



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6262

**Analyse der
KASCADE-Meßdaten
anhand statistischer
Klassifikationsverfahren
zur Bestimmung der Energie
und Teilchenart der
kosmischen Strahlung**

M. Roth
Institut für Kernphysik

April 1999

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6262

**Analyse der KASCADE-Meßdaten
anhand statistischer Klassifikationsverfahren
zur Bestimmung der Energie und Teilchenart
der kosmischen Strahlung**

Markus Roth
Institut für Kernphysik

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften von
der Fakultät für Physik der Eberhard-Karls-Universität Tübingen genehmigte Disser-
tation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1999

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor
Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe
Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)
ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Das Experiment KASCADE erlaubt den koinzidenten Nachweis der myonischen, elektromagnetischen und hadronischen Komponente von Luftschauern. Das $200 \times 200 \text{ m}^2$ große Detektorfeld und das Eisen-Sampling-Kalorimeter ($\approx 1000 \text{ g/cm}^2$), unterhalb dessen zwei Lagen Vieldraht-Proportionalkammern installiert sind, ermöglichen die Rekonstruktion von verschiedenen Observablen zur Bestimmung der Energie und Masse der primären kosmischen Strahlung. Zur Abschätzung systematischer Effekte verschiedener hadronischer Wechselwirkungsmodelle – durch das Luftschauersimulationsprogramm CORSIKA zur Verfügung gestellt – wurden gemessene und simulierte Verteilungen der Modelle VENUS, QGSJet und Sibyll, inklusive einer Simulation des Detektorverhaltens, miteinander verglichen. Während die Modelle QGSJet und VENUS die Messungen reproduzieren können, zeigt das Modell Sibyll systematische Abweichungen. Mit Hilfe nichtparametrischer Analyseverfahren, die simulierte Luftschauer als Vergleichsmuster verwenden, werden Masse und Energie individueller Luftschauer rekonstruiert. Die Existenz des Knies im Energiespektrum wurde nachgewiesen. Bei Verwendung des Modells QGSJet (VENUS) ergeben sich spektrale Indizes des rekonstruierten Energiespektrums von $\gamma_1 = 2.72 \pm 0.003$ ($\gamma_1 = 2.87 \pm 0.003$) unterhalb des Knies und $\gamma_2 = 3.22 \pm 0.05$ ($\gamma_2 = 3.25 \pm 0.04$) oberhalb. Die Lage des Knies wird nahezu modellunabhängig zu $6.39 \pm 0.14 \times 10^6 \text{ GeV}$ ($6.22 \pm 0.27 \times 10^6 \text{ GeV}$) bestimmt. Die systematischen Abweichungen der Ergebnisse werden ausführlich studiert. Die Auswertung der relativen Häufigkeiten der chemischen Zusammensetzung der kosmischen Strahlung ergibt – je nach Modell unterschiedlich ausgeprägt – eine unterhalb des Knies leichter werdende und oberhalb schwerer werdende Elementzusammensetzung der kosmischen Strahlung.

Analysis of air shower measurements of the KASCADE experiment by applying statistical classification methods for the determination of the energy and type of the primary cosmic radiation

The experiment KASCADE is able to measure simultaneously the muonic, electromagnetic and hadronic component of air showers. The $200 \times 200 \text{ m}^2$ detector array, the iron sampling calorimeter ($\approx 1000 \text{ g/cm}^2$) and the two layers of multiwire proportional chambers installed below, allow the reconstruction of different observables for the determination of energy and mass of the primary cosmic radiation. To estimate systematic effects of different hadronic interaction models (made available by the air shower simulation code CORSIKA) simulated distributions using the models QGSJet, VENUS and Sibyll, including a simulation of the detector response, are compared with measured ones. While the models QGSJet and VENUS can reproduce the measurements, the model Sibyll shows systematic deviations. By applying nonparametric analysis methods, which use simulated air showers as input pattern, mass and energy of air showers are reconstructed. Proof is given for the existence of the knee in the energy spectrum. In the case of the model QGSJet (VENUS) the resulting spectral indices of the reconstructed energy spectrum are $\gamma_1 = 2.72 \pm 0.003$ ($\gamma_1 = 2.87 \pm 0.003$) below and $\gamma_2 = 3.22 \pm 0.05$ ($\gamma_2 = 3.25 \pm 0.04$) above the knee. The position of the knee is almost model-independently estimated to $6.39 \pm 0.14 \times 10^6 \text{ GeV}$ ($6.22 \pm 0.27 \times 10^6 \text{ GeV}$). The systematic deviations of the results are studied in detail. The analysis of the relative abundances of the chemical composition of the cosmic radiation results in a lighter composition below the knee and becomes heavier above. The results of the composition analysis are differently pronounced depending on the model.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Die kosmische Strahlung	4
2.1 Das Energiespektrum	4
2.2 Die Elementzusammensetzung	6
2.3 Ausgedehnte Luftschauer	6
3. Das Experiment KASCADE	11
4. Klassische und moderne Klassifikationsverfahren	15
4.1 Die k-Nächste-Nachbarn Methode zur Parameterschätzung	16
4.2 Der Bayes-Klassifizierer	17
4.2.1 Das Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung methodischer Fehler	22
4.3 Neuronale Netze	22
4.3.1 Das Neuron	23
4.3.2 Die Topologie Neuronaler Netzwerke	25
4.3.3 Die Lernregel Neuronaler Netze	26
5. Die Simulation des KASCADE-Experiments	28
5.1 Die Modellierung der Wechselwirkungen	28
5.2 Simulationsrechnungen	30
5.3 Rekonstruktion der Luftschauerobservablen	32
5.3.1 Observablen des KASCADE-Arrays	32
5.3.2 Observablen des Hadronkalorimeters	35
5.3.3 Observablen der Vieldraht-Proportionalkammern	35
5.4 Selektion der Daten	36
5.5 Einfluß hadronischer Wechselwirkungsmodelle auf simulierte EAS-Observablen	38

6. Analyse der KASCADE-Daten	47
6.1 Gemessene Elektron- und Myonzahl	47
6.2 Gemessene Observablen zentraler Schauer	51
6.3 Bhattacharyya-Abstand als Maß der Massesensitivität	56
6.4 Vergleich der Klassifizierer	59
6.5 Bestimmung der Elementzusammensetzung mittels Bayes-Klassifizierer	63
6.6 Bestimmung der Elementzusammensetzung mittels Neuronalem Netz	75
6.7 Energiebestimmung mittels Neuronalem Netz	81
6.8 Zusammenstellung, Diskussion und Vergleich der Ergebnisse	89
7. Zusammenfassung	98
A. Notation	102
B. Akronyme	103
C. Bayes-Theorem	105
D. Energiebestimmung bei abfallendem Spektrum	107
E. Elementzusammensetzung	109
Literaturverzeichnis	119

Einleitung

*Nec scire fas est omnia.
Horaz (65-8 a. Chr. n.)*

In der Antike gab es noch keine klare Abgrenzung der Disziplinen Philosophie und Physik. Deshalb nimmt es nicht wunder, wenn die Anfänge der Physik auf den griechischen Philosophen Aristoteles (384-322 a. Chr. n.) zurückgehen. Dieser war ein Schüler Platons (etwa 427-347 a. Chr. n.), Erzieher Alexanders des Großen und Gründer der peripatetischen Schule. Er war ein hervorragender Beobachter mit reicher Naturkenntnis.

Seine Naturlehre geht von der Einteilung aller Stoffe in vier irdische Elemente aus: Wasser, Feuer, Luft und Erde, den Vorgängern der heutigen chemischen Elemente. Hinsichtlich der physikalischen Bewegung der Körper, denen er Kreise als die vollkommensten Bahnen zuschreibt, unterscheidet er absolut schwere Körper (Erde) mit dem Trieb zum Erdmittelpunkt und absolut leichte Körper (Feuer) mit dem Trieb zur Weltsphäre (der Quintessenz). Die übrigen Körper sollen sich so bewegen, wie es ihrer proportionalen Zusammensetzung entspricht. Insbesondere sind nach seiner Lehre Wasser und Luft als „media“ dazwischen einzuordnen.

Schon lange vor den ersten Ansätzen zur Aristotelischen Physik hat der denkende Mensch über die Rätsel des nächtlichen Sternenhimmels nachgegrübelt. Die Astronomie als die älteste Wissenschaft war bereits bei den Babyloniern, Ägyptern, Chinesen, Indern, Mayas und Griechen beachtlich hoch entwickelt. Während ursprünglich mehr der Lauf der Gestirne und die diesem zugrunde liegenden Bewegungsgesetze interessierten, begann mit der Nutzbarmachung des Fernrohrs die Frage nach der äußeren und inneren Struktur und schließlich nach der Entstehung und Entwicklung der Himmelskörper zu dominieren: die Kosmogonie blühte auf. Bald wurden aber auch tiefergehende Probleme über den Kosmos als Ganzes aufgeworfen. Damit trat die Kosmologie und schließlich auch die Astrophysik in die Reihe der Wissenschaften.

Das heutige Verständnis über die Entstehung unseres Universums erklärt sich nicht

mehr allein aus Beobachtungen, die mit dem bloßen Auge (bzw. mit Teleskopen o.ä.) zu sehen sind, sondern hat sich vielfach erweitert durch Erkenntnisse, die in weiten Bereichen außerhalb des Sichtbaren gewonnen wurden.

Einige Kilometer über der Erdoberfläche ist die äußere Atmosphäre nicht nur einem ständigen Beschuß von Photonen verschiedenster Wellenlängenbereiche von Radio- bis zur hochenergetischen Gamma-Strahlung, sondern auch von Atomkernen ausgesetzt. Aus den Photonen und Atomkernen läßt sich Information über die Entstehung der Galaxien gewinnen.

Diese sogenannte kosmische Strahlung wird bis zu Energien von etwa 10^{14} eV mit Detektoren auf Ballons, Satelliten oder dem Space Shuttle mit guter Präzision direkt gemessen und identifiziert. Energiespektren sowie Element- und Isotopenzusammensetzung sind daher gut bekannt.

Bei höheren Energien wird der Fluß so klein, daß großflächige Detektoren verwendet werden müssen, die sich nur noch erdgebunden realisieren lassen [1]. Man mißt ausgedehnte Luftschauer, Kaskaden von Sekundärteilchen, die einzelne hochenergetische Primärteilchen in der Erdatmosphäre erzeugen. Da in Luftschauern sehr viele Sekundärteilchen entstehen, die über einen weit ausgedehnten Bereich am Boden verteilt nachweisbar sind, ist es einerseits ausreichend, mit einer Anordnung von einzelnen Detektoren nur eine statistische Stichprobe zu messen, da hiermit eine effektive Fläche erreicht wird, die etwa 100 bis 1000 mal größer ist als die tatsächliche Fläche der Detektoren. Andererseits kann nur noch indirekt aus den Eigenschaften der Luftschauer auf die Energie und Art des Primärteilchens geschlossen werden. Darüber hinaus können die zugrundeliegenden Wechselwirkungen bei hohen Energien nicht mehr an Beschleunigern studiert werden. Man versucht mit Luftschauermodellen die Beobachtungen zu interpretieren.

Zum Nachweis dieser Luftschauer existiert auf dem Gelände des Forschungszentrums Karlsruhe das Experiment KASCADE¹ [2, 3]. Das vorrangige Ziel von KASCADE ist es, die Elementzusammensetzung der kosmischen Strahlung im Energiebereich von einigen 10^{14} eV bis ungefähr 10^{17} eV zu messen. Voraussetzung für die Bestimmung der Elementzusammensetzung ist die Kenntnis unterschiedlicher Ausprägungen in der Schauerentwicklung, z.B. für primäre Protonen und Eisenkerne. Hierzu wurde das Monte-Carlo Programm CORSIKA² zur Simulation von ausgedehnten Luftschauern entwickelt [4, 5].

Ziel dieser experimentellen Arbeit ist es, anhand simulierter Daten Methoden zu erarbeiten, mit denen aus meßbaren Schauerparametern Rückschlüsse auf die Natur des Primärteilchens gezogen werden können, und anschließend gemessene Luftschauer zu analysieren. Als Problem haben sich dabei die in Luftschauern auftretenden intrinsischen Fluktuationen erwiesen. Diese resultieren daraus, daß die Prozesse in der Schauerentwicklung statistischen Gesetzmäßigkeiten unterliegen („kleine Zahl“) und sich damit für individuelle Schauer trotz gleicher Anfangsbedingungen deutliche Un-

¹ Karlsruhe Shower Core and Array Detector

² Cosmic Ray Simulations for KASCADE

terschiede ergeben können. Dies hat zur Folge, daß im einfachsten Falle zweier Kerne (p,Fe) als Vertreter leichter und schwerer Elemente die Fluktuationen zu einer Überdeckung von Proton- und Eisenschauergrößen führen, obwohl sich proton- und eiseninduzierte Schauer in einigen Meßgrößen im Mittel recht deutlich unterscheiden (vorgehend sei erwähnt, daß schwerere Elemente als Eisen bei kleinen Energien (GeV) nicht signifikant in der kosmischen Strahlung nachgewiesen werden). Die eigentliche Aufgabe besteht somit darin, eine geeignete Kombination von Schauerparametern zur Analyse der Meßdaten des Experiments KASCADE zu benutzen, um eine robuste, d.h. unter statistischen Gesichtspunkten unverzerrte, Energiebestimmung und Unterscheidung der verschiedenen Primärteilchen zu gewährleisten. Zudem stehen mehrere Modelle zur Beschreibung der hadronischen Wechselwirkung zur Verfügung, die zum Teil beträchtliche Unterschiede in ihren Vorhersagen zeigen. Keines dieser Modelle kann bevorzugt werden, da bisher keine von KASCADE unabhängige Messung existiert, die eines favorisierte.

Nach einer Einführung in die Physik der kosmischen Strahlung und deren Nachweis als ausgedehnte Luftschauer in Kapitel 2 und einer Vorstellung des KASCADE-Experiments in Kapitel 3 folgt in Kapitel 4 die Beschreibung der benutzten Methoden zur Analyse der Schauerdaten. Das Programm CORSIKA, die damit durchgeführten Simulationen sowie relevante Erkenntnisse aus den Luftschauersimulationen werden in Kapitel 5 dargestellt. Kapitel 6 enthält die Analyse realer Daten zur Identifikation der Primärteilchen und der Bestimmung der primären Energie. Abschließend werden in Kapitel 7 die wichtigsten Ergebnisse zusammengefaßt.

Die kosmische Strahlung und ihre Wechselwirkung mit der Atmosphäre

*Quid est ergo „tempus“? Si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio.
Augustinus (354-430 p. Chr. n.)*

Im weiteren Sinne verstanden können alle Arten elektromagnetischer Strahlung, subatomare Teilchen sowie Gravitationswellen, die sich im Kosmos ausbreiten, als kosmische Strahlung betrachtet werden. Heute verwendet man den Begriff der kosmischen Strahlung zusammenfassend für relativistische, geladene Teilchen. Höchstenergetische Photonen und kosmische Neutrinos werden i.a. nicht dazu gezählt.

Die hochenergetische kosmische Strahlung als materielle Sonde erlaubt die Untersuchung entfernter Bereiche unserer Galaxis und möglicherweise noch tiefere Blicke in das Universum. Deren Entstehung, Ausbreitung und Transport sowie die Wechselwirkung mit der Erdatmosphäre ist daher aktueller Forschungsgegenstand der Astrophysik.

Die kosmische Strahlung läßt sich u.a. durch die Größen Energiespektrum (differentieller Fluß) und Elementzusammensetzung beschreiben. In einem Abriß soll kurz auf deren Charakteristika eingegangen werden.

2.1 Das Energiespektrum

Das Energiespektrum der kosmischen Strahlung ist von einigen MeV bis zu $\approx 10^5$ GeV durch direkte Messung gut bekannt. Unterhalb der Energie von 10 GeV wird der

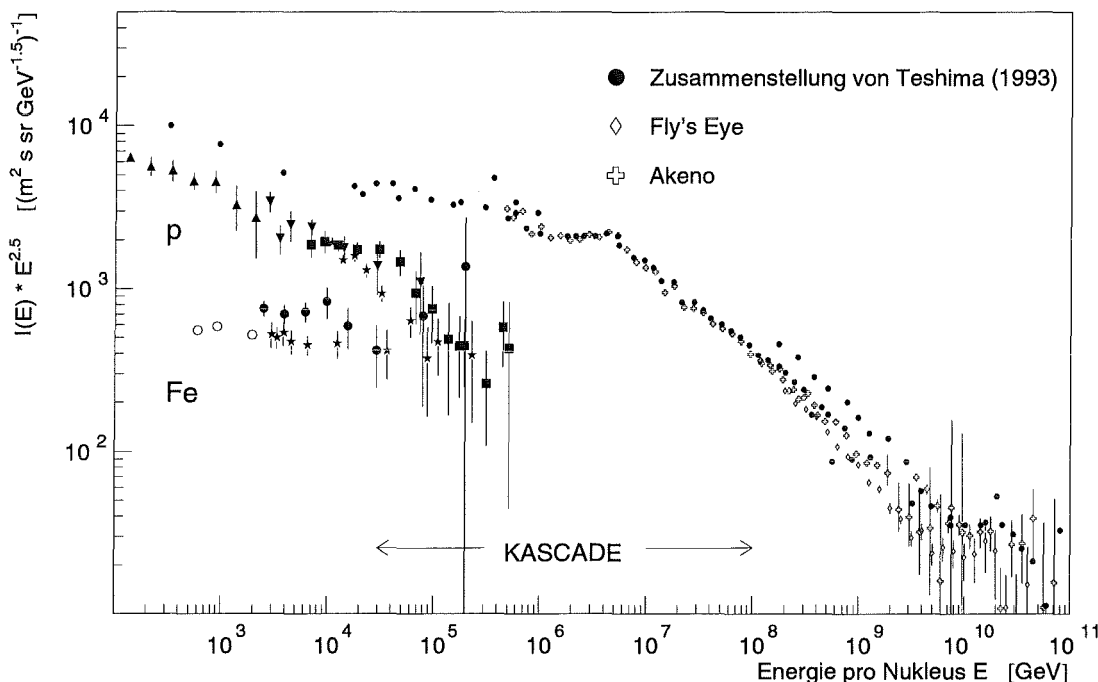


Abbildung 2.1: Energiespektrum der kosmischen Strahlung. In der Abbildung ist der differentielle Fluß der primären Teilchen zu sehen. Zur Verdeutlichung des steileren Abfalls oberhalb $\approx 3 \times 10^6$ GeV wurden die Ordinatenwerte mit $E^{2.5}$ multipliziert. Im Energiebereich unterhalb 5×10^5 GeV sind die Proton- [6, 7, 8, 9] und Eisenflüsse [7, 10, 11, 12] verschiedener Experimente aus direkten Messungen angegeben. Die vollen Punkte bei hohen Energien entstammen einer Zusammenstellung von Teshima [13], die offenen Raute geben die Daten des Fly's Eye-Experiments [14] an, die offenen Kreuze stellen die Daten des AGASA¹-Experiments [15] in Akeno dar [16, 17] (entnommen aus [18]).

Fluß der kosmischen Strahlung durch interplanetare Magnetfelder (z.B. durch die Sonnenaktivität) moduliert, oberhalb wird das Spektrum der direkten kosmischen Strahlung gemessen, da die magnetische Steifigkeit ausreicht, um den Einfluß des solaren Magnetfeldes zu vernachlässigen.

Zu höheren Energien existieren Messungen erdgebundener Experimente, die mit grossen statistischen Fehlern und systematischen Unsicherheiten behaftet sind. Dennoch zeigt der gesamte Teilchenfluß in Abbildung 2.1 über viele Größenordnungen ein Potenzverhalten

$$I(E) \propto E^{-\gamma},$$

dessen Index sich bei etwa 3×10^6 GeV von $\gamma \approx 2.7$ nach $\gamma \approx 3$ ändert. Dieses Phänomen wird mit „Knie“ bezeichnet und seine Ursache ist bis heute nicht verstanden.

¹ Akeno Giant Air Shower Array

Mögliche Erklärungen reichen von einer Änderung der Beschleunigungsmechanismen kosmischer Strahlung [19] über eine deutliche Änderung der Elementzusammensetzung [20, 21] bei Produktion oder Transport durch das ISM², die sich schon im Bereich der direkten Messungen durch die unterschiedlichen Energiespektren von p und Fe in Abbildung 2.1 andeutet, bis zum Übergang von galaktischer zu extragalaktischer kosmischer Strahlung [22].

Desweiteren wird im Bereich oberhalb 10^{10} GeV über die Existenz des sogenannten „Greisen-Zatsepin-Kutz’min-Cutoff“ diskutiert [23, 24]. Die Schwerpunktsenergie solch hochenergetischer Teilchen beim Stoß mit der 2.7 K-Hintergrundstrahlung reicht aus, Pionen oder e^+e^- -Paare in Resonanz zu erzeugen. Höherenergetische Teilchen werden dadurch abgebremst, das Energiespektrum sollte eine Überhöhung bei einigen 10^{10} GeV aufzeigen und bei höheren Energien steiler abfallen.

2.2 Die Elementzusammensetzung

Die Elementzusammensetzung der kosmischen Strahlung ist ebenso wie das Energiespektrum unterhalb $\approx 10^5$ GeV durch Ballon- [8, 12], Satelliten- [25] und Space Shuttle-Experimente gut bestimmt. Ein Vergleich der Messungen mit der Elementhäufigkeit unseres Sonnensystems (Abbildung 2.2) zeigt sowohl Übereinstimmungen als auch einige wesentliche Unterschiede.

Aus der Ähnlichkeit der Häufigkeiten läßt sich schließen, daß die kosmische Strahlung aus Sternmaterie stammen muß. Der gerade-ungerade-Effekt der Kernstabilität zeigt sich in beiden Verteilungen. Wasserstoff und Helium als einzige Elemente mit deutlich geringerem Anteil in der kosmischen Strahlung als im Sonnensystem besitzen eine hohe Ionisierungsenergie und können daher weniger effektiv durch elektromagnetische Felder beschleunigt werden. Die Abweichungen bei leichten Elementen Li, Be und B, sowie einzelner anderer Elemente unterhalb Fe, die als Endprodukte der stellaren Nukleosynthese nicht auftreten, können durch Fragmentation der Kerne der CNO- bzw. der Eisengruppe bei Wechselwirkung mit interstellarer Materie (≈ 1 Atom/cm³) erklärt werden. Aus dem Verhältnis aus primären (C, N bzw. Fe) und sekundären (Li, Be, B sowie Subeisen-elementen) Teilchen kann man auf eine Aufenthaltsdauer von etwa 10^6 Jahren innerhalb der Galaxie schließen [27].

2.3 Ausgedehnte Luftschauer

Dringt die kosmische Strahlung in die Erdatmosphäre ein, so läßt sie sich auf der Erdoberfläche nicht ohne weiteres messen. Der Nachweis muß indirekt erbracht werden, da das primäre kosmische Teilchen in etwa 20 bis 100 km Höhe, mit einer ersten Wechselwirkung beginnend, sukzessive in weiteren Reaktionen mit den Luftmolekülen einen ausgedehnten Luftschauer – auch EAS³ genannt – erzeugt (Abbil-

² Inter Stellar Medium

³ Extensive Air Shower

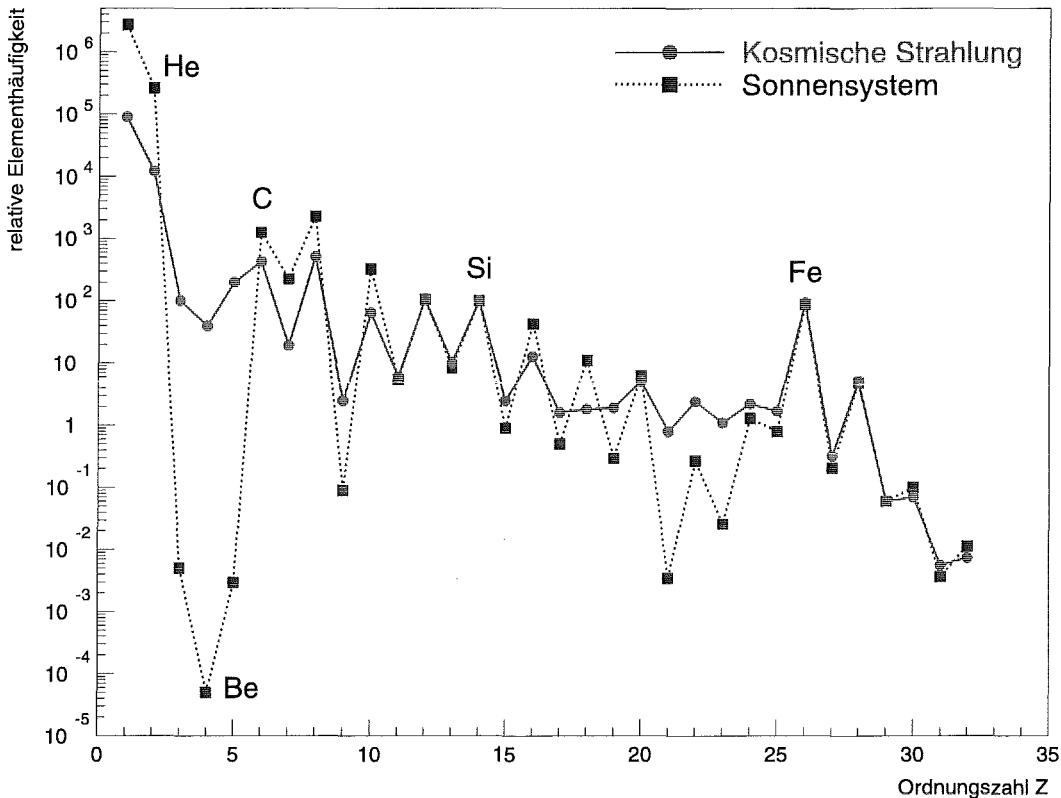


Abbildung 2.2: Relative Elementhäufigkeit in der kosmischen Strahlung und im Sonnensystem. Die relativen Häufigkeiten sind auf $[Si] = 100$ normiert [26].

dung 2.3).

Die kinetische Energie des Primärteilchens genügt, um Sekundärteilchen, hauptsächlich Mesonen (π , K , η , ...), aber auch Baryonen (p , \bar{p} , n , \bar{n} , Λ , ...) und Leptonen (e^\pm , μ^\pm , ν , $\bar{\nu}$) zu produzieren. Die Energie der Sekundärprodukte reicht aus, wie Abbildung 2.4 zeigt, bei anschließenden Wechselwirkungen weitere Teilchen zu erzeugen. Unterhalb einer primären Energie von 10^{13} eV dringen nur wenige Teilchen koinzident bis auf Meereshöhe durch die Atmosphäre. Der sich kaskadenartig ausbildende Schauer sekundärer Teilchen ist im Aussterben begriffen. Diese Schauer bilden die unkorrelierte Höhenstrahlung, die einen Anteil von 40% der natürlichen Radioaktivität auf der Erde ausmacht. Mit zunehmender Energie des primären Teilchens steigt im Mittel die atmosphärische Tiefe kontinuierlich an, in der der Schauer sein Maximum erzeugter Sekundärprodukte besitzt. Immer mehr und höherenergetischere Teilchen erreichen Meeresniveau und können detektiert werden. Bei einer Energie von 10^{16} eV besitzt ein EAS eine radiale Ausdehnung von einigen hundert Metern mit Millionen sekundärer Teilchen. Aus den in der hadronischen Komponente vorhandenen neutralen Pionen entsteht die e/γ -Komponente durch Bremsstrahlung und Paarerzeugung.

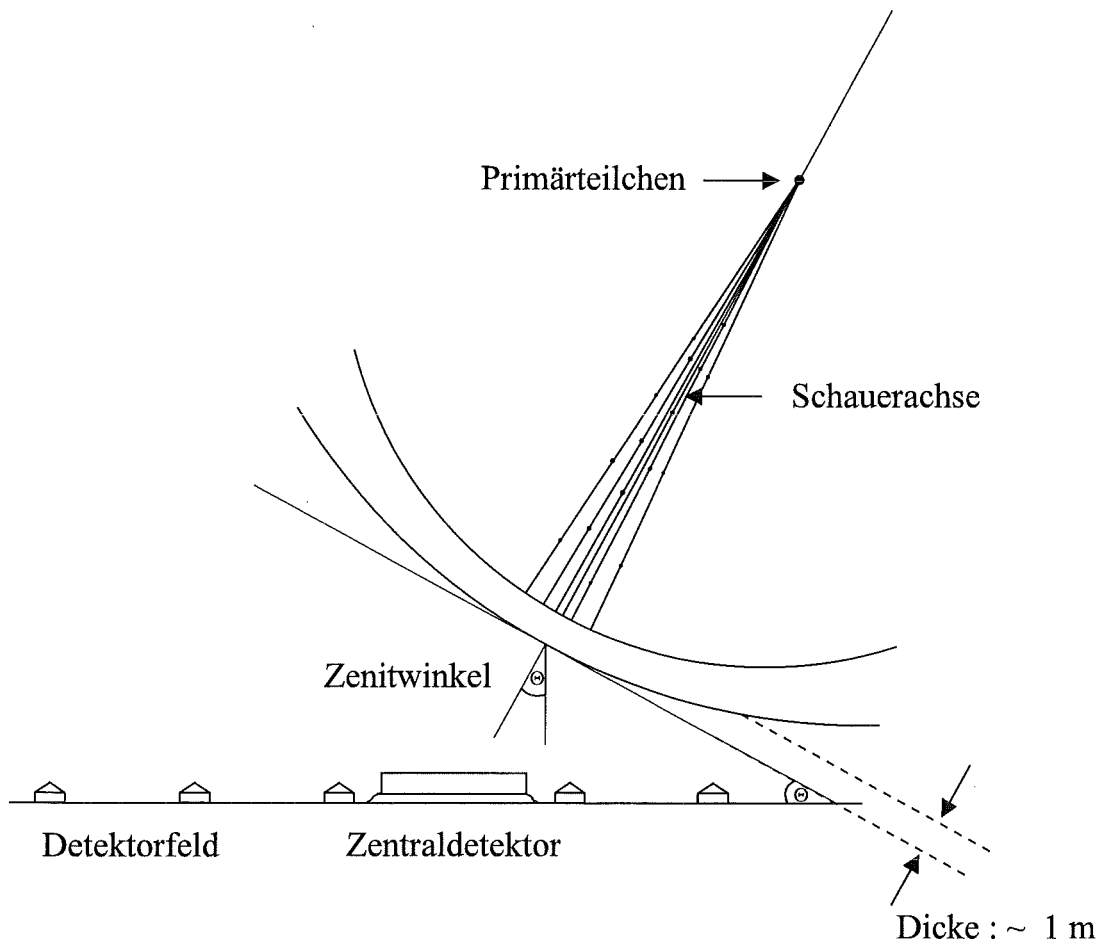
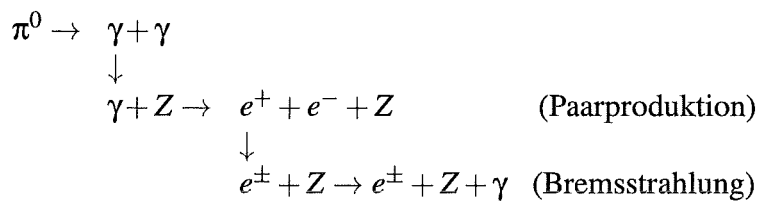


Abbildung 2.3: Ausgedehnter Luftschauer. Schematische Darstellung der räumlichen Entwicklung eines ausgedehnten Luftschauers.



Die Teilchenproduktion setzt sich solange fort, bis eine kritische Energie (für Elektronen in Luft $E_{krit}^e = 81 \text{ MeV}$) unterschritten wird. Typischerweise besitzt die elektromagnetische Komponente eines Primärteilchens einer Energie von 10^{15} eV eine radiale Ausdehnung von 100 Meter.

Eine zusätzliche Quelle von Information bietet die Tscherenkow-Strahlung, die hochenergetische Elektronen und Myonen beim Durchgang durch die Atmosphäre emittieren.

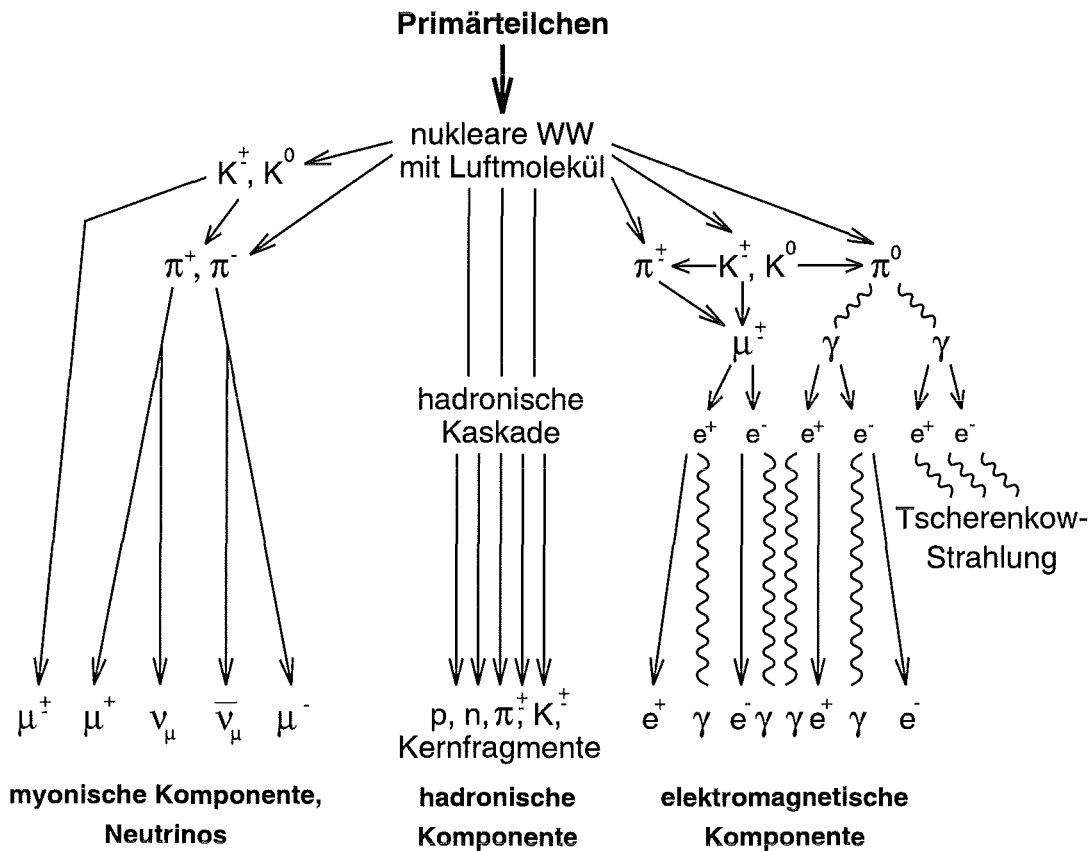
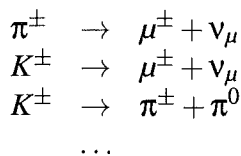


Abbildung 2.4: Ausgedehnter Luftschauer. Schematische Darstellung der verschiedenen Komponenten eines ausgedehnten Luftschauers.

Der Zerfall geladener Mesonen verursacht die myonische Komponente.



Die nur elektroschwach wechselwirkenden Myonen verlieren wegen ihrer hohen Masse nur wenig Energie in Bremsstrahlungsprozessen, d.h. sie durchdringen daher die Atmosphäre nahezu wechselwirkungslos. Die Gesamtzahl der Myonen eines EAS auf Meeresebene beträgt ungefähr 10% der Elektronzahl, die laterale Verteilung verläuft jedoch wesentlich flacher als die der Elektronen (≈ 500 m).

Zum überwiegenden Teil waren bisherige Luftschauerexperimente bestrebt, die Energie des primären Teilchens anhand der Elektronzahl des Schauers zu bestimmen. Es zeigt sich jedoch, daß die Myonzahl der geeignetere Parameter zu deren Bestimmung ist, wenn sie auf Meeresebene aus einer endlichen Stichprobe bestimmt wird [28]. Da die ganze primäre Energie in hadronischen Wechselwirkungen umgesetzt wird

und die darin erzeugte myonische Schauerkomponente nahezu verlustfrei durch die Atmosphäre dringt, induzieren unterschiedlich schwere Primärteilchen gleicher Energie annähernd gleich viele Myonen auf Meeresniveau. Die Elektronzahl ist, gemessen auf Meeresniveau, wesentlich sensitiver auf die Art des Primärteilchens, da die in unterschiedlichen Höhen erstmals wechselwirkenden Teilchen gleicher Energie unterschiedliche longitudinale Elektronzahlprofile und somit unterschiedliche Schauergrößen liefern. Erklären läßt sich dies im Rahmen eines einfachen Superpositionsprinzips, indem ein ^{56}Fe -Kern – häufigster Vertreter schwerer Kerne – als Summe von 56 Nukleonen angesehen wird. Die Energie, die einem Wasserstoffkern – ein einzelnes Proton – gänzlich zukommt, muß im Fe-Kern auf 56 Nukleonen verteilt werden [29]. Die so verminderte Energie pro Nukleon führt zu einem früheren Austerben der einzelnen Subkaskaden. Folglich lassen sich auch die in einem engen Bereich um die Einfallrichtung des Primärteilchens gestreuten Hadronen benutzen, um unterschiedliche Teilchen zu diskriminieren. Ähnlich der elektromagnetischen Komponente zeigen im Mittel laterale Verteilung und absolute Zahl der Hadronen bei proton- und eiseninduzierten Schauern deutliche Unterschiede und können demnach ebenso zur Bestimmung der Elementhäufigkeit herangezogen werden (siehe Kapitel 5).

Das Experiment KASCADE

Bene docet, qui bene distinguit.

Das Luftschauerexperiment KASCADE, aufgebaut im Forschungszentrum Karlsruhe (49° n.B., 8° ö.L., 110 m über NN), hat das Ziel, die chemische Zusammensetzung und das Energiespektrum der kosmischen Strahlung im Energiebereich von $10^{14} - 10^{17}$ eV zu bestimmen [2, 3].

Abbildung 3.1 zeigt schematisch den Aufbau des Experimentes. Zur Messung der elektromagnetischen und myonischen Teilchenverteilung wurde ein $200 \times 200 \text{ m}^2$ großes Detektorfeld aufgebaut, das aus insgesamt 252 Detektorstationen besteht. Die Stationen sind in einem quadratischen Gitter angeordnet und haben 13 m Abstand zueinander. Jeweils 16 solcher Detektorstationen sind zu einem sogenannten Cluster zusammengefaßt, in dessen Zentrum sich eine Kontrollstation befindet, die die lokale Elektronik für die 16 Stationen beinhaltet. In den inneren 4 Clustern befinden sich in jeder Station jeweils vier Detektoren zur Messung der elektromagnetischen Schauerkomponente. In den äußeren 12 Clustern sind nur 2 solcher e/γ -Flüssigszintillationszähler pro Station installiert. Es befindet sich in jeder Station der äußeren Cluster unter einer 4 cm / 10 cm dicken Eisen/Bleiabschirmung ein Plastiksintillationszähler zur Messung von Myonen. Mit diesem Array ist es möglich, den Ort und die Ankunftszeit des Schauerzentrums, die Richtung des Schauers, die Anzahl und Lateralverteilung der Elektronen sowie die Anzahl und Lateralverteilung der Myonen zu bestimmen [3]. Die Energieschwelle der mit dem Array rekonstruierbaren Schauer liegt bei etwa 10^{14} eV. Im nördlichen Teil des Arrays befindet sich der Myontunnel, in dem zusätzliche Myondetektoren angebracht werden.

Im Zentrum des Detektorarrays befindet sich der sogenannte Zentraldetektor (siehe Abbildung 3.2). Er besteht aus einem $20 \times 16 \text{ m}^2$ großen Eisen-Sampling-Kalorimeter, das mit 8 Lagen Flüssig-Ionisationskammern bestückt ist, die als aktives Medium

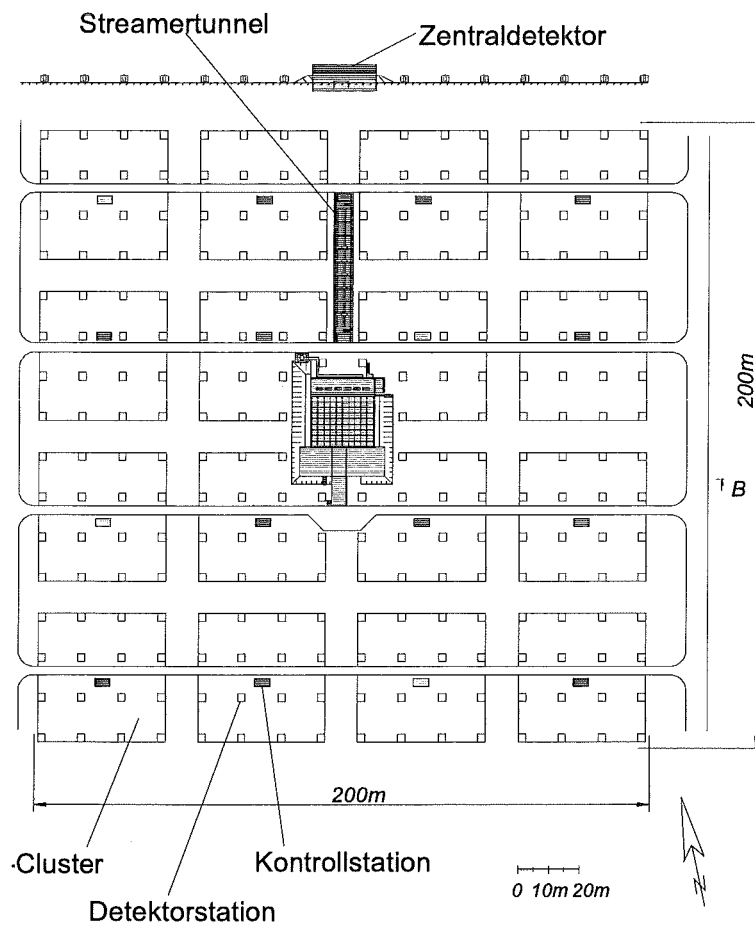


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des KASCADE-Experiments. Das Experiment besteht aus einem $200 \times 200 \text{ m}^2$ großen Detektorfeld zur Messung der elektromagnetischen und myonischen Komponente des Luftschauers. Im Zentrum befindet sich der sogenannte Zentraldetektor mit einem Hadronkalorimeter und zusätzlichen Myon- und e/γ -Detektoren. Der Streamertunnel im nördlichen Teil des Arrays soll die präzise Messung von Myonlateralverteilungen ermöglichen. Das Experiment ist so ausgelegt, daß alle drei Hauptkomponenten jedes einzelnen ausgedehnten Luftschauers - die elektromagnetische, die myonische und die hadronische Komponente - gemessen werden können.

TMS¹ bzw. TMP² beinhalten [30]. Das Kalorimeter dient zur Messung der Hadronen in ausgedehnten Luftschauern. Infolge der feinen Segmentierung werden für jedes Hadron im Energiebereich von 50 GeV bis 50 TeV einzeln Energie, Ort und Richtung bestimmt. Die Tiefe des Kalorimeters beträgt 11 hadronische Wechselwirkungslängen. Auf dem Kalorimeter befindet sich eine 5 cm dicke Bleischicht um die niederenergetische elektromagnetische Strahlung abzuschirmen. Die Eisen-Absorberplatten haben

¹ TetraMethylSilan, $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$

² TetraMethylPentan, C_9H_{20}

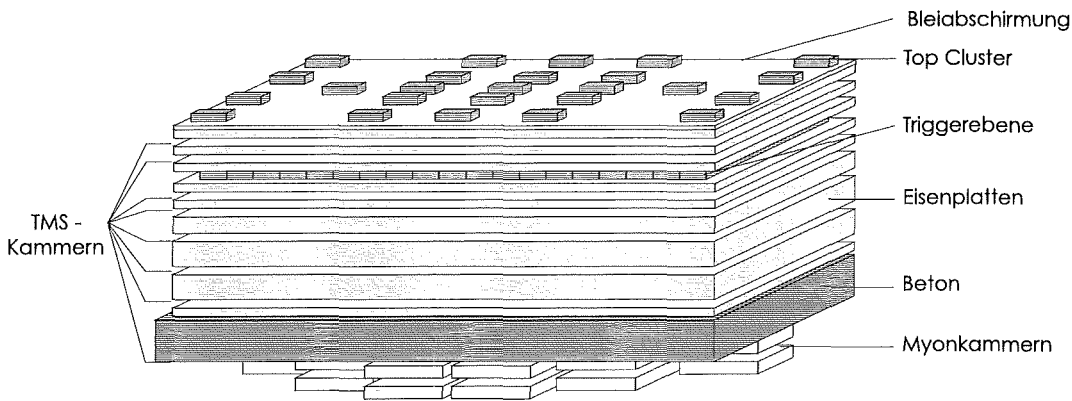


Abbildung 3.2: Zentraldetektor des KASCADE-Experiments. Der Zentraldetektor besteht aus einem Eisen-Sampling-Kalorimeter zur Messung von Hadronen eines Luftschauers. Dafür sind in 8 Lagen fein segmentierte Ionisationskammern (TMS bzw. TMP) installiert. In der dritten Lage des Detektors befindet sich die Triggerebene. Auf dem Dach wurde das Top-Cluster aufgebaut, das das Array bei der Messung der elektromagnetischen Komponente ergänzt. Unter dem Kalorimeter befinden sich Vieldraht-Proportionalkammern zum Myonnachweis.

Parameter	Erläuterung
N_e	Elektronzahl durch Array bestimmt
N_μ	Myonzahl durch Array bestimmt
N_μ^*	Anzahl der gemessenen Myonen im Keller des Zentraldetektors
N_h	Anzahl der Hadronen des Zentralkalorimeters
$N_h^{100\text{GeV}}$	Anzahl der Hadronen des Zentralkalorimeters mit rekonstruierter Energie größer 100 GeV
$\max E_h$	Energie des höchstenergetischen rekonstruierten Hadrons
ΣE_h	Energiesumme der im Zentralkalorimeter rekonstruierten Hadronen ($E_h > 100 \text{ GeV}$)

Tab. 3.1: Auswahl von Schauergrößen. Aufgelistet ist eine kleine Auswahl von Parametern die das KASCADE-Experiment in jedem Einzelereignis messen kann.

eine Dicke von 12 cm im oberen Teil, bis hin zu 36 cm im unteren Teil des Kalorimeters. In der dritten Lage des Eisenturms befindet sich die eine Triggerebene aus Plastikszintillatoren, die einerseits die Aufgabe hat, die Detektorkomponenten des Zentraldetektors zu triggern, andererseits aber auch Ankunftszeiten und Energiedepositionen von Teilchen messen kann [31]. Auf dem Dach des Kalorimeters wurde das Top-Cluster aufgebaut [32], das aus baugleichen Szintillationsdetektoren wie die Triggerebene besteht und zur Messung der elektromagnetischen Komponente im Bereich des Zentraldetektors dient. Zum einen können diese 50 Detektoren damit die Lücke der e/γ -Detektoren schließen, die durch den Zentraldetektor im Array entsteht, zum

anderen bieten sie aber auch die Möglichkeit bei sehr kleinen, zentralen Schauern, die unterhalb der Energieschwelle des Arrays liegen, die elektromagnetische Komponente auszuwerten. Unterhalb des Kalorimeters befinden sich großflächige, ortsauflösende Vieldraht-Proportionalkammern (MWPC³) [33], die zur Identifizierung derjenigen Myonen bestimmt sind, die das Kalorimeter durchdringen. Die Bestimmung von Anzahl, Ort und Richtung der Myonen oberhalb einer Energie von 2 GeV (Abschirmung) ist dabei möglich. Um die Richtung der Myonen bestimmen zu können, wurden jeweils 16 Detektoren in zwei Lagen gleicher Anordnung übereinander montiert. Der Abstand der Lagen zueinander beträgt 38 cm. Der Keller hat eine Ausdehnung von $20 \times 16 \text{ m}^2$, die gesamte sensitive Fläche der 32 Kammern beträgt $2 \times 131 \text{ m}^2$.

Ein wichtiges Grundprinzip des KASCADE-Experiments, möglichst viele Schauergrößen simultan (siehe Tabelle 3.1) zu messen, um durch deren Korrelationen die Primärenergie und Primärmasse so präzise wie möglich zu bestimmen, wird durch diese Kombination verschiedenster Detektorsysteme realisiert.

³ MultiWire Proportional Chamber

Klassische und moderne Klassifikationsverfahren

Contra principia negantem non est disputandum.

Zur Analyse der Meßdaten, die aus ausgedehnten Luftschauern gewonnen werden, sollen Neuronale Netze und klassische statistische Methoden Verwendung finden. Analytische Approximationen und Anpassungen an mittlere Verteilungen, z.B. der Schauergröße oder der Myonzahl, um Energie oder Masse der Primärteilchen zu bestimmen, werden den Meßdaten mit ihren starken intrinsischen Fluktuationen und der endlichen Auflösung der Detektoren nicht gerecht. Parametrisierungen von Monte-Carlo-Verteilungen haben den Nachteil, daß die anzupassende Funktion subjektiv ausgewählt und somit dem gestellten Problem nicht angemessen sein muß.

Bisherige Luftschauer-Experimente bestimmen Energie oder Masse nie individuell für jedes Primärteilchen, sondern gemittelt über alle gemessenen Ereignisse und geben parametrisierte Verteilungen an. Hierzu werden meist nur eine – selten zwei – Observablen zur Analyse verwendet. Mehrdimensionale Untersuchungen, die Korrelationen berücksichtigen, wurden bisher nicht veröffentlicht.

Die vorzustellenden Methoden versuchen diese Mängel zu beheben, indem sie entweder statistisch fundiert die Verteilungsfunktion der Monte-Carlo-Verteilungen „nicht-parametrisch“ approximieren (kNN¹-Schätzer bzw. Bayes-Klassifizierer), oder diese Verteilungen abstrahiert in Form sogenannter Gewichte in einem Iterationsverfahren „erlernen“². Das Hauptmerkmal der Verfahren ist zu erkennende Muster³ individuell

¹ k-Nächste-Nachbarn

² Den Vorgang der schrittweisen Verbesserung der Gewichte bezeichnet man als *Adaption* und ist eine Implementation von *Lernen*. Der Begriff des Lernens beschränkt sich hier auf die Verbesserung der Systemleistung gemäß eines zu definierenden Lernziels.

³ $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ stellt in der Regel den j -ten Eingabevektor des m -dimensionalen Eingaberaumes – z.B. der Größen $N_e, N_\mu, N_H, N_\mu^*, \dots$ – und y_j die bekannte Ausgabe, z.B. Masse oder Energie, dar.

anhand bekannter Muster (x_j, y_j) (den Monte-Carlo-Verteilungen) zu klassifizieren. Es muß ein Modell existieren, das die Trainingsmuster, d.h. die bekannten Muster, erzeugt. Hierin liegt die größte systematische Unsicherheit, wie Kapitel 5 zeigen wird. Bemerkte sei, daß diese Aussage generell für alle auf Monte-Carlo-Verteilungen basierende Verfahren, wie z.B. auch für Parametrisierungen, zutrifft.

Der kNN-Schätzer [34, 35, 36] und der Bayes-Klassifizierer [37, 38, 39] als klassische Methoden werden herangezogen, um die Güte der Schätzung und der statistischen Unsicherheiten zu bestimmen. Sie sind sehr rechen- und zeitintensiv, so daß ein Einsatz unter Einbeziehung großer Datenmengen undurchführbar wird. Läßt sich die Güte der Schätzung Neuronaler Netze mit der des kNN-Schätzers und des Bayes-Klassifizierers vergleichen, so kann das Neuronale Netz als schnelle Implementation dieser Verfahren angesehen werden. Der Vergleich der Methoden ist notwendig, da im Allgemeinen nicht gezeigt werden kann, daß die Streuung der Schätzung Neuronaler Netze im Grenzwert unendlich vieler Trainingsmuster ($\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(N)$) notwendigerweise gegen Null konvergiert und der Erwartungswert unverzerrt ist (im Gegensatz zu den übrigen Methoden).

Die vorgestellten Methoden sind Teil des Programmpakets ANI⁴, welches im Rahmen dieser Arbeit mit dem Programmator überarbeitet und erweitert wurde [40].

4.1 Die k-Nächste-Nachbarn Methode zur Parameterschätzung

Ein lokales Gebiet $R(x)$ des Eingaberaumes $\Omega = \{x_j\}$, d.h. im Raum der x_j Vektoren ($j \in \{1, \dots, L\}$), zentriert um einen zu schätzenden Punkt (Muster) x , wird so konstruiert, daß k nächste Nachbarn in $R(x)$ – unter Ausnutzung einer zu definierenden Norm bei gegebener Metrik – enthalten sind (siehe Abbildung 4.1a). Der zu schätzende Wert y (z.B. Energie des Primärteilchens) wird durch gewichtete Mittelung aller Werte y_j der Monte-Carlo-Ereignisse in $R(x)$ gewonnen (geometrische Konsistenzhypothese)

$$\hat{f}(x) \equiv y = \left(\frac{\sum_k \frac{1}{\|x-x_j\|} \cdot y_j}{\sum_k \frac{1}{\|x-x_j\|}} \right)_{x_j \in R(x)} \quad (4.1)$$

$$\text{mit } R(x) = \{x_j : \|x - x_j\| \leq d_{(k)}\}. \quad (4.2)$$

$d_{(k)}$ ist das k -te Element der sogenannten geordneten Statistik $\{\|x - x_j\|\}_1^N$. In ihr sind die Abstände aller Eingaben der Trainingsmuster zum Punkt x durch eine Metrik $d = \|\cdot\|$ aufsteigend geordnet.

$$\{\|x - x_j\|\}_1^N \equiv \{\|x - x_t\| \leq \|x - x_u\| \leq \|x - x_v\| \leq \dots\}$$

Es erweist sich als vorteilhaft die Mahalanobis Metrik zur Berechnung der Norm

$$d \equiv \|x_j - x\| = (x_j - x)^T C^{-1} (x_j - x) \quad (4.3)$$

⁴ Analysis and Nonparametric Inference

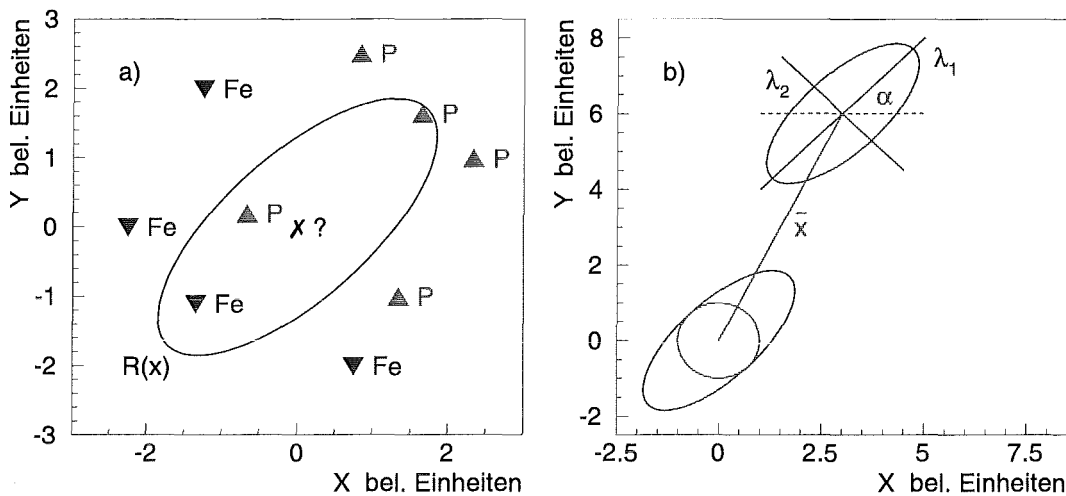


Abbildung 4.1: Die kNN Methode und die Mahalanobis Metrik. Abbildung a) stellt das Prinzip eines 3NN Schätzers dar. Das zu schätzende Muster (X) hat in einer 3NN Umgebung $R(x)$ einen Eisen- und zwei Protonvertreter, so daß das Muster als Proton klassifiziert wird. Abbildung b) zeigt die Transformation einer Verteilung durch Verwendung der Mahalanobis Metrik auf Normalverteilung.

mit der Kovarianz $C = \langle (x_j - x)(x_j - x)^T \rangle$ zu verwenden. Dabei wird die Variable x_j einer Verschiebung um x und einer Drehung und Skalierung durch C^{-1} unterworfen (siehe Abbildung 4.1b). Stimmen die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen der Punktwolke $\{x_j\}$ überein, so ist $C^{-1} = \Lambda^{-1}$ mit der Diagonalmatrix aus den Eigenwerten $\lambda_i^{-1} = \sigma_{ii}^{-2}$. Es findet keine Drehung mehr statt, sondern nur noch eine Skalierung mit $1/\sigma_{ii}^2$. Der so modifizierte Abstand stellt einen statistisch korrigierten Euklidischen Abstand dar. Praktisch bedeutet dies ein gleiches Gewichten aller Komponenten des Eingabevektors, da die Metrik skaleninvariant ist. Unter jeder linearen Transformation bleibt die Metrik unverändert. Es findet eine Hauptachsentransformation statt (PCA⁵). Die Zahl der nächsten Nachbarn ist von der Gesamtheit der Trainingsmuster und der Dimension des zugrunde liegenden Raumes abhängig und wird empirisch ermittelt.

4.2 Der Bayes-Klassifizierer

Angenommen es wären die *a priori* Wahrscheinlichkeit $P(\omega_i)$ mit $i \in \{1, \dots, M\} \equiv \{p, \dots, Fe\}$ und $p(x|\omega_i)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit mit der die Klasse ω_i auftritt und die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte bei gegebener Klasse ω_i das Ereignis x anzutreffen, bekannt, so kann auf die gesuchte *a posteriori* Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\omega_i|x)$, d.h. bei gegebenem Ereignis x die Klasse i anzutreffen, geschlossen werden

⁵ Principal Components Analysis

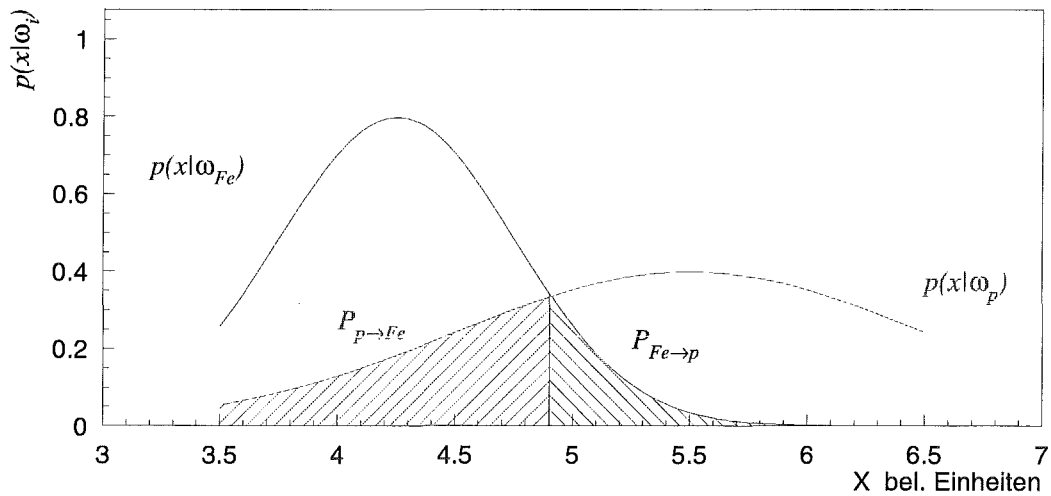


Abbildung 4.2: Entscheidungsregel der Klassifikation. Ein Ereignis x wird als Eisen (Fe) klassifiziert, falls $p(x|\omega_{Fe}) > p(x|\omega_p)$, ansonsten als Proton (p). Schraffiert dargestellt sind die Bereiche fehlklassifizierter Ereignisse. $P_{p \rightarrow Fe}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der Protonereignisse als Eisen mißklassifiziert werden ($P_{Fe \rightarrow p}$ analog).

vermöge des Bayes-Theorems

$$p(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{p(x)} \quad \text{mit } p(x) = \sum_j p(x|\omega_j)P(\omega_j) \quad (4.4)$$

(Herleitung siehe Anhang C).

$p(\omega_i|x)$ kann interpretiert werden als Wahrscheinlichkeit, mit der ein gegebenes reales KASCADE-Ereignis x als z.B. Proton $\equiv \omega_1$ oder Eisen $\equiv \omega_2$ klassifiziert wird. Eine einfache Entscheidungsregel im Falle zweier Klassen, ob ein Ereignis ω_1 oder ω_2 angehört ist (siehe Abbildung 4.2)

$$p(\omega_1|x) \stackrel{\omega_2}{<} p(\omega_2|x) \quad (4.5)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(x) := \frac{p(x|\omega_1) \stackrel{\omega_2}{<} P(\omega_2)}{p(x|\omega_2) \stackrel{\omega_1}{>} P(\omega_1)} \quad (4.6)$$

$\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$ nennt man den *Schwellwert des Likelihood Verhältnisses* $\mathcal{L}(x)$. Ist $p(\omega_1|x)$ größer als $p(\omega_2|x)$, so ist es wahrscheinlicher, daß das Ereignis x der Klasse ω_1 angehört, daher wird es dieser Klasse zugeordnet. Die Entscheidungsregel 4.5 läßt sich ohne weiteres auf mehr als zwei Klassen erweitern, indem das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichten $p(\omega_i|x)$ bestimmt wird.

Generell führt die Gleichung 4.6 nicht zur perfekten Klassifikation. Um die Güte der Entscheidungsregel zu prüfen, ist es notwendig die Wahrscheinlichkeit des Fehlers – nämlich die Wahrscheinlichkeit der Zuordnung zu einer falschen Klasse – zu bestimmen. Der bedingte Fehler bei gegebenem x , $r(x)$, entsprechend Gleichung 4.5 ist entweder $p(\omega_1|x)$, falls $p(\omega_1|x) < p(\omega_2|x)$, ansonsten $p(\omega_2|x)$. Bezeichnet man mit

$$r(x) = \min\{p(\omega_1|x), p(\omega_2|x)\} \quad (4.7)$$

das *Risiko* dafür, daß für Klasse i entschieden wird, obwohl Klasse j vorliegt, so ist das gesamte Risiko – *der Bayes-Fehler* – ein x fälschlicherweise in die Klasse i anstatt in j einzuordnen (siehe Abbildung 4.2)

$$\varepsilon = E\{r(x)\} = \int r(x)p(x)dx \quad (4.8)$$

$$= \int \min\{p(x|\omega_1)P(\omega_1), p(x|\omega_2)P(\omega_2)\}dx \quad (4.9)$$

$$=: P_{\omega_1 \rightarrow \omega_2}P(\omega_1) + P_{\omega_2 \rightarrow \omega_1}P(\omega_2). \quad (4.10)$$

Eine obere Grenze ε_0 für ε aus Gleichung 4.9 kann man angeben, falls man $\min\{a, b\} \leq \sqrt{ab}$ benutzt, um den Integranden zu vereinfachen⁶

$$\varepsilon_0 = \sqrt{P(\omega_1)P(\omega_2)} \int \sqrt{p(x|\omega_1)p(x|\omega_2)}dx =: \sqrt{P(\omega_1)P(\omega_2)} \exp^{-\mu}.$$

Speziell für Normalverteilungen führt dies auf den *Bhattacharyya Abstand* μ , der als wichtiges Maß für die Trennbarkeit zweier Verteilungen Verwendung findet

$$\mu = \frac{1}{8}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T \left(\frac{C_1 + C_2}{2} \right)^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{\left| \frac{C_1 + C_2}{2} \right|}{\sqrt{|C_1||C_2|}} \quad (4.11)$$

mit der Kovarianzmatrix $C_i = \langle (x_i - \bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i)^T \rangle$ der Klasse $i \in \{1, 2\}$. Der erste Term der Summe beschreibt die Trennbarkeit aufgrund der Unterschiede in den Mittelwerten der Verteilungen, der zweite die Trennbarkeit aufgrund der Unterschiede in den Kovarianzen.

Es bleibt nun die Frage, wie man zu den bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $p(x|\omega_i)$ und dem Bayes-Fehler gelangt, wenn man nur Muster der verschiedenen Klassen aber keine Verteilungsfunktion des Eingaberaumes zur Verfügung hat.

Abbildung 4.3 zeigt die Schätzung von $p(x|\omega_i)$ durch die Überlagerung von um die N_i Ereignisse der einzelnen Klassen i zentrierten Gaußverteilungen⁷

$$\hat{p}(x|\omega_i) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{w_j}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - x_{ji})^T C_i^{-1} (x - x_{ji})/\sigma^2\right). \quad (4.12)$$

⁶ Im Allgemeinen gilt $\min\{a, b\} \leq a^s \cdot b^{1-s}$ für $a, b \geq 0$ und $s \in [0, 1]$.

⁷ Im Folgenden sei mit x_{ji} der j -te Vertreter der Klasse i bezeichnet, die Gesamtmenge vorhandener Muster wird demnach ihrer Klasse i entsprechend indiziert.

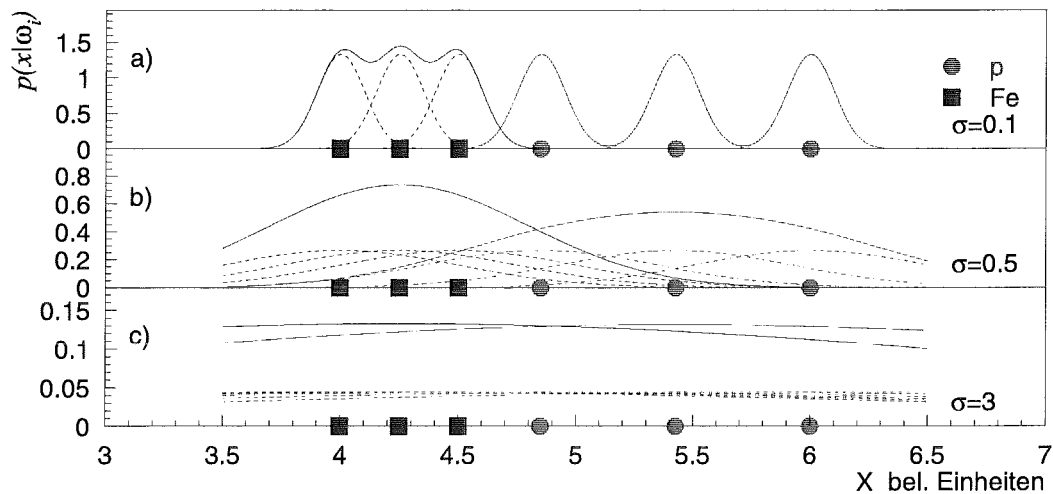


Abbildung 4.3: Approximierte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x|\omega_i)$. Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x|\omega_i)$ wird durch Superposition von n -dimensionalen Gaußverteilungen um die Monte-Carlo-Ereignisse approximiert. Die Streuung σ der Gaußverteilung ist ein freier Parameter, der dem gestellten Problem angepaßt wird. In a) ist σ zu klein. Es wird nur eine lokale Struktur erfaßt. In b) ergibt sich eine „glatte“ Dichteapproximation. In c) wird zu sehr geglättet. „Information“ geht verloren.

Somit wird der n -dimensionale Raum einer Klasse i , der durch die Eingabegrößen aufgespannt wird, mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsdichte überdeckt. Jedes Ereignis einer Klasse erhält das Gewicht w_j , mit der Bedingung, daß das Integral $\int \hat{p}(x|\omega_i) dx = 1$ ergibt. Somit lassen sich aufgrund äußerer Umstände dünn besiedelte Parameterbereiche, z.B. Ereignisse mit großer Energie ($\approx 10^{15}$ eV), die wegen ihres hohen Rechenzeitbedarfs nur in kleinerer Zahl simuliert sind, mit größerem Gewicht versehen, um ihren Einfluß auf die Dichte 4.12 zu erhöhen. Der Parameter σ in 4.12 gibt die Breite der einzelnen Gaußverteilungen an und muß empirisch ermittelt werden. Ist σ zu klein (Abb. 4.3a), werden nur lokale Eigenschaften des Raumes erfaßt und nicht generalisiert, also von den einzelnen Ereignissen auf eine kontinuierliche Dichte abstrahiert. Ist σ zu groß (Abb. 4.3c), wird der gesamte Raum mit einer nahezu konstanten Dichte ausgefüllt, was die Klassengrenzen nahezu aufhebt und keine Entscheidung mehr ermöglicht. Zur Bestimmung des optimalen Parameters σ wird die Schätzung $\hat{p}(x|\omega_i)$ aus Gleichung 4.12 für typischerweise fünf bis zehn unterschiedliche Werte errechnet und der Median der erhaltenen geordneten Statistik der Bayes-Fehler ϵ aus Gleichung 4.8 bezüglich der unterschiedlichen Breiten als bester, weil ausgewogener Wert für die weitere Analyse benutzt

$$\{ \|\epsilon\| \}_1^k \equiv \{ \|\epsilon_t\| \leq \|\epsilon_u\| \leq \|\epsilon_v\| \leq \dots \}.$$

Der Bayes-Fehler ϵ aus Gleichung 4.10 läßt sich ebenso durch die gegebenen Muster

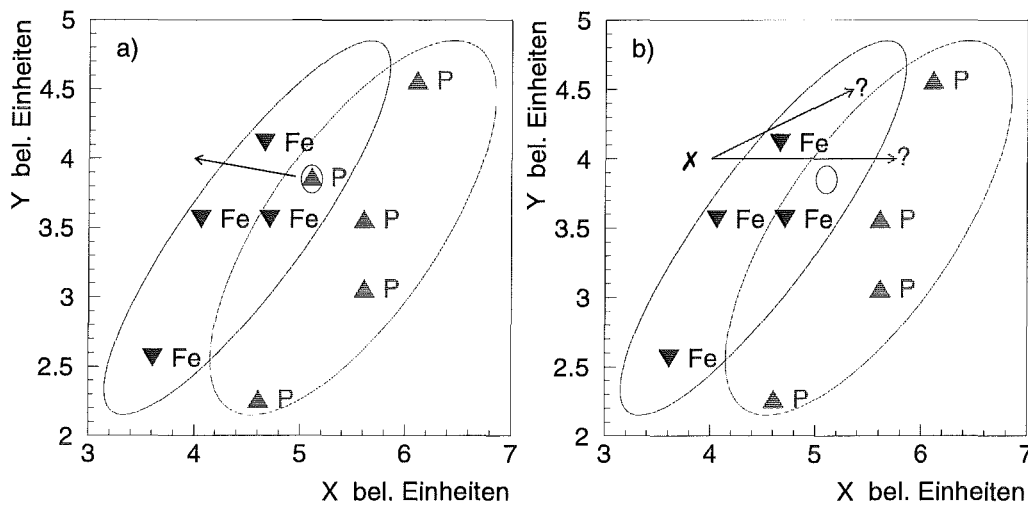


Abbildung 4.4: „One leave out for a time“ Test. Ein bekanntes Muster wird der Trainingsmenge entnommen a) und getestet welcher Klasse es zugeordnet wird b).

bestimmen. Hierzu wird jedes Muster x_{ji} einmal seiner Klasse entnommen – daher die Bezeichnung *One leave out for a time* – und die Schätzung 4.12 für alle vorhandenen Klassen berechnet (siehe Abbildung 4.4). Die Zuordnung zu einer Klasse bestimmt Gleichung 4.5. Gilt $\hat{p}(x|\omega_1)P(\omega_1) < \hat{p}(x|\omega_2)P(\omega_2)$, so wird x_{ji} der Klasse zwei zugeordnet, ansonsten der Klasse eins. Eine Schätzung für $P_{\omega_i \rightarrow \omega_k}$ aus Gleichung 4.10 erhält man durch einfaches Aufsummieren der mißklassifizierten Ereignisse $n_{\omega_i \rightarrow \omega_k}$, die der Klasse i entstammen, aber der Klasse k zugeordnet werden

$$\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_k} = \frac{n_{\omega_i \rightarrow \omega_k}}{n_i}. \quad (4.13)$$

Für ein Klassifikationsproblem kann nun durch den vorgestellten Bayes-Klassifizierer eine Entscheidung bezüglich der Klassenzugehörigkeit und über den Klassifizierungsfehler getroffen werden.

Aufgrund der Fehlklassifizierung erhält man nicht den wahren Anteil n_i^* einer Klasse i . Die mißklassifizierten Anteile $\hat{P}_{\omega_k \rightarrow \omega_i}$ vergrößern n_i^* , bzw. die mißklassifizierten Anteile $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_k}$ vermindern den wahren Anteil n_i^* zu n_i . Betrachtet man z.B. nur die zwei Klassen Proton und Eisen und möchte eine Menge unbekannter Muster klassifizieren, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_{\omega_p \rightarrow \omega_p} & \hat{P}_{\omega_p \rightarrow \omega_{Fe}} \\ \hat{P}_{\omega_{Fe} \rightarrow \omega_p} & \hat{P}_{\omega_{Fe} \rightarrow \omega_{Fe}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_p^* \\ n_{Fe}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_p \\ n_{Fe} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so gibt der Vektor $(n_p^*, n_{Fe}^*)^T$ damit anteilig die Häufigkeit von Protonen bzw. Eisen in der Menge der betrachteten Ereignisse an. All-

gemein ergibt sich für M Klassen, wenn man nach n_i^* auflöst

$$\sum_j A_{ij}^{-1} n_j = n_i^* \quad \text{mit} \quad A_{ij} = \hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_j}. \quad (4.15)$$

Sobald $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_j} \gg 0$ für $i \neq j$ gilt (z.B. $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_j} \approx \hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_i}$), ist die Bestimmung des wahren Anteils nicht mehr aussagekräftig, denn die Klassifikationsmatrix A_{ij} repräsentiert das kummulierte *a priori* Wissen über die Möglichkeit der Trennung der M Klassen. Die Diagonalelemente $A_{ii} = \hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_i}$ geben den Anteil korrekt klassifizierter Ereignisse an. Als Maß für die mittlere korrekte Klassifizierung wird das geometrische Mittel der Diagonalelemente verwendet

$$G = \sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_i}} \quad (4.16)$$

und als Separabilitätsindex G oder kurz Index G bezeichnet.

4.2.1 Das Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung methodischer Fehler

Die Fehler der erhaltenen Anteile in 4.15 sind eine Funktion der Genauigkeit der Klassifikation und der Genauigkeit der Bestimmung der Mißklassifikationsmatrix A_{ij} . Da Simulationen von Schauerkaskaden mit zunehmender Primärenergie immer zeitintensiver werden, muß man Verfahren anwenden, die im statistischen Sinne die volle Information der bereitgestellten Simulationsereignisse ausschöpfen, um Fehler statistischer Natur zu minimieren.

Eine solche Methode ist das Bootstrap-Verfahren [41, 42, 43]. Sie benutzt die aktuelle Datenmenge $\Omega = \Omega_0$ mit N Datenpunkten, um eine Anzahl K synthetischer Datenmengen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_K$ ebenso mit N Datenpunkten zu erzeugen. Es werden jeweils einfach N Datenpunkte mit Zurücklegen aus Ω_0 gezogen. Da immer wieder zurückgelegt wird, erhält man nicht die ursprüngliche Menge, sondern eine Menge mit einem Bruchteil der originalen Punkte. Typischerweise $\sim 1/e \approx 37\%$ werden ersetzt durch Duplikate. Unter Benutzung der Datenmenge Ω_k mit $k \in \{1, \dots, K\}$ gewinnt man K Schätzungen n_{ik}^* aus Gleichung 4.15. Deren Mittelwert und Streuung geben ein Maß für die statistische Unsicherheit aufgrund der endlichen Monte-Carlo-Datenmenge an. Im Grenzwert unendlich vieler Datenpunkte ($N \rightarrow \infty$) läßt sich nämlich unter Annahme geeigneter Verteilung der Grundgesamtheit (reale Daten) beweisen, daß die statistischen Momente der Bootstrampmengen Ω_k gegen die der wahren Verteilung konvergieren.

4.3 Neuronale Netze

In Anlehnung an die neurobiologische Informationsverarbeitung des menschlichen Gehirns (Körpers) wurden in den letzten Jahrzehnten Anstrengungen unternommen,

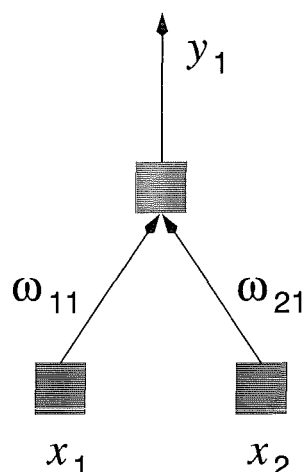


Abbildung 4.5: Ein formales Neuron. Ein formales Neuron addiert mit ω_{i1} gewichtete Eingabegrößen x_i und berechnet die Ausgabe $y_1 = f(\sum_i \omega_{i1} x_i)$.

die informationsverarbeitenden Vorgänge in Algorithmen – sogenannte Neuronale Netze – abzubilden [44]. Das Ziel Neuronaler Netze ist es aber nicht, biologische Strukturen vollständig zu simulieren. Vielmehr sollen lediglich als wichtig erscheinende Grundkonzepte übernommen werden. Die sich damit ergebenden Netze sind keine Neuronen-Netze sondern nur „neuronal“, also neuron-ähnliche Netze.

4.3.1 Das Neuron

Vielen der Modelle gemein ist das formale Neuron [45], auch Zelle genannt. Hierbei wird ein Neuron als ein logisches Schwellwertelement betrachtet. Ein solches Neuron besitzt eine beliebige Anzahl von Eingängen x_i sowie einen Ausgang y_1 . An jedem Eingang liegt im binären Fall einer von zwei möglichen Werten an (z.B. 1/0). Das Schwellwertelement multipliziert jeden dieser Werte mit einem jeder Eingangsleitung zugeordneten Gewicht ω_i und addiert die sich ergebenden Werte. Überschreitet die so gebildete Summe einen bestimmten Schwellwert S_1 so gilt das Neuron als erregt und gibt über seine Ausgangsleitung einen entsprechenden Wert ab. Dieser wird mit Hilfe der sogenannten Ausgabefunktion $f(\cdot)$ ermittelt (siehe Abbildung 4.5)

$$y_1 = f\left(\sum_i \omega_{i1} x_i - S_1\right). \quad (4.17)$$

In einem binären Modell kann zum Beispiel $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ als Ausgabefunktion gewählt werden (Heavyside-Funktion). Dieses Modell vernachlässigt selbstverständlich eine Vielzahl von Faktoren, wie bidirektionale elektrische Synapsen, Fragen der Energieversorgung sowie die Weiterleitung der Signale innerhalb der Dendriten und Synapsen eines biologischen Neurons, die man mit Hilfe von Differentialgleichungen (Kabelgleichungen) beschreiben kann [46].

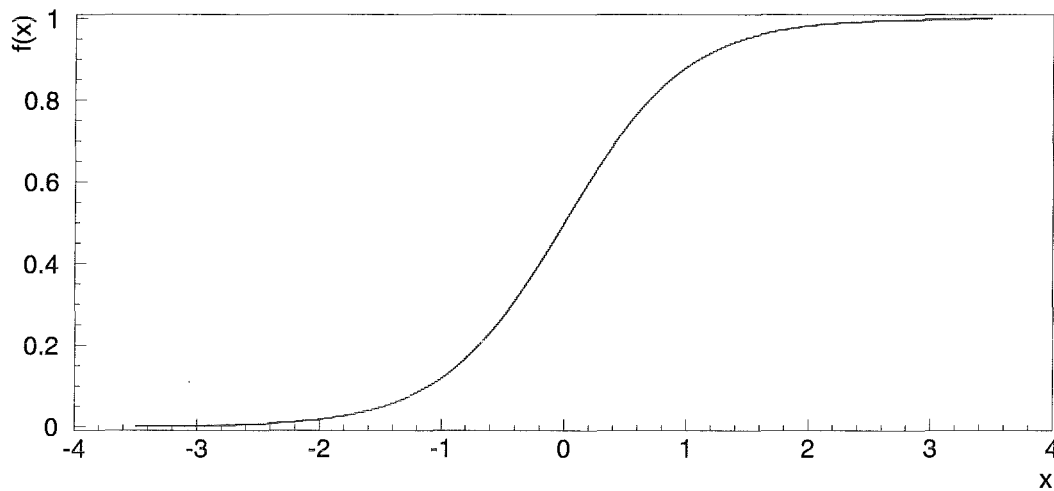


Abbildung 4.6: Die logistische Funktion. Die logistische Aktivierungsfunktion löst das Problem, daß ein Netzwerk häufig auf Signale kleiner als auch sehr großer Amplitude reagieren muß, wobei es bei kleinen Amplituden wesentlich sensibler sein muß. Sie hat daher ihre höchste Sensibilität, d.h. ihre größte Steigung im Bereich um den „Arbeitspunkt“, der Schwelle S (hier $S = 0$).

Biologische Neuronen liefern oft eine nicht diskrete Ausgabe. Die Nichtlinearität der Ausgabefunktion ist eine weitere universelle Eigenschaft biologischer Neuronen. Dabei ist eher die Existenz dieser Nichtlinearität als ihre genaue Form von Bedeutung. Trotzdem findet in der Literatur eine Vielzahl von Aktivierungsfunktionen Verwendung:

- die Identität,
- linear bis Sättigung,
- $\sin(x)$ bis Sättigung,
- die logistische Funktion $1/(1 + \exp(-x))$,
- der tangens hyperbolicus $\tanh(x)$,
- ...

Die meistverwendete Funktion ist die logistische Funktion (siehe Abbildung 4.6), da sie stetig differenzierbar ist, was praktische Vorteile zur Berechnung der Gewichte ω_{ij} mit sich bringt. Sie wird für die hier durchgeführten Analysen verwendet.

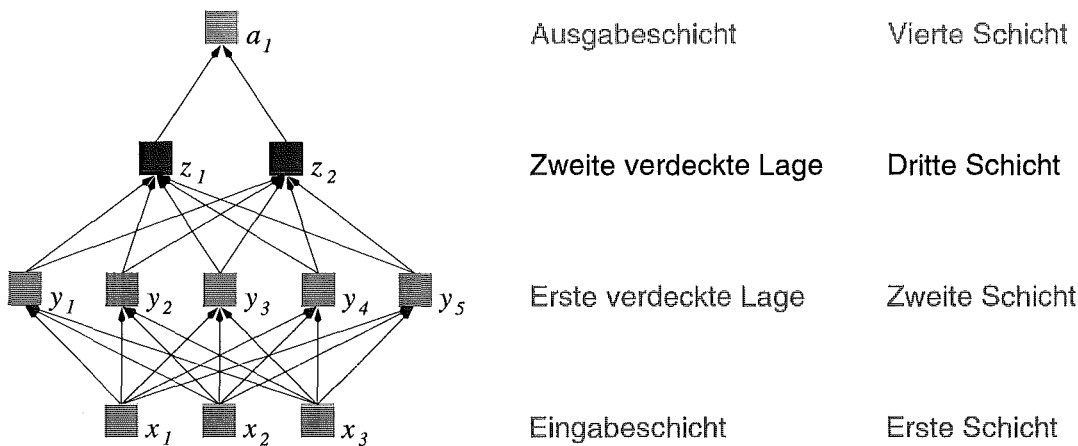


Abbildung 4.7: Beispiel eines Neuronales Netzes. Ein feedforward-Netzwerk mit 3 Schichten von Verbindungen und 4 Zellschichten. Das Netzwerk besitzt eine $3 \times 5 \times 2 \times 1$ Topologie.

4.3.2 Die Topologie Neuronaler Netzwerke

Es lässt sich zeigen [45], daß durch geeignete Kombinationen derartiger formaler Neuronen jeder endliche logische Ausdruck berechnet werden kann. Logische Funktionen wie AND, OR oder NOT können mit Hilfe eines einzigen Neurons dargestellt werden. Eine komplexere Funktion, z.B. XOR, benötigt jedoch mehrere Neuronen. Diese Aussage ist in erster Linie von theoretischer Bedeutung, da es besagt, daß mit Hilfe Neuronaler Netze alles das berechnet werden kann, was auch mit herkömmlichen Methoden berechenbar ist. Dies ist aber für Neuronale Netze nicht von Bedeutung, da sie ja eingesetzt werden, um Phänomene zu modellieren, die mit herkömmlichen Verfahren nur sehr schwer oder überhaupt nicht zu berechnen sind.

Viele der in der Praxis verwendeten Neuronalen Netze haben nur Verbindungen in eine Richtung, von den Eingabeneuronen (*input units*) in Richtung der Ausgabeneuronen (*output units*). Man kann dann die Zellen nach ihrer Position im Netzwerk klassifizieren. Für diesen sehr häufig verwendeten Spezialfall von *feedforward-Netzen* ist in Abbildung 4.7 ein Beispiel graphisch dargestellt.

Es handelt sich um ein 4-stufiges Netz, d.h. um ein Netzwerk mit 3 Schichten „trainierbarer“ Verbindungen und einer Eingabeschicht. Zellen der Eingabeschicht leiten die Eingabe nur in das Netz weiter, Zellen der Ausgabeschicht geben die Ausgabe des Netzes nach außen und heißen daher Ausgabeneuronen. Zellen der mittleren Schicht(en) dienen der Informationsverarbeitung innerhalb des Neuronales Netzes und werden als verdeckte Neuronen (*hidden units*) bezeichnet, weil sie für einen außenstehenden Beobachter nicht zu erkennen sind.

In Abbildung 4.7 handelt es sich um ein vollständig ebenenweise verbundenes Netzwerk einer $3 \times 5 \times 2 \times 1$ Topologie, bei dem jede Zelle der Schicht k alle Zellen der Schicht $k + 1$ als Nachfolger besitzt.

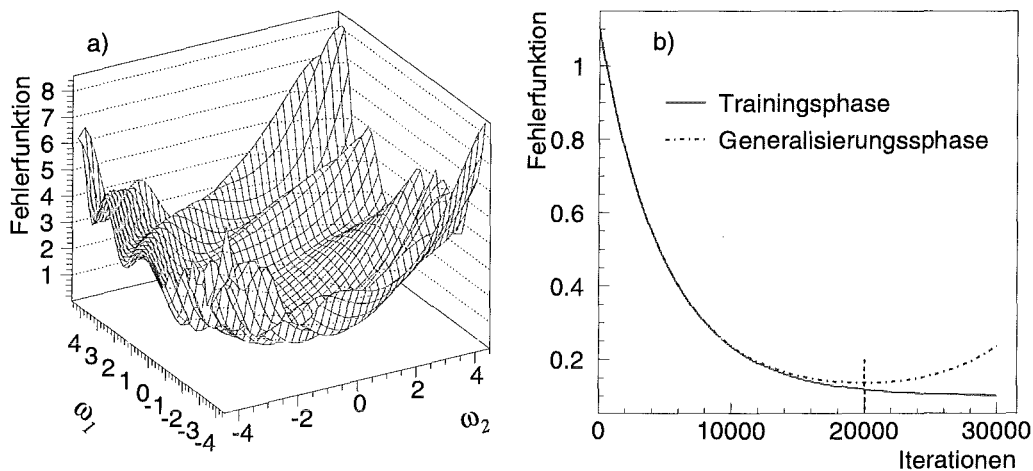


Abbildung 4.8: Fehlerfunktion eines Neuronalen Netzes. Fehlerfläche a) eines Neuronalen Netzes als Funktion der Gewichte ω_1 und ω_2 . Fehlerfunktion b) in Abhängigkeit von der Zahl der Iterationen.

Seine Ausgabe a_1 berechnet sich durch sukzessive Anwendung der Gleichung 4.17

$$a_1 = f\left(\sum_i \omega_{i13} z_i - S_{13}\right) \quad (4.18)$$

$$z_j = f\left(\sum_i \omega_{ij2} y_i - S_{j2}\right) \quad (4.19)$$

$$y_j = f\left(\sum_i \omega_{ij1} x_i - S_{j1}\right) \quad (4.20)$$

Die Indizes der Gewichte ω_{ijk} und der Schwellwerte S_{jk} geben die Position des Neurons i in der Lage k an, welches durch das Neuron j der Lage $k-1$ angeregt wird. Anhand dieser Gleichungen kann man den funktionalen Zusammenhang für beliebige Netze erkennen.

4.3.3 Die Lernregel Neuronaler Netze

Die Lernregel ist die entscheidende Komponente Neuronaler Netze, da sie es erlaubt, daß ein Netz eine gegebene Aufgabe (weitgehend) selbständig aus Beispielen lernt. Die am häufigsten verwendete Art des Lernens ist die Modifikation der Stärke ω_{ijk} von Verbindungen und des Schwellwertes S_{ij} von Neuronen. Darüber hinaus läßt sich noch daran denken, Lernen durch Löschen oder Entwickeln von Verbindungen, Löschen oder Entwickeln neuer Zellen, Modifikation der Aktivierungsfunktionen u.ä. zu implementieren.

Die Zielfunktion oder auch Fehlerfunktion $E(\Omega) = E(\omega_{ijk})$ wird entsprechend dem gewünschten Lernziel erstellt. Häufig wird der quadratische Abstand ($c_i = 2$) zwi-

schen erwarteter (t_i) und realer (a_i) Ausgabe als Einzelfehler eines gegebenen Musters i verwendet. Der Gesamtfehler E ergibt sich aus der Summe der Fehler über alle N Muster

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i \quad (4.21)$$

mit

$$E_i = \frac{w_i}{2} |t_i - a_i|^{c_i}. \quad (4.22)$$

Die Fehlerfunktion (Abbildung 4.8a) wird in Abhängigkeit der Gewichte minimiert, d.h. die Gewichte werden so bestimmt, daß die mittlere Abweichung über alle Trainingsmuster (die zum Lernen benutzten Muster) minimal (subminimal) wird. Pro Epoche bzw. pro Iteration werden die Gewichte z.B. durch einen sogenannten Backpropagation Algorithmus [46] verändert, der ähnlich dem SIMPLEX-Algorithmus [47] zur Funktionsminimierung entlang des steilsten Abstiegs das Minimum sucht, oder durch „Abtasten“ des gesamten Gewichtsraumes mittels pseudozufallsverteilter⁸ Gewichtsmatrizen ω_{ijk} . Zusätzlich kann jedes einzelne Muster i mit einer Gewichtung w_i versehen werden (Gleichung 4.22), um Gebiete geringer Dichte stärker zu betonen.

Nach dieser Trainings- oder Lernphase wird die Generalisierung durchgeführt. Ein weiterer unabhängiger Satz von Mustern wird benutzt, um zu testen, ob das Lernen nicht zu einem „Übertrainieren“ führt (Abbildung 4.8b). Die Fehlerfunktion der Trainingsmuster wird hierbei zwar mit zunehmender Zahl an Iterationen immer kleiner, bei der Berechnung der Fehlerfunktion der unabhängigen Muster zeigt sich aber, daß ab einer gewissen Zahl der Iterationen diese nicht mehr ab- sondern zunimmt. Das System erlernt die spezifischen Eigenheiten der Trainingsmuster.

⁸ Ein oft benutzter Algorithmus ist die Sobol-Methode, die zahlentheoretisch basierend ein selbstähnliches Raster von Punkten im Raum R^n generiert [48].

Die Simulation des KASCADE-Experiments

*Quae vero a natura fiunt, recta se
habent, et conservantur in optima
sua compositione.*

Kopernikus (1473-1543 p. Chr. n.)

Beobachtet man indirekt die kosmische Strahlung durch Messung von Sekundärteilchen am Erdboden, so ist man auf Modelle zur Beschreibung der Luftschauerentwicklung angewiesen. Sie beschreiben die Entwicklung jedes einzelnen Luftschauers in Abhängigkeit von Energie und Masse des initiierten Primärteilchens und äußeren physikalischen Randbedingungen wie Erdmagnetfeld und Atmosphäre. Der physikalische Sachverhalt ist zum einen nur unzulänglich analytisch zugänglich, zum anderen macht die Komplexität der Prozesse eine analytische Beschreibung unmöglich, so daß man auf Simulationsrechnungen zurückgreifen muß.

5.1 Die Modellierung der Wechselwirkungen

Zur Modellierung ausgedehnter Luftschauer gibt es verschiedene Generatoren, die unterschiedliche theoretische oder auch phänomenologische Ansätze zur Beschreibung hadronischer Wechselwirkungen beinhalten. Üblicherweise werden Modelle „ge-eicht“, so daß sie die Daten der Collider-Experimente reproduzieren. Aber keines der Experimente registriert Teilchen in extremer Vorwärtsrichtung; sie verschwinden im Strahlrohr. Diese Teilchen tragen den Großteil der Energie und transportieren diese durch die Atmosphäre. Daher sind sie von größter Bedeutung bei der Entwicklung eines Luftschauers in der Atmosphäre.

Es wurden in der Vergangenheit einige Modelle entwickelt, die, basierend auf einfachen Annahmen oder ausgefeilteren theoretischen Grundlagen, Collider-Daten reproduzieren. Ihre Vorhersagen weichen mitunter aber deutlich voneinander ab, wenn sie Aussagen über typische EAS-Energien und kleine Winkel machen [18].

Im Rahmenprogramm CORSIKA [4] werden fünf alternativ wählbare hadronische Wechselwirkungsmodelle für Energien ab $E_{Lab} = 80 \text{ GeV}$ per Nukleon zur Verfügung gestellt. Neben den ursprünglich zwei Modellen HDPM¹ [49, 4] und VENUS² [50] wurden die Modelle Sibyll³ [51, 52], QGSJet⁴ [53] und DPMJet⁵ [54] in das Programm eingebunden. Bei niedrigen Energien im Bereich der Resonanzen in den Wirkungsquerschnitten werden hadronische Wechselwirkungen durch das Programmpaket GHEISHA⁶ [55] oder alternativ durch eine Implementation des Isobarenmodells [56] realisiert.

VENUS, QGSJet, und DPMJet beschreiben hadronische Wechselwirkungen der Kerne und Konstituenten auf der Basis der Gribov-Regge-Theorie, die die elastische Streuung und den totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie erfolgreich reproduzieren kann. Dem Anstieg der Wirkungsquerschnitte wird durch mehrfachen Austausch superkritischer Pomeronen Rechnung getragen. Inelastische Prozesse werden durch geschnittene Pomeronen, die zu je zwei Farbstrings, die nachfolgend in farbneutrale Hadronen fragmentieren, modelliert.

Die Behandlung der Streuung ist für alle Modelle die die Gribov-Regge-Theorie zugrunde legen gleich. Sie unterscheiden sich in der Implementation von Produktion und Zerfall der Strings. Sibyll ist ein *Minijet*-Modell. Es simuliert hadronische Reaktionen als Kombination zugrundeliegender weicher Kollisionen, in denen zwei Strings generiert werden. In Anlehnung an das Dual-Parton-Modell [57] stellt man sich eine weiche Wechselwirkung als Austausch eines niederenergetischen Gluons zwischen je einem Quark von Projektil und Target vor. Die resultierenden zwei Farbstrings fragmentieren zu farblosen Hadronen.

HDPM ist ein rein phänomenologisches Modell, das detaillierte Parametrisierungen von Teilchenproduktionen der $p\bar{p}$ Collider-Daten benutzt. Die Extrapolation zu Energien oberhalb durch Beschleuniger zugänglicher Bereiche erscheint daher willkürlich. Die Gribov-Regge-Modelle simulieren Kern-Kern-Stöße im Detail und erlauben mehrfache Wechselwirkungen der Nukleonen von Projektil und Target. HDPM und Sibyll wenden das Superpositionsmodell [29] an, um unabhängig die Reaktionen der Projektilnukleonen zu beschreiben.

QGSJet, DPMJet und Sibyll berücksichtigen die Minijet-Produktion, die bei höheren Energien dominiert und zu einem Anstieg der Wirkungsquerschnitte und Teilchen mit höherem Transversalimpuls p_{\perp} führt. Im Gegensatz zu Sibyll ist der Anstieg der

¹ Hadronic interactions inspired by the Dual Parton Model

² Very Energetic Nuclear Scattering

³ Kein eigentliches Akronym. Name für weissagende Frau im Altertum.

⁴ Quark-Gluon-String model with Jet production

⁵ Dual Parton Model with Jet production

⁶ Gamma Hadron Electron Interaction Shower Algorithm

	DPMJet	HDPM	QGSJet	Sibyll	VENUS
Gribov-Regge	+		+		+
Minijets	+		+	+	
Sek. Wechselwirkungen					+
Kern-Kern-W.W.	+		+		+
Superposition		+		+	
Max. Energie [GeV]	10^9	10^8	$> 10^{11}$	$> 10^{11}$	5×10^7

Tab. 5.1: Grundlegende Eigenschaften der Modelle. Angegeben sind die wichtigsten Eigenschaften der in CORSIKA eingebauten hadronischen Wechselwirkungsmodelle [18].

Wirkungsquerschnitte bei QGSJet und DPMJet nur teilweise auf den aus den Minijets stammenden Beitrag zurückzuführen.

VENUS ist das einzige Modell, das Wechselwirkungen intermediärer Strings und sekundärer Hadronen miteinander erlaubt. Dies führt zu einer besseren Übereinstimmung mit Endzuständen, die an Collider-Experimenten gemessen wurden. Jedes dieser Modelle benutzt seine eigenen inelastischen hadronischen Wirkungsquerschnitte, die zur Berechnung der mittleren freien Weglänge bis zur nächsten Kollision dienen. Eine detaillierte vergleichende Beschreibung der Modelle findet sich in [18]. Zusammenfassend sind in Tabelle 5.1 die Hauptmerkmale der verschiedenen Modelle aufgelistet. Die maximalen Energien, bis zu denen Luftschauer erzeugt werden können, sind nicht durch physikalische sondern rein programmtechnische Eigenheiten der verschiedenen Generatoren gegeben, so daß sehr große Unsicherheiten in den Vorhersagen zu erwarten sind.

Die elektromagnetischen Prozesse der Luftschauer werden detailliert durch den modifizierten EGS4⁷-Code [58] beschrieben. EGS4 wird erfolgreich in Teilchenphysik-Experimenten zur Simulation elektromagnetischer Vorgänge in Detektoren benutzt und beinhaltet alle relevanten Prozesse der elektromagnetischen Wechselwirkung. Alternativ können statt der zeitintensiven EGS4-Rechnung auch Lateralverteilungen anhand der NKG-Funktion (siehe Gleichung 5.1) simuliert werden.

5.2 Simulationsrechnungen

Die letztendliche Simulation von Luftschauern für das KASCADE-Experiment erfolgt in einem zweistufigen Prozeß. Zuerst werden Primärteilchen mit gewünschter Energie und Art unter Benutzung des oben erwähnten CORSIKA-Programms in die Atmosphäre eingeschossen und für jedes einzelne Teilchen oberhalb definierter Energieschwellen deren Spur verfolgt.

In einem zweiten Schritt wird die Detektorantwort simuliert. Treffen die Teilchen einen

⁷ Electron Gamma Shower Code Version 4

Komponente	Observable	Energieschwelle reg. Teilchen	Winkel- auflösung	Orts- auflösung	Rel. Fehler ¹¹
Array ¹²	Elektronen	10 MeV	0.3°	$\sigma_r = 2.5$ m	7%
	Myonen	250 MeV			16%
Kalorimeter	Hadronen	20 GeV	6°	$\sigma_r = 30$ cm	8%
MWPCs	Myonen	2 GeV	1°	$\sigma_x = 0.73$ cm	
				$\sigma_y = 1.43$ cm	

Tab. 5.2: Auflösung typischer Rekonstruktionsgrößen.

Detektor, so wird dessen Ansprech- und Antwortverhalten durch das Detektorsimulationsprogramm CRES⁸ (Version 1.14/03), basierend auf dem Programmpaket GEANT⁹ (Version 3.21/04) [59], im Detail simuliert. Die hadronische Wechselwirkung wird durch das Unterprogramm FLUKA¹⁰ [60] beschrieben. Die vollständige Geometrie der aktiven und passiven Detektorkomponenten sind entsprechend den realen Ausmassen berücksichtigt. Ankunftszeit, deponierte Energie oder Zahl angesprochener Drähte werden je nach Detektortyp unter Berücksichtigung der gemessenen Auflösungen bestimmt (Tabelle 5.2).

Um systematische Abhängigkeiten zu analysieren, wurden Simulationsrechnungen mit den Modellen VENUS, QGSJet und Sibyll durchgeführt. Die optional zur Verfügung stehenden Routinen EGS4 und GHEISHA fanden zur Simulation der elektromagnetischen bzw. niederenergetischen hadronischen Wechselwirkung Verwendung. Für primäre Protonen als auch Eisenkerne wurden je nach Modell 2000-3500 Luftschauer im Energieintervall $10^{14} \text{ eV} \leq E \leq 3.16 \times 10^{16} \text{ eV}$ berechnet. Die Abhängigkeit der Masse von den betrachteten Größen wird anhand von Simulationen der Modelle VENUS und QGSJet für helium-, sauerstoff- sowie siliziuminduzierte Luftschauer im Energiebereich $10^{14} \text{ eV} \leq E \leq 10^{16} \text{ eV}$ untersucht. Im Verlauf der Analyse zeigte sich, daß das Modell Sibyll nur sehr bedingt die Meßdaten reproduzieren kann. Andere Analysen (siehe zum Beispiel [30]) führen zum gleichen Schluß. Die Autoren überarbeiten das Programm zur Zeit. Daher wurden keine Vertreter der intermediären Gruppe simuliert. Der Zenitwinkel Θ ist so gewählt, daß die Schauer außerhalb der Atmosphäre isotrop im Winkelbereich $15^\circ \leq \Theta \leq 20^\circ$ verteilt sind, bzw. der Azimutwinkel im Winkelbereich $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ liegt. Der Energiebereich ist in logarithmisch äquidistante Intervalle der Breite $\Delta \log_{10}(E/[\text{GeV}]) = 0.25$ unterteilt, innerhalb derer die Primär-

⁸ Cosmic Ray Event Simulation

⁹ Kein eigentliches Akronym. Französisch für Gigant.

¹⁰ FLUktuierende KAskade

¹¹ Gemeint ist der Fehler bei simulierten Ereignissen in der Bestimmung der Gesamtzahl der Teilchen N_i im Vergleich zur simulierten Anzahl $N_{i,0}$.

¹² Die Ortsauflösung und Winkelauflösung des Detektorfeldes bezieht sich auf die Bestimmung des Schauerzentrums als Durchstoßpunkt der Einfallsrichtung des primären Teilchens durch die Beobachtungsebene.

energie E gleichverteilt ist. Erdmagnetfeld und Beobachtungsniveau sind entsprechend der geographischen Lage des Experiments vorgegeben. Jahreszeitliche Temperatur- und Druckschwankungen sind nicht berücksichtigt. Es ist notwendig, die Zahl der simulierten Luftschauer wesentlich zu erhöhen, dies wird aber limitiert durch die zur Verfügung stehenden Computerressourcen. Die Rechenzeit belief sich auf über 5000 h CPU-Zeit auf DEC-Alpha-Workstations (500 MHz) und die produzierte Datenmenge beträgt über 300 GByte.

5.3 Rekonstruktion der Luftschauerobservablen

Sowohl simulierte als auch gemessene Schauer werden identischen Rekonstruktionsalgorithmen unterzogen, bei denen aus den einzelnen Signalen der Detektoren physikalische Größen gewonnen werden, die für die weitere Analyse Verwendung finden. Abbildung 5.1 zeigt schematisch den Ablauf der Simulationsprozedur. Das Programmpaket KRETA¹³ vereinigt die Rekonstruktionsalgorithmen der unterschiedlichen Detektorkomponenten, um eine gemeinsame Analyse zu ermöglichen. So können Observablen sukzessiv unter Ausnutzung rekonstruierter Größen anderer Komponenten in einem weiteren Schritt verbessert werden¹⁴.

Die rekonstruierten Observablen sind mit zum Teil erheblichen Unsicherheiten behaftet (siehe Tabelle 5.2). Das Schauerzentrum zum Beispiel ist ab einer Primärenergie von 10^{15} eV mit einer Genauigkeit von $\sigma_r = 2.5$ m bekannt (siehe Abbildung 5.2). Da bei der Analyse zentraler Schauer Ereignisse anhand der Position des Schauerzentrums selektiert werden, ist die Kenntnis dieser Unsicherheit unabdingbar. Die hadronische Energiesumme $\sum E_h$ wird in Abhängigkeit von der Primärenergie mit einer Genauigkeit von 5 % bis 40 % nachgewiesen. Die Rekonstruktionsgenauigkeit der Elektronzahl N_e ist kleiner als 20 % bei kleinen Schauergrößen ($N_e \approx 10^4$) und kleiner als 5 % bei $N_e \approx 10^6$ [28]. Aufgrund der großen Zahl von Elektronen ist N_e am genauesten rekonstruierbar, da die geringsten statistischen Fluktuationen auftreten. Die Myonzahl wird in Abhängigkeit von der Primärenergie mit einer Genauigkeit von 10 % bis 40 % nachgewiesen.

Im Folgenden sind die einzelnen Rekonstruktionsschritte der verschiedenen Detektorkomponenten mit typischen Observablen beschrieben.

5.3.1 Observablen des KASCADE-Arrays

Die Elektronzahl N_e wird durch Anpassung der „NKG¹⁵-Funktion“ an die Lateralverteilung der Elektronen [61, 62] (im Falle des KASCADE-Experiments berechnet bei

¹³ KASCADE Reconstruction for ExTensive Airshowers

¹⁴ Häufig verwendete Größen sind z.B. die Schauerrichtung oder die Coreposition des Schauers (Schauerzentrum), mit Hilfe derer sich die Observablen der Zentraldetektorkomponenten verbessern lassen.

¹⁵ Autoren der NKG Funktion: Nishimura, Kamata und Greisen

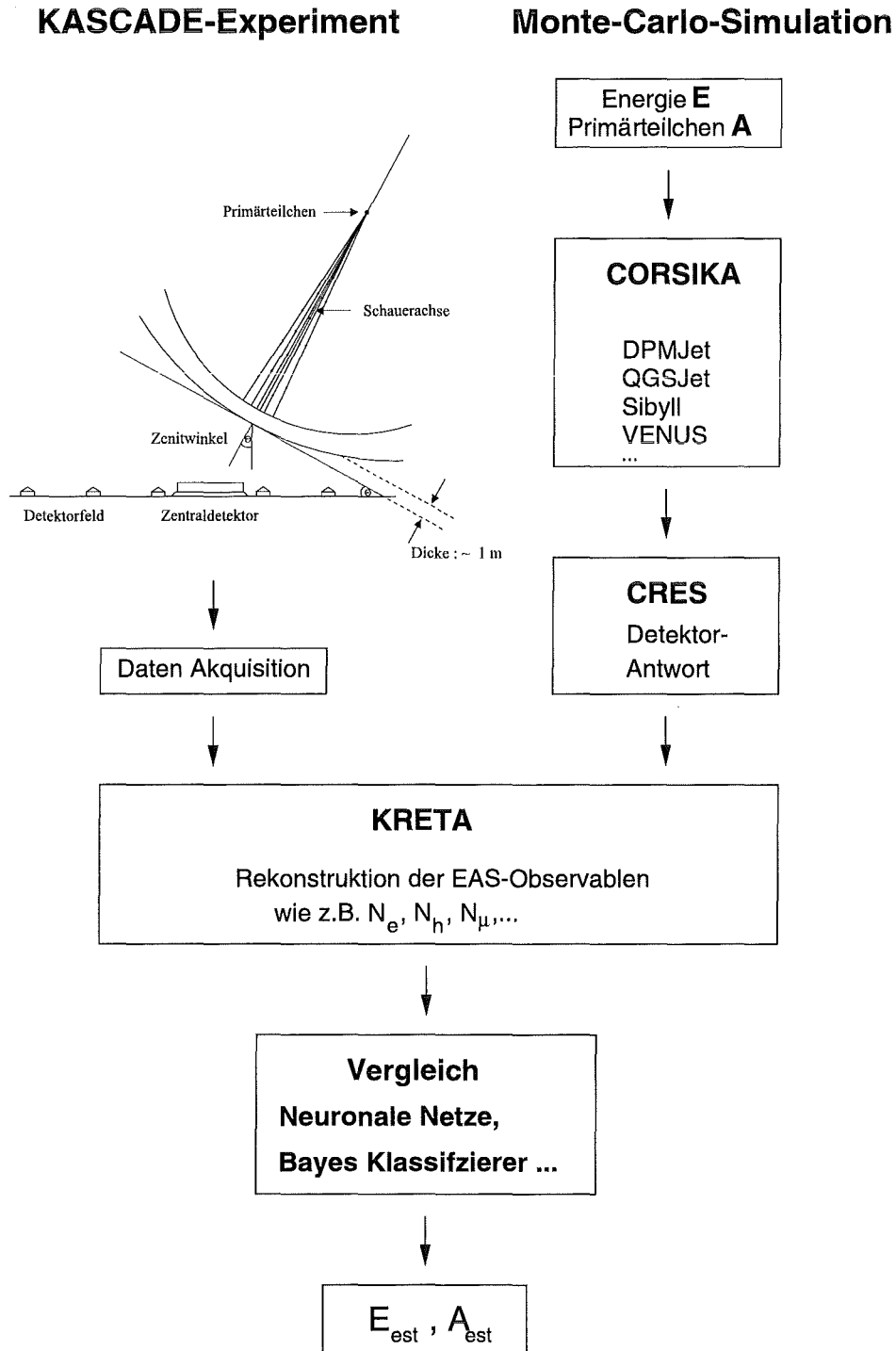


Abbildung 5.1: Simulation und Experiment im Vergleich. Die simulierten Luftschauer werden mit den gleichen Algorithmen rekonstruiert, wie die KASCADE-Meßdaten. Das Datenformat der simulierten Ereignisse, nachdem die Detektorantwort eingefaltet wurde, entspricht dem der Meßdaten.

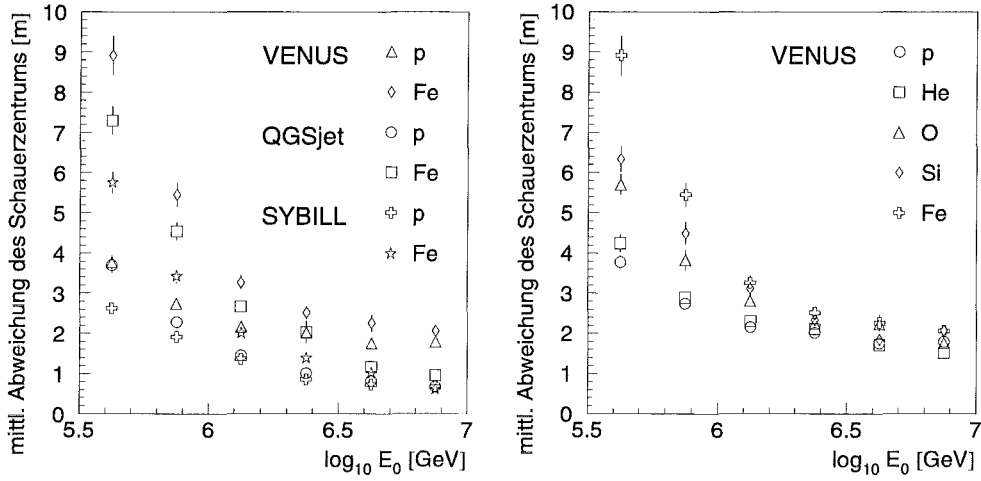


Abbildung 5.2: Mittlerer Fehler bei der Bestimmung des Schauerzentrums relativ zum wahren Zentrum. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer verschiedener Modell-Rechnungen (links) und für fünf verschiedene Primärteilchen des VENUS-Modells (rechts).

110 m über NN),

$$\rho_e(r) = \frac{N_e}{2\pi r_m^2} \frac{\Gamma(4.5 - s)}{\Gamma(s)(4.5 - 2s)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{s-2} \left(1 + \frac{r}{r_m}\right)^{s-4.5} \quad (5.1)$$

mit den kalibrierten Energiedepositionen der e/γ -Detektorstationen als Stützstellen beschrieben. Der Molière-Radius r_m der Elektronen ist eine Konstante, die am Erdboden (KASCADE-Höhe) durch Simulationsrechnungen zu 89 m bestimmt wurde [28].

Die Elektronenzahl N_e , das Schaueralter s sowie die Lage des Schauerzentrums – implizit in r enthalten – werden in einer Anpassungsprozedur bestimmt. Das Schaueralter gibt Aufschluß darüber, in welcher Höhe die erste Wechselwirkung stattfand. Sein Wert wächst mit zunehmender Eindringtiefe und beträgt 1 im Schauermaximum. Gleichung 5.1 wurde für photoninduzierte Schauer hergeleitet und gilt nur näherungsweise für hadroninduzierte Schauer. Die Richtung des Schauers wird durch Anpassung eines Kegels an die Ankunftszeiten der Elektronen bestimmt. Analog führt eine Anpassung der kalibrierten Energiedepositionen der Arraymyondetektoren an die Funktion 5.1 mit einem Radiusparameter r_m von 420 m zur Myonzahl N_μ . Das Schaueralter ist in diesem Fall eine Konstante. Sie wird nicht durch eine Anpassungsprozedur mitbestimmt, sondern anhand Simulationsrechnungen als Funktion von Elektronenzahl N_e und Zenitwinkel Θ berechnet. In den Energiedepositionen der Elektron- und Myondetektoren sind Beiträge anderer Teilchensorten enthalten, die zu berücksichtigen sind.

Da die e/γ -Detektoren und Myondetektoren übereinander angeordnet sind, lassen sich

in einem iterativen Verfahren die Beiträge zu den Energiedepositionen in den e/γ -Detektoren durch Myonen, bzw. punch-through in den Myondetektoren korrigieren. Hadronische Energiedepositionen sind in einem sehr engen Gebiet um das Schauerzentrum lokalisiert, so daß es ausreichend ist, den minimalen Radius, der zur Bestimmung der integralen Größen N_e bzw. N_μ benutzt wird, entsprechend zu wählen [28]. Für die Bestimmung von N_e wird Gleichung 5.1 im Bereich von $10\text{ m} \leq r \leq 150\text{ m}$ an die Elektronlateralverteilung angepaßt und über den Bereich von $0\text{ m} \leq r \leq \infty$ integriert. Entsprechend wird die Zahl der Myonen innerhalb $40\text{ m} \leq r \leq 200\text{ m}$ angepaßt. Die so berechnete Myonzahl¹⁶ N_μ^{tr} , die nur innerhalb des genannten Bereichs integriert ist, ist frei von systematischen Unsicherheiten, die durch Extrapolation außerhalb der geometrischen Akzeptanz des Detektorfeldes entstehen [28]. Die Größe N_μ , die im Mittel um einen Faktor drei größer ist als N_μ^{tr} , steht dennoch für Analysen zur Verfügung.

5.3.2 Observablen des Hadronkalorimeters

Die Energiedepositionen in den Flüssigionisationskammern des Kalorimeters werden als Grundlage zur Rekonstruktion hadronischer Kaskaden benutzt. Der verwendete Algorithmus ist optimiert, selbst bei größeren Hadronichten in Schauerkernen einzelne Spuren aufzulösen um alle Hadronen zu rekonstruieren [63]. Verglichen mit einem alternativ selektierbaren „Single-Hadron-Prozessor“ [64] wird daher nur eine geringere Orts- und Energieauflösung erzielt (Tabelle 5.2).

Entlang der größten lokalen Maxima der Energieeinträge der oberen Ebenen wird die Hauptrichtung der Hadronspuren bestimmt. Anschließend werden Spuren anhand der Energiedepositionen einzelner Kanäle rekonstruiert.

Die Energien der einzelnen Lagen werden mit der Dicke des darüberliegenden Absorbiermaterials gewichtet. Aus diesen gewichteten Energiesummen erhält man schließlich anhand einer energieabhängigen Umrechnung die Energie der einzelnen Hadronen.

Die Zahl der Hadronen, die im Kalorimeter nachgewiesen werden, wird mit N_h , die Zahl der Hadronen mit Energien größer 100 GeV wird mit $N_h^{E>100\text{ GeV}}$ bezeichnet. Die Energie des Hadrons mit der größten rekonstruierten Energie wird $\max E_h^{E>100\text{ GeV}}$ oder kurz $\max E_h$ genannt. Die Summe der Energien aller rekonstruierten Hadronen ergibt die Energiesumme $\sum E_h$.

5.3.3 Observablen der Vieldraht-Proportionalkammern

In den Vieldraht-Proportionalkammern werden Durchstoßpunkte minimalionisierender Teilchen aus den Schnittpunkten angesprochener Anodendrähte und Kathodenstreifen rekonstruiert, ihre Anzahl wird als N_μ^* bezeichnet. Die einzelnen Kammern bestehen aus drei Elektrodenlagen, womit mehrere Durchstoßpunkte (Hits) pro Kammer ohne Vieldeutigkeiten rekonstruiert werden können. Die Wahrscheinlichkeit der

¹⁶ tr steht für engl. *truncated*.

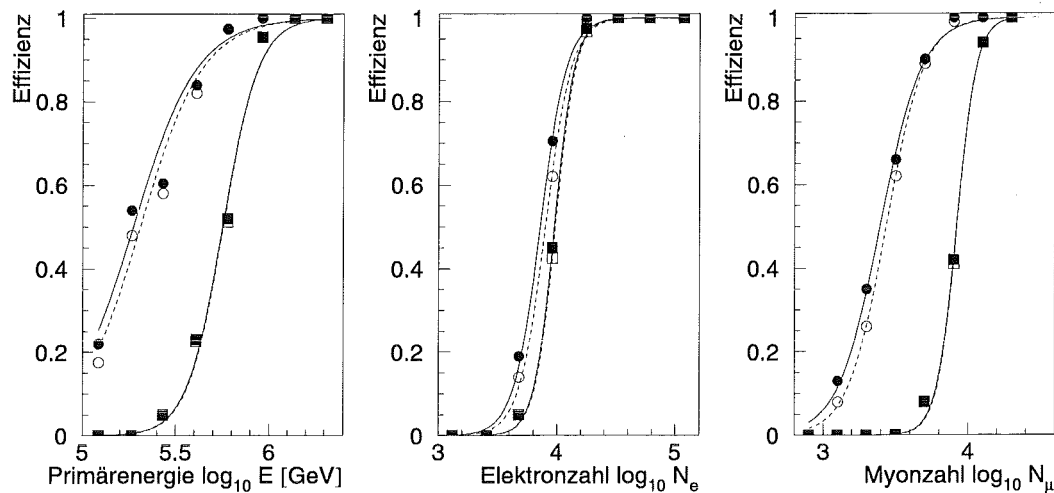


Abbildung 5.3: Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektorfeldes. Für protonen- (Kreise) und eiseninduzierte (Rechtecke) Luftschauer ist die Trigger- (geschlossene Symbole) und Rekonstruktionseffizienz (offene Symbole) bezüglich der Primärenergie (links), der Elektronenzahl (mitte) und der Myonzahl (rechts) angegeben [66].

mit Phantomtreffer bezeichneten Vieldeutigkeiten nimmt mit der Teilchendichte zu. Durch die Schauerrichtung, die durch das Detektorfeld vorgegeben ist, werden die Hits beider Lagen zur optimalen Deckung gebracht. Im Absorbermaterial entstehende δ -Elektronen werden durch Elimination einer von zwei nahe aneinander liegender Spuren, falls sie sich im darüber befindlichen Absorbermaterial vereinigen, berücksichtigt [65]. Die Ortsauflösung beträgt 0.73 cm senkrecht und 1.43 cm parallel zu den Anodendrähten (Tabelle 5.2).

5.4 Selektion der Daten

Zur Analyse der Massezusammensetzung und Bestimmung des Energiespektrums wurden zwei Klassen von experimentellen Ereignissen selektiert. Mit der Absicht, eine große Zahl an Ereignissen (Selektion I), die durch das Detektorfeld gemessen wurden, und des weiteren Ereignisse, bei denen eine Vielzahl von Observablen zur Verfügung steht (Selektion II), anzureichern, wurden entsprechende Datensätze generiert.

In Selektion I sind Ereignisse des Detektorfeldes aufgenommen, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Die Rekonstruktion in den e/γ - und Myondetektoren darf nicht fehlgeschlagen sein.
- Das rekonstruierte Schauerzentrum muß innerhalb eines Radius von 91 m relativ

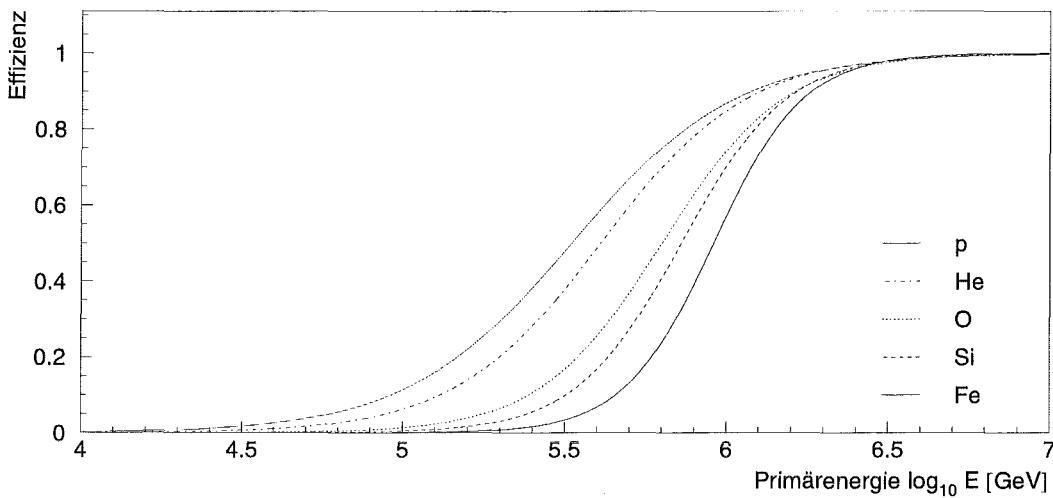


Abbildung 5.4: Nachweiswahrscheinlichkeit bei der Hadronrekonstruktion. Für Luftschauer unterschiedlicher Primärteilchen mit einem rekonstruierten Schauerzentrum in einem 5 m Ring ist die Effizienz für den Nachweis mindestens eines Hadrons als Funktion der Energie E aufgetragen (VENUS Modellrechnungen) [30].

zum Mittelpunkt des Detektorfeldes liegen.

- Der Zenitwinkel Θ muß sich im Bereich $13^\circ \leq \Theta \leq 22^\circ$ befinden.
- Rekonstruierte Myon- und Elektronzahl müssen der Ungleichung

$$\log_{10} N_\mu > 4.745 - 0.212 \cdot \log_{10} N_e$$

genügen, entsprechend einer Primärenergie von $\gtrsim 5 \cdot 10^{14}$ eV.

- Das Schaueralter s muß im Wertebereich $[0.2, 2.1]$ enthalten sein.

In Selektion II sind hochenergetische zentrale Schauer angereichert, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Das rekonstruierte Schauerzentrum muß innerhalb eines Radius von 5 m relativ zum Mittelpunkt des Zentraldetektors liegen.
- Der Zenitwinkel Θ muß kleiner als 30° sein.
- Das Schaueralter s muß im Wertebereich $[0.2, 2.1]$ enthalten sein.
- Die Zahl rekonstruierter Myonen in den MWPCs muß größer als 15 sein.

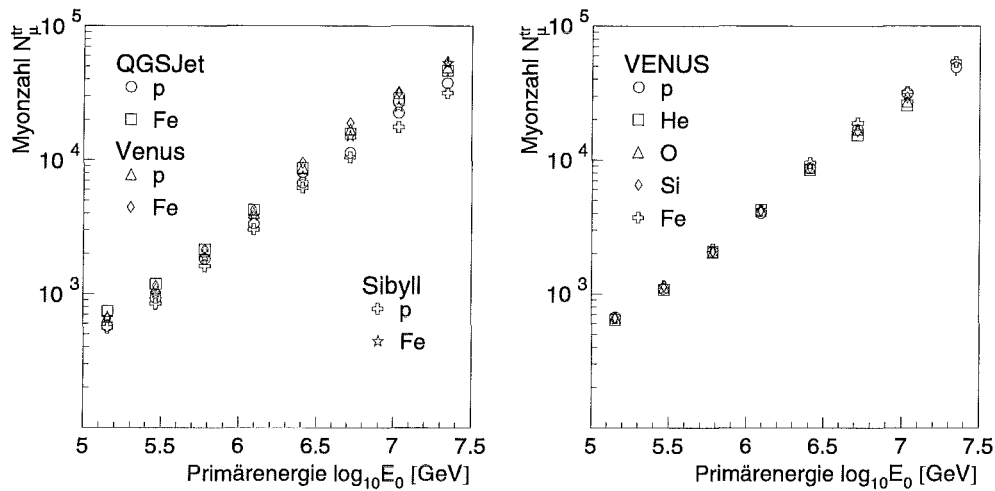


Abbildung 5.5: Simulierte Myonzahl N_{μ}^{tr} in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt.

- Es muß mindestens ein hochenergetisches Hadron mit einer Energie von mindestens 100 GeV rekonstruiert sein.

Sowohl gemessene als auch simulierte Schauer werden auf gleiche Art und Weise selektiert. Von ursprünglich circa 53 Millionen gemessenen Ereignissen, die in der Zeit zwischen 4.8.97 und 23.6.98 aufgenommen wurden, verbleiben 716 Tausend Ereignisse nach Selektion I, bzw. circa 8000 Ereignisse nach Selektion II.

Ziel der Selektion war es auch Ereignisse auszufiltern, die unterhalb der Schwelle liegend zu Energiespektren oder Massezusammensetzung nur bedingt beitragen. Daher sind die Effizienzen für das Detektorfeld und das Kalorimeter beispielhaft dargestellt in den Abbildungen 5.3 und 5.4. Für Luftschauer, die den Triggerbedingungen des Detektorfeldes genügen, nämlich das Ansprechen von 15 e/γ -Detektoren in äußeren, bzw. 30 e/γ -Detektoren in inneren Clustern, ist die Effizienz in Abhängigkeit von der Primärenergie, der Elektronzahl und der Myonzahl in Abbildung 5.3 veranschaulicht. Entsprechend ist die Effizienz des Kalorimeters für Selektion II Daten in Abbildung 5.4 dargestellt. Die Myonkammern besitzen in der Regel eine Nachweiswahrscheinlichkeit von 90% für einzelne Myonen.

5.5 Einfluß hadronischer Wechselwirkungsmodelle auf simulierte EAS-Observablen

Zur Untersuchung der Elementzusammensetzung und des Energiespektrums werden die Observablen N_{μ}^{tr} , $N_{e,s}$, N_{μ}^* , $N_h^{E > 100 \text{ GeV}}$, $\max E_h$ und $\sum E_h$ verwendet. Die Abhängig-

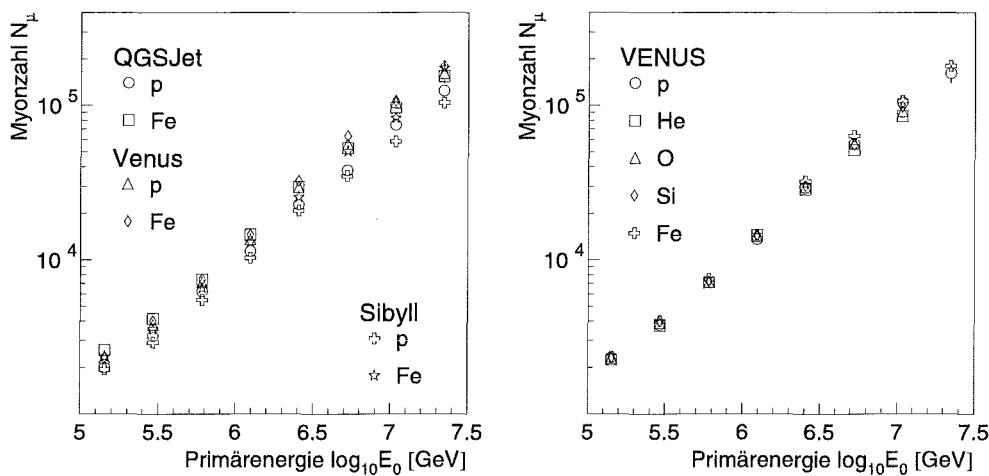


Abbildung 5.6: Simulierte Myonzahl N_μ in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Die Myonzahl N_μ zeigt im Mittel dasselbe Verhalten wie N_μ^{tr} .

keit der Observablen von der Primärenergie und der Primärmasse soll in diesem Abschnitt anhand simulierter Schauer untersucht werden. Alle dargestellten Ergebnisse (ausgenommen Abbildung 5.7) von Simulationsrechnungen beinhalten eine vollständige Detektorsimulation. Sie sind der Gestalt, daß linker Hand immer der Vergleich zwischen proton- und eiseninduzierter Schauer der drei Modelle (VENUS, QGSJet und Sibyll) abgebildet ist, und rechter Hand innerhalb eines Modells die verschiedenen Primärmassen verglichen werden. Die Mittelwerte von Observablen sind über logarithmisch äquidistante Energieintervalle aufgetragen. Da die Streuungen in Abhängigkeit der verschiedenen Observablen sehr groß ausfallen, ist übersichtshalber nur der Fehler des Mittelwertes, aber nicht die Streuung (um einen Faktor \sqrt{n} größer) eingezeichnet. Die Myonzahl N_μ^{tr} ist als Funktion der Primärenergie in Abbildung 5.5 aufgetragen. In erster Näherung kann die Myonzahl N_μ^{tr} als unabhängig von der Masse der Primärteilchen betrachtet werden. Die Abweichungen liegen innerhalb weniger Prozent. Die größeren Unterschiede sind beim Vergleich der Modelle zu erkennen. Beachtenswert ist die Vorhersage des Sibyll Modells, welches im Vergleich zu den beiden übrigen Modellen sowohl in den proton- als auch eiseninduzierten Schauern einen flacheren Anstieg zeigt. Daraus resultierend ergibt sich relativ zu den beiden anderen Modellen bei hohen Energien eine geringere Zahl an Myonen. Dasselbe Verhalten zeigt auch die bis ins unendliche integrierte Myonzahl N_μ (Abbildung 5.6).

Abbildung 5.7 zeigt die Konturlinie (FWHM¹⁷) der Elektronzahl-Primärenergie-Rela-

¹⁷ Full Width Half Maximum

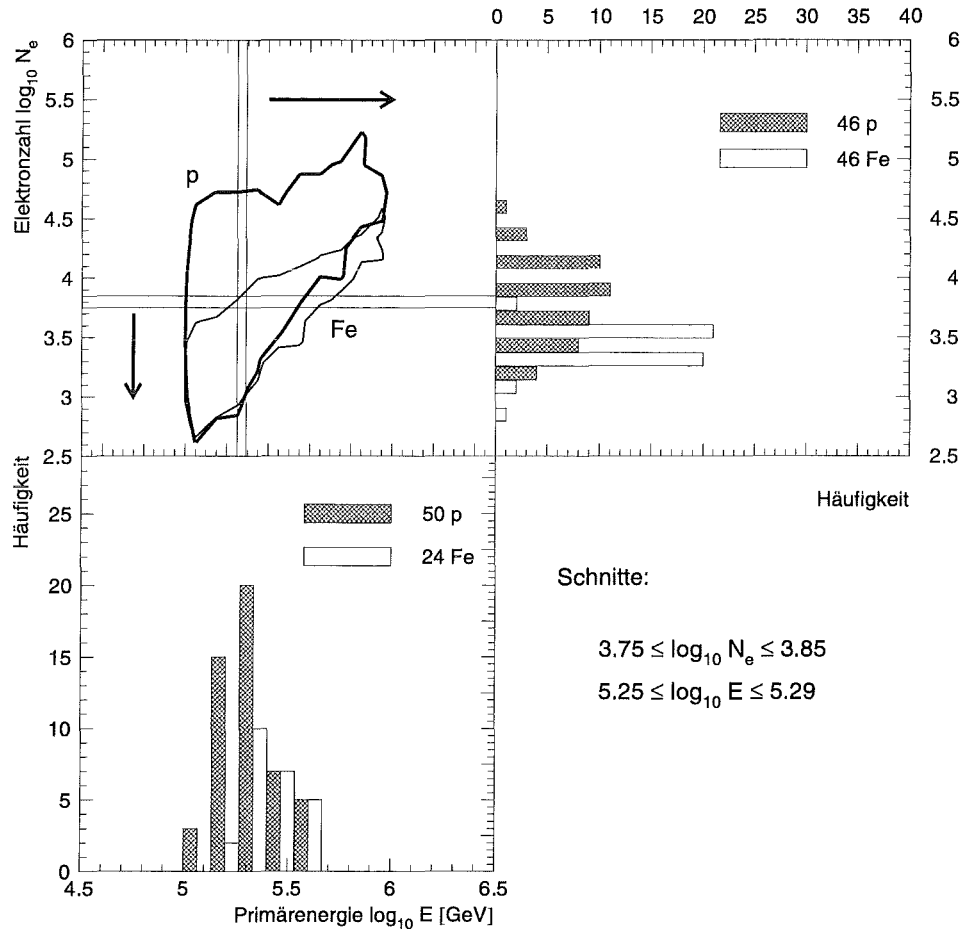


Abbildung 5.7: Fluktuation der Elektronenzahl als Funktion der Primärenergie. Die linke obere Abbildung zeigt Konturlinien (FWHM) für Protonen und Eisenkerne. Bei Projektion auf die Abszisse bei genanntem Schnitt werden Protonen angereichert (50:24), obwohl gleich viele Protonen wie Eisenkerne simuliert wurden, wie der Schnitt in der Ordinate beweist (46:46).

tion für je 1000 proton- und eiseninduzierte Schauer unter der Annahme eines realistischen Energiespektrums mit Spektralindex $\gamma = 2.7$ im Energiebereich von 10^{14} eV bis 10^{15} eV. Die Streuung in der Elektronenzahl der Protonen ist wesentlich stärker als die bei Eisenkernen. Andere Experimente, die einzig aus der Zahl der Elektronen die Zusammensetzung der kosmischen Strahlung bzw. das Energiespektrum bestimmen, unterliegen der großen Schwierigkeit bei gegebener Elektronenzahl Eisenkerne nachzuweisen. Denn wie in Abbildung 5.7 zu erkennen ist, werden bei gleicher Elektronenzahl

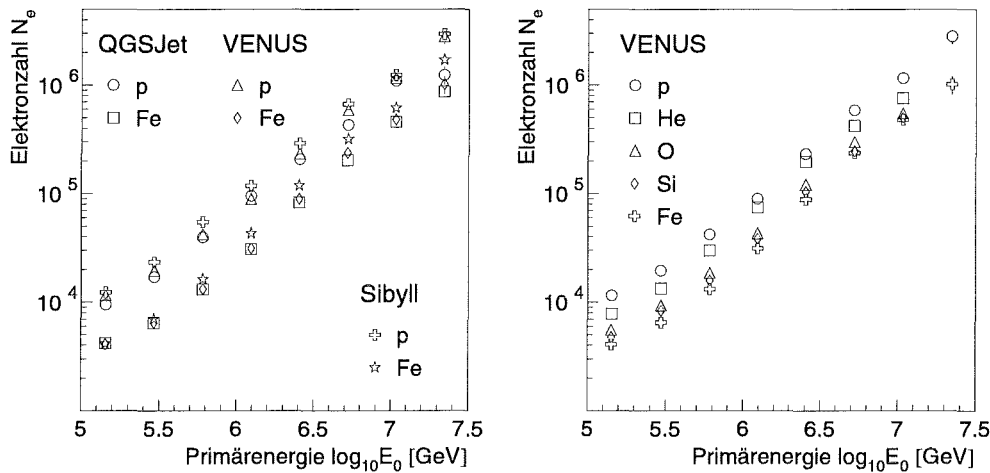


Abbildung 5.8: Simulierte Elektronzahl N_e in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Im Mittel ist eine deutliche Trennung der Primärteilchen vorhanden.

	QGSJet	VENUS	Sibyll
Primärteilchen	Exponent b	Exponent b	Exponent b
p	1.14 ± 0.02	1.11 ± 0.02	1.19 ± 0.02
He	1.12 ± 0.02	1.09 ± 0.01	
O	1.12 ± 0.01	1.09 ± 0.01	
Si	1.11 ± 0.01	1.08 ± 0.01	
Fe	1.11 ± 0.01	1.07 ± 0.01	1.13 ± 0.01

Tab. 5.3: Exponent der Energie-Myonzahl-Relation durch Anpassung eines Potenzgesetzes. Angegeben sind die Exponenten der Funktion $E = a \cdot (N_\mu^r)^b$ für verschiedene Primärteilchen und Modelle.

(veranschaulicht durch eine Projektion der Ereignisse auf die Abszisse (Energie), bei der die Elektronzahl auf das Intervall $3.75 \leq \log_{10} N_e \leq 3.85$ beschränkt ist) um einen Faktor zwei mehr Protonen angereichert. Da eine feste Energieschwelle vorgegeben ist, ist das Verhältnis Protonen zu Eisenkerne in Abbildung 5.7 sogar noch zugunsten der Eisenkerne verschoben. Protonen geringerer Energie ($E_0 \leq 10^{14}$ eV) würden noch einen zusätzlichen Betrag leisten und die Zahl der Protonen erhöhen. Eine Projektion der Elektronzahl bei Anwendung des angegebenen Schnittes bezüglich der Energie ($5.25 \leq \log_{10} E/\text{GeV} \leq 5.29$) ergibt im Gegensatz dazu eine gleiche Anzahl von Primärteilchen, da gleich viele Ereignisse simuliert wurden.

Aufgrund des Superpositionsprinzips entwickeln sich in erster Näherung bei Eisenkernen 56 „unabhängige“ Luftschauer (56 je Nukleus), die wegen ihrer individuell niedrigeren Energie $\langle E_0^n \rangle \approx E_0^{\text{Fe}}/56$ früher in der Atmosphäre ihr Maximum besitzen und somit kleinere Elektronzahlen liefern. Im Gegensatz zur Energie-Myonzahl-Relation, bei der die Energie für VENUS und QGSJet im Mittel annähernd linear mit der Myonzahl verläuft $E_0 \propto (N_\mu^{\text{tr}})^{1.1}$ (siehe Tabelle 5.3), ergibt sich für die Energie-Elektronzahl-Relation ein kleinerer Exponent $E_0 \propto N_e^{0.75}$. Mit zunehmender Energie dringen die Luftschauer tiefer in die Atmosphäre ein und erzeugen eine größere Zahl an Elektronen, die den Erdboden erreichen und nachgewiesen werden. Aus diesem Grund ist auch die Triggerschwelle des Detektorfelds für Eisenkerne zu höheren Energien verschoben, wird doch das Detektorfeld durch die Zahl der angesprochenen e/γ -Detektoren getriggert, das heißt letztlich durch die Zahl vorhandener Elektronen (siehe Abbildung 5.3). Die Zahl der Myonen als Indikator der Energie zeigt daher ebenso für Eisenkerne eine Triggerschwelle bei größeren Myonzahlen. Um eine Triggerschwelle bei gleicher Energie zu haben, wäre es daher notwendig mittels der Myondetektoren des Detektorfeldes zu triggern.

Sowohl die Elektronzahl N_e (Abbildung 5.8) als auch das Schaueralter s (Abbildung 5.9) zeigen die Möglichkeit der Massentrennung, denn für Protonen und Eisenkerne gleicher Energie unterscheiden sie sich im Mittel deutlich. Da die intrinsischen Fluktuationen der Luftschauer sehr ausgeprägt sind, überlagern sich die Verteilungen jedoch sehr stark. Mit zunehmender Energie nimmt das Schaueralter (Definition siehe Gleichung 5.1) ab. Das Schauermaximum dringt tiefer in die Atmosphäre ein.

Die Zahl der Hadronen $N_h^{E > 100 \text{ GeV}}$ bzw. N_h , die maximale hadronische Energie $\max E_h$ und die Summe der rekonstruierten hadronischen Energie $\sum E_h$ zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Elektronzahl. Im Mittel ist eine Trennung der Primärteilchen ersichtlich (Abbildungen 5.10, 5.11, 5.12 und 5.13). Bei gleicher Energie besitzen Protonschauer eine größere Zahl rekonstruierter Hadronen verglichen mit schwereren Teilchen, deren Nachweisschwelle liegt daher bei kleineren Energien (siehe Abbildung 5.4). Wegen der wesentlich geringeren Zahl an Hadronen besitzen diese Observablen zusätzlich stärkere statistische Fluktuationen. Das Modell Sibyll sagt für eiseninduzierte Luftschauer im Vergleich mit den beiden Modellen QGSJet und VENUS größere Mittelwerte in hadronischen Observablen voraus. Der Algorithmus, um die hadronische Komponente zu rekonstruieren, wurde auf einen hohen dynamischen Bereich optimiert, um sowohl niederenergetische als auch hochenergetische Hadronen nachzuweisen. Die Abstände der Hadronen zueinander müssen daher mindestens 40 cm betragen, um getrennt nachgewiesen werden zu können. Besitzt das induzierende Teilchen eine große Primärenergie ($\approx 10^7$ GeV), so ist die Teilchendichte im Zentrum der Luftschauer so hoch, daß die rekonstruierten hadronischen Observablen Sättigung zeigen. Besonders bei der Hadronzahl N_h (Energieschwelle 20 GeV) und der maximalen Hadronenergie $\max E_h$ macht sich dieser Effekt bemerkbar (Abbildungen 5.10 und 5.13). Viele Hadronen kleiner Energie verschmelzen und werden als einzelnes Hadron erkannt, bzw. die Energie mehrerer Hadronen wird einem einzigen zugerechnet. Die

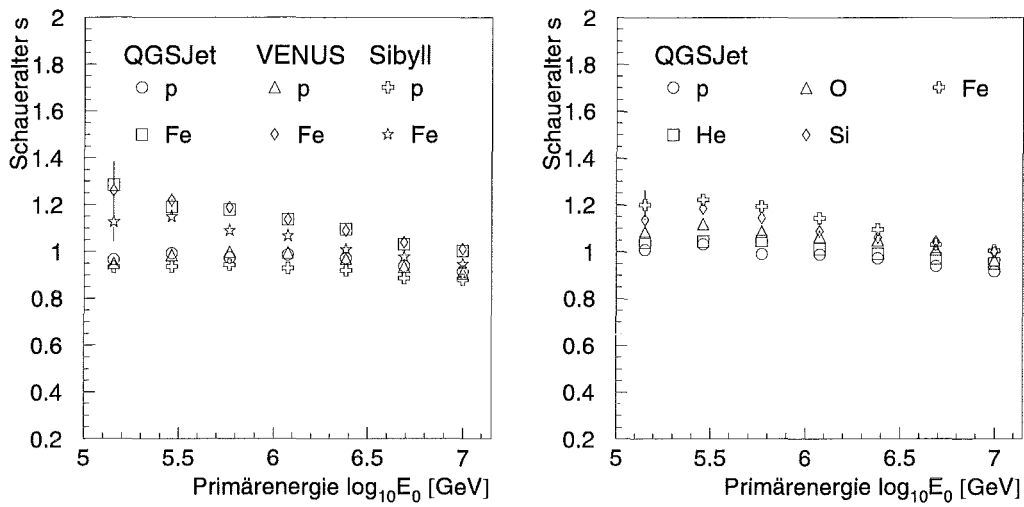


Abbildung 5.9: Simulierte Schaueralter s in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Das Schaueralter nimmt mit zunehmender Energie ab. Der Schauer dringt tiefer in die Atmosphäre ein.

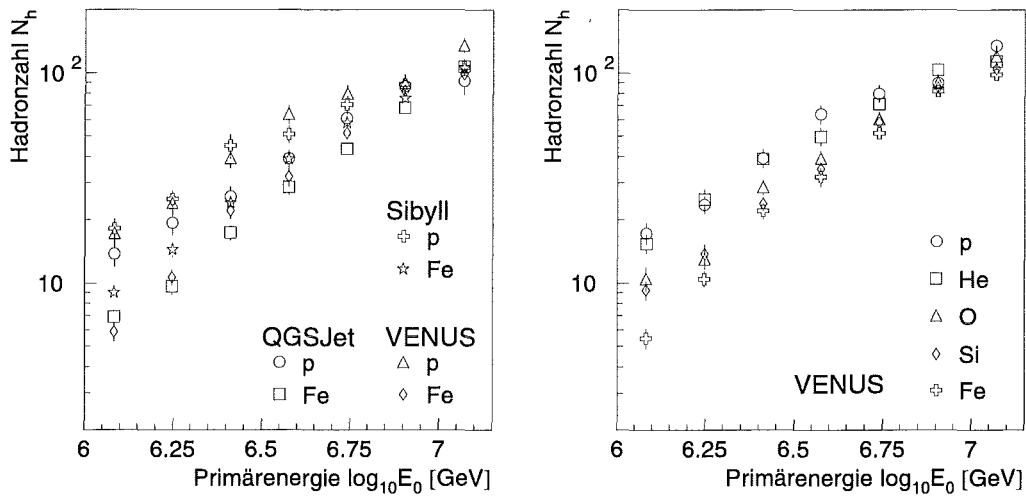


Abbildung 5.10: Simulierte Hadronzahl N_h in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Bei größeren Energien deutet sich ein Sättigungseffekt an.

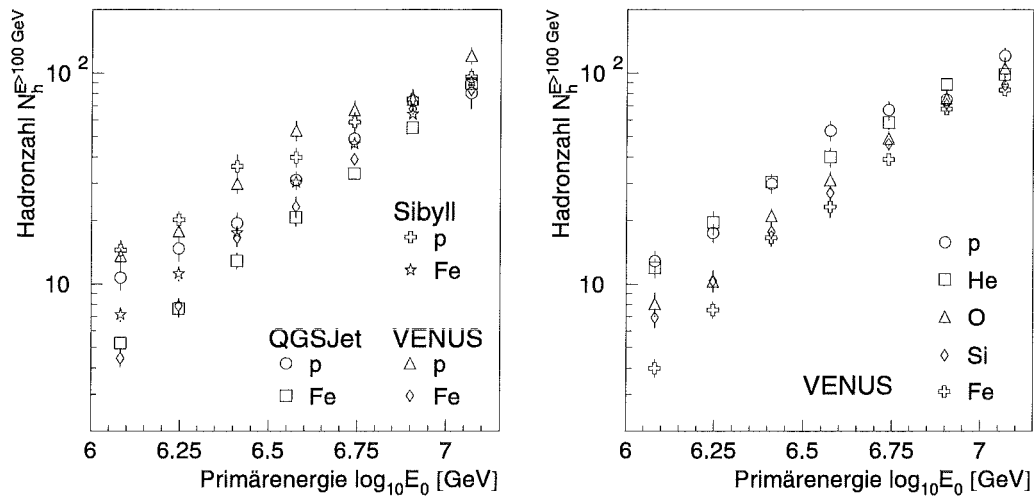


Abbildung 5.11: Simulierte Hadronzahl $N_h^{E>100 \text{ GeV}}$ in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt.

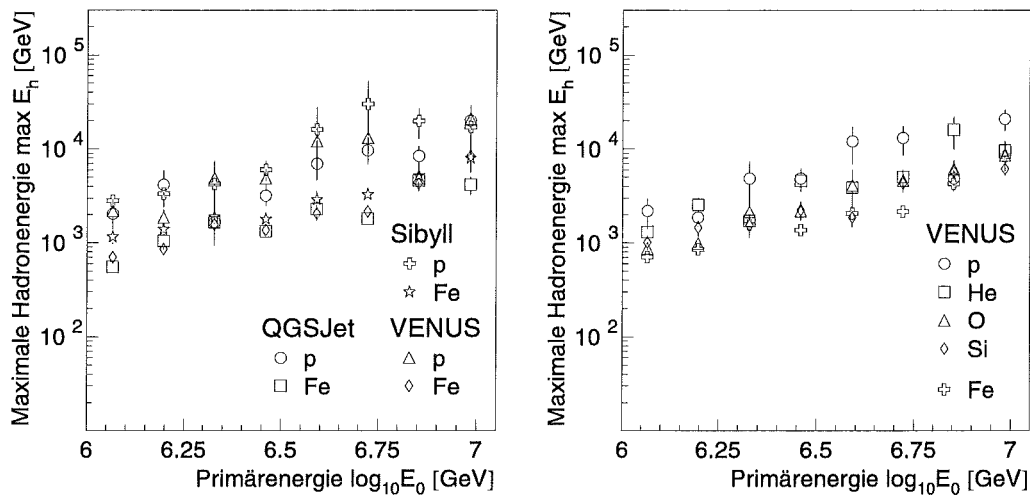


Abbildung 5.12: Simulierte maximale Hadronenergie $\max E_h$ in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Starke statistische Fluktuationen führen zu großen Unsicherheiten bei den gezeigten Mittelwerten.

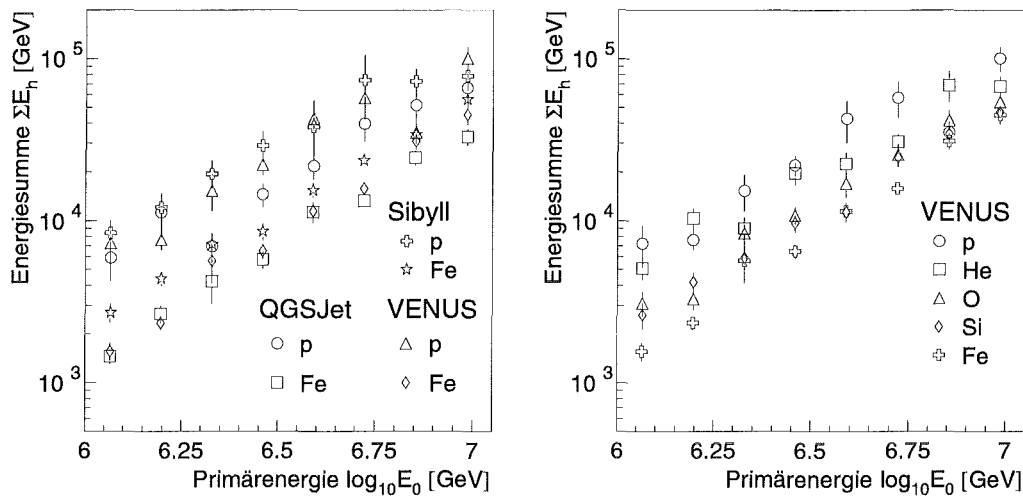


Abbildung 5.13: Simulierte Energiesumme ΣE_h in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Starke statistische Fluktuationen führen zu großen Unsicherheiten bei den gezeigten Mittelwerten.

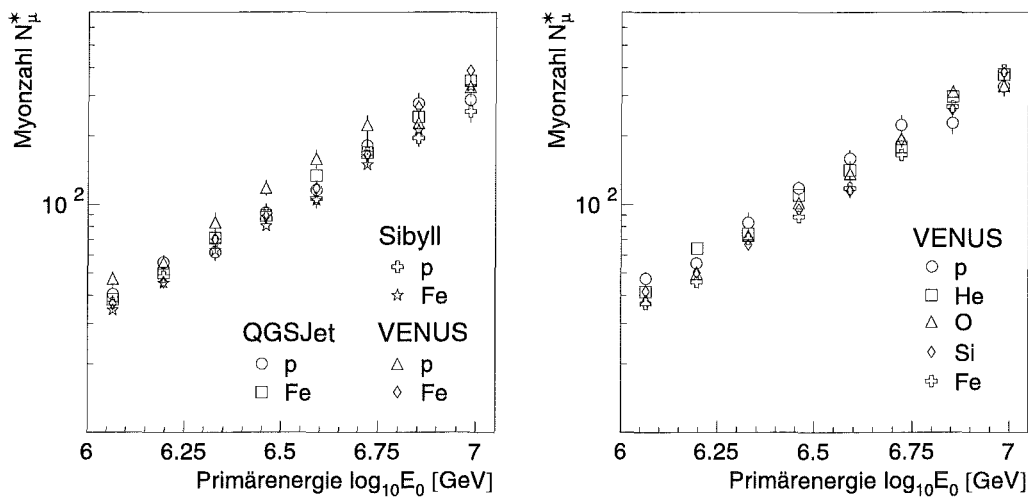


Abbildung 5.14: Simulierte Myonzahl N_μ^* in Abhängigkeit von der Primärenergie. Für proton- und eiseninduzierte Luftschauer zeigt die linke Abbildung die drei Modelle im Vergleich. Rechts ist der Vergleich zwischen verschiedenen Primärmassen gezeigt. Die Zahl der Myonen im Zentralbereich N_μ^* ist masseabhängiger als die integrierte Größe N_μ , da die Zahl der Myonen im Schauerzentrum durch unterschiedliche Strukturen der Schauerkerne bestimmt ist. Zusätzlich zur unterschiedlichen Form der Lateralverteilung sind die Mindestenergien der detektierten Myonen unterschiedlich.

Energiesumme, die (in erster Näherung) unabhängig von der Zahl der Hadronen ist, läßt dieses Verhalten nur in schwächerem Maße erkennen.

Die Zahl der Myonen N_{μ}^* (Abbildung 5.14), die im Zentrum von Luftschauern durch die MWPC-Detektoren nachgewiesen werden, lassen eine Trennung der Mittelwerte verschiedener Primärteilchen erkennen. Da im naiven Superpositionsmodell unabhängige Subschauer das Schauerzentrum eiseninduzierter Schauer „verschmieren“, ist die Lateralverteilung und somit die Zahl der Myonen N_{μ}^* im Zentrum von unterschiedlicher Natur. Diese lokalen Unterschiede mitteln sich bei der Integration über größere Distanzen aus. In der Myonzahl N_{μ}^{tr} sind lokale Strukturunterschiede nicht mehr merklich.

Analyse der KASCADE-Daten

Nihil tam difficile est, quin quaerendo investigari possit.

Terenz (190-159 a. Chr. n.)

Mit den vorgestellten Analysemethoden des Kapitels 4 und den in Kapitel 5 dargestellten Simulationsrechnungen und Selektionen wird die Primärmasse und die Primärenergie der einzelnen gemessenen Luftschaer bestimmt.

In einem ersten Schritt werden die Meßgrößen der Simulationsrechnungen und der Messung miteinander verglichen. Die Daten werden in den Bereichen $3.4 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} \leq 5$, bzw. $4.3 \leq \log_{10} N_e \leq 6.5$ in logarithmisch äquidistante Intervalle unterteilt und die Mittelwerte der Observablen als Ordinatenwerte darüber aufgetragen. Die Güte der Verfahren wird anschließend anhand von Simulationen getestet.

Nach der Bestimmung der Elementzusammensetzung werden das Energiespektrum und die Energie-Masse-Relation dargestellt. Die Klassifizierung und Energiebestimmung erfolgt sowohl für gemessene wie simulierte Luftschaer. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, alle Tabellen graphisch zu veranschaulichen. Daher werden die wesentlichen Ergebnisse nur anhand einiger Verteilungen exemplarisch gezeigt. Die relevanten Resultate liegen jedoch zumindest tabellarisch vor (siehe Anhang E).

6.1 Gemessene Elektron- und Myonzahl

Die „klassische“ Größe zur Bestimmung der Zusammensetzung der kosmischen Strahlung ist das Verhältnis von Elektron- zu Myonzahl. Die gemessenen Ereignisse der Selektion I (Abschnitt 5.4) liegen, bei Auftragung der Elektron- über der Myonzahl N_{μ}^{tr} , für die Modelle QGSJet und VENUS (Abbildung 6.1) im Mittel zwischen den beiden Extrema Proton- und Eisenverteilungen. Ersichtlich ist die Triggerschwelle bei $\log_{10} N_e \approx 4.6$ in Abbildung 6.2, bei der Schauer höherer Energie (größerer Myonzahl N_{μ}^{tr}) aufgrund intrinsischer und statistischer Fluktuation bei kleineren Elektronzahlen

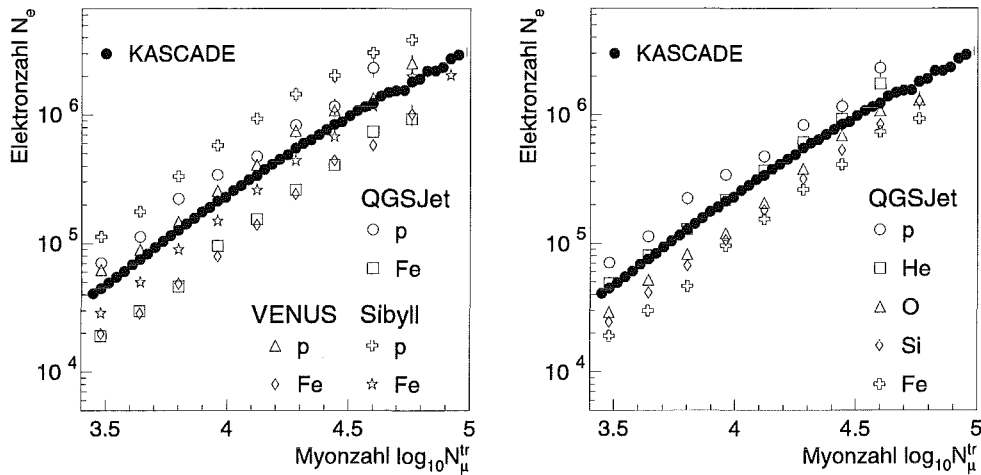


Abbildung 6.1: Elektronzahl N_e gegen Myonzahl N_{μ}^{rr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen verglichen.

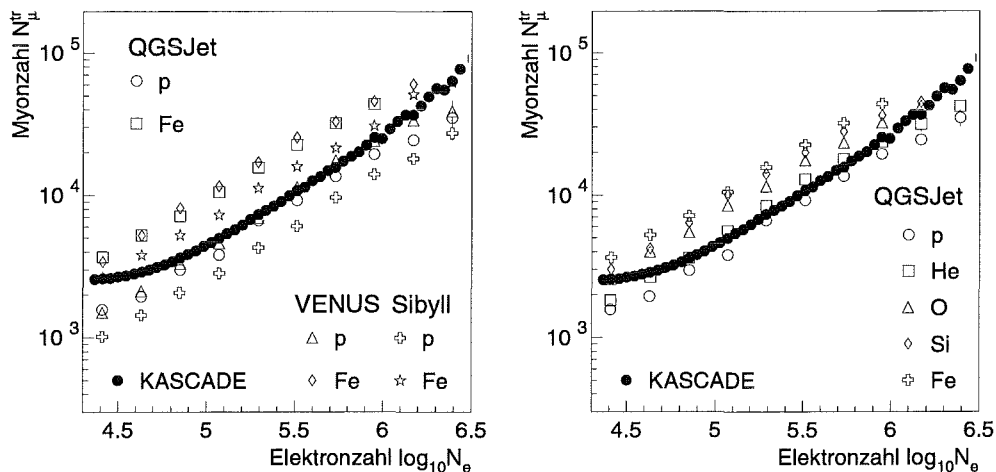


Abbildung 6.2: Myonzahl N_{μ}^{rr} gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen verglichen.

nachgewiesen werden.

Es muß betont werden, daß die Streuungen der Mittelwerte einen starken Einfluß auf die gezeigten Verteilungen haben. Als Summe von fünf näherungsweise gaußförmigen Verteilungen ist die Streuung der Meßdaten innerhalb eines Intervalls gleicher Myonzahl im Allgemeinen nicht gaußförmig. Selbst die Annahme der Gaußverteilung gilt nur für Eisenschauer in erster Näherung aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes, ange-

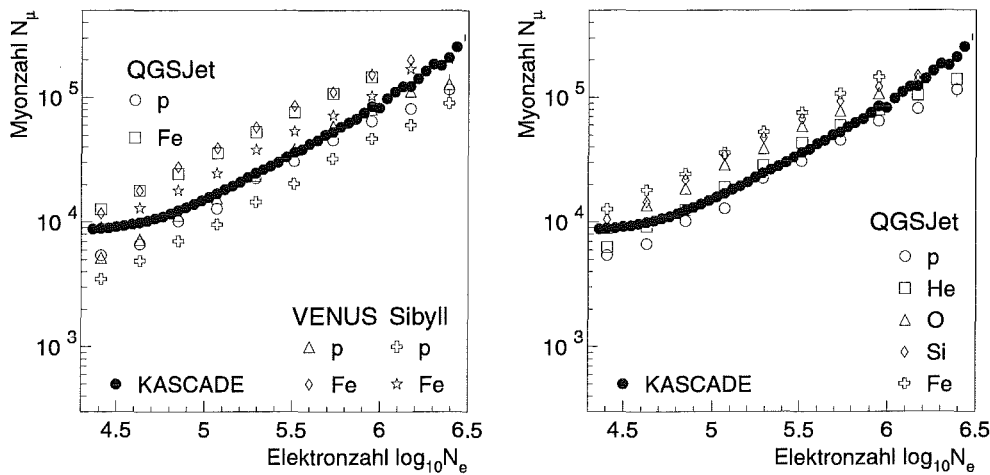


Abbildung 6.3: Myonzahl N_μ gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion I) verglichen. Die Myonzahl N_μ zeigt im Mittel das gleiche Verhalten wie die Myonzahl N_μ^{tr} (Abbildung 6.2).

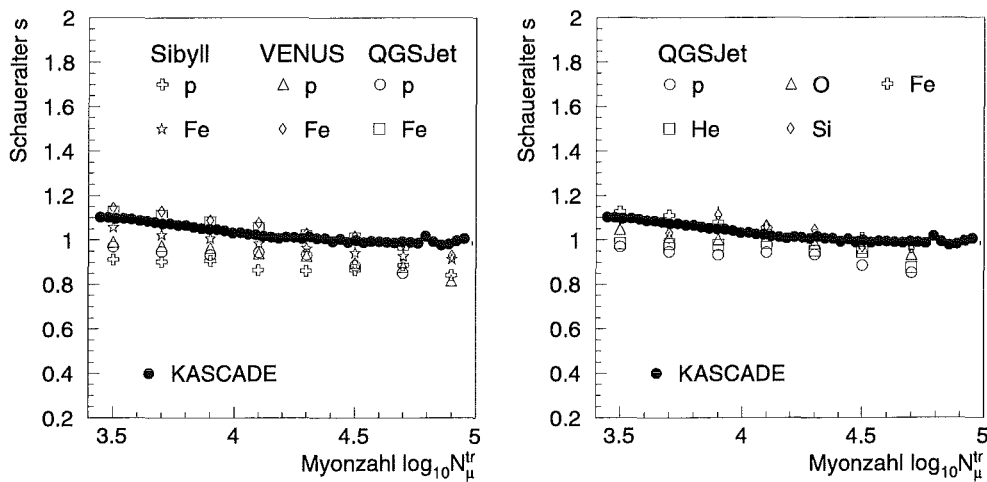


Abbildung 6.4: Schaueralter s gegen Myonzahl N_μ^{tr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion I) verglichen.

wandt auf 56 „unabhängige“ Subschauer. Protoninduzierte Schauer zeigen Ausläufer zu größeren Elektronzahlen [18].

Bei Vertauschung von Abszisse und Ordinate ist der in Abbildung 5.7 veranschaulichte Effekt deutlich zu erkennen. Es werden bei dieser Einteilung Protonen angereichert, wie die Abbildung 6.2 (rechts) zeigt. Hier kommen die Meßpunkte im Mittel zwischen

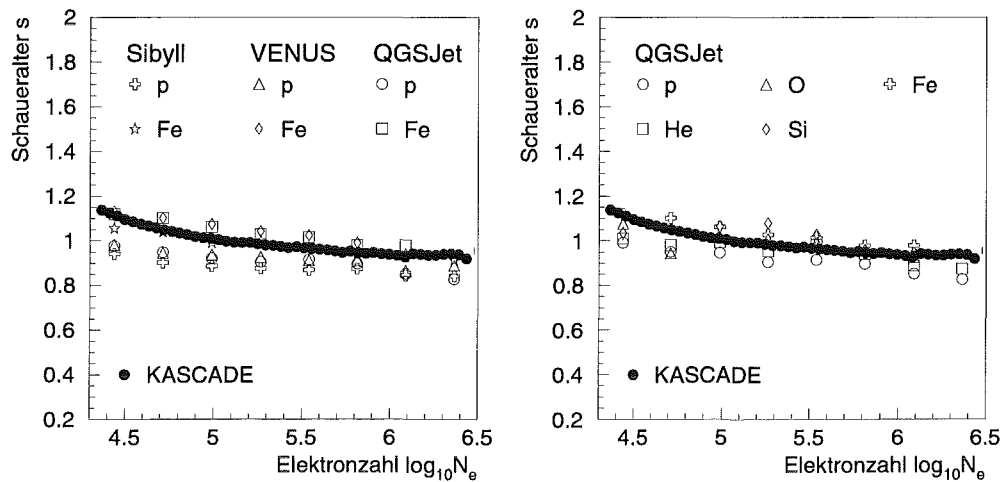


Abbildung 6.5: Schaueralter s gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion I) verglichen.

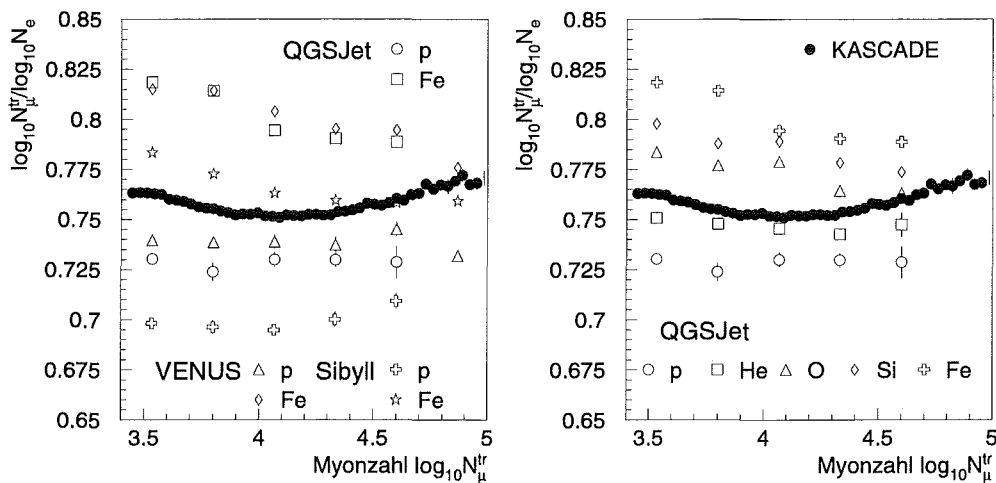


Abbildung 6.6: Verhältnis der Logarithmen von Myonzahl N_μ und Elektronzahl N_e gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion I) verglichen. Qualitativ spiegelt der Verlauf eine mittlere Massezusammensetzung der kosmischen Strahlung wider.

Helium- und Protonereignissen zu liegen.

Die Gesamtmyonzahl N_μ über der Elektronzahl ist in Abbildung 6.3 gezeigt. Wie in Abschnitt 5.3.1 beschrieben, besitzt sie den gleichen funktionalen Zusammenhang, hat aber mögliche systematische Abweichungen außerhalb der geometrischen Akzeptanz.

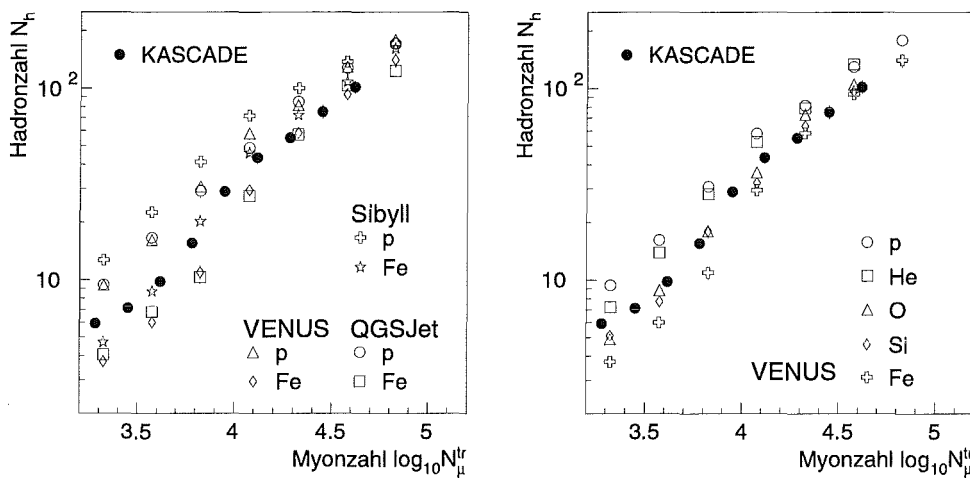


Abbildung 6.7: Hadronzahl N_h gegen Myonzahl N_μ^{tr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

Nachfolgend wird daher nur noch die Myonzahl N_μ^{tr} und nicht mehr N_μ zur Analyse benutzt.

Das Schaueralter s , in einer Anpassungsprozedur mit der Elektronzahl simultan bestimmt (siehe Gleichung 5.1), hat, wie sich ergeben wird, eine geringere Trenneigenschaft (Abbildungen 6.4 und 6.5). Analog Abbildung 5.9 nimmt das Alter der Schauer mit größer werdender Myonzahl ab, denn sie dringen tiefer in die Atmosphäre ein.

Das Verhältnis der Logarithmen von Myon- (N_μ^{tr}) zu Elektronzahl (N_e) gibt qualitativ den Verlauf des Mittelwertes der Massezusammensetzung wieder (Abbildung 6.6). Der Trend geht, bei kleinen Myonzahlen N_μ^{tr} beginnend, zu einer leichteren Komposition, um ab einer Myonzahl $\log_{10} N_\mu^{tr} \approx 4.1$ eine schwerere Zusammensetzung zu zeigen. Abbildung 6.6 (rechts) stellt den Verlauf deutlicher dar. Es sind die Mittelwerte der Verteilungen für fünf Primärteilchen des Modells QGSJet mit dem Meßdaten verglichen. Das Modell Sibyll kann die Meßdaten für große Energien nicht reproduzieren. Sie liegen oberhalb der Datenpunkte der Fe-Ereignisse.

6.2 Gemessene Observablen zentraler Schauer

Neben den im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Elektron- und Myonzahlen können, wie bereits mehrfach erwähnt, bei zentralen Schauern die hadronische Komponente durch das Zentralkalorimeter, sowie hochenergetische Myonen ($E_\mu > 2$ GeV) durch die MWPCs nachgewiesen werden (Selektion II).

Die Abhängigkeit der Hadronzahl von der Myonzahl N_μ^{tr} ist in den Abbildungen 6.7 und 6.9 veranschaulicht. Die Triggerschwelle macht sich bis zu $\log_{10} N_\mu^{tr} \approx 3.7$ be-

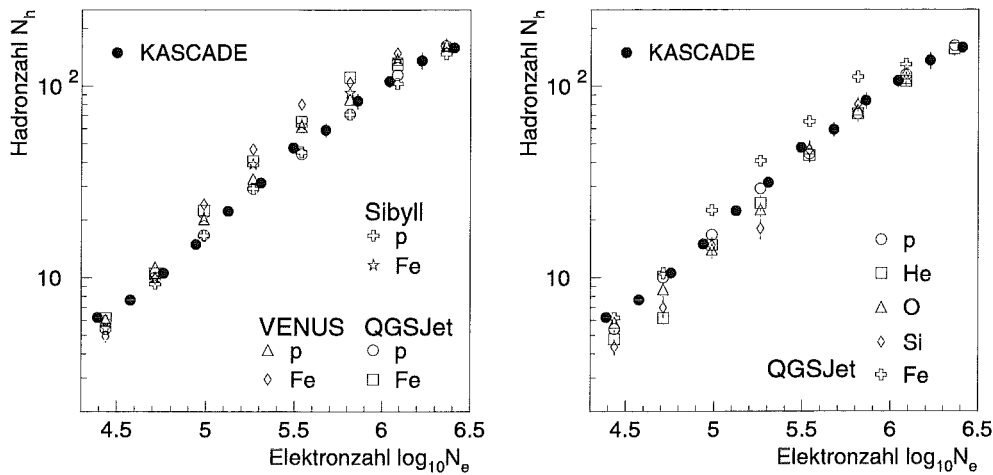


Abbildung 6.8: Hadronzahl N_h gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

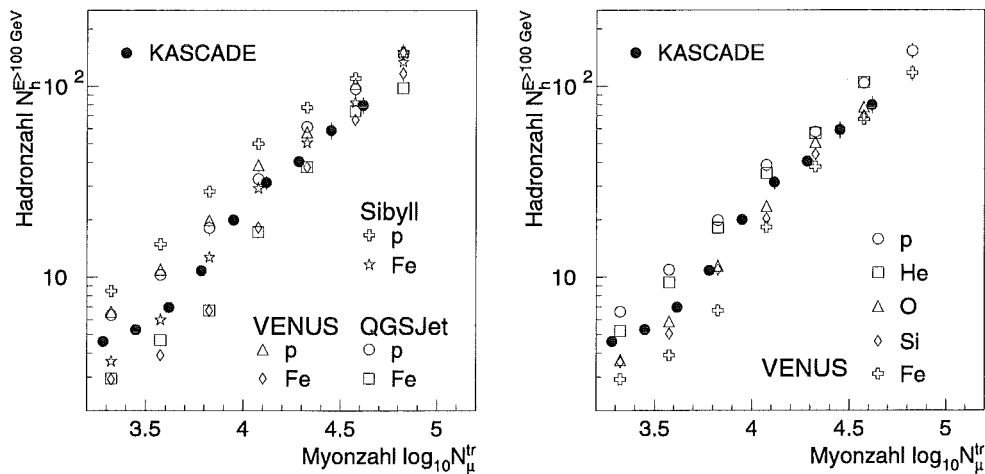


Abbildung 6.9: Hadronzahl $N_h^{E>100\text{ GeV}}$ gegen Myonzahl N_μ^{tr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

merkbar. Auffallend ist der Sattelpunkt, der bei $\log_{10} N_\mu^{tr} \approx 4.1$ in den Meßdaten sichtbar ist. Zu größeren Myonzahlen hin nähern sich die Meßdaten den simulierten Eisendaten der Modelle QGSJet und VENUS; ein Indiz für eine schwerer werdende Elementzusammensetzung der kosmischen Strahlung. Die Mittelwerte der Eisensimulationen des Modells Sibyll liegen über den gemessenen Werten. Auch hier zeigt sich, daß dieses Modell die KASCADE-Daten nicht reproduzieren kann. Die Ursache ist,

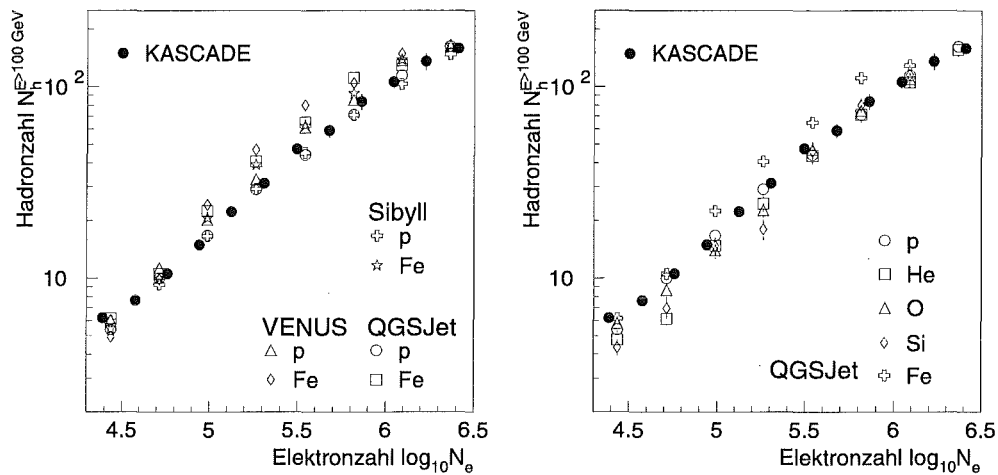


Abbildung 6.10: $N_h^{E>100\text{ GeV}}$ gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

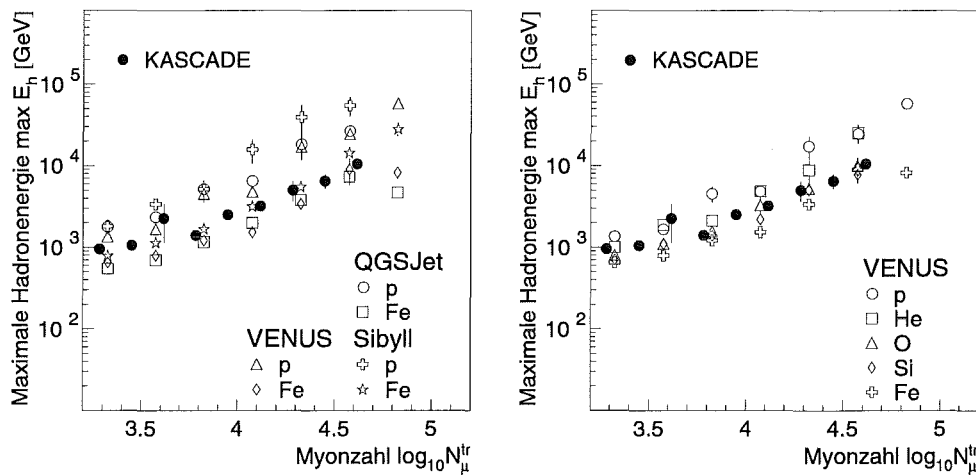


Abbildung 6.11: Maximale Hadronenergie $\max E_h$ gegen Myonzahl N_μ^{tr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

wie in Abschnitt 5.5 angedeutet, in der zu geringen Anzahl an Myonen bei gegebener Energie zu suchen.

Die beiden massesensitiven Parameter N_h und N_e , in Abbildung 6.8 und 6.10 gegeneinander aufgetragen, haben das selbe Verhalten als Funktion der Energie (vgl. Abbildungen 5.8 und 5.10): Bei gegebener Energie ist der Wert der Observablen für leichtere

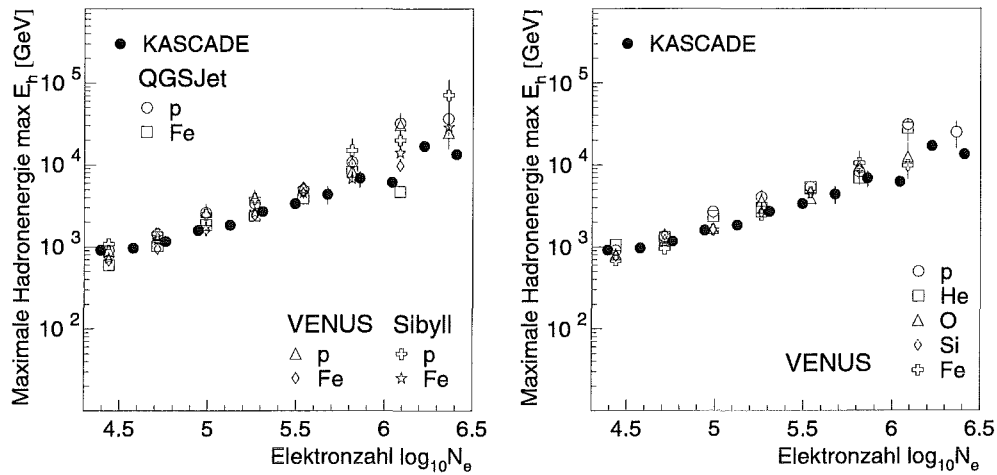


Abbildung 6.12: Maximale Hadronenergie $\max E_h$ gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

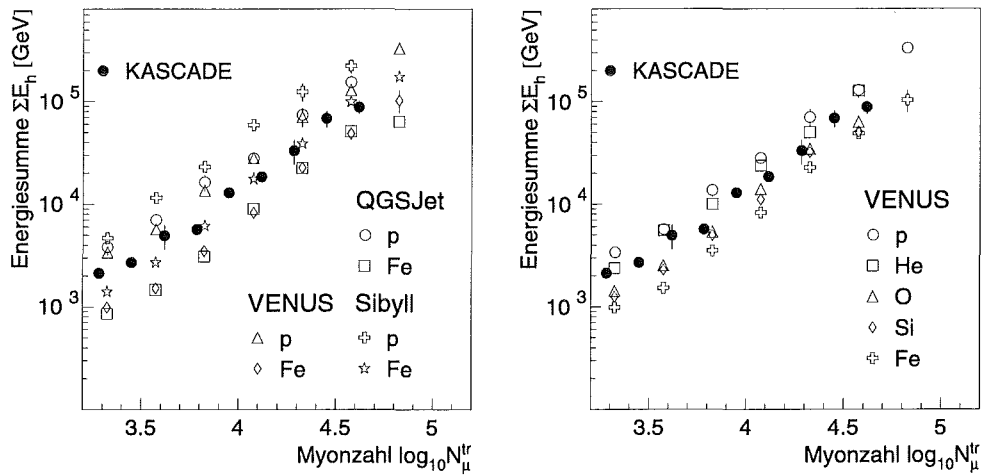


Abbildung 6.13: Energiesumme $\sum E_h$ gegen Myonzahl N_μ^{tr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

Primärteilchen größer als für schwerere. Daher überdecken sich die $N_h - N_e$ Verteilungen für verschiedene Massen.

Die maximale Hadronenergie $\max E_h$ spiegelt eine schwerer werdende Elementzusammensetzung bei größeren Myonzahlen wider (Abbildung 6.11). Wegen der geringen Zahl simulierter Schauer und der Tatsache, daß nur ein einzelnes rekonstruiertes Ha-

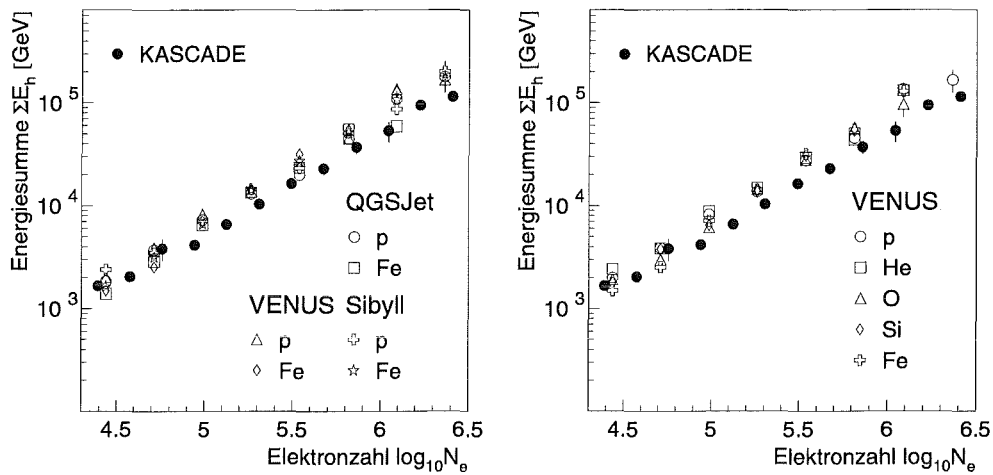


Abbildung 6.14: Energiesumme ΣE_h gegen Elektronzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

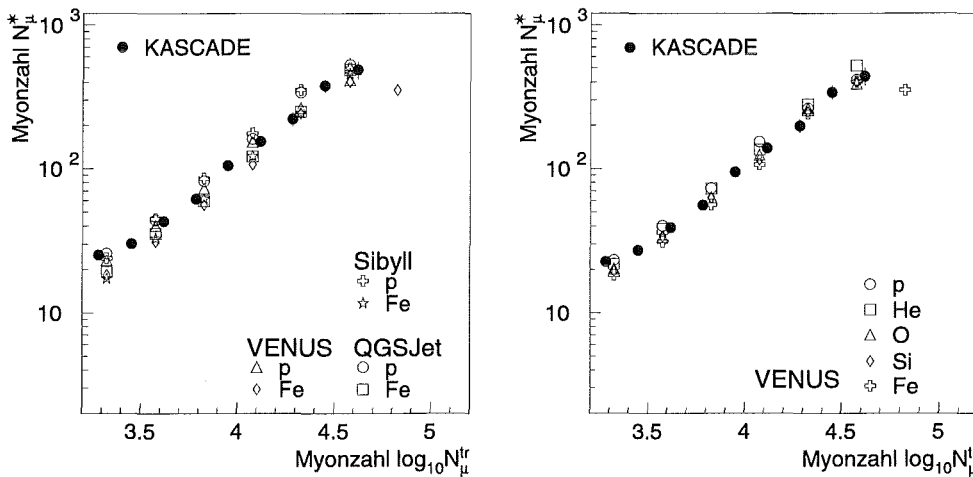


Abbildung 6.15: Myonzahl N_μ^* gegen Myonzahl N_μ^{tr} . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie VENUS-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

dron zu dieser Schauergröße beträgt, schwanken die Mittelwerte der maximalen Hadronenergie stark. Dennoch liegen die Meßpunkte innerhalb der Extrema Proton und Eisen. Die Energiesumme ΣE_h , die aus der Summe der rekonstruierten Hadronen bestimmt wird, zeigt geringere Schwankungen (Abbildung 6.13).

Die maximale Hadronenergie, über der Elektronzahl aufgetragen, ist innerhalb der

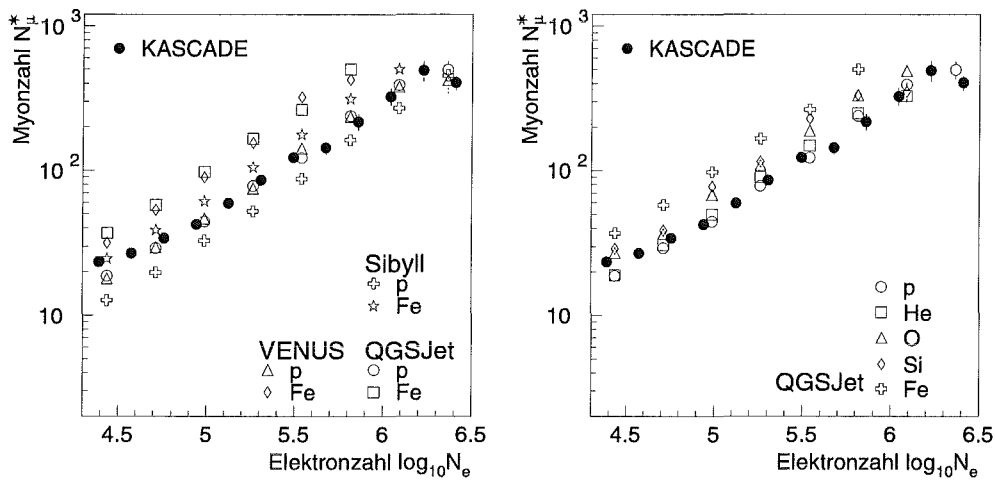


Abbildung 6.16: Myonzahl N_{μ}^* gegen Elektronenzahl N_e . Proton- und eiseninduzierte Schauer unterschiedlicher Modelle (links), sowie QGSJet-Rechnungen der fünf simulierten Primärteilchen (rechts) sind mit den Meßergebnissen (Selektion II) verglichen.

Streuung mit den Meßdaten verträglich, unabhängig von der Primärmasse der simulierten Ereignisse (Abbildung 6.12). Es haben alle Modelle Schwierigkeiten die $\sum E_h - N_e$ Relation im Mittel korrekt zu beschreiben (Abbildung 6.14). Auch in dieser Darstellung ist die Masseabhängigkeit der simulierten Ereignisse kompensiert und daher sensitiv auf Abweichungen, die nicht durch Unterschiede in der Masse hervorgerufen werden.

Für die Zahl der Myonen N_{μ}^* über der der Myonzahl N_{μ}^{tr} ergibt sich das gleiche Bild, wie bei der Relation $N_{\mu}^* - E_0$ in Abbildung 5.14. Beide Myonzahlen sind nur gering massesensitiv und simulierte sowie gemessene Ereignisse kommen modellunabhängig zur Deckung. Ähnlich dem Verhältnis $N_{\mu}^{tr} - N_e$ werden bei dem in Abbildung 6.16 gezeigten Zusammenhang von $N_{\mu}^* - N_e$ Protonen innerhalb eines N_e -Intervalls angereichert. Wiederum ergibt die Simulation des Modells Sibyll qualitativ eine extrem schwere Zusammensetzung. Die konsistente Beschreibung gemessener Luftschauerereignisse durch Simulationen der Modelle QGSJet und VENUS rechtfertigt die Verwendung zur quantitativen Analyse der Elementzusammensetzung und Bestimmung des Energiespektrums der kosmischen Strahlung.

6.3 Bhattacharyya-Abstand als Maß der Massesensitivität

Um die zu präsentierenden Resultate bezüglich der Elementzusammensetzung beurteilen zu können, wird der Bhattacharyya-Abstand μ (Gleichung 4.11) für je zwei Klassen ω_i und ω_j mit $j \in \{p, \text{He}, \text{O}, \text{Si}, \text{Fe}\}$, $i = p \neq j$ berechnet. Er gibt ein Maß für die Trennbarkeit zweier Klassen an.

Klassen	N_e	N_μ^{tr}	s	N_μ^*	$N_h^{100\text{GeV}}$	$\max E_h$	ΣE_h
p-Fe	0.43	0.34	1.29	1.18	1.16	1.15	1.15
	0.43	0.28	↔	1.17	1.16	1.14	1.14
	0.30	0.19	↔	↔	1.14	1.13	1.13
	0.19	0.14	↔	↔	↔	1.10	1.11
	0.16	0.10	↔	↔	↔	1.10	↔
p-Si	0.46	0.25	0.95	0.84	0.78	0.82	0.78
	0.45	0.20	↔	0.83	0.77	0.81	0.77
	0.37	0.11	↔	↔	0.75	0.80	0.75
	0.32	0.10	↔	↔	0.75	↔	0.73
	0.19	0.10	↔	↔	↔	↔	0.71
p-O	0.27	0.15	0.64	0.53	0.49	0.50	0.48
	0.26	0.13	↔	0.52	0.49	0.49	0.47
	0.23	0.09	↔	↔	0.47	0.48	0.46
	0.18	0.08	↔	↔	0.45	↔	0.44
	0.12	0.08	↔	↔	↔	↔	0.42
p-He	0.08	0.07	0.13	0.12	0.13	0.13	0.12
	0.07	0.06	↔	0.11	0.12	0.12	0.11
	0.05	0.04	↔	0.10	↔	0.11	0.11
	0.05	0.03	↔	0.09	↔	↔	0.11
	0.02	0.03	↔	↔	↔	↔	0.08

Tab. 6.1: Bhattacharyya-Abstand für QGSJet Simulationen. Als übliches Maß zum Testen auf Ähnlichkeit (bzw. Nichtähnlichkeit) zweier Verteilungen zeigt der Bhattacharyya-Abstand die Trenneigenschaften der unterschiedlichen Observablen. Der Fehler der Abstände ist stets kleiner als 0.01 (Erklärung siehe Text).

Die Tabellen 6.1 und 6.2 stellen die berechneten Abstände dar. Jede Zahl der ersten Zeile ist so bestimmt, daß aus der Menge der Observablen $\{N_e, N_\mu^{tr}, s, N_\mu^*, N_h^{E>100\text{GeV}}, \Sigma E_h\}$ der Parameter der i -ten Spalte X_i , also $X_1 = N_e, X_2 = N_\mu^{tr} \dots$, entfernt wird und der Abstand μ berechnet wird. Der Parameter, ohne den sich der größte Abstand μ je Zeile ergibt, wird aus der Menge der Parameter entfernt, d.h. er wird zur weiteren Be-

Klassen	N_e	N_μ^{lr}	s	N_μ^*	$N_h^{100\text{GeV}}$	$\max E_h$	ΣE_h
p-Fe	0.51	0.43	1.02	0.96	0.92	0.94	0.86
	0.42	0.36	↔	0.95	0.90	0.93	0.85
	0.38	0.25	↔	↔	0.83	0.85	0.77
	0.28	0.16	↔	↔	0.78	↔	0.75
	0.08	0.13	↔	↔	↔	↔	0.74
p-Si	0.56	0.55	0.93	0.71	0.81	0.84	0.75
	0.51	0.51	↔	0.70	0.79	0.83	0.74
	0.40	0.41	↔	0.60	0.77	↔	0.728
	0.30	0.35	↔	0.54	↔	↔	0.71
	0.18	0.29	↔	0.48	↔	↔	↔
p-O	0.34	0.37	0.63	0.40	0.60	0.60	0.59
	0.31	0.35	↔	0.39	0.58	0.59	0.57
	0.27	0.31	↔	0.36	0.57	↔	0.58
	0.25	0.33	↔	0.33	0.57	↔	↔
	0.17	0.42	↔	0.32	↔	↔	↔
p-He	0.17	0.15	0.26	0.23	0.24	0.23	0.24
	0.16	0.14	↔	0.23	0.24	0.23	0.24
	0.14	0.12	↔	0.22	↔	0.23	0.23
	0.14	0.11	↔	0.19	↔	0.21	↔
	0.16	0.16	↔	0.19	↔	↔	↔

Tab. 6.2: Bhattacharyya-Abstand für VENUS Simulationen. Als übliches Maß zum Testen auf Ähnlichkeit (bzw. Nichtähnlichkeit) zweier Verteilungen zeigt der Bhattacharyya-Abstand die Trenneigenschaften der unterschiedlichen Observablen. Der Fehler der Abstände ist stets kleiner als 0.01 (Erklärung siehe Text).

rechnung nicht mehr verwendet, da er einen geringeren Beitrag zur Trennung leistet als die restlichen Meßgrößen. Dies wird in den weiteren Zeilen mit ↔ gekennzeichnet. Zum Schluß erhält man je zwei Observablen (hellgrau unterlegt), die die größte Diskriminanzeigenschaft besitzen.

Die Abstände wurden exemplarisch für die Modelle QGSJet und VENUS zwischen der

Klasse der Protonen und den vier restlichen Klassen errechnet. Von den Abständen der Klassen p-Fe bis hin zu p-He nehmen die absoluten Werte stets ab, womit belegt wird, daß Primärteilchen mit geringen Unterschieden in der Nukleonenzahl kaum zu trennen sind.

Wie zu erwarten besitzen Elektron- und Myonzahl die größte Trenneigenschaft. Die Myonzahl, die in erster Näherung eigentlich nur von der Energie, aber nicht von der Primärmasse abhängt, trägt deshalb signifikant zur Trennung bei, weil sie die Energieskala, mit der die Klassen miteinander verglichen werden, festlegt. Ansonsten – ohne N_{μ}^{tr} – überlagern sich die Verteilungen wie z.B. in Abbildung 6.14 und eine Separation ist kaum möglich, denn die Mittelwerte kommen zur Deckung, d.h. der erste Term der Gleichung 4.11 verschwindet, und die Korrelationsmatrizen sind identisch, d.h. der zweite Term in Gleichung 4.11 ist annähernd Null.

Das Schaueralter s ist in allen Klassenvergleichen die Meßgröße mit der geringsten Trenneigenschaft. Die Abstände der Meßgrößen N_{μ}^* , $N_h^{E>100\text{GeV}}$, $\max E_h$ und $\sum E_h$ sind in der Regel um einen Faktor 1.5 bis 2 größer als im Fall von Elektron- und Myonzahl und ergeben stets Abstände der gleichen Größenordnung, d.h sie bieten alle die gleiche Möglichkeit der Separation.

6.4 Vergleich der Klassifizierer

Die Resultate bei Anwendung der Methoden k-Nächste-Nachbarn, Neuronales Netz und Bayes-Klassifizierer auf alle fünf Klassen von Primärteilchen zur Bestimmung der Klassifikationsmatrix aus Gleichung 4.15 sind in Abbildung 6.17 dargestellt. Je Methode ist in den fünf Einzelabbildungen eine Zeile der Matrix dargestellt. Die erste Abbildung zeigt somit die Wahrscheinlichkeit $\hat{P}_{p \rightarrow \omega_i}$ mit der Protonen als Klasse $i \in \{p, \text{He}, \text{O}, \text{Si}, \text{Fe}\}$ erkannt werden. Die restlichen Abbildungen ergeben sich entsprechend. Es wurden die Observablen N_e , N_{μ} und s ohne Einfaltung der Detektorantort verwendet, um die Trennbarkeit ohne Detektorauflösung zu studieren. Es sind nur die Ergebnisse der VENUS Modellrechnungen wiedergegeben, da sich die Resultate zwischen den Modellen VENUS und QGSJet nur gering unterscheiden.

Der Bayes-Klassifizierer zeigt die beste Trennung, denn für alle fünf Klassen ist die Klassifikationswahrscheinlichkeit größer als 65%. Besonders bei der kNN-Methode ($k=7$) und dem verwendeten Neuronalen Netz ($3 \times 5 \times 3 \times 1$ Topologie) ergibt sich für die mittleren Klassen (He, O, Si) eine schlechtere Trennung unter 55%. Dies ist vereinfachend dadurch zu erklären, daß weitere Klassen in der Projektion auf die Massenhauptachse (Abschnitt 4.1) zu höheren und niedrigeren Massen existieren und daher ein Überlapp der Wahrscheinlichkeitsdichten vorhanden ist, der zu Mißklassifikation führt. Die Klassen Proton und Eisen kennen keine Nachbarklassen zu niedriger bzw. größerer Masse und erfahren dadurch keine Fehlidentifikation.

Der Separabilitätsindex G in Tabelle 6.3 macht deutlich, daß schon im Falle ohne Einfaltung der Detektorantwort eine ausreichende Trennung für den kNN-Klassifizierer

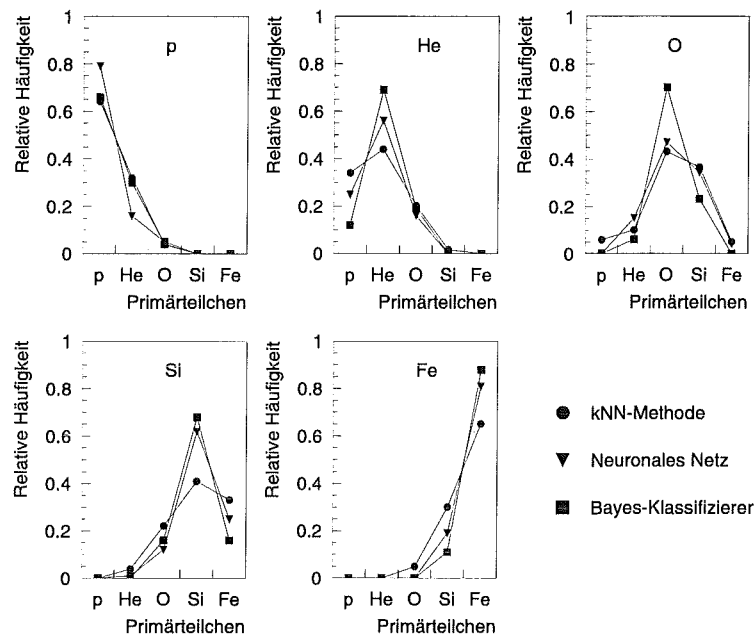


Abbildung 6.17: Mißklassifikation verschiedener Klassifizierer im Vergleich. Resultat der Klassifikation bei Benutzung der fünf simulierten Klassen von Primärteilchen. Es wurden reine CORSIKA-Simulationen, d.h. ohne Einfaltung der Detektorauflösung, verwendet (N_e , N_μ , s).

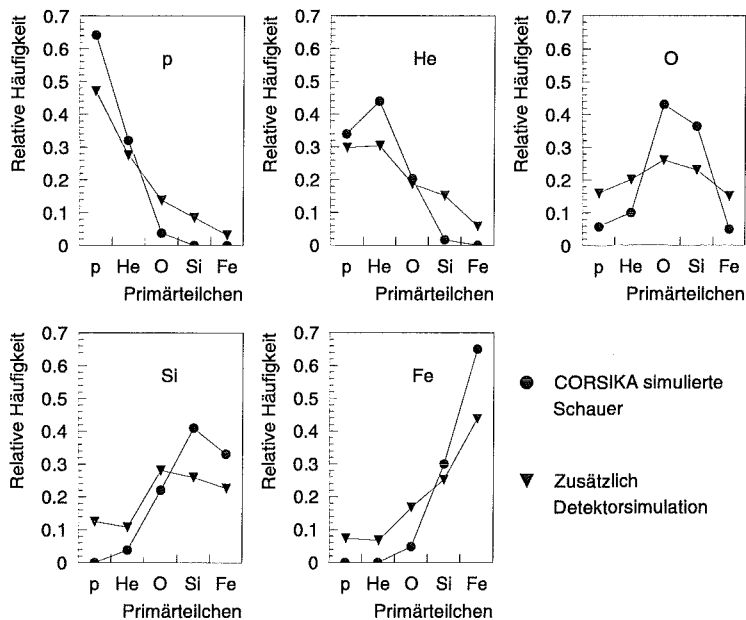


Abbildung 6.18: Mißklassifikationsmatrix des kNN-Klassifizierers. Wie in Abbildung 6.17, aber mit und ohne Berücksichtigung der Detektorantwort.

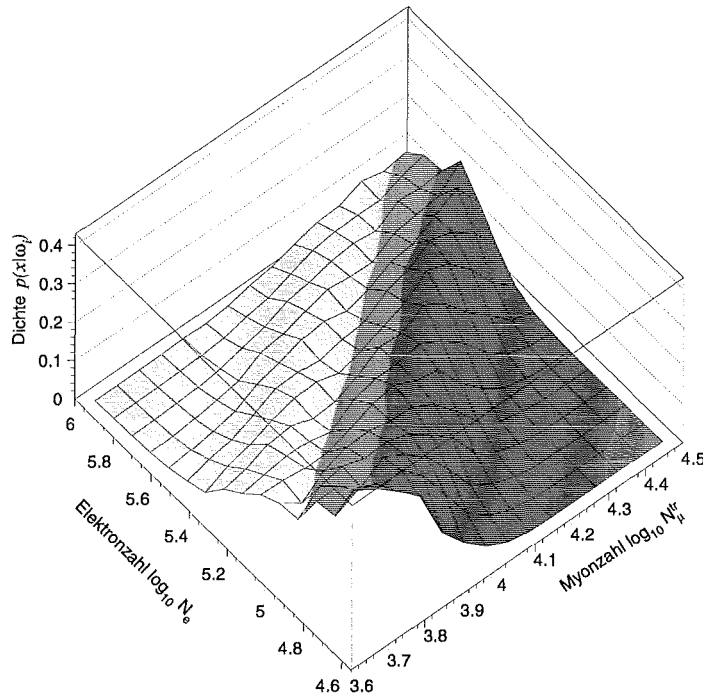


Abbildung 6.19: Wahrscheinlichkeitsdichte bei drei gegebenen Klassen (QGSJet). Zur Bestimmung der Dichte wurden N_e und N_μ^{tr} verwendet (hellgrau=p, grau=O, dunkelgrau=Fe).

nicht möglich ist. Berücksichtigt man die endliche Auflösung des Detektors, reduziert sich der Index G auf Werte unter 50%. Es ist für keinen Klassifizierer eine Trennung und Rekonstruktion der wahren Zusammensetzung der zu untersuchenden Ereignisse möglich (Gleichung 4.15). Abbildung 6.18 belegt anhand des kNN-Algorithmus die schlechte Trennung bei fünf Klassen. Zur besseren Übersicht sind nochmals die Raten $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_j}$ ohne Detektorsimulation aus Abbildung 6.17 eingezeichnet.

Es ergibt sich für jede Klasse von Primärteilchen eine schlechtere Separabilität bei Einbezug der Detektoreffekte. Es ist sogar wahrscheinlicher die Klasse Silizium als Sauerstoff statt als Silizium zu klassifizieren. Daher finden im Weiteren maximal drei Klassen Verwendung, die Klasse Proton als Vertreter leichter Elemente, Sauerstoff als Vertreter intermediärer Elemente und Eisen als Vertreter schwerer Elemente. Der kNN-Klassifizierer zeigt un-

Klassifizierer	Index G [%]	
	ohne Detektorantwort	mit Detektorantwort
kNN	49	35
Neuronales Netz	64	40
Bayes-Klassifizierer	72	41

Tab. 6.3: Separabilitätsindex G . Geometrisches Mittel der Klassifikationsraten $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_j}$ als Maß der Separabilität.

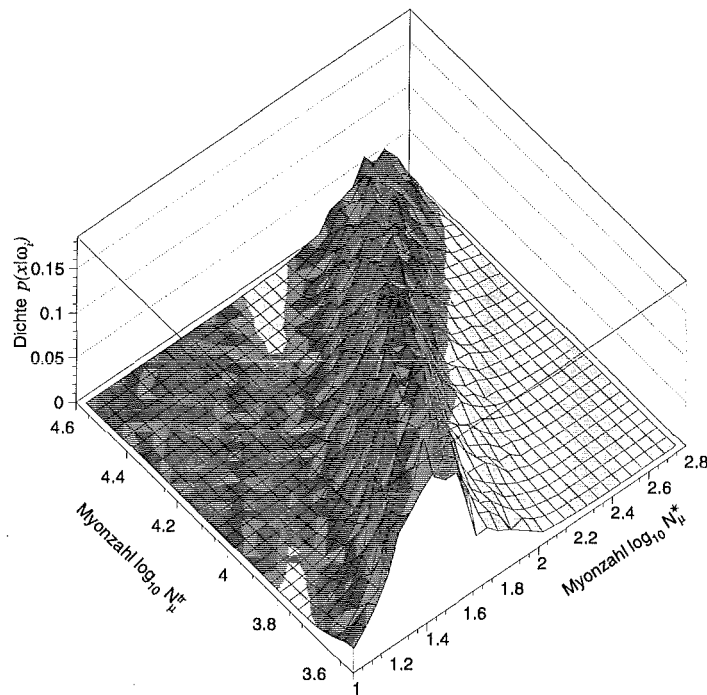


Abbildung 6.20: Wahrscheinlichkeitsdichte bei drei gegebenen Klassen (QGSJet). Zur Bestimmung der Dichte wurden N_{μ}^* und N_{μ}^r verwendet (hellgrau=p, grau=O, dunkelgrau=Fe).

abhängig von der Klasse verwendeter Simulationen die schlechteste Trennung. Da nur die Information der k nächsten Nachbarn ausgenutzt wird und Luftschauerobservablen große Streuungen besitzen, wird nur die lokale Struktur der Wahrscheinlichkeitsdichte im Punkt x des betrachteten Musters (Meßwert bzw. simuliertes Ereignis) erfaßt und die zur Verfügung stehende Information nicht in vollem Umfang ausgeschöpft. Das Neuronale Netz und der Bayes-Klassifizierer, die eine „globale“ Dichteapproximation mittels simulierter Muster berechnen, sind dieser Methode überlegen und werden im Folgenden der kNN-Methode vorgezogen. Die bisherigen Ergebnisse zeigen die Tauglichkeit und Überlegenheit des Neuronalen Netzes gegenüber dem kNN-Klassifizierer. Es ist daher die Motivation berechtigt das Neuronale Netz als Klassifizierer zu verwenden, auch wenn nur die kNN- und Bayes-Methoden statistisch fundiert sind.

In Abschnitt 6.3 wurde nachgewiesen, daß die Trenneigenschaften der Observablen starke Unterschiede aufweisen. Dies muß man berücksichtigen, wenn Wahrscheinlichkeitsdichten – anhand der Muster berechnet – zur Bestimmung der Elementzusammensetzung verwendet werden. Abbildung 6.19 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte in Abhängigkeit der Elektron- und Myonzahl für drei Klassen (p,O,Fe) dar. Die Dichte gibt den in Abbildung 6.1 erkennbaren qualitativen Verlauf der Mittelwerte in quantitativer Form wieder. Der rechte Ausläufer der Verteilung zeigt ein Artefakt. Die Dichte

wird hier nicht durch lokale Muster erzeugt, sondern die breitere Sauerstoffverteilung hat hier zufällig Gebiete, in denen $p(x|\omega_O) > p(x|\omega_{Fe}) \approx 0$ gilt. Benutzt man nur Meßgrößen, wie N_μ^* und N_μ^{rr} , die eine starke Energiekorrelation zeigen, aber kaum masse-sensitiv sind, läßt die Wahrscheinlichkeitsdichte keine Trennung zu (Abbildung 6.20). Es ergeben sich entsprechend der Verteilung der simulierten Muster zufällige Cluster. Analog diesem Extrembeispiel erhält man bei Verteilungen, die eine sehr große Streubreite besitzen und nur wenige simulierte Ereignisse vorliegen, ähnlich kleine Wahrscheinlichkeitsdichten, da der Raum zu gering mit Mustern bevölkert ist.

Erhöht man die Anzahl verwendeter Meßgrößen K , d.h. die Dimension des Raumes, so reduziert sich die Zahl der Muster N innerhalb eines Volumens und ebenso die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, \omega) \sim \frac{N}{V} \propto N \Gamma((K+2)/2) / \pi^{K/2} r^K$ mit dem Radius r des Volumens zur Potenz K . Bei einer endlichen Zahl simulierter Ereignisse darf daher nicht eine beliebige Zahl von Observablen in die Analyse einbezogen werden.

6.5 Bestimmung der Elementzusammensetzung mittels Bayes-Klassifizierer

Der Bayes-Klassifizierer soll nun verwendet werden, um auf die Elementzusammensetzung zu schließen. Wie oben erwähnt, erscheint es fraglich, alle Meßgrößen in einer Analyse zu benutzen, da die Zahl simulierter Schauer zu gering ist. Es werden daher verschiedene Kombinationen der Observablen zur Bestimmung herangezogen, um systematische Effekte zu studieren. Verwendet wird hierzu Selektion II, bei der nicht nur N_e, N_μ^{rr} und s , sondern auch $N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$ zur Verfügung stehen.

In Abschnitt 5.5 ergab sich übereinstimmend in allen Wechselwirkungsmodellen, daß die Schauergröße N_μ^{rr} in guter Näherung unabhängig von der Masse des Primärteilchens aber „proportional“ zur Energie ist. Diese Größe wird deshalb für die Einteilung der Daten in logarithmisch äquidistante Intervalle der Primärenergie verwendet.

Abbildung 6.21 stellt exemplarisch die für die Observablen N_e und N_μ^{rr} bei der Klassifizierung bestimmte (a) und anhand der Mißklassifikationsmatrix danach rekonstruierte (b) Elementzusammensetzung in relativen Häufigkeiten für gemessene Ereignisse der Selektion II dar. Es wurden die Wahrscheinlichkeitsdichten $p(x|\omega_i)$ für jedes Muster der Meßdaten 100 mal berechnet und anhand Gleichung 4.5 in einem Bootstrap-Verfahren entschieden, welcher Klasse das Muster zugerechnet wird. Die dick eingezeichneten Fehler (mit Querbalken) sind die durch Anwendung der multinominalen Statistik bestimmten statistischen Fehler der Meßdaten. Der systematische Fehler der endlichen Zahl simulierter Schauer, den man durch das Bootstrap-Verfahren gewinnt, ist als dünnere Linie eingetragen und wird im Weiteren aus Übersichtsgründen in tabellarischer Form aufgelistet.

Die um die zur eigentlichen Klassifikation nicht berücksichtigten Klassen erweiterte Mißklassifikationsmatrix (Tabelle 6.4) wurde für jedes N_μ^{rr} Intervall berechnet (Erläuterung siehe unten). Sie weichen innerhalb der Fehler nur gering voneinander ab. Da fehlidentifizierte Ereignisse die Anteile verzerren, muß mittels Gleichung 4.15 unter

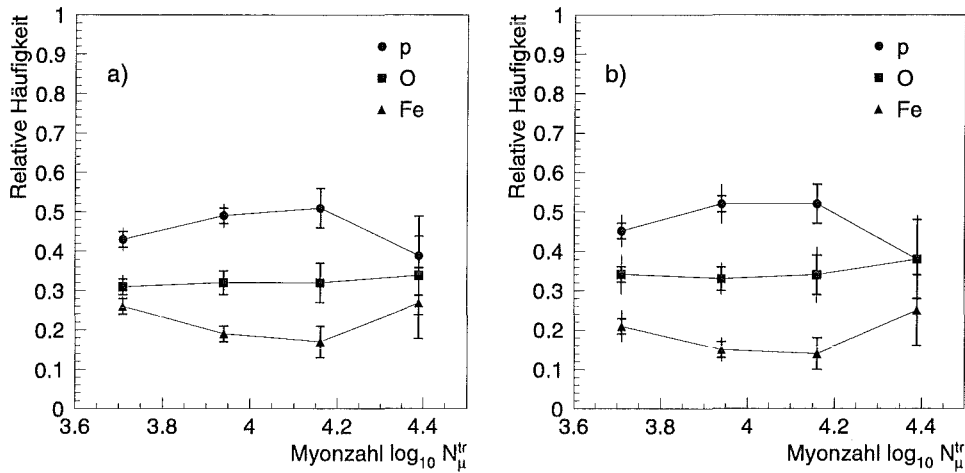


Abbildung 6.21: Bestimmte und rekonstruierte Zusammensetzung. Für drei Klassen bestimmte Elementzusammensetzung (a) und anhand der Mißklassifikationsmatrix rekonstruierte Elementzusammensetzung (b) bei Verwendung der Observablen N_e, N_{μ}^{tr} (VENUS).

Benutzung der Mißklassifikationsmatrix für jedes Intervall auf den „wahren“ Anteil geschlossen werden. Die rekonstruierten Anteile stellt Abbildung 6.21 b) dar.

Die Rekonstruktion ändert Proton- und Sauerstoffanteile nur gering (im Prozentbereich). Die Eisenanteile erfahren eine Änderung im 5%-Bereich, denn bei der Klassifikation werden nur wenige Eisenereignisse mißklassifiziert, so daß nur wenige als Sauerstoff fehlidentifizierte Ereignisse zurück zu den Eisenanteilen gelangen, aber ein beträchtlicherer Anteil von als Eisen identifizierte Sauerstoffereignisse von den Eisenanteilen abgezogen wird (Tabelle 6.4). Betrachtet man nur zwei Gruppen (p,Fe), um zu klassifizieren, so sind die Unterschiede zwischen klassifizierten und rekonstruierten Anteilen geringer, da die korrekte Klassifizierung $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_i}$ deutlich größer ist (Tabelle 6.6).

Die Matrizen in den Tabellen 6.4 und 6.5 geben exemplarisch sowohl die in einem *one leave out for a time* Durchlauf erhaltenen Mißklassifikationsmatrizen für drei Klassen bei Verwendung unterschiedlicher Observablen wieder, als auch für die beiden übrigen Klassen Helium und Silizium die Anteile, die in einem Klassifikationslauf gewonnen wurden (Tabellen 6.6 und 6.7 entsprechend für zwei Klassen). QGSJet und VENUS unterscheiden sich hierbei innerhalb der durch das schon erwähnte Bootstrap-Verfahren bestimmten Fehler kaum.

Für drei Klassen werden nur Kombinationen der Observablen in Verbindung mit der Elektron- und Myonenzahl ausgenutzt, denn der Separabilitätsindex G in Tabelle 6.8 belegt, daß nur solche Kombinationen eine Trennung mit einer mittleren Klassifikationsrate $\langle \hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_i} \rangle$ über 60% ermöglichen.

$P_{\omega_i \rightarrow \omega_j}$ [%]	QGSJet			VENUS		
	p	O	Fe	p	O	Fe
p	77 ± 3	20 ± 3	2 ± 1	78 ± 3	21 ± 2	1 ± 2
He	56 ± 3	39 ± 3	1 ± 1	64 ± 3	32 ± 2	4 ± 1
O	14 ± 2	61 ± 3	25 ± 3	15 ± 2	61 ± 4	24 ± 3
Si	3 ± 1	54 ± 3	43 ± 2	3 ± 2	51 ± 3	46 ± 2
Fe	1 ± 1	17 ± 2	82 ± 3	0 ± 1	20 ± 3	80 ± 3

Tab. 6.4: Erweiterte Misklassifikationsmatrizen für drei Klassen (p,O,Fe) bei Verwendung der Observablen N_{μ}^{tr} , N_e mit $3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$.

$P_{\omega_i \rightarrow \omega_j}$ [%]	QGSJet			VENUS		
	p	O	Fe	p	O	Fe
p	78 ± 4	20 ± 4	2 ± 1	74 ± 4	25 ± 3	1 ± 1
He	58 ± 3	38 ± 3	4 ± 1	55 ± 3	40 ± 3	5 ± 1
O	14 ± 1	63 ± 4	23 ± 3	9 ± 1	68 ± 5	23 ± 3
Si	3 ± 2	60 ± 3	37 ± 4	2 ± 2	54 ± 4	44 ± 4
Fe	1 ± 1	15 ± 4	83 ± 4	0 ± 1	25 ± 5	75 ± 5

Tab. 6.5: Erweiterte Misklassifikationsmatrizen für drei Klassen (p,O,Fe) bei Verwendung der Observablen N_{μ}^{tr} , N_e , N_{μ}^* , $N_h^{E>100\text{GeV}}$ mit $3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$.

$P_{\omega_i \rightarrow \omega_j}$ [%]	QGSJet		VENUS	
	p	Fe	p	Fe
p	93 ± 1	7 ± 1	94 ± 1	6 ± 1
He	85 ± 5	15 ± 5	85 ± 4	15 ± 4
O	45 ± 5	56 ± 5	38 ± 5	62 ± 5
Si	22 ± 4	78 ± 4	18 ± 4	82 ± 4
Fe	4 ± 2	96 ± 2	4 ± 2	96 ± 2

Tab. 6.6: Erweiterte Misklassifikationsmatrizen für zwei Klassen (p,Fe) bei Verwendung der Observablen N_{μ}^{tr} , N_e mit $3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$.

$P_{\omega_i \rightarrow \omega_j}$ [%]	QGSJet		VENUS	
	p	Fe	p	Fe
p	71 ± 4	29 ± 4	64 ± 4	36 ± 4
He	56 ± 6	44 ± 6	63 ± 5	37 ± 5
O	38 ± 5	62 ± 5	40 ± 6	60 ± 6
Si	30 ± 5	70 ± 5	29 ± 5	71 ± 5
Fe	22 ± 3	78 ± 3	19 ± 3	81 ± 3

Tab. 6.7: Erweiterte Mißklassifikationsmatrizen für zwei Klassen (p,Fe) bei Verwendung der Observablen N_μ^* , $N_h^{E>100\text{GeV}}$ mit $3.6 \leq \log_{10} N_\mu^{tr} < 3.825$.

Observablen	Index G [%]		Bayes-Fehler ϵ [%]	
	2 Klassen	3 Klassen	2 Klassen	3 Klassen
$N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}$	69.5 ± 4.1	36.4 ± 7.4	20	57
$N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$	73.0 ± 3.8	43.8 ± 7.1	18	51
$N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$	72.0 ± 4.3	41.2 ± 6.9	18	51
N_e, N_μ^{tr}	94.5 ± 1.1	72.4 ± 2.3	5	27
N_e, N_μ^{tr}, s	94.5 ± 1.2	72.8 ± 2.6	5	27
$N_e, N_\mu^{tr}, N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}$	93.5 ± 2.2	74.2 ± 3.4	5	26
$N_e, N_\mu^{tr}, N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$	94.0 ± 2.3	68.4 ± 4.5	6	28

Tab. 6.8: Separabilitätsindex G und Bayes-Fehler ϵ . Geometrisches Mittel der Klassifikationsraten $\hat{P}_{\omega_i \rightarrow \omega_i}$ und Bayes-Fehler als Maß der Separabilität für verschiedene Observablenkombinationen mit $3.6 \leq \log_{10} N_\mu^{tr} < 3.825$. Inklusive Detektorsimulation (QGSJet).

Von $\{N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}\}$ über $\{N_e, N_\mu^{tr}\}$ bis $\{N_e, N_\mu^{tr}, N_\mu^*, N_h^{100\text{GeV}}\}$ nimmt der Separabilitätsindex von 36.4 bis 74.2 zu. Mehr Observablen und geringere Streubreiten stellen in der Regel mehr Information zur Verfügung. Gleichzeitig gibt die Tabelle den Bayes-Fehler aus Gleichung 4.9 – das Überlappintegral der Wahrscheinlichkeitsdichten – wieder. Er verhält sich prinzipiell wie der Index G .

Zwei Klassen (Tabellen 6.6 und 6.7) ergeben eine wesentlich bessere Trennung als drei Klassen. Daher können auch Kombinationen von Observablen, die nur im Zentraldetektor bestimmt werden, betrachtet werden. Die Mißklassifikationsmatrizen zeigen in

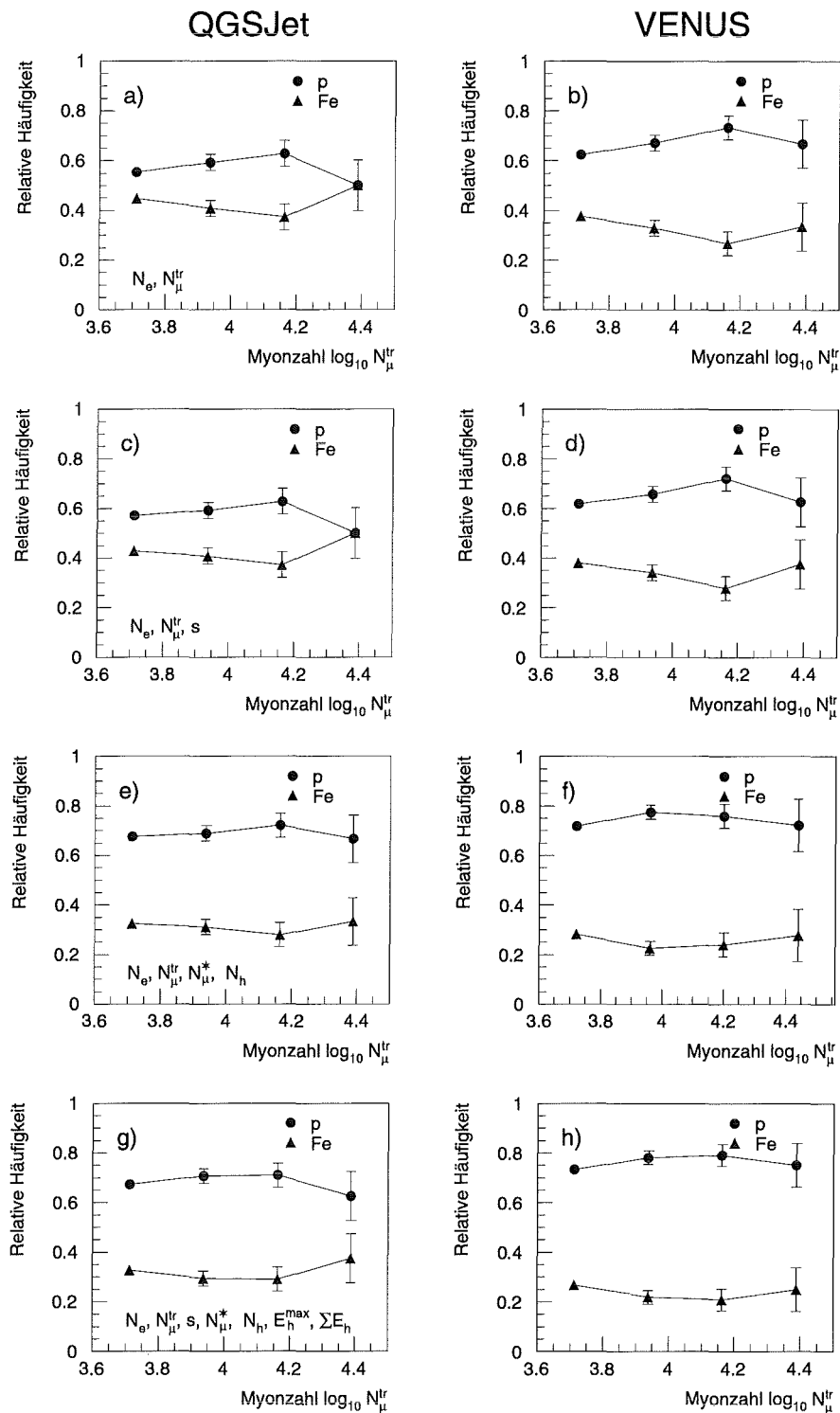


Abbildung 6.22: Rekonstruierte Elementzusammensetzung. Für zwei Klassen rekonstruierte Zusammensetzung verschiedener Observablenkombinationen (QGSJet und VENUS).

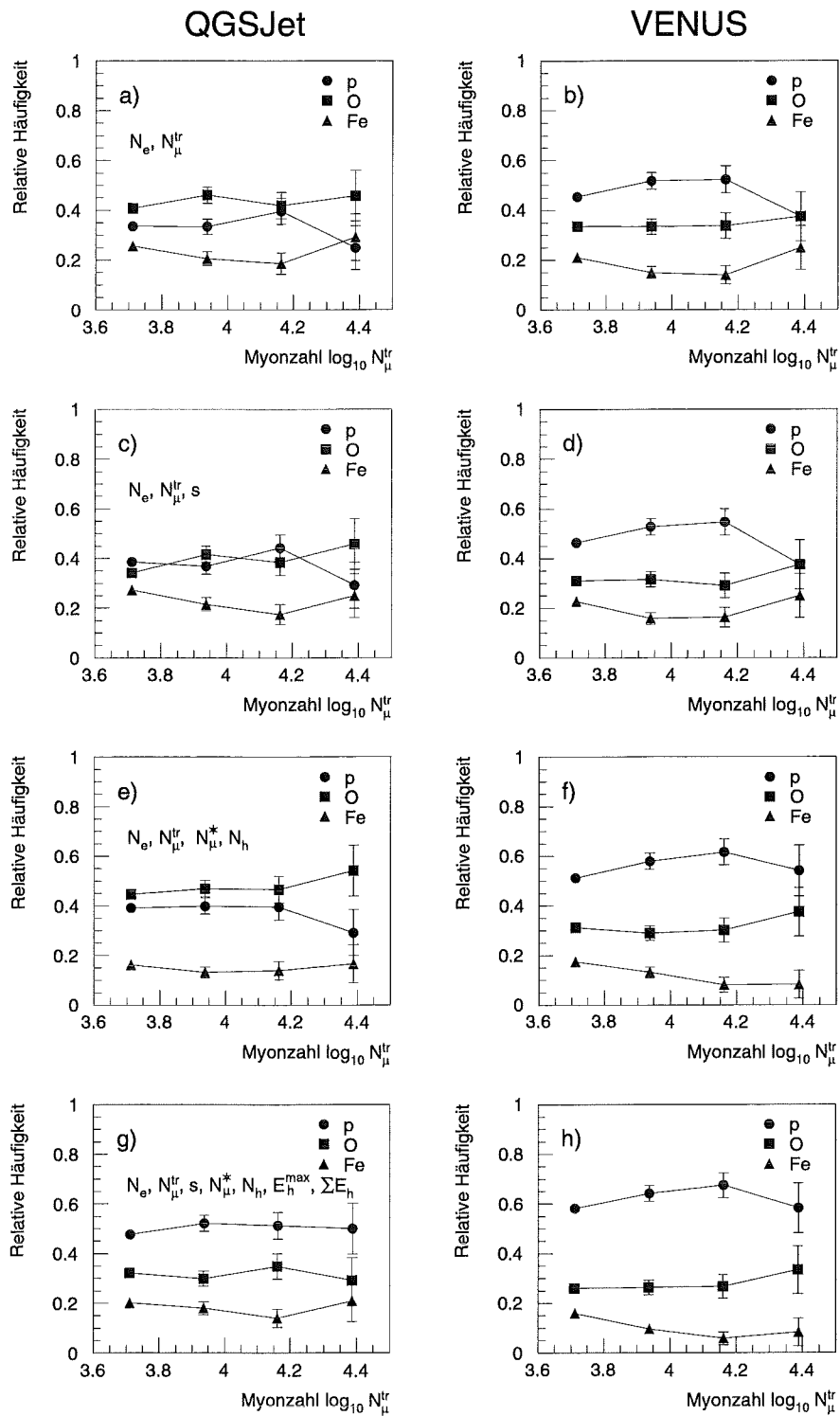


Abbildung 6.23: Rekonstruierte Elementzusammensetzung. Für drei Klassen rekonstruierte Zusammensetzung verschiedener Observablenkombinationen (QGSJet und VENUS).

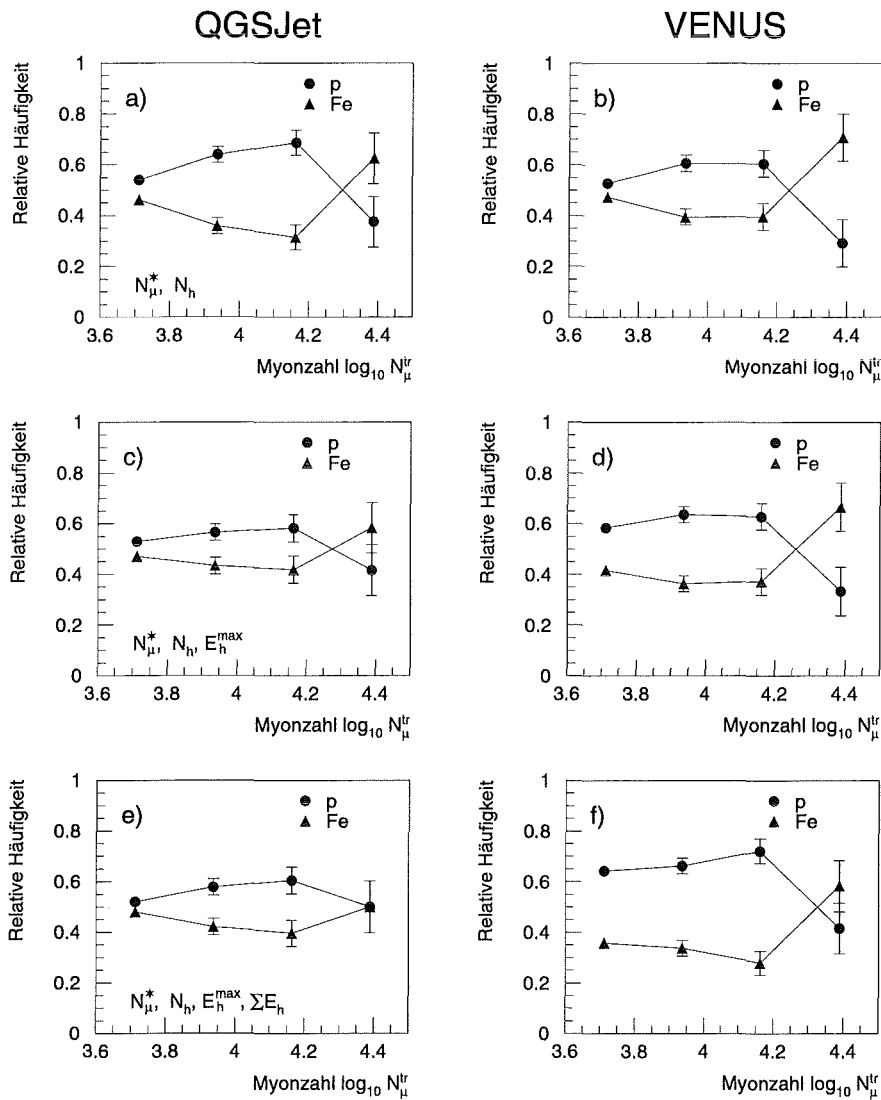


Abbildung 6.24: Rekonstruierte Elementzusammensetzung. Für zwei Klassen rekonstruierte Zusammensetzung verschiedener Kombinationen der Observablen des Zentraldetektors (QGSJet und VENUS).

diesem Fall aber eine geringere Trennbarkeit als bei Hinzunahme der Elektron- und Myonzahl.

Die rekonstruierte Elementzusammensetzung der Kombinationen aus Tabelle 6.8 mit einem Index G über 60% sind in den Abbildungen 6.22, 6.23 und 6.24 dargestellt. Linker Hand sind die Ergebnisse verschiedener Observablenkombinationen des Modells QGSJet, rechter Hand die des Modells VENUS aufgetragen. Zwei Klassen sind in den Abbildungen 6.22 und 6.24, drei Klassen in Abbildung 6.23 mit statistischen Fehlern der multinominalen Statistik veranschaulicht.

Insgesamt ergibt sich ein recht einheitliches Bild. Unabhängig von der Wahl der Observablen ist die Tendenz vorhanden, im Bereich des Knies ($N_{\mu}^{tr} \approx 4.1$) eine leichtere Zusammensetzung als bei niedrigeren oder höheren Myonzahlen zu zeigen. Die Verwendung des Modells VENUS ergibt stets eine leichtere Zusammensetzung als bei Benutzung des QGSJet Modells. Die verschiedenen Kombinationen innerhalb eines Modells ergeben dennoch Unterschiede, deren Ursache durch eine größere Zahl simulierter und auch gemessener Schauer geklärt werden muß. Zum einen spielt die Tatsache eine Rolle, daß nur zwei oder drei Klassen in die Analyse einbezogen werden können. Daher sind die intermediären Elemente in unterschiedlichen Proportionen den einzelnen Klassen zugeordnet. Im Fall zweier Klassen werden He, O und Si je nach Kombination der Observablen mit unterschiedlichen Raten den Klassen Proton und Eisen zugeordnet (Tabellen 6.4, 6.5, 6.6 und 6.7).

Da die kosmische Strahlung aus mindestens fünf Gruppen von Primärmassen besteht, führt die unterschiedliche Zuordnung zu den gezeigten Unterschieden. Desweiteren können auch die Generatoren der Wechselwirkungen die elektromagnetische, myonische und hadronische Komponente in unterschiedlicher Genauigkeit vorhersagen, so daß unterschiedliche Kombinationen verschiedene Resultate liefern. Somit tragen die Korrelationen eine entscheidende Rolle, um eine konsistente Beschreibung der Elementzusammensetzung zu gewährleisten.

Mit zunehmender Zahl an Meßgrößen in einer Kombination ist die Änderung der Zusammensetzung immer weniger ausgeprägt. Zum einen können die Korrelationen die Ursache der veränderten Zusammensetzung sein. Zum anderen kann sich die endliche Zahl simulierter Schauer bemerkbar machen. Es werden zunehmend die Klassen betont, die größere Streuungen besitzen, da die Wahrscheinlichkeitsdichte größere Bereiche überstreicht (Abbildungen 6.22 e,f,g,h, 6.23 e,f,g,h).

Beim Übergang von $\{N_e, N_{\mu}^{tr}\}$ zur Kombination $\{N_e, N_{\mu}^{tr}, s\}$ ergibt sich die gleiche Zusammensetzung, denn Elektronzahl und Schaueralter sind simultan in einer Anpassung bestimmt und stark korreliert. Deshalb ergab sich (Abschnitt 6.3), daß das Schaueralter eine nur geringe Trenneigenschaft besitzt und die Komposition daher nicht ändern sollte.

Abbildung 6.22 zeigt die Häufigkeiten für zwei Klassen mit Einbeziehung der Elektron- und Myonzahl, sowie Abbildung 6.24 ohne diese Meßgrößen. Obwohl in beiden Abbildungen unabhängig vom Modell dasselbe Verhalten zu sehen ist, zeigen doch solche Kombinationen ohne Elektron- und Myonzahl eine schwerere Zusammensetzung bei den größten Myonzahlen. Die Sättigung der hadronischen Observablen kann hier zum Tragen kommen, da sich die Mittelwerte simulierter Proton- und Eisenverteilungen hadronischer Observablen bei hohen Energien annähern (Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.13).

Bei allen bisherigen Erklärungen für Unterschiede in der Elementzusammensetzung darf der systematische Fehler der verwendeten Methode nicht vernachlässigt werden. Dieser Fehler wurde übersichtshalber nur in Abbildung 6.21 gezeigt.

Die Werte der Tabellen 6.9, 6.10 und 6.11 sind der Abbildung 6.22 entnommen und stellen die Elementzusammensetzungen für drei Klassen des Modells QGSJet dar. Sie

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+	$34 \pm 2 \pm 6$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$39 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$39 \pm 2 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$48 \pm 2 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	40 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+—	$33 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$37 \pm 3 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$40 \pm 3 \pm 5$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$52 \pm 3 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	40.5 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+—	$40 \pm 5 \pm 6$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$44 \pm 5 \pm 8$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$40 \pm 5 \pm 10$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$51 \pm 5 \pm 12$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	43.8 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+—	$25 \pm 9 \pm 13$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$29 \pm 9 \pm 16$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$29 \pm 9 \pm 16$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$50 \pm 10 \pm 17$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	33.3 ± 9.3	

Tab. 6.9: Protonhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels QGSJet Simulationen bestimmte Protonhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 3 Klassen).

beinhalten die relative Häufigkeit in Prozent mit den statistischen und zusätzlich den systematischen Fehlern, die aus Übersichtsgründen nicht in den Abbildungen enthalten sind. Innerhalb dieses Fehlers sind die Unterschiede der Resultate verschiedener Kombinationen miteinander verträglich. Zusätzlich ist der Mittelwert der Kombinationen innerhalb eines Myonzahlintervalls mit statistischem Fehler wiedergegeben. Die Elementzusammensetzungen der unterschiedlichen Kombinationen sind stark mitein-

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+—	$41 \pm 2 \pm 9$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$34 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$35 \pm 2 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$32 \pm 2 \pm 5$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	35.5 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
—+—	$46 \pm 3 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$42 \pm 3 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$47 \pm 3 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$30 \pm 3 \pm 5$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	41.3 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+—	$42 \pm 5 \pm 6$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$38 \pm 5 \pm 12$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$47 \pm 5 \pm 10$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$35 \pm 5 \pm 15$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	40.5 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+—	$46 \pm 10 \pm 14$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$46 \pm 10 \pm 14$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$54 \pm 10 \pm 12$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$29 \pm 9 \pm 17$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	43.8 ± 9.8	

Tab. 6.10: Sauerstoffhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels QGSJet Simulationen bestimmte Sauerstoffhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 3 Klassen).

ander korreliert, so daß nicht das gewogene Mittel sondern lediglich der Mittelwert für die Meßpunkte und deren statistische Fehler angegeben sind (Der Fehler des gewogenen Mittels wäre um einen Faktor ≈ 2 kleiner). Der systematische Fehler ist in der Größenordnung der Modellunterschiede. Weitere Resultate sind tabellarisch in Anhang E zusammengestellt.

Die mittlere Masse $\langle A \rangle$, die aus den mit der Massezahl A gewichteten Proportionen

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+	$26 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$27 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$16 \pm 1 \pm 1$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$20 \pm 2 \pm 2$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	22.3 ± 1.8	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
—+	$21 \pm 3 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$21 \pm 3 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$13 \pm 2 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$18 \pm 3 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	18.3 ± 2.8	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+	$19 \pm 4 \pm 9$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$17 \pm 4 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$14 \pm 4 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$14 \pm 4 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	16 ± 4	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+	$29 \pm 9 \pm 7$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$25 \pm 9 \pm 7$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$17 \pm 8 \pm 7$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$21 \pm 8 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	23 ± 8.5	

Tab. 6.11: Eisenhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels QGSJet Simulationen bestimmte Eisenhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 3 Klassen).

der gemittelten Klassenhäufigkeiten berechnet wird, gibt qualitativ den Verlauf der Elementzusammensetzung wieder. Es ist jedoch zu beachten, daß es sich dabei nicht um eine bijektive Abbildung handelt und aus einer gegebenen mittleren Masseverteilung nicht auf die Elementzusammensetzung geschlossen werden kann. Die Abbildungen 6.25 und 6.26 stellen für zwei und drei Klassen über alle Kombinationen gemittelte Elementzusammensetzungen dar (links), sowie die mittlere Masse als Funktion der Myonzahl (rechts). Im Fall zweier Klassen werden je nach Mißklassifikationsmatrix

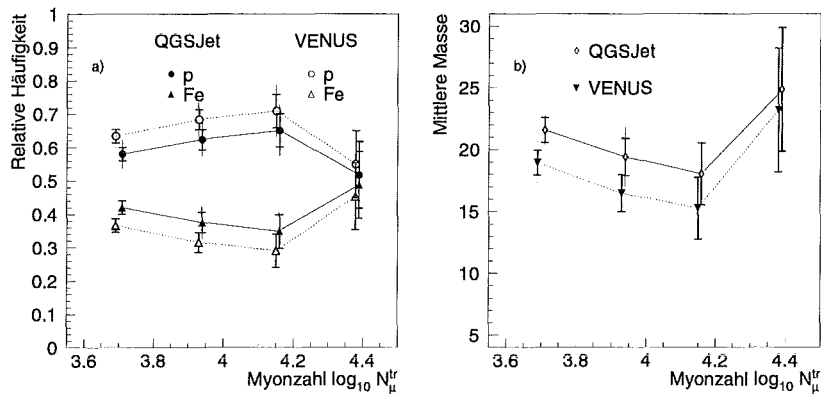


Abbildung 6.25: Rekonstruierte Elementzusammensetzung. Für zwei Klassen rekonstruierte Zusammensetzung a), ungewichtet gemittelt über verschiedene Kombinationen der Observablen des Zentraldetektors (QGSJet und VENUS) und mittlere Masse b) mit statistischen (dicke Linien) und systematischen Fehlern (dünne Linien).

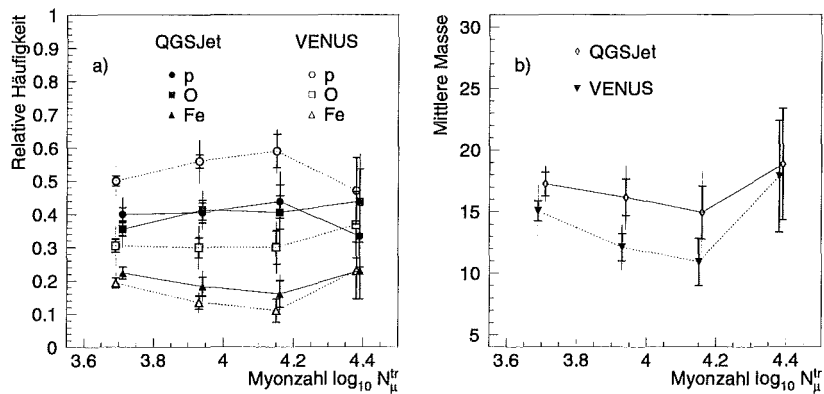


Abbildung 6.26: Rekonstruierte Elementzusammensetzung. Für drei Klassen rekonstruierte Zusammensetzung a), ungewichtet gemittelt über verschiedene Kombinationen der Observablen des Zentraldetektors (QGSJet und VENUS) und mittlere Masse b) mit statistischen (dicke Linien) und systematischen Fehlern (dünne Linien).

die intermediären Elemente nahezu zu gleichen Teilen der leichten und der schweren Klasse zugeordnet. Es ist daher zu erwarten, daß die mittlere Masseverteilung bei drei Klassen insgesamt eine leichtere Elementzusammensetzung zeigt als zwei Klassen. Vergleicht man die beiden rechten Abbildungen, so bestätigt sich die Erwartung, denn es ergibt sich zwar der gleiche Trend einer leichter und ab einer gewissen Myonanzahl schwerer werdenden Zusammensetzung, aber die Mittelwerte bei zwei Klassen liegen um ungefähr 5% bis 8% höher. Es bleibt dennoch der Modellunterschied sichtbar. Anhand des Modells VENUS ergibt sich stets eine leichtere Komposition als die durch das Modell QGSJet resultierende.

6.6 Bestimmung der Elementzusammensetzung mittels Neuronalem Netz

Ein einfache Konfiguration des Neuronalen Netzes wird gewählt, um auf die Elementzusammensetzung zu schließen ($3 \times 5 \times 3 \times 1$). Wegen der geringen Zahl simulierter Schauer würde eine Topologie mit deutlich mehr Neuronen zu oszillierenden oder rauschenden Neuronen führen, die die Gesamtleistung (Fehlerfunktion) stark beeinträchtigen.

Mit Selektion I steht ein Datensatz zur Verfügung, bei dem auf über 700tausend gemessene Ereignisse zurückgegriffen werden kann und statistische Unsicherheiten im Vergleich zur Selektion II stark reduziert werden. Es werden Elektron-, Myonzahl und Schaueralter zum Training des Netzes verwendet, um die Elementzusammensetzung für drei Klassen anzugeben. Abbildung 6.27a) zeigt den Verlauf der Fehlerfunktion während der Trainings- und Generalisierungsphase. Das System läßt keine Verbesserung der Lernfunktion bei mehr als 40tausend Iterationen erkennen, obwohl die Gewichte sich noch in erheblichem Maße ändern. Die Teilabbildung b) gibt exemplarisch die Anregung des ersten Neurons der zweiten Lage durch das Schaueralter s wieder.

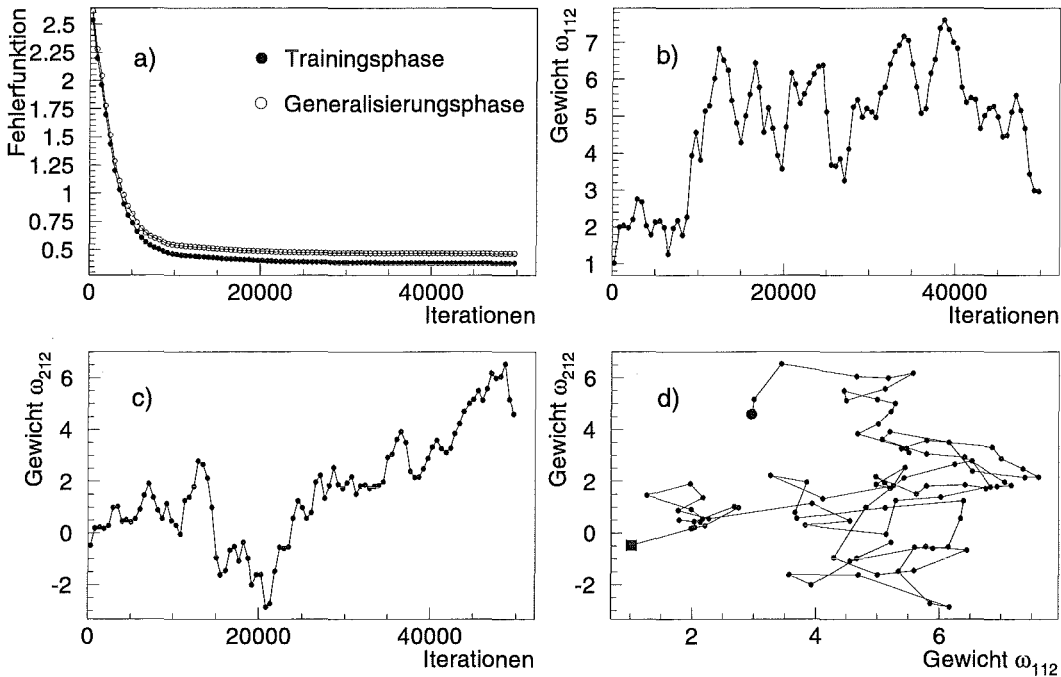


Abbildung 6.27: Güte des Neuronalen Netzes. Training und Generalisierungsleistung a), Anregung des Gewichtes ω_{112} (vgl. Abschnitt 4.3.3) durch das Schaueralter s b), Anregung des Gewichtes ω_{212} durch die Myonzahl N_{μ}^{tr} c) und Verlauf der Fehlerfunktion bei Projektion in die Ebene ω_{112} - ω_{212} (Start=■, Minimum=●).

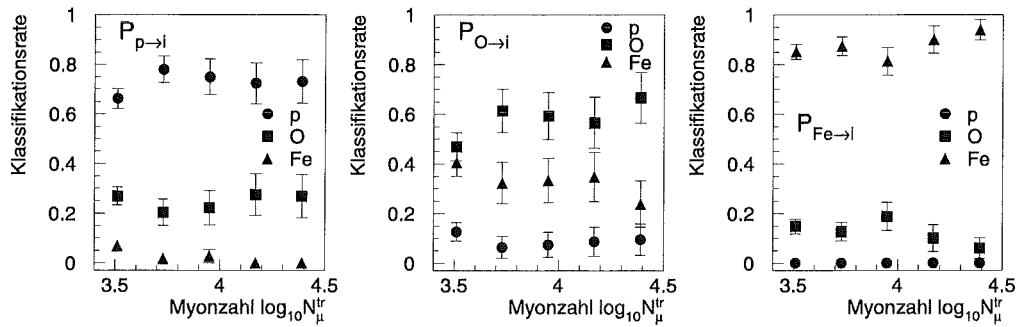


Abbildung 6.28: Klassifikationsmatrix in Abhängigkeit von der Myonzahl N_{μ}^{tr} mit multinomalem Fehler (QGSJet).

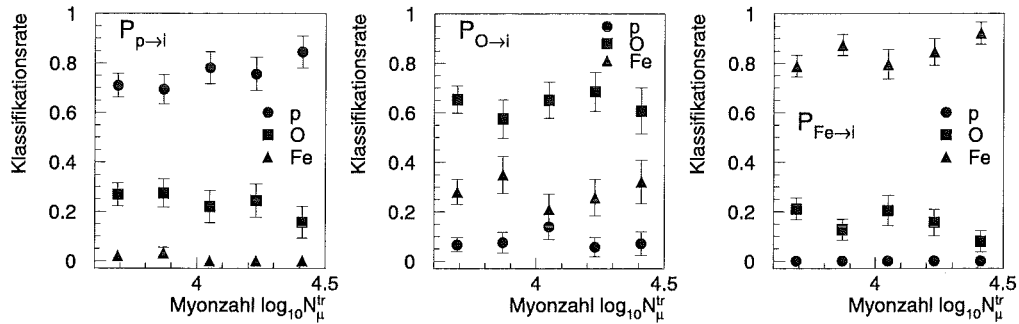


Abbildung 6.29: Klassifikationsmatrix in Abhängigkeit von der Myonzahl N_{μ}^{tr} mit multinomalem Fehler (VENUS).

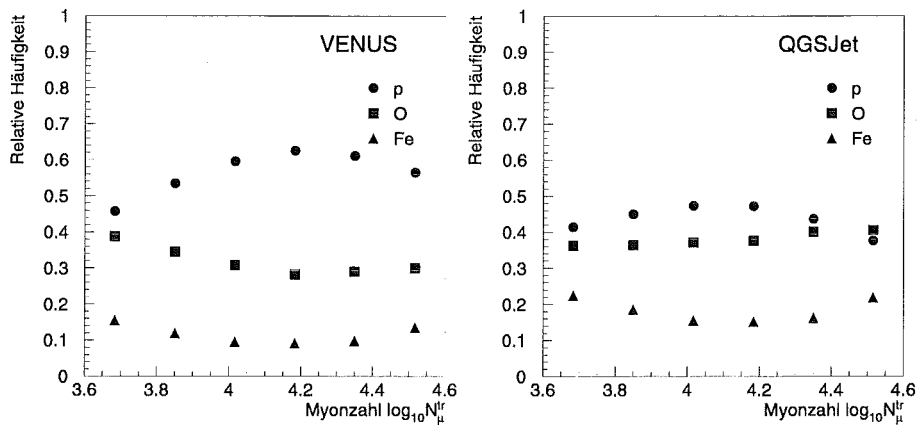


Abbildung 6.30: Rekonstruierte Elementzusammensetzung der Selektion I Ereignisse für drei Klassen (VENUS und QGSJet). Verwendet wurden die Observablen N_e , N_{μ}^{tr} und s . Der statistische Fehler ist geringer als die verwendete Symbolgröße.

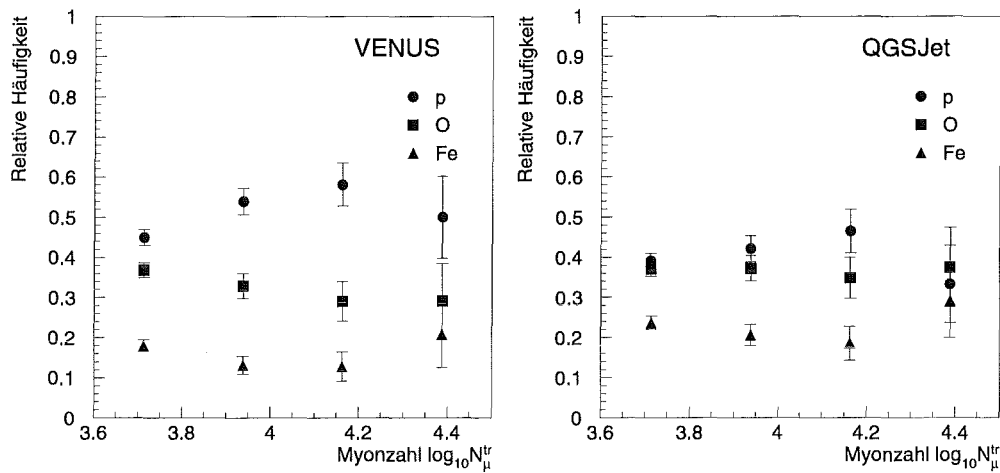


Abbildung 6.31: Rekonstruierte Elementzusammensetzung der Selektion II Ereignisse für drei Klassen (VENUS und QGSJet). Verwendet wurden die Observablen N_e , N_{μ}^{tr} und s .

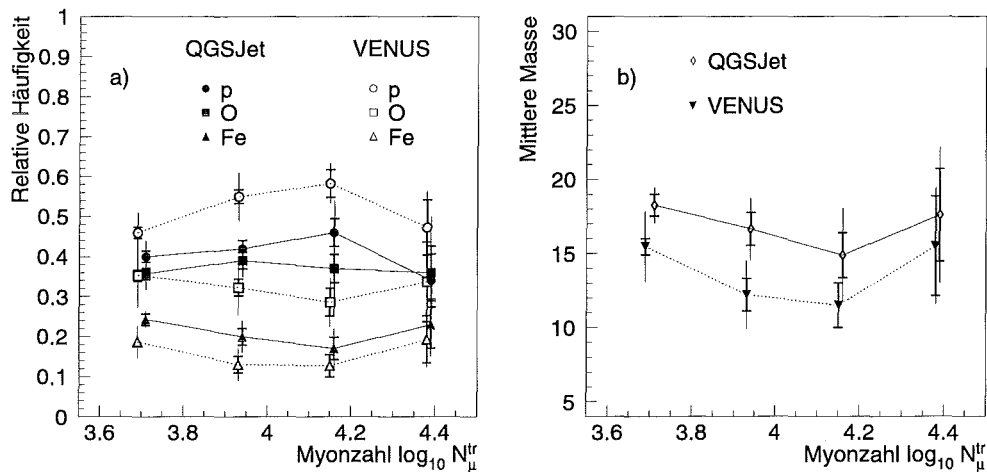


Abbildung 6.32: Rekonstruierte Elementzusammensetzung. Für drei Klassen rekonstruierte Zusammensetzung a), ungewichtet gemittelt über verschiedene Selektionen (QGSJet und VENUS) und mittlere Masse b) mit statistischen (dicke Linien) und systematischen Fehlern (dünne Linien).

Das Gewicht zeigt starke Schwankungen, wodurch belegt wird, daß das Schaueralter nur gering zur Separation beiträgt. Die Anregung des gleichen Neurons durch die Myonzahl (Teilabbildung c) enthält nur geringere Schwankungen. Abbildung d) zeigt in der Projektion den Verlauf der Fehlerfunktion als Funktion der beiden Gewichte.

Die Mißklassifikationsmatrizen, die im Abschnitt 6.5 schon erwähnt wurden, finden

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+	$42 \pm 0.1 \pm 4$	Selektion I NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	$39 \pm 2 \pm 4$	Selektion II NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	$39 \pm 2 \pm 4$	Selektion II BK $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	40 ± 1.4	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+	$47 \pm 0.3 \pm 2$	Selektion I NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	$42 \pm 3 \pm 2$	Selektion II NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	$37 \pm 3 \pm 2$	Selektion II BK $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	42 ± 2.1	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+-	$47 \pm 0.5 \pm 8$	Selektion I NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+-	$47 \pm 5 \pm 8$	Selektion II NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+-	$44 \pm 5 \pm 8$	Selektion II BK $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+	46 ± 3.5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+-	$40 \pm 0.8 \pm 16$	Selektion I NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+-	$33 \pm 10 \pm 16$	Selektion II NN $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+-	$29 \pm 9 \pm 16$	Selektion II BK $N_e, N_{\mu}^{tr, s}$
+-	37 ± 6.6	

Tab. 6.12: Protonhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. QGSJet (Trennung in 3 Klassen).

auch im Fall Neuronaler Netze Verwendung (Abbildungen 6.28 und 6.29). Sie zeigen eine stärkere Abhängigkeit von der Energie (Myonzahl) als beim Bayes-Klassifizierer und sind daher als Funktion von N_{μ}^{tr} angegeben. Insbesondere bei Myonzahlen $\log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.6$ ist die Trennung bei den Klassen Proton und Sauerstoff nur bedingt möglich. Die Streuungen sind zu groß, als daß das Netz eine genügende Klassifikation leisten könnte. Aus den stark überlappenden Verteilungen kann es keine Klassengrenzen erlernen (Entgegen der Bayes-Methode, die auf jedes einzelne Ereignis zur Klassifizierung zurückgreift, versucht das Netz aus der Gesamtheit der Ereignisse Klassengrenzen in abstrahierter Form zu erlernen und in der Klassifikationsphase ohne Kenntnis einzelner Ereignisse zu trennen).

Die anhand des Modells VENUS rekonstruierten Ereignisse ergeben ebenso eine leichtere Zusammensetzung verglichen mit dem Modell QGSJet (Abbildung 6.30), wie bei

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+	$36 \pm 0.1 \pm 4$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$37 \pm 2 \pm 4$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$34 \pm 2 \pm 4$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	35.7 ± 1.4	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+	$37 \pm 0.2 \pm 4$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$37 \pm 3 \pm 4$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$42 \pm 3 \pm 4$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	39 ± 2.1	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+—	$38 \pm 0.4 \pm 12$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$35 \pm 5 \pm 12$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$38 \pm 5 \pm 12$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	37 ± 3.5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+—	$41 \pm 0.8 \pm 14$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$38 \pm 10 \pm 14$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$29 \pm 9 \pm 14$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	39 ± 6.6	

Tab. 6.13: Sauerstoffhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. QGSJet (Trennung in 3 Klassen).

der Analyse mittels Bayes-Klassifizierer. Erkennbar ist die schwerer werdende Zusammensetzung ab einer Myonzahl $\log_{10} N_{\mu}^{tr} \approx 4.2$ unabhängig vom Modell.

Jeweils die gleiche Netzkonfiguration wurde auch dazu verwendet, Ereignisse der Selektion II zu klassifizieren, um die Methoden vergleichen zu können (Abbildung 6.31 und Tabellen 6.12, 6.13 und 6.14 für das Modell QGSJet bzw. E.8, E.9 und E.10 im Anhang für das Modell VENUS).

Innerhalb der statistischen Fehler stimmen nicht nur die Resultate der Analyse durch Neuronale Netze (Selektion I und II), sondern auch die Ergebnisse des Bayes-Klassifizierers sehr gut überein und zeigen miteinander konsistente Ergebnisse.

Da Neuronale Netze nicht auf einzelne Ereignisse zur Klassifikation zurückgreifen, ist ein Bootstrap-Verfahren, wie in Abschnitt 4.2.1 erläutert, nicht möglich. Es wurden daher Netze gleicher Topologie mit unterschiedlicher Gewichtung der einzelnen Klassen

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+	$22 \pm 0.1 \pm 2$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$24 \pm 2 \pm 2$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$27 \pm 2 \pm 2$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	24.3 ± 1.4	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+-	$17 \pm 0.2 \pm 4$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	$21 \pm 3 \pm 4$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	$21 \pm 3 \pm 4$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	20 ± 2.1	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+-	$15 \pm 0.3 \pm 5$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	$19 \pm 4 \pm 5$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	$17 \pm 4 \pm 5$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	17 ± 2.8	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+-	$19 \pm 0.7 \pm 8$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	$29 \pm 9 \pm 8$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	$21 \pm 8 \pm 8$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	24 ± 5.9	

Tab. 6.14: Eisenhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. QGSJet (Trennung in 3 Klassen).

w_i (Gleichung 4.22) und Untermengen der vorhandenen simulierten Ereignisse trainiert, um den systematischen Fehler durch die endliche Anzahl der Simulationsdaten abzuschätzen. Er ist in der Regel um einen Faktor 1.5 bis 2 kleiner als der, den man bei Anwendung des Bayes-Klassifizierers gewinnt (bei gleicher Kombination verwendeter Observablen). Da die Wahl erzeugter Untermengen recht willkürlich erscheint (wegen der rechen- und zeitintensiven Trainingsphase konnte nur eine begrenzte Zahl Untermengen verwendet werden) wird der systematische Fehler der Bayes-Analyse angegeben.

Die Mittelwerte der obigen Tabellen und deren statistische Fehler sind wiederum keine gewogenen Mittel, sondern nur ungewichtet gemittelt, da die Ergebnisse nicht statistisch unabhängig sind und sind in Abbildung 6.32 zusammenfassend dargestellt.

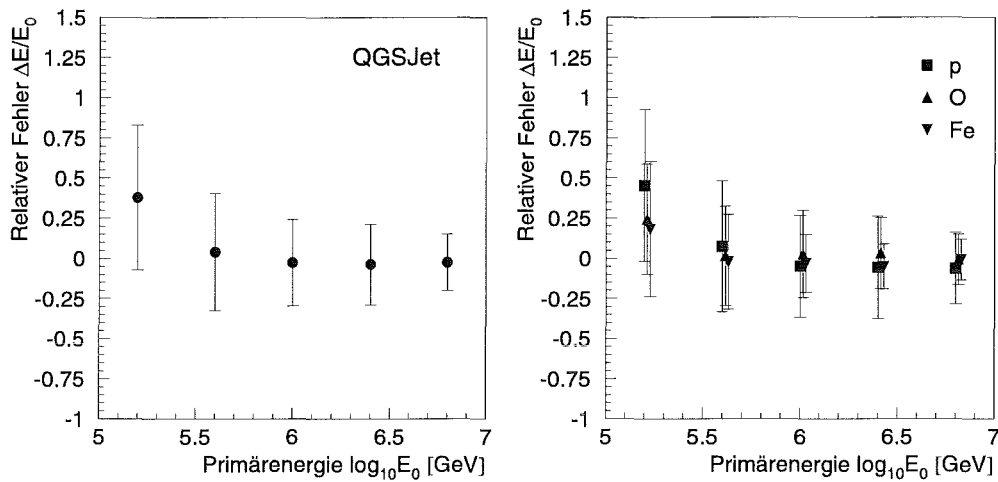


Abbildung 6.33: Relativer Fehler der Energiebestimmung. Die linke Abbildung zeigt den relativen Fehler des Gesamtsystems als Funktion der Primärenergie. Rechts sind die relativen Fehler für die drei zum Trainieren des Netzes verwendeten Klassen dargestellt (QGSJet).

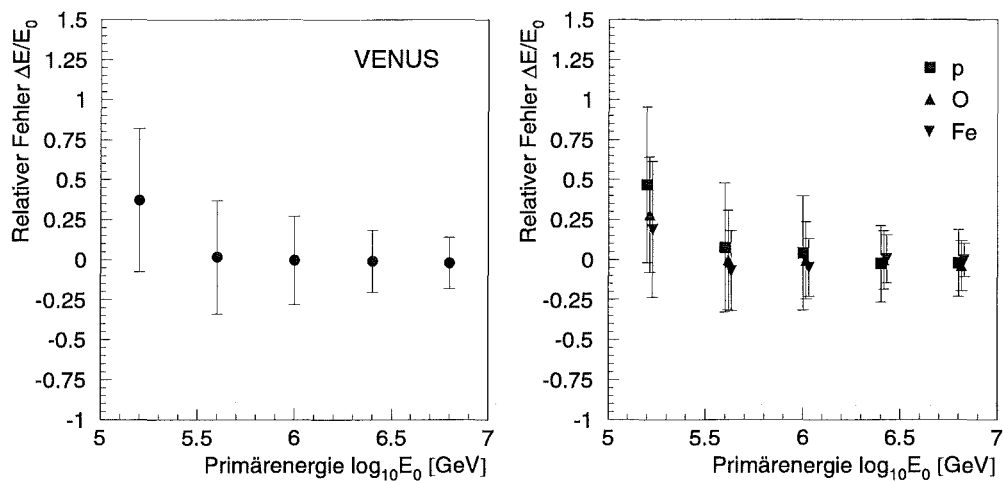


Abbildung 6.34: Relativer Fehler der Energiebestimmung. Die linke Abbildung zeigt den relativen Fehler des Gesamtsystems als Funktion der Primärenergie. Rechts sind die relativen Fehler für die drei zum Trainieren des Netzes verwendeten Klassen dargestellt (VENUS).

6.7 Energiebestimmung mittels Neuronalem Netz

Die Ursache für das „Knie“ im Energiespektrum der kosmischen Strahlung ist eng mit der Frage nach der Änderung der Elementzusammensetzung verbunden. Aus diesem Grund ist es unerlässlich das Energiespektrum so präzise wie möglich zu bestimmen,

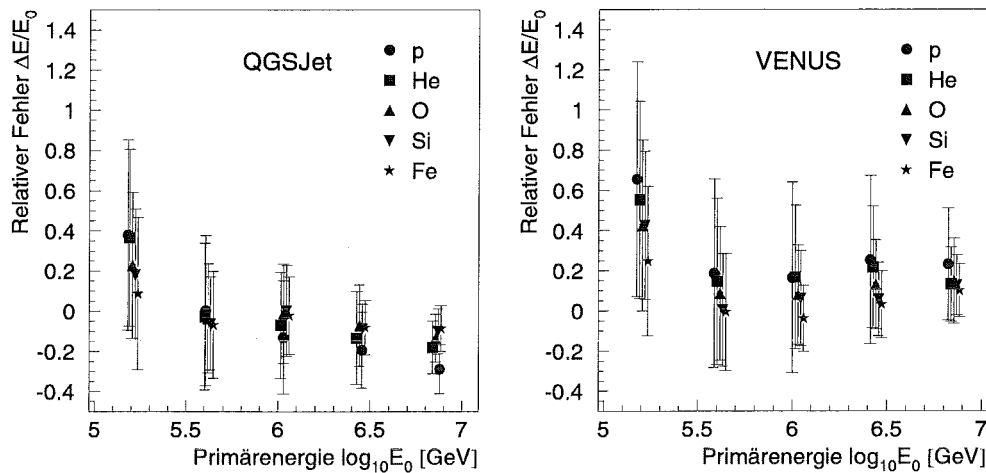


Abbildung 6.35: Relativer Fehler der Energiebestimmung. Die linke Abbildung zeigt den relativen Fehler für die rekonstruierte Energie der QGSJet Ereignisse eines mit VENUS Ereignissen trainierten Netzes als Funktion der Primärenergie. Rechts für VENUS Ereignisse bei Training mit QGSJet Daten.

um unter astrophysikalischen Gesichtspunkten die Änderung zu diskutieren.

Das Energiespektrum wird durch Anwendung eines Neuronalen Netzes (Topologie: $3 \times 6 \times 2 \times 1$) bestimmt, mit Elektron-, Myonzahl und Schaueralter als Parameter. Es handelt sich nicht um das diskrete Problem des Klassifizierens, wie es bisher beschrieben wurde, sondern um die Schätzung eines kontinuierlichen Parameters. Die geeignete Größe zur Beurteilung der Güte des Schätzers ist nicht die Mißklassifikationsmatrix, sondern der relative Fehler der Energiebestimmung in Abhängigkeit der simulierten Energie. Die Abbildungen 6.33 und 6.34 stellen den relativen Fehler $(E - E_0)/E_0$ als Funktion der Energie für die Modelle QGSJet und VENUS dar. Rechts ist der relative Fehler für die drei zum Trainieren verwendeten Primärmassen zu sehen. Bei niedrigen Energien ($E_0 = 10^5 - 10^{5.5}$ GeV) bestimmt das Netz im Mittel die Energie mit einer Verzerrung von 50% bei Proton- und 20% bei Sauerstoff- und Eisenprimärteilchen. Da keine Vergleichsmuster zu niedrigeren Energien hin vorhanden sind, wird systematisch die Energie zu groß geschätzt. Bei den Protonen ist der Effekt deutlich stärker ausgeprägt, da Protonenschauer um den Faktor ≈ 3 größere Fluktuationen in der Elektronzahl besitzen als Eisenschauer [67] und somit höheren Energien zugewiesen werden können. Ab einer Energie von $E_0 = 10^{5.5}$ GeV verschwinden die Mittelwerte innerhalb von 2% bis 5%. Wie zu erwarten, nimmt die Streuung mit zunehmender Energie ab, da die Schauergrößen geringere Streuungen zeigen, und sind für Protonen – unabhängig vom Modell – mit $\sigma(E_0 = 10^6 \text{ GeV}) = 35\%$ am größten (mit steigender Energie auf $\sigma(E_0 = 10^7 \text{ GeV}) = 25\%$ abnehmend). Eisenschauer ergeben die geringsten Streuungen mit $\sigma(E_0 = 10^6 \text{ GeV}) = 25\%$ und $\sigma(E_0 = 10^7 \text{ GeV}) = 15\%$.

Das Neuronale Netz erlernt in der Trainingsphase den Gesamtfehler über alle Primärtei-

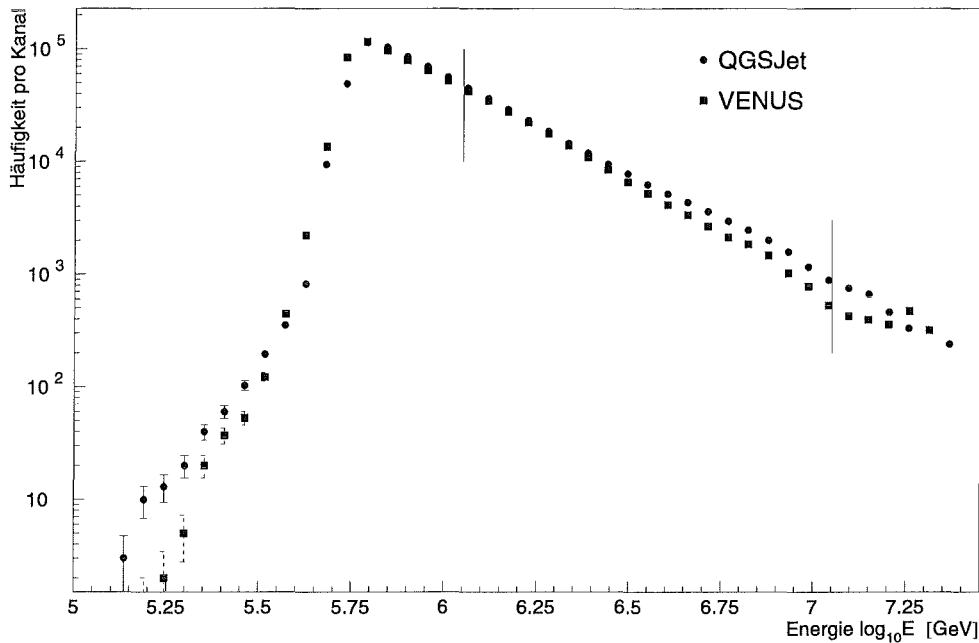


Abbildung 6.36: Resultierende Energiespektren bei Verwendung Neuronaler Netze für die Modelle QGSJet und VENUS. Nur der Bereich innerhalb der eingezeichneten Linien wird analysiert, da hier die Energiebestimmung unverzerrt ist.

chen, daher ist der summierte Fehler ab einer Energie von $E_0 = 10^{5.5}$ GeV kleiner 1% (linke Abbildungen in 6.33 und 6.34). Für die Klassen Helium und Silizium ergeben sich ähnliche Abhängigkeiten, die aus Übersichtsgründen nicht dargestellt sind.

Der Unterschied zwischen den Modellen QGSJet und VENUS besteht nicht in der Güte der Schätzung, denn hier zeigen sie beide die gleiche Leistung bezüglich der Fehlerfunktion. Es sind Unterschiede in der Schätzung der Energie bei gegebenen Observablen zu erwarten, denn bei gleicher Energie zeigen sich unterschiedliche absolute Werte der Observablen (Abschnitt 5.5).

Wird ein Netz mit Mustern des Modells VENUS trainiert, so sollte es bei der Energieschätzung die Energie von Ereignissen des Modells QGSJet im Mittel eine energieabhängige Verzerrung zeigen. Betrachtet man vereinfachend nur die Indizes b der Energie-Myonzahl-Relation $E \sim (N_\mu^{lr})^b$ (Tabelle 5.3), die für Primärteilchen des VENUS Modells einen geringeren Index angeben, so sollte sich mit steigender Energie eine zunehmende Unterschätzung der Energie ergeben. Diesen Zusammenhang findet man in Abbildung 6.35 (links) bestätigt. Das Neuronale Netz ist nicht auf die Verteilungen der QGSJet-Ereignisse optimiert und daraus resultierend ergeben sich für die verschiedenen Primärteilchen unterschiedliche Verzerrungen $\langle \Delta E / E_0 \rangle$. Umgekehrt ergibt ein mit QGSJet-Ereignissen trainiertes Netz eine zunehmende Energieüberschätzung für VENUS Muster, wie Abbildung 6.35 (rechts) verdeutlicht.

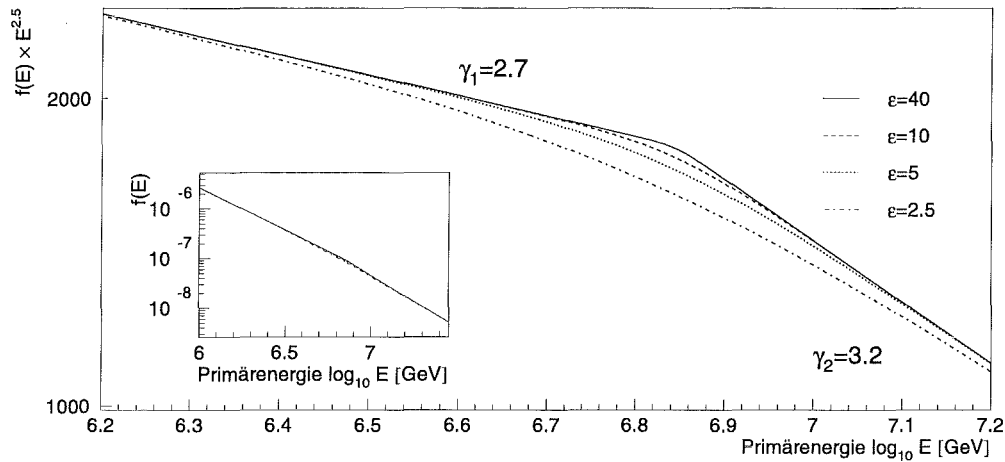


Abbildung 6.37: Beispiele der Funktion $f(E)$ mit verschiedenen Parameterwerten für die „Schärfe“ ε des Knies, die zur Bestimmung der spektralen Indizes verwendet wird (kleines Bild: Funktionen mit verschiedenen Parameterwerten; großes Bild: mit $E^{2.5}$ multiplizierte Funktionen).

Das resultierende Spektrum bei Verwendung der trainierten Netze zeigt Abbildung 6.36. Es deutet sich bereits trotz grober Intervalleinteilung bei $E = 10^{6.75}$ GeV ein Knie an. Bei Energien über $E = 10^{7.1}$ GeV kann das Netz nicht mehr verzerrungsfrei die Energie schätzen, da bei solch hohen Energien keine simulierten Muster mehr vorhanden sind. Den gemessenen hochenergetischen Ereignissen wird eine geringere Energie zugewiesen und es kommt zu einer Abflachung in diesem Bereich. Bei niedrigen Energien ist klar der $N_e - N_\mu$ -Schnitt (Abschnitt 5.4) in den gemessenen Daten erkennbar, der höherenergetische Ereignisse anreichern soll (im Bereich der Schwelle). Es überstehen einige Ereignisse niedrigerer Energie ($E \leq 10^{5.75}$ GeV) den Schnitt, wenn sie sehr große Elektronzahlen besitzen.

In einer Anpassungsprozedur werden die Indizes $\gamma_{1,2}$ (d.h. die Indizes vor und nach dem Knie) der Spektren, sowie die Lage E_{Knie} und Schärfe ε des Knies bestimmt. Die Funktion

$$f(E) = c \cdot E^{-\gamma_1} \left(1 + \left(\frac{E}{E_{Knie}} \right)^\varepsilon \right)^{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon}} \quad (6.1)$$

wurde hierzu verwendet. Ist ε sehr groß (≥ 40), so verschwindet der mit ε potenzierte Bruch im Klammerausdruck bei Energien unterhalb des Knies und der Ausdruck verkürzt sich zu $f(E) = c \cdot E^{-\gamma_1}$, bzw. für Energien größer E_{Knie} überwiegt der Bruch, d.h. die Eins in der Klammer kann vernachlässigt werden und die Funktion vereinfacht sich zu $f(E) = c \cdot E^{-\gamma_2}$. Kleinere ε -Werte ergeben einen weichen Übergang. In Abbildung 6.37 ist exemplarisch für vier ε -Werte die Funktion $f(E)$ gezeichnet ($E_{Knie} = 7 \cdot 10^6$ GeV).

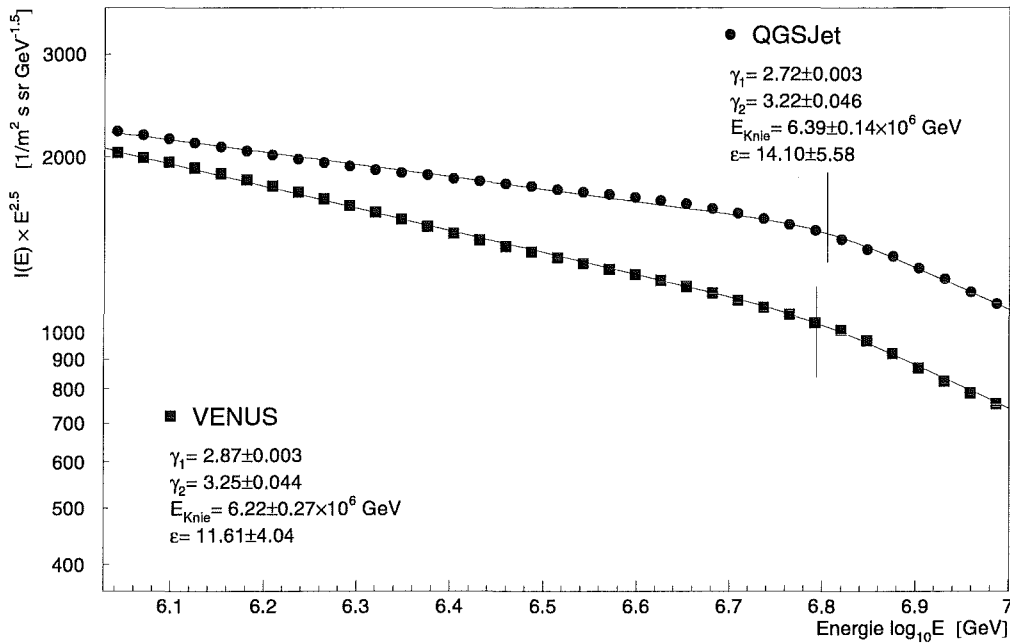


Abbildung 6.38: Anpassung der Funktion $f(E)$ an die ermittelten Energiespektren für Selektion I Ereignisse (Netzparameter: N_e , N_μ^r und s).

	QGSJet	VENUS
γ_1	$2.72 \pm 0.003 \pm 0.03$	$2.87 \pm 0.003 \pm 0.04$
γ_2	$3.22 \pm 0.05 \pm 0.06$	$3.25 \pm 0.04 \pm 0.06$
$E_{Knie} [10^6 \text{ GeV}]$	$6.39 \pm 0.14 \pm 0.7$	$6.22 \pm 0.27 \pm 0.8$
ϵ	$14.10 \pm 5.58 \pm 5.$	$11.61 \pm 4.04 \pm 6.$
χ^2	3.90	3.68

Tab. 6.15: Spektrale Indizes und weitere Parameter der Anpassung an die Energiespektren (1.ter Fehler statistisch, 2.ter Fehler systematisch).

Betrachtet man den Bereich aus Abbildung 6.36 in dem sowohl die Güte des Netzes optimal ist, als auch Schwelleneffekte keine Rolle mehr spielen, so ergeben sich die in Abbildung 6.38 dargestellten Energiespektren. Die spektralen Indizes und weitere Anpassungsparameter sind in Tabelle 6.15 aufgelistet.

Die χ^2 -Minimierung führt zu $\chi^2_{\text{QGSJet}} = 3.90$ und $\chi^2_{\text{VENUS}} = 3.68$ bei 30 Freiheitsgraden. Die großen χ^2 -Werte erklären sich durch die extrem kleinen statistischen Fehler der Datenpunkte und eine Struktur die andeutungsweise in Abbildung 6.38 zu erkennen ist, denn in einem Bereich unterhalb des Knies liegen die Datenpunkte unter

der angepaßten Funktion. Da die Intervallbreite kleiner ist als die Energieauflösung von 20% bis 35%, je nach Primärteilchen, kann diese Struktur nicht näher untersucht werden. Der systematische Fehler wurde abgeschätzt, indem Netze mit unterschiedlicher Gewichtung der verschiedenen Klassen trainiert und die Energie der gemessenen Ereignisse durch die Netze geschätzt wurde. Die maximale Abweichung ergibt den systematischen Fehler in Tabelle 6.15.

Desweiteren erhebt sich die Frage, in welcher Form das Energiespektrum durch die endliche Auflösung in der Energiebestimmung beeinflusst wird. Ausgehend von einer logarithmischen Normalverteilung in der Energieauflösung streuen wegen des steilen Spektrums mehr Ereignisse niederer Energie zu hoher Energie als umgekehrt. Die rekonstruierte Energie ist im Mittel überschätzt. Verbessert sich die Energieauflösung $(E - E_0)/E_0$, d.h. mit zunehmender Energie streuen immer weniger niederenergetische Ereignisse zu größeren Energien, so ergibt sich ein steilerer Spektralindex. Umgekehrt erhält man ein flacheres Spektrum, falls die Auflösung mit steigender Energie schlechter wird.

Die Auflösung $(E - E_0)/E_0$ wird mit zunehmender Energie bei Verwendung der beim KASCADE zur Verfügung stehenden Observablen besser (Abbildung 6.33 und 6.34). Die „wahre“ Lage des Knies ist bei einer niedrigeren Energie und das „wahre“ Spektrum sollte flacher verlaufen. Die „wahre“ Lage des Knies ließe sich bestimmen, falls die Energiespektren der einzelnen Primärteilchen bekannt wären. Da die Intervallbreite der Ener-

giespektren kleiner als die Energieauflösungen jedes einzelnen Primärteilchens sind, müßten wegen der unterschiedlichen Auflösungen die Einzelspektren der Primärteilchen entfaltet werden. Anhand einer vierdimensionalen Mißklassifikationsmatrix A_{E,E_0,M,M_0} wäre dies durchführbar. Wegen der geringen Zahl simulierter Ereignisse kann diese nicht erstellt werden. Es läßt sich dennoch eine Untergrenze der Knieenergie angeben, bis zu welcher die Energie maximal verschoben sein sollte. Mit Gleichung D.8 aus Anhang D und einer Auflösung der Protonereignisse bei der Knieenergie von $\approx 23\%$ ergibt sich aus einer maximierten Likelihoodfunktion für das Modell QGSJet eine um 13% und für das Modell VENUS eine um 14% niedrigere Energie und die als weiterer systematischer Fehler angegeben ist

$$E_{Knie}^{QGSJet} = 6.39 \pm 0.14 \pm 0.7 - 0.85 \times 10^6 \text{ GeV} \quad \text{und} \quad (6.2)$$

$$E_{Knie}^{VENUS} = 6.22 \pm 0.27 \pm 0.8 - 0.88 \times 10^6 \text{ GeV}. \quad (6.3)$$

Wahrer Index	rekonstruierter Index
2.70	2.73
2.85	2.88
3.15	3.19
3.20	3.25

Tab. 6.16: Simulierte und rekonstruierte spektrale Indizes bei Berücksichtigung endlicher Fehler der Messung.

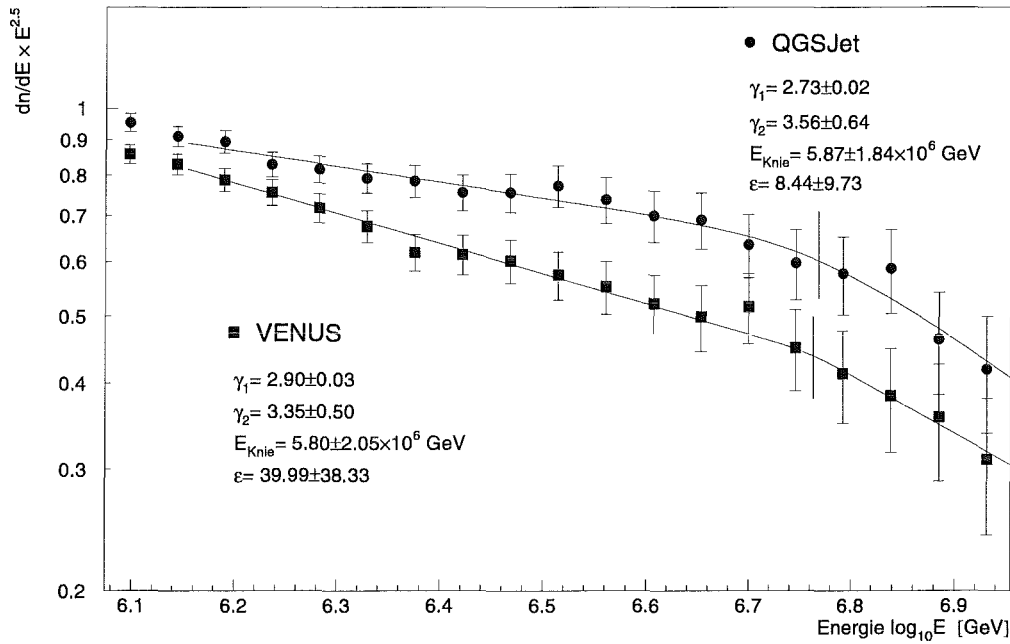


Abbildung 6.39: Anpassung der Funktion $f(E)$ an die ermittelten Energiespektren für Selektion II Ereignisse (Netzparameter: N_e , N_μ^{lr} und s).

Die rekonstruierten Indizes $\gamma_{1,2}$ verkleinern sich bei „Entfaltung“ der endlichen Auflösung. Simuliert man Spektren mit Indizes von $\gamma_1 = 2.70$ ($\gamma_1 = 2.85$), sowie $\gamma_2 = 3.15$ ($\gamma_2 = 3.20$) mit einer zunehmend besser werdenden Auflösung entsprechend den Abbildungen 6.33 und 6.34, so erhält man in einer Anpassung an die Monte-Carlo-Spektren mit Einfaltung der Energieauflösung die in Tabelle 6.16 gezeigten Indizes. Es wurden hierzu nur Spektren ohne Knie modelliert. Diese zusätzliche Struktur kann nur bei der Entfaltung der Einzelspektren korrekt berücksichtigt werden, denn die Knie-lage ist für die verschiedenen Primärteilchen nicht notwendigerweise die gleiche. Die spektralen Indizes sind mit systematischen Fehlern in Tabelle 6.17 angegeben.

Als Cross-Check der Ergebnisse, die mittels Selektion I gewonnen wurden, wurden die Ereignisse der Selektion II herangezogen. Die Ereignisse der Selektion II sind eine Untermenge der Selektion I, so daß die gleichen Indizes zu erwarten sind. Abbildung

Index	QGSJet	VENUS
γ_1	$2.72 \pm 0.003 \pm 0.03 - 0.03$	$2.87 \pm 0.003 \pm 0.04 - 0.03$
γ_2	$3.22 \pm 0.05 \pm 0.06 - 0.04$	$3.25 \pm 0.04 \pm 0.06 - 0.05$

Tab. 6.17: Spektrale Indizes der Energiespektren mit systematischen Fehlern.

	Spektralindex	Observablen
+	$2.72 \pm 0.003 \pm 0.02$	Selektion I N_e, N_μ^{tr}, s
—+—	$2.73 \pm 0.03 \pm 0.05$	Selektion II N_e, N_μ^{tr}, s *
—+—	$2.70 \pm 0.05 \pm 0.05$	Selektion II N_μ^{tr}, N_μ^* *
—+—	$2.74 \pm 0.05 \pm 0.05$	Selektion II $N_\mu^{tr}, N_h^{E>100\text{GeV}}$ *
—+—	$2.74 \pm 0.05 \pm 0.05$	Selektion II $N_\mu^*, N_h^{E>100\text{GeV}}$ *
—+—	$2.71 \pm 0.04 \pm 0.05$	Selektion II $N_\mu^*, \sum E_h$ *
—+—	$2.75 \pm 0.05 \pm 0.09$	Selektion II $N_\mu^*, \max E_h$ *
—+—	2.73 ± 0.05	alle (*) gemittelt

Tab. 6.18: Spektralindex γ_1 der Energie unterhalb des Knies. Mittels QGSJet Simulationen bestimmte Spektralindizes für verschiedene Eingabeparameter des Neuronalen Netzes (Der systematische Fehler durch endliche Auflösung der Energiebestimmung ist ≈ -0.03).

	Spektralindex	Observablen
+	$2.87 \pm 0.003 \pm 0.02$	Selektion I N_e, N_μ^{tr}, s
—+—	$2.90 \pm 0.03 \pm 0.05$	Selektion II N_e, N_μ^{tr}, s *
—+—	$2.89 \pm 0.04 \pm 0.06$	Selektion II N_μ^{tr}, N_μ^* *
—+—	$2.91 \pm 0.04 \pm 0.07$	Selektion II $N_\mu^{tr}, N_h^{E>100\text{GeV}}$ *
—+—	$2.91 \pm 0.04 \pm 0.07$	Selektion II $N_\mu^*, N_h^{E>100\text{GeV}}$ *
—+—	$2.92 \pm 0.05 \pm 0.06$	Selektion II $N_\mu^*, \sum E_h$ *
—+—	$2.91 \pm 0.05 \pm 0.08$	Selektion II $N_\mu^*, \max E_h$ *
—+—	2.91 ± 0.04	alle (*) gemittelt

Tab. 6.19: Spektralindex γ_1 der Energie unterhalb des Knies. Mittels VENUS Simulationen bestimmte Spektralindizes für verschiedene Eingabeparameter des Neuronalen Netzes (Der systematische Fehler durch endliche Auflösung der Energiebestimmung ist ≈ -0.03).

6.39 bestätigt dies innerhalb der statistischen Fehler. Wegen der wesentlich geringeren Statistik reicht die Zahl der Ereignisse nicht aus, um den Index γ_2 mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Dennoch ergibt sich die Lage des Knies an der richtigen Position.

Trainiert man das Neuronale Netz nicht mit N_e, N_μ^{tr} und s als Eingabeparameter, sondern mit Kombinationen wie sie die Tabellen 6.18 und 6.19 zeigen, so erhält man Indizes γ_1 von der gleichen Größenordnung. Sie weichen aber systematisch von den Indizes, die sich bei Verwendung der Selektion I ergeben, um $\approx 0.02 - 0.04$ ab. Gemessene Ereignisse, deren Schauerzentrum außerhalb des 5m Rings liegen, aber innerhalb rekonstruiert werden, führen zu dieser Abweichung, denn mit zunehmender Energie nimmt der Fehler der Rekonstruktion von 5m auf 1m ab und immer weniger

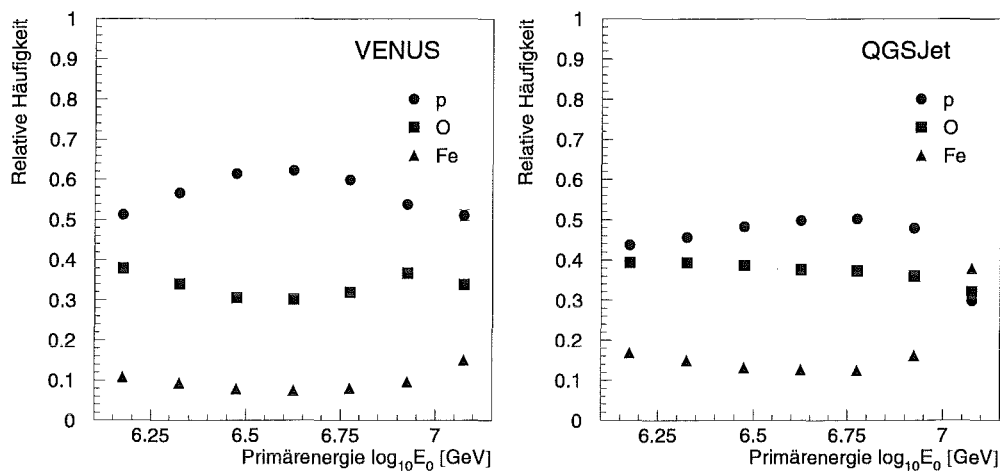


Abbildung 6.40: Elementzusammensetzung in Abhängigkeit von der Energie für die Modelle VENUS und QGSJet.

Ereignisse fallen in den Ring, so daß das Energiespektrum steiler wird.

Vernachlässigt man die Energieauflösung, indem eine größere Intervallbreite gewählt wird, so läßt sich die Elementzusammensetzung als Funktion der Energie darstellen. Die unabhängig durch verschiedene Neuronale Netze ermittelte Energie (Abbildung 6.38) und Masse (Abbildung 6.30) wurde für jedes einzelne Ereignis kombiniert, um Abbildung 6.40 zu erzeugen.

Es ergibt sich der gleiche Verlauf wie bei der Auftragung über der Myonzahl. Mit zunehmender Energie nimmt der Anteil leichter Elemente zunächst zu und oberhalb des Knies wieder ab. Das Modell VENUS reproduziert eine insgesamt leichtere Zusammensetzung als das Modell QGSJet.

6.8 Zusammenstellung, Diskussion und Vergleich der Ergebnisse mit weiteren Experimenten

Für hochenergetische zentrale (Selektion II) und im gesamten Detektorfeld (Selektion I) registrierte Schauer wurde die Elementzusammensetzung bestimmt, die als relative Häufigkeiten für verschiedene Kombinationen von Observablen angegeben wurde. In allen Observablenkombinationen wurde übereinstimmend eine zunächst leichtere und ab einer Energie von $\approx 4 - 6 \cdot 10^6$ GeV schwerer werdende Zusammensetzung rekonstruiert, wie Abbildung 6.41 (links) zusammenfassend zeigt. Es sind die Ergebnisse für drei Klassen der Bayes-Methode (Selektion II) angegeben. Übersichtlicher stellt die rechte Abbildung die qualitative Änderung der mittleren Masse mit der Energie dar (sowohl aus der linken Darstellung in Abbildung 6.41 bestimmt, wie auch für die Neuronale Netzanalyse mit Selektion I Ereignissen). Die Energie wurde für die einzel-

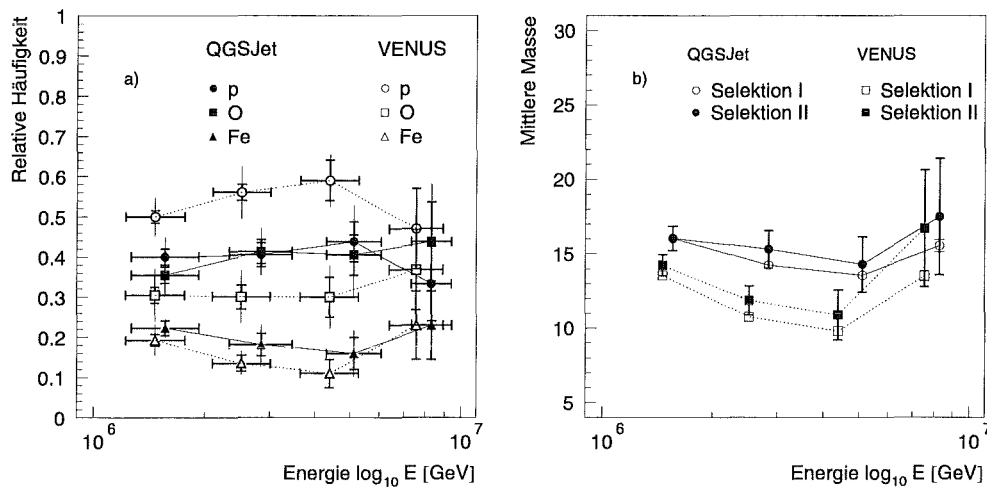


Abbildung 6.41: Rekonstruierte Elementzusammensetzung als Funktion der Energie für drei Klassen durch Bayes-Methode bestimmt a) und mittlere Masse als Funktion der Energie b), sowohl für Selektion I Ereignisse aus Abbildung 6.30 als auch für Selektion II aus Abbildung a).

nen Ereignisse durch das Neuronale Netz berechnet (wegen der großen Intervallbreite spielen hier Auflösungseffekte eine nur untergeordnete Rolle). Innerhalb der statistischen und systematischen Fehler ergibt sich unabhängig vom betrachteten Modell eine konsistente Beschreibung der Elementzusammensetzung.

Eine Analyse zentraler Schauer [68] der KASCADE-Kollaboration, die Unterschiede der Dichtefluktuationen in der myonischen Komponente im Zentrum der Schauer parametrisiert, führt zum gleichen Resultat einer sich wie oben erläuterten Änderung der Elementzusammensetzung. Ebenso ergibt die Analyse der Observablen des Detektorfeldes bei einer 3 Klassen Einteilung qualitativ dasselbe Ergebnis, wenngleich hier quantitativ der Verlauf unterhalb des Minimums in der mittleren Masse flacher verläuft [69]. Die Analyse der hadronischen Observablen des Zentraldetektors [30] ergibt in der mittleren logarithmischen Masse $\langle \ln A \rangle$ als einzigem Masseparameter eine stetig steigende und sehr schwere Zusammensetzung. Da bei dieser Analyse größere Energieintervalle gewählt wurden, könnte das Minimum ausgemittelt sein. Der Widerspruch einer sehr schweren Zusammensetzung mit großem Anteil der Eisengruppe im Bereich oberhalb des Knies der Analyse hadronischer Observablen gegenüber der hier vorgestellten, könnte sich dadurch erklären, daß die Fehlidentifikation für verschiedene Observablen unterschiedlich ausfallen und darauf nicht korrigiert wurde. Die Mißklassifikationsmatrizen in den Tabellen 6.6 und 6.7 deuten dies an. Observablen mit stärkerer Trenneigenschaft ergeben eine Matrix für zwei Klassen mit kleinen Nichtdiagonalelementen (Tabelle 6.6), gegenüber Observablen mit geringerer „Trennstärke“ die deutlich von Null verschiedene Nichtdiagonalelemente (Tabelle 6.7) aufweisen. Zusätzlich erhält man für die Klassen He, O und Si im letztgenannten Fall geringere

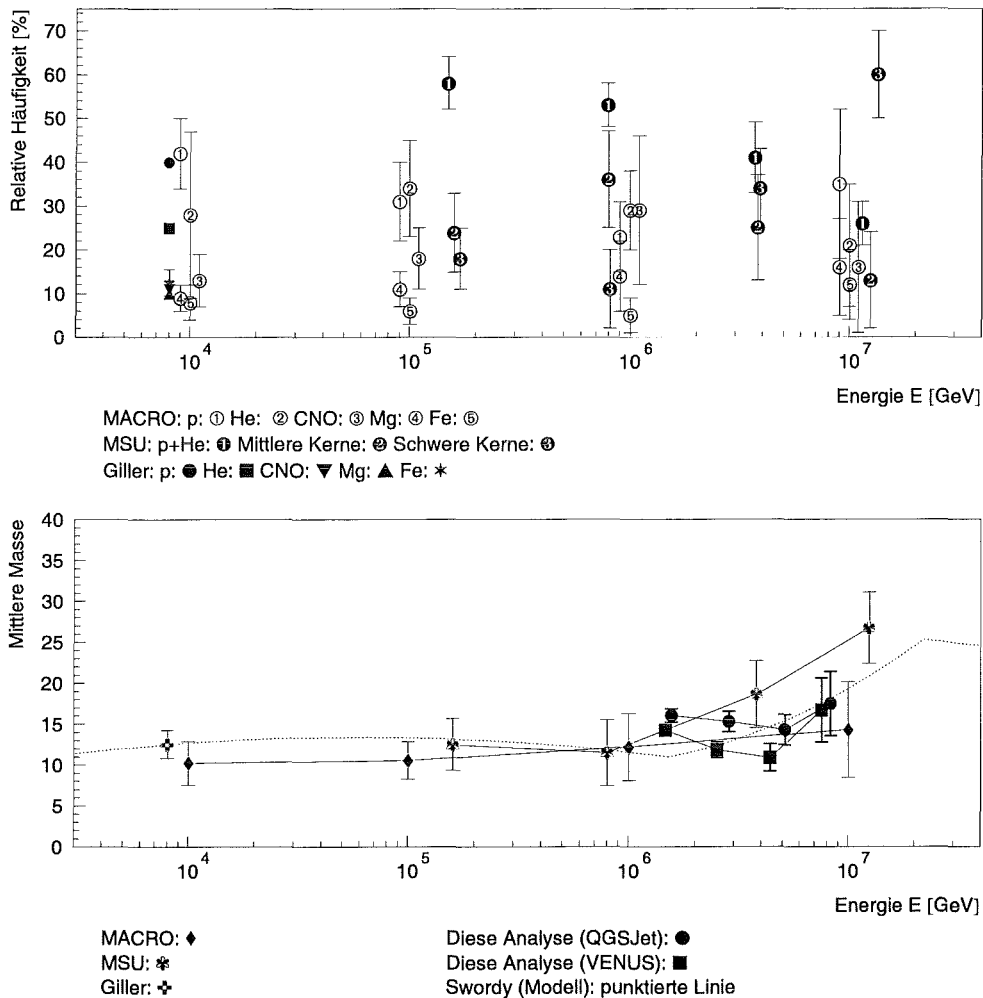


Abbildung 6.42: Vergleich relativer Häufigkeiten verschiedener Experimente (oben), sowie Vergleich der mittleren Masse verschiedener Experimente, theoretischer Vorhersagen und dieser Analyse (unten).

Unterschiede in den Klassifikationsraten bei der Klassifikation nach Proton $P_{\omega_i \rightarrow p}$ und Eisen $P_{\omega_i \rightarrow Fe}$.

Eine weitere mögliche Erklärung wäre das Vorhandensein zuvieler Hadronen in simulierten Ereignissen, so daß gemessene Ereignisse schwerer erscheinen.

Von KASCADE unabhängige Experimente, die im gleichen Energiebereich messen und relative Häufigkeiten in Abhängigkeit der Energie für mindestens drei Gruppen angeben, sind in Abbildung 6.42 wiedergegeben.

Als Vertreter direkter Messungen (in der Legende mit Giller bezeichnet) ist die Zusammenstellung aus [70] bei einer Energie, sowie ein weiter unten erläutertes Modell [21]

(punktierte Linie), welches direkte Messungen parametrisiert und zu höheren Energien extrapoliert, angegeben.

Das Experiment MACRO¹ mißt unterhalb einer Felsabschirmung hochenergetische Myonen und bestimmt anhand der Multiplizität die Masse des Primärteilchens. Für fünf Massegruppen werden relative Häufigkeiten angegeben [71]. Es ergibt sich ein stetiger, aber nur geringer Anstieg der hieraus berechneten mittleren Masse, der innerhalb der statistischen Fehler mit dieser Analyse verträglich ist.

Die Ergebnisse des Experiments MSU² – bestimmt anhand von Myonzahl-Verteilungen bei fester Elektronzahl – in drei Elementgruppen unterteilt [72], zeigen ein Minimum mit einer sehr schweren Elementzusammensetzung nach dem Knie. Wegen der Umrechnung der Elektronzahl als Maß für die Energie ist die systematische Unsicherheit sehr groß. Eine Abweichung von dem hier vorgestellten Ergebnis ist daher eher zu erwarten als eine Übereinstimmung.

Eine fraktale Analyse der Teilchendichteverteilungen einzelner Ereignisse des Kiel Experiments ergibt als Funktion der Elektronzahl eine stetig leichter werdende Zusammensetzung [73] (nicht abgebildet). Innerhalb der statistischen Fehler ist die Änderung vor und nach dem Knie in der Elektronzahl nur von geringer Signifikanz, steht aber im Widerspruch zu dem vorgestellten Ergebnis.

Ähnlich dem Kiel Experiment zeigen Experimente, die Tscherenkov Licht auswerten (HEGRA³ [74], DICE⁴ [75]), eine leichter werdende Elementzusammensetzung. Sie haben unverstandene systematische Effekte (z.B. starke Abweichung der Streuung der mittleren Eindringtiefe des Schauermaximums zwischen Monte-Carlo-Verteilungen und Meßdaten), die die präsentierten Elementhäufigkeiten in Frage stellen könnten.

Die Aufzählung ließe sich noch fortsetzen, doch wird bereits ersichtlich, daß die Spannweite bisheriger Resultate einen sehr großen Bereich überstreicht und die Resultate in unterschiedlichster Weise von verschiedenen Modellannahmen abhängen. In der Mehrzahl der Arbeiten wird im Bereich des Knies oder oberhalb eine schwerer werdende Zusammensetzung gefunden, wenngleich in unterschiedlichem Maße, wie Watson in [76] darlegt. Insofern kann von einer eher qualitativen Übereinstimmung der vorliegenden Analyse mit bisherigen Messungen der Zusammensetzung der kosmischen Strahlung gesprochen werden.

Eine Erklärung des Ergebnisses erscheint in einem „minimalen Modell“ plausibel, das zur Beschreibung der Änderung der Elementhäufigkeit ausgehend von einer Extrapolation direkter Messungen sich einzig auf die Auswirkung eines physikalischen Sachverhalts stützt, der den Transport der kosmischen Strahlung durch das ISM beeinflusst, ohne Quellen kosmischer Strahlung in Betracht zu ziehen. Swordy [21] geht im Rahmen des „leaky-box“ Modells [77] davon aus, daß die Häufigkeitsänderung durch die magnetische Steifigkeit $R = pc/Ze$ (Rigidität) – also durch den Impuls p und die Ladungszahl Z – verursacht wird. Ab einer festen Energie pro Nukleon ($\approx 10^{15}$ eV) kann

¹ Monopole, Astrophysics and Cosmic Ray Observatory

² Moscow State University

³ High Energy Gamma Ray Astronomy

⁴ Dual Imaging Cerenkov Experiment

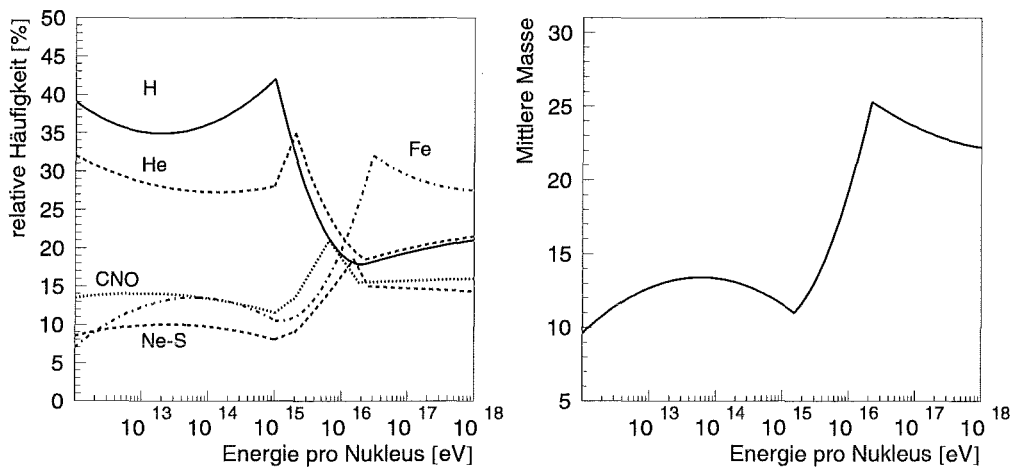


Abbildung 6.43: Relative Häufigkeiten aus Vorhersagen des Modells [21] für fünf Massengruppen (links) und aus den Anteilen berechnete mittlere Masse (rechts).

die Entkommwahrscheinlichkeit λ nicht mehr vernachlässigt werden. Die Teilchen gleicher Rigidität können die Galaxie verlassen und der gemessene Fluß nimmt ab. Für Protonen tritt die Flußabnahme bei kleinerer Energie pro Nukleus als bei schwereren Elementen ein (Abbildung 6.43 links). Aufgrund der unterschiedlichen spektralen Indizes der aus direkten Messungen gewonnenen Flüsse einzelner Elemente, ergibt sich zunächst ein Minimum in der mittleren Masse (Abbildung 6.43 rechts). Danach nimmt der Gehalt schwerer Elemente zu. Die zu erwartende Übereinstimmung mit direkten Messungen bei $E \approx 10^4$ GeV ist in Abbildung 6.42 (unten) erkennbar. Die Parametrisierung der direkten Daten erlaubt aufgrund der geringen Statistik im Bereich $10^4 - 10^5$ GeV einen großen Spielraum der anzupassenden Parameter. Quantitative Abweichungen sind daher erklärbar. Falls z.B. die „Abbruchenergie“ bei höheren Energien liegen sollte, wäre der Unterschied zwischen dieser Modellvorhersage und den Resultaten dieser Arbeit geringer. Die Änderung der Elementhäufigkeiten, wie sie in dieser Arbeit gezeigt wurde, bestätigt qualitativ das minimale Modell.

Weitere Modelle beschreiben ebenso Szenarien einer schwerer werdenden Elementzusammensetzung, zum Teil mit tiefer greifenden Ansätzen bezüglich der Quellen, der Beschleunigung oder des Transports kosmischer Strahlung [19, 20, 78, 79, 80].

Die Ergebnisse der vorliegenden Analyse sind jedoch in eindeutigem Widerspruch zu Modellen, bei denen im Bereich des Knies keine schwerer werdende, sondern eine protonreichere Zusammensetzung vorausgesagt wird. Darunter fallen zum Beispiel einige diskutierte Modellvarianten in [19]. Hier werden Szenarien mit ein oder zwei Quellen kosmischer Strahlung (galaktischen oder extragalaktischen Ursprungs) diskutiert. Ein solches Modell, bei dem im Bereich des Knies eine zusätzliche Komponente extragalaktischer Protonen auftritt (in [22] detaillierter diskutiert), ist nicht in Einklang mit

	Spektralindex	Experimente
+	2.75 ± 0.04	Theorie I (ISM) [81]
+	2.67 ± 0.02	Theorie II (Wind-ISM) [81]
	2.75	BLANCA [82]
+	2.60 ± 0.03	HEGRA (Tscherenkow) [74]
+	2.57 ± 0.03	HEGRA (Szintillatoren) [74]
+	$2.63 \pm 0.03 \pm 0.05$	HEGRA (Wiebel) [83] *
+	2.60 ± 0.02	TUNKA [84] *
+	2.60 ± 0.04	TIBET [85] *
+	2.69 ± 0.12	Thian Shan [86] *
+	2.56 ± 0.05	MACRO [87] *
+	2.55 ± 0.01	DICE [88] *
+	2.66 ± 0.02	CASA-MIA [89] *
+	2.76 ± 0.03	EAS-TOP [90] *
+	$2.80 \pm 0.01 \pm 0.3$	KASCADE (Myondichten) [91]
+	2.86 ± 0.04	KASCADE (N_e , N_μ^{tr} und N_h) [67]
+	$2.77 \pm 0.03 \pm 0.14$	KASCADE (N_h) [67]
+	$2.72 \pm 0.003 \pm 0.03 - 0.03$	Diese Analyse (QGSJet)
+	$2.87 \pm 0.003 \pm 0.04 - 0.03$	Diese Analyse (VENUS)
+	2.61 ± 0.008	alle (*) gemittelt

Tab. 6.20: Spektralindex γ_1 der Energie unterhalb des Knies. Spektralindex verschiedener Experimente im Vergleich.

der in dieser Arbeit vorgestellten Analyse.

Bisher wurden nur Modelle betrachtet, mittels derer aus Annahmen über die Quelle der kosmischen Strahlung die Elementhäufigkeiten berechnet werden. Es gibt weiterhin auch Modellrechnungen, die es ermöglichen Energiespektren vorherzusagen. Ein Modell, das keine relativen Häufigkeiten angibt, sondern aus direkten Messungen der individuellen Flüsse und der Modellierung theoretischer Ansätze für die Beschleunigungsmechanismen die spektralen Indizes des Gesamtenergiespektrums quantitativ vorher sagt, ist in [81] beschrieben. Je nachdem, in welchem Medium Supernovaexplosionen stattfinden, ergeben sich unterschiedliche spektrale Indizes. Die Vorhersage für die Explosion in das ISM⁵ ergibt einen Index $\gamma_{ISM} = 2.75 \pm 0.04$ und für die Supernovaexplosion im Wind eines Vorgängersterns (Wind-ISM) $\gamma_{Wind-ISM} = 2.67 \pm 0.02 \pm 0.02$ unterhalb des Knies und $\gamma_{Wind-ISM} = 3.00 \pm 0.07 \pm 0.07$ oberhalb. Innerhalb der Fehler stimmen nur die mittels des Modells QGSJet gewonnenen Indizes mit den Vorhersagen überein (Tabellen 6.20 und 6.21). Das Spektrum, das sich mittels VENUS Modell ergibt, erscheint zumindest unterhalb des Knies zu steil.

Der große Unterschied zwischen den Modellen VENUS und QGSJet ergibt sich auch

⁵ Inter Stellar Medium

	Spektralindex	Experimente
+	3.07 ± 0.07	Theorie II (Wind-ISM) [81]
---	2.94 ± 0.10	HEGRA (Tscherenkow) [74]
+-	2.98 ± 0.10	HEGRA (Szintillatoren) [74] *
+	3.00 ± 0.05	TIBET [85] *
+	2.90 ± 0.30	MACRO [87] *
+	$3.1X \pm 0.0X$	Yakutsk [92]
+-	2.92 ± 0.1	DICE [75] *
+	3.00 ± 0.05	CASA-MIA [89] *
+	3.19 ± 0.06	EAS-TOP [90] *
+	$3.15 \pm 0.05 \pm 0.4$	KASCADE (Myondichten) [91]
+	3.25 ± 0.04	KASCADE (N_e , N_μ^{lr} und N_h) [67]
+-	$3.15 \pm 0.10 \pm 0.16$	KASCADE (N_h) [67]
+-	$3.22 \pm 0.05 \pm 0.06 - 0.04$	Diese Analyse (QGSJet)
+-	$3.25 \pm 0.04 \pm 0.06 - 0.05$	Diese Analyse (VENUS)
+	3.05 ± 0.03	alle (*) gemittelt

Tab. 6.21: Spektralindex γ_2 der Energie oberhalb des Knies. Spektralindex verschiedener Experimente im Vergleich.

in den Indizes die man erhält, wenn das Myonzahlspektrum ($\beta_1 = -3.01 \pm 0.01$ vor und $\beta_2 = -3.23 \pm 0.02$ nach dem Knie [67]) anhand der Energie-Myonzahl-Relation (Tabelle 5.3) in ein Energiespektrum umgerechnet wird. Es ergeben sich hierbei je nach Modell und Primärteilchen Indizes von $\gamma_{1,QGSJet}^P = 2.73$, $\gamma_{1,QGSJet}^{Fe} = 2.80$, $\gamma_{1,VENUS}^P = 2.81$ und $\gamma_{1,VENUS}^{Fe} = 2.89$. Benutzt man lediglich die Indizes β_1 und β_2 , so ergibt sich das Problem der Unkenntnis der Elementzusammensetzung und es lassen sich nur die Extremwerte für reine Eisen- und Protonenschauer angeben. Da das Neuronale Netz für jedes Ereignis individuell die Energie unabhängig von der Klasse der Primärteilchen mit einer Auflösung von 20% bis 35% ermittelt, tritt diese Schwierigkeit nicht auf.

Der Vergleich mit indirekten Messungen anderer Experimente läßt den gleichen Schluß zu, daß die Indizes, die mittels VENUS Modell berechnet wurden, zu groß wiedergegeben werden. Generell sind die Indizes der anderen Experimente kleiner, wie die Mittelwerte in den Tabellen 6.20 und 6.21 zeigen. Gemittelt wurden nur statistisch unabhängige Resultate verschiedener Experimente, die mit (*) gekennzeichnet sind. Meist werden gemessene Größen X des jeweiligen Experiments durch eine Energie- X -Relation in ein Energiespektrum umgerechnet (z.B. $X \equiv$ Myonmultiplizitäten bei MACRO oder $X \equiv$ Höhe des Schauermaximums in g/cm^2 bei DICE). Die Umrechnung ist aber abhängig von der Häufigkeit einzelner Elemente und insbesondere vom verwendeten Generator der hadronischen Wechselwirkung, wie schon der große Unterschied in der vorgelegten Analyse bezüglich der Modelle VENUS und QGSJet zeigt. Der dadurch entstehende systematische Unterschied kann die Abweichungen zumindest

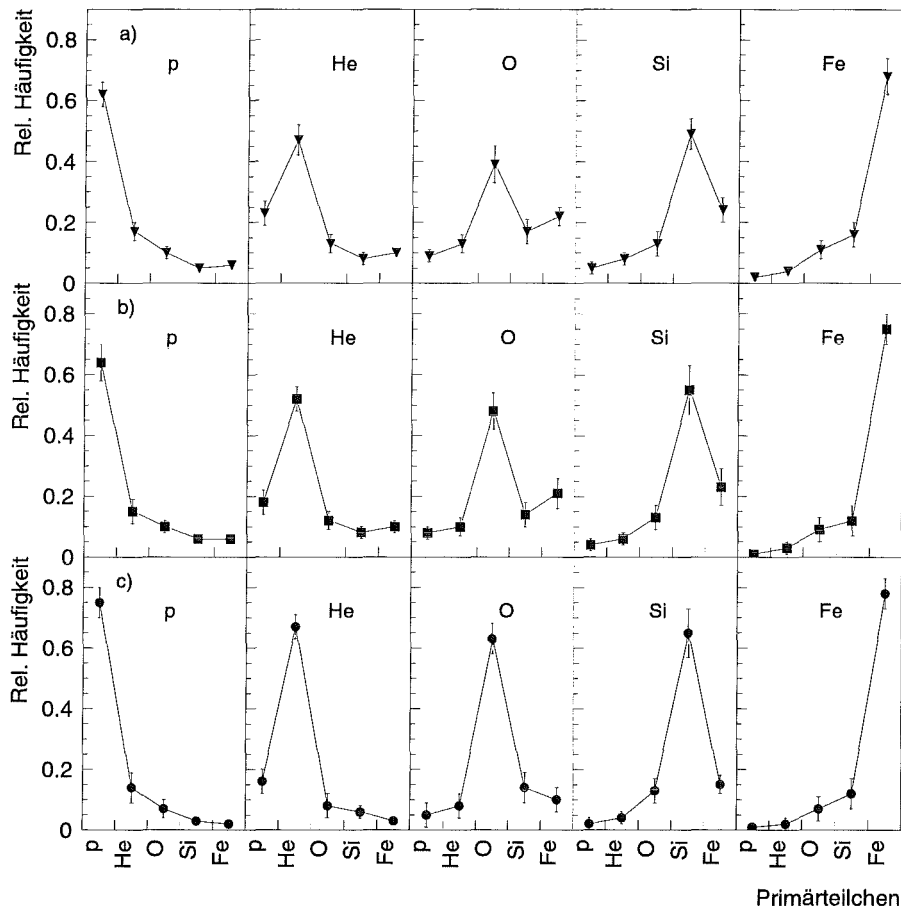


Abbildung 6.44: Misklassifikationsmatrizen des Bayes-Klassifizierers. Bei Berücksichtigung der Detektorantwort für a) N_e , N_μ^{tr} und s , b) N_e , N_μ^{tr} , s und rekonstruierte Energie E und c) N_e , N_μ^{tr} , s und „wahre“ Energie E_0 .

zum Teil erklären. Um einen direkten Vergleich durchführen zu können, müssten alle Experimente mit dem gleichen „Maßstab“, nämlich dem gleichen Generator, analysieren. Eine weitere mögliche Fehlerquelle, die zu den genannten Unterschieden führen könnte, besteht im verwendeten Algorithmus, mit dem bei KASCADE die Ereignisse rekonstruiert werden (KRETA). Denn bei wenigen Ereignissen (einige Promille) der simulierten Schauer schlägt die Rekonstruktion der Elektron- und Myonzahl fehl. Ist der Effekt mit zunehmender Energie stärker ausgeprägt, so kann ein Fluß mit zu großem Index vorgetäuscht werden.

Um systematische Effekte der Energiebestimmung genauer zu studieren und eine detailliertere Analyse mit mehr als drei Gruppen durchführen zu können, wäre es wünschenswert die Zahl simulierter Schauer drastisch zu erhöhen. Es ließe sich damit eine vierdimensionale Mißklassifikationsmatrix A_{E,E_0,M,M_0} erstellen, die nicht nur fehl-

identifizierte Massen, sondern auch fehlrekonstruierte Energien beinhaltet, und eine gleichzeitige Energie- und Masserekonstruktion ermöglichte. Ein Hinweis darauf gibt Abbildung 6.44. Denn während der Separabilitätsindex G der dargestellten Mißklassifikationsmatrizen des Bayes-Klassifizierers im Falle a) für die Parameter N_e , N_μ^{tr} und s rund 50% beträgt, ist er im Falle b) für N_e , N_μ^{tr} , s und der rekonstruierten Energie E größer als 58% und im Falle c) mit der „wahren“ Energie E_0 statt der geschätzten Energie E sogar größer 69% (über alle Ereignisse summiert). Eine energieabhängige Bestimmung der Elementhäufigkeit für fünf Gruppen wäre durchführbar.

Zusammenfassung

Exitus acta probat.

Ovid (43 a. Chr. n.; 19 p. Chr. n.)

Zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung und des Energiespektrums der kosmischen Strahlung im Rahmen des Experiments KASCADE wurden nichtparametrische Analyseverfahren verwendet, um die Energie und die Masse gemessener Luftschauer zu bestimmen. Verwendet wurde die gesamte zu Verfügung stehende Information, die aus den hadronischen, myonischen und elektromagnetischen Komponenten der Luftschauer, nachgewiesen durch die verschiedenen Detektorsysteme bei KASCADE, gewonnen wurde.

Zur Analyse der gemessenen Observablen, zum Vergleich hochenergetischer hadronischer Wechselwirkungsmodelle und zur Abschätzung zu erwartender systematischer Unsicherheiten wurden mit dem Programmpaket CORSIKA umfangreiche Simulationen durchgeführt, wobei alle relevanten Massegruppen – durch je einen Vertreter repräsentiert – berücksichtigt wurden. Insgesamt sind über 20000 Schauer im Energiebereich $10^{14} \text{ eV} \leq E_0 \leq 3.16 \cdot 10^{16} \text{ eV}$ mit QGSJet, VENUS und Sibyll als Generatoren der hadronischen Wechselwirkung simuliert, und das Antwortverhalten der Detektoren in einer detaillierten Detektorsimulation studiert worden. Die Detektorsimulation ist so modelliert, daß die Ausgabedaten direkt mit den gemessenen Rohdaten vergleichbar sind und das gleiche Datenbankformat aufweisen. Systematische Fehler in der Rekonstruktion der Meßgrößen etwa durch Anpassungen und Parametrisierungen sollten kaum auftreten.

Die im Zeitraum von August 1997 bis Juli 1998 aufgenommenen Meßdaten wurden untersucht und dabei Ereignisse zweier Klassen unterschiedlicher Selektionskriterien berücksichtigt. Es wurden solche Schauer selektiert, bei denen entweder die Elektron- und Myonzahlrekonstruktion nicht fehl schlug und das Schauerzentrum in einem 91 m Kreis innerhalb des Detektorfeldes nachgewiesen wurde, oder hochenergetische zen-

trale Schauer, bei denen zusätzlich Hadronen im Kalorimeter und Myonen in den Vieldraht-Proportionalkammern nachgewiesen wurden.

Simulierte und gemessene Größen wurden miteinander verglichen und auf die Masse- und Energiesensitivität geschlossen. Die vorgestellten Analyseverfahren kNN-Klassifizierer, Bayes-Klassifizierer und Neuronales Netz wurden auf ihre Tauglichkeit bei Anwendung auf simulierte Luftschauer untersucht. Es konnte gezeigt werden, daß damit die primäre Masse und Energie einzelner Ereignisse rekonstruiert werden kann. Die Methoden unterscheiden sich stark in ihren Klassifikationseigenschaften. Das Neuronale Netz und der Bayes-Klassifizierer sind der kNN-Methode deutlich überlegen, und nur diese wurden daher für die Analyse verwendet.

Durch die Kombination verschiedenster Observablen zur Bestimmung der Elementhäufigkeiten wurde gezeigt, daß Korrelationen eine entscheidende Rolle hierbei spielen und widerspruchsfreie Resultate nur durch einen alle Komponenten der Luftschauerentwicklung „korrekt“ beschreibenden Generator der hadronischen Wechselwirkung erzielt werden können. Die Gültigkeit des Modells Sibyll (Version 1.6) konnte aufgrund seiner starken systematischen Abweichungen zwischen Messung und Simulation ausgeschlossen werden. Die Modelle QGSJet und VENUS konnten im Rahmen der Statistik die Meßdaten reproduzieren. Der Verlauf der mittleren Masse, nämlich eine zunächst leichter werdende (in der mittleren Masse von $\langle A \rangle = 15$ auf $\langle A \rangle = 11$ sinkend) und ab der Knieenergie schwerer werdende Zusammensetzung ($\langle A \rangle = 17$), bleibt unabhängig vom verwendeten Modell erhalten. Dies kann als eine Bestätigung der Gribov-Regge-Theorie gewertet werden. Die rekonstruierte chemische Zusammensetzung führte mit beiden Modellen zu einer konsistenten Beschreibung, allerdings ergab sich bei Verwendung des Modells VENUS stets eine leichtere Zusammensetzung bei der Analyse gemessener Ereignisse. Die relativen Häufigkeiten sind nicht nur in Abhängigkeit von der Myonzahl N_{μ}^{tr} angegeben, sondern auch als Funktion der Energie, die durch ein Neuronales Netz für jeden Einzelschauer bestimmt wurde.

Es wurde das Energiespektrum der kosmischen Strahlung rekonstruiert. Die spektralen Indizes für das Modell QGSJet (VENUS) sind

$$\gamma_1 = 2.72 \pm 0.003 \pm 0.03 - 0.03 \quad (\gamma_1 = 2.87 \pm 0.003 \pm 0.04 - 0.03)$$

unterhalb des Knies und

$$\gamma_2 = 3.22 \pm 0.05 \pm 0.06 - 0.04 \quad (\gamma_2 = 3.25 \pm 0.04 \pm 0.06 - 0.05)$$

oberhalb. Die Lage des Knies wurde nahezu modellunabhängig zu

$$6.39 \pm 0.14 \pm 0.7 - 0.85 \times 10^6 \text{ GeV} \quad (6.22 \pm 0.27 \pm 0.8 - 0.88 \times 10^6 \text{ GeV})$$

bestimmt. Bei den angegebenen Fehlern handelt es sich um den statistischen Fehler, den systematischen Fehler durch die begrenzte Zahl an Monte-Carlo-Ereignissen und den Fehler, der durch die endliche Auflösung der Energiebestimmung verursacht wird. Es konnten nicht nur die Indizes anhand der Ereignisse der Selektion I berechnet werden, sondern es ergaben sich ebenso innerhalb des jeweiligen Modells vergleichbare

Indizes unterhalb des Knies für unterschiedliche Kombinationen verwendeter Meßgrößen aus Selektion II.

Trotz des immensen Rechenaufwands muß die Anzahl der Monte-Carlo-Ereignisse deutlich erhöht werden, um höherdimensionale Analysen zu ermöglichen. Es sollte dann möglich sein, simultan Energie und Masse der Primärteilchen zu rekonstruieren und schließlich sogar Energiespektren einzelner Teilchengruppen anzugeben.

Diese Arbeit entstand im Rahmen des KASCADE-Experiments. Ich möchte mich hiermit bei allen Mitgliedern der KASCADE-Kollaboration für die vielfältige Unterstützung bedanken.

Ausdrücklich bedanken möchte ich mich bei

Herrn Prof. Dr. G. Schatz, der es mir ermöglichte, die Arbeit am Institut für Kernphysik III des Forschungszentrums durchzuführen,

Herrn Prof. Dr. H.J. Gils für die Anregung zum Thema und seine Förderung während der ganzen Arbeit,

Herrn Prof. Dr. H. Rebel für seine freundschaftliche Aufnahme und engagierte Unterstützung, von der ich viel profitieren durfte,

Herrn Prof. Dr. A. Chilingarian für viele Hinweise und Stunden der Diskussion, sowie die Bereitstellung seines Programmpakets,

Herrn Dr. A. Haungs, der mit mir viele erhellende Diskussionen führte, mit vielen Hinweisen mein Vorankommen beschleunigte und das Manuskript Korrektur las,

Herrn Dr. H.-J. Mathes, der ebenso die Last des Korrekturlesens auf sich nahm,

Herrn Priv. Doz. Dr. J. Knapp und Herrn Dipl.-Phys. A. Vardanyan, die mir den Einstieg in die nichtparametrischen Methoden erleichterten,

Herrn Dipl.-Phys. R. Glasstetter, der mich in die Geheimnisse so mancher Rekonstruktionsroutine einweihte,

Herrn Dipl.-Math. J. Oehlschläger für die Durchführung der CORSIKA Simulationen und Herrn Dr. J. Hörandel für die Bereitstellung einiger Simulationsrechnungen.

Ganz besonderen Dank gebührt meinen Eltern und insbesondere meiner Freundin Susanne, die mich in unnachahmlicher Weise unterstützten und immer wieder motivierten.

Notation

A^T, x^T Transponierte einer Matrix A bzw. eines Spaltenvektors x

$a^T b$ Skalarprodukt $c = a_i b_i$ (inneres Produkt)

ab^T Matrixprodukt $A = a_i b_j$ (äußeres Produkt)

$\langle f(x) \rangle_x$ Erwartungswert von $f(x)$ bezüglich aller möglichen Werte von x .
= $\int f(x)p(x)dx$ im Fall kontinuierlicher Veränderlicher bzw.
= $\sum_i f_i p_i$ im diskreten Fall

$\hat{f}(x)$ Schätzung des wahren Wertes einer Zufallsgröße $f(x)$

M Zahl der Klassen

N Zahl der Muster x^1, \dots, x^N

Ω Menge aller Muster

ω_i Ereignis „Klasse i liegt vor“

Ω_i Menge aller Muster „Klasse i liegt vor“ $i \in \{1, \dots, M\}$

$P(x)$ Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis x auftritt

$p(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte der Ereignisse $\{x\}$

$p(x|\omega_i)$ bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der die Ereignisse x bei gegebenem Ereignis ω_i verteilt sind

x_j Spaltenvektor (Muster) $= (x_{1j}, \dots, x_{nj})^T \quad j \in \{1, \dots, n\}$

x_{ij} i -te Komponente des Spaltenvektors j

\bar{x} Mittelwert der Spaltenvektoren $= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T = \langle x \rangle_x$

Akronyme

AGASA Akeno Giant Air Shower Array
ANI Analysis and Nonparametric Inference
CORSIKA Cosmic Ray Simulations for KASCADE
CRES Cosmic Ray Event Simulation
DICE Dual Imaging Cerenkov Experiment
DPMJet Dual Parton Model with Jet production
EAS Extensive Air Shower
EGS4 Electron Gamma Shower Code Version 4
FLUKA FLUktuierende KAskade
FWHM Full Width Half Maximum
GEANT Kein eigentliches Akronym. Französisch für Gigant.
GHEISHA Gamma Hadron Electron Interaction Shower Algorithm
HDPM Hadronic interactions inspired by the Dual Parton Model
HEGRA High Energy Gamma Ray Astronomy
ISM Inter Stellar Medium
KASCADE KArlsruhe Shower Core and Array DEtector
kNN k-Nächste-Nachbarn
KRETA KASCADE Reconstruction for ExTensive Airshowers
MACRO Monopole, Astrophysics and Cosmic Ray Observatory

MSU Moscow State University

MWPC MultiWire Proportional Chamber

NKG Autoren der NKG Funktion: Nishimura, Kamata und Greisen

PCA Principal Components Analysis

QGSJet Quark-Gluon-String model with Jet production

Sibyll Kein eigentliches Akronym. Name für weissagende Frau im Altertum.

TMS TetraMethylSilan, $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$

TMP TetraMethylPentan, C_9H_{20}

VENUS Very Energetic Nuclear Scattering

Bayes-Theorem

Sind x und ω_i Ereignisse eines geeignet definierten Wahrscheinlichkeitsraumes und gilt $P(\omega_i) > 0$, so heißt

$$P(x|\omega_i) := \frac{P(x \cap \omega_i)}{P(\omega_i)} \quad (\text{C.1})$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von x unter der Bedingung ω_i . x und ω_i sind unabhängig, falls

$$\begin{aligned} P(x \cap \omega_i) &= P(x)P(\omega_i) \\ \iff P(x|\omega_i) &= P(x) \\ \iff P(\omega_i|x) &= P(\omega_i). \end{aligned}$$

Ansonsten sind die Ereignisse korreliert

$$\begin{aligned} P(x|\omega_i) > P(x) &\iff x \text{ und } \omega_i \text{ sind positiv korreliert,} \\ P(x|\omega_i) < P(x) &\iff x \text{ und } \omega_i \text{ sind negativ korreliert.} \end{aligned}$$

Aus Gleichung C.1 folgt, falls die Hypothesen ω_i paarweise disjunkt ($\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$) und erschöpfend sind ($\bigcup_i \omega_i = \Omega$)

$$\begin{aligned} P(x|\omega_i)P(\omega_i) &= P(\omega_i|x)P(x) \\ \iff P(\omega_i|x) &= \frac{P(x|\omega_i)P(\omega_i)}{P(x)} \quad \text{mit } \sum_i P(\omega_i) = 1. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} P(x) \equiv P(x \cap \Omega) &= P\left(x \cap \bigcup_i \omega_i\right) = P\left(\bigcup_i (x \cap \omega_i)\right) \\ &= \sum_i P(x \cap \omega_i) \\ &= \sum_i P(x|\omega_i)P(\omega_i). \end{aligned}$$

Somit erhält man das *BAYES-Theorem* [93] zu

$$\boxed{P(\omega_i|x) = \frac{P(x|\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_j P(x|\omega_j)P(\omega_j)}} \quad (\text{C.2})$$

bzw.

$$p(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_j p(x|\omega_j)P(\omega_j)}$$

falls man die bedingten Wahrscheinlichkeiten durch bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten ersetzt.

Energiebestimmung bei abfallendem Spektrum

Gegeben sie die Verteilung der Energie E_0 :

$$s(E_0) = a(\gamma)\varepsilon(E_0)E_0^{-\gamma} \quad (\text{D.1})$$

mit der steigungsabhängigen Normierung $a(\gamma)$ und der Funktion $\varepsilon(E_0)$, die das Schwellenverhalten des Detektors beschreibt.

Der Meßwert der Energie E_0 sei E , wobei E mit $f(E, E_0)$ verteilt sei. Der „wahre“ Wert E_0 bei gegebenem Meßwert E läßt sich abschätzen durch die Likelihood-Funktion $\mathcal{L}(E_0)$:

$$\mathcal{L}(E_0) = s(E_0) \cdot f(E, E_0) \quad (\text{D.2})$$

Durch Maximierung der Log-Likelihood-Funktion

$$\ln \mathcal{L}(E_0) = \ln a(\gamma) + \ln \varepsilon(E_0) - \gamma \ln E_0 + \ln f(E, E_0) \quad (\text{D.3})$$

ergibt sich ein Schätzwert des „wahren“ Wertes E_0

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(E_0)}{\partial E_0} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{E_0} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial E_0} \equiv 0. \quad (\text{D.4})$$

Bei Annahme einer logarithmischen Normalverteilung

$$f(E, E_0) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}E} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln E - \ln E_0}{\alpha} \right)^2 \right] \quad (\text{D.5})$$

erhält man für Gleichung D.3 den Ausdruck

$$\ln \mathcal{L}(E_0) = \ln a(\gamma) + \ln \varepsilon(E_0) - \gamma \ln E_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln E - \ln E_0}{\alpha} \right)^2 + \text{const.} \quad (\text{D.6})$$

Maximieren führt zu

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(E_0)}{\partial E_0} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{E_0} - \frac{\ln E - \ln E_0}{\alpha^2} \frac{1}{E_0} \equiv 0 \quad (\text{D.7})$$

Ist man weit genug von der Schwelle entfernt, so daß diese das Spektrum bei der Energie E_0 nicht mehr beeinflußt, so verschwindet ε' und Gleichung D.7 läßt sich lösen zu

$$E_0^* = E \cdot e^{-\gamma\alpha^2}. \quad (\text{D.8})$$

Elementzusammensetzung

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+—	$45 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+	$46 \pm 2 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$51 \pm 1 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—++	$58 \pm 1 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
+	50 ± 1.5	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+—	$52 \pm 2 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+	$53 \pm 2 \pm 6$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$58 \pm 2 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—++	$64 \pm 2 \pm 7$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
+	56.8 ± 2	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+—	$52 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+	$55 \pm 5 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$62 \pm 5 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—++	$67 \pm 5 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
+—	59 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+—+—	$38 \pm 10 \pm 10$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$38 \pm 10 \pm 9$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—+—	$54 \pm 10 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—++	$58 \pm 10 \pm 11$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
+—+—	47 ± 10	

Tab. E.1: Protonhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels VENUS Simulationen bestimmte Protonhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 3 Klassen).

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+	$34 \pm 2 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$31 \pm 2 \pm 8$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$31 \pm 2 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$26 \pm 2 \pm 5$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
+	30.5 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
—+	$33 \pm 3 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$32 \pm 3 \pm 7$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$29 \pm 3 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$26 \pm 3 \pm 7$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
+	30 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+—	$34 \pm 5 \pm 7$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$29 \pm 5 \pm 6$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$30 \pm 5 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$27 \pm 5 \pm 10$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
—+—	30 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+—	$38 \pm 10 \pm 11$	N_e, N_{μ}^{tr}
—+—	$38 \pm 10 \pm 11$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
—+—	$38 \pm 10 \pm 13$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$33 \pm 10 \pm 17$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \Sigma E_h$
—+—	36.8 ± 10	

Tab. E.2: Sauerstoffhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels VENUS Simulationen bestimmte Sauerstoffhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 3 Klassen).

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+	$21 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$23 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$17 \pm 1 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$16 \pm 1 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	19.3 ± 1.5	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+	$15 \pm 2 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$16 \pm 2 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$13 \pm 2 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$10 \pm 2 \pm 2$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	13.5 ± 2	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+	$14 \pm 4 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$16 \pm 4 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$8 \pm 3 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$6 \pm 3 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	11 ± 3.5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+	$25 \pm 9 \pm 6$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$25 \pm 9 \pm 7$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$8 \pm 6 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$8 \pm 6 \pm 11$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	23 ± 8.5	

Tab. E.3: Eisenhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels VENUS Simulationen bestimmte Eisenhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 3 Klassen).

	Rel. Häufigkeit [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+	$54 \pm 2 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$53 \pm 2 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$52 \pm 2 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$55 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$57 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$68 \pm 2 \pm 2$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$67 \pm 2 \pm 2$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	58 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
—+	$64 \pm 3 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$57 \pm 3 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$58 \pm 3 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$59 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$59 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$69 \pm 3 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$71 \pm 3 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	62.4 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+	$69 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$58 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$60 \pm 5 \pm 17$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$63 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$63 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$72 \pm 5 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$71 \pm 5 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	65.1 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+	$38 \pm 10 \pm 12$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$42 \pm 10 \pm 13$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$50 \pm 10 \pm 20$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$50 \pm 10 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$50 \pm 10 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$69 \pm 10 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$63 \pm 10 \pm 7$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
—+	51.7 ± 10	

Tab. E.4: Protonhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels QGSJet Simulationen bestimmte Protonhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 2 Klassen).

	Rel. Häufigkeit [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+—	$46 \pm 2 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$47 \pm 2 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+—	$48 \pm 2 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	$45 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$43 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$32 \pm 2 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$33 \pm 2 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	42 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
—+—	$36 \pm 3 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$43 \pm 3 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+—	$42 \pm 3 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	$41 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$41 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$31 \pm 3 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$29 \pm 3 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	37.6 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+—	$31 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$42 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+—	$40 \pm 5 \pm 17$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	$37 \pm 5 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$37 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$28 \pm 5 \pm 5$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$29 \pm 5 \pm 7$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	34.8 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+—	$62 \pm 10 \pm 12$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+—	$58 \pm 10 \pm 13$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+—	$50 \pm 10 \pm 20$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	$50 \pm 10 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+—	$50 \pm 10 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+—	$33 \pm 10 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+—	$38 \pm 10 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+—	48.7 ± 10	

Tab. E.5: Eisenhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels QGSJet Simulationen bestimmte Eisenhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 2 Klassen).

	Rel. Häufigkeit [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
—+	$53 \pm 2 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$58 \pm 2 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$64 \pm 2 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$62 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$62 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$72 \pm 2 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$73 \pm 2 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	63.4 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
—+	$61 \pm 3 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$64 \pm 3 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$66 \pm 3 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$67 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$66 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$77 \pm 3 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$78 \pm 3 \pm 5$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	68.4 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
—+	$60 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$63 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$72 \pm 5 \pm 15$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$73 \pm 5 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$72 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$77 \pm 5 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$79 \pm 4 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	70.9 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
—+	$29 \pm 10 \pm 11$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
—+	$33 \pm 10 \pm 13$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
—+	$42 \pm 10 \pm 19$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$67 \pm 10 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$63 \pm 10 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$75 \pm 10 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$75 \pm 9 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
—+	54.9 ± 10	

Tab. E.6: Protonhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels VENUS Simulationen bestimmte Protonhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 2 Klassen).

	Rel. Häufigkeit [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+	$47 \pm 2 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$42 \pm 2 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
+	$36 \pm 2 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$38 \pm 2 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$38 \pm 2 \pm 2$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$28 \pm 2 \pm 3$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$27 \pm 2 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	36.6 ± 2	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+	$39 \pm 3 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$36 \pm 3 \pm 6$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
+	$34 \pm 3 \pm 7$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$33 \pm 3 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$34 \pm 3 \pm 3$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$23 \pm 3 \pm 4$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$22 \pm 3 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	31.6 ± 3	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+	$40 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$37 \pm 5 \pm 8$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
+	$28 \pm 5 \pm 15$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$27 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$28 \pm 5 \pm 4$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$23 \pm 5 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$21 \pm 5 \pm 6$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	29.1 ± 5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+	$71 \pm 10 \pm 11$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$67 \pm 10 \pm 11$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}$
+	$58 \pm 10 \pm 19$	$N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	$33 \pm 10 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}
+	$38 \pm 10 \pm 5$	N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$25 \pm 9 \pm 8$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}$
+	$25 \pm 9 \pm 9$	$N_e, N_{\mu}^{tr}, s, N_{\mu}^*, N_h^{100\text{GeV}}, E_h^{\text{max}}, \sum E_h$
+	45.3 ± 10	

Tab. E.7: Eisenhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. Mittels VENUS Simulationen bestimmte Eisenhäufigkeit für eine unterschiedliche Zahl von Observablen mit statistischem (dicke Linie) und systematischem (dünne Linie) Fehler (Trennung in 2 Klassen).

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+-	$47 \pm 0.1 \pm 5$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$45 \pm 2 \pm 5$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$46 \pm 2 \pm 5$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	46 ± 1.4	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+-	$58 \pm 0.2 \pm 6$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$54 \pm 3 \pm 6$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$53 \pm 2 \pm 6$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	55 ± 1.7	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+-	$62 \pm 0.4 \pm 5$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$58 \pm 5 \pm 5$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$55 \pm 5 \pm 5$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	58.3 ± 3.5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+-	$54 \pm 0.8 \pm 9$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$50 \pm 10 \pm 9$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
++	$38 \pm 10 \pm 9$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+-	47.3 ± 6.9	

Tab. E.8: Protonhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. VENUS (Trennung in 3 Klassen).

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
— + —	$38 \pm 0.1 \pm 8$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$37 \pm 2 \pm 8$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$31 \pm 2 \pm 8$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	35.3 ± 1.4	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
— + —	$32 \pm 0.2 \pm 7$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$33 \pm 3 \pm 7$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$32 \pm 3 \pm 7$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	32.3 ± 2.1	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
— + —	$28 \pm 0.4 \pm 6$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$29 \pm 5 \pm 6$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$29 \pm 5 \pm 6$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	28.6 ± 3.5	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
— + —	$30 \pm 0.8 \pm 11$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$29 \pm 9 \pm 11$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	$38 \pm 10 \pm 11$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
— + —	33.7 ± 6.6	

Tab. E.9: Sauerstoffhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. VENUS (Trennung in 3 Klassen).

	Rel. Häuf. [%]	Observablen
$3.6 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 3.825$		
+	$15 \pm 0.1 \pm 4$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$18 \pm 1 \pm 4$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$23 \pm 2 \pm 4$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	18.7 ± 1	
$3.825 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.05$		
+	$10 \pm 0.2 \pm 4$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$13 \pm 2 \pm 4$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$16 \pm 2 \pm 4$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	13 ± 2.1	
$4.05 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.275$		
+	$9 \pm 0.3 \pm 2$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$13 \pm 4 \pm 2$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$16 \pm 4 \pm 2$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	12.7 ± 2.8	
$4.275 \leq \log_{10} N_{\mu}^{tr} < 4.5$		
+	$12 \pm 0.5 \pm 7$	Selektion I NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$21 \pm 8 \pm 7$	Selektion II NN N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	$25 \pm 9 \pm 7$	Selektion II BK N_e, N_{μ}^{tr}, s
+	19.3 ± 5.9	

Tab. E.10: Eisenhäufigkeit in verschiedenen N_{μ}^{tr} -Intervallen. VENUS (Trennung in 3 Klassen).

Literaturverzeichnis

- [1] G.V. Kulikov, G.B. Khristiansen, *J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)* **35** (1958) 441
- [2] P. Doll et al., KfK-Report 4686, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1990)
- [3] H.O. Klages et al., *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **52B** (1997) 92
- [4] J.N. Capdevielle et al., KfK-Report 4998, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1992)
- [5] D. Heck et al., FZKA-Report 6019, Forschungszentrum Karlsruhe (1998)
- [6] M. Ryan et al., *Phys. Rev. Lett* **28** (1972) 985
- [7] I.P. Ivanenko et al., *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conference, Calgary* **2** (1993) 17
- [8] K. Asakimori et al., *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conference, Calgary* **2** (1993) 21
- [9] V.I. Zatsepin et al., *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conference, Calgary* **2** (1993) 13
- [10] D. Müller et al., *Astrophys. J.* **374** (1991) 356
- [11] J.J. Engelmann et al., *Astron. Astrophys.* **233** (1990) 96
- [12] K. Asakimori et al., *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conference, Calgary* **2** (1993) 25
- [13] M. Teshima, *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conference, Calgary, Invited Papers, eds. D.A. Leahy et al., World Scientific* (1993) 257
- [14] D.J. Bird et al., *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 3401
- [15] N. Chiba et al., *Nucl. Instr. and Meth. A* **311** (1992) 338
- [16] M. Nagano et al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **18** (1992) 423
- [17] S. Yoshida et al., *Astroparticle Physics* **3** (1995) 105

- [18] J. Knapp, FZKA-Report 5970, Forschungszentrum Karlsruhe (1997)
- [19] C.E. Fichtel, J. Linsley, *Astrophys. J.* **300** (1986) 474
- [20] S.P. Swordy, *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conference, Calgary, Invited Papers*, eds. D.A. Leahy et al., World Scientific (1993) 243
- [21] S.P. Swordy, *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conference, Rome 2* (1995) 697
- [22] A.P. Szabo, R.J. Protheroe, *Astroparticle Physics* **2** (1994) 375
- [23] K. Greisen, *Phys. Rev. Lett.* **16** (1966) 748
- [24] G.T. Zatsepin, V.A. Kuz'min, *J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)* **4** (1966) 78
- [25] P. Sokolsky, „*Introduction to Ultrahigh Energy Cosmic Ray Physics*“, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1966)
- [26] J. Wefel, „*Cosmic Rays, Supernovae and the Interstellar Medium*“, eds. M.M. Shapiro et al., NATO ASI Series **337C** (1991) 29
- [27] T.K. Gaisser, „*Cosmic Rays and Particle Physics*“, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [28] J.H. Weber et al., *Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conference, Durban 6* (1997) 153
- [29] G. Schatz et al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **20** (1994) 1267
- [30] J. Hörandel, FZKA-Report 6015, Forschungszentrum Karlsruhe (1998)
- [31] U. Raidt, FZKA-Report 5917, Forschungszentrum Karlsruhe (1997)
- [32] R. Haeusler, FZKA-Report 5798B, Forschungszentrum Karlsruhe (1996)
- [33] A. Haungs, FZKA-Report 5845, Forschungszentrum Karlsruhe (1996)
- [34] J.H. Friedman, „*On bias, variance, 0/1-loss, and the curse-of-dimensionality*“, Technical Report, Dept. of Statistics, Stanford University (1996)
- [35] A.A. Chilingarian et al., *Nucl. Instr. and Meth. A* **281** (1989) 388
- [36] A.A. Chilingarian, *Comp. Phys. Com.* **54** (1989) 381
- [37] O. Moeschlin, F. Steinert, „*Bayessche Statistik*“, Birkhäuser Verlag (1995)
- [38] F.A. Aharonian et al., *Nucl. Instr. and Meth. A* **302** (1991) 522
- [39] A.A. Chilingarian, *Nuovo Cimento* **14C** (1991) 555

-
- [40] A. Chilingarian, „ANI, *Nonparametric Statistic Analysis of High Energy Physics and Astrophysics Experiments*“, Users Guide, Version 98.1, unveröffentlicht
- [41] P.J. Huber, „*Robust Statistics*“, John Wiley, New York (1981)
- [42] R.L. Launer, G.N. Wilkinson (eds.), „*Robustness in Statistics*“, Academic Press, New York (1979)
- [43] A.A. Chilingarian, *Pattern Recognition Letters* **11** (1990) 781
- [44] R. Brause, „*Neuronale Netze*“, B.G. Teubner Stuttgart (1991)
- [45] W.S. McCulloch, W.H. Pitts, „*A Logical Calculus of the Ideas Imminent in Neural Nets*“, Bulletin of Mathematical Biophysics (1943) 115
- [46] A. Zell, „*Simulation Neuronaler Netze*“, Addison-Wesley (1994)
- [47] S. Brandt, „*Datenanalyse*“, B.I. Wissenschaftsverlag (1992)
- [48] W.H. Press, „*Numerical Recipes in FORTRAN*“, Cambridge University Press (1992)
- [49] J.N. Capdevielle, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **15** (1989) 909
- [50] K. Werner, *Phys. Rep.* **232** (1993) 87
- [51] R.S. Fletcher et al., *Phys. Rev.* **D 46** (1992) 5710
- [52] J. Engel et al., *Phys. Rev.* **D 50** (1994) 5013
- [53] N.N. Kalmykov, S.S. Ostapchenko, *Yad. Fiz.* **56** (1993) 105
- [54] J. Ranft, *Phys. Rev.* **D 51** (1995) 64
- [55] H. Fesefeldt, Report PITHA 85/2, RWTH Aachen (1985)
- [56] P.K.F. Grieder, *Proc. 16th Int. Cosmic Ray Conference, Kyoto* **9** (1979) 161
- [57] A. Capella, J. Tran Thanh Van, *Z. Phys.* **C 10** (1981) 249
- [58] W.R. Nelson, H. Hiroyama, D.W.O. Rogers, *SLAC report 265* (1985)
- [59] CERN Program Library Long Writeups W5013 (1993)
- [60] J. Ranft, S. Ritter, *Z. Phys.* **C 20** (1983) 347
- [61] K. Greisen, *Progress in Cosmic Ray Physics* **3**, North Holland Publ. (1956)
- [62] K. Kamata, J. Nishimura, *Prog. Theoret. Phys. Suppl.* **6** (1958) 93

- [63] J. Unger, FZKA-Report 5896, Forschungszentrum Karlsruhe (1997)
- [64] H.H. Mielke, Interner Bericht, Forschungszentrum Karlsruhe (1996) unveröffentlicht
- [65] A. Haungs et al., *Nucl. Instr. and Meth. A* **372** (1996) 515
- [66] R. Glasstetter, persönliche Mitteilung (1998)
- [67] R. Glasstetter and J.R. Hörandel et al., *Proc 16th European Cosmic Ray Symposium, Madrid* H.E. 7.4 (1998) in Druck
- [68] A. Haungs et al., FZKA-Report 6105, Forschungszentrum Karlsruhe (1998)
- [69] J.H. Weber, *Proc 16th European Cosmic Ray Symposium, Madrid* H.E. 7.5 (1998) in Druck
- [70] M. Giller, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **52B** (1997) 164
- [71] O. Palamara et al., *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conference, Rome* **2** (1995) 689
- [72] Y.A. Fomin et al., *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **52B** (1997) 188
- [73] J. Kempa, M. Samorski, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **24** (1998) 1039
- [74] J. Cortina et al., *Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conference, Durban* **4** (1997) 69
- [75] K. Boothby et al., *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **52B** (1997) 166
- [76] A.A. Watson, *Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conference, Durban* **8** (1998) 257
- [77] C.J. Cesarsky, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **18** (1980) 289
- [78] T. Stanev, P. Biermann, T.K. Gaisser, *Astron. Astrophys.* **274** (1993) 902
- [79] J. Wdowczyk, A.W. Wolfendale, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **39** (1989) 43
- [80] H.T. Freudenreich et al., *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2732
- [81] B. Wiebel-Sooth et al., *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conference, Rome* **2** (1995) 656
- [82] L.F. Fortson et al., *Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conference, Durban* **4** (1997) 49
- [83] B. Wiebel-Sooth et al., *Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conference, Durban* **4** (1997) 121
- [84] O.A. Gress et al., *Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conference, Durban* **4** (1997) 129
- [85] M. Amenomori et al., *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conference, Rome* **2** (1995) 736

-
- [86] R.A. Antonov et al., *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conference, Rome 2* (1995) 776
- [87] M. Ambrosio et al., *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **52B** (1997) 172
- [88] K. Boothby et al., *Astrophys. J.* **491** (1997) 35
- [89] M.A. Kennedy Glasmacher, Dissertation, University of Michigan (1998) unveröffentlicht
- [90] M. Aglietta et al., Report INFN/AE-98/21; *to be published in Astroparticle Physics* (1998)
- [91] K.U. Köhler, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1998)
- [92] B.N. Afanasiev et al., *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conference, Rome 2* (1995) 756
- [93] T. Bayes, „*An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*“, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **53** (1763) 54 (reprinted in *Biometrika* **45** (1958) 370)