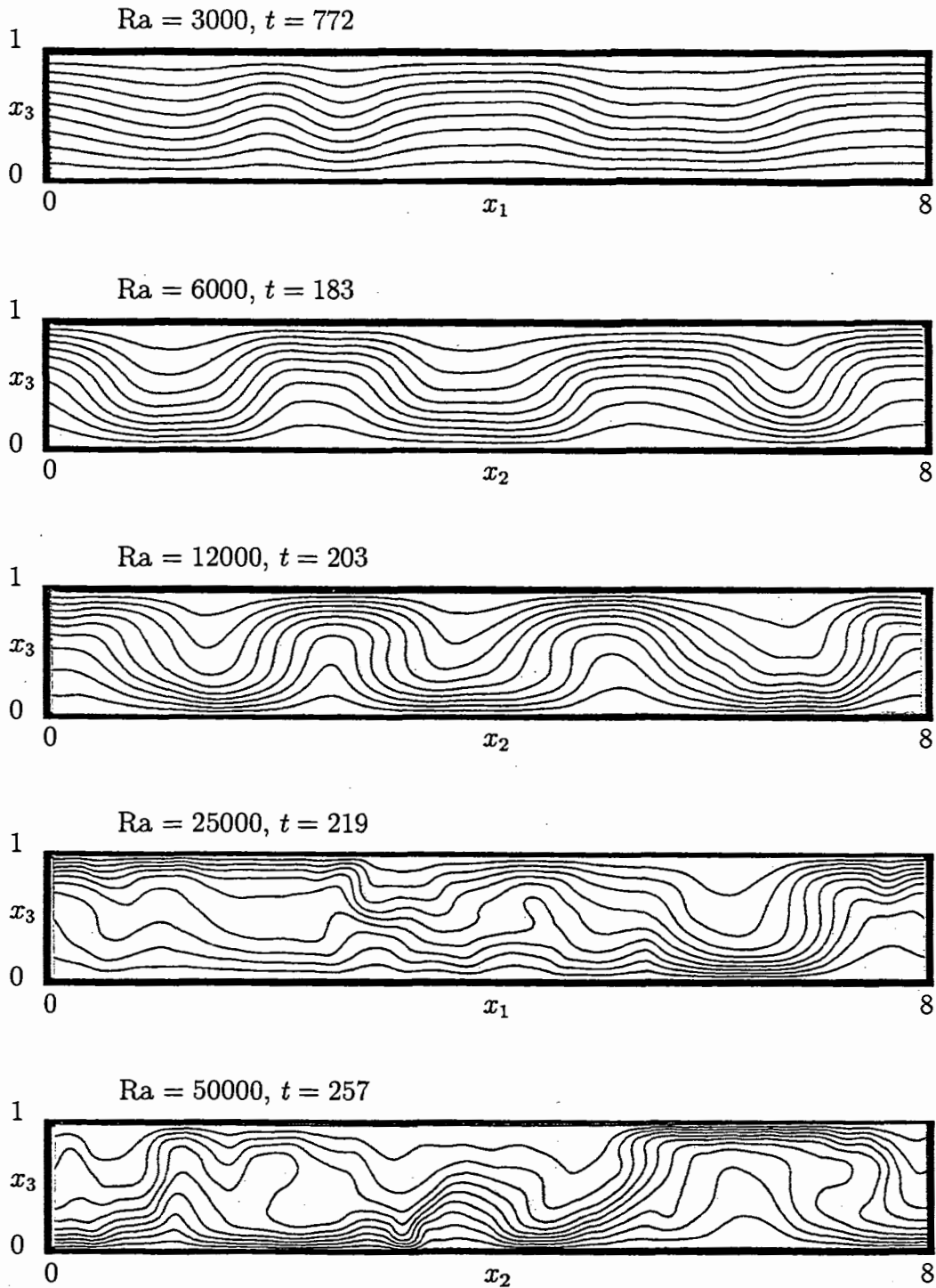


Abb. 4.21: Isolinien der Temperatur (Inkrement: 0.1) in der Ebene $x_1 = 4$ bzw. $x_2 = 4$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

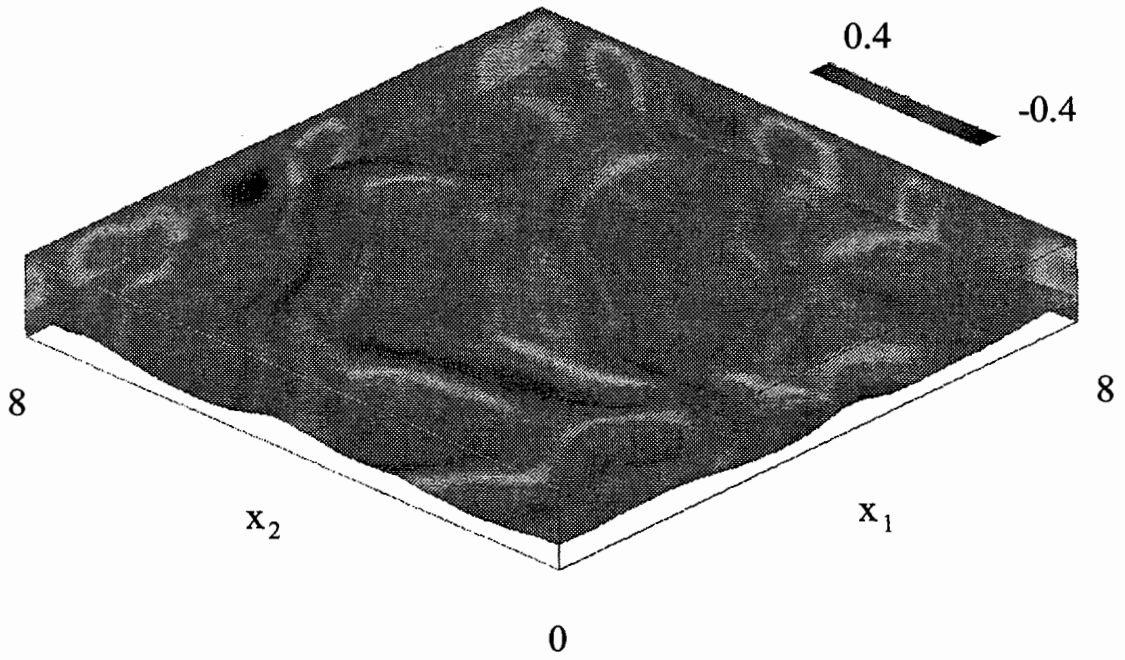


Abb. 4.22: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 3000$ ($t = 772$).

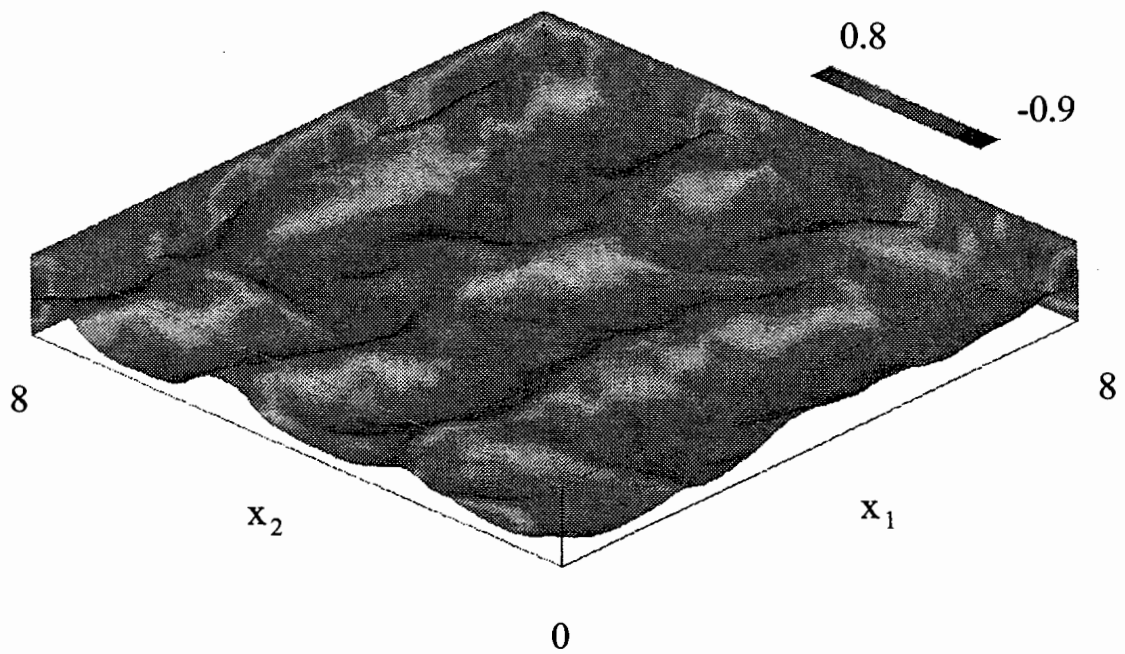


Abb. 4.23: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 6000$ ($t = 183$).

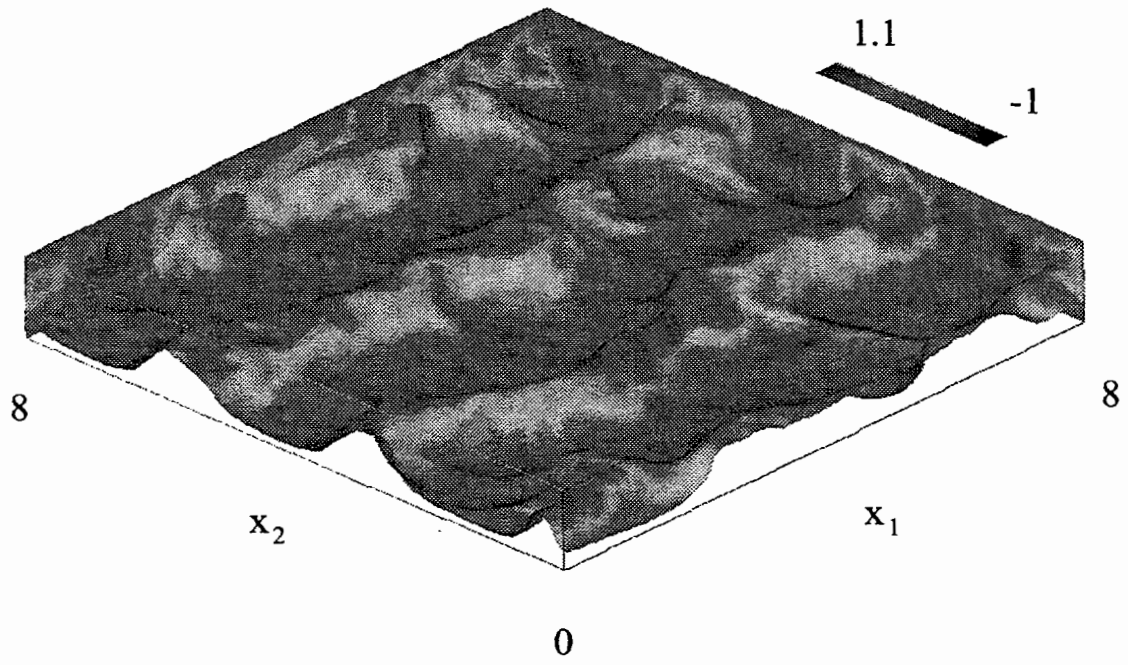


Abb. 4.24: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 12000$ ($t = 203$).

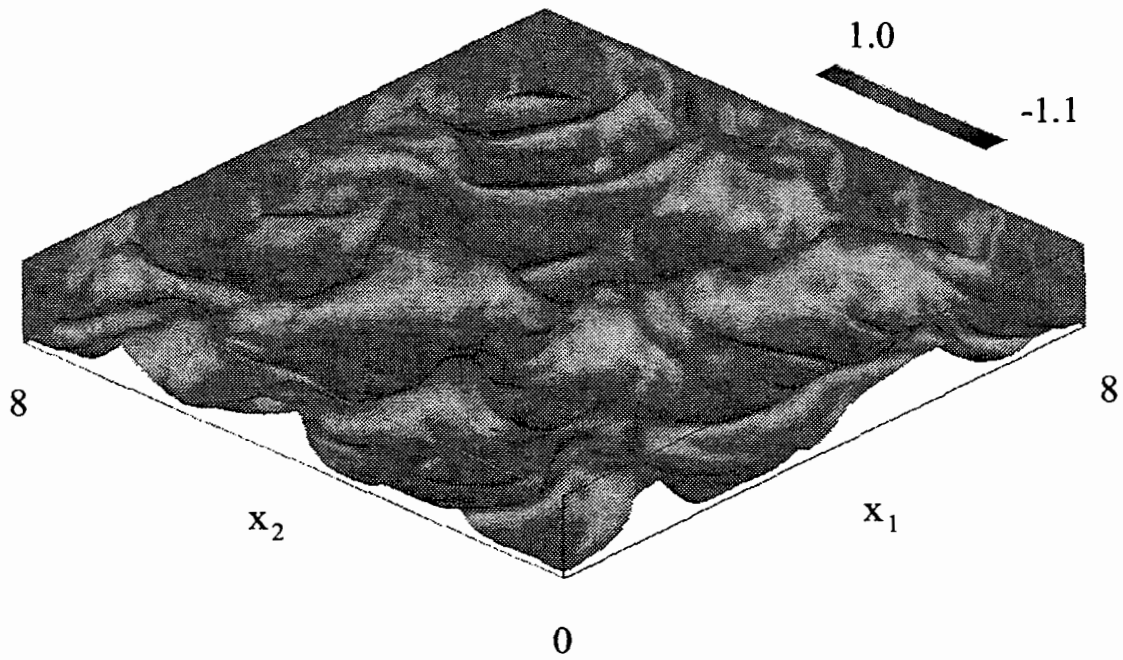


Abb. 4.25: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 25000$ ($t = 219$).

exakt ebenen wandparallelen Temperatur-Isofläche des reinen Wärmeleitungszustandes ab (Abb. 4.22). Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ zeigen sich in der Isofläche großräumige Bandstrukturen mit klarer Vorzugsrichtung (Abb. 4.23 und 4.24). Wie die Analyse des Geschwindigkeitsfeldes im nächsten Abschnitt zeigen wird, sind die Bandstrukturen im Temperaturfeld auf großräumige Wirbelwalzenpaare zurückzuführen, die gegensinnig rotieren. Auffallend sind für $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ kleinskalige Speichenstrukturen, die in Wandnähe zwischen den großräumigen Bandstrukturen und nahezu senkrecht zu diesen verlaufen. Sie entstehen, wenn kaltes Fluid von der oberen Wand bereichsweise ablöst und auf die untere Wand trifft. Dort wird das Fluid aufgrund der dreidimensionalen Störungen entlang der Achsen der Wirbelwalzenpaare nicht ausschließlich in Richtung der Umfangsgeschwindigkeit der Wirbel horizontal umgelenkt, sondern es erfolgt auch eine horizontale Umlenkung in Richtung der Wirbelachsen. Es bilden sich Wellenfronten, die sich nahe der Wand zwischen den Wirbeln entlang deren Achse ausbreiten. Treffen zwei solche aufeinander zu laufende Wellenfronten zusammen, so wird das Fluid dort vertikal weg von der Wand umgelenkt. In der Isofläche der Temperatur äußern sich diese schmalen Bereiche, in denen warmes Fluid aufsteigt, in den besagten Speichenstrukturen.

Für $Ra = 25000$ sind keine deutlichen großräumigen Bandstrukturen im Temperaturfeld mehr zu erkennen, die sich über das gesamte Rechengebiet erstrecken (Abb. 4.25). Allerdings zeigen sich auch hier in Wandnähe die charakteristischen Speichenstrukturen, wie sie bereits in direkten numerischen Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft [7] [21] [33] [44] und Natrium [44] gefunden wurden. Experimentell nachgewiesen wurden derartige Speichenstrukturen bisher nur für Wasser ($Pr = 7$) und Silikonöl ($Pr = 200$) [25]. Für Quecksilber wird das Auftreten dieser Speichenstrukturen hier erstmals gezeigt.

4.5.2 Strukturen im Geschwindigkeitsfeld

In Abbildung 4.26 sind Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit nahe der Mittelebene des Kanals ($x_3 \approx 0.5$) dargestellt. Für $Ra = 3000$ läßt sich aus dem Vergleich mit Abbildung 4.20 eine starke Kopplung zwischen der Vertikalgeschwindigkeit und dem Temperaturfeld erkennen. Für $Ra \geq 6000$ treten im Geschwindigkeitsfeld zunehmend kleinere Strukturen auf, während die entsprechenden Temperaturfelder weiterhin vornehmlich durch großräumige Strukturen bestimmt sind. Für $Ra \leq 12000$ ist noch eine Vorzugsrichtung im Geschwindigkeitsfeld zu erkennen. Diese löst sich aber für $Ra \geq 25000$ auf.

Eine anschauliche Vorstellung von den Strömungsvorgängen geben Vertikalschnitte des Geschwindigkeitsfeldes in Abbildung 4.27. Hier sind Vektorplots der Geschwindigkeitskomponenten in der Schnittebene $x_1 = 4$ oder $x_2 = 4$ dargestellt. Die Ge-

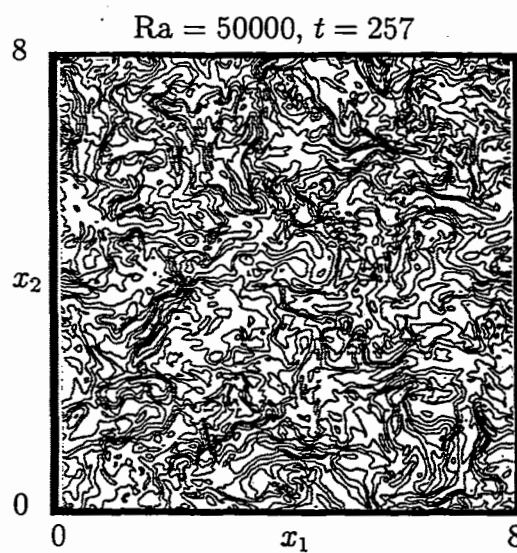
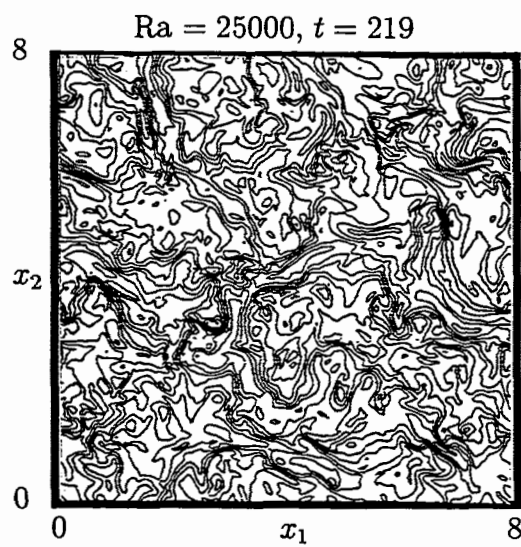
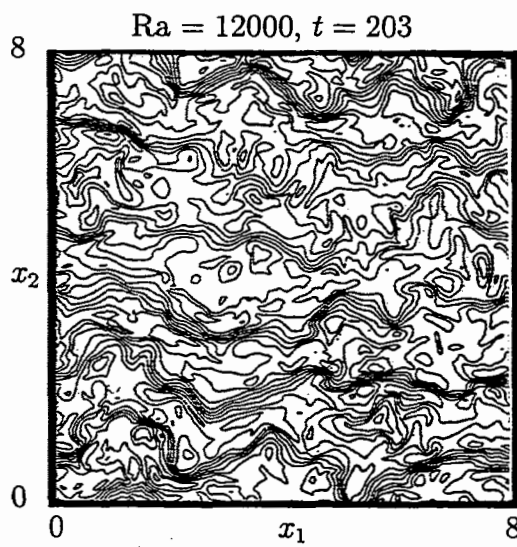
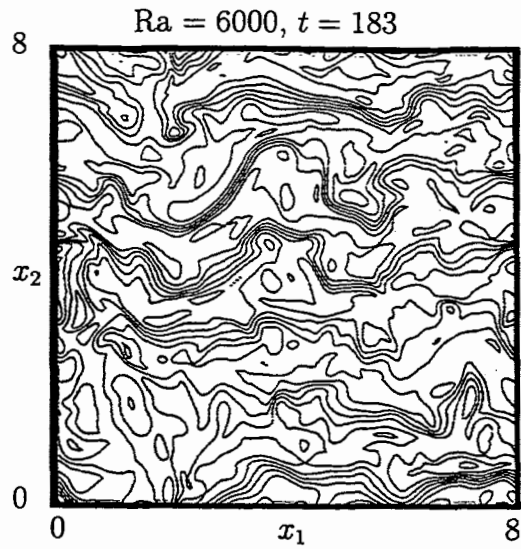
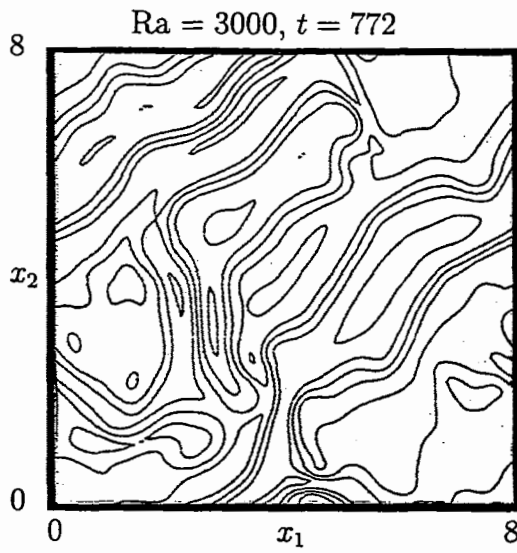


Abb. 4.26: Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit (Inkrement: 0.2) in der Ebene $x_3 = 0.5$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

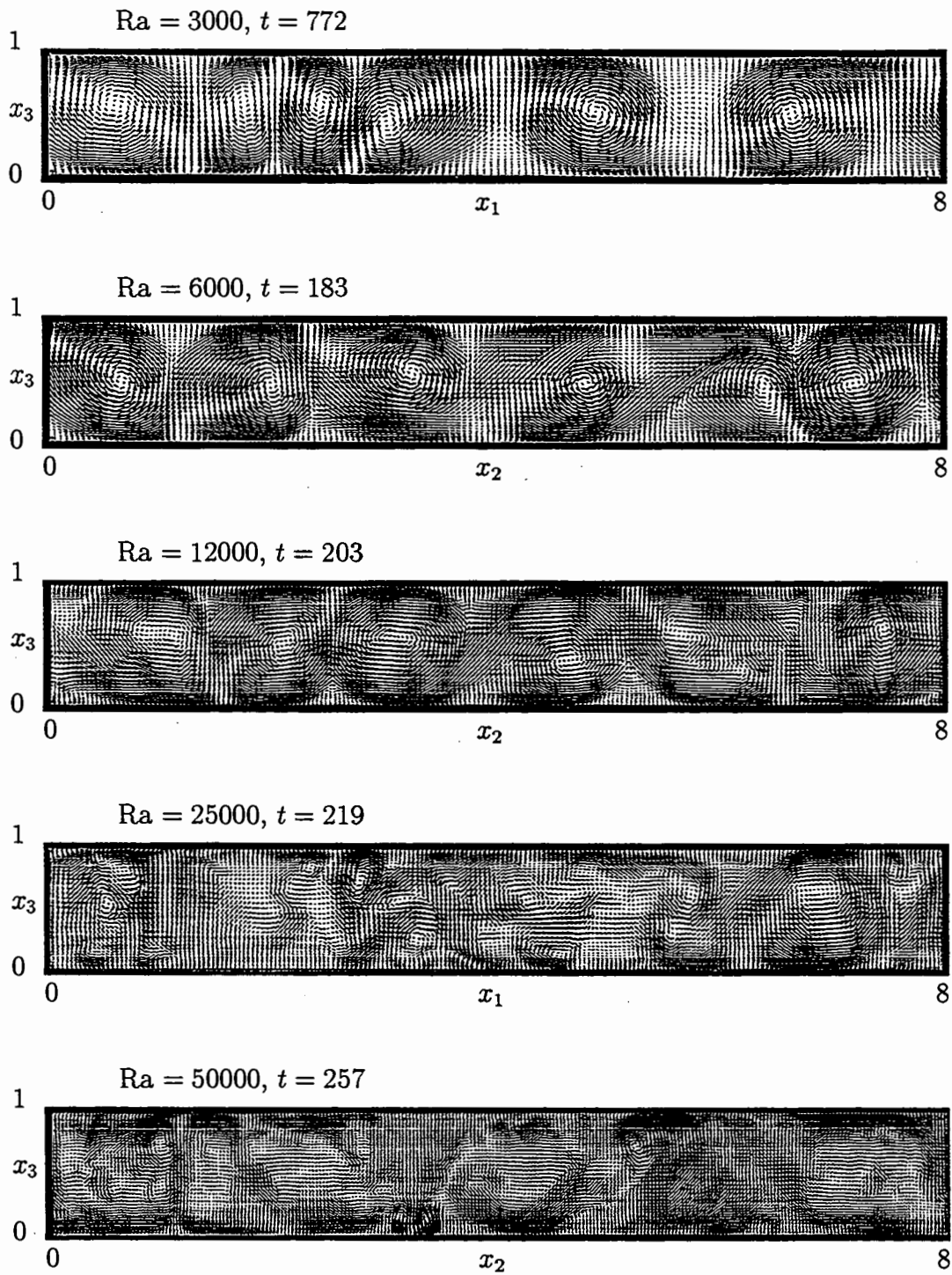


Abb. 4.27: Vektorplot des Geschwindigkeitsfeldes in der Ebene $x_1 = 4$ bzw. $x_2 = 4$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

schwindigkeitsfelder für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000 \div 12000$ sind gekennzeichnet durch drei Wirbelpaare. Im Fall $Ra = 3000$ variiert die horizontale Ausdehnung der einzelnen Wirbel sehr stark, während sich die Wirbel in der vertikalen Richtung über die gesamte Kanalhöhe erstrecken. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ bilden sich Wirbel ungefähr gleicher Größe. Es dominieren Wirbel, die annähernd eine konzentrische Form haben. Dies ist ein Indiz dafür, daß es sich hier um die sogenannte Trägheitskonvektion handelt. Mit weiterer Steigerung der Rayleigh-Zahl auf $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$ zerfallen die Wirbelpaare in kleinere ungeordnete Strukturen. Lediglich im Fall $Ra = 25000$ ist bei $x_1 \approx 7$ noch ein großräumiger Wirbel zu erkennen.

Aus der Detailvergrößerung der Geschwindigkeitsfelder für $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ in Abbildung 4.28 ergeben sich weitere Hinweise auf die Trägheitskonvektion. An den Stellen $x_1 \approx 4.1$ ($Ra = 3000$), $x_2 \approx 6.7$ ($Ra = 6000$) und $x_2 \approx 2.3$ ($Ra = 12000$) sind Wirbelpaare zu erkennen, die an der unteren bzw. oberen Wand Staupunkte bilden. An den gegenüberliegenden Wänden sind kleine Sekundärwirbel zu erkennen, die durch die großräumigen Wirbel angetrieben werden. Solche Sekundärwirbel wurden auch in direkten numerischen Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium gefunden [44].

Entsprechend zu Abschnitt 4.5.1 sollen dreidimensionale Analysemethoden näheren Aufschluß über die räumlichen Strukturen des Geschwindigkeitsfeldes geben. In den Abbildungen 4.29 bis 4.32 sind für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000 \div 25000$ Isoflächen der Vertikalgeschwindigkeit mit dem Wert $u_3 \approx 0$ dargestellt. Den Isoflächen farbig überlagert ist die lokale Temperatur. Die Isoflächen für $u_3 \approx 0$ trennen Bereiche positiver und negativer Vertikalgeschwindigkeiten. Die deutlich zu erkennenden großräumigen Strukturen kennzeichnen den räumlichen Verlauf der Achsen der einzelnen Wirbel. An der oberen Wand treten für alle durchgeführten Simulationen vereinzelt dünne schlauchförmige Isoflächen auf. Diese markieren die oben diskutierten Sekundärwirbel, die durch die großräumigen Wirbel angetrieben werden. Die Sekundärwirbel an der unteren Wand sind an vertikalen Aussparungen im unteren Bereich der großräumigen Isoflächen zu erkennen. In Entsprechung zu den Isoflächen für den Temperaturwert $T = 0.75$ (siehe Abbildungen 4.23 bis 4.25) zeigen auch die Isoflächen $u_3 \approx 0$ für $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ nahe der unteren Wand Speichenstrukturen (Abbildung 4.30 und 4.31). Diese verlaufen senkrecht zu den Achsen der großräumigen Wirbel. An der oberen Wand deuten sich Speichenstrukturen in Form von Aussparungen in den Isoflächen an. Für die Rayleigh-Zahl $Ra = 25000$ ist die Isofläche sehr stark untergliedert und es sind keine regelmäßigen großräumigen Strukturen mehr zu erkennen, wohl aber die Speichen (Abbildung 4.32).

Bereits aus der bisherigen Analyse ergeben sich deutliche Anzeichen dafür, daß auch in Quecksilber Mechanismen ähnlich der Trägheitskonvektion existieren. Detaillierte

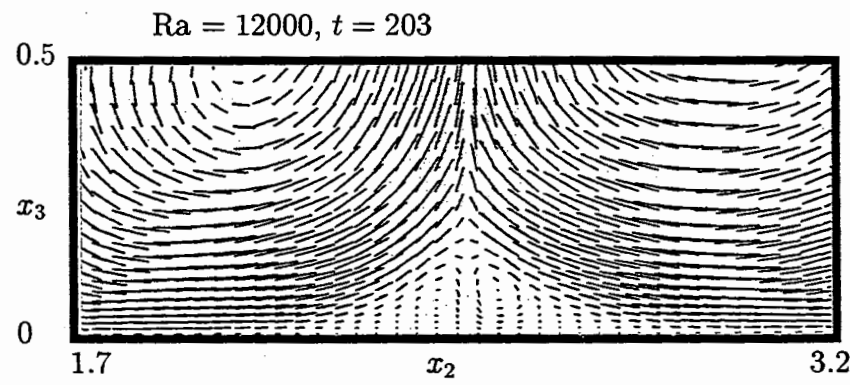
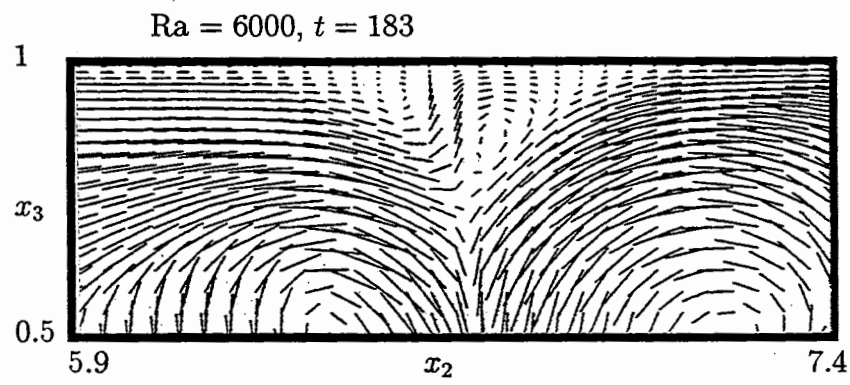
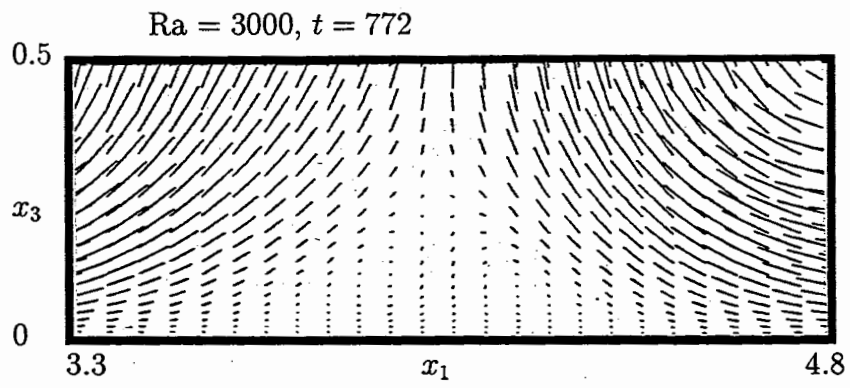


Abb. 4.28: Ausschnitte aus den Geschwindigkeitsfeldern für $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$.

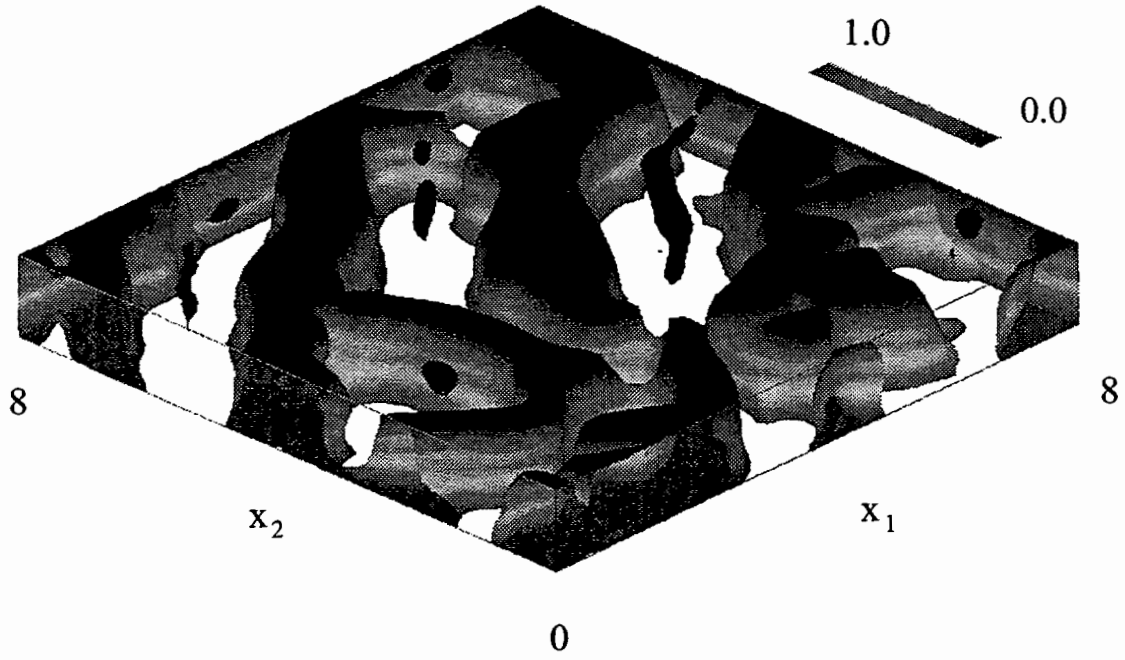


Abb. 4.29: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 3000$ ($t = 772$).

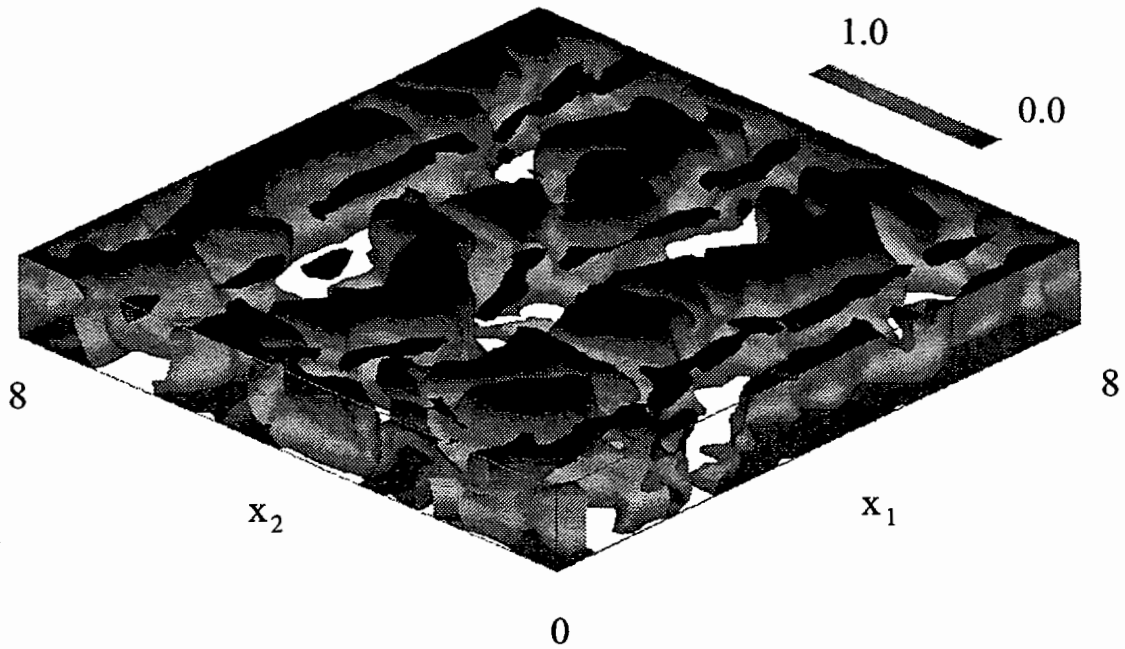


Abb. 4.30: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 6000$ ($t = 183$).

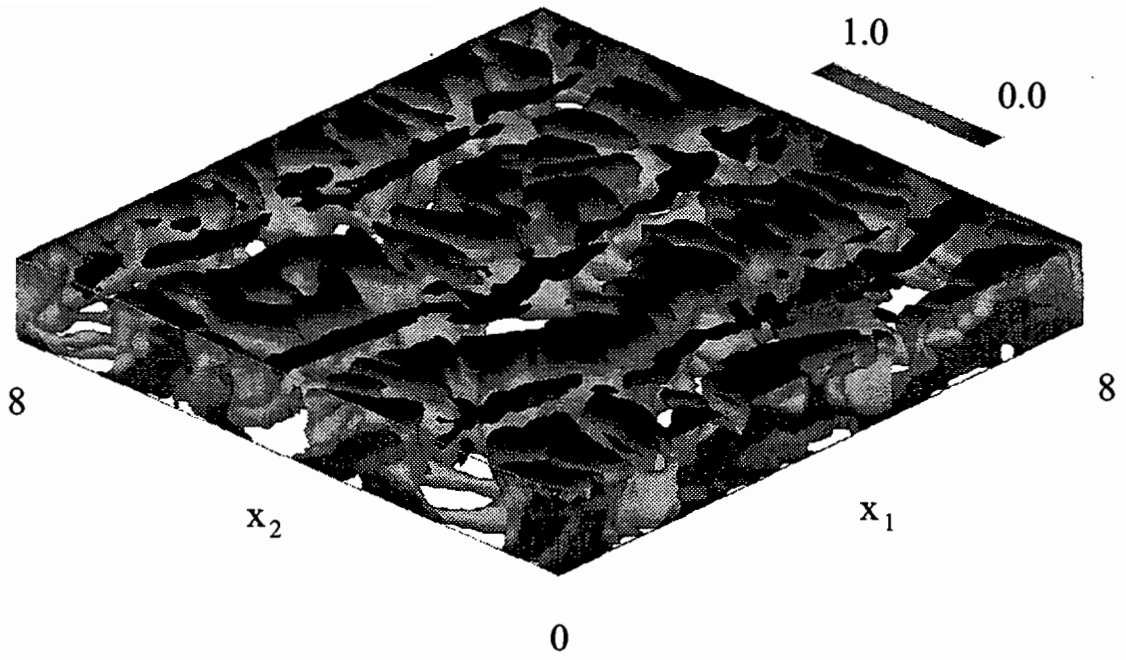


Abb. 4.31: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 12000$ ($t = 203$).

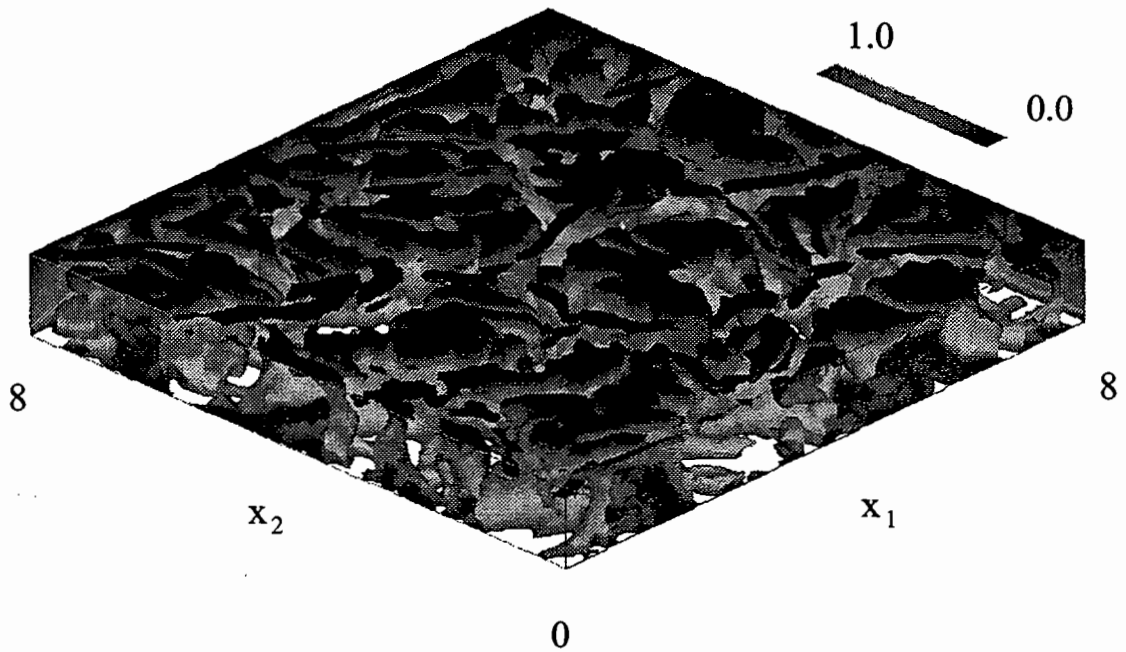


Abb. 4.32: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 25000$ ($t = 219$).

Informationen liefern lokale Profile der Vertikalgeschwindigkeit $u_3(x_1)$ bzw. $u_3(x_2)$, siehe Abbildung 4.33. Es zeigt sich, daß zu den betrachteten Zeitpunkten für $Ra = 3000$ (z.B. bei $x_1 \approx 4.9$), $Ra = 6000$ (z.B. bei $x_2 \approx 7.2$) und $Ra = 12000$ (z.B. bei $x_2 \approx 2.1$) Bereiche existieren, die durch einen linearen Geschwindigkeitsanstieg gekennzeichnet sind. Am Rande der Wirbel treten lokale Geschwindigkeitsmaxima auf, was ein weiteres Kennzeichen der Trägheitskonvektion ist. Der Geschwindigkeitsanstieg im Bereich $x_1 \approx 2$ für $Ra = 3000$ ist auf die starke Deformation der Wirbel in diesem Bereich zurückzuführen, vergleiche Abbildung 4.27. Bestätigt werden die Hinweise zur Trägheitskonvektion durch lokale Profile der Horizontalgeschwindigkeiten $u_1(x_3)$ bzw. $u_2(x_3)$ in Abbildung 4.34. Auch hier zeigt sich ein über weite Bereiche linearer Anstieg der Geschwindigkeit für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$. An den Wänden fällt die Geschwindigkeit jeweils auf Null ab.

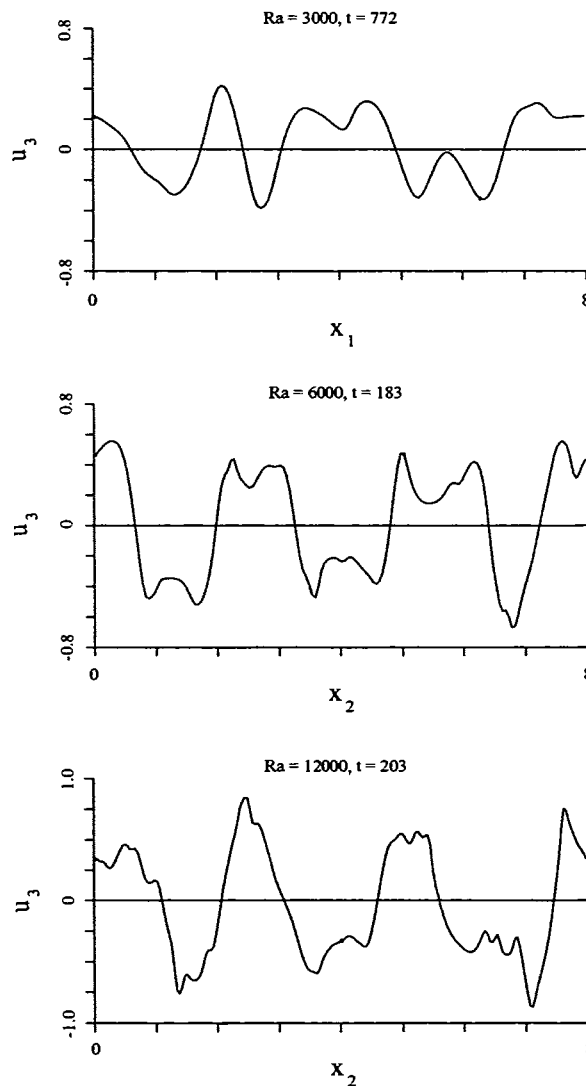


Abb. 4.33: Profile $u_3(x_1)$ bzw. $u_3(x_2)$ bei $x_3 \approx 0.5$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

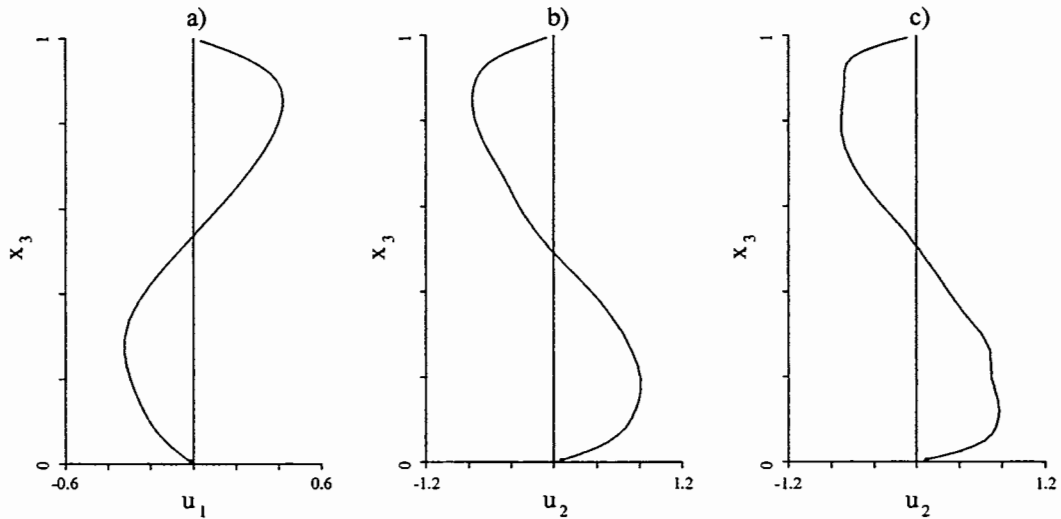


Abb. 4.34: Profile $u_1(x_3)$ bzw. $u_2(x_3)$: a) $Ra = 3000, t = 772, x_1 = 4.9$, b) $Ra = 6000, t = 183, x_2 = 7.2$, c) $Ra = 12000, t = 203, x_2 = 2.1$

4.5.3 Dynamik der Konvektion

In den Abschnitten 4.5.1 und 4.5.2 wurde die Konvektion bisher lediglich für ausgewählte Zeitpunkte analysiert. In diesem Abschnitt wird nun auf die zeitliche Entwicklung der Strömung eingegangen. Hierzu werden Momentanbilder des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes zu verschiedenen charakteristischen Zeitpunkten diskutiert. Zudem gibt die Analyse der verfilmten Simulationsergebnisse näheren Aufschluß über die auftretenden Phänomene.

In Abbildung 4.35 sind für $Ra = 3000$ Horizontalschnitte des Temperatur- und Vertikalschnitte des Geschwindigkeitsfeldes für zwei verschiedene Problemzeiten dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 772$ findet man ein Temperaturfeld, das bereichsweise eine deutliche Vorzugsrichtung aufweist. Das Geschwindigkeitsfeld ist charakterisiert durch drei Wirbelpaare, die einen hohen konvektiven Beitrag zum Wärmetransport leisten. Vergleiche hierzu auch Abbildung 4.37a), die den zeitlichen Verlauf der Nusselt-Zahl an unterer und oberer Wand darstellt. Für $t = 804$ ist die Vorzugsrichtung im Temperaturfeld im ursprünglichen Bereich verschwunden und taucht dafür im übrigen Bereich auf. An der geringeren Anzahl der Isothermen ist zu erkennen, daß die Temperaturunterschiede geringer sind und damit auch der konvektive Wärmetransport abgenommen hat (vergleiche Abb. 4.37a)). Im Geschwindigkeitsfeld sind zum Zeitpunkt $t = 804$ die ursprünglichen drei Wirbelpaare stark deformiert bzw. haben sich aufgelöst.

Ganz ähnliche Phänomene sind auch bei $Ra = 12000$ zu beobachten, siehe Abbildung 4.36. Zum Zeitpunkt $t = 155$ findet man ein dreidimensionales, unregelmäßiges Temperaturfeld. Bedingt dadurch stellt sich ein Geschwindigkeitsfeld ein, welches

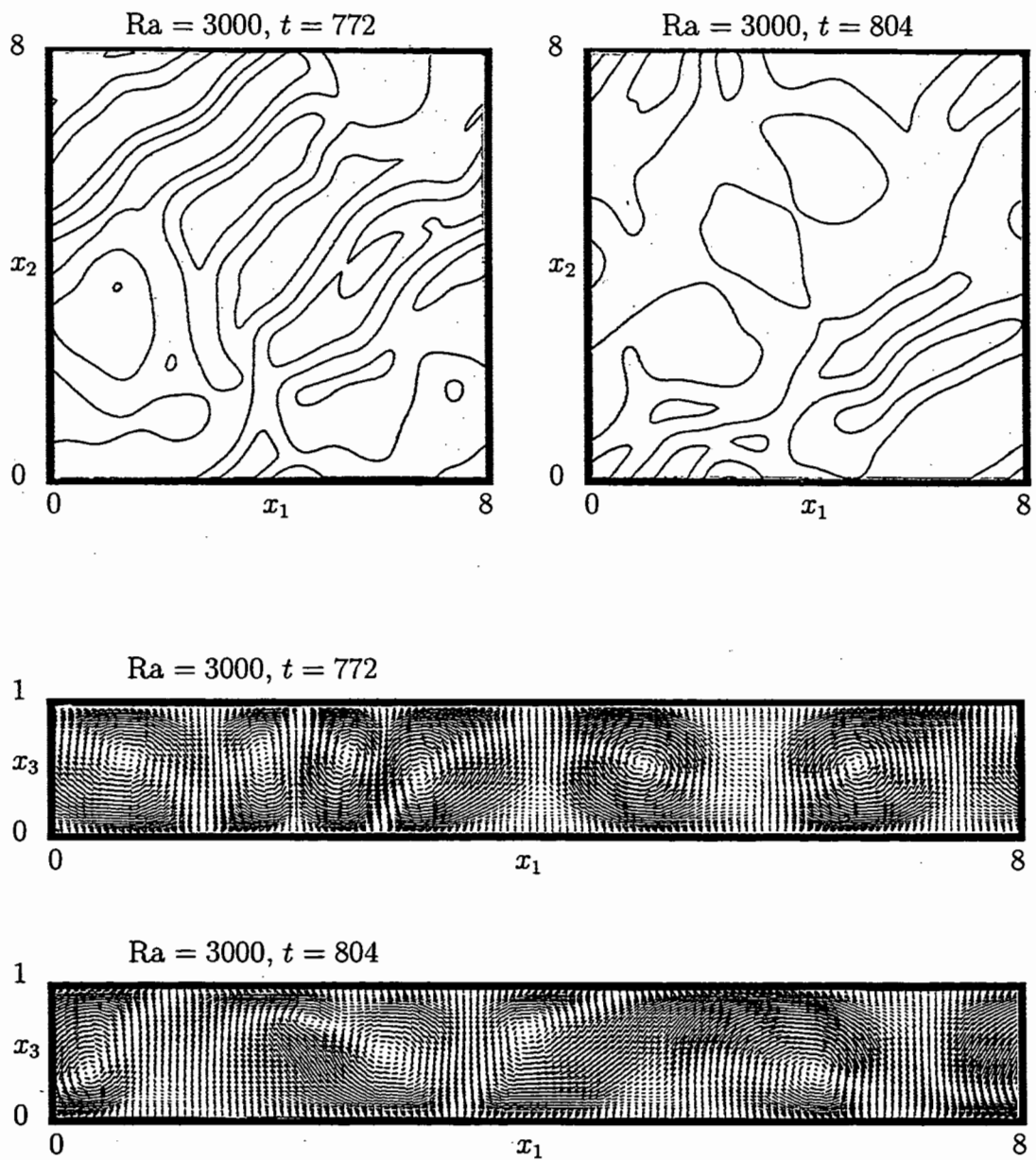


Abb. 4.35: Isolinien des Temperaturfeldes (Inkrement: 0.1) in der Ebene $x_3 = 0.5$ und Vektorplot des Geschwindigkeitsfeldes in der Ebene $x_2 = 4$ für $Ra = 3000$.

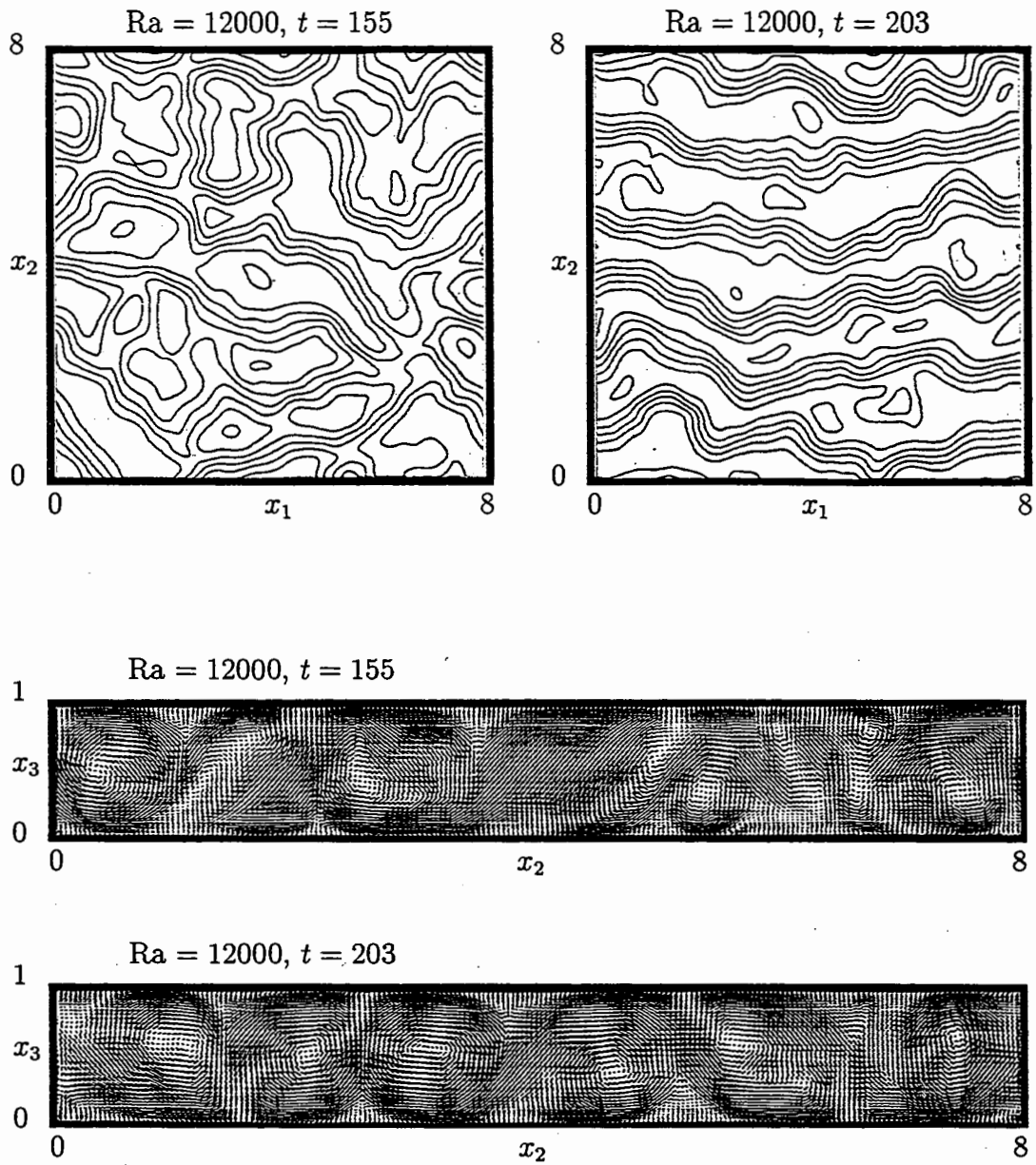


Abb. 4.36: Isolinien des Temperaturfeldes (Inkrement: 0.1) in der Ebene $x_3 = 0.5$ und Vektorplot des Geschwindigkeitsfeldes in der Ebene $x_1 = 4$ für $Ra = 12000$.

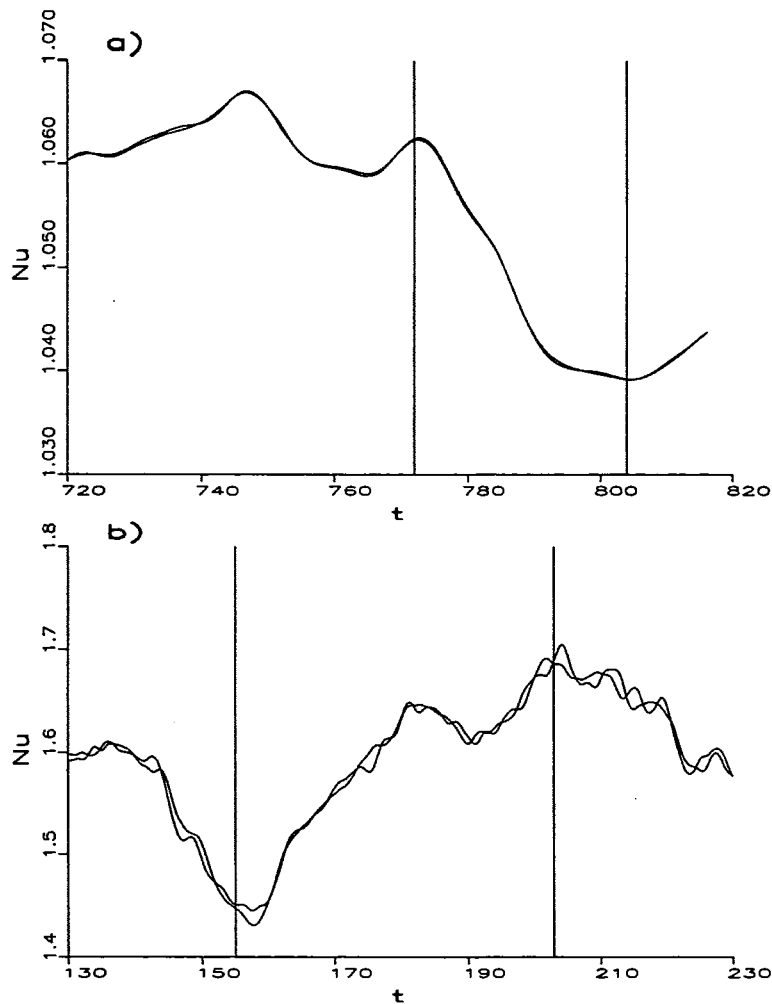


Abb. 4.37: Nusselt-Zahlen an der unteren und oberen Wand: a) $Ra = 3000$, b) $Ra = 12000$. Die markierten Zeitpunkte entsprechen denen in Abb. 4.35 bzw. 4.36.

durch zahlreiche Wirbel verschiedener Größe geprägt ist. Der zeitliche Verlauf der Nusselt-Zahl in Abbildung 4.37b) zeigt ein lokales Minimum. Zum Zeitpunkt $t = 203$ zeigt das Temperaturfeld eine deutliche Vorzugsrichtung. Es dominieren großräumige nahezu zweidimensionale Bandstrukturen. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt drei Wirbelpaare, die sich über die gesamte Kanalhöhe erstrecken. Diese Wirbel bringen einen hohen konvektiven Wärmetransport mit sich, was sich in einem lokalen Maximum der Nusselt-Zahl zum Zeitpunkt $t = 203$ niederschlägt (siehe Abbildung 4.36b)).

Näheren Aufschluß über das Wechselspiel zwischen geordneten und ungeordneten Strukturen in Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld gibt die Verfilmung der Simulationsergebnisse. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000 \div 25000$ werden jeweils in Kanalmitte vertikale bzw. horizontale Schnitte durch das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld gelegt. Zusätzlich werden für $Ra = 6000 \div 25000$ die Geschwindigkeitsfelder durch einen horizontalen Schnitt in Wandnähe ($x_3 \approx 0.16$) untersucht.

- $Ra = 3000$

- Temperatur in der Vertikalebene $x_2 = 4$ (entsprechend zu Abb. 4.21)
Es zeigt sich eine unregelmäßige Temperaturverteilung. Die Abweichung vom Wärmeleitzustand ist gering, d.h. der konvektive Wärmetransport spielt eine untergeordnete Rolle. Lediglich zu Zeiten, an denen großräumige Wirbel mit einer linearen Geschwindigkeitsverteilung beobachtet werden, nimmt der konvektive Anteil am Wärmetransport deutlich zu.
- Temperatur in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (entsprechend zu Abb. 4.20)
Das Temperaturfeld ist gekennzeichnet durch große Störungen des Wärmeleitzustandes. Vom Charakter her ähneln diese Störungen denen einer stehenden Welle. Es sind keine Axialgeschwindigkeiten entlang der Bandstrukturen zu erkennen. Vereinzelt brechen die großräumigen Bandstrukturen auseinander und rekombinieren zu späteren Zeiten.
- Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (vgl. Abb. 4.26)
Das Geschwindigkeitsfeld weist ebenfalls starke dreidimensionale Störungen der großräumigen Wirbel auf. Innerhalb dieser Strukturen ist eine starke Kopplung zwischen der Geschwindigkeit und der Temperatur zu erkennen, allerdings treten im Geschwindigkeitsfeld deutlich kleinere Strukturen auf. Bereiche mit Trägheitskonvektion sind gekennzeichnet durch lokale zweidimensionale Strukturen.

- $Ra = 6000$

- Temperatur in der Vertikalebene $x_1 = 4$ (entsprechend zu Abb. 4.21)
Die Abweichung des Temperaturprofils vom Wärmeleitzustand ist deutlich zu erkennen. Das Temperaturfeld läßt auf drei Wirbelpaare schließen, die einen zusätzlich konvektiven Anteil am Wärmetransport leisten. Bereiche lokaler Trägheitskonvektion unterscheiden sich durch starke Temperaturabweichungen im Vergleich zum reinen Wärmeleitprofil.
- Temperatur in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (entsprechend zu Abb. 4.20)
Abweichend vom Temperaturfeld für $Ra = 3000$ treten für $Ra = 6000$ großräumige geordnete Strukturen im Temperaturfeld auf. Diese werden gestört durch Störungen, die den Charakter einer stehenden Welle haben. Zwar unterliegen die Bandstrukturen starken Oszillationen senkrecht zur Wirbelachse, es sind aber keine Axialbewegungen zu erkennen. Die Trägheitskonvektion manifestiert sich in Bereichen mit lokal zweidimensionalen Strukturen und großen Temperaturgradienten.
- Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (vgl. Abb. 4.26)
Die großräumigen Bandstrukturen bleiben größtenteils erhalten. Die Be-

wegungen laufen, verglichen mit dem Temperaturfeld, auf deutlich kleineren Zeitskalen ab. Bereiche der Trägheitskonvektion sind durch lokale Geschwindigkeitsmaxima gekennzeichnet.

- Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.16$
In Wandnähe sind vereinzelt Speichenstrukturen zu erkennen. Diese laufen teilweise aufeinander zu und vereinigen sich. In Bereichen der Trägheitskonvektion sind keine Speichenstrukturen zu beobachten.

- $Ra = 12000$

- Temperatur in der Vertikalebene $x_1 = 4$ (entsprechend zu Abb. 4.21)
Wie bei $Ra = 6000$ läßt das Temperaturfeld auf drei Wirbelpaare schließen. Im Wandbereich zeichnen sich vereinzelt sehr dünne Grenzschichten ab. Der konvektive Wärmetransport wird durch die starken Abweichungen vom Wärmeleitzustand deutlich sichtbar.
- Temperatur in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (entsprechend zu Abb. 4.20)
Das Temperaturfeld ist geprägt durch stark oszillierende Bandstrukturen, die vereinzelt auseinanderbrechen und wieder zusammenwachsen. Bereiche, die durch Trägheitskonvektion beeinflusst werden, sind gekennzeichnet durch lokal zweidimensionale Strukturen.
- Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (vgl. Abb. 4.26)
Das Geschwindigkeitsfeld verändert sich deutlich schneller als das Temperaturfeld. Es besteht ein dauernder Wechsel zwischen zwei- und dreidimensionalen Strukturen. Trägheitskonvektion ist wiederum gekennzeichnet durch lokal zweidimensionale Bereiche, innerhalb derer die kleinskaligen Strukturen beinahe verschwinden.
- Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.16$
In Wandnähe bilden sich Knoten, die durch Speichen verbunden sind. Im Gegensatz zu den Speichen, die sich ständig bewegen und mit anderen Speichen verschmelzen oder zerfallen, sind die Knoten über den verfilmten Zeitraum nahezu ortsfest.

- $Ra = 25000$

- Temperatur in der Vertikalebene $x_2 = 4$ (entsprechend zu Abb. 4.21)
Für $Ra = 25000$ sind nur noch zeitweise regelmäßige Strukturen erkennbar. Die Auslenkungen im Temperaturfeld lassen darauf schließen, daß ein drittes Wirbelpaar nur über sehr kurze Zeitintervalle auftritt, dann aber sehr schnell zerfällt oder mit einem anderen Wirbelpaar verschmilzt. Der konvektive Wärmetransport führt dazu, daß das Temperaturprofil durch lokale dünne Grenzschichten gekennzeichnet ist.

- Temperatur in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (entsprechend zu Abb. 4.20)
Im Temperaturfeld sind noch grobe Bandstrukturen zu erkennen, die aber permanent zerfallen und wieder zusammenwachsen. Wiederum sind Knoten zu beobachten, die zeitlich nahezu ortsfest sind.
- Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ (vgl. Abb. 4.26)
Die Strukturen im Geschwindigkeitsfeld sind sehr kleinskalig. Es treten große Vertikalgeschwindigkeiten auf, die lokal einen sehr hohen konvektiven Wärmetransport bedeuten.
- Vertikalgeschwindigkeit in der Ebene $x_3 = 0.16$
In Wandnähe sind Knoten zu erkennen, die durch Speichen verbunden sind. Innerhalb der Speichen herrschen hohe Vertikalgeschwindigkeiten. Wie bei $Ra = 12000$ behalten die Knoten ihren Ort bei, während die Speichen permanenten Veränderungen unterworfen sind.

Kapitel 5

Diskussion der Ergebnisse und Vergleich mit der Literatur

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Ergebnisse diskutiert und durch Vergleiche mit Ergebnissen in der Literatur die neuen Erkenntnisse zur Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber dargestellt werden.

5.1 Einfluß der Periodenlänge

Ein wichtiger Aspekt bei der direkten numerischen Simulation der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist die richtige Wahl der Periodenlängen X_1 und X_2 . In der vorliegenden Arbeit wurde der Einfluß der Periodenlängen auf das sich einstellende Konvektionsmuster für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen in Quecksilber untersucht. Bei den in der Literatur zu findenden numerischen Simulationen wird für die Periodenlänge in einer der horizontalen Richtungen üblicherweise die zur kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_c = 1708$ gehörende kritische Wellenlänge λ_c verwendet, d.h. $X_1 = \lambda_c = 2.02$. Dadurch wird von Anfang an eine feste Wellenlänge vorgegeben und es besteht keine Möglichkeit, daß sich in der Simulation eine auch nur geringfügig andere Wellenlänge einstellen kann. Aus Experimenten von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft ist bekannt, daß die Wellenlängen mit wachsender Rayleigh-Zahl ansteigen [28]. Die Vorgehensweise, auch für überkritische Rayleigh-Zahlen die Wellenlänge gemäß λ_c festzulegen, erscheint damit auch nach den Ergebnissen aus [19] äußerst fragwürdig.

In der vorliegenden Arbeit wurden für $Ra = 2000$ in einer Simulation die Periodenlängen über λ_c festgelegt und durch Vergleich mit einer Simulation in einem wesentlich größeren Rechengebiet so der Einfluß der Periodenlängen auf das sich einstellende Konvektionsmuster untersucht. Zum Vergleich dienen darüber hinaus direkte numerische Simulationen von Meneguzzi et al. [32] (siehe auch [42]) und Thual [43] für identische Kennzahlen, d.h. $Ra = 2000$ und $Pr = 0.025$.

Meneguzzi et al. [32] benutzen ein Rechengebiet mit den Periodenlängen $X_1 = 2.02$ und $X_2 = 2.51$. Sie finden Konvektion in Form einer Wanderwelle, d.h. Konvektionswirbel, die senkrecht zur Wirbelachse ausgelenkt sind und sich in Achsenrichtung durch das Rechengebiet bewegen. Für die Nusselt-Zahl ermitteln sie Werte im Bereich $Nu = 1.027 \div 1.03$. Innerhalb der gerechneten Problemzeit erreicht die Simulation keine asymptotische Lösung. Die Autoren weisen darauf hin, daß für eine nähere Analyse wesentlich längere Simulationszeiten notwendig sind.

Thual [43] untersucht mit Hilfe verschiedener Computercodes Rayleigh-Bénard-Konvektion für $Pr = 0.025$ in einem Rechengebiet mit $X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.86$ für verschiedene Rayleigh-Zahlen bis hin zu $Ra = 128000$. Er findet, je nach verwendetem Rechenprogramm, für $Ra = 2000$ entweder Konvektion in Form von Wanderwellen oder Konvektion in Form von stehenden Wellen, also Konvektionswalzen, die Oszillationen senkrecht zur Wirbelachse ausführen, aber keine Geschwindigkeitskomponente in axialer Richtung besitzen. Die Nusselt-Zahlen für $Ra = 2000$ betragen je nach Art der Konvektion $Nu = 1.027$ für den Typ Wanderwelle bzw. $Nu = 1.028 \div 1.034$ für den Typ stehende Welle. Aussagen über die Stabilität der beobachteten Konvektionsmuster für $t \rightarrow \infty$ werden nicht gemacht. Es ist aber zu erwarten, daß für alle durchgeführten Simulationen keine asymptotischen Lösungen erreicht wurden. Für hohe Rayleigh-Zahlen im Bereich $4000 \leq Ra \leq 128000$ ermittelt Thual [43] den Zusammenhang

$$Nu = 1 + Pr^2 \cdot 3.37(Ra - Ra_c)^{0.584}. \quad (5.1)$$

Die beobachteten Konvektionsformen von Meneguzzi et al. [32], Thual [43] und die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Konvektionsformen sind in Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Für die Simulationen in einem kleinen Rechengebiet ist stets eine eindeutige Konvektionsform (d.h. entweder Wanderwelle oder stehende Welle) identifizierbar. Für das große Rechengebiet $X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$ ist dies dagegen nicht der Fall. Hier handelt es sich um eine amplitudenmodulierte Wanderwellenkonvektion, also im Prinzip um eine Überlagerung der Konvektionsarten stehende Welle und Wanderwelle.

Numerische Simulationen der Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft von Lipps [31] zeigen, daß das sich einstellende Konvektionsmuster stark von den über die Anfangsbedingungen aufgeprägten Störungen abhängt. Ebenfalls für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft zeigt Grötzbach [19], daß im Übergangsbereich zu turbulenter Strömung das Konvektionsmuster bei kleinen Periodenlängen von deren Größe abhängt. Dies wird durch die vorliegenden Untersuchungen für Quecksilber bestätigt. Allerdings ist bei allen in Tabelle 5.1 aufgeführten Simulationen noch kein asymptotischer Zustand erreicht. Für schwach überkritische Rayleigh-Zahlen $(Ra - Ra_c)/Ra_c < 1$ wären hierfür sehr große Simulationszeiten notwendig. Inwieweit die beobachteten Konvektionsmuster für $t \rightarrow \infty$ stabil sind, kann damit nicht beurteilt werden.

Autor	X_1	X_2	Konvektionsmuster
Meneguzzi [32]	2.02	2.51	Wanderwelle
Thual [43]	2.02	2.86	entweder Wanderwelle oder stehende Welle
vorliegende Arbeit	2.02	2.51	stehende Welle
vorliegende Arbeit	8.06	7.54	amplitudenmodulierte Wanderwelle (Überlagerung von Wander- und stehender Welle)

Tabelle 5.1: Konvektionsmuster für verschiedene Periodenlängen, $Ra = 2000$.

Autor	X_1	X_2	Nusselt-Zahl	Wellenlänge λ
Meneguzzi [32]	2.02	2.51	$1.027 \div 1.030$	2.02
Thual [43]	2.02	2.86	$1.027 \div 1.034$	2.02
vorliegende Arbeit	2.02	2.51	$1.028 \div 1.032$	2.02
vorliegende Arbeit	8.06	7.54	$1.011 \div 1.012$	2.4

Tabelle 5.2: Nusselt-Zahl für verschiedene Periodenlängen, $Ra = 2000$.

Die Nusselt-Zahlen, die Meneguzzi et al. [32] und Thual [43] bei ihren direkten numerischen Simulationen ermittelt haben, werden in Tabelle 5.2 mit denen der vorliegenden Arbeit verglichen. Deutlich ist der Einfluß der Periodenlängen auf die Wellenlänge der Konvektionsrollen und auf die konvektive Wärmeübertragung zu erkennen. Für das Rechengebiet $X_1 = 2.02$, $X_2 \approx 2.5$ wird durch die Wahl der Periodenlänge dem Konvektionsmuster die kritische Wellenlänge $\lambda_c = 2.02$ entsprechend der kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_c = 1708$ aufgeprägt. Die Simulation für das große Rechengebiet $X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$, bei dem keine Wellenlänge aufgeprägt wird, zeigt aber, daß sich bereits bei einer Rayleigh-Zahl $Ra = 2000$ eine Wellenlänge $\lambda \neq \lambda_c$ einstellt. Koschmieder [28] weist darauf hin, daß in Experimenten zur Rayleigh-Bénard-Konvektion nur stabile Wellenlängen $\lambda > \lambda_c$ beobachtet werden. Somit zeigt sich, daß die Wahl der Periodenlängen X_1 und X_2 einen entscheidenden Einfluß auf die entstehende Strömung hat. Ergebnisse von Grötzbach [18] [19], Lipps [31] und Clever & Busse [8] werden somit auch für Flüssigmetalle bestätigt. Simulationen mit zu kleinen Periodenlängen führen auf zu kleine Wellenlängen λ . Bedingt dadurch wird die Wechselwirkung des Fluids mit der Wand, d.h. Reibungseinflüsse innerhalb der viskosen Grenzschicht, nicht korrekt abgebildet. Es treten zu hohe Geschwindigkeiten auf und als Folge davon wird der konvektive Wärmetransport überschätzt, vergleiche Tabelle 5.2.

Auch die von Thual [43] ermittelte Beziehung zwischen Nusselt- und Rayleigh-Zahl in Gleichung 5.1 verdeutlicht, daß numerische Simulationen mit kleinen Periodenlängen X_1 und X_2 auf unrealistische Ergebnisse führen. Für die Nusselt-Zahl wird von Thual für Rayleigh-Zahlen $Ra = 4000 \div 128000$ eine Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl

$Nu \sim Pr^2$ gefunden. Aus Arbeiten von Schlüter et al. [38] zeigt sich jedoch, daß der konvektive Wärmetransport für Fluide kleiner Prandtl-Zahl nur in unmittelbarer Nähe der kritischen Rayleigh-Zahl Ra_c proportional zum Quadrat der Prandtl-Zahl verläuft. Auch der Exponent 0.584, den Thual ermittelt, ist im Vergleich zu experimentell ermittelten Werten für $Ra/Ra_c \gg 1$ deutlich zu hoch. Aus Experimenten von Globe & Dropkin [15] und Rossby [36] ergeben sich für hohe Rayleigh-Zahlen Exponenten zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$.

5.2 Trägheitskonvektion in Quecksilber

In diesem Abschnitt soll eine Zusammenfassung der Phänomene zur Trägheitskonvektion in Quecksilber gegeben werden. Anschließend soll eine Bewertung anhand der Ergebnisse anderer Autoren vorgenommen werden.

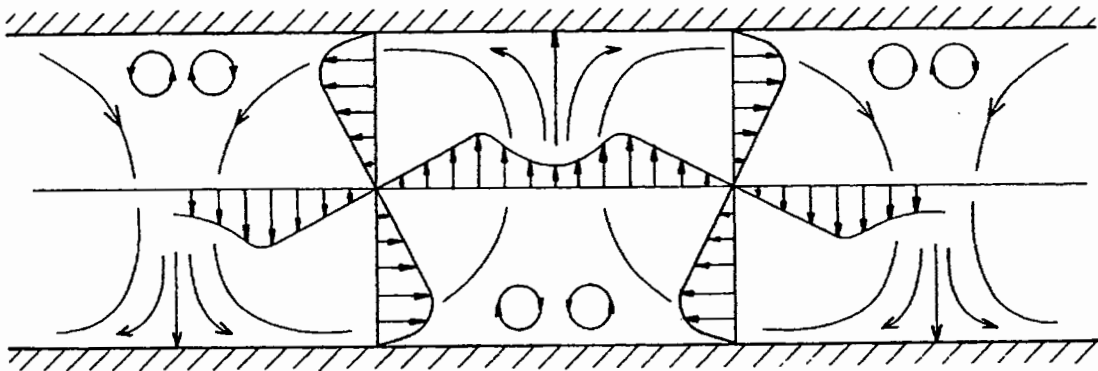


Abb. 5.1: Schematische Darstellung der Trägheitskonvektion nach [44].

Die Analyse der Simulationsergebnisse hat deutliche Hinweise darauf gegeben, daß für die Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber Trägheitskonvektion existiert. Für die Rayleigh-Zahlen im Bereich $Ra = 3000 \div 12000$ treten lokal und zeitlich begrenzt Starrkörperwirbel auf, die einem Wechselspiel zwischen geordneten und ungeordneten Strukturen unterliegen. Diese Wirbel sind bereichsweise zweidimensionale Strukturen und erstrecken sich über die gesamte Kanalhöhe. Der Querschnitt eines Wirbels hat dabei eine leicht elliptische Form. Die Wirbel treten paarweise auf, wobei die Wirbel eines Paares gegensinnig rotieren. In Wandnähe bilden sich im Anströmbereich eines Wirbelpaares Staulinien. Diesen gegenüber liegen Bereiche mit sehr kleinen Geschwindigkeiten. Hier bilden sich, angetrieben durch die großräumigen Wirbel, Sekundärwirbel aus. Abbildung 5.1 zeigt in schematischer Darstellung diese typischen Wirbelstrukturen der Trägheitskonvektion. Der Kernbereich der einzelnen Wirbel, in dem das Fluid wie ein Starrkörper rotiert, beträgt ca. 50% der Schichthöhe. Die

Sekundärwirbel rotieren im Vergleich zu den großen Wirbeln gegensinnig. Die Abmessung der Sekundärwirbel und ihre Rotationsgeschwindigkeit sind um etwa eine Größenordnung geringer als die der antreibenden Wirbel. Hinsichtlich des konvektiven Wärmetransports ist die Trägheitskonvektion besonders effektiv, da Reibungseinflüsse, die die Konvektionsbewegung behindern, innerhalb der Starrkörperwirbel verschwinden und auf die viskosen Grenzschichten in Wandnähe beschränkt sind.

Die Verfilmung der Simulationsergebnisse hat gezeigt, daß Trägheitskonvektion in Quecksilber lokal und über begrenzte Zeitintervalle auftritt. Gekoppelt ist sie an Bereiche, in denen das Temperaturfeld weitgehend zweidimensional ist. In der dynamischen Entwicklung der Konvektion zerfällt diese Vorzugsrichtung und es entsteht ein stark dreidimensional geprägtes Temperaturfeld. Gleichzeitig bildet sich in Bereichen mit vormals sehr unregelmäßigen Strukturen eine Vorzugsrichtung im Temperaturfeld heraus, so daß sich hier wieder Starrkörperwirbel bilden können, die zu einer Trägheitskonvektion führen. Eine anschauliche Erklärung über das Wechselspiel zweidimensionale Strukturen → Trägheitskonvektion → Zerfall in dreidimensionale Strukturen → Rekombination zu erneut lokal zweidimensionalen Strukturen ist in der Arbeit von Wörner [44] zu finden. Er führt folgendes Gedankenexperiment durch:

Die dimensionslosen Gleichungen 2.18, 2.19 und 2.20 bilden ein gekoppeltes System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, deren Lösungen sich in Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld widerspiegeln. In den Diffusionstermen der Impuls- und Energiegleichung 2.19 und 2.20 treten die dimensionslosen Kennzahlen $\frac{1}{\sqrt{Gr}}$ und $\frac{1}{Pr\sqrt{Gr}}$ als 'äußere Parameter' auf. Sie bestimmen die Gewichtung der diffusiven Terme innerhalb der Gleichungen. Der diffusive Term der Energiegleichung ist um den Faktor $1/Pr$ größer als der diffusive Term der Impulsgleichung, im Falle von Quecksilber ($Pr = 0.025$) um den Faktor 40. Molekulare Wärmeleitung ist deshalb für das Temperaturfeld von wesentlich größerer Bedeutung als die viskose Reibung für das Geschwindigkeitsfeld. Die nichtlinearen Terme der Energiegleichung haben andererseits einen geringeren Einfluß als die nichtlinearen Terme der Impulsgleichung. Dominieren im Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld molekulare Transportvorgänge, stellen sich zweidimensionale Lösungen ein, z.B. nach Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl in Form von zweidimensionalen Konvektionsrollen. Mit steigenden Rayleigh-Zahlen entwickeln sich zunehmend größere Geschwindigkeiten. Die nichtlinearen Terme gewinnen an Bedeutung und führen zu Instabilitäten. Für große Rayleigh-Zahlen verlieren die diffusiven Terme immer mehr an Gewichtung. Die nichtlinearen konvektiven Terme der Impuls- und Energiegleichung führen letztendlich zum Übergang von laminarer zu turbulenter Konvektion.

Bedingt durch die kleinen Prandtl-Zahlen der Flüssigmetalle existiert nun ein Bereich, innerhalb dem die nichtlinearen Terme der Energiegleichung noch von untergeordneter Bedeutung sind, und die nichtlinearen Terme der Impulsgleichung schon dominieren. Im Temperaturfeld stellt sich ein schwach gestörter zweidimensionaler Zustand ein, während im Geschwindigkeitsfeld starke dreidimensionale Störungen zu beobachten sind. Die Kopplung von Impuls- und Energiegleichung führt zu einer wechselseitigen Beeinflussung von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld. Das Auftreten der Trägheitskonvektion innerhalb dreidimensionaler zeitabhängiger Strukturen kann somit durch die unterschiedliche Gewichtung der nichtlinearen Terme der Impuls- und Energiegleichung erklärt werden.

Ausgehend von einem dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeld geringer kinetischer Energie stellt sich wegen der untergeordneten Rolle der nichtlinearen Terme der Energiegleichung ein annähernd zweidimensionales Temperaturfeld ein. Durch die Rückkopplung des Temperaturfeldes auf das Geschwindigkeitsfeld treten auch hier geordnete Strukturen auf. Die wechselseitige Beeinflussung von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld führt zur Verstärkung des zweidimensionalen Charakters beider Felder, die nichtlinearen Einflüsse der konvektiven Terme in der Impuls- und Energiegleichung werden minimal. Dies ist die Voraussetzung zur Ausbildung von Starrkörperwirbeln, die zur Trägheitskonvektion innerhalb des Fluids führen. Durch die verstärkte Konvektionsbewegung werden aber auch die nichtlinearen Terme verstärkt und das Strömungsmuster wird zunehmend anfälliger für Störungen. Letztendlich treten Instabilitäten auf, die zum Zusammenbruch der Trägheitskonvektion führen. Es stellt sich ein dreidimensionales stark verwirbeltes Geschwindigkeitsfeld ein, das sich durch die Kopplung von Impuls- und Energiegleichung auch im Temperaturfeld auswirkt. Durch die starke Dissipation kinetischer Energie reduziert sich der konvektive Wärmetransport und es stellt sich wieder ein dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld geringer kinetischer Energie ein. Der oben beschriebene Vorgang beginnt von neuem.

Dieses Gedankenexperiment erklärt, warum Trägheitskonvektion bei den durchgeführten Simulationen nur lokal und zeitlich beschränkt zu beobachten ist.

Direkte numerische Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium ($Pr = 0.006$) haben gezeigt, daß für $Ra = 3000$ die Trägheitskonvektion die vorherrschende Konvektionsform ist [44]. Für $Ra = 6000$, $Ra = 12000$ und $Ra = 24000$ tritt die Trägheitskonvektion dagegen nur lokal und zeitlich begrenzt [22] [23], und für $Ra = 50000$ überhaupt nicht mehr auf [45]. Die in dieser Arbeit durchgeführten direkten numerischen Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber

($Pr = 0.025$) haben ergeben, daß die Trägheitskonvektion in diesem Fluid bereits bei $Ra = 3000$ nur lokal und zeitlich beschränkt auftritt. Dies gilt ebenso für die beiden nächsthöheren untersuchten Rayleigh-Zahlen $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$ sind in Quecksilber keinerlei Anzeichen einer Trägheitskonvektion zu erkennen. Die vergleichende Bewertung dieser Ergebnisse für Natrium und Quecksilber zeigt, daß der Bereich der Rayleigh-Zahl, in dem Trägheitskonvektion möglich ist, von der Prandtl-Zahl abhängt. Für eine bestimmte Rayleigh-Zahl, z.B. $Ra = 3000$, tritt die Trägheitskonvektion mit steigender Prandtl-Zahl seltener auf und ist offensichtlich anfälliger gegenüber dreidimensionalen Instabilitäten. Mit abnehmender Prandtl-Zahl weitet sich der Rayleigh-Zahlen Bereich, innerhalb dessen Trägheitskonvektion möglich ist, auf. Der untere Grenzwert verschiebt sich zu kleineren Rayleigh-Zahlen, der obere zu höheren Rayleigh-Zahlen.

Eine über längere Zeitintervalle stabile Trägheitskonvektion, wie sie in Natrium für $Ra = 3000$ gefunden wurde, hat sich in den Simulationen für Quecksilber nicht gezeigt. Für $Ra = 2000$ dominiert Konvektion vom Typ Wanderwelle. Für $Ra = 3000$ tritt die Trägheitskonvektion bereits nur bereichsweise und über bestimmte Zeitintervalle auf. Ausgebildete und über längere Zeitbereiche stabile Trägheitskonvektion ist für Quecksilber daher für Rayleigh-Zahlen im Bereich $2000 < Ra < 3000$ zu erwarten.

Interessant ist ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen von Chiffaudel et al. [6]. Die Autoren führen Experimente in Quecksilber für Prandtl-Zahlen im Bereich $0.02 \leq Pr \leq 0.04$ in einem geschlossenen quaderförmigen Behälter mit Höhe 8mm und Seitenlänge 50mm bzw. 34mm durch (Aspektverhältnis $\Gamma_1 = 6.25, \Gamma_2 = 4.25$). Als Korrosionsschutz sind die als obere und untere Wand dienenden Kupferplatten mit einem dünnen Farbanstrich überzogen. Über die Dicke dieser Farbschicht liegt ein gewisser Temperaturabfall vor, der jedoch nicht genau bestimmt werden kann. Während die Temperaturdifferenz zwischen beheizter unterer und gekühlter oberer Kupferplatte genau bekannt ist, ist somit die tatsächlich über die Schichthöhe wirkende Temperaturdifferenz mit Unsicherheiten behaftet. Aus diesem Grund wird in [6] für die Berechnung der Rayleigh-Zahl die Temperaturdifferenz zwischen den Kupferplatten herangezogen, dafür werden aber für die Rayleigh-Zahl keine absoluten Werte angegeben, sondern die Ergebnisse werden stets auf die für diese Bedingungen kritische Rayleigh-Zahl Ra_c bezogen. Basierend auf Abschätzungen für den Temperaturabfall über der Farbschicht liegt der Wert von Ra_c im Bereich $1700 \div 1900$ [14]. Aus dem Verlauf der gemessenen Nusselt-Zahl über der Rayleigh-Zahl schließen Chiffaudel et al. [6], daß für Rayleigh-Zahlen im Bereich $1.06 < Ra/Ra_c < 1.4$ stationäre Trägheitskonvektion vorliegt. Da allerdings keine Temperatur- oder Geschwindigkeitsmessungen in der Konvektionszelle vorgenommen werden, bleibt offen, ob tatsächlich die für die Trägheitskonvektion charakteristischen großräumigen, wie Starrkörper rotierenden Wirbel vorliegen. Für Rayleigh-Zahlen größer $1.4 \cdot Ra_c$ beob-

achten sie zeitabhängige Konvektion.

Zum Vergleich mit den vorliegenden Ergebnissen sollen nun die bezogenen Schwellwerte aus [6] auf Absolutwerte der Rayleigh-Zahl umgerechnet werden. Mit $Ra_c = 1708$ ($Ra_c = 1900$) ergibt sich für den Beginn der Trägheitskonvektion $Ra_{II} = 1.06 \cdot Ra_c = 1802$ ($Ra_{II} = 2014$) und für das Einsetzen zeitabhängiger Konvektion $Ra_{III} = 1.4 \cdot Ra_c = 2380$ ($Ra_{III} = 2660$). Dieser relative hohe Wert für den Beginn von zeitabhängiger Konvektion deutet darauf hin, daß im Experiment offensichtlich die Seitenwände des Behälters das Einsetzen von Wanderwellenkonvektion bzw. Konvektion in Form stehender Wellen, die man in den Simulationen mit periodischen Randbedingungen bereits bei $Ra = 2000$ findet, sehr stark behindern. Diese Unterdrückung der besagten dreidimensionalen, zeitabhängigen Konvektionsmuster führt dazu, daß die an zweidimensionale Bereiche im Temperaturfeld gekoppelte Trägheitskonvektion im Experiment [6] bereits bei niedrigeren Werten Ra_{II} einsetzt, als dies in Simulationen mit periodischen Randbedingungen der Fall ist. Insofern stellen die experimentellen Untersuchungen von Chiffaudel et al. [6] keinen Widerspruch zu den Ergebnissen der vorliegenden direkten numerischen Simulationen dar, sondern können sogar als Bestätigung gewertet werden.

Numerische Untersuchungen von Clever & Busse [10] [11], Meneguzzi et al. [32] und Thual [43] lieferten keine Hinweise auf die Existenz der Trägheitskonvektion in dreidimensionaler, zeitabhängiger Strömung. Wörner [44] führt dies auf die zu klein gewählten Periodenlängen X_1 und X_2 zurück. Damit verfügt in diesen Simulationen die Strömung wegen der starken räumlichen Kopplung der über sehr kurze Distanzen wirkenden periodischen Randbedingungen nicht über ausreichend Freiheitsgrade, die für den Übergang zwischen verschiedenen Strömungsmustern notwendig sind. Dieses Ergebnis wird durch die vorliegenden Untersuchungen für Quecksilber bestätigt. Zur numerischen Simulation der Trägheitskonvektion sind auch in Quecksilber ausreichend große Periodenlängen notwendig. Ebenso ist die Vorgabe eines ruhenden Fluids und randomen Temperaturstörungen als Anfangsbedingung wesentlich, auch wenn lange Rechenzeiten zum Durchlaufen der Anfangs-Transiente notwendig sind. Der damit verbundene numerische Aufwand läßt sich aber durch anfängliche Nutzung groberer Gitter und anschließender sukzessiver Gitterverfeinerung minimieren.

Nicht beantworten läßt sich mit den vorliegenden Untersuchungen die Frage, inwieweit sich asymptotische Lösungen auch in Bezug auf die Trägheitskonvektion einstellen. Dies betrifft insbesondere die Simulationen für $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$. Die Rechnungen beschränken sich im Rahmen einer sinnvollen Kostenbegrenzung auf kleine Problemzeiten. Es erscheint zwar unwahrscheinlich, aber dennoch möglich, daß für große Problemzeiten andere Strömungszustände auftreten.

5.3 Zustandsdiagramm der Trägheitskonvektion

Die Analyse der Simulationsergebnisse für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber hat gezeigt, daß die Trägheitskonvektion für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ auftritt, nicht jedoch für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 2000$, $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$. Direkte numerische Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium haben ergeben, daß die Trägheitskonvektion in diesem Fluid für $Ra = 3000$, $Ra = 6000$, $Ra = 12000$ und $Ra = 24000$ auftritt [44], nicht mehr jedoch bei $Ra = 50000$ [45]. In diesem Abschnitt soll nun eine Einordnung dieser Beobachtungen in einen übergeordneten Zusammenhang erfolgen und eine Art Zustandsdiagramm für den Existenzbereich der Trägheitskonvektion hergeleitet werden.

Für dieses Zustandsdiagramm wird eine doppelt-logarithmische Darstellungsweise gewählt, in der die beiden relevanten dimensionslosen Kenngrößen Grashof-Zahl und Boussinesq-Zahl als Ordinate und Abszisse dienen, siehe Abbildung 5.2. Nach Beziehung 5.2 repräsentieren in diesem Diagramm Geraden mit der Steigung 1 Linien konstanter Prandtl-Zahl, also ein bestimmtes Fluid. Fluide mit unterschiedlicher Prandtl-Zahl erscheinen als parallel-verschobene Geraden. In Abbildung 5.2 sind die Geraden eingezeichnet, die den Fluiden Natrium ($Pr = 0.006$), Quecksilber ($Pr = 0.025$) und Luft ($Pr = 0.71$) entsprechen. Aus der Identität $Ra^2 = Gr \cdot Bo$ folgt, daß Linien konstanter Rayleigh-Zahl in dem Diagramm durch Geraden mit Steigung -1 repräsentiert werden. Unterschiedliche Rayleigh-Zahlen erscheinen wieder als parallel-verschobene Geraden. In Abbildung 5.2 ist lediglich die der kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_c = 1708$ entsprechende Gerade eingezeichnet. Die Abbildung gibt für die Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber und Natrium [44][45] an, bei welchen Kennzahlen Trägheitskonvektion gefunden wurde (Markierung: offener Kreis) bzw. nicht gefunden wurde (Markierung: Stern). Zusätzlich sind Simulationen für Luft bei $Ra = 381000$ und $Ra = 630000$ aufgenommen [18] [21] [44].

Abbildung 5.2 zeigt, daß die Trägheitskonvektion nur in einem bestimmten Bereich des Diagramms auftritt. Im folgenden wird versucht, die diesen Bereich begrenzenden Linien physikalisch zu interpretieren. Wird die Boussinesq-Zahl zu groß, so werden in der Energiegleichung die konvektiven Terme dominant und die diffusiven Terme verlieren an Bedeutung. Zweidimensionale Strukturen im Temperaturfeld, die die Voraussetzung für die Ausbildung der Trägheitskonvektion darstellen (vergleiche Abschnitt 5.2) sind nicht mehr stabil. Diese Obergrenze für die Boussinesq-Zahl äußert sich in Abbildung 5.2 als rechte Berandung im Existenzbereich der Trägheitskonvektion. Die untere Grenzlinie des Bereiches wird durch einen unteren Schwellwert der Grashof-Zahl gebildet. Ist die Grashof-Zahl kleiner als dieser Wert, so dominieren in der Impulsgleichung noch die Reibungsterme. Die Intensität der Strömung ist dann zu schwach, um mit hoher Geschwindigkeit rotierende Starrkörperwirbel auszubil-

den. Neben einem unteren Schwellwert der Grashof-Zahl, oberhalb der Trägheitskonvektion möglich ist, existiert offensichtlich auch eine Obergrenze für Gr, oberhalb der keine Trägheitskonvektion existiert. Die nichtlinearen Terme in der Impulsgleichung sind dann so dominant, daß großräumige zweidimensionale Wirbelwalzen auch über sehr kurze Zeitintervalle nicht stabil sind, bzw. sich überhaupt nicht ausbilden können. Wie die Ergebnisse für Natrium und Quecksilber in Abbildung 5.2 angedeutet, hängen der untere und obere Schwellwert der Grashof-Zahl offensichtlich von der Prandtl-Zahl ab. Mit größer werdender Prandtl-Zahl wird dabei der Bereich, in dem Trägheitskonvektion möglich ist, zunehmend kleiner. Es ist jedoch zu betonen, daß die drei aus einfachen physikalischen Überlegungen abgeleiteten Grenzkurven in Abbildung 5.2 nur tendenziellen Charakter haben. Erst durch weiterführende theoretische Untersuchungen und weitere umfangreiche numerische Simulationen für verschiedene Rayleigh- und Prandtl-Zahlen können diese Grenzkurven qualitativ und quantitativ bestätigt, und ihr genauer Verlauf im Gr-Bo-Diagramm bestimmt werden.

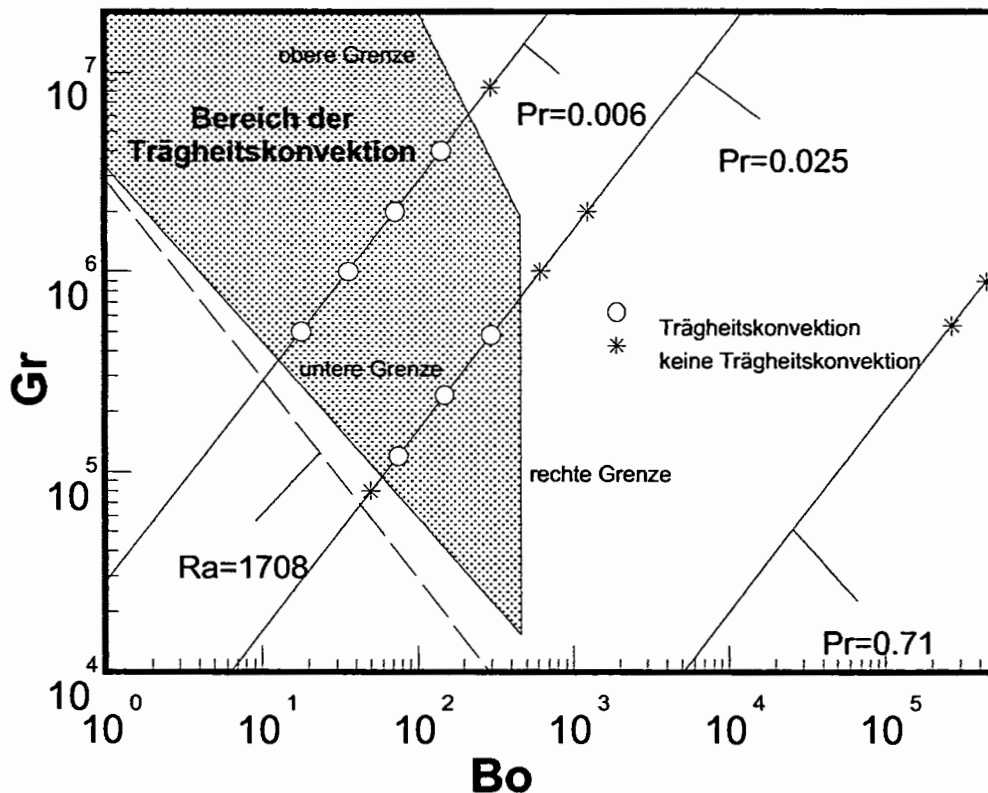


Abb. 5.2: Existenzbereich der Trägheitskonvektion.

5.4 Skalierungsbeziehungen

Bereits in Abschnitt 2.5.3 wurde bei der Vorstellung der dimensionslosen Grundgleichungen auf sich andeutende Skalierungsbeziehungen für das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld hingewiesen. Inwieweit diese Skalierungsbeziehungen bestätigt werden können, soll nachfolgend diskutiert werden. Dabei werden mit $Ra \geq 6000$ nur die Rayleigh-Zahlen betrachtet, bei denen die Konvektion bereits einen deutlich turbulenten Charakter zeigt. Durch Einbeziehung der Ergebnisse für Natrium [44] wird zusätzlich der Einfluß der dimensionslosen Kennzahlen auf die Ausbildung der Trägheitskonvektion untersucht.

Mit der hier gewählten Normierung deutet sich für das Geschwindigkeitsfeld aus der Impulsgleichung 2.19 eine Skalierung mit der Grashof-Zahl an, während die Energiegleichung 2.20 für das Temperaturfeld auf eine Skalierung mit der Kennzahl $Pr \cdot Ra$ hindeutet. In der neueren Literatur wird für die dimensionslose Kennzahl $Pr \cdot Ra$ häufig die Bezeichnung 'Boussinesq-Zahl', $Bo = Pr \cdot Ra$, verwendet [1]. Diese Bezeichnung soll hier übernommen werden. Das Verhältnis von Grashof zu Boussinesq-Zahl

$$\frac{Gr}{Bo} = \frac{1}{Pr^2} \quad (5.2)$$

wird für Fluide kleiner Prandtl-Zahlen zunehmend größer.

5.4.1 Temperaturfeld

Durch Vergleich von Simulationsergebnissen für Quecksilber mit solchen für Natrium [44] für eine annähernd gleiche Boussinesq-Zahl $Bo \approx 150$ soll untersucht werden, inwieweit eine Ähnlichkeit des Temperaturfeldes für Fluide unterschiedlicher Prandtl-Zahl gegeben ist. Für diesen Zweck wird für Quecksilber die Rayleigh-Zahl $Ra = 6000$ ($Bo = 150$) und für Natrium ($Pr = 0.006$) die Rayleigh-Zahl $Ra = 24000$ ($Bo = 144$) betrachtet. Der Vergleich der vertikalen Profile der mittleren Temperatur zeigt für beide Fälle eine gute Übereinstimmung, vergleiche Abb. 4.5 und Abb. 5.10 in [44]. Dies gilt ebenso für die Profile der rms-Werte der Temperaturfluktuationen, vergleiche Abb. 4.6 und Abb. 5.11 in [44]. Der Maximalwert in Kanalmitte beträgt bei beiden Fällen ca. 16.5% der Differenz der Wandtemperaturen. Auch Isolinien der momentanen Temperatur zeigen für beide Fälle ganz ähnliche Muster, vergleiche den Verlauf der großräumigen Bandstrukturen und die Dichte der Isothermen in einem Horizontalschnitt bei $x_3 = 0.5$ (Abb. 4.20 und Abb. 5.26 in [44]). Auch Temperatur-Isolinien in Vertikalschnitten senkrecht zu den großräumigen Bandstrukturen weisen eine große Ähnlichkeit auf, vergleiche Abb. 4.21 und Abb. 5.28 in [44].

Für die beiden verglichenen Simulationen bestätigt sich die Skalierung des Temperaturfeldes mit der Boussinesq-Zahl. Allerdings ist der Wert der Boussinesq-Zahl

$Bo \approx 150$ sehr klein. Kurzwellige Temperaturfluktuationen, die durch das wesentlich kleinskaligere Geschwindigkeitsfeld über die nichtlinearen Terme der Energiegleichung eingekoppelt werden, werden bei diesen kleinen Boussinesq-Zahlen aufgrund der Dominanz der Wärmeleitungsvorgänge sehr stark gedämpft. Erst für höhere Boussinesq-Zahlen wird der Einfluß der konvektiven Terme von Bedeutung werden und der Einfluß der Diffusionsterme in der Energiegleichung abnehmen. Für große Boussinesq-Zahlen kann daher hier keine generelle Aussage zu Skalierungsbeziehungen getroffen werden.

5.4.2 Geschwindigkeitsfeld

Für das Geschwindigkeitsfeld deutet sich aus der dimensionslosen Impulsgleichung 2.19 eine Skalierung mit der Grashof-Zahl an. Wörner [44] findet für Natrium und Luft für die Grashof-Zahl $Gr \approx 10^6$ eine sehr gute Übereinstimmung der kleinskaligen Strukturen im Geschwindigkeitsfeld. Inwieweit auch für Quecksilber eine Skalierung des Geschwindigkeitsfeld mit der Grashof-Zahl vorliegt, soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Als Vergleichsdaten dienen die Ergebnisse für Quecksilber bei $Ra = 25000$ und Ergebnisse aus [44] für Natrium ($Pr = 0.006$, $Ra = 6000$) und Luft ($Pr = 0.71$, $Ra = 630000$). In allen Fällen ist die Grashof-Zahl $Gr \approx 10^6$.

Der Vergleich von Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit in der Horizontalebene $x_3 = 0.5$ zeigt für Quecksilber deutlich kleinere Strukturen im Geschwindigkeitsfeld, als sie in Natrium auftreten (vgl. Abb. 4.26 und Abbn. 5.29 b) und 5.30 in [44]). Die in Quecksilber sehr dicht liegenden Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit deuten auf starke Gradienten hin, die bei diesen Längenmaßstäben bei den Simulationen für Natrium und Luft nicht zu finden sind. Vektordarstellungen des Geschwindigkeitsfeldes in Vertikalschnitten bestätigen die unterschiedlichen Wirbelgrößen für Natrium, Luft und Quecksilber (vgl. Abb. 4.27 und Abbn. 5.31 b) und e) in [44]). Während für Natrium sehr große Wirbel dominieren, wird das Geschwindigkeitsfeld in Quecksilber und Luft durch Wirbel wesentlich kleinerer Abmessung geprägt. Dies wird durch Abbildung 5.3 bestätigt, die eindimensionale Energiespektren der u_1 -Geschwindigkeitskomponente in Kanalmitte zeigt. Man erkennt, daß der Abfall im hochfrequenten Bereich des Spektrums für Quecksilber etwas flacher verläuft, d.h. das Spektrum wird in Richtung der kleinskaligen Strukturen aufgeweitet. Zudem unterscheiden sich die Spektren durch die Intensität, die für Quecksilber im hochfrequenten Bereich um ca. eine Größenordnung höher liegt als bei Natrium und Luft.

Die Ursache für diesen Sachverhalt ist nicht ganz klar, liegt aber vermutlich im Auftriebsterm $(T_{ref} - T)\delta_{i3}$ der Impulsgleichung 2.19 begründet. Aus der Beziehung 5.2 wird deutlich, daß für Luft ($Pr = 0.71$) der Unterschied der Kennzahlen Gr und Bo unwesentlich ist. Die Gewichtung der Diffusionsterme im Verhältnis zu den nichtlinearen konvektiven Termen ist damit in der Impuls- und der Energiegleichung ganz ähnlich.

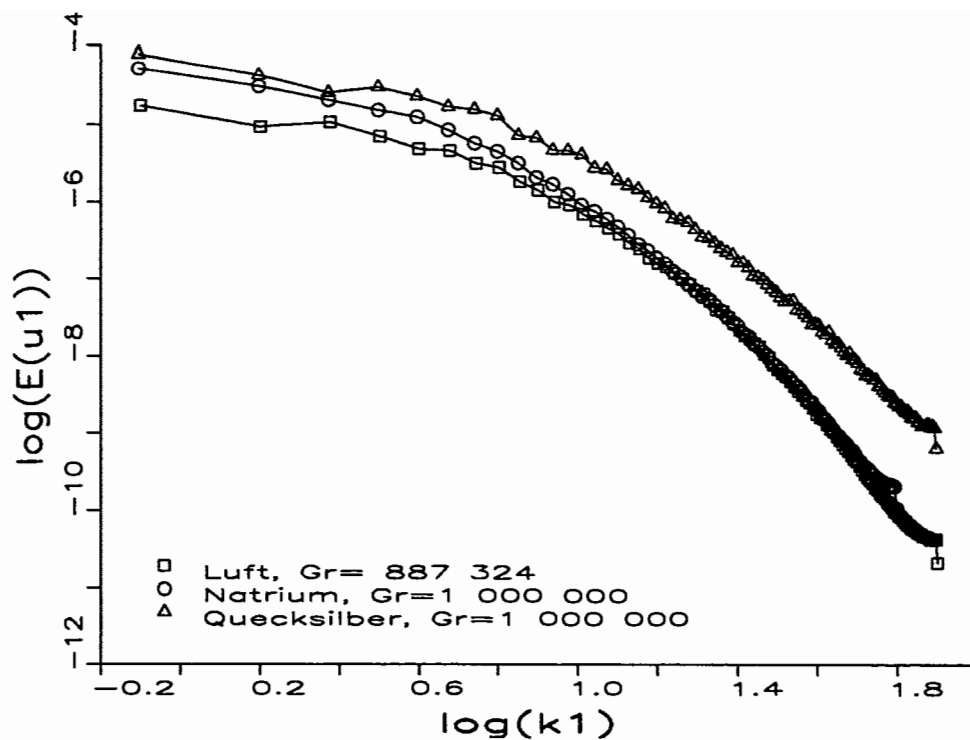


Abb. 5.3: Eindimensionale Energiespektren der u_1 -Geschwindigkeitskomponente in Kanalmitte ($x_3 = 0.5$) für Luft, Natrium und Quecksilber.

In Luft treten daher im Geschwindigkeits- und Temperaturfeld ähnliche Längenskalen auf [44]. In Natrium ist die Grashof-Zahl um gut vier Größenordnungen höher als die Boussinesq-Zahl. Während damit für das Geschwindigkeitsfeld der konvektive Term (Trägheitsterm) über den Diffusionsterm (Reibungsterm) dominiert, ist für das Temperaturfeld das Gegenteil der Fall. Aufgrund der hohen Wärmeleitfähigkeit werden kurzwellige Temperaturfluktuationen sofort weggedämpft und das Temperaturfeld ist geprägt durch langwellige, großräumige Strukturen. In der Vertikalkomponente der Impulsgleichung werden über den als Quellterm wirkenden Auftriebsterm die sehr langwelligen Strukturen des Temperaturfeldes eingekoppelt. Damit hat das Temperaturfeld auf die Entwicklung der kleinskaligen Strukturen im Geschwindigkeitsfeld keinen Einfluß. Deshalb skaliert das Geschwindigkeitsfeld in Natrium im hochfrequenten Wellenzahlenbereich ebenfalls mit der Grashof-Zahl. In Quecksilber ist das Temperaturfeld für $Ra = 25000$ bereits durch starke dreidimensionale Störungen und wesentlich kleinere Strukturen gekennzeichnet, als sie in Natrium bei dieser Grashof-Zahl auftreten. Über den Auftriebsterm werden damit in Quecksilber auch wesentlich kleinskaligere Strukturen des Temperaturfeldes in die Impulsgleichung eingekoppelt, als dies bei Natrium der Fall ist. Offensichtlich führt das dazu, daß bei den kleinskaligen Wirbeln keine eindeutige Skalierung allein mit der Grashof-Zahl vorliegt. Dies gilt zumindest im Bereich der hier betrachteten Grashof-Zahl $Gr \approx 10^6$.

Kapitel 6

Schlußbetrachtung

6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der numerischen Untersuchung laminarer und turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Quecksilber. Die Rayleigh-Bénard-Konvektion ist eines der geometrisch einfachsten strömungsmechanischen Modelle. Für ein bestimmtes Fluid gibt die Variation nur eines Parameters, nämlich der Rayleigh-Zahl Ra , einen Einblick in den über mehrere Verzweigungen erfolgenden Übergang von laminarer zu turbulenter Konvektion. Die Rayleigh-Bénard-Konvektion eignet sich daher besonders gut zur Untersuchung der Strukturbildung und Dynamik in nichtlinearen Systemen.

Die Betrachtung von Quecksilber, als ein Fluid sehr kleiner Prandtl-Zahl ($Pr = 0.025$), zielt speziell auf die Untersuchung des Phänomens der Trägheitskonvektion, das in numerischen Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in Natrium ($Pr = 0.006$) gefunden wurde. Bei der Trägheitskonvektion handelt es sich um ein Konvektionsmuster, bei dem großräumige, zweidimensionale Wirbelwalzenpaare gegensinnig wie Starrkörper rotieren. Die Trägheitskonvektion ist dadurch bezüglich des konvektiven Wärmetransports besonders effektiv. Es ist daher von Interesse, ob die Trägheitskonvektion auch in Quecksilber auftritt.

Die numerischen Untersuchungen erfolgen mit der Methode der direkten numerischen Simulation. Die Lösung der physikalischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie erfolgt mit einer Diskretisierung, die alle Längen- und Zeitskalen der Turbulenz auflöst. Damit sind keine Turbulenz- oder Feinstrukturmodelle notwendig. Die durchgeführten direkten Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber umfassen die Rayleigh-Zahlen $Ra = 2000$, $Ra = 3000$, $Ra = 6000$, $Ra = 12000$, $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$. Der Vergleich der berechneten Nusselt-Zahlen mit experimentellen Ergebnissen zeigt überwiegend eine gute Übereinstimmung.

Zur Beurteilung der Konvektionsmuster werden statistische Analysen und Analysen momentaner Strömungsfelder durchgeführt. Die Untersuchung der zeitabhängigen Strömungsvorgänge erfolgt mit Hilfe von Filmen, in denen in horizontalen und vertikalen Schnittebenen das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld visualisiert wird.

Für die Rayleigh-Zahl $Ra = 2000$ wird der Einfluß der horizontalen Ausdehnung des Rechengebiets auf die sich einstellenden Konvektionsmuster untersucht. Die Simulationsergebnisse zeigen für kleine Periodenlängen ($X_1 = 2.02$, $X_2 = 2.51$) stehende oszillierende Wellen, während sich für große Periodenlängen ($X_1 = 8.06$, $X_2 = 7.54$) amplitudenmodulierte Wanderwellen einstellen. Die Wellenlänge dieser regelmäßigen Strukturen ist in dem kleinen Rechengebiet durch den Wert der Periodenlänge festgelegt. Im großen Rechengebiet kann sich die Wellenlänge hingegen frei einstellen. Die horizontale Ausdehnung des verwendeten Rechengebiets hat in Simulationen mit periodischen Randbedingungen somit einen entscheidenden Einfluß auf das sich ausbildende Konvektionsmuster und damit auch auf integrale Größen, wie z.B. die Nusselt-Zahl. Die durchgeführten Untersuchungen belegen, daß die Abbildung der realen physikalischen Vorgänge bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion in großen Behältern nur bei Simulationen gegeben ist, denen ausreichend große Periodenlängen zugrunde liegen. Notwendig erscheint bei schwach überkritischen Rayleigh-Zahlen zumindest ein Wert für die Periodenlänge, die dem Dreifachen der kritischen Wellenlänge entspricht.

Trägheitskonvektion wird für $Ra = 2000$ nicht beobachtet. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3000$, $Ra = 6000$ und $Ra = 12000$ tritt sie dagegen bereichsweise und während begrenzter Zeitintervalle auf. Der Mechanismus, der zur Ausbildung und zur Auflösung der Trägheitskonvektion führt, ist derselbe, wie er für Natrium gefunden wurde und in [44] beschrieben ist. So ist die Ausbildung der Trägheitskonvektion gekoppelt an lokal zweidimensionale Bereiche im Temperaturfeld. Für die Rayleigh-Zahlen $Ra = 25000$ und $Ra = 50000$ sind keine Anzeichen einer Trägheitskonvektion erkennbar. Es zeigen sich in Wandnähe am Rand der viskosen Grenzschicht charakteristische Knoten- und Speichenstrukturen. Diese werden hervorgerufen durch Ablösung einzelner Fluidballen von der oberen bzw. unteren thermisch instabilen Grenzschicht. Entsprechende Vorgänge sind aus Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft bei hohen Rayleigh-Zahlen bekannt. Es ist eine Rayleigh-Zahl erreicht, bei der sich der Mechanismus der konvektiven Wärmeübertragung grundsätzlich ändert. Diese erfolgt nicht mehr durch Konvektionsrollen, sondern durch einzelne Auftriebs- und Abtriebsfahnen. Dies deutet auf den Beginn des Übergangs zu vollturbulenter Konvektion hin.

Aus den gewonnenen Ergebnissen für Rayleigh-Bénard Konvektion in Quecksilber, und unter Einbeziehung früherer Simulationsergebnisse für Natrium und Luft, werden erste Schritte zur Herleitung eines Zustandsdiagramms der Trägheitskonvektion un-

unternommen. Die Darstellung erfolgt in einem Diagramm, in dem die relevanten dimensionslosen Kennzahlen Grashof-Zahl Gr und Boussinesq-Zahl Bo als Ordinate bzw. Abszisse dienen. Basierend auf physikalischen Überlegungen und Größenordnungsbetrachtungen von Termen in den Grundgleichungen werden in dem Gr - Bo -Diagramm tendenziell zu interpretierende Grenzlinien abgeleitet, die den Parameterbereich, in dem Trägheitskonvektion möglich erscheint, einschränken.

Der Vergleich von Simulationsergebnissen für Quecksilber und Natrium zeigt, daß für das Temperaturfeld für Boussinesq-Zahlen $Bo \approx 10^2$ eine Skalierung mit der Boussinesq-Zahl vorliegt. Eine Skalierung des Geschwindigkeitsfeldes mit der Grashof-Zahl für den Bereich $Gr \approx 10^6$ kann nicht nachgewiesen werden. Dennoch bestätigt sich, daß sich die Vorgänge im Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld in Fluiden sehr kleiner Prandtl-Zahl auf verschiedenen Längen- und Zeitskalen abspielen. Im Temperaturfeld treten großräumige langwellige und langlebige Strukturen auf. Dagegen ist das Geschwindigkeitsfeld durch kleinskalige Strukturen gekennzeichnet, die raschen Veränderungen unterworfen sind.

6.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit wirft einige Fragen auf, die in weiterführenden Untersuchungen zur Rayleigh-Bénard-Konvektion behandelt werden sollten.

- Ist für Prandtl-Zahlen $0.025 < Pr < 0.71$ noch Trägheitskonvektion zu beobachten? Falls ja, in welchem Bereich der Rayleigh-Zahl?
- Wie wird ein Zustandsdiagramm zur Trägheitskonvektion genauer aussehen?
- Existieren für $Pr \rightarrow 0$ noch oszillatorische Instabilitäten wie in Quecksilber, oder setzt die Konvektion bereits ab $Ra_c = 1708$ als Trägheitskonvektion ein?
- Treten bei den hier durchgeführten Simulationen für sehr lange Simulationszeiten $t \rightarrow \infty$ später Übergänge zu neuen Konvektionsmustern auf?
- Wie groß müssen die Periodenlängen für Simulationen turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion für Rayleigh-Zahlen $Ra \gg 10^4$ gewählt werden?

Literaturverzeichnis

- [1] Bejan, A.
Convection Heat Transfer
John Wiley & Sons, Inc. (1984)
- [2] Bénard, H.
Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent
Ann. Chim. Phys. **23**, 62-144 (1901)
- [3] Bird B.R., Steward W.E., Lightfoot E.N.
Transport Phenomena
John Wiley & Sons, Inc. (1960)
- [4] Busse F.H., Clever R.M.
An asymptotic model of two-dimensional convection in the limit of low Prandtl number
J. Fluid Mech. **102**, 75-83 (1981)
- [5] Chandrasekhar S.
Hydrodynamic and hydromagnetic stability
Dover Publications, Inc. (1981)
- [6] Chiffaudel A., Fauve S., Perrin B.
Viscous and Inertial Convection at Low Prandtl number: Experimental Study
Europhys. Lett. **4**, 555-560 (1987)
- [7] Christie S.L., Domarazki J.A.
Numerical evidence for the nonuniversality of the soft/hard turbulence classification for thermal convection
Phys. Fluids A **5**, 412-421 (1993)
- [8] Clever R.M., Busse F.H.
Transition to time-dependent convection
J. Fluid Mech. **65**, 625-645 (1974)

- [9] Clever R.M., Busse F.H.
Low Prandtl-number convection in a layer heated from below
J. Fluid Mech. **102**, 61-74 (1981)
- [10] Clever R.M., Busse F.H.
Nonlinear oscillatory convection
J. Fluid Mech. **176**, 403-417 (1987)
- [11] Clever R.M., Busse F.H.
Convection at very low Prandtl numbers
Phys. Fluids A **2**, 334-339 (1990)
- [12] Deardorff J.W., Willis G.E.
Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates
J. Fluid Mech. **28**, 675-704 (1967)
- [13] Fauve S., Libchaber A.
Rayleigh-Bénard Experiment in a Low Prandtl Number Fluid, Mercury
in: "Chaos and Order in Nature", Ed.: H. Haken, Springer, 25-35 (1981)
- [14] Fauve S.
Persönliche Mitteilung
- [15] Globe S., Dropkin D.
Natural-Convection Heat Transfer in Liquids Confined by Two Horizontal Plates and Heated From Below
ASME J. Heat Transfer, 24-28, February 1959
- [16] Gray D.D., Giorgini A.
The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases
Int. J. Heat Mass Transfer **19**, 545-551 (1976)
- [17] Grötzbach G.
Direkte numerische Simulation turbulenter Geschwindigkeits-, Druck und Temperaturfelder bei Kanalströmungen
Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 2426 (1977)
- [18] Grötzbach G.
Direct numerical simulation of laminar and turbulent Bénard convection
J. Fluid Mech. **119**, 27-53 (1982)
- [19] Grötzbach G.
Spatial Resolution Requirements for Direct Numerical Simulation of the Rayleigh-Bénard Convection
J. Comp. Phys. **49**, 241-264 (1983)

- [20] Grötzbach G.
Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows
 in: "Encyclopedia of Fluid Mechanics", Vol. 6, 1337-1391, Ed.: N.P. Cheremisinoff, Gulf Publ., Houston (1987)
- [21] Grötzbach G.
Simulation of turbulent flow and heat transfer for selected problems of nuclear thermal-hydraulics
 Proc. First Int. Conf. on Supercomputing in Nuclear Applications, Ed.: Japan Atomic Energy Research Institute, Tokyo, Publ. Nuclear Energy Data Center, Tokai-mura, Japan, 29-35 (1990)
- [22] Grötzbach G., Wörner M.
Flow Mechanisms and Heat Transfer in Rayleigh-Bénard Convection at Small Prandtl numbers
 in: "Direct and Large-Eddy Simulation I", Eds.: P.R. Voke, L. Kleiser, J.-P. Cholle, Kluwer Academic Publishers, 387-397 (1994)
- [23] Grötzbach G., Wörner M.
Inertial Convection in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection at Small Prandtl numbers
 in: "Computational Fluid Dynamics - Selected Topics", Eds.: D. Leutloff, R.C. Srivastava, Springer Verlag, 219-232 (1995)
- [24] Jones C.A., Moore D.R., Weiss N.O.
Axisymmetric convection in a cylinder
 J. Fluid Mech. **73**, 353-388 (1976)
- [25] Kawara Z., Kishiguchi I., Michiyoshi I.
Characteristics of plumes in turbulent thermal convection in a horizontal fluid layer
 Proc. 9th Int. Heat Transfer Conf., Jerusalem, Israel, Ed. G. Hetsroni, Vol. 2, 537-542 (1990)
- [26] Kek V.
Bénard-Konvektion in flüssigen Natriumschichten
 Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 4611 (1989)
- [27] Kek V., Müller U.
Low Prandtl number convection in layers heated from below
 Int. J. Heat Mass Transfer **36**, 2795-2804 (1993)

- [28] Koschmieder E.L.
Bénard Cells and Taylor Vortices
Cambridge University Press (1993)
- [29] Krishnamurti, R.
Some further studies on the transition to turbulent convection
J. Fluid Mech. **60**, 285-303 (1973)
- [30] Libchaber A., Laroche C., Fauve S.
Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement
J. Physique - Letters **7**, 211-216 (1982)
- [31] Lipps F.B.
Numerical simulation of three-dimensional Bénard convection in air
J. Fluid Mech. **75**, 113-148 (1976)
- [32] Meneguzzi M., Sulem C., Sulem P.L., Thual O.
Three-dimensional numerical simulation of convection in low-Prandtl-number fluids
J. Fluid Mech. **182**, 169-191 (1987)
- [33] Moeng C.-H., Rotunno R.
Vertical-velocity skewness in the buoyancy-driven boundary layer
J. Atmos. Sci. **47**, 1149-1162 (1990)
- [34] Proctor M.R.E.
Inertial convection at low Prandtl-number
J. Fluid Mech. **82**, 97-114 (1977)
- [35] Rayleigh, Lord
On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side
Phil. Mag. **32**, 529-546 (1916)
- [36] Rossby, H.T.
A study of Bénard convection with and without rotation
J. Fluid Mech. **36**, 309-335 (1969)
- [37] Rotta J.C.
Turbulente Strömungen
B.G. Teubner, Stuttgart (1972)
- [38] Schlüter A., Lortz D., Busse F.H.
On the stability of steady finite amplitude convection
J. Fluid Mech. **23**, 129-144 (1965)

- [39] Schumann U.
Ein Verfahren zur direkten Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen
Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 1854 (1973)
- [40] Seiter C.
Numerische Simulation turbulenter Auftriebsströmungen in horizontalen Kanälen
Dissertation, Universität Karlsruhe, FZKA 5505 (1995)
- [41] Stork K., Müller U.
Convection in boxes: experiments
J. Fluid Mech. **54**, 599-611 (1972)
- [42] Sulem P.L., Sulem C., Thual O.
Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Convection in Liquid Metals
Prog. Astro. Aeronaut **100**, 125-151 (1985)
- [43] Thual O.
Zero-Prandtl-number convection
J. Fluid Mech. **240**, 229-258 (1992)
- [44] Wörner M.
Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium
Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 5228 (1994)
- [45] Wörner M.
Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium, $Ra = 50000$
Persönliche Mitteilung
- [46] Zierep J.
Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre
Verlag G. Braun, Karlsruhe (1991)

Anhang A

Zeitnormierung in TURBIT

Die Normierung der Zeit erfolgt in TURBIT nach der Beziehung

$$t_{ref} = \frac{d}{u_0}. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist d der Plattenabstand und u_0 ist die Bezugsgröße für die Geschwindigkeit (siehe Abschnitt 2.5.3)

$$u_0 = \sqrt{g\alpha\Delta Td}. \quad (\text{A.2})$$

Aus Beziehung A.1 folgt

$$t_{ref} = \frac{d^2}{\nu} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}}. \quad (\text{A.3})$$

Es ist zu erkennen, daß für steigende Rayleigh-Zahlen die Zeitskala kleiner wird. Somit paßt sie sich dem zunehmend turbulenteren Strömungszustand an. Der Plattenabstand d schafft den Bezug zu experimentellen Untersuchungen.

A.1 Umrechnung in reale Zeiteinheiten

Zur Umrechnung der dimensionslosen Problemzeit in TURBIT in reale Zeiteinheiten dient die Beziehung

$$t_{real} = t_{ref} \cdot t_{TURBIT}, \quad (\text{A.4})$$

wobei t_{ref} nach Gleichung A.3 zu bestimmen ist. Für Quecksilber ($\text{Pr} = 0.025$, $\nu = 1.123 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) sind für verschiedene Rayleigh-Zahlen die Umrechnungsfaktoren t_{ref} in Tabelle A.1 zusammengefaßt. Die Werte für den Plattenabstand d entsprechen den Experimenten von Rossby [36], Krishnamurti [29] und Kek [26].

Rayleigh-Zahl	Plattenabstand d			
	0.0069m	0.01m	0.018m	0.0465m
2000	1.50	3.15	10.20	68.07
3000	1.22	2.57	8.33	55.58
6000	0.87	1.82	5.89	39.30
12000	0.61	1.29	4.16	27.79
25000	0.42	0.89	2.89	19.25
50000	0.30	0.63	2.04	13.61

Tabelle A.1: Zeitskala t_{ref} [s] nach Gl. A.3 für verschiedene Werte von Ra und d .

A.2 Umrechnung in viskose und thermische Zeiteinheiten

In analytischen Arbeiten zur Rayleigh-Bénard-Konvektion wird als Zeitmaßstab häufig d^2/ν oder d^2/κ verwendet. Hieraus resultiert die viskose Zeiteinheit

$$t_{viskos} = \frac{\nu}{d^2} t_{real}, \quad (\text{A.5})$$

bzw. die thermische Zeiteinheit

$$t_{thermisch} = \frac{\kappa}{d^2} t_{real}. \quad (\text{A.6})$$

Die Umrechnung der dimensionslosen Problemzeit in TURBIT in viskose oder thermische Zeiteinheiten erfolgt über die Beziehungen

$$\frac{t_{viskos}}{t_{TURBIT}} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \quad (\text{A.7})$$

und

$$\frac{t_{thermisch}}{t_{TURBIT}} = \sqrt{\frac{1}{\text{Pr Ra}}}. \quad (\text{A.8})$$

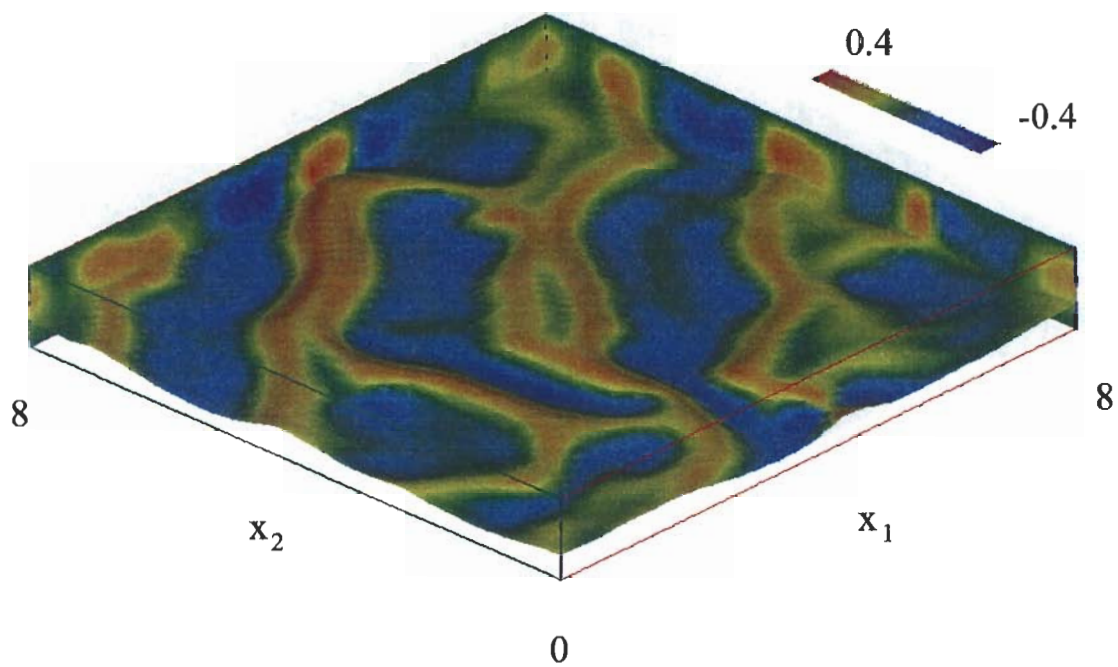


Abb. 4.22: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 3000$ ($t = 772$).

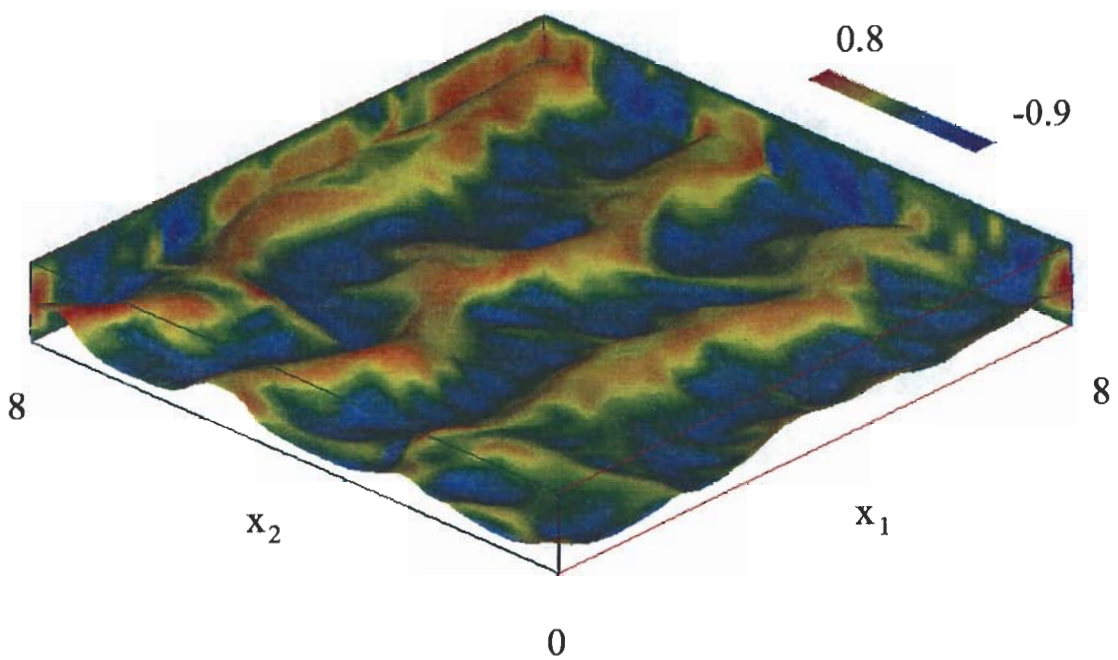


Abb. 4.23: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 6000$ ($t = 183$).

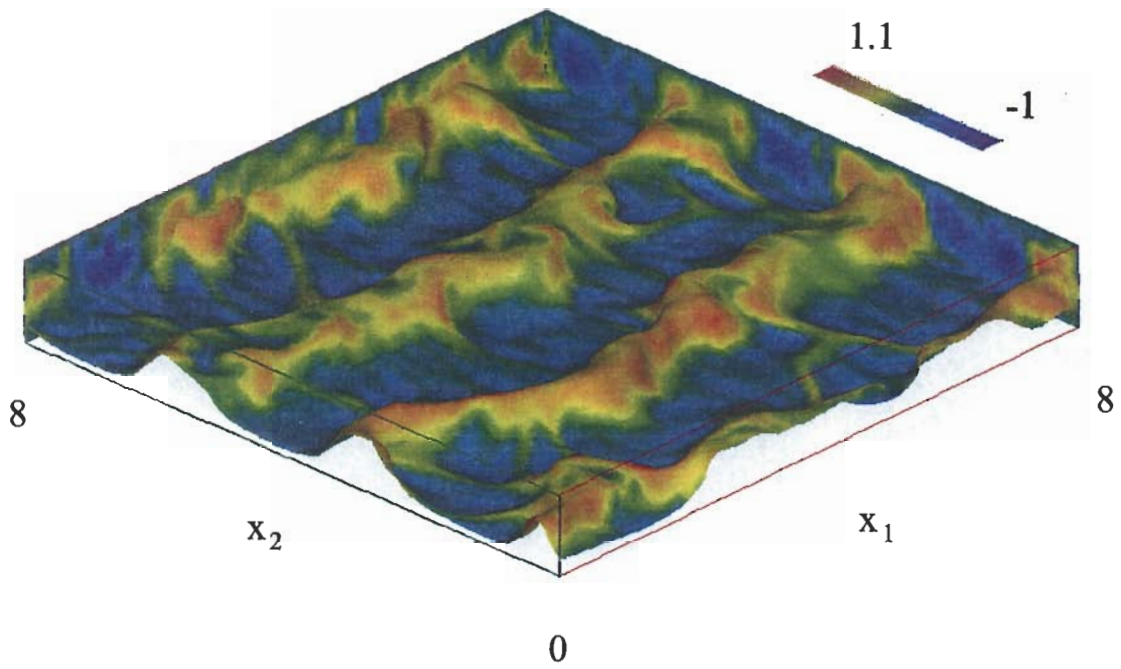


Abb. 4.24: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 12000$ ($t = 203$).

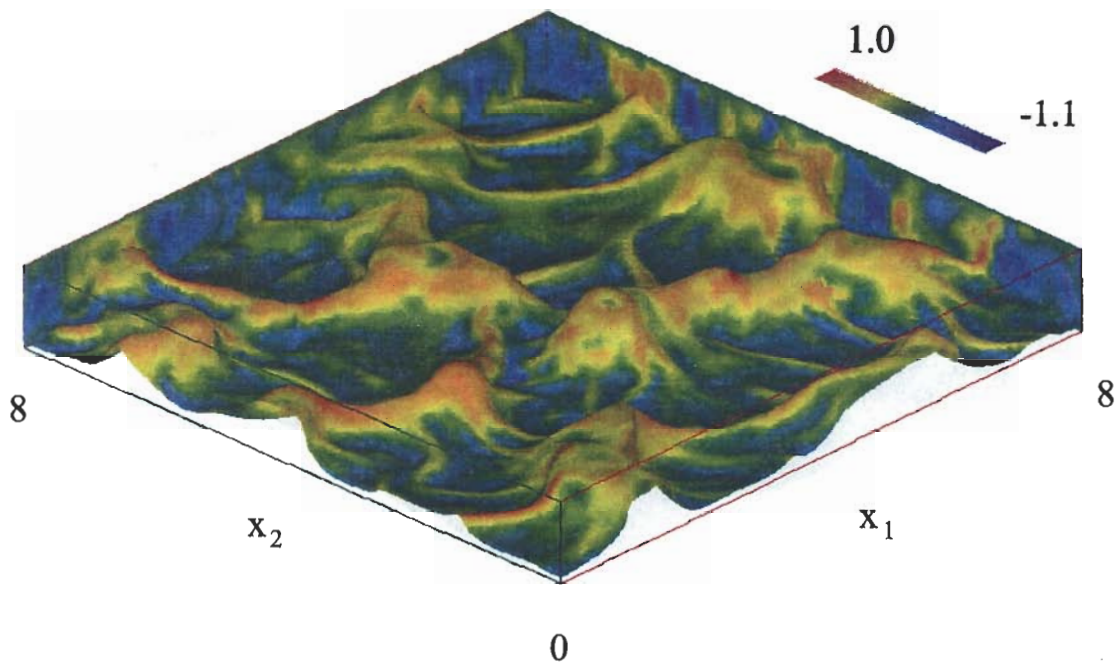


Abb. 4.25: Isofläche für $T = 0.75$ mit u_3 als Farbinformation, $Ra = 25000$ ($t = 219$).

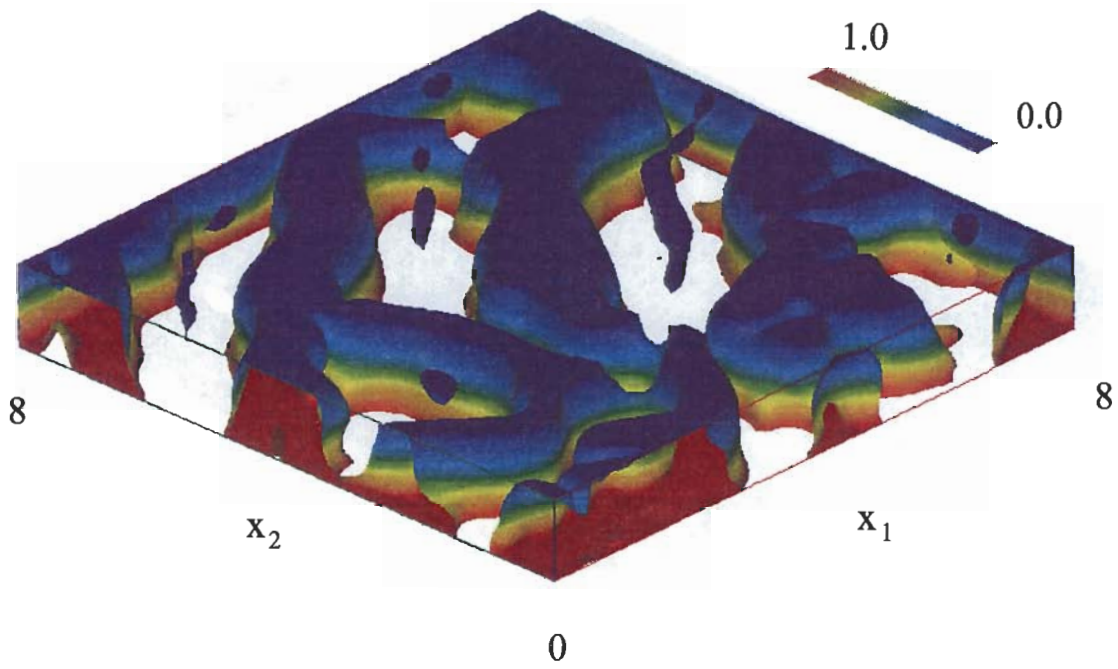


Abb. 4.29: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 3000$ ($t = 772$).

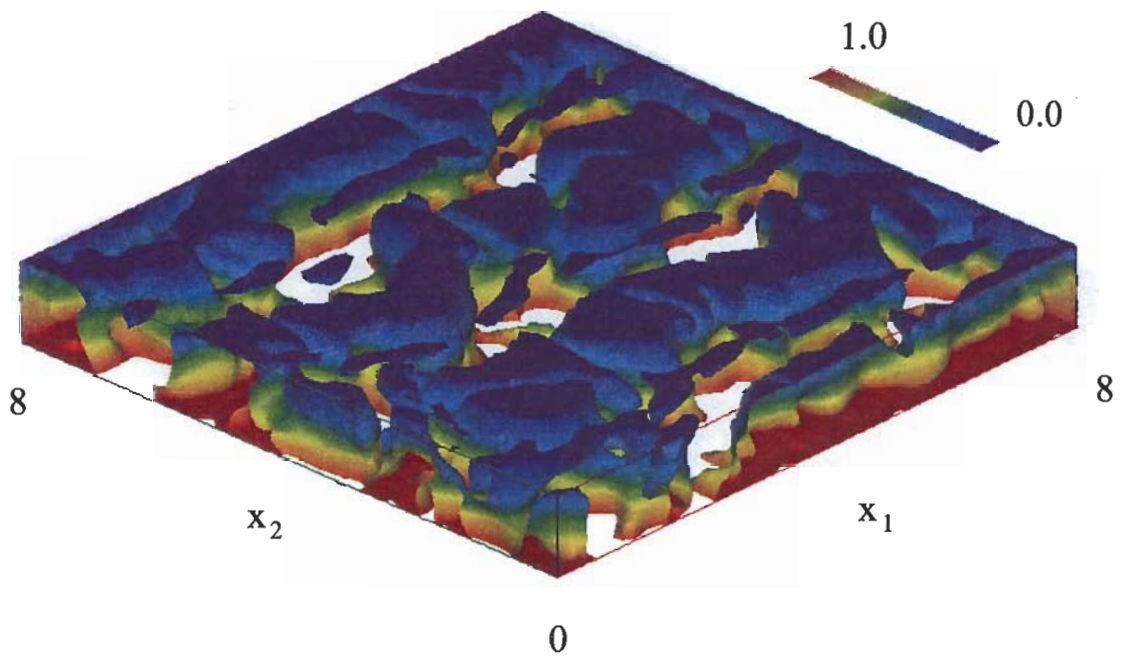


Abb. 4.30: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 6000$ ($t = 183$).

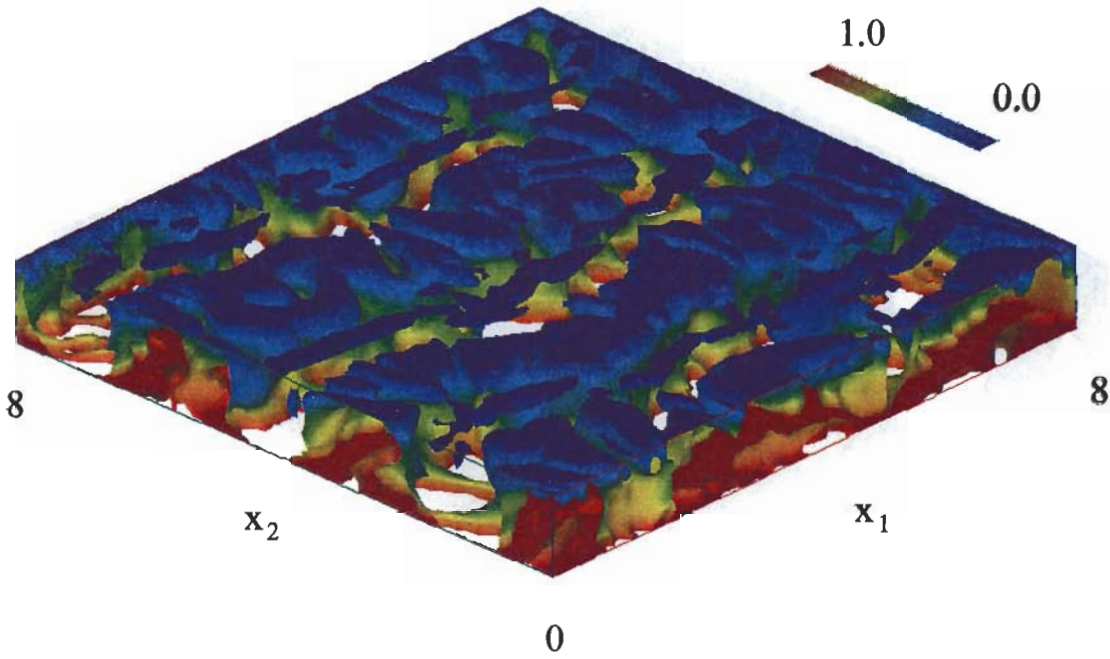


Abb. 4.31: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 12000$ ($t = 203$).

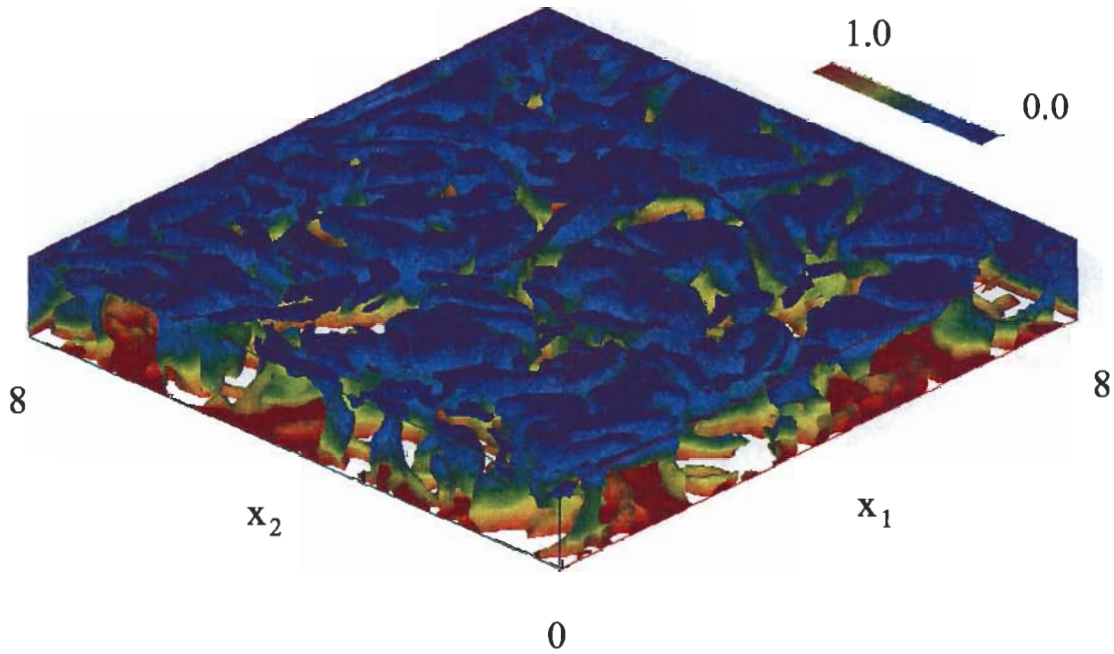


Abb. 4.32: Isofläche für $u_3 \approx 0$ mit T als Farbinformation, $Ra = 25000$ ($t = 219$).