



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6571

Theoretische Untersuchung zum fernen, turbulenten Nachlauf über einer beheizten Kugel

M. Bock, P. Ehrhard

Institut für Kern- und Energietechnik
Programm Nukleare Sicherheitsforschung

November 2001

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6571

**Theoretische Untersuchung zum fernen, turbulenten
Nachlauf über einer beheizten Kugel**

M. Bock, P. Ehrhard

Institut für Kern- und Energietechnik
Programm Nukleare Sicherheitsforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
2001

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor
Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe
Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)
ISSN 0947-8620

Theoretische Untersuchung zum fernen, turbulenten Nachlauf über einer beheizten Kugel

Eine beheizte Kugel wird entgegen dem Schwerefeld von einem NEWTONschen Fluid umströmt. Es bildet sich ein turbulenter Nachlauf aus, der in einiger Entfernung von der Kugel als im Mittel stationär und rotationssymmetrisch angesehen werden kann. Inhalt dieses Beitrags ist die mathematische Beschreibung des fernen Nachlaufs.

Ausgehend von den allgemeinen Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten werden durch Vereinfachungen, Anwendung von Modellen und einer Grenzschicht-Approximation Grenzschichtgleichungen mit deren Rand- und Integralbedingungen formuliert. Die Grenzschichtgleichungen werden dann durch Potenzansätze für die Strömungsgrößen in zwei Gleichungssysteme aufgespalten. Durch Ähnlichkeitstransformationen werden die partiellen Differentialgleichungssysteme in gewöhnliche überführt.

Das Gleichungssystem der führenden Ordnung wird mittels eines verallgemeinerten Ähnlichkeitsansatzes analytisch gelöst. Das Gleichungssystem der nächsten Ordnung wird durch die Ähnlichkeitstransformation nochmals in zwei Gleichungssysteme separiert, wobei ein Gleichungssystem die Auftriebsterme berücksichtigt und das andere die nichtlinearen Inhomogenitäten. Diese Gleichungssysteme werden numerisch gelöst und mit dem Gleichungssystem der führenden Ordnung superponiert. Es erfolgt eine ausführliche Diskussion der Resultate.

Theoretical investigation of the far turbulent wake above a heated sphere

A heated sphere is positioned in the parallel flow of a Newtonian fluid, directed upwards against gravity. For this configuration we expect a turbulent wake to develop, which will have in average a stationary and axisymmetric character. The present article gives a mathematical model for such a heated far turbulent wake.

The model is based on the conservation equations in cylindrical coordinates. Applying various models and approximations, allows to formulate a set of boundary layer equations and associate boundary and integral conditions. By means of an asymptotic solution method, this set of equations is splitted into two leading order subsets, which moreover can be transformed into ordinary differential equations and associate boundary and integral conditions.

The leading order system is solved analytically by means of a generalized similarity transformation. The second order set can be integrated numerically, while the identical similarity variables apply. One part of the second order set of equations is responsible for the buoyant effects, the second part corrects nonlinear terms in the momentum and heat transport. Both parts of the asymptotic series are superimposed and the results are discussed.

Inhaltsverzeichnis

1	Der turbulente Nachlauf einer beheizten Kugel	1
2	Mathematische Formulierung des Nachlaufs	2
2.1	Grundgleichungen und integrale Bilanzen	2
2.1.1	Grundgleichungen	2
2.1.2	Integrale Bilanzen	5
2.2	Vereinfachung und Umformung des Gleichungssystems	6
2.2.1	BOUSSINESQ-Approximation für Auftriebsterne	6
2.2.2	Massenstrombilanz	7
2.2.3	PRANDTLsches Mischungswegmodell	7
2.2.4	Entdimensionierung und separate Skalierung	9
2.2.5	Grenzschicht-Approximation	11
3	Lösung des Gleichungssystems	13
3.1	Potenzansätze für \bar{U} , \bar{W} und $\bar{\Theta}$	13
3.1.1	Gleichungssystem in erster Näherung	14
3.1.2	Gleichungssystem in zweiter Näherung	15
3.2	Ähnlichkeitstransformation und Lösung der Gleichungssysteme	15
3.2.1	Ähnlichkeitstransformation der ersten Näherung	16
3.2.2	Analytische Lösung der ersten Näherung	18
3.2.3	Ähnlichkeitstransformation der zweiten Näherung	20
3.2.4	Nummerische Lösung der zweiten Näherung	22
4	Diskussion der Ergebnisse	25
4.1	Ergebnisse der ersten Näherung	25
4.2	Superponierte Gesamtlösung	28
4.3	Gültigkeitsbereiche der Lösung	33
5	Zusammenfassung	34
A	Anmerkungen	36

B Fortran-Quellcode zur Lösung der zweiten Näherung	51
C Verwendete Formelzeichen	56
D Literaturverzeichnis	59

1 Der turbulente Nachlauf einer beheizten Kugel

Wenn eine beheizte Kugel entgegen dem Schwerfeld von einem inkompressiblen, viskosen und wärmeleitenden Fluid (NEWTONSches Fluid) umströmt wird, dann kann man deren Nachlaufgebiet grob in drei Bereiche unterteilen (Abbildung 1):

Unmittelbar hinter der Kugel bis in einiger Entfernung stromab (I) wird sich ein instationäres Stromfeld zeigen, welches durch Ablösungen des Fluids von der Kugeloberfläche und durch Rückströmgebiete charakterisiert ist. Dieser Bereich ist rein analytischen Methoden nicht ohne weiteres zugänglich.

Weiter stromab der Kugel (II) geht dieser in einen im zeitlichen Mittel stationären Bereich über, in welchem die Auswirkungen der Kugel (Impulsverlust, Auftrieb) noch deutlich erfaßbar sind, die Turbulenz¹ im Stromfeld aber von gleichmäßiger Natur ist. Dieser mittlere Bereich des Nachlaufs wird im folgenden als *ferner Nachlauf* bezeichnet. Er ist der Analytik teilweise zugänglich und soll in diesem Beitrag beschrieben werden.

Noch weiter stromab (III) werden die Auswirkungen der Kugel auf das Fluid durch dessen Viskosität immer weiter in die Außenströmung verteilt, sodaß sich das Nachlaufgebiet praktisch nicht mehr vom Stromfeld der Außenströmung unterscheidet.

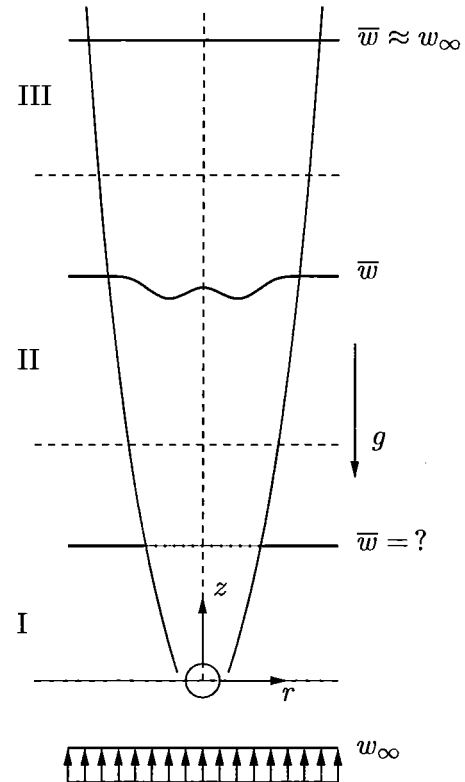
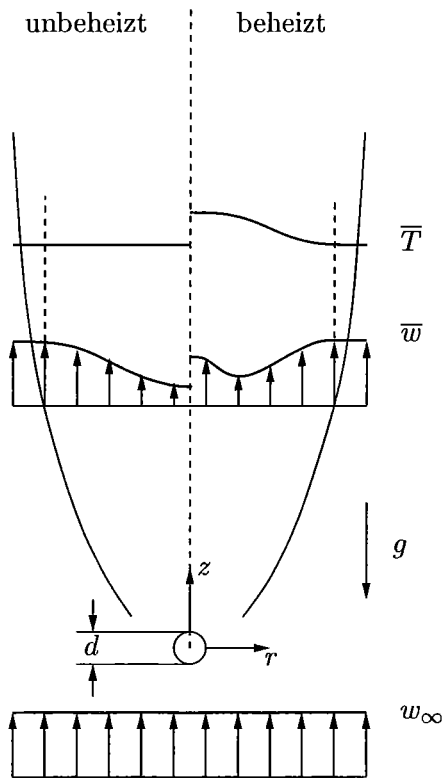


Abbildung 1: Einteilung des Nachlaufs in drei Bereiche am Beispiel der Strömungsgeschwindigkeit \bar{w} .

Betrachtet man den fernen Nachlauf genauer, erkennt man die Überlagerung zweier Effekte: erstens eine Verringerung der Strömungsgeschwindigkeit \bar{w} zur Symmetrieachse hin aufgrund des durch die Haftbedingung auf der Kugeloberfläche entstehenden Impulsverlustes,

¹allg. Erläuterungen zur Turbulenz finden sich unter anderem in: [LUGT 1979 S.220 ff.] [SCHLICHTING 1982 S.454 ff.] [ZIEREP 1987 S. 120 ff.] [PRANDTL et al. 1990 S. 182 ff.] [GERSTEN & HERWIG 1992 S. 42 ff., 482 ff.] [MÜLLER & EHRHARD 1999 S. 50 ff.]



und zweitens eine Erhöhung dieser Strömungsgeschwindigkeit im Zentrum des Nachlaufs durch den Auftrieb des an der Kugel erwärmten Fluids (Abbildung 2).

Abbildung 2: Qualitative Darstellung des Temperatur- und Geschwindigkeitsverlaufs im fernen Nachlauf der Kugel.

2 Mathematische Formulierung des Nachlaufs

2.1 Grundgleichungen und integrale Bilanzen

2.1.1 Grundgleichungen

Ausgangspunkt zur mathematischen Beschreibung des Stromfeldes sind die Grundgleichungen der Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung), der Impulserhaltung (NAVIER-STOKES-Gleichungen) und der Energieerhaltung in Zylinderkoordinaten (Abbildung 3). Das zu beschreibende Stromfeld ist dreidimensional und instationär.

Kontinuitätsgleichung [BIRD et al. 1960, S. 83(B)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad \left[\frac{kg}{m^3 s} \right], \quad (1)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in r -Richtung [BIRD et al. 1960, S. 85(D)]:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad \left[\frac{N}{m^3} \right], \quad (2)$$

NAVIER–STOKES–Gleichung in φ -Richtung [BIRD et al. 1960, S. 85(E)]:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho g_\varphi \quad \left[\frac{N}{m^3} \right], \quad (3)$$

NAVIER–STOKES–Gleichung in z -Richtung [BIRD et al. 1960, S. 85(F)]:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad \left[\frac{N}{m^3} \right], \quad (4)$$

Energiegleichung ($\lambda = \text{konstant}$) [BIRD et al. 1960, S. 319(B)]²:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 \right\} \quad \left[\frac{W}{m^3} \right], \quad (5)$$

Randbedingungen an der Kugel ($z^2 + r^2 = \frac{d^2}{4}$):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T = T_W \quad (\text{Kugeloberfläche}), \quad (6)$$

Randbedingungen für den fernen Nachlauf ($z \gg 0$):

$$\begin{aligned} r = 0 & : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ r \rightarrow \infty & : \quad v \rightarrow v_\infty, \quad w \rightarrow w_\infty, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld})^{A1)3}. \end{aligned} \quad (7)$$

REYNOLDS–Ansatz für turbulente Strömungen:

Die Strömungsgrößen u , v , w , p und T werden mittels des REYNOLDS–Ansatzes $f = \bar{f} + f'$ als Summe aus den zeitlich gemittelten Größen und deren Schwankungsgrößen in den Gleichungen ersetzt [ZIEREP 1987 S. 121 ff.]⁴. Da das Problem nur im zeitlichen Mittel

²... $\mu\{\dots\}$ sind Terme der viskosen Dissipation

³A1) – A21) sind Verweise auf die Anmerkungen

⁴f wird als allgemeines Symbol für andere Größen verwendet

betrachtet werden soll, werden die Gleichungen anschließend zeitlich gemittelt. Dadurch fallen isolierte Schwankungsgrößen und Produkte von Schwankungsgrößen mit gemittelten Größen aus den Gleichungen heraus. Lediglich Produkte von Schwankungsgrößen und deren Ableitungen bleiben den Gleichungen erhalten [SCHLICHTING 1982 S.568 ff.]^{A2)}.

Vereinfachungen:

Indem man die Beschreibung auf den fernen Nachlauf beschränkt, kann als erste Vereinfachung der Gleichungen die Zeitableitungen zu Null gesetzt werden. Wir erhalten somit ein im zeitlichen Mittel stationäres Problem.

Als weitere Vereinfachung bietet sich an, die im zeitlichen Mittel gegebene Rotationssymmetrie bezüglich der z -Achse auszunutzen und alle Bewegungen und Bewegungsänderungen in φ -Richtung aus den Gleichungen zu streichen. Das Problem ist damit auf ein zweidimensionales reduziert.

Da im fernen Nachlauf keine großen Geschwindigkeitsgradienten zu erwarten sind, können in der Gleichung der Energieerhaltung die Quellterme der viskosen Dissipation vernachlässigt werden [BIRD et al. 1960, S. 319].

An äußeren Beschleunigungskräften wirkt nur die Erdbeschleunigung in negative z -Richtung, wodurch $g_r = 0$ und $g_z = -g$ gilt.

Nach diesen Vereinfachungen hat das Gleichungssystem folgende Form:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{w}) = 0 \quad \left[\frac{kg}{m^3 s} \right], \quad (8)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in r -Richtung:

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}) \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] \\ - \rho \left(\frac{\overline{u'^2}}{r} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial r} + \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z} \right) & \quad \left[\frac{N}{m^3} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in z -Richtung:

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] \\ - \rho \left(\frac{\overline{u'w'}}{r} + \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial r} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) - \rho g & \quad \left[\frac{N}{m^3} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

Energiegleichung:

$$\rho c_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right] - \varrho \left(\frac{\bar{u}' T'}{r} + \frac{\partial(\bar{u}' T')}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{w}' T')}{\partial z} \right) \quad \left[\frac{W}{m^3} \right]. \quad (11)$$

Hierbei handelt es sich um ein System inhomogener, nichtlinearer, zweidimensionaler, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Randbedingungen an der Kugel ($z^2 + r^2 = \frac{d^2}{4}$) lauten:

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{T} = T_W \quad (\text{Kugeloberfläche}), \quad (12)$$

die Randbedingungen für den fernen Nachlauf ($z \gg 0$) lauten:

$$\begin{aligned} r = 0 & : \quad \bar{u} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ r \rightarrow \infty & : \quad \bar{w} \rightarrow w_\infty, \quad \bar{T} \rightarrow T_\infty, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}). \end{aligned} \quad (13)$$

2.1.2 Integrale Bilanzen

Impulsbilanz:

Die Vereinfachungen der Grundgleichungen (Gleichungen (8 – 13)) zu den Grenzschichtgleichungen (Kapitel 2.2.4 und 2.2.5) mittels einer separaten Skalierung setzen sehr unterschiedliche Ausdehnungen des Nachlaufs in z - und r -Richtung voraus (Grenzschichtcharakter). In der Nähe der Kugel ist diese Voraussetzung verletzt, die Grenzschichtgleichungen sind hier nicht gültig⁵. Gerade hier aber ist die Haftbedingung auf der Kugeloberfläche (Gleichung (12)) zu stellen, welche den Impulsverlust der Strömung und somit die Gestalt des Nachlaufs verursacht. Ein Weg, den Einfluß

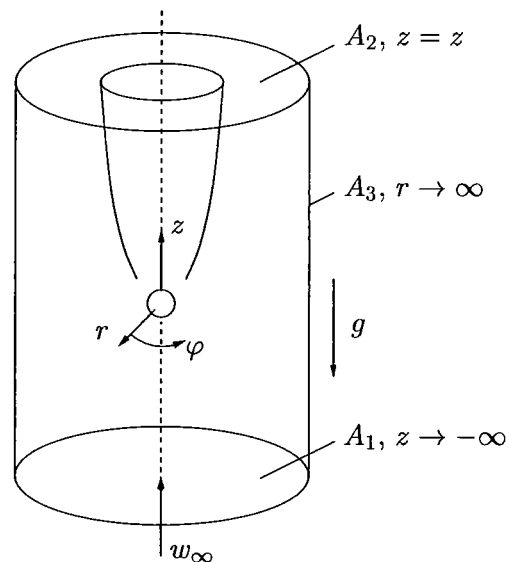


Abbildung 3: Kontrollraum für die integralen Bilanzen.

⁵Hierin liegt die mathematische Begründung der Betrachtung des fernen Nachlaufs

der Kugel auf das Stromfeld zu berücksichtigen, ist eine integrale Impulsbilanz. Hierzu wird ein Kontrollraum gewählt, der stromauf des Ursprungs (Kugelmittelpunkt) und senkrecht zur Strömungsrichtung durch die ungestörte Außenströmung begrenzt wird und stromab an der aktuellen Stelle z endet (Abbildung 3). Er hat die Form eines Zylinders mit der Grundfläche A_1 , der Deckfläche A_2 und der Mantelfläche A_3 . Es muß die Summe aller an der Kontrollraumboberfläche angreifenden Impuls- und Druckkräfte und die direkt am Fluid wirkenden Widerstands- und Auftriebskräfte Null ergeben [ZIEREP 1987 S. 101 ff.]^{A3}):

$$\begin{aligned}
0 = & 2\pi \int_0^\infty r (p_\infty - \bar{p}) dr + 2\pi \varrho \int_0^\infty r (w_\infty^2 - \bar{w}^2 - \overline{w'^2}) dr - 2\pi r \varrho \int_{-\infty}^z w_\infty \bar{u} dz \\
& - \frac{\varrho}{8} w_\infty^2 \pi d^2 c_w + 2\pi g \int_{-\infty}^z \int_0^\infty r (\varrho_\infty - \varrho) dr dz \quad [N] .
\end{aligned} \tag{14}$$

Wärmebilanz:

Die dem Fluid zugeführte Wärme durch die Beheizung der Kugel muß aus den oben genannten Gründen ebenfalls über eine integrale Bilanz berücksichtigt werden. Auch hier wird der in Abbildung 3 dargestellte Kontrollraum verwendet. Es müssen die in den Kontrollraum hinein- und aus ihm herausströmenden konvektiven und konduktiven Wärmeströme in der Summe mit der Heizleistung der Kugel Null ergeben^{A4}):

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{Q} + 2\pi \varrho c_p \int_0^\infty r w_\infty T_\infty dr - 2\pi \varrho c_p \int_0^\infty r (\bar{w}T + T'w') dr \\
& - 2\pi \varrho c_p r \int_{-\infty}^z \bar{u} T_\infty dz + 2\pi \lambda \int_0^\infty r \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} dr \quad [W] .
\end{aligned} \tag{15}$$

2.2 Vereinfachung und Umformung des Gleichungssystems

2.2.1 BOUSSINESQ-Approximation für Auftriebsterme

Im gesamten Stromfeld wird die Dichte als konstant vorausgesetzt (inkompressible Strömung). Da die Auftriebswirkung des erwärmten Fluids gerade von dessen Dichteänderung hervorgerufen wird, muß sie in irgend einer Form berücksichtigt werden. Die BOUSSINESQ-Approximation verwendet hier die Temperatur \bar{T} und besagt unter der Voraussetzung konstanter Stoffeigenschaften μ , λ und c_p , daß in den Auftriebstermen der Gleichungen (10, 14) $\varrho = \varrho_\infty \left(1 - \alpha (\bar{T} - T_\infty)\right)$ wird und ansonsten $\varrho = \varrho_\infty = \textit{konstant}$ gilt [PRANDTL et al. 1990 S. 314 ff.][MÜLLER & EHRHARD 1999 S. 5 ff.]. Der hydrostatische Druckanteil

läßt sich dann einfach aus dem Problem eliminieren, sodaß nur noch der strömungsbedingte Druckanteil zu berücksichtigen ist^{A5)}.

2.2.2 Massenstrombilanz

In den integralen Bilanzgleichungen (14, 15) können unter Verwendung der Massenstrombilanz am Kontrollraum^{A6)}

$$\pi \varrho_{\infty} r \int_{-\infty}^z \bar{u} dz = \pi \varrho_{\infty} \int_0^{\infty} r (w_{\infty} - \bar{w}) dr \quad \left[\frac{kg}{s} \right] \quad (16)$$

die Integrale über dz umgeformt werden in Integrale über dr .

2.2.3 PRANDTL'sches Mischungswegmodell

Das entstandene System aus vier nichtlinearen, inhomogenen, zweidimensionalen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung^{A7)} mit dessen Rand- und Integralbedingungen beinhaltet die sieben Unbekannten \bar{u} , \bar{w} , \bar{T} , $\overline{p_{dyn}}$, u' , w' und T' . Um das Gleichungssystem zu schließen, können die Schwankungsgrößen mittels eines Turbulenzmodells durch die gemittelten Größen dargestellt werden. Der Mischungsweg-Ansatz von PRANDTL⁶ erlaubt dies mit den Ansätzen

$$w' = -l_m \frac{\partial \bar{w}}{\partial r}, \quad u' = l_m \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \quad \text{und} \quad T' = -l_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}. \quad (17)$$

Bei den hinzugekommenen Größen l_m und l_q handelt es sich um kinematische bzw. thermische Mischungsweglängen. Dies sind die einzigen Größen im Gleichungssystem, die durch Experimente bestimmt werden müssen, somit aber in den Gleichungen als gegeben angesehen werden dürfen^{A8)}.

Im allgemeinen unterscheidet sich der kinematische Austauschprozeß vom thermischen, da die Austauschmechanismen von Impuls und Wärme in einer turbulenten Strömung nicht identisch sind [SCHLICHTING 1982 S. 772 ff.]. Bei der Anwendung des PRANDTL'schen Mischungswegmodells kann man aber näherungsweise vom gleichen Austauschmechanismus ausgehen. Dadurch wird das Verhältnis der Austauschgrößen von Impuls (A_{τ}) und Wärme

⁶allg. Erläuterungen zum Mischungswegmodell finden sich unter anderem in: [PRANDTL 1925] [SCHLICHTING 1930] [SCHLICHTING 1982 S. 591 ff., S. 740] [ZIEREP 1987 S. 137 ff.] [GERSTEN & HERWIG 1992 S. 401 ff., 482 ff.]

(A_q), also die turbulente PRANDTL-Zahl $Pr_t \simeq 1$ und somit $l_m \simeq l_q \simeq l$ [SCHLICHTING 1982 S. 724 ff.][MÜLLER & EHRHARD 1999 S. 39]^{A9}).

Unter Verwendung der kinematischen Viskosität $\nu = \frac{\mu}{\rho_\infty}$ und der Temperaturleitfähigkeit $\kappa = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p}$ lassen sich die Grundgleichungen und die integralen Bilanzen nun wie folgt formulieren:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in r -Richtung:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \bar{p}_{dyn}}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ & - l^2 \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r \partial z} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in z -Richtung:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \bar{p}_{dyn}}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \\ & + l^2 \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r \partial z} \right) + \alpha g (\bar{T} - T_\infty), \end{aligned} \quad (20)$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = & \kappa \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) \\ & + l^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r \partial z} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf ($z \gg 0$):

$$\begin{aligned} r = 0 & : \quad \bar{u} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ r \rightarrow \infty & : \quad \bar{w} \rightarrow w_\infty, \quad \bar{T} \rightarrow T_\infty, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (22)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{\rho_\infty} \int_0^\infty r (p_{dyn,\infty} - \bar{p}_{dyn}) dr + \int_0^\infty r (w_\infty \bar{w} - \bar{w}^2) dr - \int_0^\infty r l^2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right)^2 dr \\ & - \frac{c_w}{16} w_\infty^2 d^2 + \alpha g \int_{-\infty}^z \int_0^\infty r (\bar{T} - T_\infty) dr dz, \end{aligned} \quad (23)$$

integrale Wärmebilanz:

$$0 = \frac{\dot{Q}}{2\pi\rho_\infty c_p} + \int_0^\infty r (\bar{w}T_\infty - \bar{w}\bar{T}) dr - \int_0^\infty r l^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} dr + \kappa \int_0^\infty r \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} dr . \quad (24)$$

2.2.4 Entdimensionierung und separate Skalierung

Um die Gleichungen (18 – 24) weiter zu vereinfachen, macht man sich den Grenzschichtcharakter des Stromfeldes zunutze. Grenzschichtcharakter meint hier, daß die Ausdehnung des Nachlaufs in Strömungsrichtung (z -Richtung) deutlich größer ist als senkrecht zu ihr (r -Richtung). Dieser Unterschied wird durch eine separate Skalierung bei der Entdimensionierung der Gleichungen berücksichtigt. D.h. die dimensionsbehafteten Strömungsgrößen werden möglichst mit solchen Größen entdimensioniert, daß dimensionslose Strömungsgrößen in der Größenordnung $O(1)$ entstehen^{A10}. Hierbei wird der unterschiedlichen Ausdehnung des Nachlaufs bezüglich der Koordinaten durch den Faktor $\varepsilon \ll 1$ Rechnung getragen [GERSTEN & HERWIG 1992 S. 132 ff.][MÜLLER & EHRHARD 1999 S. 106 ff.].

Die axiale Strömungsgeschwindigkeit \bar{w} wird mit der Geschwindigkeit der ungestörten Anströmung w_∞ entdimensioniert, der strömungsbedingte Druckanteil $\overline{p_{dyn}}$ mit dem doppelten Staudruck der Anströmung. Die Temperaturdifferenz zwischen fernem Nachlauf und Ausenströmung $\bar{T} - T_\infty$ wird mit einer charakteristischen Temperaturdifferenz

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}}{2\pi\rho_\infty c_p \nu d} \quad (25)$$

als Funktion des an das Fluid abgegebenen Wärmestroms \dot{Q} entdimensioniert. Die Mischungsweglänge l wird in der Größenordnung der Nachlaufbreite erwartet^{A11}. Diese Überlegungen und die Annahme, daß die Nachlaufbreite im Bereich des fernen Nachlaufs in der Größenordnung des Kugeldurchmessers liegt, führen zu folgenden Entdimensionierungsvorschriften:

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{d}, & Z &= \varepsilon \frac{z}{d}, & \bar{W} &= \frac{\bar{w}}{w_\infty}, & \bar{U} &= \frac{\bar{u}}{u_0}, \\ L &= \frac{l}{d}, & \bar{\Theta} &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{\Delta T}, & \overline{P_{dyn}} &= \frac{\overline{p_{dyn}}}{\rho_\infty w_\infty^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (18) folgt sofort, daß $u_0 = \varepsilon w_\infty$ gewählt werden kann^{A12}.

Führt man die dimensionslosen Kennzahlen^{A13} REYNOLDS-Zahl $Re = \frac{w_\infty d}{\nu}$, GRASHOF-Zahl $Gr = \frac{g \alpha d^3 \Delta T}{\nu^2}$ und PRANDTL-Zahl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ ein, erhält man folgende Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\underbrace{\frac{\bar{U}}{R}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial \bar{U}}{\partial R}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial Z}}_{O(1)} = 0, \quad (27)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in R -Richtung:

$$\begin{aligned} \underbrace{\varepsilon^2}_{O(\varepsilon^2)} \left(\underbrace{\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial R}}_{O(1)} + \underbrace{\bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Z}}_{O(1)} \right) = & - \underbrace{\frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial R}}_{O(\frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial R})} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{Re}}_{O(\frac{\varepsilon}{Re})} \left(\underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{U}}{\partial R}}_{O(1)} - \underbrace{\frac{\bar{U}}{R^2}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial R^2}}_{O(1)} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Z^2}}_{O(\varepsilon^2)} \right) \\ & - \underbrace{L^2}_{O(L^2)} \left(\underbrace{\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \right)^2}_{O(1)} + 2 \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R^2}}_{O(1)} - 2\varepsilon \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R \partial Z}}_{O(\varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in Z -Richtung:

$$\begin{aligned} \underbrace{\varepsilon}_{O(\varepsilon)} \left(\underbrace{\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial R}}_{O(1)} + \underbrace{\bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial Z}}_{O(1)} \right) = & - \underbrace{\varepsilon \frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial Z}}_{O(\varepsilon \frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial Z})} + \underbrace{\frac{1}{Re}}_{O(\frac{1}{Re})} \left(\underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}}{\partial R}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R^2}}_{O(1)} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Z^2}}_{O(\varepsilon^2)} \right) \\ & + \underbrace{L^2}_{O(L^2)} \left(\underbrace{\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \right)^2}_{O(1)} + 2 \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R^2}}_{O(1)} - 2\varepsilon \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R \partial Z}}_{O(\varepsilon)} \right) + \underbrace{\frac{Gr}{Re^2} \bar{\Theta}}_{O(\frac{Gr}{Re^2} \bar{\Theta})}, \end{aligned} \quad (29)$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \underbrace{\varepsilon}_{O(\varepsilon)} \left(\underbrace{\bar{U} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R}}_{O(\bar{\Theta})} + \underbrace{\bar{W} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial Z}}_{O(\bar{\Theta})} \right) = & \underbrace{\frac{1}{Pr Re}}_{O(\frac{1}{Pr Re})} \left(\underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R}}_{O(\bar{\Theta})} + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial R^2}}_{O(\bar{\Theta})} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial Z^2}}_{O(\varepsilon^2 \bar{\Theta})} \right) \\ & + \underbrace{L^2}_{O(L^2)} \left(\underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R}}_{O(\bar{\Theta})} + \underbrace{\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R^2}}_{O(\bar{\Theta})} + \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial R^2}}_{O(\bar{\Theta})} - \underbrace{\varepsilon}_{O(\varepsilon)} \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R \partial Z}}_{O(\bar{\Theta})} + \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial R \partial Z}}_{O(\bar{\Theta})} \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} R = 0 & : \quad \bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ R \rightarrow \infty & : \quad \bar{W} \rightarrow 1, \quad \bar{\Theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial R} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (31)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\underbrace{\frac{c_w}{16}}_{O(\frac{c_w}{16})} = \underbrace{\int_0^\infty R (P_{dyn,\infty} - \overline{P_{dyn}}) dR}_{O(\Delta \overline{P_{dyn}})} + \underbrace{\int_0^\infty R (\overline{W} - \overline{W}^2) dR}_{O(1)} - \underbrace{L^2}_{O(L^2)} \underbrace{\int_0^\infty R \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial R} \right)^2 dR}_{O(1)} + \underbrace{\frac{Gr}{\varepsilon Re^2}}_{O(\frac{Gr}{\varepsilon Re^2})} \underbrace{\int_{-\infty}^Z \int_0^\infty R \overline{\Theta} dR dZ}_{O(\overline{\Theta})}, \quad (32)$$

integrale Wärmebilanz:

$$\underbrace{1}_{O(1)} = \underbrace{Re}_{O(Re)} \underbrace{\int_0^\infty R \overline{W} \overline{\Theta} dR}_{O(\overline{\Theta})} + \underbrace{Re L^2}_{O(Re L^2)} \underbrace{\int_0^\infty R \frac{\partial \overline{W}}{\partial R} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial R} dR}_{O(\overline{\Theta})} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{Pr}}_{O(\frac{\varepsilon}{Pr})} \underbrace{\int_0^\infty R \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial Z} dR}_{O(\overline{\Theta})}. \quad (33)$$

2.2.5 Grenzschicht-Approximation

Die einzelnen Terme der Gleichungen (27 – 33) werden nun bezüglich ihrer Größenordnungen näher betrachtet. Ziel ist es, nur die Terme in führender Ordnung in den Gleichungen zu belassen und alle anderen Terme, deren Größenordnung deutlich kleiner ist, zu vernachlässigen.

In einer freien, turbulenten Strömung, wie sie im fernen Nachlauf vorliegt, ist der turbulente Austausch aufgrund der vorhandenen Schwankungsgrößen wesentlich effektiver als der molekulare. Dies hat zur Folge, daß die molekularen Reibungseinflüsse gegenüber den turbulenten in den Hintergrund treten. In der NAVIER-STOKES-Gleichung in Z -Richtung (29) gilt demgemäß $O\left(\frac{1}{Re}\right) \ll O(L^2)$, was für große Re -Zahlen erfüllt ist. Weiterhin sollen der Trägheitsterm und der Term der turbulenten Reibung im Problem verbleiben, also muß $O(L^2) = O(\varepsilon)$ sein.

In der NAVIER-STOKES-Gleichung in R -Richtung (28) tritt ebenfalls für große Re -Zahlen der molekulare Reibungsterm gegenüber dem turbulenten in den Hintergrund ($O\left(\frac{\varepsilon}{Re}\right) \ll O(\varepsilon)$). Um die Gleichung erfüllen zu können, muß der Druckterm von der Größenordnung $O(\varepsilon)$ sein. Das bedeutet, daß der Druckgradient senkrecht zur Strömungsrichtung sehr klein ist, in der Grenzschicht also praktisch der Druck der Außenströmung vorliegt.

Da der strömungsbedingte Druck der Außenströmung in Strömungsrichtung konstant ist ($\frac{\rho_\infty}{2} w_\infty^2 = \text{konstant}$), kann er sich wegen der vernachlässigbar kleinen Änderung im Nachlauf längs Z kaum ändern. Der Druckgradient in Z -Richtung (Gleichung (29)) ist so-

mit überall von der Größenordnung $O(\varepsilon)$. Für den Auftriebsterm in Gleichung (29) kann zunächst keine Aussage über die Größenordnung gemacht werden, da die GRASHOF-Zahl prinzipiell beliebig sein kann. Der Auftrieb wird hierbei als kleine Störung des Stromfeldes aufgefaßt, um die Lösbarkeit des Gleichungssystems zu gewährleisten.

Auch in der Energiegleichung (30) kann aus oben genannten Gründen der molekulare Wärmetransport gegenüber dem turbulenten vernachlässigt werden. Dies führt wegen $O\left(\frac{1}{Pr Re}\right) \ll O(L^2)$ zu $O(Pr) = O(1)$. Wegen der in den NAVIER-STOKES-Gleichungen gefundenen Beziehung $O(L^2) = O(\varepsilon)$ bleibt sowohl der konvektive als auch der turbulente Wärmetransport im Problem erhalten.

In der integralen Wärmebilanz (33) muß der führende Term der rechten Seite von der Größenordnung $O(1)$ sein, also $O(Re\bar{\Theta}) = O(1)$. Physikalisch betrachtet wird bei größer werdender REYNOLDS-Zahl (z.B. durch steigende Strömungsgeschwindigkeit) die Temperaturdifferenz von Nachlauf und Außenströmung abnehmen. Die beiden übrigen Terme der rechten Seite können wegen $O(L^2 Re\bar{\Theta}) \ll O(1)$ und $O\left(\frac{\varepsilon\bar{\Theta}}{Pr}\right) \ll O(1)$ vernachlässigt werden.

In der integralen Impulsbilanz (32) soll der Widerstandsterm in führender Ordnung erhalten bleiben, also von Ordnung $O(1)$ sein. Es muß demnach $O\left(\frac{c_w}{16}\right) = O(1)$ gelten. Der Auftriebsterm bleibt analog zur NAVIER-STOKES-Gleichung in Z -Richtung (29) ohne genauere Angaben zur Größenordnung bestehen. Da die Änderung des Druckes in R -Richtung von $O(\varepsilon)$ ist, kann die Druckdifferenz zwischen Außenfeld und Nachlauf auch nur von $O(\varepsilon)$ sein und somit vernachlässigt werden. Der turbulente Term fällt wegen $O(\varepsilon) \ll O(1)$ heraus.

Die so vereinfachten *Grenzschichtgleichungen* lauten:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\bar{U}}{R} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial R} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial Z} = 0, \quad (34)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in R -Richtung:

$$\frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial R} = O(\varepsilon), \quad (35)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in Z -Richtung:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial Z} = \frac{L^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial R^2} \right) + \frac{Gr}{\varepsilon Re^2} \bar{\Theta} + O(\varepsilon), \quad (36)$$

Energiegleichung:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} + \bar{W} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial Z} = \frac{L^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \right) \right) + O\left(\frac{\varepsilon}{Re}\right), \quad (37)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} R = 0 & : \quad \bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial R} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ R \rightarrow \infty & : \quad \bar{W} \rightarrow 1, \quad \bar{\Theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial R} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (38)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\frac{c_w}{16} = \int_0^\infty R (\bar{W} - \bar{W}^2) dR + \frac{Gr}{\varepsilon Re^2} \int_{-\infty}^Z \int_0^\infty R \bar{\Theta} dR dZ + O(\varepsilon), \quad (39)$$

integrale Wärmebilanz:

$$1 = Re \int_0^\infty R \bar{W} \bar{\Theta} dR + O(\varepsilon). \quad (40)$$

3 Lösung des Gleichungssystems

3.1 Potenzansätze für \bar{U} , \bar{W} und $\bar{\Theta}$

Um das Gleichungssystem (34 – 40) bezüglich \bar{W} , \bar{U} und $\bar{\Theta}$ zu lösen, werden diese Größen als asymptotische Ansätze formuliert und in den Gleichungen ersetzt. Mit der Einführung einer Entwicklung für große Werte von Z wird eine kleine Variable

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Z^m} \ll 1 \quad (41)$$

als Potenzansatz von Z definiert. Für $Z \rightarrow \infty$ strebt diese wegen $m > 0$ gegen den Grenzwert $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$. Da im fernen Nachlauf die Abweichungen der Strömungsgrößen \bar{W} , \bar{U} und $\bar{\Theta}$ zu deren Grenzwerten der Außenströmung ($\bar{W} \rightarrow 1$, $\bar{U} \rightarrow 0$, $\bar{\Theta} \rightarrow 0$) immer geringer werden, folgen hieraus die asymptotischen Ansätze

$$\bar{W} = 1 - \tilde{\varepsilon} \bar{W}_0 - \tilde{\varepsilon}^2 \bar{W}_1 - \dots, \quad (42)$$

$$\bar{U} = 0 + \tilde{\varepsilon} \bar{U}_0 + \tilde{\varepsilon}^2 \bar{U}_1 + \dots, \quad (43)$$

$$\bar{\Theta} = 0 + \tilde{\varepsilon} \bar{\Theta}_0 + \tilde{\varepsilon}^2 \bar{\Theta}_1 + \dots, \quad (44)$$

wobei wegen $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ Terme höherer Potenzen von $\tilde{\varepsilon}$ vernachlässigt werden dürfen^{A14}).

Nach der Grenzschicht-Approximation befinden sich in den jeweiligen Gleichungen mit Ausnahme der Auftriebsterme nur noch Terme in der gleichen Größenordnung. In erster

Näherung werden nun die jeweils führenden Terme unter Berücksichtigung von $\tilde{\varepsilon}$ beibehalten. In zweiter Näherung folgen die Gleichungen mit den Termen der nächst höheren Ordnung. Die Auftriebsterme werden hierbei in der zweiten Näherung berücksichtigt, weil eine Beschreibung für *schwachen Auftrieb* entwickelt werden soll. Hierzu muß $O\left(\frac{Gr}{\varepsilon Re^2} \bar{\Theta}\right) \leq O(\tilde{\varepsilon})$ sein.

Der Widerstandsbeiwert c_w ist von der REYNOLDS-Zahl abhängig und wird je nach dessen Wahl der Literatur entnommen.

3.1.1 Gleichungssystem in erster Näherung

Das Gleichungssystem der ersten Näherung beschreibt die Geschwindigkeitsprofile in R - und Z -Richtung (vgl. auch SWAIN 1929) und den passiven Wärmetransport in der fernen Nachlaufströmung:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\bar{U}_0}{R} + \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial R} - \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial Z} - \frac{\bar{W}_0}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial Z} = 0, \quad (45)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in Z -Richtung:

$$\frac{\partial \bar{W}_0}{\partial Z} + \frac{\bar{W}_0}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial Z} + \frac{\tilde{\varepsilon} L^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \bar{W}_0}{\partial R} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial R} \frac{\partial^2 \bar{W}_0}{\partial R^2} \right) = 0, \quad (46)$$

Energiegleichung:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_0}{\partial Z} + \frac{\bar{\Theta}_0}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial Z} + \frac{\tilde{\varepsilon} L^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial R} \frac{\partial \bar{\Theta}_0}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \bar{W}_0}{\partial R} \frac{\partial \bar{\Theta}_0}{\partial R} \right) \right) = 0, \quad (47)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} R = 0 & : \quad \bar{U}_0 = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Theta}_0}{\partial R} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ R \rightarrow \infty & : \quad \bar{W}_0 \rightarrow 0, \quad \bar{\Theta}_0 \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial R} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (48)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\tilde{\varepsilon} \int_0^{\infty} R \bar{W}_0 \, dR = \frac{c_w}{16}, \quad (49)$$

integrale Wärmebilanz:

$$\tilde{\varepsilon} Re \int_0^{\infty} R \bar{\Theta}_0 \, dR = 1. \quad (50)$$

3.1.2 Gleichungssystem in zweiter Näherung

Im Gleichungssystem der zweiten Näherung werden nichtlineare Korrekturterme und der Auftriebseffekt berücksichtigt:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\overline{U}_1}{R} + \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial R} - \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial Z} - \frac{\overline{W}_1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial Z} = 0, \quad (51)$$

NAVIER–STOKES–Gleichung in Z -Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial Z} + \frac{\overline{W}_1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial Z} + 2 \frac{\varepsilon L^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \overline{W}_0}{\partial R} \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial R} + \frac{\partial \overline{W}_0}{\partial R} \frac{\partial^2 \overline{W}_1}{\partial R^2} + \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial R} \frac{\partial^2 \overline{W}_0}{\partial R^2} \right) \\ = \overline{W}_0 \frac{\partial \overline{W}_0}{\partial Z} - \overline{U}_0 \frac{\partial \overline{W}_0}{\partial R} + \frac{\overline{W}_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} - \frac{Gr}{\varepsilon \varepsilon Re^2} \overline{\Theta}_0, \end{aligned} \quad (52)$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\Theta}_1}{\partial Z} + \frac{\overline{\Theta}_1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial Z} + \frac{\varepsilon L^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \overline{W}_0}{\partial R} \frac{\partial \overline{\Theta}_1}{\partial R} + \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial R} \frac{\partial \overline{\Theta}_0}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \overline{W}_0}{\partial R} \frac{\partial \overline{\Theta}_1}{\partial R} + \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial R} \frac{\partial \overline{\Theta}_0}{\partial R} \right) \right) \\ = \overline{W}_0 \frac{\partial \overline{\Theta}_0}{\partial Z} - \overline{U}_0 \frac{\partial \overline{\Theta}_0}{\partial R} + \frac{\overline{W}_0 \overline{\Theta}_0}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (53)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} R = 0 \quad : \quad \overline{U}_1 = 0, \quad \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\Theta}_1}{\partial R} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ R \rightarrow \infty \quad : \quad \overline{W}_1 \rightarrow 0, \quad \overline{\Theta}_1 \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial R} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (54)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^\infty R \overline{W}_1 \, dR = \int_0^\infty R \overline{W}_0^2 \, dR - \frac{Gr}{\varepsilon^2 \varepsilon Re^2} \int_{-\infty}^Z \int_0^\infty \varepsilon R \overline{\Theta}_0 \, dR \, dZ, \quad (55)$$

integrale Wärmebilanz:

$$\int_0^\infty R \overline{\Theta}_1 \, dR = \int_0^\infty R \overline{W}_0 \overline{\Theta}_0 \, dR. \quad (56)$$

3.2 Ähnlichkeitstransformation und Lösung der Gleichungssysteme

Die Gleichungssysteme beider Näherungen sind partielle Differentialgleichungen in R und Z . Es wird erwartet, daß die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der Strömung im

fernen Nachlauf einander ähnlich sind und lediglich durch das Anwachsen des Nachlaufdurchmessers mit wachsender Entfernung Z von der Kugel gestreckt werden. Durch die Einführung der Ähnlichkeitsvariablen

$$\eta = \frac{R}{Z^n} \quad (57)$$

als mitwachsende Koordinate sollen die partiellen Differentialgleichungssysteme (in R und Z) in gewöhnliche (in η) überführt werden.

3.2.1 Ähnlichkeitstransformation der ersten Näherung

Die Strömungsgrößen \overline{W}_0 , \overline{U}_0 , $\overline{\Theta}_0$ werden als Produkte aus Formfunktionen (F_0 , G_0 , H_0) in η und Amplitudenfunktionen (f_0 , g_0 , h_0) in Z beschrieben^{A15}). Die Amplitudenfunktionen werden hierbei als Potenzansätze von Z formuliert. In den asymptotischen Ansätzen der Strömungsgrößen (Gleichungen (42 – 44)) ist mit $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Z^m}$ bereits ein Potenzansatz eingeführt. Dadurch kann eine der Amplitudenfunktionen zu Eins gesetzt werden^{A16}). Mit $f_0(Z) = Z^p = 1$ folgt:

$$\overline{W}_0 = F_0(\eta) f_0(Z) = F_0, \quad (58)$$

$$\overline{U}_0 = G_0(\eta) g_0(Z) = G_0 Z^q, \quad (59)$$

$$\overline{\Theta}_0 = H_0(\eta) h_0(Z) = H_0 Z^s. \quad (60)$$

Die Ähnlichkeitsvariable η berücksichtigt das Wachsen des Nachlaufdurchmessers bei wachsendem Abstand von der Kugel. Sie stellt eine modifizierte Koordinate R dar. Da sich die Mischungsweglänge l proportional zum Nachlaufdurchmesser verhält [SCHLICHTING 1982, S. 760], muß dessen Ähnlichkeitsparameter η_L analog zu der Ähnlichkeitsvariablen η erzeugt werden (Gleichung (57)), d.h.

$$\eta_L = \frac{L}{Z^n} = \textit{konstant}. \quad (61)$$

Aus den Gleichungen (41, 57, 61) ergeben sich für die Differentiation und Integration folgende Rechenvorschriften:

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial Z} = -\frac{m}{Z^{m+1}}, \quad \partial R = Z^n \partial \eta, \quad \partial Z = -\frac{Z}{n\eta} \partial \eta. \quad (62)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (41, 57 – 62) in das Gleichungssystem der ersten Näherung (Gleichungen (45 – 50)) zeigt sich, daß für

$$m = \frac{2}{3}, \quad n = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad s = 0 \quad (63)$$

die Abhängigkeiten von Z verschwinden und somit ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen⁷ in η entsteht^{A17}). Weiterhin sind nun auch die Größen

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Z^{\frac{2}{3}}}, \quad \eta = \frac{R}{Z^{\frac{1}{3}}} \quad \text{und} \quad \eta_L = \frac{L}{Z^{\frac{1}{3}}} \quad (64)$$

als Funktionen von Z festgelegt.

Quadriert man $\eta_L = \frac{L}{Z^{\frac{1}{3}}}$ und sieht $Z^{\frac{2}{3}}$ analog zur Grenzschicht-Approximation in der Größenordnung $O(1)$, dann muß $\eta_L^2 = O(L^2)$ sein. Mit der Festlegung

$$\eta_L^2 = \varepsilon \quad (65)$$

wird wegen $O(\varepsilon) = O(L^2)$ (Kapitel 2.2.5) diese Forderung erfüllt.

Das bezüglich der Formfunktionen F_0 , G_0 und H_0 zu lösende Differentialgleichungssystem ergibt sich nun zu:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\eta}{3} F_0' + \frac{2}{3} F_0 + G_0' + \frac{1}{\eta} G_0 = 0, \quad (66)$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in Z -Richtung:

$$2F_0' F_0'' + \frac{1}{\eta} F_0'^2 - \frac{\eta}{3} F_0' - \frac{2}{3} F_0 = 0, \quad (67)$$

Energiegleichung:

$$F_0' H_0'' + H_0' F_0'' + \frac{1}{\eta} F_0' H_0' - \frac{\eta}{3} H_0' - \frac{2}{3} H_0 = 0, \quad (68)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : & G_0 = 0, & F_0' = 0, & H_0' = 0 & \text{(Symmetrie)}, \\ \eta \rightarrow \infty & : & F_0 \rightarrow 0, & H_0 \rightarrow 0, & G_0' \rightarrow 0 & \text{(Außenfeld)}, \end{aligned} \quad (69)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^{\infty} \eta F_0 \, d\eta = \frac{c_w}{16}, \quad (70)$$

⁷Nach η abgeleitete Größen werden im folgenden gestrichen dargestellt ($\frac{\partial f}{\partial \eta} := f'$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} := f''$)

integrale Wärmebilanz:

$$Re \int_0^{\infty} \eta H_0 d\eta = 1. \quad (71)$$

3.2.2 Analytische Lösung der ersten Näherung

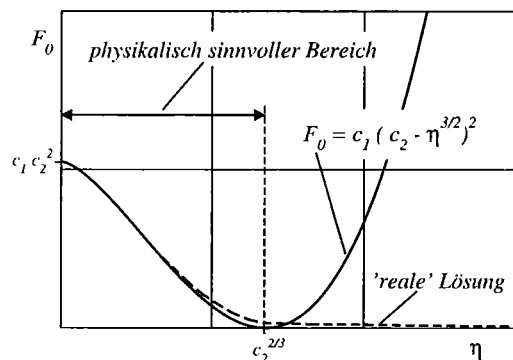


Abbildung 4: Lösungsansatz für die Formfunktion F_0 .

In Anlehnung an die analytischen Lösungen für den ebenen Fall (Zylinderumströmung) [SCHLICHTING 1982, S. 759 ff.][SIEGEL & EHRHARD 1996] und für den rotationssymmetrischen Fall [SWAIN 1929] wird der Lösungsansatz

$$F_0 = c_1 \left(c_2 - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 \quad (72)$$

und dessen Ableitungen F_0' und F_0'' in die NAVIER-STOKES-Gleichung (67) ein-

gesetzt. Ein Koeffizientenvergleich bezüglich der verschiedenen Potenzen von η ergibt die Konstanten $c_1 = \frac{1}{27}$ und $c_2 \in \mathbf{R}$.

Die Kontinuitätsgleichung (66) läßt sich nach Einsetzen des Lösungsansatzes für F_0 direkt integrieren und nach der Formfunktion G_0 auflösen. Die dabei auftretende Integrationskonstante wird wegen der Randbedingung auf der Rotationsachse ($G_0 = 0$) zu Null und c_2 bleibt nach wie vor beliebig.

Es zeigt sich, daß der Lösungsansatz für die Formfunktion F_0 nur im Bereich $0 \leq \eta \leq c_2^{\frac{2}{3}}$ physikalisch sinnvoll ist (Abbildung 4). Für die integralen Bilanzen führt dies zu der Veränderung der Integrationsgrenzen. Die Integration muß nun auf den Bereich $0 \leq \eta \leq c_2^{\frac{2}{3}}$ erstreckt werden. Auch die Randbedingungen im Außenfeld sind nun bei $\eta = c_2^{\frac{2}{3}}$ zu erfüllen. Die Stelle $\eta = \eta_R = c_2^{\frac{2}{3}}$ kann als Rand des turbulenten Nachlaufgebietes aufgefaßt werden. Die Auswertung der integralen Impulsbilanz (70) legt nun die Konstante c_2 in Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes c_w fest mit $c_2 = \left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}}$.

Da die turbulenten Austauschmechanismen für Impuls und Wärme als gleich angenommen werden (Kapitel 2.2.3), zeigen die Erhaltungsgleichungen dieser Größen auch ein ähnliches Aussehen (Gleichungen (67, 68)). Für die Formfunktion H_0 bedeutet das, daß sie in der Form der Funktion F_0 gleichen sollte und sich lediglich in der Amplitude unterscheidet. Dies führt zu dem Ansatz

$$H_0 = c_3 \left(c_2 - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 . \quad (73)$$

Das Einsetzen der Funktionen H_0 und F_0 in die Energiegleichung (68) liefert $c_3 \in \mathbf{R}$. Aus der integralen Wärmebilanz (71) folgt letztlich die Konstante $c_3 = \frac{16}{27 Re c_w}$.

Die Formfunktionen F_0 , G_0 und H_0 sind nun als analytische Lösungen der Differentialgleichungen mit den Rand- und Integralbedingungen (Gleichungen (66 – 71)) bekannt und lauten:

$$F_0 = \frac{1}{27} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 , \quad (74)$$

$$G_0 = -\frac{\eta}{81} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 , \quad (75)$$

$$H_0 = \frac{16}{27 Re c_w} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 . \quad (76)$$

Der Rand des turbulenten Nachlaufgebietes liegt bei

$$\eta_R = \left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{1}{5}} . \quad (77)$$

Die Rücktransformationen in zunächst dimensionslose^{A18)} und dann in dimensionsbehaftete Größen liefert:

$$\bar{w} = w_\infty - \frac{w_\infty d^{\frac{2}{3}}}{27 \eta_L^{\frac{4}{3}} z^{\frac{2}{3}}} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{d \eta_L z^{\frac{1}{2}}} \right)^2 , \quad (78)$$

$$\bar{u} = -\frac{w_\infty d^{\frac{2}{3}} r}{81 \eta_L^{\frac{4}{3}} z^{\frac{5}{3}}} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{d \eta_L z^{\frac{1}{2}}} \right)^2 , \quad (79)$$

$$\bar{T} = T_\infty + \frac{16 d^{\frac{2}{3}} \Delta T}{27 Re c_w \eta_L^{\frac{4}{3}} z^{\frac{2}{3}}} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{d \eta_L z^{\frac{1}{2}}} \right)^2 , \quad (80)$$

mit dem Rand des turbulenten Nachlaufgebietes bei

$$r_R = \left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{1}{5}} \eta_L^{\frac{2}{3}} d^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}} . \quad (81)$$

3.2.3 Ähnlichkeitstransformation der zweiten Näherung

Im Gleichungssystem der zweiten Näherung (Gleichungen (51 – 56)) führen Auftriebsterme und Inhomogenitäten auf den rechten Seiten zu jeweils unterschiedlichen Formfunktionen in den Potenzansätzen für \overline{W}_1 , \overline{U}_1 und $\overline{\Theta}_1$. Aus diesem Grund werden hier zweigliedrige Potenzansätze eingeführt, wobei Terme mit dem Index a den Auftrieb berücksichtigen sollen und Terme mit dem Index b die übrigen Inhomogenitäten. Auch hier werden die Amplitudenfunktionen als Potenzansätze von Z formuliert:

$$\overline{W}_1 = F_{1a}(\eta) f_{1a}(Z) + F_{1b}(\eta) f_{1b}(Z) = F_{1a} Z^w + F_{1b} Z^t, \quad (82)$$

$$\overline{U}_1 = G_{1a}(\eta) g_{1a}(Z) + G_{1b}(\eta) g_{1b}(Z) = G_{1a} Z^x + G_{1b} Z^u, \quad (83)$$

$$\overline{\Theta}_1 = H_{1a}(\eta) h_{1a}(Z) + H_{1b}(\eta) h_{1b}(Z) = H_{1a} Z^y + H_{1b} Z^v. \quad (84)$$

Nach Einsetzen dieser Ansätze und der aus Kapitel 3.2.1 bekannten Abhängigkeiten in die Gleichungen der zweiten Näherung werden diese nach dem oben diskutierten Grundgedanken in zwei Gleichungssysteme separiert. Für die Exponenten

$$t = 0, \quad u = -\frac{2}{3}, \quad v = 0, \quad w = \frac{5}{3}, \quad x = 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{5}{3} \quad (85)$$

verschwinden mit Ausnahme der integralen Impulsbilanz a) die Abhängigkeiten in Z und es entstehen zwei gewöhnliche Differentialgleichungssysteme in η ^{A19}).

Die aus der ersten Näherung gewonnenen Formfunktionen (Gleichungen (74 – 76)) und Integrationsgrenzen werden in diese Gleichungssysteme eingesetzt. In der integralen Impulsbilanz a) wird die untere Integrationsgrenze des Integrals nach Z von $Z = -\infty$ auf $Z = 0$ verschoben. Dies ist ohne weiteres zulässig, da über die Temperaturabweichung $\overline{\Theta}_0$ von der Außenströmung integriert wird. Der Auftriebsterm der integralen Impulsbilanz a) lässt sich nun integrieren, wodurch auch hier die Abhängigkeit in Z verschwindet.

Für die Unbekannten F_{1a} , F_{1b} , G_{1a} , G_{1b} , H_{1a} und H_{1b} erhält man mit $c_2 = \left(\frac{105 c_w}{8}\right)^{\frac{3}{10}}$ folgende zwei inhomogene, nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung mit Rand- und Integralbedingungen:

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\eta}{3} F'_{1a} - \frac{1}{3} F_{1a} + G'_{1a} + \frac{1}{\eta} G_{1a} = 0, \quad (86)$$

NAVIER–STOKES–Gleichung:

$$F''_{1a} + \frac{3}{2\eta} F'_{1a} - \frac{3}{2\eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} F_{1a} = \frac{8 Gr (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})}{3 Re^3 c_w \eta_L^2 \eta^{\frac{1}{2}}}, \quad (87)$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} H''_{1a} + \frac{3}{2\eta} \left(\frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{c_2 - \eta^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) H'_{1a} - \frac{3}{\eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} H_{1a} \\ + \frac{16}{Re c_w} F''_{1a} + \frac{24}{Re c_w \eta} \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{c_2 - \eta^{\frac{3}{2}}} \right) F'_{1a} = 0, \end{aligned} \quad (88)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : G_{1a} = 0, \quad F'_{1a} = 0, \quad H'_{1a} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ \eta = c_2^{\frac{2}{3}} & : F_{1a} = 0, \quad H_{1a} = 0, \quad G'_{1a} = 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (89)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^{c_2^{\frac{2}{3}}} \eta F_{1a} d\eta = - \frac{Gr}{Re^3 \eta_L^2}, \quad (90)$$

integrale Wärmebilanz:

$$\int_0^{c_2^{\frac{2}{3}}} \eta H_{1a} d\eta = 0. \quad (91)$$

b) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\eta}{3} F'_{1b} + \frac{4}{3} F_{1b} + G'_{1b} + \frac{1}{\eta} G_{1b} = 0, \quad (92)$$

NAVIER–STOKES–Gleichung:

$$F''_{1b} + \frac{3}{2\eta} F'_{1b} + \frac{6}{\eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} F_{1b} = \frac{(c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})^3}{243 \eta^{\frac{1}{2}}}, \quad (93)$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} H''_{1b} + \frac{3}{2\eta} \left(\frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{c_2 - \eta^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) H'_{1b} + \frac{12}{\eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} H_{1b} \\ + \frac{16}{Re c_w} F''_{1b} + \frac{24}{Re c_w \eta} \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{c_2 - \eta^{\frac{3}{2}}} \right) F'_{1b} = \frac{32 (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})^3}{243 Re c_w \eta^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (94)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : G_{1b} = 0, \quad F'_{1b} = 0, \quad H'_{1b} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ \eta = c_2^{\frac{2}{3}} & : F_{1b} = 0, \quad H_{1b} = 0, \quad G'_{1b} = 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned} \quad (95)$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^{c_2^{\frac{2}{3}}} \eta F_{1b} d\eta = \frac{c_2^2 c_w}{832}, \quad (96)$$

integrale Wärmebilanz:

$$\int_0^{c_2^{\frac{2}{3}}} \eta H_{1b} d\eta = \frac{c_2^2}{52 Re}. \quad (97)$$

3.2.4 Numerische Lösung der zweiten Näherung

Die beiden Gleichungssysteme (86 – 91) und (92 – 97) können nicht mit vertretbarem Aufwand analytisch gelöst werden. Deshalb wird eine numerische Integration mittels der Routine DC02AD aus der mathematischen Harwell-Programmbibliothek durchgeführt [HARWELL 1980]. Hierzu müssen die Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung durch folgende Substitutionen in Differentialgleichungssysteme erster Ordnung überführt werden [EHRHARD 2000, Anhang]^{A20}):

a)

$$y_{1a} = F'_{1a} \quad \rightarrow \quad y'_{1a} = F''_{1a}, \quad (98)$$

$$y_{2a} = F_{1a} \quad \rightarrow \quad y'_{2a} = y_{1a}, \quad (99)$$

$$y_{3a} = \int \eta F_{1a} d\eta \quad \rightarrow \quad y'_{3a} = \eta y_{2a}, \quad (100)$$

$$y_{4a} = G_{1a} \quad \rightarrow \quad y'_{4a} = G'_{1a}, \quad (101)$$

$$y_{5a} = H'_{1a} \quad \rightarrow \quad y'_{5a} = H''_{1a}, \quad (102)$$

$$y_{6a} = H_{1a} \quad \rightarrow \quad y'_{6a} = y_{5a}, \quad (103)$$

$$y_{7a} = \int \eta H_{1a} d\eta \quad \rightarrow \quad y'_{7a} = \eta y_{6a}. \quad (104)$$

b)

$$y_{1b} = F'_{1b} \quad \rightarrow \quad y'_{1b} = F''_{1b}, \quad (105)$$

$$y_{2b} = F_{1b} \quad \rightarrow \quad y'_{2b} = y_{1b} , \quad (106)$$

$$y_{3b} = \int \eta F_{1b} d\eta \quad \rightarrow \quad y'_{3b} = \eta y_{2b} , \quad (107)$$

$$y_{4b} = G_{1b} \quad \rightarrow \quad y'_{4b} = G'_{1b} , \quad (108)$$

$$y_{5b} = H'_{1b} \quad \rightarrow \quad y'_{5b} = H''_{1b} , \quad (109)$$

$$y_{6b} = H_{1b} \quad \rightarrow \quad y'_{6b} = y_{5b} , \quad (110)$$

$$y_{7b} = \int \eta H_{1b} d\eta \quad \rightarrow \quad y'_{7b} = \eta y_{6b} . \quad (111)$$

Diese Substitutionen werden in die Gleichungen (86 – 91) und (92 – 97) eingesetzt. Eine Auflösung der Gleichungen nach y'_{ij} ($i = 1, \dots, 7$; $j = a, b$) ergibt:

a) Kontinuitätsgleichung:

$$y'_{4a} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\eta}{3} y_{2a} - \frac{\eta^2}{3} y_{1a} - y_{4a} \right] , \quad (112)$$

NAVIER–STOKES–Gleichung:

$$y'_{1a} = \frac{1}{\eta (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} \left[\frac{8 Gr \eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})^2}{3 Re^3 c_w \eta_L^2} - \frac{3 (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})}{2} y_{1a} + \frac{3 \eta^{\frac{1}{2}}}{2} y_{2a} \right] , \quad (113)$$

$$y'_{2a} = y_{1a} , \quad (114)$$

Energiegleichung:

$$y'_{5a} = \frac{1}{\eta (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} \left[3 \eta^{\frac{1}{2}} y_{6a} - \frac{3 c_2}{2} y_{5a} - \frac{16 \eta (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})}{Re c_w} y'_{1a} - \frac{24 (c_2 - 2 \eta^{\frac{3}{2}})}{Re c_w} y_{1a} \right] , \quad (115)$$

$$y'_{6a} = y_{5a} , \quad (116)$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad y_{1a} = 0 , \quad y_{2a} = ? , \quad y_{3a} = 0 , \quad y_{4a} = 0 , \\ y_{5a} = 0 , \quad y_{6a} = ? , \quad y_{7a} = 0 , \end{aligned} \quad (117)$$

$$\eta = c_2^{\frac{2}{3}} : \quad y_{1a} = ? , \quad y_{2a} = 0 , \quad y_{3a} = -\frac{Gr}{Re^3 \eta_L^2} , \quad y_{4a} = ? ,$$

$$y_{5a} = ? , \quad y_{6a} = 0 , \quad y_{7a} = 0 , \quad y'_{4a} = 0 ,$$
(118)

integrale Impulsbilanz:

$$y'_{3a} = \eta y_{2a} ,$$
(119)

integrale Wärmebilanz:

$$y'_{7a} = \eta y_{6a} .$$
(120)

b) Kontinuitätsgleichung:

$$y'_{4b} = \frac{1}{\eta} \left[-\frac{4\eta}{3} y_{2b} - \frac{\eta^2}{3} y_{1b} - y_{4b} \right] ,$$
(121)

NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$y'_{1b} = \frac{1}{\eta (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} \left[\frac{\eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})^4}{243} - \frac{3 (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})}{2} y_{1b} - 6 \eta^{\frac{1}{2}} y_{2b} \right] ,$$
(122)

$$y'_{2b} = y_{1b} ,$$
(123)

Energiegleichung:

$$y'_{5b} = \frac{1}{\eta (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})} \left[\frac{32 \eta^{\frac{1}{2}} (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})^4}{243 Re c_w} - 12 \eta^{\frac{1}{2}} y_{6b} - \frac{3 c_2}{2} y_{5b} \right. \\ \left. - \frac{16 \eta (c_2 - \eta^{\frac{3}{2}})}{Re c_w} y'_{1b} - \frac{24 (c_2 - 2 \eta^{\frac{3}{2}})}{Re c_w} y_{1b} \right] ,$$
(124)

$$y'_{6b} = y_{5b} ,$$
(125)

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\eta = 0 : \quad y_{1b} = 0 , \quad y_{2b} = ? , \quad y_{3b} = 0 , \quad y_{4b} = 0 ,$$

$$y_{5b} = 0 , \quad y_{6b} = ? , \quad y_{7b} = 0 ,$$
(126)

$$\eta = c_2^{\frac{2}{3}} : \quad y_{1b} = ? , \quad y_{2b} = 0 , \quad y_{3b} = \frac{c_2^2 c_w}{832} , \quad y_{4b} = ? ,$$

$$y_{5b} = ? , \quad y_{6b} = 0 , \quad y_{7b} = \frac{c_2^2}{52 Re} , \quad y'_{4b} = 0 , \quad (127)$$

integrale Impulsbilanz:

$$y'_{3b} = \eta y_{2b} , \quad (128)$$

integrale Wärmebilanz:

$$y'_{7b} = \eta y_{6b} . \quad (129)$$

Die Gleichungen (112 – 120) und (121 – 129) werden von der Rotationsachse aus ($\eta = 0$) zum Nachlauftrand hin ($\eta = c_2^{\frac{2}{3}}$) integriert. Die Startwerte, also die Randbedingungen bei $\eta = 0$ (Gleichungen (117, 126)) müssen hierzu vorgegeben werden. Hierbei werden die noch unbekannt Randbedingungen für y_{2j} und y_{6j} ($j = a, b$) durch einen Iterationsprozeß solange verändert, bis die bekannten Randbedingungen am Nachlauftrand (Gleichungen (118, 127)) erfüllt sind. Die Ergebnisse werden als Wertepaare η, y_{ij} ($i = 1, \dots, 7; j = a, b$) geliefert, wobei η jeweils in 200 Schritten von $\eta = 0$ bis $\eta = c_2^{\frac{2}{3}}$ läuft. Eine Rücktransformation über die Gleichungen (98 – 104) und (105 – 111) führt dann zu den Lösungen der Formfunktionen F_{1j}, G_{1j} und H_{1j} ($j = a, b$) der Gleichungen (86 – 91) und (92 – 97).

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Ergebnisse der ersten Näherung

Die analytischen Ergebnisse der ersten Näherung (Gleichungen (78 – 81)) werden zunächst in dimensionsloser Form dargestellt. Die Entdimensionierung erfolgt hierbei *nicht* skaliert, weil eine Verzerrung der Größenverhältnisse vermieden werden soll.

$$\frac{\bar{w}}{w_\infty} = 1 - \frac{1}{27 \eta_L^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{z}{d} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(c_2 - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 , \quad (130)$$

$$\frac{\bar{u}}{w_\infty} = - \frac{1}{81 \eta_L^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{z}{d} \right)^{-\frac{4}{3}} \eta \left(c_2 - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 , \quad (131)$$

$$\frac{\bar{T} - T_\infty}{\Delta T} = \frac{16}{27 Re c_w \eta_L^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{z}{d} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(c_2 - \eta^{\frac{3}{2}} \right)^2 . \quad (132)$$

Für die Amplituden der Geschwindigkeiten und für die halbe Nachlaufbreite zeigen sich die von SWAIN gefundenen Proportionalitäten

$$1 - \frac{\bar{w}}{w_\infty} \propto \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{\bar{u}}{w_\infty} \propto \frac{1}{z^{\frac{4}{3}}} \quad \text{und} \quad r_R \propto z^{\frac{1}{3}} \quad (133)$$

[SWAIN 1929][SCHLICHTING 1982, S. 754]. Die Temperaturverteilung wurde von SWAIN nicht betrachtet. Sie wird hier in erster Näherung als Folge eines passiven Wärmetransports durch die Strömung beschrieben und zeigt wegen $Pr \simeq 1$ eine zur Hauptströmungsgeschwindigkeit \bar{w} analoge Abhängigkeit

$$\frac{\bar{T} - T_\infty}{\Delta T} \propto \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}}. \quad (134)$$

GERSTEN verwendet einen Exponentialansatz zur Beschreibung des fernen Nachlaufs [SCHLICHTING & GERSTEN 1997, S. 724 ff.]. Wählt man die dort verwendete Konstante α zu $\alpha = 0.043$, zeigen die Vergleiche der Haupt- und Querströmungsgeschwindigkeitsprofile eine hinreichende Übereinstimmung (Abbildungen 5, 6).

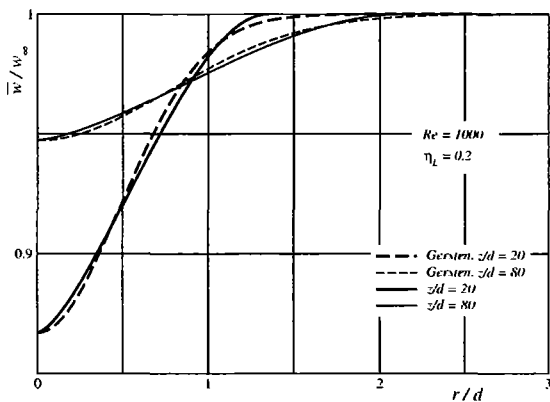


Abbildung 5: Vergleich der Hauptgeschwindigkeitsverteilungen mit GERSTEN.

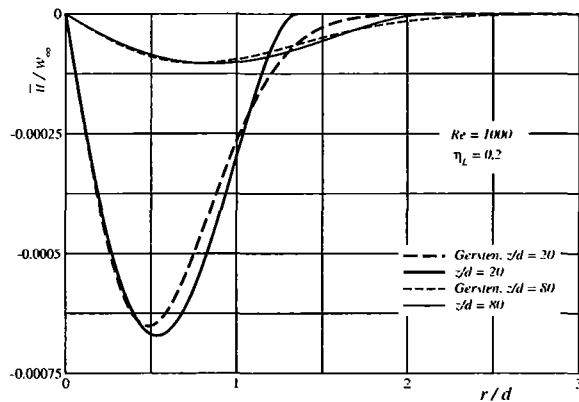


Abbildung 6: Vergleich der Quergeschwindigkeitsverteilungen mit GERSTEN.

Für verschiedene vertikale Abstände von der Kugel werden in den Abbildungen 7, 8 und 9 die Profile der Haupt- und Querströmungsgeschwindigkeiten und der Temperaturdifferenz dargestellt. Um einen Vergleich mit den analytischen Lösungen des ebenen Falls (Zylinderumströmung) von SIEGEL zu ermöglichen, wird dessen Parameterwahl $Re = 1000$, $\eta_L = 0.2$ bei den vertikalen Abständen $\frac{z}{d} = 10, 20, 40, 80$ und 160 von der Kugel übernommen [SIEGEL & EHRHARD 1996]. Der Widerstandsbeiwert der Kugel ergibt sich aus der REYNOLDS-Zahl nach SCHLICHTING zu $c_w \simeq 0.5$ [SCHLICHTING 1982, S.17].

Der Impulsverlust an der Kugel führt im Zentrum des fernen Nachlaufs zu einer Verringerung der Hauptströmungsgeschwindigkeit (Nachlaufdelle) (Abbildung 7). Mit zunehmendem Abstand von der Kugel reicht die Breite dieser Nachlaufdelle immer weiter in die Außenströmung hinein ($r_R \propto z^{\frac{1}{3}}$), während deren Amplitude immer weiter abnimmt ($(1 - \frac{\bar{w}}{w_\infty}) \propto \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}}$).

Die Querströmungsgeschwindigkeit ist wegen des Auffüllens der Nachlaufdelle zur Rotationsachse hin gerichtet und hat ihr Betragsmaximum an der Stelle des größten Geschwindigkeitsgradienten der Hauptströmungsgeschwindigkeit (Abbildung 8).

Die durch die beheizte Kugel zugeführte Wärmemenge führt zu einer Temperaturerhöhung des Nachlaufzentrums (Abbildung 9). Analog zur Hauptströmungsgeschwindigkeit wird diese Wärmemenge mit zunehmendem Abstand von der Kugel in die Außenströmung verteilt.

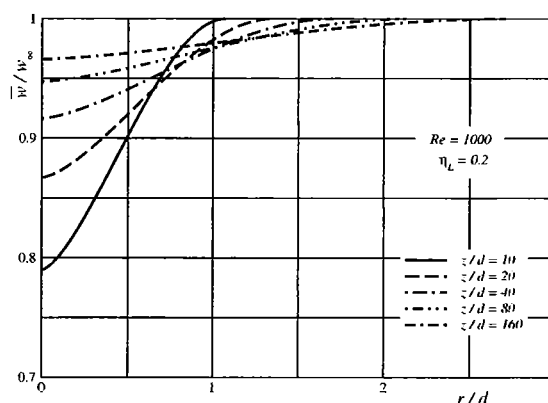


Abbildung 7: Hauptgeschwindigkeitsverteilungen für verschiedene z/d .

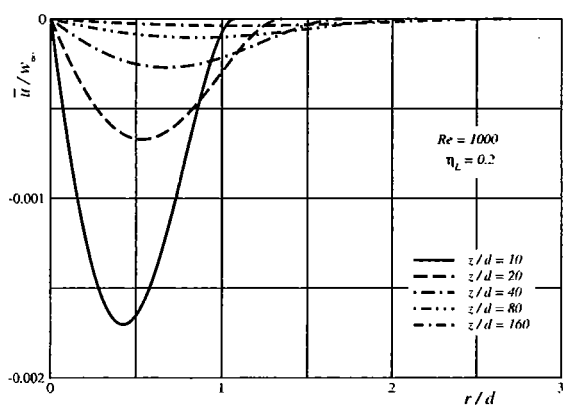


Abbildung 8: Quergeschwindigkeitsverteilungen für verschiedene z/d .

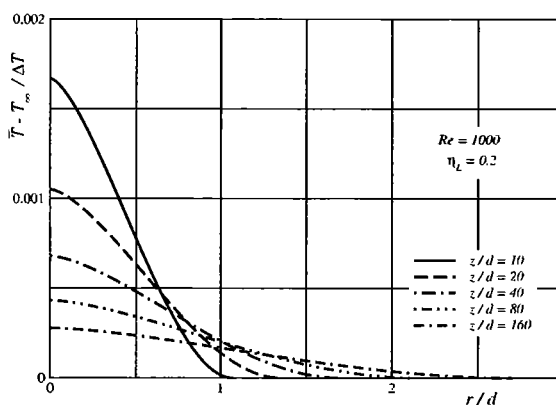


Abbildung 9: Temperaturverteilungen für verschiedene z/d .

Bei vergleichbaren Abständen vom umströmten Körper fällt der Impulsverlust und somit die Nachlaufdelle im rotationssymmetrischen Fall kleiner aus als im ebenen (Abbildung 10) [SIEGEL & EHRHARD 1996]. Dies ist durch den geringeren Widerstandsbeiwert⁸ und durch die in alle Richtungen (rundum) vorliegende Außenströmung zu verstehen. Die durch

⁸Zylinder: $c_w(Re = 1000) \approx 1$ [SCHLICHTING 1982, S. 17]

das Auffüllen der Nachlaufzelle verursachte negative Querströmungsgeschwindigkeit fällt dementsprechend auch geringer aus (Abbildung 11).

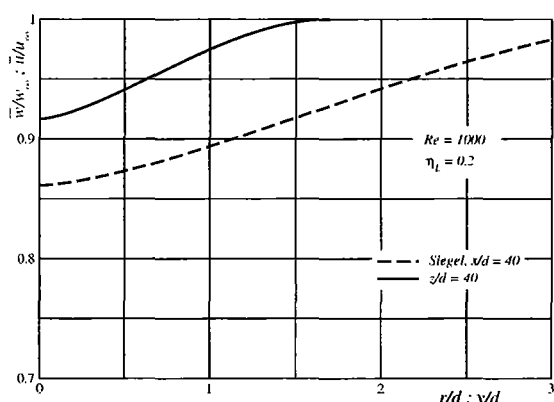


Abbildung 10: Vergleich der Hauptgeschwindigkeitsverteilungen mit SIEGEL.

Da im Gegensatz zum ebenen Nachlauf der rotationssymmetrische Nachlauf aus allen senkrecht zur Rotationsachse stehenden Raumrichtungen aufgefüllt wird, fällt dessen Breitenzunahme mit größer werdendem Abstand vom Körper kleiner aus ($b_{Zylinder} \propto z^{\frac{1}{2}}$, $b_{Kugel} \propto z^{\frac{1}{3}}$). Aufgrund dieser langsameren Breitenzunahme wird die zugeführte Wärmemenge auch entsprechend langsamer in die Außenströmung transportiert, was zu einer höheren Temperaturdifferenz im Zentrum des rotationssymmetrischen Nachlaufs führt (Abbildung 12).

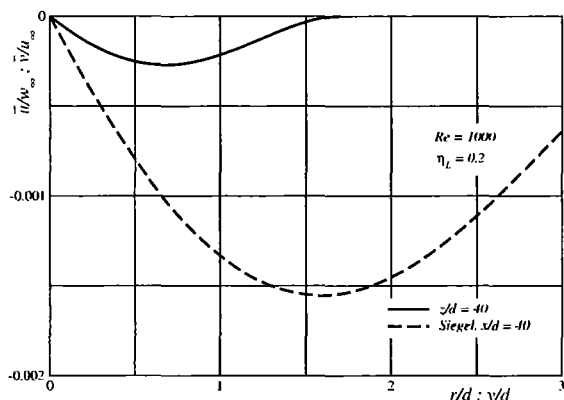


Abbildung 11: Vergleich der Quergeschwindigkeitsverteilungen mit SIEGEL.

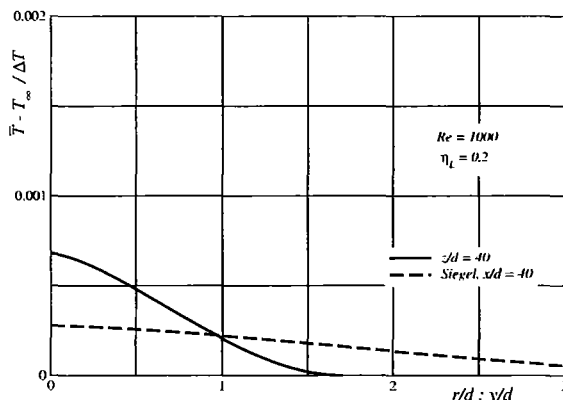


Abbildung 12: Vergleich der Temperaturverteilungen mit SIEGEL.

4.2 Superponierte Gesamtlösung

Zur Gesamtlösung müssen die numerisch berechneten Lösungen der Gleichungssysteme der zweiten Näherung mit den Lösungen der ersten Näherung gemäß der Potenzansätze (42 – 44) überlagert werden (Abbildungen 13, 14, 15). Die Korrekturen aus dem Gleichungssystem (92 – 97) führen hierbei erwartungsgemäß zu einer geringen Änderung der Profile der ersten Näherung. Der Auftriebsanteil hingegen (Gleichungen (86 – 91)) kann, je nach Wahl der GRASHOF-Zahl, zu erheblichen Änderungen der Profile der ersten Näherung führen. Durch die Auftriebswirkung wird im Zentrum des Nachlaufs Fluid beschleunigt und nach oben

hin wegtransportiert. Das Wiederauffüllen des Nachlaufs aus der Außenströmung führt zu einer Querströmungsgeschwindigkeit über den Nachlauftrand hinweg (Abbildung 14).

Im folgenden werden die Parameter $\frac{z}{d}$, η_L , Re und Gr variiert und dessen Auswirkungen auf den Nachlauf diskutiert. Hierbei werden die jeweils nicht zu variierenden Parameter bei $\frac{z}{d} = 40$, $\eta_L = 0.2$, $Re = 1000$ und $Gr = 0$ festgehalten.

Variation des Abstandes $\frac{z}{d}$ von der Kugel:

In den Abbildungen 16, 17 und 18 werden analog zu den Abbildungen 7, 8 und 9 (erste Näherung) verschiedene Abstände $\frac{z}{d}$ von der Kugel betrachtet. Auch hier werden sowohl der durch den Kugelwiderstand entstandene Impulsverlust als auch die zugeführte Wärmemenge mit zunehmendem Abstand von der Kugel in die Außenströmung verteilt.

Variation des Mischungsweges η_L :

Der Mischungsweg kann als Maß für die Stärke der Turbulenz, also der Vermischung des Fluids angesehen werden. Größer werdende Mischungswege führen daher zu einer effektiveren Verteilung von Impulsverlust und Wärme quer zur Strömungsrichtung (Abbildungen 19, 20, 21).

Variation der REYNOLDS-Zahl:

Bei größer werdender REYNOLDS-Zahl ohne Auftrieb ($Gr = 0$) wird lediglich die Temperaturdifferenz von Nachlauf und Außenströmung geringer (Abbildung 24), die Geschwindigkeitsprofile verändern sich nicht (Abbildungen 22, 23). Das liegt daran, daß hier in allen Fällen mit einem Widerstandsbeiwert von $c_w = 0.5$ gerechnet wird^{A21}).

Berücksichtigt man zusätzlich einen Auftrieb (z. B. $Gr = 10^5$), dann ist mit zunehmender REYNOLDS-Zahl eine Verringerung der Auftriebswirkung zu erkennen (Abbildungen 25, 26, 27). Durch höhere Volumenströme bei höheren REYNOLDS-Zahlen wird die vorgegebene Wärmemenge an eine größere Fluidmenge abgegeben, was zu einer geringeren Temperaturdifferenz von Nachlauf und Außenströmung und somit zu geringerem Auftrieb führt.

Variation der GRASHOF-Zahl:

Bei konstanter REYNOLDS-Zahl führt eine Erhöhung der GRASHOF-Zahl zu einer stärkeren Erwärmung (Abbildung 30) und aufgrund der daraus resultierenden größeren Auftriebswirkung zu einer Beschleunigung des Fluids im Nachlaufzentrum (Abbildung 28). Entsprechend steigt auch der Zustrom von Fluid aus dem Außenraum (Abbildung 29).

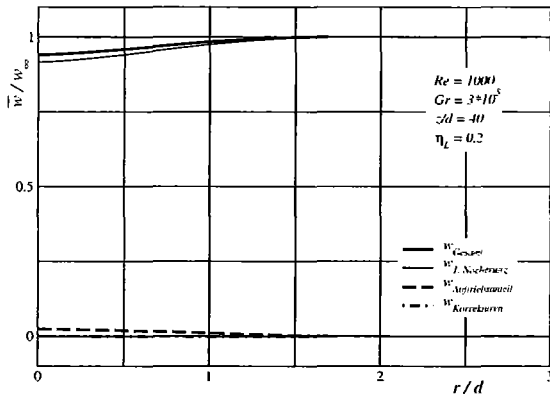


Abbildung 13: Superposition der Hauptgeschwindigkeitsverteilung.

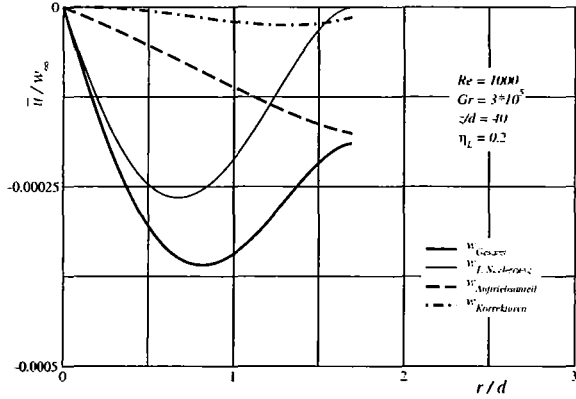


Abbildung 14: Superposition der Quergeschwindigkeitsverteilung.

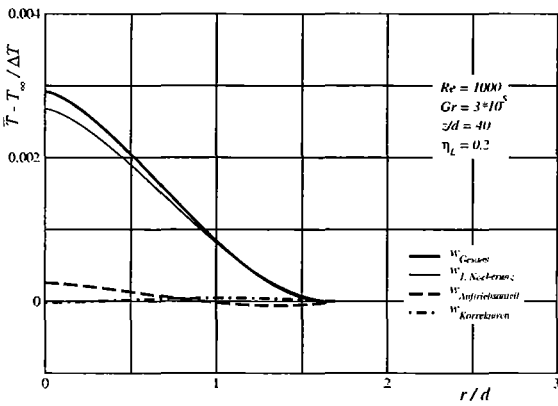


Abbildung 15: Superposition der Temperaturverteilung.

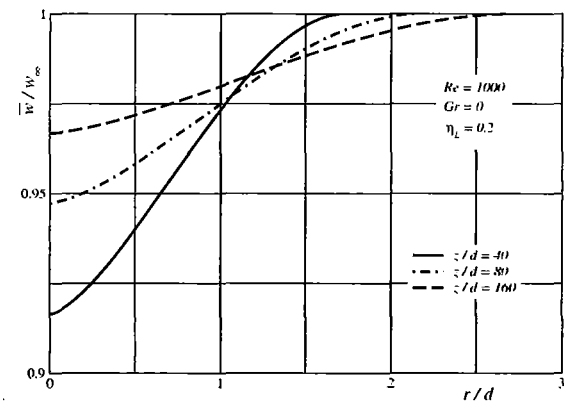


Abbildung 16: Hauptgeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Abständen von der Kugel.

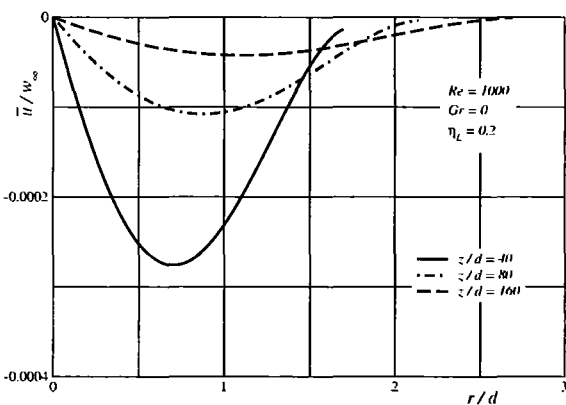


Abbildung 17: Quergeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Abständen von der Kugel.

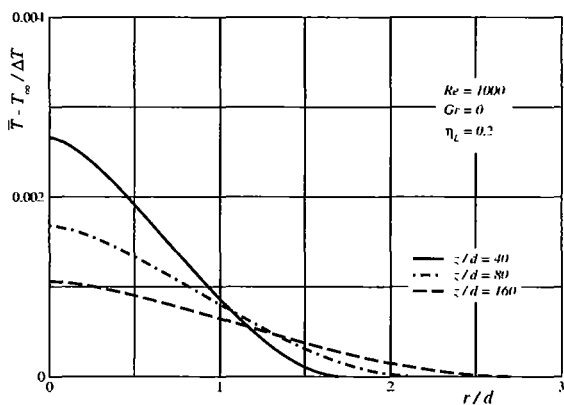


Abbildung 18: Temperaturverteilungen bei verschiedenen Abständen von der Kugel.

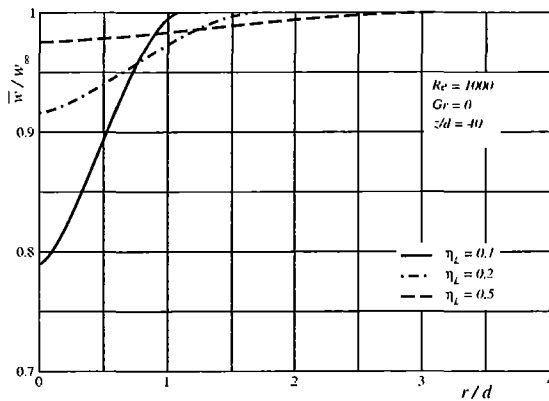


Abbildung 19: Hauptgeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Mischungswegen.

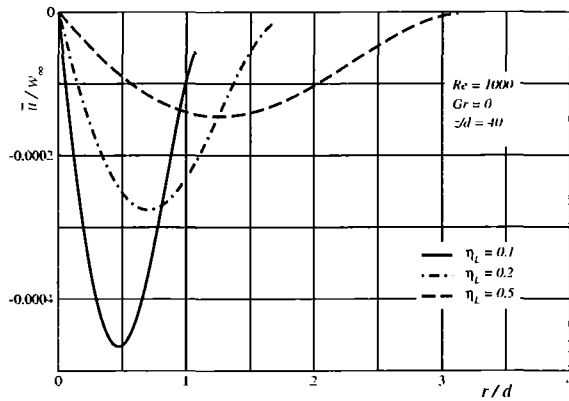


Abbildung 20: Quergeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Mischungswegen.

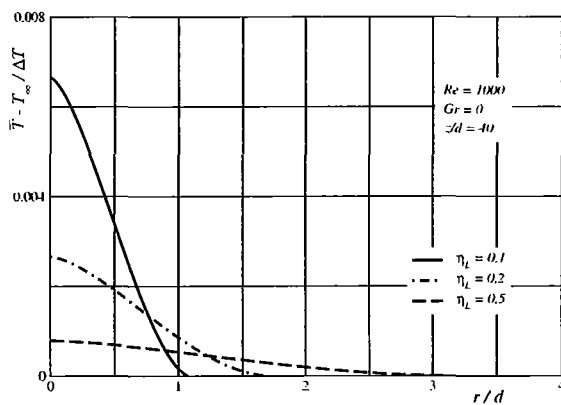


Abbildung 21: Temperaturverteilungen bei verschiedenen Mischungswegen.

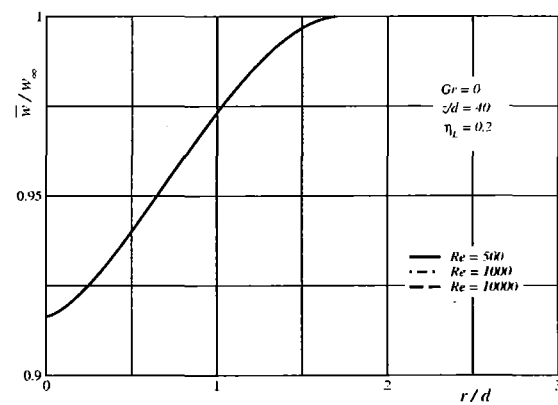


Abbildung 22: Hauptgeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen (ohne Auftrieb).

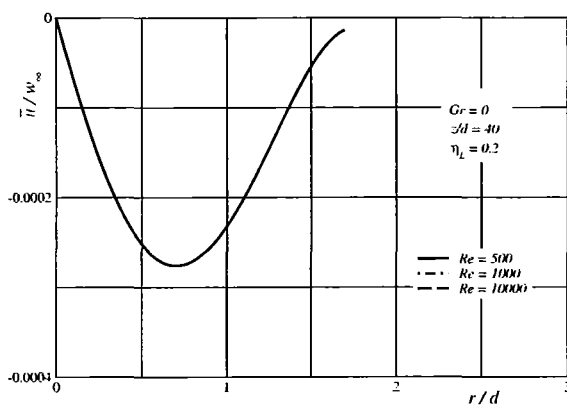


Abbildung 23: Quergeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen (ohne Auftrieb).

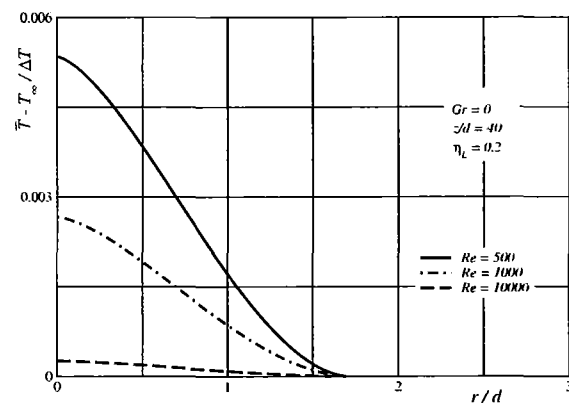


Abbildung 24: Temperaturverteilungen bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen (ohne Auftrieb).

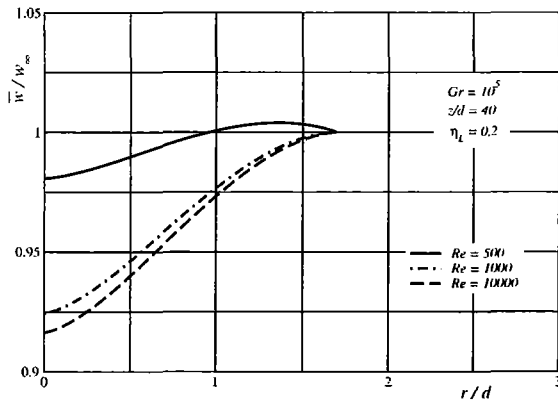


Abbildung 25: Hauptgeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen (mit Auftrieb).

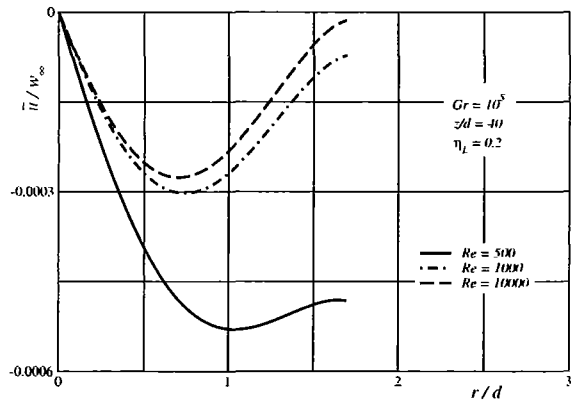


Abbildung 26: Quergeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen (mit Auftrieb).

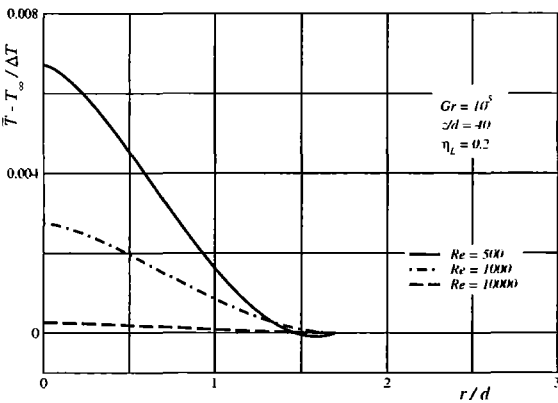


Abbildung 27: Temperaturverteilungen bei verschiedenen REYNOLDS-Zahlen (mit Auftrieb).

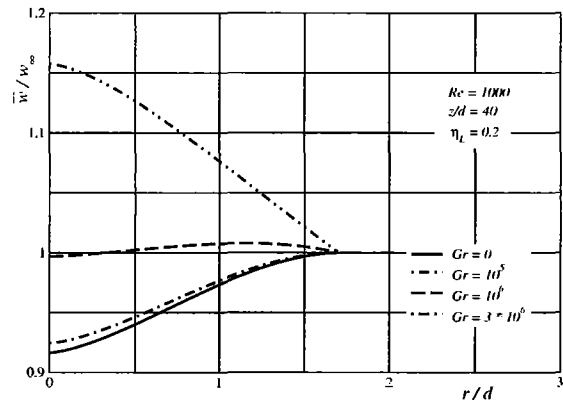


Abbildung 28: Hauptgeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen GRASHOF-Zahlen.

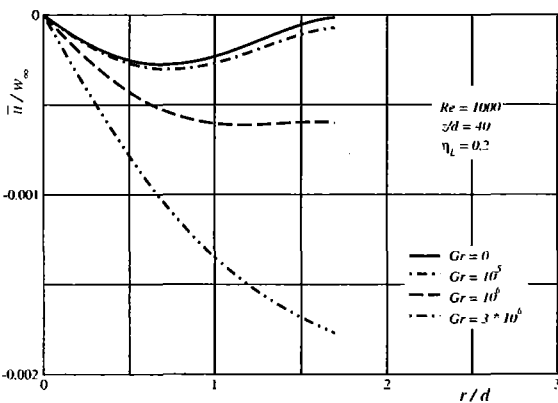


Abbildung 29: Quergeschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen GRASHOF-Zahlen.

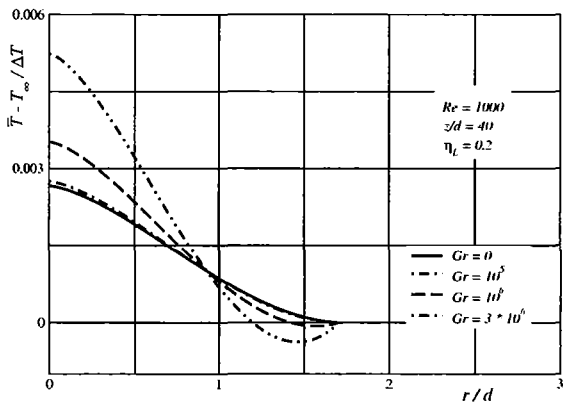


Abbildung 30: Temperaturverteilungen bei verschiedenen GRASHOF-Zahlen.

4.3 Gültigkeitsbereiche der Lösung

Der Gültigkeitsbereich der in diesem Beitrag entwickelten Näherungslösung zur Beschreibung des fernen Nachlaufs fordert gewisse Einschränkungen bei der Wahl der Parameter Re , η_L , Gr und $\frac{z}{d}$. Diese Einschränkungen werden im folgenden qualitativ diskutiert und, soweit möglich, quantitativ angegeben.

Die Grenzschicht-Approximation entsteht durch eine Betrachtung großer REYNOLDS-Zahlen. Die in Kapitel 2.2.5 gestellte Forderung $O\left(\frac{1}{Re}\right) \ll O(\varepsilon)$ führt mit $\varepsilon = \eta_L^2$ (Gleichung (65)) zu

$$Re \gg \frac{1}{\eta_L^2}. \quad (135)$$

Damit der Auftrieb erst in der zweiten Näherung betrachtet werden kann und somit die Gleichungen durch einen vertretbaren mathematischen Aufwand lösbar werden, wird ein *schwacher Auftrieb* vorausgesetzt, d.h. es muß $O\left(\frac{Gr}{\varepsilon Re^2} \bar{\Theta}\right) \leq O(\tilde{\varepsilon})$ sein (Kapitel 3.1). Mit den Bedingungen $O(\bar{\Theta}) = O\left(\frac{1}{Re}\right)$ (Kapitel 2.2.5), $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ (Gleichung (41)) und $\varepsilon = \eta_L^2$ (Gleichung (65)) ergibt sich eine Begrenzung der GRASHOF-Zahl zu

$$Gr \ll \eta_L^2 Re^3. \quad (136)$$

Sowohl die Grenzschicht-Approximation als auch auftretende Rückströmgebiete direkt hinter der Kugel fordern eine Betrachtung des Nachlaufs in einiger Entfernung von der Kugel. Weiterhin ist die Reihenentwicklung für den Nachlauf (Gleichungen (42 – 44)) nur für relativ kleine Abweichungen von der Außenströmung gültig. Aus $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Z^{\frac{2}{3}}} \ll 1$ (Gleichung (41)) folgt $1 \ll Z^{\frac{2}{3}}$, und mit $Z = \varepsilon \frac{z}{d}$ (Gleichung (26)) und $\varepsilon = \eta_L^2$ (Gleichung (65)) ergibt sich daraus eine Bedingung für den Mindestabstand von der Kugel zu $\frac{1}{\eta_L^{\frac{2}{3}}} \ll \left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Ein maximaler Abstand von der Kugel ist durch die Auftriebseffekte gefordert, da mit zunehmendem Abstand von der Kugel das Fluid immer mehr beschleunigt wird. Die Auftriebsterme in den Gleichungen (52) und (55) der zweiten Näherung dürfen aber nicht dominant werden, da sonst wiederum die Reihenentwicklung (42 – 44) ihre Gültigkeit verliert. Mit $O\left(\frac{Gr}{\varepsilon Re^2} \bar{\Theta}\right) \leq O(\tilde{\varepsilon})$ (Kapitel 3.1), $O(\bar{\Theta}) = O\left(\frac{1}{Re}\right)$ (Kapitel 2.2.5), $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Z^{\frac{2}{3}}}$ (Gleichung (41)) und $Z = \varepsilon \frac{z}{d}$ (Gleichung (26)) ergibt sich für den maximalen Abstand von der Kugel die Bedingung $\left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \eta_L^{\frac{2}{3}} \frac{Re^3}{Gr}$.

Zusammengefaßt lautet der gültige Bereich von $\left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{1}{\eta_L^{\frac{4}{3}}} \ll \left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \eta_L^{\frac{2}{3}} \frac{Re^3}{Gr}. \quad (137)$$

Der Ähnlichkeitsparameter η_L kann als Verhältnis von Nachlaufbreite und Mischungsweg interpretiert werden. Die Annahme, daß der Mischungsweg sich etwa in der Größenordnung von 20% der Nachlaufbreite bewegt, führt zu der Wahl

$$\eta_L = 0.2. \quad (138)$$

5 Zusammenfassung

Eine beheizte Kugel wird entgegen dem Schwerfeld von einem NEWTONSchen Fluid umströmt. Es bildet sich ein turbulenter Nachlauf aus, der in einiger Entfernung von der Kugel als im Mittel stationär und rotations-symmetrisch angesehen werden kann. Inhalt dieses Beitrags ist die mathematische Beschreibung des fernen Nachlaufs.

Ausgehend von den allgemeinen Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten werden durch Vereinfachungen, Anwendung von Modellen und einer Grenzschicht-Approximation Grenzschichtgleichungen mit deren Rand- und Integralbedingungen formuliert. Im einzelnen sind dies: REYNOLDS-Ansatz zur Beschreibung der turbulenten Strömung; Betrachtung als im Mittel stationäres Problem; Ausnutzung der Rotationssymmetrie; Vernachlässigung der viskosen Dissipation; Betrachtung des fernen Nachlaufs; integrale Bilanzen als Ersatz für die Randbedingungen an der Kugel; BOUSSINESQ-Approximation für Auftriebsterme; PRANDTLscher Mischungsweg-Ansatz als Turbulenzmodell; gleiche turbulente Austauschgrößen für Impuls und Wärme; separate Skalierung bei der Entdimensionierung; Grenzschicht-Approximation.

Die Grenzschichtgleichungen werden dann durch Potenzansätze für die Strömungsgrößen in zwei Gleichungssysteme aufgespalten. Das Gleichungssystem in führender Ordnung (erste Näherung) beschreibt eine reine Nachlaufströmung und einen passiven Wärmetransport. Das Gleichungssystem in nächster Ordnung (zweite Näherung) beschreibt Auftriebsterme und nichtlineare Korrekturterme. Durch Ähnlichkeitstransformationen werden die partiellen Differentialgleichungssysteme in gewöhnliche überführt.

Das Gleichungssystem der führenden Ordnung wird mittels eines verallgemeinerten Lösungsansatzes analytisch gelöst. Die Lösungen werden diskutiert und mit vorhandener

Literatur des rotationssymmetrischen und des ebenen Falls verglichen.

Das Gleichungssystem der nächsten Ordnung wird durch die Ähnlichkeitstransformation nochmals in zwei Gleichungssysteme separiert, wobei ein Gleichungssystem die Auftriebssterme berücksichtigt und das andere die nichtlinearen Inhomogenitäten. Diese Gleichungssysteme werden numerisch gelöst und mit dem Gleichungssystem der führenden Ordnung superponiert. Abschließend werden die Lösungen diskutiert und deren Gültigkeitsbereich angegeben.

A Anmerkungen

A1)

Um das Nachlaufgebiet herum ($z \gg 0$) wird sich als Folge des Auffüllens der Nachlaufdelle eine konstante Querströmungsgeschwindigkeit u zur Rotationsachse hin einstellen. Diese setzt sich aufgrund der vorausgesetzten Inkompressibilität des Fluids bis zu $r \rightarrow \infty$ fort. Hieraus folgt unmittelbar für $r \rightarrow \infty$ die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow 0$, also $u \rightarrow \text{konstant}$ und nicht $u \rightarrow 0$, wie es bei einem realen Fluid (Trägheit, Viskosität, geringe Kompressibilität) zu erwarten wäre.

A2)

1.) Umformung der gemischten Produkte der Schwankungsgrößen unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung der Schwankungsgrößen $\frac{u'}{r} + \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$ und der Produktregel der Differentiation am Beispiel der NAVIER-STOKES-Gleichung in z -Richtung:

$$\rho \left(\overline{u \frac{\partial w'}{\partial r}} + \overline{w \frac{\partial w'}{\partial z}} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial r}} + \overline{w' \frac{\partial w'}{\partial z}} \right) = - \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{w}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} \right] - \rho g ,$$

$$\begin{aligned} \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial r}} + \overline{w' \frac{\partial w'}{\partial z}} &= \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial r} - \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial r}} + \frac{\partial \overline{(w'w')}}{\partial z} - \overline{w' \frac{\partial w'}{\partial z}} \\ &= \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{(w'w')}}{\partial z} - \overline{w' \left(\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} + \frac{\overline{u'w'}}{r} - \frac{\overline{u'w'}}{r} \\ &= \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{(w'w')}}{\partial z} - \underbrace{\overline{w' \left(\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{u'}{r} \right)}}_{=0} + \frac{\overline{u'w'}}{r} \\ &= \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{(w'w')}}{\partial z} + \frac{\overline{u'w'}}{r} . \end{aligned}$$

2.) Da die ungestörte Anströmung ohne Geschwindigkeitsgradienten aus dem Unendlichen kommt, muß sie eine laminare Strömung sein. Denn jede vorhandene Turbulenz in einer Strömung wird ohne Energiezufuhr nach einer endlichen Lauflänge dissipiert sein. Das bedeutet, es existieren keine Schwankungsgrößen f_{∞}' , die Strömungsgrößen f_{∞} werden durch die zeitliche Mittelung nicht verändert.

A3)

Die Aufstellung der integralen Impulsbilanz geschieht mit folgenden Ansätzen (Abbildungen 3 und A1):

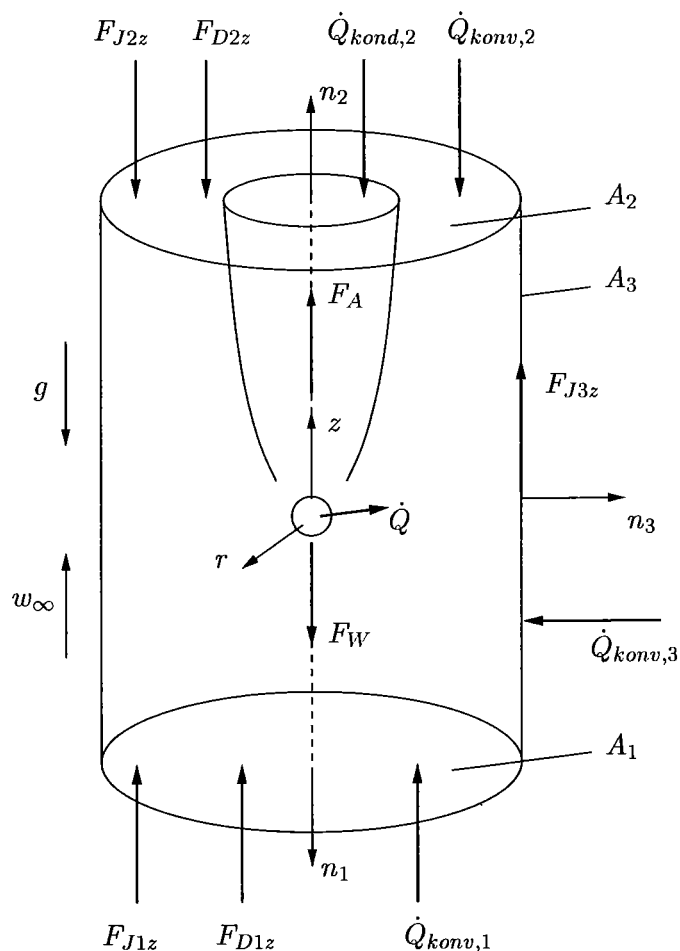


Abbildung A1: Kräfte und Wärmeströme am Kontrollraum.

Ansatz der Druckkräfte nach ZIEREP (1987):

$$\vec{F}_D = - \int_A p \vec{n} dA .$$

Zylinderboden (A_1):

$$\vec{F}_{D1} = -2\pi \int_0^\infty r p_\infty \vec{n} dr \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{D1r} = 0 \quad , \quad F_{D1z} = -2\pi \int_0^\infty r (-p_\infty) dr .$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderdeckel } (A_2) : \quad \vec{F}_{D2} &= -2\pi \int_0^\infty r p \vec{n} dr \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow F_{D2r} = 0 \quad , \quad F_{D2z} = -2\pi \int_0^\infty r p dr . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylindermantel } (A_3) : \quad \vec{F}_{D3} &= -2\pi r \int_{-\infty}^z p_\infty \vec{n} dz \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow F_{D3r} = -2\pi r \int_{-\infty}^z p_\infty dz \quad , \quad F_{D3z} = 0 . \end{aligned}$$

Ansatz der Impulskräfte nach ZIEREP (1987):

$$\vec{F}_J = - \int_A \rho \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA \quad \text{mit} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderboden } (A_1) : \quad \vec{F}_{J1} &= -2\pi \rho \int_0^\infty r \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dr \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\vec{w} \cdot \vec{n}) = \begin{pmatrix} w_\infty \\ u_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -w_\infty \\ &\Rightarrow F_{J1r} = 0 \quad , \quad F_{J1z} = -2\pi \rho \int_0^\infty r w_\infty (-w_\infty) dr . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderdeckel } (A_2) : \quad \vec{F}_{J2} &= -2\pi \rho \int_0^\infty r \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dr \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\vec{w} \cdot \vec{n}) = \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w \\ &\Rightarrow F_{J2r} = -2\pi \rho \int_0^\infty r u w dr \quad , \quad F_{J2z} = -2\pi \rho \int_0^\infty r w w dr . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylindermantel } (A_3) : \quad \vec{F}_{J3} &= -2\pi r \rho \int_{-\infty}^z \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dz \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\vec{w} \cdot \vec{n}) = \begin{pmatrix} w_\infty \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u \\ &\Rightarrow F_{J3r} = -2\pi r \rho \int_{-\infty}^z u u dz \quad , \quad F_{J3z} = -2\pi r \rho \int_{-\infty}^z w_\infty u dz . \end{aligned}$$

Ansatz der Widerstandskraft:

$$F_w = -\frac{\rho}{2} w_\infty^2 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 c_w .$$

Ansatz der Auftriebskraft:

$$\begin{aligned} dF_A &= \Delta \rho g dV = (\rho_\infty - \rho) g dV = (\rho_\infty - \rho) g 2\pi r dr dz \\ \Rightarrow F_A &= \int_A dF_A = 2\pi g \int_{-\infty}^z \int_0^\infty r (\rho_\infty - \rho) dr dz . \end{aligned}$$

⇒ Integrale Impulsbilanz nach ZIEREP (1987):

$$0 = \vec{F}_J + \sum \vec{F}_a = \underbrace{\sum_{i=1}^3 F_{Dir}}_{=0} + \sum_{i=1}^3 F_{Diz} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 F_{Jir}}_{=0} + \sum_{i=1}^3 F_{Jiz} + F_w + F_A .$$

A4)

Die Aufstellung der integralen Wärmebilanz geschieht mit folgenden Ansätzen (Abbildungen 3 und A1):

Konvektiver Wärmestrom ($\dot{Q}_{konv} = \rho c_p T w A$, $w \perp A$; Transport der am Fluidteilchen gebundenen Wärme):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{konv} &= -\rho c_p T (\vec{w} \cdot \vec{n}) A = -\int_A \rho c_p T (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA \\ &= -\rho c_p 2\pi \int_0^\infty T (\vec{w} \cdot \vec{n}) r dr \quad \text{bzw.} \quad \dot{Q}_{konv} = -\rho c_p 2\pi r \int_{-\infty}^z T (\vec{w} \cdot \vec{n}) dz . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderboden (A}_1\text{)} : \quad \dot{Q}_{konv,1} &= -\rho c_p 2\pi \int_0^\infty r T_\infty \begin{pmatrix} w_\infty \\ u_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dr \\ &= \rho c_p 2\pi \int_0^\infty r T_\infty w_\infty dr . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderdeckel}(A_2) : \quad \dot{Q}_{konv,2} &= -\rho c_p 2\pi \int_0^\infty r T \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dr \\ &= -\rho c_p 2\pi \int_0^\infty r T w dr . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylindermantel}(A_3) : \quad \dot{Q}_{konv,3} &= -\rho c_p 2\pi r \int_{-\infty}^z T_\infty \begin{pmatrix} w_\infty \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz \\ &= -\rho c_p 2\pi r \int_{-\infty}^z T_\infty u dz . \end{aligned}$$

Konduktiver Wärmestrom ($\dot{Q}_{kond} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} A$, $z \perp A$; reine Wärmeleitung aufgrund eines Temperaturgradienten senkrecht zur Kontrollraumfläche):

$$\dot{Q}_{kond} = (\vec{n} \cdot \vec{e}) \lambda 2\pi \int_0^\infty r \frac{\partial T}{\partial z} dr \quad \text{bzw.} \quad \dot{Q}_{kond} = (\vec{n} \cdot \vec{e}) \lambda 2\pi r \int_{-\infty}^z \frac{\partial T}{\partial r} dz \quad \text{mit} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderboden}(A_1) : \quad \dot{Q}_{kond,1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda 2\pi \int_0^\infty r \frac{\partial T_\infty}{\partial z} dr \\ &= -\lambda 2\pi \int_0^\infty r \underbrace{\frac{\partial T_\infty}{\partial z}}_{=0} dr = 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylinderdeckel}(A_2) : \quad \dot{Q}_{kond,2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda 2\pi \int_0^\infty r \frac{\partial T}{\partial z} dr \\ &= \lambda 2\pi \int_0^\infty r \frac{\partial T}{\partial z} dr . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zylindermantel}(A_3) : \quad \dot{Q}_{kond,3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda 2\pi r \int_{-\infty}^z \frac{\partial T_\infty}{\partial r} dz \\ &= \lambda 2\pi r \int_{-\infty}^z \underbrace{\frac{\partial T_\infty}{\partial r}}_{=0} dz = 0 . \end{aligned}$$

Durch Beheizung der Kugel dem Fluid zugeführter Wärmestrom: \dot{Q} .

\Rightarrow Integrale Wärmebilanz:

$$0 = \dot{Q} + \sum_{i=1}^3 \dot{Q}_{konv,i} + \sum_{i=1}^3 \dot{Q}_{kond,i} .$$

A5)

Elimination des statischen Druckanteils:

- Erhaltungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 p &= p_{sta} + p_{dyn} = \overline{p_{sta}} + p'_{sta} + \overline{p_{dyn}} + p'_{dyn} \\
 \bar{p} &= \overline{p_{sta}} + \overline{p_{dyn}} \\
 \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (\overline{p_{sta}} + \overline{p_{dyn}}) = \underbrace{\frac{\partial \overline{p_{sta}}}{\partial r}}_{=0} + \frac{\partial \overline{p_{dyn}}}{\partial r} = \frac{\partial \overline{p_{dyn}}}{\partial r} \\
 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (\overline{p_{sta}} + \overline{p_{dyn}}) = \frac{\partial \overline{p_{sta}}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{p_{dyn}}}{\partial z} = \frac{\partial(\varrho_{\infty}(-g)z)}{\partial z} + \frac{\partial \overline{p_{dyn}}}{\partial z} \\
 &= -\varrho_{\infty}g + \frac{\partial \overline{p_{dyn}}}{\partial z} .
 \end{aligned}$$

- Integrale Bilanzen:

$$\begin{aligned}
 p_{\infty} - \bar{p} &= (p_{sta,\infty} + p_{dyn,\infty}) - (\overline{p_{sta}} + \overline{p_{dyn}}) \\
 &= -\varrho_{\infty}gz + p_{dyn,\infty} + \varrho_{\infty}gz - \overline{p_{dyn}} \\
 &= p_{dyn,\infty} - \overline{p_{dyn}} .
 \end{aligned}$$

A6)

Aufstellen der Massenstrombilanz am Kontrollraum (Abbildung 3):

$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= \frac{m}{t} = \frac{\varrho_{\infty}V}{t} = \varrho_{\infty}A |\bar{w}| = \varrho_{\infty} \int_A |\bar{w}| dA \\
 \Rightarrow \dot{m} &= -\varrho_{\infty} \int_A (\bar{w} \cdot \bar{n}) dA \quad \text{mit} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{u} \end{pmatrix} . \\
 \text{Zylinderboden } (A_1) : \quad \dot{m}_1 &= -\varrho_{\infty} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} w_{\infty} \\ u_{\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} r\pi dr = \varrho_{\infty}\pi \int_0^{\infty} r w_{\infty} dr . \\
 \text{Zylinderdeckel } (A_2) : \quad \dot{m}_2 &= -\varrho_{\infty} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r\pi dr = -\varrho_{\infty}\pi \int_0^{\infty} r \bar{w} dr . \\
 \text{Zylindermantel } (A_3) : \quad \dot{m}_3 &= -\varrho_{\infty} \int_{-\infty}^z \begin{pmatrix} w_{\infty} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r\pi dz = -\varrho_{\infty}r\pi \int_{-\infty}^z \bar{u} dz .
 \end{aligned}$$

$$0 = \sum_{i=1}^3 \dot{m}_i \Rightarrow \dot{m}_3 = -(\dot{m}_1 + \dot{m}_2)$$

$$-\varrho_\infty r \pi \int_{-\infty}^z \bar{u} dz = -\varrho_\infty \pi \int_0^\infty r (w_\infty - \bar{w}) dr \quad \left[\frac{kg}{s} \right]$$

$$r \int_{-\infty}^z \bar{u} dz = \int_0^\infty r (w_\infty - \bar{w}) dr .$$

A7)

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 ,$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in r -Richtung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\text{konvektiver Term}} = \underbrace{-\frac{1}{\varrho_\infty} \frac{\partial \bar{p}_{dyn}}{\partial r}}_{\text{Druckterm}} + \underbrace{\frac{\mu}{\varrho_\infty} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right)}_{\text{molekularer Reibungsterm}}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{\overline{u'^2}}{r} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right)}_{\text{turbulenter Reibungsterm}} ,$$

NAVIER-STOKES-Gleichung in z -Richtung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}}_{\text{konvektiver Term}} = \underbrace{-\frac{1}{\varrho_\infty} \frac{\partial \bar{p}_{dyn}}{\partial z}}_{\text{Druckterm}} + \underbrace{\frac{\mu}{\varrho_\infty} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right)}_{\text{molekularer Reibungsterm}}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{\overline{u'w'}}{r} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right)}_{\text{turbulenter Reibungsterm}} + \underbrace{\alpha g (\bar{T} - T_\infty)}_{\text{Auftriebsterm}} ,$$

Energiegleichung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}}_{\text{konvektiver Wärmetransport}} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho_{\infty} c_p} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right)}_{\text{molekularer Wärmetransport}} - \underbrace{\left(\frac{\overline{u'T'}}{r} + \frac{\partial(\overline{u'T'})}{\partial r} + \frac{\partial(\overline{w'T'})}{\partial z} \right)}_{\text{turbulenter Wärmetransport}},$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf ($z \gg 0$):

$$\begin{aligned} r = 0 & : \quad \bar{u} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ r \rightarrow \infty & : \quad \bar{w} \rightarrow w_{\infty}, \quad \bar{T} \rightarrow T_{\infty}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned}$$

integrale Impulsbilanz:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\rho_{\infty}} \int_0^{\infty} r (p_{dyn,\infty} - \overline{p_{dyn}}) dr + \int_0^{\infty} r (w_{\infty} \bar{w} - \bar{w}^2 + \underbrace{\overline{w'^2} - \overline{w'^2}}_{=0^*}) dr \\ - r \int_{-\infty}^z \underbrace{\overline{w'_{\infty} u'_{\infty}}}_{=0^*} dz - \frac{c_w}{16} w_{\infty}^2 d^2 + \alpha g \int_{-\infty}^z \int_0^{\infty} r (\bar{T} - T_{\infty}) dr dz, \end{aligned}$$

integrale Wärmebilanz:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\dot{Q}}{2\pi \rho_{\infty} c_p} + \int_0^{\infty} r (\bar{w} T_{\infty} - \overline{wT}) dr + \int_0^{\infty} r (\underbrace{\overline{w'_{\infty} T'_{\infty}}}_{=0^*} - \overline{w'T'}) dr \\ + \frac{\lambda}{\rho_{\infty} c_p} \int_0^{\infty} r \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} dr - r \int_{-\infty}^z \underbrace{\overline{u'_{\infty} T'_{\infty}}}_{=0^*} dz. \end{aligned}$$

*: Die an der Mantelfläche des Kontrollraums betrachteten Schwankungsgrößen f_{∞}' sind natürlich gleich Null, da die ungestörte Außenströmung eine laminare Strömung ist (s. A2)). Mathematisch fallen diese Terme auch bei der Einführung des Mischungswegmodells heraus, weil die dabei benötigten Gradienten $\frac{\partial f_{\infty}}{\partial r} = 0$ sind.

A8)

Es sollte an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß der PRANDTLsche Mischungsweg-Ansatz im Zentrum des Nachlaufs (Rotationsachse) und zum Rand des Nachlaufs hin zu Problemen führen könnte, denn an beiden Orten wird der Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$ zu Null. Damit sind an der Rotationsachse keine turbulenten Schwankungen vorhanden und die in der Grenzschicht-Approximation durchgeführte Vernachlässigung der molekularen Reibungsterme gegenüber den turbulenten nicht erlaubt.

A9)

Der Zusammenhang von turbulenter PRANDTL-Zahl Pr_t und Mischungsweglänge l stellt sich nach SCHLICHTING (1982) wie folgt dar:

$$Pr_t = \frac{A_\tau}{A_q} = \frac{\tau_t c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} (-qt)} = \frac{\rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} c_p \rho l_q^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}} = \left(\frac{l_m}{l_q} \right)^2 \simeq 1$$

$$\Rightarrow l_m \simeq l_q \simeq l .$$

A10)

1.) Um dimensionslose Größen in der Größenordnung $O(1)$ zu erhalten, muß man gewisse Kenntnisse über das Aussehen des Stromfeldes besitzen. Diese Kenntnisse (hier: sehr langer, schmaler Nachlauf \rightarrow Grenzschichtcharakter) liefern Entdimensionierungsvorschriften, welche z.B. die Größen R , Z , \bar{U} und \bar{W} tatsächlich in der gewünschten Größenordnung erzeugen. Beim Druck, bei der Mischungsweglänge und bei der Temperaturdifferenz z.B. wird sich aber während der Grenzschichtapproximation herausstellen, daß die entdimensionierten Größen *nicht* von der Größenordnung $O(1)$ sind, sondern kleiner ausfallen.

2.) In diesem Beitrag wird der Begriff der *Größenordnung* in klassischem bzw. anschaulichem Sinne verwendet, wie dies auch PRANDTL bei der Aufstellung der Grenzschichtgleichungen im Jahr 1904 tat [PRANDTL 1904]. D.h. zwei Terme sollen von gleicher

Größenordnung sein, wenn deren Zahlenwerte sich nicht deutlich voneinander unterscheiden.

Legt man die sehr viel später entstandene asymptotische Theorie zugrunde, dann wird der Begriff der *Größenordnung* mathematisch streng definiert als *asymptotische Größenordnung*. Diese vergleicht das Verhalten zweier Funktionen von ε (z.B. $f(\varepsilon)$ und $\delta(\varepsilon)$) bei deren Grenzwertbildung für $\varepsilon \rightarrow 0$. $f(\varepsilon)$ und $\delta(\varepsilon)$ sind genau dann von gleicher *asymptotischer Größenordnung*, wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = \textit{konstant} < \infty$$

gilt [GERSTEN & HERWIG 1992, S. 124 ff.][SCHNEIDER 1978, S. 63 ff.].

A11)

Die Mischungsweglänge l wird proportional zur Nachlaufbreite b angenommen. Dabei wird das Verhältnis von Mischungsweglänge zur Nachlaufbreite aus Experimenten im ebenen Fall (Zylinderumströmung) von SCHLICHTING mit $l/b = 0.18$ angegeben [SCHLICHTING 1982, S. 753, S. 760, S. 763]. D.h. l und b sind von der gleichen Größenordnung.

Für den hier vorliegenden achsensymmetrischen Fall erhält SWAIN die gleiche Funktion für die Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf wie SCHLICHTING für den ebenen Fall [SCHLICHTING 1982, S. 763][SWAIN 1929]. Lediglich die Nachlaufbreite fällt bei gleichem Abstand z vom umströmten Körper im achsensymmetrischen Fall kleiner aus (Zylinder: $b \propto z^{1/2}$, Kugel: $b \propto z^{1/3}$). Die Annahme, daß das Verhältnis l/b im achsensymmetrischen Fall auch konstant und ähnlich dem des ebenen Falles ist, liegt somit zunächst nahe.

REICHARDT findet aber für den achsensymmetrischen Fall je nach Form des umströmten Körpers unterschiedliche Funktionen der Geschwindigkeitsverteilungen und Turbulenzstärken [REICHARDT & ERMSHAUS 1961]. Er macht aber keine Aussagen über den Mischungsweg. Dies führt eventuell dazu, daß l/b je nach umströmter Körperform unterschiedlich ausfällt. Diese Unterschiede führen aber nicht zu verschiedenen Größenordnungen, sodaß $O(l) = O(b)$ auch für den achsensymmetrischen Fall angenommen werden darf.

A12)

Entdimensionierung der Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= \frac{\bar{U}u_0}{Rd} + \frac{\partial (\bar{U}u_0)}{\partial (Rd)} + \frac{\partial (\bar{W}w_\infty)}{\partial \left(\frac{Zd}{\varepsilon}\right)} \\ &= \frac{u_0}{d} \frac{\bar{U}}{R} + \frac{u_0}{d} \frac{\partial \bar{U}}{\partial R} + \frac{\varepsilon w_\infty}{d} \frac{\partial \bar{W}}{\partial Z} = 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\bar{U}}{R}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial \bar{U}}{\partial R}}_{O(1)} + \frac{\varepsilon w_\infty}{u_0} \underbrace{\frac{\partial \bar{W}}{\partial Z}}_{O(1)} &= 0. \end{aligned}$$

$\frac{\varepsilon w_\infty}{u_0}$ muß also von $O(1)$ sein, damit die Gleichung erfüllt ist. D.h. es muß $u_0 \sim \varepsilon w_\infty$ sein, was mit der Wahl $\varepsilon w_\infty = u_0$ erfüllt wird.

A13)

Dimensionslose Kennzahlen können als Verhältnisse der im Strömungsfeld auftretenden Kräfte oder Energien interpretiert werden [ZIEREP 1991 S. 39 ff.]:

$$\text{REYNOLDS-Zahl: } Re \sim \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}},$$

$$\text{PRANDTL-Zahl: } Pr \sim \frac{\text{Impulsenergie transportkoeffizient}}{\text{Wärmeenergie transportkoeffizient}},$$

$$\text{GRASHOF-Zahl: } Gr \sim \frac{\text{Trägheitskraft} * \text{Auftriebskraft}}{\text{Reibungskraft} * \text{Reibungskraft}},$$

$$\text{Mischkonvektionsparameter: } \frac{Gr}{Re^2} \sim \frac{\text{Auftriebskraft}}{\text{Trägheitskraft}}.$$

A14)

Durch die Einführung der asymptotischen Ansätze für die dimensionslosen Strömungsgrößen \bar{W} , \bar{U} und $\bar{\Theta}$ werden im folgenden ausschließlich deren Abweichungen von der ungestörten Außenströmung betrachtet (\bar{W}_i , \bar{U}_i , $\bar{\Theta}_i$ für $i = 0, 1$).

A15)

Selbstähnliche bzw. affine Funktionen zeichnen sich durch dieselbe Beschreibung ihrer Form aus (Formfunktion). Die Amplituden dieser Funktionen unterscheiden sich in der Regel und werden durch unterschiedliche Amplitudenfunktionen berücksichtigt.

Es zeigt sich später (Kapitel 3.2.2), daß hier die Aufteilung in Form- und Amplitudenfunktionen nach den Gleichungen (58 – 60) zunächst nur formalen Charakter hat, da die Formfunktionen nochmals in Form- und Amplitudenanteil unterteilt werden. Dies kommt daher, daß wegen $f_0 = h_0 = 1$ (wg. $p = s = 0$) die unterschiedlichen Amplituden von \overline{W}_0 und $\overline{\Theta}_0$ in den Formfunktionen berücksichtigt werden müssen.

A16)

Setzt man statt f_0 die Amplitudenfunktionen g_0 oder h_0 gleich zu Eins, verändert sich das entstehende Differentialgleichungssystem und die Ähnlichkeitsvariable η nicht. D.h. die Formfunktionen als Lösungen der Differentialgleichungen sind immer dieselben. Die auftretenden Änderungen der Amplitudenfunktionen würden dann durch den ebenfalls veränderten Entwicklungsparameter $\tilde{\varepsilon}$ entsprechend ausgeglichen.

Um tatsächlich ein $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ zu gewährleisten, ist auch eine explizite Wahl des Exponenten m möglich. Z. B. mit der Wahl $m = 2$ ergeben sich die restlichen Exponenten von Z zu

$$n = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}, \quad p = s = \frac{4}{3} \quad (\text{erste Näherung (63)}),$$

$$x = \frac{11}{3}, \quad u = \frac{6}{3}, \quad t = v = \frac{8}{3}, \quad w = y = \frac{13}{3} \quad (\text{zweite Näherung (85)}),$$

wodurch wieder dieselben gewöhnlichen Differentialgleichungen entstehen.

A17)

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\eta}{3} F_0' + \frac{2}{3} F_0 + G_0' + \frac{1}{\eta} G_0 = 0,$$

NAVIER–STOKES–Gleichung:

$$2 \frac{\eta_L^2}{\varepsilon} F_0' F_0'' + \frac{\eta_L^2}{\varepsilon \eta} F_0'^2 - \frac{\eta}{3} F_0' - \frac{2}{3} F_0 = 0,$$

Energiegleichung:

$$\frac{\eta_L^2}{\varepsilon} F_0' H_0'' + \frac{\eta_L^2}{\varepsilon} H_0' F_0'' + \frac{\eta_L^2}{\varepsilon \eta} F_0' H_0' - \frac{\eta}{3} H_0' - \frac{2}{3} H_0 = 0 ,$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : G_0 = 0 , \quad F_0' = 0 , \quad H_0' = 0 \quad (\text{Symmetrie}) , \\ \eta \rightarrow \infty & : F_0 \rightarrow 0 , \quad H_0 \rightarrow 0 , \quad G_0' \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}) , \end{aligned}$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^{\infty} \eta F_0 \, d\eta = \frac{c_w}{16} ,$$

integrale Wärmebilanz:

$$Re \int_0^{\infty} \eta H_0 \, d\eta = 1 .$$

A18)

- Dimensionslose Lösungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \overline{W}_0 &= \frac{1}{27} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \frac{R^{\frac{3}{2}}}{Z^{\frac{1}{2}}} \right)^2 , \\ \overline{U}_0 &= -\frac{R}{81 Z} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \frac{R^{\frac{3}{2}}}{Z^{\frac{1}{2}}} \right)^2 , \\ \overline{\Theta}_0 &= \frac{16}{27 Re c_w} \left(\left(\frac{105 c_w}{8} \right)^{\frac{3}{10}} - \frac{R^{\frac{3}{2}}}{Z^{\frac{1}{2}}} \right)^2 , \end{aligned}$$

mit dem Rand des turbulenten Nachlaufgebietes bei

$$R_R = \left(\frac{c_w 105}{8} \right)^{\frac{1}{5}} Z^{\frac{1}{3}} .$$

- Dimensionslose Strömungsgrößen:

$$\overline{W} = 1 - \frac{\overline{W}_0}{Z^{\frac{2}{3}}} - \dots , \quad \overline{U} = \frac{\overline{U}_0}{Z^{\frac{2}{3}}} + \dots , \quad \overline{\Theta} = \frac{\overline{\Theta}_0}{Z^{\frac{2}{3}}} + \dots .$$

A19)

Das Gleichungssystem a) berücksichtigt auf den rechten Seiten die Auftriebsterme, das Gleichungssystem b) die übrigen Inhomogenitäten.

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\eta}{3}F'_{1a} - \frac{1}{3}F_{1a} + G'_{1a} + \frac{1}{\eta}G_{1a} = 0 ,$$

NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\frac{\eta}{3}F'_{1a} - \frac{1}{3}F_{1a} - \frac{2}{\eta}F'_0F'_{1a} - 2F'_0F''_{1a} - 2F''_0F'_{1a} = \frac{Gr}{Re^2\eta_L^2}H_0 ,$$

Energiegleichung:

$$\frac{\eta}{3}H'_{1a} - \frac{1}{3}H_{1a} - \frac{1}{\eta}F'_0H'_{1a} - (F'_0H'_{1a})' - \frac{1}{\eta}H'_0F'_{1a} - (H'_0F'_{1a})' = 0 ,$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : G_{1a} = 0 , \quad F'_{1a} = 0 , \quad H'_{1a} = 0 \quad (\text{Symmetrie}) , \\ \eta \rightarrow \infty & : F_{1a} \rightarrow 0 , \quad H_{1a} \rightarrow 0 , \quad G'_{1a} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}) , \end{aligned}$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^{\infty} \eta F_{1a} d\eta = - \frac{Gr}{Z Re^2 \eta_L^2} \int_{-\infty}^Z \int_0^{\infty} \eta H_0 d\eta dZ ,$$

integrale Wärmebilanz:

$$\int_0^{\infty} \eta H_{1a} d\eta = 0 .$$

b) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\eta}{3}F'_{1b} + \frac{4}{3}F_{1b} + G'_{1b} + \frac{1}{\eta}G_{1b} = 0 ,$$

NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\frac{\eta}{3}F'_{1b} + \frac{4}{3}F_{1b} - \frac{2}{\eta}F'_0F'_{1b} - 2F'_0F''_{1b} - 2F''_0F'_{1b} = \frac{2}{3}F_0^2 + \frac{\eta}{3}F_0F'_0 + G_0F'_0 ,$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{3} H'_{1b} + \frac{4}{3} H_{1b} - \frac{1}{\eta} F'_0 H'_{1b} - (F'_0 H'_{1b})' - \frac{1}{\eta} H'_0 F'_{1b} - (H'_0 F'_{1b})' \\ = \frac{2}{3} F_0 H_0 + \frac{\eta}{3} F_0 H'_0 + G_0 H'_0, \end{aligned}$$

Randbedingungen im fernen Nachlauf:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : G_{1b} = 0, \quad F'_{1b} = 0, \quad H'_{1b} = 0 \quad (\text{Symmetrie}), \\ \eta \rightarrow \infty & : F_{1b} \rightarrow 0, \quad H_{1b} \rightarrow 0, \quad G'_{1b} \rightarrow 0 \quad (\text{Außenfeld}), \end{aligned}$$

integrale Impulsbilanz:

$$\int_0^{\infty} \eta F_{1b} \, d\eta = \int_0^{\infty} \eta F_0^2 \, d\eta,$$

integrale Wärmebilanz:

$$\int_0^{\infty} \eta H_{1b} \, d\eta = \int_0^{\infty} \eta F_0 H_0 \, d\eta.$$

A20)

Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung kann generell durch geeignete Substitutionen in n Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden. Diese Überführung ist notwendig, da in der Regel die Routinen der mathematischen Programmbibliotheken die Formulierung

$$f' = f(f)$$

zur Integration benötigen [EHRHARD 2000, Anhang].

A21)

Für die verschiedenen REYNOLDS-Zahlen ergeben sich aus dem hier verwendeten c_w/Re -Diagramm von SCHLICHTING leicht unterschiedliche c_w -Werte [SCHLICHTING 1982, S. 17] ($c_w(Re = 500) \simeq 0.6$, $c_w(Re = 1000) \simeq 0.5$, $c_w(Re = 10000) \simeq 0.4$). Wegen der Ableseungenauigkeiten und leichter Differenzen von c_w/Re -Diagrammen aus unterschiedlicher Literatur wird überall mit $c_w = 0.5$ gerechnet.


```

51  y6beg = (y6un+y6ob)/2.0d00
ccc
cccccccc Startwerte fuer y(i) (linke Integrationsgrenze) ccccccccccccccccccc
ccc
      ip   = 21
      npr  = 200
      neq  = 7
ccc
ccc  Abfangen von Division durch Null (k1, k2 in deriv_a)
ccc
      etabeg = 0.0d00 + 1.0d-06
      etaend = c2**(2.0d00/3.0d00) - 1.0d-06
ccc
      eps1 = 1.d-06
      eps2 = 1.d-06
ccc
      y(1) = 0.0d00
      y(2) = y2beg
      y(3) = 0.0d00
      y(4) = 0.0d00
      y(5) = 0.0d00
      y(6) = y6beg
      y(7) = 0.0d00
ccc
      call dc02ad(neq,etabeg,etaend,y,deriv_a,eps1,eps2,npr,ip)
ccc
      if(neq.gt.0) goto 96
      print*, ' ***** ERROR *****: from DCO2AD, IERR = ',neq
96  continue
ccc
      y3zw = y(3) - y3int
      y3zwd = dabs(y3zw)
      if (y3zwd.lt.1.0d-06) goto 6
      print*, 'iteration a y2:',y2beg,y(3)
      if (y3zw.lt.0.0d00) y2un = y2beg
      if (y3zw.gt.0.0d00) y2ob = y2beg
      rewind(unit=21)
      goto 5
ccc
6   continue
      y7zw = y(7) - y7int
      y7zwd = dabs(y7zw)
      if (y7zwd.lt.1.0d-06) goto 61
      print*, 'iteration a y6:',y6beg,y(7)
      if (y7zw.lt.0.0d00) y6un = y6beg
      if (y7zw.gt.0.0d00) y6ob = y6beg
      rewind(unit=21)
      goto 51
ccc
61  continue
      close(unit=21)
ccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Berechnung der zweiten Naeherung b: Fib, G1b, H1b ccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccc
ccc  F1b = y(2), G1b = y(4), H1b = y(6).
ccc
      y3int = ((c2**2.0d00)*cw)/(8.32d02)
      y7int = (c2**2.0d00)/(5.2d01*re)
      y2rb = 0.0d00
      y6rb = 0.0d00
      y2un = -1.0d00
      y2ob = 0.0d00
      y6un = -1.0d00
      y6ob = 0.0d00
ccc
      open(unit=22,file='erg_b.dat')
ccc
7   y2beg = (y2un+y2ob)/2.0d00
71  y6beg = (y6un+y6ob)/2.0d00
ccc
cccccccc Startwerte fuer y(i) (linke Integrationsgrenze) ccccccccccccccccc
ccc
      ip   = 22
      npr  = 200

```


C Verwendete Formelzeichen

Formelzeichen

A	m^2	Fläche
A_τ, A_q	$\frac{\text{J}}{\text{s}^2 \text{m}^2}$	Austauschgröße von Impuls, Wärme
b	m	Nachlaufbreite
c_p	$\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	spezifische Wärmekapazität
c_w	—	Widerstandsbeiwert
c_1, c_2, c_3	—	Konstanten
d	m	Kugeldurchmesser
\vec{e}	—	Einheitsvektor
f, g, h	—	Amplitudenfunktionen
F	N	Kraft
F, G, H	—	Formfunktionen
\vec{F}	N	resultierender Kraftvektor
g	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Fallbeschleunigung
Gr	—	GRASHOF-Zahl
l	m	Mischungsweglänge
l_m, l_q	m	kinematische, thermische Mischungsweglänge
L	—	dimensionsloser Mischungsweg
m	kg	Masse
$m, n, p, q, s,$ t, u, v, w, x, y	—	Exponenten von Z
\dot{m}	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Massenstrom
\vec{n}	—	Normalenvektor
p	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Druck
P	—	dimensionsloser Druck
Pr, Pr_t	—	PRANDTL-Zahl, turbulente PRANDTL-Zahl
\dot{Q}	$\frac{\text{J}}{\text{s}}$	thermischer Energiefluß
r, z	m	Zylinderkoordinaten radial, axial
R, Z	—	dimensionslose Zylinderkoordinaten

Re	—	REYNOLDS-Zahl
t	s	Zeit
T	K	Temperatur
ΔT	K	charakteristische Temperaturdifferenz
u, v, w	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Geschwindigkeitskomponenten in r -, φ -, z -Richtung
u_0	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	charakteristische Quergeschwindigkeit
U, W	—	dimensionslose Geschwindigkeiten
V	m^3	Volumen
\vec{w}	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	resultierender Geschwindigkeitsvektor
α	$\frac{1}{\text{K}}$	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$	—	kleine Parameter
η	—	dimensionslose Ähnlichkeitskoordinate
η_L	—	Ähnlichkeitsparameter für den Mischungsweg
Θ	—	dimensionslose Temperaturdifferenz
κ	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Temperaturleitfähigkeit
λ	$\frac{\text{J}}{\text{m s K}}$	Wärmeleitfähigkeit
μ	$\frac{\text{kg}}{\text{m s}}$	dynamische Viskosität
ν	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	kinematische Viskosität
ρ	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
φ	—	Zylinderkoordinate in Umfangsrichtung

Indizes

a	den Auftrieb betreffend
A	Auftrieb
b	die Inhomogenitäten betreffend
dyn	strömungsbedingt
D	Druck
i, j	laufende Indizes
J	Impuls

<i>kond</i>	konduktiv
<i>konv</i>	konvektiv
r, z, φ	in r -, z -, φ -Richtung
R	Nachlauftrand
<i>sta</i>	statisch
w	Widerstand
W	Wand
0, 1	erste, zweite Näherung
1, 2, 3	Zylinderboden, Zylinderdeckel, Zylindermantel
∞	ungestört vom Körper

Andere Zeichen

f	allgemeiner Platzhalter für andere Größen
$O(\)$	von der Größenordnung
'	Schwankungsgröße (Kapitel 1 und 2)
'	erste Ableitung nach η (ab Kapitel 3)
"	zweite Ableitung nach η
–	zeitlich gemittelt

D Literaturverzeichnis

- Bird, R. B., Stewart, W. E. und Lightfoot, E. N. (1960): *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Bronstein, I. N. und Semedjajew, K. A. (1981): *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M..
- Ehrhard, P. (2000): *Konvektion in offenen Systemen*, Skriptum der Vorlesung an der Universität Karlsruhe, SS 2000.
- Gersten, K. und Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- Grißbaum, R., Ehrhard, P. und Müller, U. (1994): *Asymptotische Lösung für die Nachlaufströmung eines beheizten Zylinders*, KfK 5324, Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- Harwell (1980): *DC02AD*, Harwell Subroutine Library Specification, 15th April 1980.
- Hoelle, C. (1998): *Experimentielle Untersuchung der turbulenten Nachlaufströmung über einer beheizten Kugel in vertikaler Anströmung*, FZKA 6116, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Lugt, H. J. (1979): *Wirbelströmung in Natur und Technik*, Braun Verlag, Karlsruhe.
- Müller, U. und Ehrhard, P. (1999): *Freie Konvektion und Wärmeübertragung*, C. F. Müller Verlag, Heidelberg.
- Prandtl, L. (1904): Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, *Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik*, Prandtl, L. und Betz, A., 1927 (Nachdruck), S. 484 – 491.
- Prandtl, L. (1925): Bericht über die Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Z. f. angew. Math. und Mech.* **5**, Heft 2, S. 136 – 139.
- Prandtl, L., Oswatitsch, K. und Wieghardt, K. (1990): *Führer durch die Strömungslehre*, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- Reichhardt, H. und Ermshaus, R. (1961): Impuls- und Wärmeübertragung in turbulenten Windschatten hinter Rotationskörpern, *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, S. 251 – 265.
- Sarnes, V. (1994): *Theoretische Untersuchung zum fernen Nachlauf über einem rotationssymmetrischen beheizten Körper*, Diplomarbeit am Inst. für Angew. Thermo- und Fluidodynamik, Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- Schlichting, H. (1930): Über das ebene Windschattenproblem, *Ingenieur-Archiv*, S. 533 – 571.
- Schlichting, H. (1982): *Grenzschicht-Theorie*, Braun Verlag, Karlsruhe.

- Schlichting, H. und Gersten, K. (1997): *Grenzschicht-Theorie*, Springer Verlag, Heidelberg.
- Schneider, W. (1978): *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- Siegel, U. und Ehrhard, P. (1996): *Theoretische Untersuchungen zum fernen, turbulenten Nachlauf über einem beheizten Zylinder*, FZKA 5859, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Swain, L. M. (1929): On the Turbulent Wake behind a Body of Revolution, *Proc. Roy. Soc. A* **125**, S. 647 – 659.
- Zierep, J. (1987): *Grundzüge der Strömungslehre*, Braun Verlag, Karlsruhe.
- Zierep, J. (1991): *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*, Braun Verlag, Karlsruhe.