

# **Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**

FZKA 6458

## **Strukturmatrizen basierte Synthese der MIMO- Zustandsraumdarstellung**

Uwe Getzlaff und Lutz Gröll

Institut für Angewandte Informatik

Arbeitsbericht zum DFG-Fördervorhaben

Modellstrukturierung von sicherheitsrelevanten technischen Systemen mittels  
tensororientierter Mustererkennung und Genetischen Algorithmen (BR 1303/3-1)

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2000

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft  
Deutscher Forschungszentren (HGF)

ISSN 0947-8620

# Zusammenfassung

Dies ist ein Arbeitsbericht zum DFG-Fördervorhaben „Modellstrukturierung von sicherheitsrelevanten technischen Systemen mittels tensororientierter Mustererkennung und Genetischen Algorithmen“ (BR 1303/3-1). Betrachtet wird die Strukturierung der linearen, zeitinvarianten, mehrvariablen Zustandsdarstellung ohne Totzeit und mit konzentrierten Parametern. Aus gemessenen E/A-Daten soll eine interpretierbare Struktur eines MIMO-Systems ermittelt werden. Dazu wird in diesem Bericht eine Gleichung hergeleitet, mit der aus einer interpretierbaren Zerlegung des MIMO-Systems eine strukturierte MIMO-Zustandsraumdarstellung berechnet werden kann. Die interpretierbare Zerlegung des MIMO-Systems ist eine Struktur aus vorwärts und rückwärts gerichteten SISO-Teilsystemen, die die P-kanonische und V-kanonische Struktur als Spezialfälle mit einschließt. Das Vorgehen wird an Hand von Beispielen demonstriert.

## Abstract

### **Generation of MIMO state space description based on structural matrices**

The report considers linear time invariant multi-input/multi-output state space systems without delay time and with concentrated parameters. The state space description is ambiguous. The structure of different models in the class of equivalent systems is more or less decipherable. Decipherable structures are desired. Therefore an equation is developed to calculate the structure of a multi-input/multi-output state space description from a given, decipherable structure consisting of single-input/single-output systems. So we are able to recognize decipherable structures in state space description, e. g. P-canonical, V-canonical and other combined systems with forward and backward directed subsystems. Examples illustrate the procedure.

## Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole</b>  | <b>V</b>  |
| <b>Abkürzungsverzeichnis</b>  | <b>VI</b> |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2 Motivation der linearen Zustandsraumdarstellung</b>                                | <b>2</b>  |
| <b>3 Zusammenhang von P-, V- und H-kanonischer Struktur</b>                             | <b>4</b>  |
| <b>4 Kombinierte Struktur und MIMO-Zustandsraumdarstellung</b>                          | <b>9</b>  |
| 4.1 Überführung der kombinierten Struktur in die MIMO-Zustandsraumdarstellung . . . . . | 9         |
| 4.2 Symbolische Generierung der MIMO-Zustandsraumdarstellung . . . . .                  | 12        |
| <b>5 Beispiele und Simulation</b>   | <b>17</b> |
| <b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>24</b> |
| <b>A Priorität der Operationen</b>  | <b>26</b> |
| <b>B Diagonalisierungsoperatoren</b>  | <b>27</b> |
| <b>C Vektorisierung und Kronecker-Produkt</b>   | <b>28</b> |
| <b>D Punktprodukt und Punktquotient</b>   | <b>29</b> |
| <b>E Umwandlung der E/A-Darstellung in die MIMO-Zustandsraumdarstellung</b>             | <b>30</b> |

## Abbildungsverzeichnis

|   |   |
|---|---|
| 1 P-kanonische Struktur in Übertragungsmatrizen . . . . .                 | 5 |
| 2 V-kanonische Struktur in Übertragungsmatrizen . . . . .                 | 5 |
| 3 H-kanonische Struktur in Übertragungsmatrizen . . . . .                 | 5 |
| 4 P-kanonische Struktur mit Steuereinrichtungen zur Entkopplung . . . . . | 7 |
| 5 V-kanonische Struktur mit Steuereinrichtungen zur Entkopplung . . . . . | 7 |
| 6 kombinierte Struktur in Übertragungsmatrizen . . . . .                  | 9 |

|    |   |    |
|----|---|----|
| 7  | kombinierte Struktur, aufgeteilt in vorwärts und rückwärts gerichtetes Teilsystem . . . . .             | 9  |
| 8  | kombinierte Struktur aus SISO-Teilsystemen . . . . .  | 11 |
| 9  | Beispielsystem dargestellt als Struktur aus SISO-Teilsystemen . . . . .                                 | 20 |
| 10 | Simulation des Beispielsystems ( $y_1 \cdots, y_2 \text{ —}, y_3 \text{ -}, y_4 \text{ --}$ ) . . . . . | 23 |
| 11 | Ziel und Ist-Stand der Strukturanalyse linearer Mehrgrößensysteme . . . . .                             | 24 |
| 12 | Teilsystem $S_{ji}$ . . . . .   | 32 |
| 13 | P-kanonische Struktur . . . . .   | 33 |
| 14 | P-kanonische Struktur in Blockdarstellung . . . . .   | 33 |
| 15 | P-kanonische Struktur mit Teilsystemen in Zustandsraumdarstellung . . . . .                             | 34 |

## Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole

| Symbol                    | Erklärung                                      |
|---------------------------|--|
| $\mathbf{1}_{a \times b}$ | Einsmatrix                                     |
| $\mathbf{0}_{a \times b}$ | Nullmatrix                                     |
| $\mathbf{I}_a$            | Einheitsmatrix                                 |
| $\mathbf{I}_{a \times b}$ | Einsdiagonalmatrix (siehe (51) Anhang B)       |
| $\delta_{ij}$             | Kronecker-Symbol                               |
| $()^{-1}$                 | invertiert                                     |
| $()^T$                    | transponiert                                   |
| $\otimes$                 | Kronecker-Produkt                              |
| $\odot$                   | Punktprodukt, Hadamard-Produkt                 |
| diag                      | Diagonalisierung (siehe Anhang B)              |
| vec                       | Vektorisierung (siehe Anhang C)                |
| $A$                       | Systemmatrix                                   |
| $B$                       | Eingangsmatrix                                 |
| $C$                       | Ausgangsmatrix                                 |
| $D$                       | Durchgangsmatrix                               |
| $S$                       | System   |
| $k$                       | Abtastzeitpunkt                                |
| $t$                       | Zeit   |
| $m$                       | Anzahl der Eingänge                            |
| $p$                       | Anzahl der Ausgänge                            |
| $n$                       | Anzahl der Zustände                            |
| $i$                       | Nummer des Eingangs                            |
| $j$                       | Nummer des Ausgangs                            |
| $l$                       | Nummer des Zustands                            |
| $g$                       | Nummer der Ordnung                             |
| $h$                       | Nummer der Gleichung (eines Gleichungssystems) |
| $u_i$                     | Eingangswert                                   |
| $y_j$                     | Ausgangswert                                   |
| $x_l$                     | Zustandswert                                   |
| $u$                       | Eingangsvektor                                 |
| $y$                       | Ausgangsvektor                                 |
| $x$                       | Zustandsvektor                                 |

## Abkürzungsverzeichnis

| Abkürzung      | Bedeutung   |
|----------------|---|
| E/A            | Ein-/Aus-, Eingang/Ausgang                        |
| SISO (-System) | Eingrößen(-system), (single input, single output) |
| MIMO (-System) | Mehrgrößensystem (multi input, multi output)      |
| MIMO-ZRD       | Mehrgrößenzustandsraumdarstellung                 |
| MIMO-ZRS       | Mehrgrößenzustandsraumsystem                      |
| ZRD            | Zustandsraumdarstellung                           |

# 1 Einleitung

Ziel des Forschungsprojektes ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Modellstrukturierung für sicherheitsrelevante technische Systeme. Vorausgehende Untersuchungen zeigten, dass eine Modellbildung ohne Einschränkung der Modellklasse bzw. Strukturvielfalt nicht möglich ist. Sinnvoll ist, diese Einschränkung auf ein notwendiges Minimum zu reduzieren. In der Klasse der linearen, zeitinvarianten Systeme ohne Totzeit und mit konzentrierten Parametern bietet die Zustandsraumdarstellung als Modell den Vorteil, dass nur ein Strukturparameter, die Systemordnung, festgelegt oder ermittelt werden muss.

Die Zustandsraumdarstellung ist nicht eindeutig. Für jedes System existieren unendlich viele äquivalente Zustandsraumdarstellungen. In dieser Menge von äquivalenten Zustandsraumdarstellungen sollen gut interpretierbare Darstellungen gefunden werden. Dieser Bericht stellt den ersten Schritt zur Lösung dieser Aufgabe dar.

Für SISO-Systeme ist die Jordan-Normalform leicht interpretierbar. Die Systemmatrix bildet die Dynamik des Systems gut ab. Jedes von Null verschiedene Element der Eingangs- und Ausgangsmatrix stellt eine Verknüpfung zwischen einem Systemzustand und der Systemumwelt dar. Da die Eingangs- und Ausgangsmatrix bei SISO-Systemen Vektoren sind, ist die Anzahl der Elemente vergleichsweise gering und die Anzahl der Verknüpfung bleibt überschaubar. Bei MIMO-Systemen sind in der Jordan-Normalform die Eingangs- und Ausgangsmatrix i. Allg. voll besetzt und eine Interpretation als Struktur aus Teilsystemen ist kaum möglich.

Als Ausgangspunkt dient eine interpretierbare Darstellung, konkret eine Zerlegung in vorwärts und rückwärts gerichtete SISO-Systeme. Diese Zerlegung hat eine Struktur, welche auf einfache Art und Weise beschrieben bzw. vorgegeben oder definiert werden kann. Dazu werden zwei Strukturmatrizen (mit binären Elementen) genutzt. Diese interpretierbare, einfach definierbare Darstellung wird in eine Darstellung umgewandelt, die mit wenigen Annahmen bezüglich der Strukturparameter identifiziert werden kann. Für die MIMO-Zustandsraumdarstellung kann die Systemordnung aus den E/A-Daten geschätzt werden [Bau99], und es müssen keine weiteren Strukturparameter vorgegeben werden. Darum ist es sinnvoll, für die Identifikation die MIMO-Zustandsraumdarstellung zu wählen. Die Umwandlung der interpretierbaren Zerlegung aus vorwärts und rückwärts gerichteten SISO-Systemen in eine strukturierte MIMO-Zustandsraumdarstellung ist Gegenstand dieses Berichtes.

Im nächsten, noch zu lösenden Schritt, soll die Äquivalenztransformation zwischen der aus Daten geschätzten MIMO-Zustandsraumdarstellung und der vorgegebenen strukturierten MIMO-Zustandsraumdarstellung ermittelt werden. In der vorgegebenen strukturierten MIMO-Zustandsraumdarstellung sind alle Parameter der zu Grunde liegenden SISO-Teilsysteme offen. Aufgrund von Fehlern im Datenmaterial müssen diese Parameter und die Transformationsmatrix entsprechend eines Kriteriums optimal approximiert werden. Die beste Strukturvorgabe wird stochastisch oder systematisch gesucht. Bei dieser Iteration entfällt die Identifikation, lediglich die Approximation muss wiederholt werden. Mit diesem Verfahren kann ein effektiver Weg von den Messdaten zu einer interpretierbaren Darstellung des linearen Mehrgrößensystems geschaffen werden.

Im Folgenden wird die Wahl der MIMO-Zustandsraumdarstellung ausführlicher begründet. Danach werden die bekannten Zerlegungen von Mehrgrößensystemen, die P-, V- und H-kanonische Struktur beschrieben und untersucht. Für eine daraus abgeleitete kombinierte Struktur wird die Strukturgleichung zur Ermittlung der MIMO-Zustandsraumdarstellung hergeleitet. Die Strukturgleichung wird auf drei Beispiele angewendet. Der Bericht endet mit einer kurzen Zusammenfassung.



## 2 Motivation der linearen Zustandsraumdarstellung

Zur Untersuchung der Struktur eines linearen Systems soll die Zustandsraumdarstellung genutzt werden. Das wird in diesem Abschnitt begründet.

Bei der Modellierung eines Systems auf der Grundlage der Ein-/Ausgangsdaten, erscheint es zunächst sinnvoll eine Ein-/Ausgangsbeschreibung zu wählen. Diese erfordert aber viele Strukturannahmen:

- Die Verschaltung der Teilsysteme muss festgelegt werden.
- Die Ordnungen aller Teilsysteme (Zählerordnung und Nennerordnung) müssen geschätzt oder festgelegt werden.
- Nach der Parameterschätzung muss durch Ordnungsreduktionsverfahren die Anzahl der Speicher im Gesamtsystem ermittelt werden. Diese Gesamtanzahl der Speicher kann dennoch größer sein als die Anzahl der Zustände.

Durch die vielen Schritte dieser Vorgehensweise und die vielen Freiheiten bei der Strukturannahme wird der Suchraum für einen genetischen Algorithmus oder auch ein anderes Optimierungsverfahren unnötig aufgebläht. Die direkte Identifikation der Zustandsraumdarstellung vermeidet diese Nachteile. Für die Zustandsraumdarstellung wird nur ein Strukturparameter, die Anzahl der Zustände des Systems benötigt. Damit wird die Zahl der verschiedenen Modelle stark reduziert. Die scheinbaren Nachteile der Zustandsraumdarstellung

- nicht messbare Größen (Zustände),
- viele Parameter (in der Systemmatrix) und
- nicht Eindeutigkeit (bezüglich der Darstellung der Zustände in einem konkreten Koordinatensystem)

sind gegenwärtig alle nicht mehr relevant.

Das Problem der nicht messbaren Zustandsgrößen wurde Anfang der '90-er Jahre von Peter Van Overschee und Bart DeMoor [OD96, FHM<sup>+</sup>99] mit Hilfe der Unterraumalgorithmen gelöst. Damit können die Parameter der Zustandsraumdarstellung direkt geschätzt werden, ohne dass die Zustände bekannt sein oder geschätzt werden müssen. Die Schätzungen weisen eine sehr gute Statistik auf und sind numerisch robust [VWO97]. Ausgefeilte Verfahren [OV94] schätzen die Singulärwerte der Systemmatrix und damit die Pole der Zustandsraumdarstellung optimal.

Die vielen Parameter in der Systemmatrix sowie die durch die Systemmatrix gekoppelten Parameter der Eingangs- und Ausgangsmatrix sind voneinander abhängig. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems sind viel niedriger. Die Unterraumalgorithmen berücksichtigen diese Abhängigkeiten a-priori. Außerdem kann durch Äquivalenztransformation auf spezielle kanonische Formen der Zustandsraumdarstellung eine Darstellung mit wenigen Parametern erreicht und so die scheinbar große Anzahl von Parametern reduziert werden.

Die Mehrdeutigkeit der Zustandsraumdarstellung ist für die Modellierung des E/A-Verhaltens ohne Belang. Außerdem kann die Eindeutigkeit der Darstellung, wenn notwendig, durch Beschränkung auf eine kanonische Darstellung erzwungen werden. Die äquivalenten Zustandsraumdarstellungen sind dann Darstellungen der

gleichen Zustände in unterschiedlichen Grundsystemen. Die Mehrdeutigkeit der Zustandsraumdarstellung wird genutzt, um gut interpretierbare Darstellungen zu finden.

Gut interpretierbar ist z. B. eine Zerlegung des Mehrgrößensystems in einzelne SISO-Systeme zwischen jeweils einem Eingang und einem Ausgang. Bekannte Zerlegungen dieser Art sind die P-, V- und H-kanonische Struktur, die im Folgenden untersucht werden.

### 3 Zusammenhang von P-, V- und H-kanonischer Struktur

Bei der Darstellung dynamischer Systeme wird zwischen den P-, V- und H-kanonischen<sup>1</sup> und anderen Strukturen unterschieden [Mes60]. Die drei genannten Strukturen sind leicht interpretierbar, da sie jeweils die Kopplung zwischen einem Eingang und einem Ausgang explizit als Eingrößensystem darstellen.

Die Zustandsraumdarstellung der P-kanonischen Struktur kann unter bestimmten Bedingungen direkt aus dem Vektor-Differenzgleichungssystem

$$\underline{\alpha}_h^T y_j[k] = \text{sp}(Z_h^T U)$$

ermittelt werden (siehe Anhang E). Eine Zustandsraumdarstellung für V- und H-kanonische Strukturen ist möglich, aber aufwendig. Besonders für MIMO-Systeme mit vielen Ein- und Ausgängen und H-kanonischer Struktur ist bei der üblichen Darstellungsweise Sorgfalt notwendig, um den einzelnen Matrizenblöcken die richtigen Blockmatrizen zuzuordnen. Nachdem die erwähnten drei Strukturen auf ihre Eigenschaften untersucht wurden, wird gezeigt, durch welche Modifikation eine systematische Überführung in eine Zustandsraumdarstellung erreicht werden kann.

- Die P-, V- und H-kanonischen Strukturen weisen folgende gemeinsame Eigenschaften auf:
  - Zwischen jedem Eingang und jedem Ausgang gibt es ein Teilsystem ( $p \times m$  Teilsysteme), die gegebenenfalls auch identisch Null sein können.
  - Zwischen den Teilsystemen gibt es keine anderen Kopplungen, als die Verzweigungen und Summationen an den Ein- bzw. Ausgängen.
  - Die Strukturierung erfolgt auf den Ausgang bezogen.
  - Für jeden Ausgang gibt es eine Hauptstrecke. Die Hauptstrecken beginnen für jeden Ausgang bei einem anderen Eingang und sind vorwärts gerichtet. Ein- und Ausgang einer Hauptstrecke werden mit der gleichen Ordnungsnummer versehen. (Ist die Anzahl  $m$  der Eingänge größer als die Anzahl  $p$  der Ausgänge, sind die Eingänge abhängig und können bei linearen Systemen überlagert und auf  $p$  Eingänge reduziert werden. Der Fall  $m > p$  wird darum nicht weiter betrachtet.)
  - Die Teilsysteme, die keine Hauptstrecken darstellen, heißen Nebenstrecken und sind entweder vorwärts oder rückwärts gerichtet.
- Die P-kanonische Struktur zeichnet sich dadurch aus, dass alle Nebenstrecken vorwärts gerichtet sind.
- Die V-kanonische Struktur zeichnet sich dadurch aus, dass alle Nebenstrecken rückwärts gerichtet sind.
- Die H-kanonische Struktur zeichnet sich dadurch aus, dass
  - alle Nebenstrecken die mit ein und dem selben Ausgang verbunden sind entweder nur vorwärts oder nur rückwärts gerichtet sind,
  - alle rückwärts gerichteten Nebenstrecken von den vorwärts gerichteten Nebenstrecken beeinflusst werden,

---

<sup>1</sup>Mit dem Begriff kanonische Struktur eines Systems wird in der Regelungstechnik üblicherweise eine bestimmte Eigenschaft in der Darstellung bezeichnet, nicht jedoch eine Eindeutigkeit wie für die kanonische Form im mathematischen Sinne gefordert.

- alle vorwärts gerichteten Nebenstrecken von den rückwärts gerichteten Nebenstrecken unbeeinflusst sind und
- alle vorwärts gerichteten Hauptstrecken von den rückwärts gerichteten Nebenstrecken beeinflusst werden.

Die letzten zwei Anstriche sind kritikwürdig: Für eine vorwärts gerichtete Strecke steht die strukturelle Verknüpfung erst nach der Nummerierung der Ein- und Ausgänge bzw. erst nach der Entscheidung Haupt- oder Nebenstrecke fest.

Die Betrachtungen in diesem Bericht sind sowohl für zeitdiskrete als auch für zeitkontinuierliche Systeme gültig. Hier wird die zeitdiskrete Darstellung verwendet, weil die Unterraumalgorithmen i. Allg. zeitdiskrete Modelle nutzen. Die Priorität der Operatoren in den folgenden Gleichungen sei so, dass Matrizenprodukte vor Kronecker-Produkten und diese vor Punktprodukten ausgeführt werden (siehe Anhang A). Definition und Rechengesetze des Kronecker-Produkts  $\otimes$  sind im Anhang C und die des Punktprodukts  $\odot$  sind im Anhang D zusammengestellt.

Am einfachsten lassen sich die P-, V- und H-kanonische Struktur mit Übertragungsmatrizen darstellen (siehe Abbildungen 1, 2 und 3).

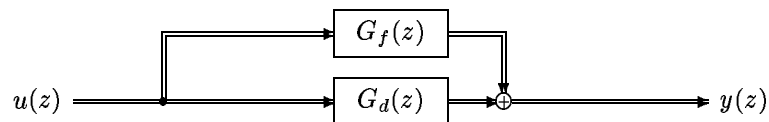


Abbildung 1: P-kanonische Struktur in Übertragungsmatrizen

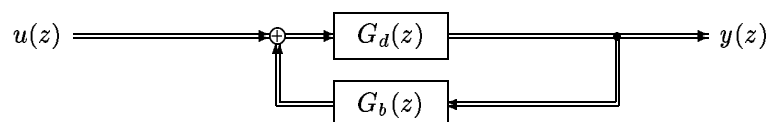


Abbildung 2: V-kanonische Struktur in Übertragungsmatrizen

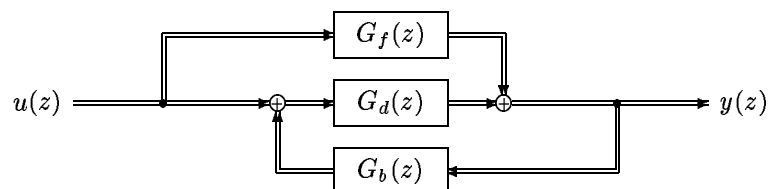


Abbildung 3: H-kanonische Struktur in Übertragungsmatrizen

Dabei bestehen folgende Forderungen an die Übertragungsmatrizen:

- für die P-kanonische Struktur

$$G(z) = G_d(z) + G_f(z) \quad (1)$$

$$G_d(z) \odot \mathbf{I}_{p \times m} = G_d(z) \quad (2)$$

$$G_f(z) \odot (\mathbf{1}_{p \times m} - \mathbf{I}_{p \times m}) = G_f(z) \quad (3)$$

$$G_d(z) \odot G_f(z) = \mathbf{0} \quad (4)$$

- für die V-kanonische Struktur

$$G(z) = (G_d^{-1}(z) - G_b(z))^{-1} = (\mathbf{I} - G_d(z)G_b(z))^{-1}G_d(z) \quad (5)$$

$$G_d(z) \odot \mathbf{I}_{p \times p} = G_d(z) \quad (6)$$

$$G_b(z) \odot (\mathbf{1}_{p \times p} - \mathbf{I}_{p \times p}) = G_b(z) \quad (7)$$

$$G_d(z) \odot G_b(z) = \mathbf{0} \quad (8)$$

- und für die H-kanonische Struktur

$$G(z) = (\mathbf{I} - G_d(z)G_b(z))^{-1}(G_d(z) + G_f(z)) \quad (9)$$

$$G_d(z) \odot \mathbf{I}_{p \times m} = G_d(z) \quad (10)$$

$$G_f(z) \odot (\mathbf{1}_{p \times m} - \mathbf{I}_{p \times m}) = G_f(z) \quad (11)$$

$$G_b(z) \odot (\mathbf{1}_{p \times m} - \mathbf{I}_{p \times m}) = G_b(z) \quad (12)$$

$$G_f(z)\mathbf{1} \odot G_d(z)\mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$G_b^T(z)\mathbf{1} \odot G_f(z)\mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Durch die Aufteilung der P-kanonischen Struktur in Haupt- und Nebenstrecken wird die Verwandtschaft der drei Strukturen deutlich. (2), (6) und (10) zeigen, dass die Übertragungsfunktionen der Hauptstrecken auf den Hauptdiagonalen liegen. (3) bzw. (4) sowie (7) bzw. (8) sowie (11) und (12) zeigen, dass zwischen einem Paar von Ein- und Ausgang die mit einer Hauptstrecke verbunden sind, nicht gleichzeitig eine Nebenstrecke bestehen kann. Für die H-kanonische Struktur wird mit (13) weiterhin gefordert, dass die vorwärts gerichteten Nebenstrecken nur auf Ausgänge wirken, die nicht mit einer Hauptstrecke verbunden sind, und mit (14) wird gefordert, dass die rückwärts gerichteten Nebenstrecken nur an Ausgängen beginnen, die mit einer Hauptstrecke verbunden sind. Zwischen einem Paar von Ein- und Ausgang existiert also nur entweder eine (vorwärts gerichtete) Hauptstrecke oder eine vorwärts gerichtete Nebenstrecke oder eine rückwärts gerichtete Nebenstrecke.

Für die P- und V-kanonischen Strukturen können die Steuereinrichtungen<sup>2</sup> zur Entkopplung der Hauptstrecken einfach angegeben werden. Für die P-kanonische 2×2-Struktur ist das in (15) und Abbildung 4 und für die V-kanonische 2×2-Struktur in (16) und Abbildung 5 dargestellt.

Entkopplungsbedingungen für die P-kanonische Struktur

$$\begin{aligned} G_{11}S_{12} + G_{12}S_{22} &= 0 \\ G_{22}S_{21} + G_{21}S_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

---

<sup>2</sup>Steuereinrichtung wird hier als Oberbegriff für Einrichtungen zur Steuerung im offenen und Regelung im geschlossenen Wirkungskreis genutzt.

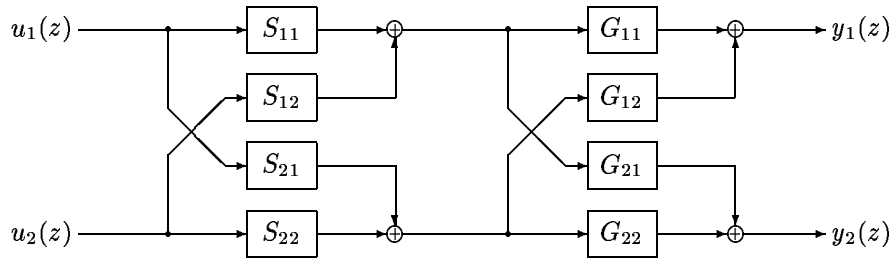


Abbildung 4: P-kanonische Struktur mit Steuereinrichtungen zur Entkopplung

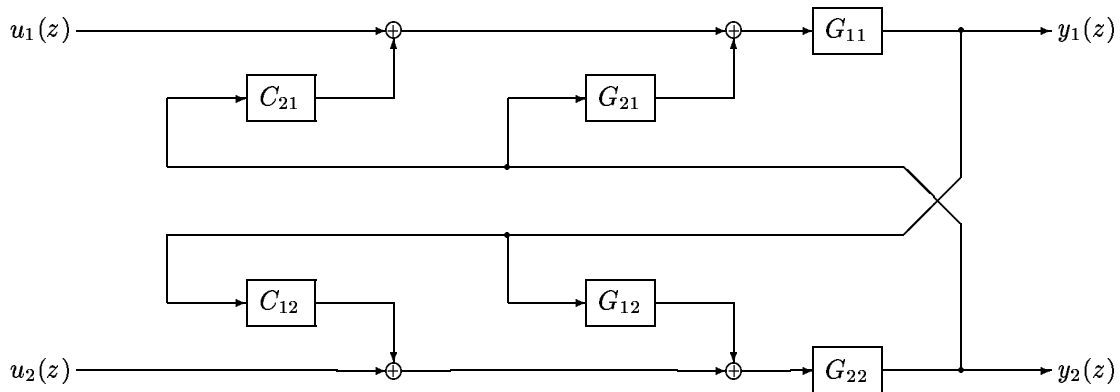


Abbildung 5: V-kanonische Struktur mit Steuereinrichtungen zur Entkopplung

Entkopplungsbedingungen für die V-kanonische Struktur

$$\begin{aligned} G_{12} + C_{12} &= 0 \\ G_{21} + C_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Allgemein gelten die  $m \times (m - 1)$  Entkopplungsbedingungen<sup>3</sup>

- für die P-kanonische Struktur<sup>4</sup>

$$G(z)S(z) = (G_d(z) + G_f(z))(S_d(z) + S_f(z)) = D(z) \quad , \quad (17)$$

wobei  $D(z)$  eine beliebige Diagonalmatrix ist, welche die  $m$  Freiheitsgrade in (17) beschreibt und mit

$$S(z) = G(z)^{-1}D(z) \quad (18)$$

eine hinreichende und notwendige Bedingung formuliert ist;

- und für die V-kanonische Struktur

$$G_f(z) + C_f(z) = 0 \quad . \quad (19)$$

<sup>3</sup>Um uninteressante Komplikationen zu vermeiden, wird  $m = p$  vorausgesetzt.

<sup>4</sup>Die Realisierung sei hier sekundär. Für eine exakte Realisierung muss das System sprungfähig, minimalphasig und Totzeitfrei sein. Die vollständige Entkopplung und die optimale Realisierung für nicht sprungfähige Systeme sind aufwendig.

Diese Entkopplungsbedingungen bleiben für die H-kanonische Struktur in Konjunktion erhalten, d. h. (17) und (19) müssen erfüllt sein. Wegen (14) stellen (17) und (19) weiterhin insgesamt  $m \times (m - 1)$  Gleichungen dar.

Die H-kanonische Struktur kann nicht auf einfachem systematischem Weg in eine MIMO-Zustandsraumdarstellung überführt werden. Darum wird eine zu P- und V-kanonischen Strukturen übergeordnete Struktur gesucht, die gleiche Entkopplungsbedingungen stellt und systematisch in eine Zustandsraumdarstellung überführbar ist.

## 4 Kombinierte Struktur und MIMO-Zustandsraumdarstellung

### 4.1 Überführung der kombinierten Struktur in die MIMO-Zustandsraumdarstellung

Die hier vorgeschlagene kombinierte Struktur schließt die P-kanonische und die V-kanonische Struktur als Spezialfälle mit ein. Außerdem ist diese Struktur unabhängig davon, welches vorwärts gerichtete Teilsystem als Haupt- oder Nebenstrecke betrachtet wird. Die kombinierte Struktur ist in Abbildung 6 dargestellt.

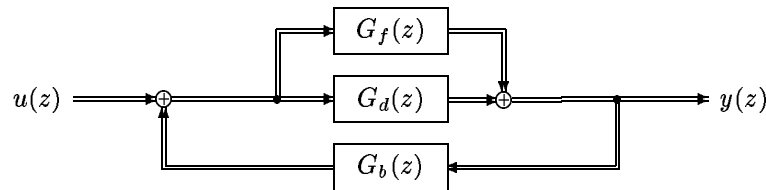


Abbildung 6: kombinierte Struktur in Übertragungsmatrizen

Zu beachten ist, dass weiterhin die Bedingungen (10) bis (14) gelten. Mit  $G_P(z) = G_f(z) + G_d(z)$  besteht dieses System einfach aus einem vorwärts und einem rückwärts gerichteten Teilsystem (siehe Abbildung 7).

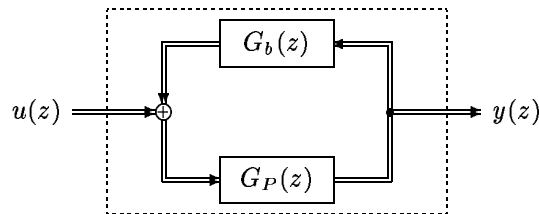


Abbildung 7: kombinierte Struktur, aufgeteilt in vorwärts und rückwärts gerichtetes Teilsystem

Für die kombinierte (P- und V-kanonische) Struktur, soll nun die Struktur der Systemmatrix der MIMO-Zustandsraumdarstellung ermittelt werden. Die Variationsmöglichkeiten für die kombinierte Struktur lassen sich mit Strukturmatrizen beschreiben, deren Elemente 0 oder 1 sein können.

$$S = (s_{ji}) \quad \text{mit} \quad s_{ji} = \begin{cases} 1 & : \text{Kopplung zwischen Ausgang } j \text{ und Eingang } i \\ 0 & : \text{keine Kopplung zwischen Ausgang } j \text{ und Eingang } i \end{cases} \quad (20)$$

Die Strukturmatrizen  $S$  beziehen sich immer auf das Gesamtsystem, (gestrichelte Linie in Abbildung 7,) egal ob sie den vorwärts oder den rückwärts gerichteten Teil des Systems charakterisieren. Alle Strukturmatrizen  $S$  sind demnach von gleicher Dimension. Die grundsätzliche Existenz einer Kopplung wird durch (20) abgebildet. Entsprechend beschreiben

- $S_d = \mathbf{I}_{p \times m}$  die Existenz von Hauptstrecken,
- $S_f$  mit  $S_d \odot S_f = \mathbf{O}_{p \times m}$  die Existenz von vorwärts gerichteten Nebenstrecken,
- $S_P = S_d + S_f$  die Existenz aller vorwärts gerichteten Strecken und
- $S_b$  mit  $S_P \odot S_b = \mathbf{O}_{p \times m}$  die Existenz von rückwärts gerichteten Nebenstrecken.



Mit  $S_d = I_{p \times m}$  sind rückwärts gerichtete Hauptstrecken ausgeschlossen. Für die weiteren Betrachtungen können die Bedingungen (10) bis (14) abschwächen werden. Obgleich aus praktischer Sicht nur vorwärts gerichtete Hauptstrecken sinnvoll sind, ist lediglich die Forderung

$$S_P \odot S_b = O_{p \times m} \quad (21)$$

notwendig, d. h. jede Kopplung kann nur vorwärts oder rückwärts gerichtet oder nicht vorhanden sein. Sind alle Kopplungen vorhanden gilt

$$S_P + S_b = 1_{p \times m} \quad (22)$$

und  $S_b$  ist mit  $S_P$  eindeutig bestimmt. Wenn mit  $S$  angegeben ist, welche Kopplungen existieren und mit  $S_p$  welche Kopplungen vorwärts gerichtet sind, falls sie existieren, berechnen sich  $S_P$  und  $S_b$  nach

$$S_P = S \odot S_p \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_b &= S \odot (1_{p \times m} - S_p) \\ &= S - S_P \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

Die Zustände der vorwärts gerichteten Kopplungen werden mit  $x_{Pji}$  bezeichnet und die der rückwärts gerichteten Kopplungen mit  $x_{bji}$ . Dabei sind

$$x_{Pji}[k] \equiv \underline{0} \quad \text{für} \quad s_{Pji} = 0 \quad \text{und} \quad x_{bji}[k] \equiv \underline{0} \quad \text{für} \quad s_{bji} = 0 \quad . \quad (25)$$

Für jeden Zustandsvektor eines Teilsystems, der identisch Null ist, muss die Eingangsmatrix  $b_{ji}$  gleich Null sein, und sind die Systemmatrix  $A_{ji}$  und die Ausgangsmatrix  $c_{ji}$  beliebig. Alle Matrizen der Zustandsraumdarstellung der nicht existierenden Teilsysteme seien gleich Null.

$$\begin{aligned} A_{Pji} = O \quad \text{und} \quad b_{Pji} = \underline{0} \quad \text{und} \quad c_{Pji} = \underline{0} \quad \text{für} \quad s_{Pji} = 0 \\ A_{bji} = O \quad \text{und} \quad b_{bji} = \underline{0} \quad \text{und} \quad c_{bji} = \underline{0} \quad \text{für} \quad s_{bji} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Mit diesen Matrizen und Zustandsvektoren lässt sich die kombinierte Struktur in MIMO-Zustandsraumdarstellung entsprechend Abbildung 8 darstellen. Daraus kann abgelesen werden

$$\begin{aligned} x_{Pji}[k+1] &= A_{Pji}x_{Pji}[k] + b_{Pji} \sum_{l=1}^p c_{bli}^T x_{bli}[k] + b_{Pji} u_i[k] \\ x_{bji}[k+1] &= A_{bji}x_{bji}[k] + b_{bji} \sum_{l=1}^m c_{Pjl}^T x_{Pjl}[k] + \underline{0} \\ y_j[k] &= \sum_{l=1}^m c_{Pjl}^T x_{Pjl}[k] \end{aligned} \quad (27)$$

Die Summendarstellung (27) ist unübersichtlich und für die verfolgte Zielstellung unhandlich. Sie enthält keine Strukturterme und welche Elemente Null sind ist nicht ersichtlich. Darum wird im folgenden Abschnitt eine übersichtliche und praktikable Matrizendarstellung zur Beschreibung der strukturierten MIMO-Zustandsraumdarstellung hergeleitet.

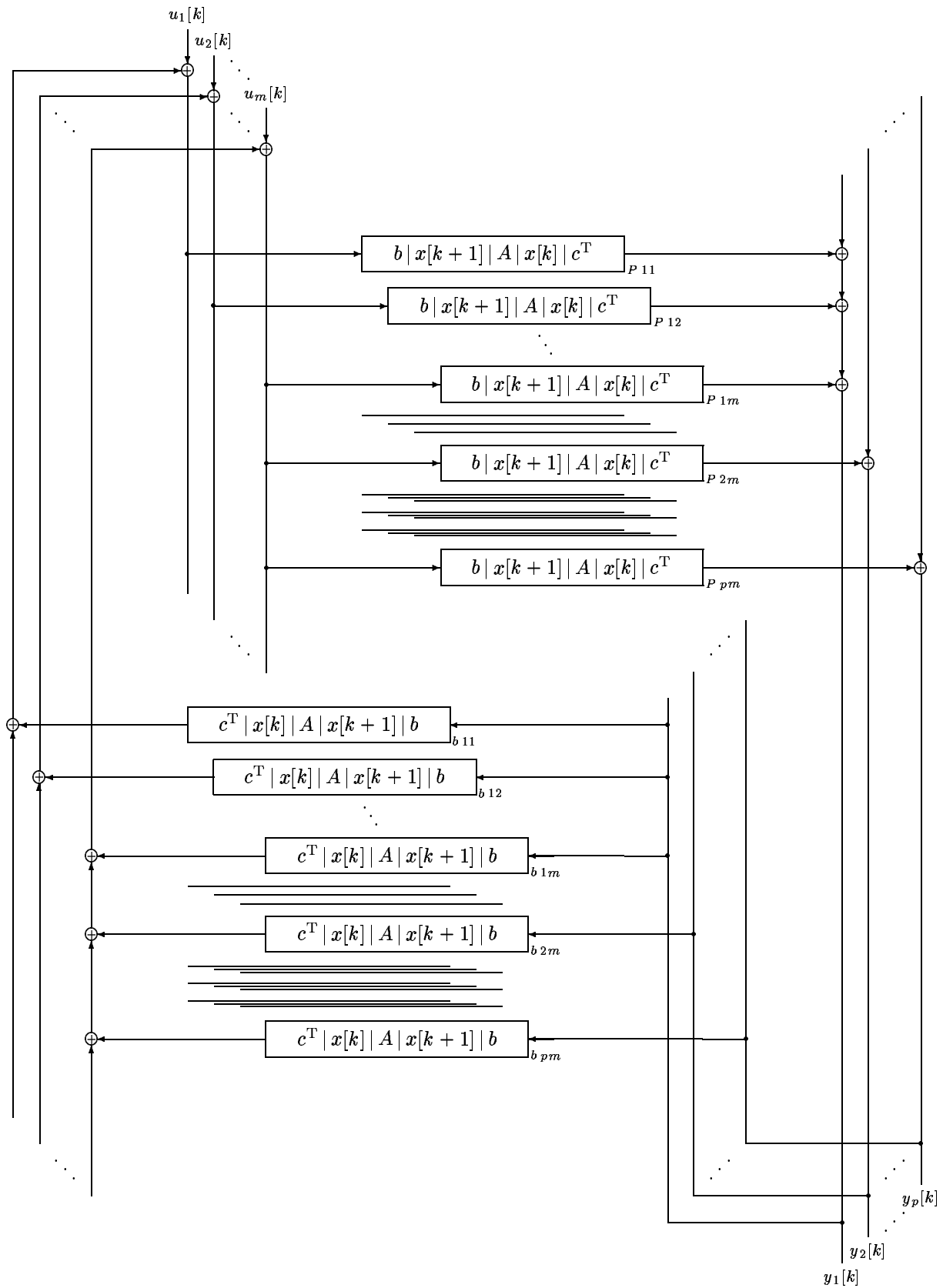


Abbildung 8: kombinierte Struktur aus SISO-Teilsystemen

## 4.2 Symbolische Generierung der MIMO-Zustandsraumdarstellung

Zur effektiven Darstellung eignen sich symbolische Matrizen. Obwohl die Elemente  $\{j_i\}$  dieser Matrizen selbst Matrizen bzw. Vektoren sind, werden sie wie einfache Elemente behandelt, d. h. bei Vektorisierung und Diagonalisierung werden sie nicht weiter aufgelöst. Bei numerischen Blockmatrizen müssen die Matrizenblöcke einer Zeile in der Zeilendimension und die Matrizenblöcke einer Spalte in der Spaltendimension übereinstimmen. Diese Beschränkung besteht bei symbolischen Matrizen nicht. Die (Matrizen-)Dimension der Elemente ist beliebig, unter der Bedingung, dass sich das Ergebnis der durchgeführten symbolischen Operation auflösen lässt. Diese Bedingung ist im hier betrachteten Fall immer gegeben, da (27) nur anders formuliert ist.

Die Zustandsvektoren und die Matrizen der Zustandsraumdarstellung der Teilsysteme werden zu symbolischen Blockmatrizen zusammengefasst.

$$\begin{aligned} X_P[k] &= \{x_{P\ j_i}[k]\} \quad , \quad A_P = \{A_{P\ j_i}\} \quad , \quad B_P = \{b_{P\ j_i}\} \quad , \quad C_P = \{c_{P\ j_i}^T\} \\ X_b[k] &= \{x_{b\ j_i}[k]\} \quad , \quad A_b = \{A_{b\ j_i}\} \quad , \quad B_b = \{b_{b\ j_i}\} \quad , \quad C_b = \{c_{b\ j_i}^T\} \end{aligned} \quad (28)$$

Dabei bezieht sich die Indizierung, (Ausgang  $j$  und Eingang  $i$ ), wie bei den schon eingeführten Strukturmatrizen  $S$ , immer auf das Gesamtsystem. Die Dimension aller Strukturmatrizen und der Matrizen in (28) ist gleich. Nur die Elemente sind verschiedener Art. Bei den Strukturmatrizen sind es numerische Binärzahlen und bei den Matrizen in (28) sind es symbolische Vektoren oder Matrizen.

Für eine erste Darstellung der Systemmatrix kann ein erweiterter Zustandsvektor genutzt werden

$$\begin{pmatrix} \text{vec } X_P \\ \text{vec } X_b \end{pmatrix} \quad , \quad (29)$$

bei dem wegen (21) mindestens die Hälfte aller Elemente Null sind. Für diesen Zustandsvektor stellen die Terme aus (27), die Zustände mit Folgezuständen verbinden, eine Systemmatrix dar (siehe (30) Seite 13).

Diese Systemmatrix kann auch aus Abbildung 8 direkt abgelesen werden. Die Darstellung benötigt durch die doppelte Anzahl von Zeilen und Spalten zwar mehr Platz, dafür erhält die Systemmatrix (30) aber eine systematische Belegung. Sie besteht aus vier großen Blöcken.

$$A = \begin{pmatrix} A_{PP} & \vdots & A_{Pb} \\ \text{-----} & & \text{-----} \\ A_{bP} & \vdots & A_{bb} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Die Blöcke  $A_{PP}$  und  $A_{bb}$  sind Diagonalmatrizen und beschreiben den Einfluss der Zustände innerhalb der Teilsysteme.

$$A_{PP} = \text{diag}(\text{vec } A_P) \quad , \quad A_{bb} = \text{diag}(\text{vec } A_b) \quad (32)$$

Der Block  $A_{Pb}$  beschreibt den Einfluss der Zustände der rückwärts gerichteten Teilsysteme auf die Zustände der vorwärts gerichteten Teilsysteme und ist eine diagonale Blockmatrix.

$$A_{Pb} = (\text{vec } B_P)(\text{vec } C_b)^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p} \quad (33)$$

Der Block  $A_{bP}$  beschreibt den Einfluss der Zustände der vorwärts gerichteten Teilsysteme auf die Zustände der rückwärts gerichteten Teilsysteme und ist eine Matrix aus Diagonalblöcken.

$$A_{bP} = (\text{vec } B_P)(\text{vec } C_b)^T \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes \mathbf{I}_p \quad (34)$$



Direkte Kopplungen von einem rückwärts gerichteten Teilsystem auf ein anderes rückwärts gerichtetes Teilsystem bzw. von einem vorwärts gerichteten Teilsystem auf ein anderes vorwärts gerichtetes Teilsystem gibt es strukturbedingt nicht.

Für die Eingangsmatrix findet die Betrachtungen analog statt. Die erweiterte Zustandsgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} \text{vec } X_P[k+1] \\ \text{vec } X_b[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{diag}(\text{vec } A_P) \\ \text{vec } B_b \text{vec}^T C_P \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes I_p \end{pmatrix} \text{vec } X_P[k] \\ + \begin{pmatrix} \text{vec } B_P \text{vec}^T C_b \odot I_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p} \\ \text{diag}(\text{vec } A_b) \end{pmatrix} \text{vec } X_b[k] \quad . \quad (35) \\ + \begin{pmatrix} \text{vec } B_P \mathbf{1}_m^T \odot I_m \otimes \mathbf{1}_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u[k]$$

Wegen (21) und (25) kann mit Hilfe der Strukturmatrizen  $S_P$  und  $S_b$  die Gleichung (35) auch für den nicht erweiterten Zustandsvektor

$$x = \text{vec } X_P + \text{vec } X_b \quad (36)$$

aufgestellt werden.

$$x[k+1] = \begin{pmatrix} \text{diag}(\text{vec}(A_P \odot S_P)) \\ + \text{vec}(B_b \odot S_b) \text{vec}^T(C_P \odot S_P) \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes I_p \\ + \text{vec}(B_P \odot S_P) \text{vec}^T(C_b \odot S_b) \odot I_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p} \\ + \text{diag}(\text{vec}(A_b \odot S_b)) \end{pmatrix} x[k] \\ + \begin{pmatrix} \text{vec}(B_P \odot S_P) \mathbf{1}_m^T \odot I_m \otimes \mathbf{1}_p \end{pmatrix} u[k] \quad (37)$$

Um die Struktur zu verdeutlichen, wird die Diagonalisierung aufgelöst und (37) umgestellt.

$$x[k+1] = \begin{pmatrix} \text{vec } A_P \text{vec}^T \mathbf{1}_{p \times m} \odot \text{vec } S_P \text{vec}^T \mathbf{1}_{p \times m} \odot I_m \otimes I_p \\ + \text{vec } B_b \text{vec}^T C_P \odot \text{vec } S_b \text{vec}^T S_P \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes I_p \\ + \text{vec } B_P \text{vec}^T C_b \odot \text{vec } S_P \text{vec}^T S_b \odot I_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p} \\ + \text{vec } A_b \text{vec}^T \mathbf{1}_{p \times m} \odot \text{vec } S_b \text{vec}^T \mathbf{1}_{p \times m} \odot I_m \otimes I_p \end{pmatrix} x[k] \\ + \begin{pmatrix} \underbrace{\text{vec } B_P \mathbf{1}_m^T}_{\text{Term 1}} \odot \underbrace{\text{vec } S_P \mathbf{1}_m^T}_{\text{Term 2}} \odot \underbrace{I_m \otimes \mathbf{1}_p}_{\text{Term 3}} \end{pmatrix} u[k] \quad (38)$$

Term 1 beschreibt den Wert eines Elementes, Term 2 beschreibt die Belegung eines Elementes entsprechend der Strukturmatrizen und Term 3 beschreibt die Belegung eines Elementes entsprechend der angesetzten Struktur nach Abbildung 7 bzw. 8. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, werden zuerst die Terme 2 und 3 berechnet und miteinander verknüpft. Dazu sind nur Bitoperationen notwendig. Für jedes belegte Element wird dann der entsprechende (Blockmatrizen-) Wert  $A_{ji}$ ,  $b_{ji}$ ,  $c_{ji}$  bzw.  $b_{ji}c_{ji}^T$  eingesetzt.

Mit

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \text{vec } A_P + \text{vec } A_b \\ \vec{B} &= \text{vec } B_P + \text{vec } B_b \\ \vec{C} &= \text{vec } C_P + \text{vec } C_b \\ \vec{S} &= \text{vec } S_P + \text{vec } S_b \\ \vec{S}_P &= \text{vec } S_P \\ \vec{S}_\times &= \text{vec } S_P \text{vec}^T S_b \end{aligned} \quad (39)$$

kann die Zustandsgleichung kürzer geschrieben werden.

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \left( \text{diag}(\vec{A} \odot \vec{S}) + \vec{B}\vec{C}^T \odot (\vec{S}_x^T \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes \mathbf{I}_p + \vec{S}_x \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p}) \right) x[k] \\ &\quad + \left( (\vec{B} \odot \vec{S}_P) \mathbf{1}_m^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_p \right) u[k] \end{aligned} \quad (40)$$

Die Vektoren  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{C}$  tragen keine Indizes ( $P$  oder  $b$ ) mehr. Die Unterscheidung der symbolischen Matrizen des vorwärts und rückwärts gerichteten Teilsystem ist nur zur Herleitung, nicht jedoch zur Berechnung notwendig. Die Matrizen der Zustandsraumdarstellung eines SISO-Teilsystems werden als Element in jeweils eine Matrix geschrieben, egal ob das SISO-Teilsystems vorwärts oder rückwärts gerichtet ist. Die Information über die Richtung des Teilsystems steckt in den Strukturmatrizen.

Für das MIMO-Zustandsgleichungssystem sind noch die Ausgangsmatrix  $C$  und die Durchgangsmatrix  $D$  notwendig. Die Ausgangsmatrix wird analog der obigen Vorgehensweise hergeleitet.

$$C = \left( \mathbf{1}_p (\vec{C} \odot \vec{S}_P)^T \odot \mathbf{1}_m^T \otimes \mathbf{I}_p \right) \quad (41)$$

Für die Durchgangsmatrix wird, im Sinne der Superposition, der sprungfähige Teil des System separat betrachtet. Der sprungfähige Teil des System beeinflusst die Zustände nicht und wird nicht von den Zuständen beeinflusst. Mit  $v_s$  als Eingangsgröße der vorwärts gerichteten Teilsysteme und  $r_s$  als Ausgangsgröße der rückwärts gerichteten Teilsysteme des sprungfähigen Teils des Systems folgt:

$$\begin{aligned} y_s &= D_P v_s \quad , \quad v_s = u + r_s \quad , \quad r_s = D_b^T y_s \\ y_s &= (\mathbf{I} - D_P D_b^T)^{-1} D_P u \\ D &= (\mathbf{I} - (D_P \odot S_P)(D_b \odot S_b)^T)^{-1} (D_P \odot S_P) \end{aligned} \quad (42)$$

Die Durchgangsmatrix  $D$  existiert nur wenn die Inverse von  $\mathbf{I} - D_P D_b^T$  existiert. Durch die Rückkopplungen sind geschlossene Wirkungskreise innerhalb des Mehrgrößensystems möglich. Dadurch kann bei endlicher Einzelverstärkung die Gesamtverstärkung unendlich werden. Außerdem ist zu erkennen, dass sich keine Strukturterme abspalten lassen. Die Durchgangsmatrix wird also i. Allg. vollständig oder zumindest unregelmäßig besetzt sein.

Die umgekehrte Aufgabe, bei gegebener Durchgangsmatrix  $D$  des MIMO-Systems und gegebener Strukturmatrizen  $S_P$  und  $S_b$ , die Durchgangsmatrizen der Teilsysteme zu ermitteln, ist ebenfalls problematisch. Die Durchgangsmatrizen der Teilsysteme sind die Elemente von  $D_P$  und  $D_b$ .

$$(D_P \odot S_P)^{-1} - (D_b \odot S_b)^T = D^{-1} \quad (43)$$

Wenn es Matrizen  $D_P$  und  $D_b$  gibt die (43) erfüllen, sind diese i. Allg. nicht eindeutig. Darum ist es sinnvoll, nur die Durchgangsmatrix  $D$  des MIMO-Systems anzugeben. Das MIMO-Zustandsgleichungssystem mit kombinierter Struktur lautet:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \left( \text{diag}(\vec{A} \odot \vec{S}_+) + \vec{B}\vec{C}^T \odot (\vec{S}_x^T \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes \mathbf{I}_p + \vec{S}_x \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p}) \right) x[k] \\ &\quad + \left( (\vec{B} \odot \vec{S}_P) \mathbf{1}_m^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_p \right) u[k] \\ y[k] &= \left( \mathbf{1}_p (\vec{C} \odot \vec{S}_P)^T \odot \mathbf{1}_m^T \otimes \mathbf{I}_p \right) x[k] \\ &\quad + D u[k] \end{aligned} \quad (44)$$

Die Matrizen der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \begin{array}{l}
 \vec{A} \vec{1}_{p \times m}^T \odot \vec{S}_P \vec{1}_{p \times m}^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_p \\
 + \vec{B} \vec{C}^T \odot \vec{S}_b \vec{S}_P^T \odot \mathbf{1}_{m \times m} \otimes \mathbf{I}_p \\
 + \vec{B} \vec{C}^T \odot \vec{S}_P \vec{S}_b^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_{p \times p} \\
 + \vec{A} \vec{1}_{p \times m}^T \odot \vec{S}_b \vec{1}_{p \times m}^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_p
 \end{array} \right) \quad (45) \\
 B &= \vec{B} \underline{1}_m^T \odot \vec{S}_P \underline{1}_m^T \odot \mathbf{I}_m \otimes \underline{1}_p \\
 C &= \underline{1}_p \vec{C}^T \odot \underline{1}_p \vec{S}_P^T \odot \underline{1}_m^T \otimes \mathbf{I}_p
 \end{aligned}$$

können somit aus den Parametern der SISO-Teilsysteme und den Strukturmatrizen  $S_P$  und  $S_b$  berechnet werden. Im Folgenden wird das an drei Beispielen demonstriert.

## 5 Beispiele und Simulation

### Beispiel 1 P-kanonisches $3 \times 2$ System

Die Ordnung der Teilsysteme beträgt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11} : 3, \mathcal{S}_{12} : 1 \\ \mathcal{S}_{21} : 3, \mathcal{S}_{22} : 2 \\ \mathcal{S}_{31} : 2, \mathcal{S}_{32} : 2 \end{aligned} .$$

Die Strukturmatrizen für das p-kanonische System lauten

$$S_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die daraus resultierenden MIMO-Zustandsraummatrizen sind

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{11} & a_{13}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{11} & a_{22}^{11} & a_{23}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{11} & a_{32}^{11} & a_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}^{21} & a_{12}^{21} & a_{13}^{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}^{33} & a_{22}^{33} & a_{23}^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{33} & a_{32}^{33} & a_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{31} & a_{12}^{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^{31} & a_{22}^{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{22} & a_{12}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^{22} & a_{22}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{32} & a_{12}^{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^{32} & a_{22}^{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}^{11} & 0 \\ b_{21}^{11} & 0 \\ b_{31}^{11} & 0 \\ b_{11}^{21} & 0 \\ b_{21}^{21} & 0 \\ b_{31}^{21} & 0 \\ b_{11}^{31} & 0 \\ b_{21}^{31} & 0 \\ 0 & b_{11}^{12} \\ 0 & b_{11}^{22} \\ 0 & b_{21}^{22} \\ 0 & b_{11}^{32} \\ 0 & b_{21}^{32} \end{pmatrix} .$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^{11} & c_{12}^{11} & c_{13}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11}^{21} & c_{12}^{21} & c_{13}^{21} & 0 & 0 & c_{11}^{22} & c_{12}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}^{31} & c_{12}^{31} & 0 & 0 & 0 & c_{11}^{32} & c_{12}^{32} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ d^{21} & d^{22} \\ d^{31} & d^{32} \end{pmatrix}$$

Kennzeichnend für das P-Kanonische System ist, die Systemmatrix  $A$  ist blockdiagonal, die Eingangsmatrix  $B$  besteht aus diagonal angeordneten Spaltenblockvektoren und die Ausgangsmatrix  $C$  wird von einem Zeilenblockvektor, dessen Blöcke wiederum blockdiagonal sind, gebildet. •



**Beispiel 2** V-kanonisches  $2 \times 2$  System

Die Ordnung der Teilsysteme beträgt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11} : 3, \mathcal{S}_{12} : 1 \\ \mathcal{S}_{21} : 3, \mathcal{S}_{22} : 2 \end{aligned} .$$

Die Strukturmatrizen für das V-kanonische System lauten

$$S_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die daraus resultierenden MIMO-Zustandsraummatrizen sind

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{11} & a_{13}^{11} & b_{11}^{11}c_{11}^{21} & b_{11}^{11}c_{12}^{21} & b_{11}^{11}c_{13}^{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{11} & a_{22}^{11} & a_{23}^{11} & b_{21}^{11}c_{11}^{21} & b_{21}^{11}c_{12}^{21} & b_{21}^{11}c_{13}^{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{11} & a_{32}^{11} & a_{33}^{11} & b_{31}^{11}c_{11}^{21} & b_{31}^{11}c_{12}^{21} & b_{31}^{11}c_{13}^{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}^{21} & a_{12}^{21} & a_{13}^{21} & 0 & b_{11}^{21}c_{11}^{22} & b_{11}^{21}c_{12}^{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}^{33} & a_{22}^{33} & a_{23}^{33} & 0 & b_{21}^{21}c_{11}^{22} & b_{21}^{21}c_{12}^{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{33} & a_{32}^{33} & a_{33}^{33} & 0 & b_{31}^{21}c_{11}^{22} & b_{31}^{21}c_{12}^{22} \\ b_{11}^{12}c_{11}^{11} & b_{11}^{12}c_{12}^{11} & b_{11}^{12}c_{13}^{11} & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}^{12}b_{11}^{22} & a_{11}^{22} & a_{12}^{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}^{12}b_{21}^{22} & a_{21}^{22} & a_{22}^{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}^{11} & 0 \\ b_{21}^{11} & 0 \\ b_{31}^{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{11}^{22} \\ 0 & b_{21}^{22} \end{pmatrix} .$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^{11} & c_{12}^{11} & c_{13}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}^{22} & c_{12}^{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{-d^{11}}{d^{11}d^{12}d^{21}d^{22}-1} & \frac{-d^{11}d^{21}d^{22}}{d^{11}d^{12}d^{21}d^{22}-1} \\ \frac{-d^{11}d^{12}d^{22}}{d^{11}d^{12}d^{21}d^{22}-1} & \frac{-d^{22}}{d^{11}d^{12}d^{21}d^{22}-1} \end{pmatrix}$$

Kennzeichnend für das V-Kanonische System ist, die Systemmatrix  $A$  ist in ihrer Blockstruktur rotationssymmetrisch und die Struktur der Eingangsmatrix  $B$  ist gleich der transponierten Struktur der Ausgangsmatrix  $C$ . Außerdem ist die Belegung von  $B$  und  $C$  unvollständig blockdiagonal. •

**Beispiel 3** Kombiniertes  $4 \times 3$  System

Das System habe die Struktur entsprechend Abbildung 9. Damit lauten die Strukturmatrizen für das kombinierte System

$$S_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das System ist also nicht vollständig belegt. Die Teilsysteme  $\mathcal{S}_{12}$  und  $\mathcal{S}_{13}$  sind nicht vorhanden. Die MIMO-Zustandsraummatrizen lauten entsprechend (44) in Blockdarstellung:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11}C_{21} & 0 & B_{11}C_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & 0 & B_{21}C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{31}C_{21} & A_{31} & B_{31}C_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{41} & 0 & 0 & 0 & B_{41}C_{42} & 0 & 0 & 0 & B_{41}C_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22}C_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{32}C_{31} & 0 & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & 0 & B_{32}C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{42}C_{32} & A_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{23}C_{22} & 0 & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{33}C_{23} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{43}C_{23} & 0 & A_{43} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \\ 0 & 0 & B_{43} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{42} & 0 & 0 & 0 & C_{43} \end{pmatrix}$$

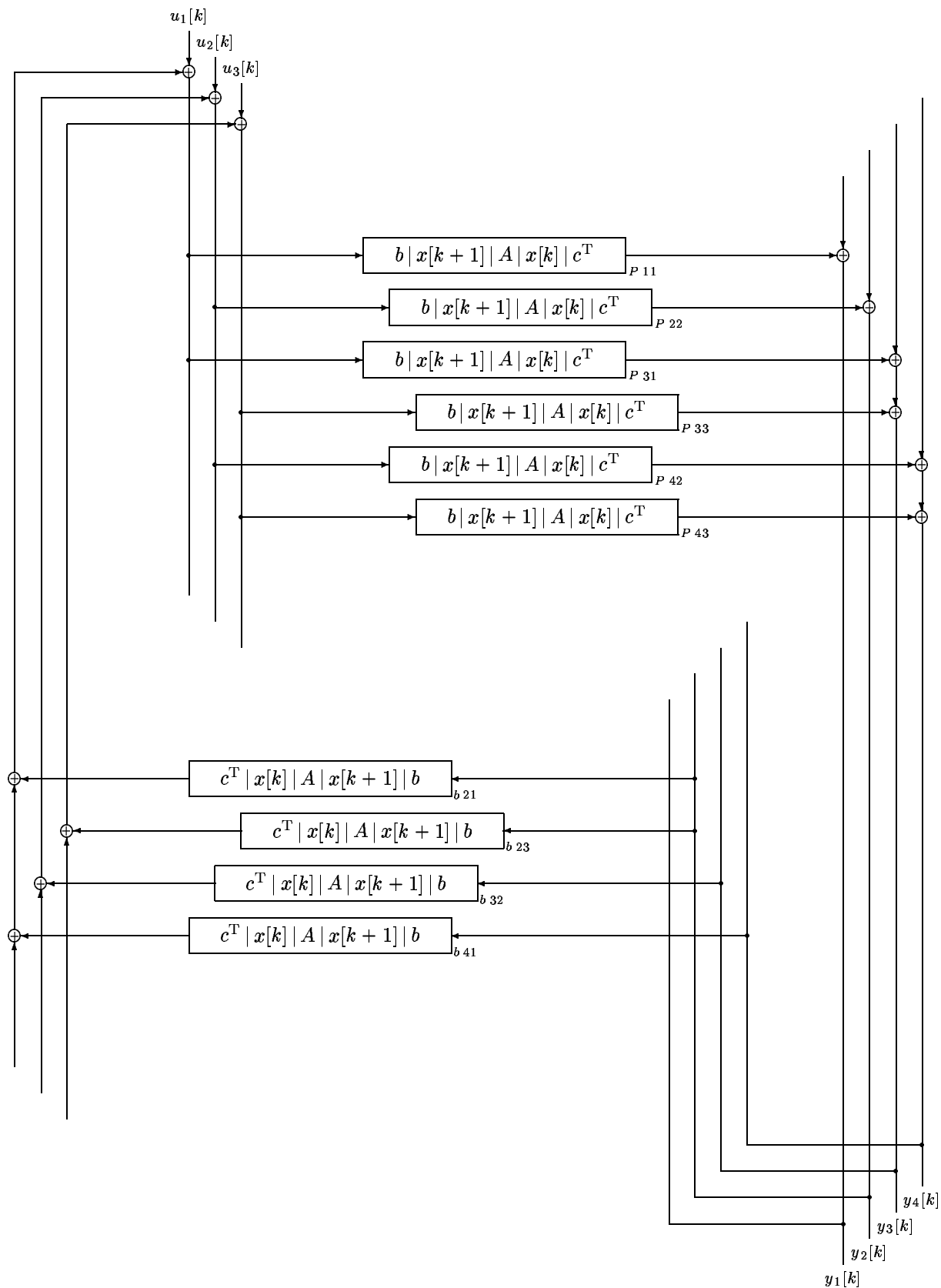


Abbildung 9: Beispielsystem dargestellt als Struktur aus SISO-Teilsystemen

Die einzelnen diskreten SISO-Teilsysteme seien gegeben als:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{pmatrix}, & B_{11} &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.04 \end{pmatrix}, & C_{11} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\
A_{21} &= \begin{pmatrix} 0.93 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0 & -(0.8^2 + 0.5^2) \\ 1 & 1 & (2 * 0.8) \end{pmatrix}, & B_{21} &= \begin{pmatrix} (0.2^2 + 0.5^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & C_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \\
A_{22} &= \begin{pmatrix} (2 * 0.95) & -(0.95^2 + 0.2^2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & B_{22} &= \begin{pmatrix} (0.05^2 + 0.2^2) \\ 0 \end{pmatrix}, & C_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{23} &= (0.8), & B_{23} &= (0.2), & C_{23} &= (1/2) \\
A_{31} &= (0.985), & B_{31} &= (0.015), & C_{31} &= (1/3) \\
A_{32} &= (0.98), & B_{32} &= (0.02), & C_{32} &= (1/2) \\
A_{33} &= \begin{pmatrix} (2 * 0.99) & -(0.99^2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & B_{33} &= \begin{pmatrix} (0.01^2) \\ 0 \end{pmatrix}, & C_{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{41} &= (0.6), & B_{41} &= (0.4), & C_{41} &= (1/5) \\
A_{42} &= (0.7), & B_{42} &= (0.3), & C_{42} &= (1/4) \\
A_{43} &= (0.9), & B_{43} &= (0.1), & C_{43} &= (1/3)
\end{aligned} \tag{46}$$

Die Durchgangsmatrizen seien alle identisch Null. Die Abtastperiode beträgt 1. Mit diesen Werten und nach Streichung der nicht vorhandenen Zustände (Teilsysteme  $\mathcal{S}_{12}$  und  $\mathcal{S}_{13}$ ) und nach Expansion der symbolischen Blockmatrizen ergeben sich folgende MIMO-Zustandsraummatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.1250 & 0 & 0.100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0.0100 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.75 & 0 & -0.890 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 & 1.0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0037 & 0.9850 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.600 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9 & -0.9425 & 0.0213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0067 & 0 & 0 & 0 & 0.9800 & 0 & 0 & 0 & 0.0200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1500 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2000 & 0 & 0 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 1.98 & -0.9801 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0500 & 0 & 0 & 0.9000 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.500 & 0 & 0 \\ 0.040 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0425 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1000 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.33 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Simulation zeigt, dass sich die gekoppelten SISO-Systeme und das MIMO-System gleich verhalten. Die Reaktion auf Sprünge an den drei Eingängen ist in Abbildung 10 dargestellt.

Aus den Simulationsdaten kann, z. B. mit dem N4SID-Unterraum-Algorithmus [OD96], das MIMO-System  $\tilde{S}$  geschätzt werden. Dabei liefert die Überprüfung der Singulärwerte der Blockhankelmatrix die Systemordnung 15. Das stimmt mit der vorgegebenen Struktur überein. Die Parameterschätzung liefert nahezu voll besetzte Systemmatrizen. Beide Systeme, das berechnete strukturierte MIMO-Zustandsraumsystem  $S$  und das geschätzte System  $\tilde{S}$  sind äquivalent, da die Simulation fehlerfreie Daten für die Schätzung liefert. Die Beziehung für äquivalente Systeme

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad , \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad , \quad \tilde{C} = CT \quad (47)$$

lautet umgeordnet

$$\begin{aligned} T\tilde{A} - AT &= O \\ T\tilde{B} &= B \\ CT &= \tilde{C} \end{aligned} \quad (48)$$

und vektorisiert

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^T \otimes I - I \otimes A) \text{vec}T &= O \\ (\tilde{B}^T \otimes I) \text{vec}T &= \text{vec}B \quad . \\ (I \otimes C) \text{vec}T &= \text{vec}\tilde{C} \end{aligned} \quad (49)$$

Zusammengefasst zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^T \otimes I & - & I \otimes A \\ \hline & \tilde{B}^T \otimes I & \\ \hline & & I \otimes C \end{pmatrix} \text{vec} T = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{vec} B \\ \text{vec} \tilde{C} \end{pmatrix} \quad (50)$$

entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösbarkeit im Vektor  $\text{vec} T$  von den Systemen  $\mathcal{S}$  und  $\tilde{\mathcal{S}}$  abhängt. In diesem Beispiel liefert die Berechnung der Matrix  $T$ , durch Lösung von (50), den Nachweis, dass sich das geschätzte System in die ursprüngliche SISO-Struktur zerlegen lässt.

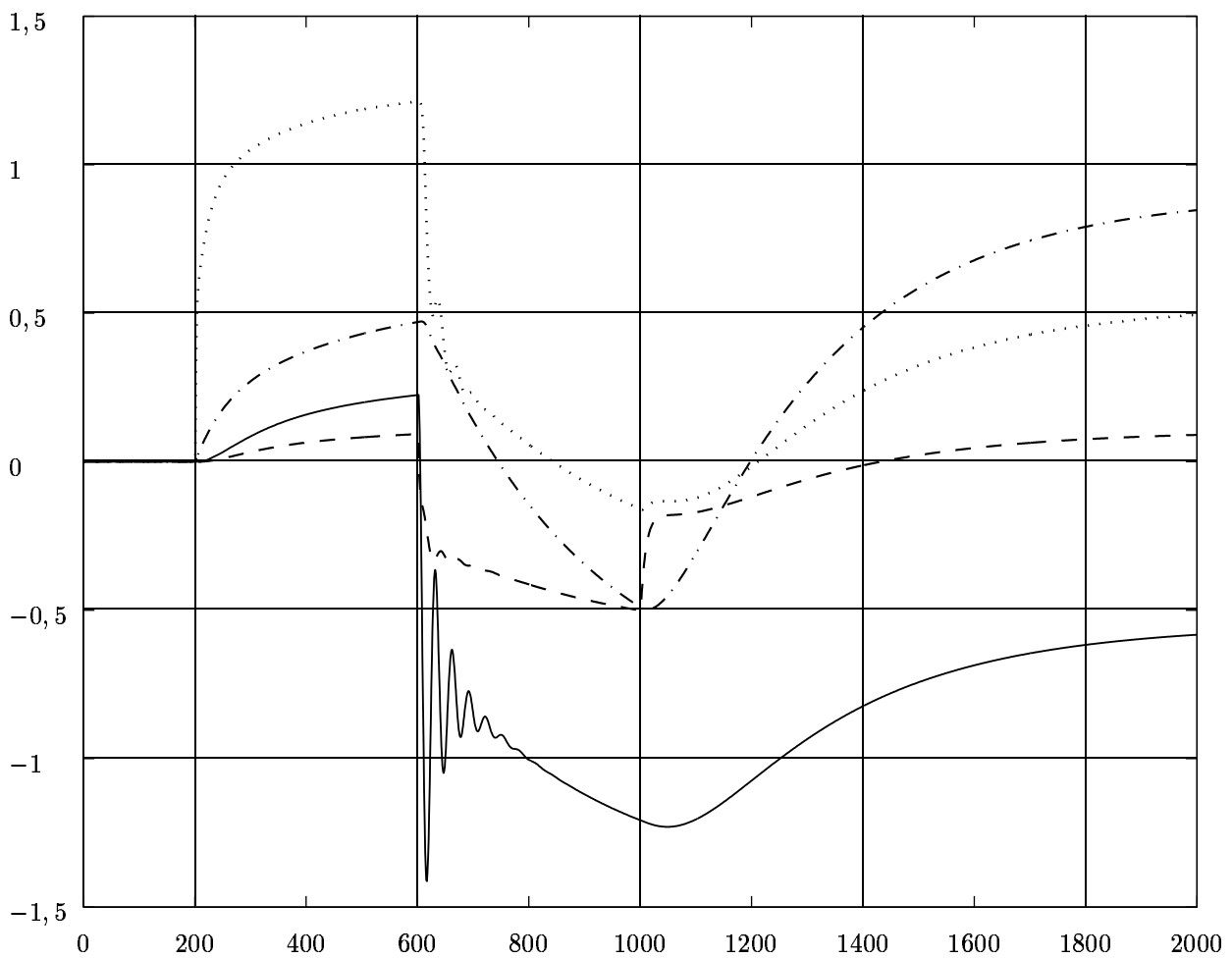


Abbildung 10: Simulation des Beispielsystems ( $y_1 \cdots$ ,  $y_2 \text{ —}$ ,  $y_3 \text{ - \cdot}$ ,  $y_4 \text{ - -}$ )

•

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Aus gemessenen E/A-Daten soll eine interpretierbare Struktur eines MIMO-Systems ermittelt werden. In diesem Beitrag wurde dazu der erste Schritt, die Überführung einer interpretierbaren Zerlegung des MIMO-Systems in eine strukturierte MIMO-Zustandsraumdarstellung, erarbeitet. Die interpretierbare Zerlegung ist eine Struktur aus vorwärts und rückwärts gerichteten SISO-Teilsystemen. Die MIMO-Zustandsraumdarstellung wird genutzt, da zu ihrer Identifikation nur ein einziger Strukturparameter, die Systemordnung, bestimmt werden muss. Der aktuelle Stand der Arbeiten ist in Abbildung 11 dargestellt.

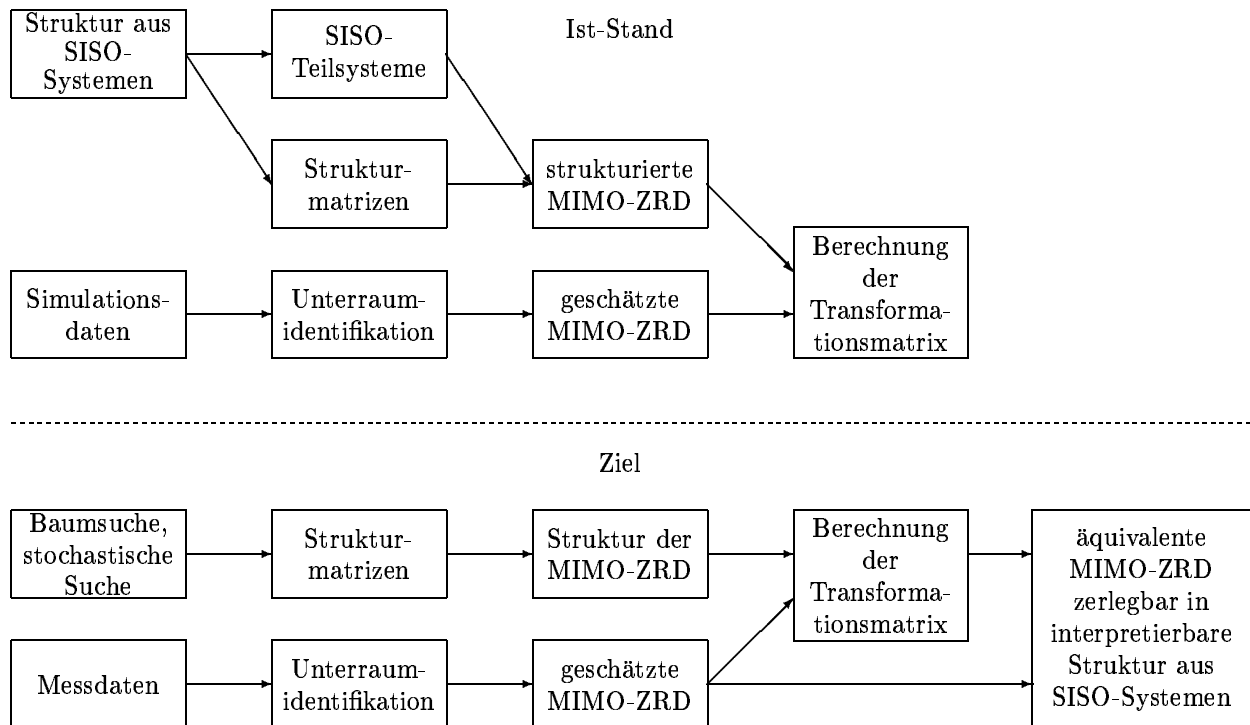


Abbildung 11: Ziel und Ist-Stand der Strukturanalyse linearer Mehrgrößensysteme

Derzeit erfolgt die Berechnung der Transformationsmatrix aus **zwei numerisch vorgegebenen** Systemen. Die nächste Aufgabe ist, eine Äquivalenztransformation zwischen der aus Daten geschätzten MIMO-Zustandsraumdarstellung und der vorgegebenen strukturierten MIMO-Zustandsraumdarstellung zu ermitteln. Dabei ist die geschätzte MIMO-Zustandsraumdarstellung **eine numerisch bekannte** Darstellung und die vorgegebene strukturierte MIMO-Zustandsraumdarstellung **eine reine Strukturvorgabe** ohne numerische Werte. Mit der Berechnung dieser Transformationsmatrix steht dann ein Verfahren zur Verfügung, mit dem eine interpretierbare Darstellung des linearen Mehrgrößensystems aus den Messdaten gewonnen werden kann.

## Literatur

- [Bau99] D. Bauer. Order estimation in the context of MOSEP subspace identification methods. *Karlsruhe, European Control Conference 31. August - 3. September 1999*, EUCA The European Union Control Association, VDI/VDE-Gesellschaft Mess- und Automatisierungstechnik (GMA), CD gma@vdi.de, 1999.
- [Bur84] H. L. Burmeister. *Theorie der automatischen Steuerung*, Jgg. 09B6 of *Lehrbriefe 1-7*. TUD, 1984.
- [FHM<sup>+</sup>99] W. Favoreel, S. Van Huffel, B. De Moor, V. Sima und M. Verhaegen. Comparative study between three subspace identification algorithms. *Karlsruhe, European Control Conference 31. August - 3. September 1999*, EUCA The European Union Control Association, VDI/VDE-Gesellschaft Mess- und Automatisierungstechnik (GMA), CD gma@vdi.de, 1999.
- [Mes60] M. D. Mesarovic. *The control of Multivariable systems*. Technology press research monographs. The Massachusetts Institute of Technology, 1960.
- [OD96] P. Van Overschee und B. De Moor. *Subspace identification for linear systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [OV94] B. Ottersten und M. Vibeberg. A subspace based instrumental variable method for state-space system identification. *SYSID '94, 10th IFAC Symposium on System Identification, Copenhagen, Denmark, 4-6 July 1994*, 2:139–144, 1994.
- [Unb93] R. Unbehauen. *Systemtheorie*. München/Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1993.
- [VWO97] M. Vibeberg, Bo Wahlberg und B. Ottersten. Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting. *Automatica*, 33(9):1603–1616, 1997.



## A Priorität der Operationen

Für alle Gleichungen und Terme in diesem Bericht gilt folgende Priorität der Rechenoperationen:

1. Klammer
2. benannte Rechenoperationen von links nach rechts bzw. von innen nach außen z. B.  $\text{vec} \text{diag}^T X_{nm} = \text{vec} ( (\text{diag}(X_{nm}))^T )$
3. Quotienten, Produkte, Matrizenprodukte
4. Kronecker-Produkt
5. Punktquotient, Punktprodukt
6. Subtraktion, Addition

Bei benannten Rechenoperationen ohne Klammersetzung gilt die Operation nur für das erste Argument nach dem Namen.

## B Diagonalisierungsoperatoren

$$\mathbf{I}_{a \times b} \stackrel{def}{=} (\delta_{ij})_{a \times b} \quad (51)$$

$$\text{diag}(d) \stackrel{def}{=} \underline{d} \mathbf{1}^T \odot \mathbf{I} = \mathbf{1} \underline{d}^T \odot \mathbf{I} = (d_i \delta_{ij})_{a \times a} \quad (52)$$

$$\text{diag}_{a \times b}(d) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \mathbf{1}_a \underline{d}_b^T \odot \mathbf{I}_{a \times b} = (d_j \delta_{ij})_{a \times b} & : d \in \mathbf{C}^b \cap a > b \\ \underline{d}_a \mathbf{1}_b^T \odot \mathbf{I}_{a \times b} = (d_i \delta_{ij})_{a \times b} & : d \in \mathbf{C}^a \cap a < b \end{cases} \quad (53)$$

$$\text{dg}(A_{a \times a}) \stackrel{def}{=} (A \odot \mathbf{I}) \mathbf{1} \quad (54)$$

$$\text{dg}(A_{a \times b}) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (\mathbf{I}_{b \times a} A) \mathbf{1}_b & : a > b \\ (A \mathbf{I}_{b \times a}) \mathbf{1}_a & : a < b \end{cases} \quad (55)$$

## C Vektorisierung und Kronecker-Produkt

$$A_{a \times b} \otimes B_{c \times d} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} B)_{a \cdot c \times b \cdot d} \quad (56)$$

$$A \otimes \mathbf{1} = A = \mathbf{1} \otimes A \quad (57)$$

$$(\mathbf{I} \otimes A^T) = (\mathbf{I} \otimes A)^T \quad (58)$$

$$(A^T \otimes \mathbf{I}) = (A \otimes \mathbf{I})^T \quad (59)$$

$$\text{vec } A_{a \times b} = \text{vec} \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_b \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_1 \\ \text{---} \\ A_2 \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ A_b \end{pmatrix}_{a \cdot b \times 1} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \text{vec } A_{a \times b} &= (\mathbf{I} \odot ((\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}) A (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}))) \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{I}_{a \cdot b} \odot ((\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})_{a \cdot b \times a} A_{a \times b} (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I})_{b \times a \cdot b})) \mathbf{1}_{a \cdot b} \\ &= (((\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}) A) \odot (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1})) \mathbf{1} \\ &= (((\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})_{a \cdot b \times a} A_{a \times b}) \odot (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1})_{a \cdot b \times b}) \mathbf{1}_b \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} A_{a \times b} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}^T) \text{diag}(\text{vec } A) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}^T) (\text{vec } A \mathbf{1}^T \odot \mathbf{I}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}^T) (\text{vec } A \mathbf{1}^T \odot (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}^T)_{a \times a \cdot b} \left( (\text{vec } A \mathbf{1}^T)_{a \cdot b \times b} \odot (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})_{a \cdot b \times b} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\text{vec } a_{b \times 1} = a_{b \times 1} \quad (63)$$

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec } B \quad (64)$$

$$\text{vec}(AB) = (\mathbf{I} \otimes A) \text{vec } B \quad (65)$$

$$= (B^T \otimes A) \text{vec } \mathbf{I} \quad (66)$$

$$= (B^T \otimes \mathbf{I}) \text{vec } A \quad (67)$$

$$\text{vec}(Ab) = Ab \quad (68)$$

$$\text{vec}(ab^T) = b \otimes a \quad (69)$$

$$\text{vec}(a^T B) = B^T a \quad (70)$$

## D Punktprodukt und Punktquotient

Hadamard-Produkt, Hadamard-Quotient<sup>5</sup>

$$(a_{ij}) \odot (b_{ij}) \stackrel{def}{=} (a_{ij} \cdot b_{ij}) \quad (71)$$

$$a \odot b = b \odot a \quad (72)$$

$$(a_{ij}) \oslash (b_{ij}) \stackrel{def}{=} (a_{ij}/b_{ij}) \quad | \quad b_{ij} \neq 0 \quad \forall ij \quad (73)$$

$$a \odot (b \otimes c) = (a \odot b) \otimes c = (a \otimes c) \odot b \quad (74)$$

$$\text{diag}(d) \stackrel{def}{=} d \underline{1}^T \odot I = \underline{1} d^T \odot I$$

$$A \odot I = A^T \odot I \quad (75)$$

$$\text{diag}(d)a = (d \underline{1}^T \odot I)a = a \odot d \quad (76)$$

$$a^T (d \underline{1}^T \odot I) = a^T \odot d^T \quad (77)$$

$$(c \underline{1}^T \odot I)A = A \odot c \underline{1}^T \quad (78)$$

$$A(c \underline{1}^T \odot I) = A \odot \underline{1} c^T \quad (79)$$

$$A(B \overset{\circ}{\otimes} \underline{1} c^T) = AB \overset{\circ}{\otimes} \underline{1} c^T \quad (80)$$

$$A(B \overset{\circ}{\otimes} c \underline{1}^T) = (A \overset{\circ}{\otimes} \underline{1} c^T)B \quad (81)$$

$$(B \overset{\circ}{\otimes} c \underline{1}^T)A = BA \overset{\circ}{\otimes} c \underline{1}^T \quad (82)$$

$$a^T (B \overset{\circ}{\otimes} \underline{1} c^T) = a^T B \overset{\circ}{\otimes} c^T \quad (83)$$

$$a^T (B \overset{\circ}{\otimes} c \underline{1}^T)a = (a^T \overset{\circ}{\otimes} c^T)B \quad (84)$$

$$(B \overset{\circ}{\otimes} \underline{1} c^T)a = B(a \overset{\circ}{\otimes} c) \quad (85)$$

$$(B \overset{\circ}{\otimes} c \underline{1}^T)a = Ba \overset{\circ}{\otimes} c \quad (86)$$

---

<sup>5</sup>Im Divisor werden alle Elemente verschieden von Null vorausgesetzt.

## E Umwandlung der E/A-Darstellung als Vektor-Differenzgleichungssystem in eine MIMO-Zustandsraumdarstellung mit gleichen Parametern

Betrachtet werden lineare, zeitinvariante Systeme ohne Totzeit mit konzentrierten Parametern. Das System habe  $m$  Eingänge,  $n$  Zustände und  $p$  Ausgänge. Das E/A-Verhalten des MIMO-Systems kann als Vektor-Differenzgleichungssystem dargestellt werden. Für ein System mit  $m$  Eingängen und  $p$  Ausgängen lauten die  $p$  Gleichungen

$$\begin{aligned}
& \alpha_{h\ 1\ q_1} y_1[k + q_1] + \cdots + \alpha_{h\ 1\ 1} y_1[k + 1] + \alpha_{h\ 1\ 0} y_1[k] \\
+ & \alpha_{h\ 2\ q_2} y_2[k + q_2] + \cdots + \alpha_{h\ 2\ 1} y_2[k + 1] + \alpha_{h\ 2\ 0} y_2[k] \\
& \vdots \\
+ & \alpha_{h\ p\ q_p} y_p[k + q_p] + \cdots + \alpha_{h\ p\ 1} y_p[k + 1] + \alpha_{h\ p\ 0} y_p[k] \\
& \qquad \qquad \qquad \beta_{h\ 1\ q_1} u_1[k + q_1] + \cdots + \beta_{h\ 1\ 1} u_1[k + 1] + \beta_{h\ 1\ 0} u_1[k] \\
= & \qquad \qquad \qquad + \beta_{h\ 2\ q_2} u_2[k + q_2] + \cdots + \beta_{h\ 2\ 1} u_2[k + 1] + \beta_{h\ 2\ 0} u_2[k] \\
& \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \qquad \qquad \qquad + \beta_{h\ m\ q_p} u_m[k + q_p] + \cdots + \beta_{h\ m\ 1} u_m[k + 1] + \beta_{h\ m\ 0} u_m[k]
\end{aligned} \tag{87}$$

$$\text{mit } h = 1, \dots, p \quad \text{und} \quad \alpha_{\dots q} = 1 \quad .$$

Mit  $a_{\cdot}[k+b] = a_{\cdot b}$ ,  $i = 1, \dots, m$  (Nummer des Eingangs),  $j = 1, \dots, p$  (Nummer des Ausganges),  $h = 1, \dots, p$  (Nummer der Gleichung),  $g = 1, \dots, q$  (Nummer der Ordnung) und der Einsteinischen Summenkonvention kann (87) kurz als Tensorgleichung geschrieben werden.

$$\alpha_{h j g} y_{j g} = \beta_{h i g} u_{i g} \tag{88}$$

Mit  $N_h = (\alpha_{h j g})$ ,  $Y = (y_{j g})$ ,  $Z_h = (\beta_{h i g})$ ,  $U = (u_{i g})$ , und dem Skalarprodukt für reelle Matrizen  $\langle A, B \rangle = \text{sp}(A^T B) = \underline{1}^T (A \odot B) \underline{1}$  kann (87) auch als Matrixgleichungssystem geschrieben werden.

$$\langle N_h, Y \rangle = \langle Z_h, U \rangle \tag{89}$$

Damit dieses Vektor-Differenzgleichungssystem in ein Zustandsgleichungssystem überführt werden kann, müssen die Ausgänge  $y$  entkoppelbar sein [Bur84]. Dann lässt sich das MIMO-System als  $p$  MISO-Systeme darstellen<sup>6</sup>.

$$\begin{aligned}
& \alpha_{j\ q} y_j[k + q] + \cdots + \alpha_{j\ 1} y_j[k + 1] + \alpha_{j\ 0} y_j[k] \\
& \qquad \qquad \qquad \beta_{j\ 1\ q} u_1[k + q] + \cdots + \beta_{j\ 1\ 1} u_1[k + 1] + \beta_{j\ 1\ 0} u_1[k] \\
= & \qquad \qquad \qquad + \beta_{j\ 2\ q} u_2[k + q] + \cdots + \beta_{j\ 2\ 1} u_2[k + 1] + \beta_{j\ 2\ 0} u_2[k] \\
& \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \qquad \qquad \qquad + \beta_{j\ m\ q} u_m[k + q] + \cdots + \beta_{j\ m\ 1} u_m[k + 1] + \beta_{j\ m\ 0} u_m[k]
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\text{mit } j = 1, \dots, p \quad \text{und} \quad \alpha_{\cdot q} = 1 \quad .$$

<sup>6</sup>Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  in (87) und (90) sind i. Allg. verschieden.

$$\alpha_{hg} y_{jg} = \beta_{hig} u_{ig}. \quad (91)$$

$$\underline{\alpha}_h^T y_j[k] = \text{sp}(Z_h^T U) \quad (92)$$

Einen einfachen Ansatz für die Zustände, der aus (92) die Zustandsraumdarstellung liefert, gibt es nicht. Es ist jedoch möglich aus der dualen Darstellung der Steuerbarkeitsnormalform des SISO-Systems eine Zustandsraumdarstellung des MISO-Systems herzuleiten, welche die gleichen Koeffizienten wie die E/A-Darstellung enthält. Dazu wird das MISO-System (92) als Überlagerung von  $i = 1, \dots, m$  SISO-Systeme geschrieben.

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_h^T y_{ji}[k] &= \beta_{hi}^T u_i[k] \\ y_j[k] &= \sum_{i=1}^m y_{ji}[k] \end{aligned} \quad (93)$$

Jedes dieser  $m$  SISO-Systeme kann im Zustandsraum als

$$\begin{aligned} \underline{x}[k+1]_i &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vdots \\ \hline \underline{1} & \vdots \end{pmatrix} \underline{\alpha}_h \underline{x}_i[k] + \underline{\beta}_{hi} u_i[k] \\ y_i &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vdots \\ \hline \underline{1} & \vdots \end{pmatrix} \underline{x}_i[k] \end{aligned} \quad (94)$$

dargestellt werden [Unb93]. Mit der Überlagerung der Zustände

$$\underline{x}[k] = \sum_{i=1}^m \underline{x}_i[k] \quad (95)$$

folgt daraus direkt für das MISO-System

$$\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vdots \\ \hline \underline{1} & \vdots \end{pmatrix} \underline{\alpha}_h \underline{x}[k] + \begin{pmatrix} \underline{\beta}_{h1} & \underline{\beta}_{h2} & \cdots & \underline{\beta}_{hm} \end{pmatrix} \underline{u}[k] \\ y[k] &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vdots \\ \hline \underline{1} & \vdots \end{pmatrix} \underline{x}[k] \end{aligned} \quad (96)$$

und mit

$$b_i = \beta_i - \alpha_i \beta_q \quad (97)$$

ergibt sich entsprechend für das sprungfähige MISO-System

$$\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vdots \\ \hline \underline{1} & \vdots \end{pmatrix} \underline{\alpha}_h \underline{x}[k] + \begin{pmatrix} b_{h1} & b_{h2} & \cdots & b_{hm} \end{pmatrix} \underline{u}[k] \\ y[k] &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vdots \\ \hline \underline{1} & \vdots \end{pmatrix} \underline{x}[k] + \left( \beta_{h1q}, \beta_{h2q}, \dots, \beta_{hmq} \right) \underline{u}[k] \end{aligned} \quad (98)$$

Die Zustände für die  $p$  verschiedenen MISO-Systeme, in die das MIMO-System zerlegt wurde, sind i. Allg. verschieden. Darum können sie nicht ohne weiteres überlagert werden. Die gemeinsame Darstellung aller

MISO-Systeme in einer Zustandsraumdarstellung erfordert eine blockdiagonale Darstellung.

$$\begin{aligned}
 \underline{x}[k+1] &= \begin{pmatrix} \underline{0}_{q_1-1}^T & \vdots & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{q_1-1} & & & & & \\ \hline 0 & \underline{0}_{q_2-1}^T & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_{q_2-1} & & & & \\ \hline 0 & 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0}_{q_p-1}^T & \alpha_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_{q_p-1} & & \end{pmatrix} \underline{x}[k] + \begin{pmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} & \cdots & \underline{b}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} & \cdots & \underline{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{b}_{p1} & \underline{b}_{p2} & \cdots & \underline{b}_{pm} \end{pmatrix} \underline{u}[k] \\
 \underline{y}[k] &= \begin{pmatrix} \underline{0}_{q_1-1}^T & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \underline{0}_{q_2-1}^T & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0}_{q_p-1}^T & 1 \end{pmatrix} \underline{x}[k] + \begin{pmatrix} \beta_{11q} & \beta_{12q} & \cdots & \beta_{1mq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{21q} & \beta_{22q} & \cdots & \beta_{2mq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{p1q} & \beta_{p2q} & \cdots & \beta_{pmq} \end{pmatrix} \underline{u}[k]
 \end{aligned} \tag{99}$$

Diese Darstellung entspricht einer P-kanonischen Struktur (Abbildung 13) mit den Teilsystemen  $S_{ji}$  entsprechend Abbildung 12.

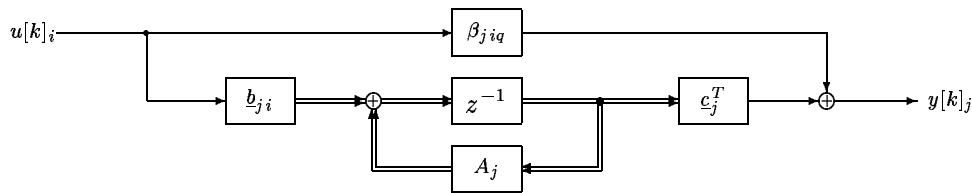


Abbildung 12: Teilsystem  $S_{ji}$

Dabei treten in den SISO-Teilsystemen sowohl die Systemmatrizen  $A_j$ , als auch der Ausgangsvektor  $\underline{c}_j^T$  mehrfach auf. Mit den Matrizenblöcken

$$\begin{aligned}
 A_j &= \begin{pmatrix} \underline{0}_{q_j-1}^T & \vdots & \alpha_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{q_j-1} & & \end{pmatrix}, & B_j &= \begin{pmatrix} \underline{b}_{j1} & \underline{b}_{j2} & \cdots & \underline{b}_{jm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\
 \underline{c}_j^T = C_j &= \begin{pmatrix} \underline{0}_{q_j-1}^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}, & D_j &= \begin{pmatrix} \beta_{j1q_j} & \beta_{j2q_j} & \cdots & \beta_{jm q_j} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{100}$$

wird in der Blockdarstellung die Aufteilung in parallele MISO-Systeme deutlich (Abbildung 14).

Die Darstellung nach (100) weist für das nicht sprungfähige System die gleichen Koeffizienten wie die E/A-Darstellung auf. Nachteilig ist jedoch, dass die Eingangsmatrix vollständig besetzt ist. Bei der P-kanonischen Struktur, mit Teilsystemen in Zustandsraumdarstellung für beliebige Koeffizienten, ist die Eingangsmatrix überwiegend mit Nullen besetzt (Abbildung 15).

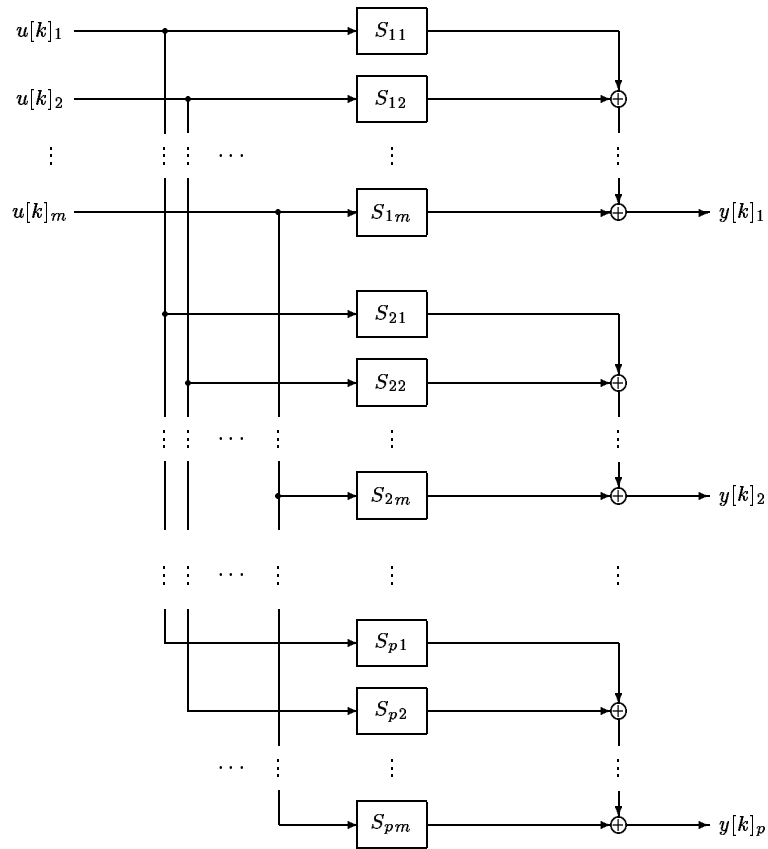


Abbildung 13: P-kanonische Struktur

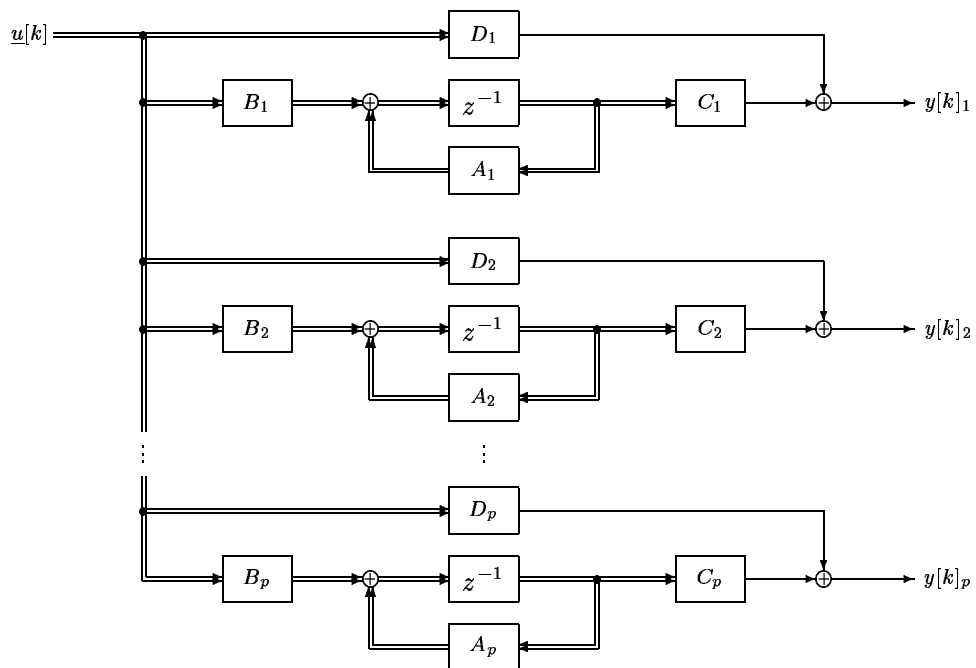


Abbildung 14: P-kanonische Struktur in Blockdarstellung



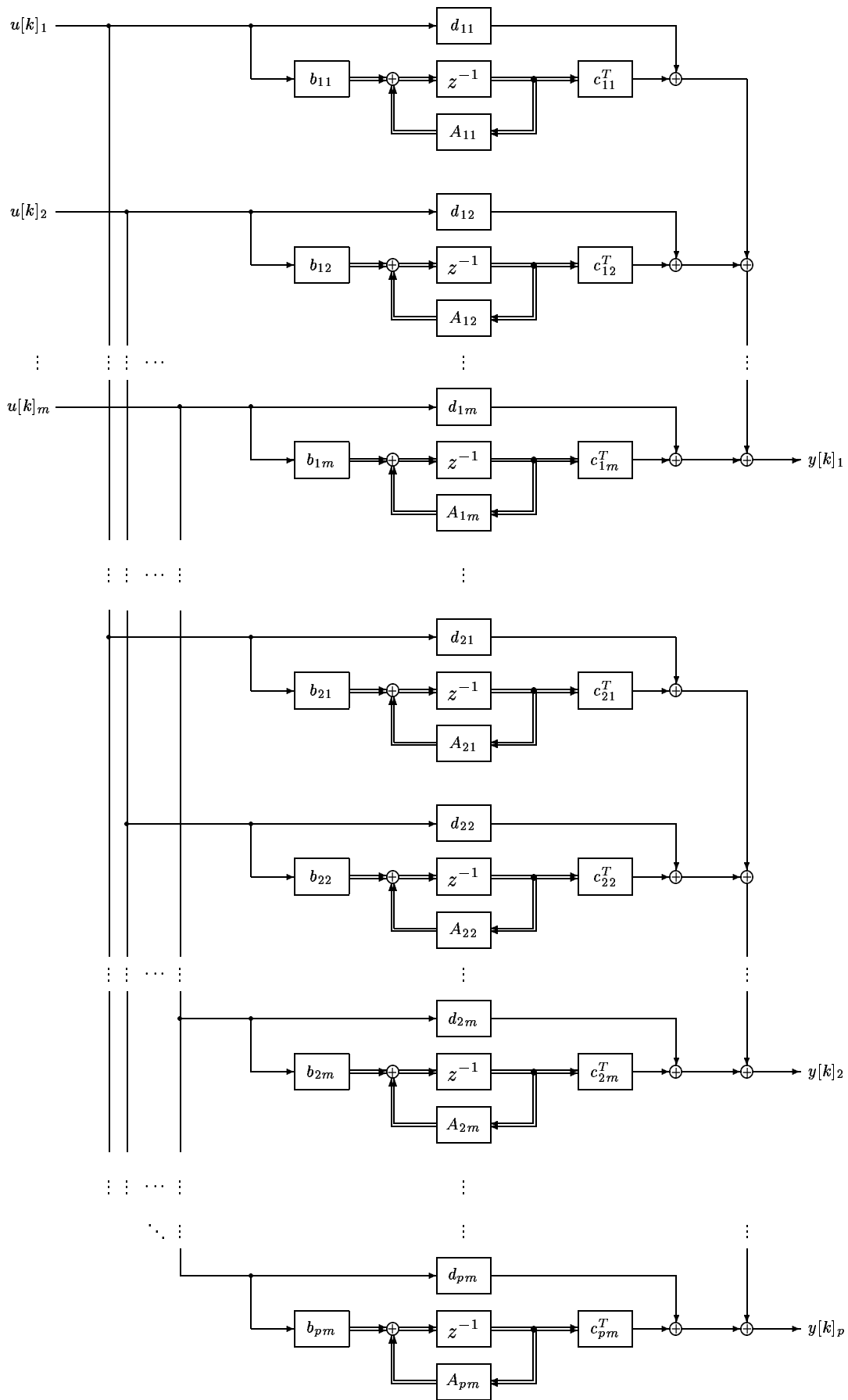


Abbildung 15: P-kanonische Struktur mit Teilsystemen in Zustandsraumdarstellung

$$\begin{pmatrix} x_{11}[k+1] \\ x_{12}[k+1] \\ \vdots \\ x_{1m}[k+1] \\ \hline \vdots \\ x_{pm}[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & A_{12} & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & A_{1m} & & \\ \hline \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & A_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}[k] \\ x_{12}[k] \\ \vdots \\ x_{1m}[k] \\ \hline \vdots \\ x_{pm}[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{1m} \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \\ \vdots \\ u_m[k] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1[k] \\ \hline \vdots \\ y_p[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^T & c_{12}^T & \dots & c_{1m}^T & & \dots & 0 \\ \hline \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & \dots & c_{pm}^T \end{pmatrix} \underline{x}[k] + D \underline{u}[k] \tag{101}$$

mit

$$A_{ji} = \begin{pmatrix} \underline{0}_{q_{ji}-1} & a_{ji0} \\ \hline I_{q_{ji}-1} & \vdots \\ & a_{ji\ q_{ji}-1} \end{pmatrix}, \quad b_{ji} = \begin{pmatrix} b_{ji0} \\ b_{ji1} \\ \vdots \\ b_{ji\ q_{ji}-1} \end{pmatrix} \tag{102}$$

$$c_{ji}^T = \left( \underline{0}_{q_{ji}-1} \mid 1 \right), \quad D = \left( b_{ji\ q_{ji}} \right)$$

Werden die Systeme (99) und (101) als Übertragungsmatrix dargestellt, so entsprechen die  $\underline{\alpha}_j$  aus (99) dem Hauptnenner aus den  $a_{jn}$ ,  $n = 0, \dots, q_{ji} - 1$  aus (101). Wenn keine Pol-Nullstellenkürzungen auftreten, hat die Systemmatrix  $A$  in (99) und (101) gleiche Dimension. Somit müssen, wegen der deutlich schwächer besetzten Eingangsmatrix  $B$ , für die Systemdarstellung nach (101) weniger Parameter bestimmt werden.